



## **Une méthode utilisant les techniques neuronales pour le calcul rapide de la distribution verticale du bilan radiatif thermique terrestre.**

Frédérique Cheruy, Frederic Chevallier, Jean-Jacques Morcrette, Noëlle A. Scott,  
Alain Chédin

### **► To cite this version:**

Frédérique Cheruy, Frederic Chevallier, Jean-Jacques Morcrette, Noëlle A. Scott, Alain Chédin. Une méthode utilisant les techniques neuronales pour le calcul rapide de la distribution verticale du bilan radiatif thermique terrestre.. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Serie II, 1996, 322, pp.665-672. <hal-02954375>

**HAL Id: hal-02954375**

**<https://hal.science/hal-02954375v1>**

Submitted on 7 Oct 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Une méthode utilisant les techniques neuronales pour le calcul rapide de la distribution verticale du bilan radiatif thermique terrestre

Frédérique CHERUY, Frédéric CHEVALLIER, Jean-Jacques MORCRETTE,  
Noëlle A. SCOTT et Alain CHÉDIN

Laboratoire de Météorologie Dynamique du CNRS, École Polytechnique,  
91128 Palaiseau CEDEX, France;

J.-J. M. : European Center for Medium-Range Weather Forecasts, Shinfield Park,  
Reading RG2 9AX, England.

---

**Résumé.** On présente une nouvelle approche pour calculer le bilan radiatif ondes-longues du sommet de l'atmosphère à la surface. Cette approche, fondée sur des réseaux de neurones multi-couches, est très efficace et devrait permettre de bénéficier de la plus grande précision possible dans les calculs de transfert radiatif exigés pour les simulations numériques de prévision du temps ou les modèles de climat.

## *A fast method using neural networks for computing the vertical distribution of the thermal component of the Earth radiative budget*

**Abstract.** A new method for computing the longwave radiative budget from the top of the atmosphere to the surface is presented. This approach, relying on multi-layer neural networks, is very efficient and should allow for benefiting from the best achievable accuracy in the longwave radiative transfer computations needed either by the numerical weather prediction or by the climate models.

---

## *Abridged English Version*

Knowledge of the radiative properties of the atmosphere is fundamental for an improved understanding of the processes which influence the Earth's climate and can modulate its variations; Further progress in those questions requires the understanding of the couplings between the

---

Note présentée par Robert DAUTRAY.

thermodynamic structure of the atmosphere and the localization of the radiative energy sources and sinks within it. This requires to accurately but also rapidly derive the vertical components of the Earth's radiative budget.

Up to now, the latter requirements appeared to be somewhat contradictory. As a matter of fact, the accurate computation of the atmospheric radiative processes requires the use of line-by-line models, for which computing time consumption forbids the use for climate (global, long term) simulations.

Neural networks (NN) techniques have proved their ability to parameterize non-linear problems, in particular the multilayer perception (MLP) as defined by Rumelhart (1986). The optimization of a suitable structured neural network with the backpropagation learning method is comparable with fitting a parameterized function by error minimization using steepest descent methods. In practice, knowing the realizations of any function  $F$  defined of  $R^n$  that is to say pairs  $\{(X, Y = F(X))\}$ , it is possible to interpolate the function  $F$  which associates to any  $X$  an  $Y = F(X)$  at any desired accuracy with a network with one or more hidden layers consisting of a given number of neurons. The main interest of these techniques is their ability to generalize which, after the learning phase (error minimization) consists in establishing the correspondence between the input and the output parameters of "unknown" examples, that is to say examples not included in the learning dataset. We have investigated the possibility of elaborating a new generation of radiative transfer models for climate studies based on neural networks technique. We demonstrate that NN can be successfully used for accurately deriving the longwave radiative budget from the top of the atmosphere to the surface. We have explored two approaches differing in the input parameters. In the "classical" (CLAS) approach, the input parameters are the usual thermodynamic profiles (temperature, water vapor, ozone) and possibly other minor absorbing gas concentrations. In the "satellite" (SAT) approach, they are the infrared radiances of the High resolution Infrared Radiation Sounder (HIRS) instrument of the Tiros-N Operational Vertical Sounder (TOVS) which, aboard the National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA) operational satellites, observes the outgoing longwave radiation in 19 spectral channels distributed over the whole infrared spectrum. Arguments for the latter choice rely on the fact that these radiances contain information on vertically localized thermodynamic quantities which influence the upward and the downward longwave flux as well, and which the NN can extract independently of a preliminary inversion step of the satellite observations in order to retrieve the geophysical profiles. We used two models of the longwave radiative transfer for computing the flux profiles of the learning dataset: a narrow-band model (NBM: Morcrette, 1985) and a wide band model (WBM: Morcrette, 1991). These models differ widely in their computing time requirements. The NBM refers to 225 spectral intervals; it was validated through comparisons with the 4A line-by-line model (Scott, 1981) and was shown to give total fluxes within 1% of the results of the line-by-line model (Morcrette, 1984). The required computing times forbid its use for climate simulations. The WBM refers to 6 spectral intervals. This model was calibrated against the Geophysical Fluid Dynamics Laboratory (GFDL Schwarzkopf, 1991) line-by-line results (Morcrette, 1991). This code is fast enough to be used in operational weather forecasts (at the European Center for Medium range Weather Forecasting, ECMWF) and for climate simulations (in the Laboratoire de Météorologie Dynamique-LMD-General Circulation Model-GCM-). The reliable sampling of the Earth atmospheric situations in the Thermodynamic Initial Guess Retrieval (TIGR, Chédin, 1985; Escobar, 1993) data set developed at LMD, allows for an efficient learning of the NN. For the CLAS approach, the NN allows for benefiting from the accuracy of the NBM while drastically lowering the required computing time by more than 3,000. For the SAT approach, the neural networks allows for rapidly extracting, with reasonable accuracy, the information concerning the vertical radiative structure of the atmosphere contained in the HIRS observations. In the future, there is no major difficulty in using, in the learning phase, a line-by-line model instead of a narrow or a wide band model in order to

benefit from the best achievable accuracy in the longwave radiative transfer. The NN technique is a definite advantage for computing the longwave radiative budget either in GCM simulations or from long time series of satellite observations.

## Introduction

La connaissance des propriétés radiatives de l'atmosphère est essentielle pour améliorer notre compréhension des processus qui influencent le climat terrestre et peuvent moduler ses variations. Bien que d'importants progrès aient été faits depuis que, lors d'expériences comme ERBE (Earth Radiation Budget Experiment) ou SCARAB (SCAnner for Radiation Budget), des instruments pour la mesure du bilan radiatif au sommet de l'atmosphère ont été embarqués à bord de satellites, des incertitudes demeurent quant à l'action et la rétroaction des nuages, de la vapeur d'eau, des gaz absorbants mineurs sur la modification de l'effet de serre de la Terre. Pour progresser sur ces questions il faut comprendre les couplages entre la structure thermodynamique de l'atmosphère et la localisation des sources et des puits d'énergie radiative en son sein. Pour cela, il est nécessaire d'avoir accès à la distribution verticale du bilan radiatif sur l'ensemble du globe et sur de longues périodes de temps : aucun instrument n'étant capable de mesurer ces quantités, il nous faut envisager de les simuler, à la fois de façon précise et rapide.

Jusqu'à maintenant, ces dernières conditions apparaissaient comme quelque peu contradictoires. En effet le calcul précis des processus radiatifs atmosphériques nécessite l'utilisation de modèles de transfert radiatif à haute résolution spectrale dits « raie-par-raie » dont les besoins en temps de calculs interdisent l'utilisation pour des applications climatiques. C'est pour cette raison que des schémas de transfert radiatif hautement paramétrisés ont été développés. Toutefois, d'une part ces schémas sont encore trop lents pour permettre une prise en compte efficace des variations diurnes du rayonnement thermique dans les modèles de circulation générale (MCG), et d'autre part, la précision limitée de ce type de schéma a des conséquences importantes sur les études de sensibilité des modèles de climat à différents forçages. C'est le cas pour les expériences de doublement de la concentration du gaz carbonique dans l'atmosphère : la dispersion des résultats empêche une compréhension claire de l'impact radiatif de ce gaz à effet de serre sur le climat (Cess, 1993).

Les réseaux de neurones (RN), ont prouvé leur capacité à modéliser les problèmes fortement non-linéaires. Les réseaux de type perceptron multi-couches (MLP, Multi Layer Perceptron en anglais; Rumelhart, 1986; Stinchcombe, 1989) permettent l'**apprentissage** de relations existant entre les paramètres d'entrée/sortie d'un modèle à partir d'une base d'exemples. En pratique, connaissant les réalisations de n'importe quelle fonction  $F$  définie sur un compact de  $R^n$  c'est-à-dire des paires  $\{(X, Y = F(X))\}$ , il est possible d'interpoler cette fonction, **quelle que soit la précision souhaitée**, avec un RN d'une ou plusieurs couches cachées composées d'un nombre donné de neurones. L'intérêt de ces techniques réside dans la capacité de **généralisation** qui permet aux RN, après éducation, de réaliser avec rapidité la correspondance entrée/sortie pour des exemples non présents lors de l'apprentissage.

Dans cet article nous utilisons les RN pour calculer la distribution verticale du bilan radiatif ondes-longues. Deux approches sont présentées : d'une part une approche « classique » (CLAS) que l'on peut utiliser pour la simulation numérique du temps ou dans les modèles de climat et, d'autre part, une approche « satellite » (SAT) qui permet de calculer le bilan radiatif thermique directement à partir des observations satellitaires fournies par le sondeur verticale TOVS (Tiros-N Operational Vertical

Sounder) à bord des satellites météorologiques de la NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration). Dans le premier cas les paramètres d'entrée sont les profils thermodynamiques (température, vapeur d'eau), les concentrations de gaz mineurs (ozone...) et éventuellement les distributions d'aérosols; dans le second, les paramètres d'entrée sont des observations satellitaires (actuellement simulées). Il s'agit des radiances de l'instrument HIRS (High resolution Infrared Radiation Sounder) du sondeur TOVS qui observe le rayonnement sortant dans 19 régions spectrales réparties sur tout le spectre infrarouge. Cette dernière approche est rendue possible par le fait que ces radiances contiennent l'information sur la distribution verticale des variables qui influencent le rayonnement thermique montant comme descendant et que le RN est capable d'extraire, indépendamment de toute étape préliminaire d'inversion des observations satellitaires. Des éléments théoriques qui soutiennent cette idée peuvent aussi être trouvés dans Liou (1986) et une tentative de déduire la structure radiative verticale de l'atmosphère à partir de radiances HIRS dans Ellingson (1994).

Cette étude, qui a pour principal but de présenter une nouvelle méthodologie, a été restreinte aux conditions de ciel clair.

### **Le perceptron multi-couches**

Le principe de la méthode a déjà été décrit dans un article précédent traitant de l'utilisation du MLP pour restituer les profils de température à partir du sondeur TOVS (Escobar, 1993), nous y renvoyons le lecteur.

### **Description de l'apprentissage du réseau**

La précision de la paramétrisation obtenue avec le RN est en partie déterminée par la qualité du jeu de données utilisé pendant la phase d'apprentissage. Pour nous, ce jeu doit échantillonner de façon représentative les situations atmosphériques (paramètres d'entrée du modèle) et les profils verticaux des flux radiatifs correspondants.

#### *L'ensemble TIGR*

L'outil essentiel pour générer les différents jeux d'apprentissage utilisés par la suite est la banque de données TIGR (Thermodynamic Initial Guess Retrieval). Elle contient 1 800 situations atmosphériques soigneusement sélectionnées à partir de 85 000 rapports de radiosondages répartis sur l'ensemble du globe (Chédin, 1985, Escobar, 1993). Sont archivés, pour chacune des situations, les profils de température, vapeur d'eau, ozone et les radiances en ciel clair des canaux de l'instrument HIRS simulées (pour 10 angles zénithaux de visée échantillonnant son domaine de balayage angulaire) par le modèle de transfert raie-par-raie 4A (Scott, 1981).

#### *Les entrées*

Pour l'approche « CLAS » les entrées sont la température de surface, les profils de température, de vapeur d'eau, d'ozone et si nécessaire des autres gaz mineurs absorbants issus de la banque TIGR. Pour l'approche « SAT » les entrées sont les 17 radiances HIRS calculées pour les 1 800 situations de TIGR.

#### *Les sorties*

Les sorties décrivent la structure radiative de l'atmosphère. Pour les calculer, nous avons utilisé deux modèles de transfert radiatif différant largement dans leurs besoins en temps de calcul : un modèle à bandes étroites (MBE : Morcrette, 1985) et un modèle à bandes larges (MBL : Morcrette,

1991). Pour l'approche CLAS nous avons effectué deux apprentissages, l'un avec des profils de flux calculés avec le MBL et l'autre avec des profils calculés avec le MBE. Pour l'approche SAT, seul un apprentissage a été effectué avec le MBL.

### *Les modèles*

Le MBE comprend 225 intervalles spectraux qui couvrent la totalité du spectre infrarouge. L'absorption due à  $\text{CO}_2$ ,  $\text{O}_3$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CH}_4$  et  $\text{N}_2\text{O}$  est prise en compte. Ce modèle calcule les profils de flux en accord (à 1 % près, Morcrette, 1984) avec 4A mais sa consommation en temps de calcul interdit de l'utiliser pour des études climatiques.

Le MBL a 6 intervalles spectraux où l'absorption par les fréons (CFC-11 et CFC-12) en plus des gaz mentionnés précédemment ainsi que celle de 5 types d'aérosols est prise en compte. Il a été étalonné (Morcrette, 1991) par rapport au modèle raie-par-raie du GFDL (Geophysical Fluid Dynamics Laboratory, Schwarzkopf, 1991). Il est utilisé en prévision numérique du temps (au Centre Européen pour les Prévisions Météorologiques à Moyen Terme) et pour des simulations climatiques (dans le modèle de climat du LMD). Il a été utilisé pour des comparaisons avec des données issues de l'observation obtenues lors de la campagne SPECTRE (SPECTral Radiance Experiment, Ellingson, 1993). Des erreurs atteignant  $15 \text{ W/m}^2$  ont été trouvées pour le flux descendant à la surface avec des atmosphères claires, sèches et froides. L'amplitude des incertitudes est aussi estimée par le biais et l'écart-type entre le MBE et le MBL (MBE moins MBL), calculés pour les profils de flux montants et descendants sur 861 situations atmosphériques utilisées ensuite dans la phase de test. On observe un biais de  $2,5 \text{ W/m}^2$  et un écart-type de  $4,5 \text{ W/m}^2$ . Une analyse plus complète des différences entre les modèles à bandes étroites et à bandes larges se trouve dans Morcrette (1985).

### *La phase d'apprentissage*

Elle consiste à présenter au réseau les couples entrées/sorties. Si le nombre d'entrées et de sorties du réseau est déterminé par l'équation à résoudre elle-même, il n'y a pas de loi simple pour déterminer le nombre de neurones sur la couche cachée, ni même de nombre de couches cachées. Nous utilisons une couche cachée, l'introduction d'une couche supplémentaire dans des essais antérieurs n'ayant rien apporté à la précision des résultats. Le nombre de neurones sur la couche cachée a été fixé par ajustements successifs : 27 pour l'approche CLAS et 22 pour l'approche SAT. Pour chacune des approches, la fonction  $F$  calculée par le réseau est définie par les correspondances entre les 1 800 situations atmosphériques,  $X$ , et les profils de flux ondes-longues descendants et montants,  $Y$ .

On a ainsi :

$$(1) \quad F : X \rightarrow Y = F(\mathbf{W}, X),$$

où  $\mathbf{W}$  est la matrice des poids synaptiques qui minimise l'erreur entre les flux calculés  $F(\mathbf{W}, X)$  et les flux désirés,  $Y$ , pendant l'apprentissage à l'aide de l'algorithme de rétropropagation de l'erreur. Il n'y a pas de moyen simple de décider quand l'apprentissage est terminé, c'est-à-dire  $\mathbf{W}$  est déterminé de façon optimale. Nous avons arrêté l'apprentissage lorsque l'erreur a commencé de conserver la même valeur à chaque itération.

### **Résultats : la phase de test**

Seules des comparaisons avec des mesures de rayonnement du sommet de l'atmosphère à la surface permettraient de tester la précision du modèle proposé, mais celles-ci ne sont pas (ou peu) encore

disponibles. Aussi, nous avons testé nos résultats en présentant au réseau des entrées inconnues, mais de même forme que pour l'apprentissage. Puis, nous avons comparé les profils obtenus à ceux calculés par le modèle de départ (MBE ou MBL). Un ensemble de 861 situations a été utilisé. Concernant l'approche CLAS, (MBE et MBL), il n'y a pas de biais dans les résultats et l'écart-type entre les flux calculés avec le RN et avec les modèles classiques est plus faible que 1 % ; la figure 1

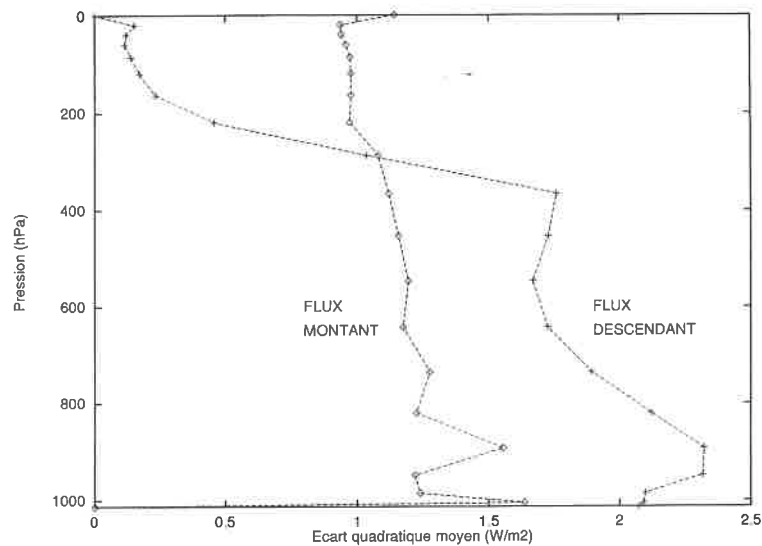


Fig. 1. – Écart-type entre les flux ondes-longues calculées avec le MBE et avec le RN (approche CLAS).

*Fig. 1. – Standard deviation between the longwave fluxes computed with the NBM and with the NN (CLAS approach).*

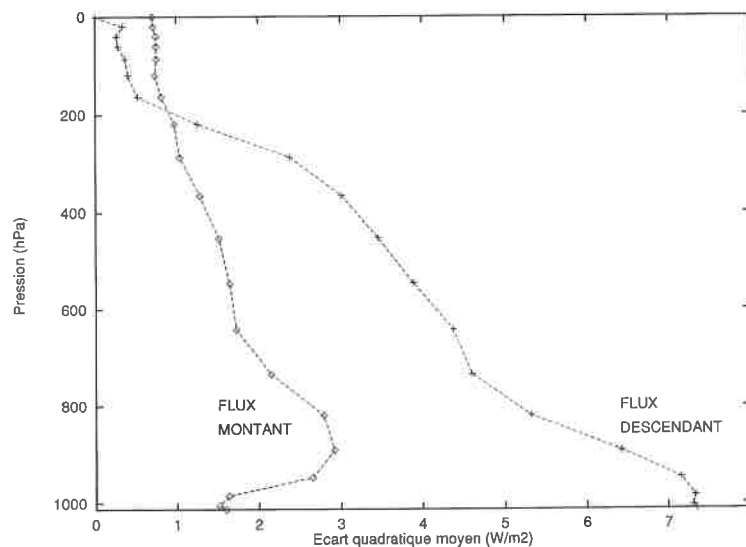


Fig. 2. – Écart-type entre les flux ondes-longues calculées avec le MBL et le RN (approche SAT).

*Fig. 2. – Standard deviation between the longwave fluxes computed with the WBM and with the NN (SAT approach).*

montre l'écart-type dû au RN entraîné sur des profils de flux calculés avec le MBE pour la phase d'apprentissage. Ces résultats indiquent que, conformément à la théorie énoncée dans l'introduction, le réseau permet une précision au moins comparable à celle des modèles initiaux. De plus, les biais et écart-type entre MBL et MBE pour les situations tests ne sont pas modifiés lorsqu'on remplace le MBE par le RN. Si l'on admet que le MBE est plus précis que le MBL, l'utilisation du RN permet d'améliorer la précision absolue des calculs dans la mesure où l'erreur due au réseau de neurone (1 %) est significativement plus faible que l'écart entre les deux modèles. Il faut noter aussi que les RN sont toujours plus rapides que la version classique : 3 fois pour MBL, **3 000** fois pour MBE. Dans l'approche SAT, les résultats ne présentent pas de biais. La figure 2 montre l'écart-type dû au réseau lorsqu'on lui présente 17 radiances HIRS en entrée. Pour les flux montants, l'erreur est plus faible que  $3 \text{ W/m}^2$ , elle augmente pour les flux descendants proches de la surface où elle atteint  $7 \text{ W/m}^2$ . Ceci n'est pas surprenant car 86 % du rayonnement descendant atteignant la surface provient des 50 hPa les plus proches de la surface (Gupta, 1989) et l'on sait que la sensibilité des canaux HIRS à cette partie de l'atmosphère est faible. Néanmoins, cette approche produit des estimations des flux avec une précision comparable à l'état de l'art des simulations climatiques : la valeur de l'écart-type du flux descendant à la surface calculé, pour une même situation, par les 39 codes de transfert radiatif qui ont participé à l'exercice ICRCM en 1988 (Ellingson, 1991), étant de  $8,3 \text{ W/m}^2$ . De plus, supprimant l'étape d'inversion des données satellitaires nécessaire dans l'approche CLAS, étant encore deux fois plus rapide qu'un RN avec des profils thermodynamiques en entrée, cette approche reste très séduisante pour estimer le bilan radiatif à partir des séries globales d'observations satellitaires.

### Conclusion

Nous avons montré que des RN peuvent être utilisés de façon efficace pour restituer le bilan radiatif ondes-longues du sommet de l'atmosphère à la surface en l'absence de nuages. Nous avons employé un modèle de transfert radiatif à bandes étroites et un modèle à bandes larges, deux codes dont les besoins en temps de calcul sont très différents. Les RN permettent de bénéficier d'une diminution drastique du temps de calcul (d'un facteur 3 par rapport au MBL et 3 000 par rapport au MBE), à précision égale avec ces modèles. Ceci est un avantage indéniable lorsqu'on effectue des calculs à l'échelle globale et sur de longues périodes de temps : c'est le cas des grands programmes actuels de ré-analyse de données à des fins d'étude du climat (16 années d'archive TOVS sont disponibles aujourd'hui). L'approche CLAS ouvre des perspectives intéressantes pour les MCG qui ont besoin de simulations précises et rapides. Les résultats de l'approche SAT prouvent l'utilité des mesures spectrales du rayonnement thermique sortant au sommet de l'atmosphère pour restituer la distribution verticale du bilan radiatif. De plus, l'ampleur de l'économie de temps réalisée grâce à l'utilisation d'un RN permet d'envisager des schémas de transfert radiatif beaucoup plus sophistiqués pour calculer, une fois pour toutes, les profils de flux de l'ensemble d'apprentissage. Aussi, nous entendons très bientôt introduire les nuages et améliorer la précision absolue de nos modèles RN en utilisant lors de l'apprentissage un modèle raie-par-raie.

Note remise le 6 novembre 1995, acceptée après révision le 25 mars 1996.

### Références bibliographiques

- Cess R.D. *et al.*, 1993. Uncertainties in carbon radiative forcing in atmospheric general circulation models, *Science*, 262, p. 1252-1255.
- Chédin A., Scott N.A., Wahiche C. et Moulinier P., 1985. The Improved Initialized Inversion method: a high resolution physical method for temperature retrievals from Tiros-N series, *J. Clim. Appl. Meteor.*, 24, p. 124-143.



- Ellingson R.G. et Baer F., 1993. A Study a longwave radiation codes for climate sudies: Validation with observations and tests in General Circulation Models-an update, *Proceedings of the 3rd Atmos. Radiation meas. (ARM) Science Team Meeting*, Norman, Oklahoma, US Department of Energy, p. 1-10.
- Ellingson R.G., Ellis J., Fels S., 1991. The Intercomparison of Radiation Codes used in Climate Models: Long Wave Results, *J. Geophys. Res.*, 96, D5, p. 8929-8953.
- Ellingson R.G., Yanuk D., Gruber A., et Miller A.J., 1994. Development and application of Remote Sensing of Longwave Cooling from the NOAA Polar Orbiting Satellites, *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 60, n° 3, p. 307-316.
- Escobar J., 1993. Base de données pour la restitution de variables atmosphériques à l'échelle globale. Étude sur l'inversion par réseaux de neurones des données des sondeurs verticaux atmosphériques satellitaires présents et à venir, *Thèse*, Université de Paris-VII, 167 p.
- Escobar-Munoz J., Chédin A., Chéruey F. et Scott N.A., 1993. Réseaux de neurones multi-couches pour la restitution de variables thermodynamiques atmosphériques à l'aide de sondeurs verticaux satellitaires. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 317, série II, p. 911-918.
- Gupta S.K., 1989. A Parameterization for Longwave Surface Radiation from Sun-Synchronous Satellite Data, *J. of Clim.*, p. 305-320.
- Liou K.N. et Xue Y., 1986. Exploration of the remote sounding of infrared cooling rates due to water vapor, *Proceedings of the Sixth Conference on Atmospheric Radiation of the AMS*, p. 132-134.
- Morcrette J.J., 1984. Sur la paramétrisation du rayonnement dans les modèles de circulation générale atmosphérique, *Thèse d'État*, Univ. Lille, n° 630, p. 373.
- Morcrette J.J., 1991. Radiation and Cloud Radiative Properties in the European Center for Medium Range Weather Forecasts forecasting system, *J. Geophys. Res.*, 96, p. 9121-9132.
- Morcrette J.J. et Fouquart Y., 1985. On systematic errors in parameterized calculations on longwave radiation transfer, *QJR Meteorol. Soc.*, 111, p. 691-708.
- Rumelhart D.E., Hinton G., Williams R., 1986. Learning internal representation by error propagation. *Parallel distributed processing exploring the micro-structure of cognition*. Rumelhart D.E. et McLelland J. éd. MIT Press, p. 318-362.
- Schwarzkopf M.D. et Fel S.B. 1991. The simplified exchange method revisited: An accurate, rapid method for computation of infrared cooling rates and fluxes, *J. Geophys. Res.*, 96D, p. 9075-9096.
- Scott N.A. et Chédin A., 1981. A fast line-by-line method for atmospheric absorption computations: the automatized atmospheric absorption atlas, *J. Appl. Meteor.*, 20, p. 801-812.
- Stinchombe M. et White H., 1989. Universal approximation using feedforward networks with non-sigmoid hidden layer activation functions, *Proc. Intl. Joint. Conf. on Neural Networks*, 1, p. 613-617.