



**HAL**  
open science

# Théorie inverse de Galois sur les corps des fractions rationnelles tordus

Angelot Behajaina

► **To cite this version:**

Angelot Behajaina. Théorie inverse de Galois sur les corps des fractions rationnelles tordus. 2022. hal-02939661

**HAL Id: hal-02939661**

**<https://hal.science/hal-02939661>**

Preprint submitted on 14 Sep 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

# Théorie inverse de Galois sur les corps des fractions rationnelles tordus

Angelot BEHAJAINA

**Abstract.**— In this article, we prove that if  $H$  is a skew field of center  $k$  and  $\sigma$  an automorphism of finite order of  $H$  such that the fixed subfield  $k^{(\sigma)}$  of  $k$  under the action of  $\sigma$  contains an ample field, then the inverse Galois problem has a positive answer over the skew field  $H(t, \sigma)$  of twisted rational fractions. Moreover, if  $k^{(\sigma)}$  contains either a real closed field, or an Henselian field of residue characteristic 0 and containing all roots of unity, then the profree group of countable rank  $\widehat{F}_\omega$  is a Galois group over  $H(t, \sigma)$ .

**Résumé.**— Dans cet article, nous montrons que si  $H$  est un corps gauche de centre  $k$  et  $\sigma$  un automorphisme d'ordre fini de  $H$  tels que le sous-corps  $k^{(\sigma)}$  de  $k$  fixé par  $\sigma$  contient un corps ample, alors le problème inverse de Galois admet une réponse positive sur le corps  $H(t, \sigma)$  des fractions rationnelles tordus. De plus, si  $k^{(\sigma)}$  contient un corps qui est, soit réel clos, soit hensélien de caractéristique résiduelle nulle et contenant toutes les racines de l'unité, alors le groupe prolibre de rang dénombrable  $\widehat{F}_\omega$  est groupe de Galois sur  $H(t, \sigma)$ .

## 1 Introduction

Le traditionnel problème inverse de Galois sur un corps commutatif  $k$ , noté  $\mathbf{PIG}_k$ , consiste à savoir si, *pour tout groupe fini  $G$ , il existe une extension galoisienne finie  $L/k$  dont le groupe de Galois est  $G$* . L'étude de ce problème dans le cas d'un corps de fractions  $k(t)$  peut s'appréhender de manière géométrique si l'on demande en plus à l'extension  $L/k(t)$  d'être régulière<sup>1</sup> sur  $k$ . Il s'agit du problème inverse de Galois régulier, noté  $\mathbf{PIGR}_k$ , qui consiste lui à savoir si, *pour tout groupe fini  $G$ , il existe un  $G$ -revêtement  $X \rightarrow \mathbb{P}^1$  défini sur  $k$* . Dans les années 90, Florian Pop a démontré que le  $\mathbf{PIGR}_k$  admettait une réponse positive dès que  $k$  contenait un corps ample<sup>2</sup> (voir [Pop96]). En fait, dans cette situation, le corps  $k$  satisfait à un problème encore plus fort (voir la preuve de [DL19, Proposition 10]) :

**$\mathbf{PIGS}_k$  (Problème Inverse de Galois Sérié sur  $k$ ) :** *Pour tout groupe fini  $G$ , existe-t-il un  $G$ -revêtement  $X \rightarrow \mathbb{P}^1$  défini sur  $k$  tel que  $X$  possède un point  $k$ -rationnel non ramifié ?*

De manière équivalente, ce problème consiste à savoir si, *pour tout groupe fini  $G$ , il existe une extension galoisienne finie  $L/k(t)$  dont le groupe de Galois est  $G$  et telle que  $L$  se*

---

<sup>1</sup>c'est-à-dire, si  $L \cap \bar{k} = k$

<sup>2</sup>Un corps  $k$  est dit *ample* si toute courbe lisse définie sur  $k$  et géométriquement irréductible possède une infinité de points  $k$ -rationnels dès qu'elle en possède un. Par exemple, la clôture totalement réelle  $\mathbb{Q}^{\text{tr}}$  de  $\mathbb{Q}$ , le corps  $\mathbb{C}((u))$  et le corps des nombres réels  $\mathbb{R}$ , etc. Pour les corps amples, on peut consulter aussi [Jar11], [BSF13] et [Pop14].

plonge dans le corps des séries de Laurent  $k((t))$ , énoncé qui justifie la terminologie de *sérié* que nous utilisons pour le PIGS.

Rappelons que dans le cadre des corps gauches, la notion d'extension galoisienne est à considérer au sens d'Artin : une extension  $M/H$  est dite *galoisienne* si  $H$  est le corps laissé fixe par les  $H$ -automorphismes de  $M$ . Dans leur article [DL19], Bruno Deschamps et François Legrand s'intéressent à la problématique inverse de Galois sur des corps gauches  $H$ . En effet, la théorie de Galois admet une généralisation dans le cas de ces corps (voir [Coh95, Chapter 3]), qui rend légitime le  $\text{PIG}_H$ . Malheureusement, la notion de clôture algébrique n'étant pas immédiate pour les corps gauches, le  $\text{PIGR}_H$  n'a pas de sens. On peut néanmoins s'intéresser au  $\text{PIG}_{H(t)}$  dès que l'on sait donner un analogue d'un corps de fractions sur un corps non commutatif. La théorie des anneaux de polynômes tordus de Ore en est un cadre idéal. Rappelons que, l'anneau de polynômes tordu  $H[t, \sigma]$  est le  $H$ -espace vectoriel des polynômes sur  $H$  muni du produit qui vérifie  $ta = \sigma(a)t$  pour tout  $a \in H$ . Cet anneau possède un unique corps de fractions  $H(t, \sigma)$  (voir [Coh95, Chapter 2]). L'un des résultats principaux de [DL19] affirme que, si  $H$  est de dimension finie sur son centre  $k$  et si  $\sigma = \text{Id}$ , alors

$$\text{PIGS}_k \implies \text{PIG}_{H(t, \text{Id})}.$$

Leur méthode consiste à contrôler, grâce à l'étude de la norme réduite, l'extension des scalaires à  $H$ . De ce point de vue, la condition de finitude de  $H$  sur  $k$  est essentielle. Une application de ce résultat a été récemment donnée dans [ALP20], où il est montré que l'anneau  $H(X)$  des fonctions polynomiales en la variable  $X$  et à coefficients dans  $H$  est isomorphe à un certain corps  $H'(t, \text{Id})$ . Les auteurs en déduisent, par [DL19], que le problème inverse de Galois admet une réponse sur  $H(X)$  dès que  $k$  contient un corps ample.

Dans cet article, tout en continuant à utiliser la méthode de l'extension des scalaires, nous introduisons une nouvelle approche utilisant les corps de séries de Laurent tordus, qui nous permet de montrer la généralisation du résultat de Deschamps–Legrand suivante :

**Théorème A.**— *Soient  $H$  un corps gauche de centre  $k$  ( $H$  non nécessairement de dimension finie sur  $k$ ) et  $\sigma$  un automorphisme d'ordre fini de  $H$ . Si  $k^{(\sigma)}$  désigne le corps des invariants de  $k$  par  $\sigma$ , alors on a*

$$\text{PIGS}_{k^{(\sigma)}} \implies \text{PIG}_{H(t, \sigma)}.$$

*En particulier, si  $k^{(\sigma)}$  contient un corps ample, alors le  $\text{PIG}_{H(t, \sigma)}$  admet une réponse positive.*

Un exemple d'application du théorème A ne rentrant pas dans le cadre des travaux de [DL19] peut être donné en considérant le corps  $H = k(u, \sigma)$  où  $k/k_0$  désigne une extension galoisienne vérifiant  $\langle \sigma \rangle = \text{Gal}(k/k_0)$  infini et  $k_0$  ample (e.g.  $k_0 = \mathbb{C}((x))$  et  $k = \overline{\mathbb{C}((x))}$ ). Voir les exemples d'application dans le §2.1 pour plus de détails.

La théorie de Galois admet aussi une généralisation au cas infini. Dans [Jac56, Chapter VII : §6 ], il est montré que si  $\Omega/H$  est une extension galoisienne extérieure<sup>3</sup> et *relativement algébrique à gauche*<sup>4</sup>, le groupe de Galois  $\text{Gal}(\Omega/H)$  de  $\Omega/H$  est profini. Plus précisément, ce groupe est la limite projective des groupes de Galois  $\text{Gal}(M/H)$  des sous-extensions galoisiennes finies  $M/H$  de  $\Omega/H$ . Par ailleurs, la théorie de Krull reste valable et il y a

<sup>3</sup>Une extension galoisienne  $M/H$  est dite *extérieure* si  $\text{Gal}(M/H)$  ne possède aucun automorphisme intérieur non trivial.

<sup>4</sup>dans le sens où pour tout élément  $x \in \Omega$ , le sous-corps  $H(x)$  de  $M$  engendré par  $H$  et  $x$  est de dimension finie à gauche sur  $H$ . Cette terminologie apparaît dans [Jac56, §6 : Definition 1].

la correspondance entre les corps intermédiaires et les sous-groupes fermés (voir [Jac56, §6 Theorem 1]). Dans cette perspective, on s’inspire des travaux de Pierre Dèbes et Bruno Deschamps sur la  $\psi$ -liberté des corps (présentés dans [DD04]), pour nous intéresser à la possibilité de réaliser le groupe prolibre  $\widehat{F}_\omega$  comme groupe de Galois d’une extension de  $H(t, \sigma, \delta)$ . A cet effet, nous montrons le

**Théorème B.**— *Soient  $H$  un corps gauche de centre  $k$  et  $\sigma$  un automorphisme d’ordre fini de  $H$ . Supposons que le corps des invariants  $k^{(\sigma)}$  contient un corps  $k_0$  qui est, soit réel clos, soit hensélien de caractéristique résiduelle nulle et contenant toutes les racines de l’unité. Alors, il existe une extension  $L/H(t, \sigma)$  galoisienne extérieure, relativement algébrique à gauche et de groupe de Galois  $\widehat{F}_\omega$ .*

Ce théorème montre, par exemple, que le groupe  $\widehat{F}_\omega$  est groupe de Galois sur  $\mathbb{H}(t)$ , le corps des fractions rationnelles tordu à indéterminée centrale, où  $\mathbb{H}$  est le corps des quaternions de Hamilton (voir l’exemple d’application dans le §2.2).

**Remarque.**— Dans certaines situations, les corps de fractions rationnelles tordus avec dérivation  $H(t, \sigma, \delta)$  peuvent se ramener au cas où  $\delta = 0$ , ce qui permet d’appliquer les résultats de ce travail. En effet, il est par exemple montré dans [Coh95, Theorem 2.3.1] que si  $\delta \neq 0$  et  $k^{(\sigma)} \neq k$ , alors les corps  $H(t, \sigma, \delta)$  et  $H(t, \sigma)$  sont isomorphes. Nous n’avons pas inclus ces cas dans les théorèmes A et B pour ne pas en alourdir artificiellement les énoncés.

**Remerciements.**— Je tiens à remercier mes directeurs de thèse, Bruno Deschamps et François Legrand, pour leurs nombreuses relectures, commentaires utiles et précieuses suggestions. Je remercie également le GDRI GANDA pour son soutien financier.

## 2 Preuves des théorèmes

### 2.1 Théorème A

Commençons par rappeler la stratégie de l’extension galoisienne des scalaires présentée dans [DL19] : si l’on se donne un corps gauche  $K$  et un corps  $k$  contenu dans le centre  $Z(K)$  de  $K$ , alors on a le

**Lemme 2.1.1.**— Si  $L/k$  désigne une extension algébrique galoisienne de groupe  $G$  telle que la  $k$ -algèbre  $M = K \otimes_k L$  soit un corps, alors :

1) Si l’on considère  $K$  comme sous-corps de  $M$ , l’application

$$\begin{array}{ccc} \Psi & : & \text{Gal}(L/k) \rightarrow \text{Aut}(M/K) \\ \sigma & \mapsto & \Psi(\sigma) \end{array} \quad : \quad \begin{array}{ccc} M & \rightarrow & M \\ h \otimes x & \mapsto & h \otimes \sigma(x) \end{array} \quad (1)$$

est un isomorphisme de groupes.

2) L’extension  $M/K$  est galoisienne de groupe  $G$ .

**Preuve :** 1) On voit facilement que  $\Psi$  est un morphisme de groupes. Il reste à montrer qu’elle est bijective. L’injectivité est immédiate. Pour la surjectivité, considérons  $\eta \in \text{Gal}(M/K)$ . On remarque tout d’abord que  $Z(M)$  est un corps. Vu que  $\eta(Z(M)) = Z(M)$ , la restriction de  $\eta$  à  $Z(M)$  est un  $k$ -automorphisme. Or  $(k \otimes_k L)/k$  est une sous-extension galoisienne de  $Z(M)/k$ , donc  $\eta(k \otimes_k L) = k \otimes_k L$ . Ainsi, on peut définir une application  $\sigma_\eta : L \rightarrow L$  qui à  $l \in L$  associe l’unique  $\tilde{l} \in L$  vérifiant  $\eta(1 \otimes l) = 1 \otimes \tilde{l}$ . On vérifie aisément que  $\sigma_\eta$  est un isomorphisme d’anneaux, donc  $\sigma_\eta \in \text{Gal}(L/k)$ . Il reste à vérifier que l’on a

$\Psi(\sigma_\eta) = \eta$ . A cet effet, pour  $h \in K$  et  $l \in L$ , on a  $\Psi(\sigma_\eta)(h \otimes l) = \Psi(\sigma_\eta)(h \otimes 1)\Psi(\sigma_\eta)(1 \otimes l) = (h \otimes 1)(1 \otimes \sigma_\eta(l)) = \eta(h \otimes 1)\eta(1 \otimes l) = \eta((h \otimes 1)(1 \otimes l)) = \eta(h \otimes l)$ . Ainsi, on a  $\Psi(\sigma_\eta) = \eta$ .

2) On voit immédiatement que la sous-algèbre des invariants de  $M$  par l'action de  $\text{Aut}(M/K)$  vaut  $K$ , ce qui conclut.

□

La difficulté dans la méthode de l'extension galoisienne des scalaires consiste à assurer que l'algèbre  $M = K \otimes_k L$  reste un corps. Dans [DL19], les auteurs y arrivent en considérant pour  $K$  un corps de fractions tordu à indéterminée centrale dont le corps des constantes  $H$  est de dimension finie sur  $k$ . Ils contrôlent alors les zéros de la norme réduite dans l'extension  $L/k$ . Ceci limite de manière rédhibitoire l'étude au cas où  $K = H(t, \text{Id})$  avec  $[H : k] < +\infty$ . La nouvelle approche que nous proposons pour le cas  $K = H(t, \sigma)$  consiste à plonger  $K$ ,  $L$  et  $M$  dans un même corps (de séries). Cela va nous permettre d'étendre le résultat de [DL19] à des cas où  $\sigma \neq \text{Id}$  et  $[H : k] = +\infty$ .

Etant donné un corps gauche  $H$  de centre  $k$  et  $\sigma$  un automorphisme de  $H$ , rappelons que le corps des séries de Laurent tordu, noté  $H((t, \sigma))$ , est constitué des séries formelles  $\sum_{i \geq i_0} x_i t^i$  ( $i_0 \in \mathbb{Z}$  et  $x_i \in H$ ) et est muni du produit  $ta = \sigma(a)t$  pour tout  $a \in H$ . Le corps  $H(t, \sigma)$  se plonge canoniquement dans  $H((t, \sigma))$  par  $t \mapsto t$  et  $a \mapsto a$  ( $a \in H$ ). Si l'on suppose que  $\sigma$  est d'ordre  $n \geq 1$ , alors le corps  $k^{(\sigma)}(t^n)$  est à la fois dans le centre de  $H(t, \sigma)$  et dans celui de  $H((t, \sigma))$ . Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [Coh95, Chapter 2].

**Proposition 2.1.2.** — *Soient  $H$  un corps gauche de centre  $k$  (de dimension non nécessairement finie sur  $k$ ) et  $\sigma$  un automorphisme de  $H$  d'ordre  $n \geq 1$ . Si  $k^{(\sigma)}$  désigne le corps des invariants de  $k$  par l'action de  $\sigma$ , alors l'application  $k^{(\sigma)}(t^n)$ -linéaire*

$$\tau : H(t, \sigma) \otimes_{k^{(\sigma)}(t^n)} k^{(\sigma)}(t^n) \rightarrow H((t, \sigma)),$$

qui envoie chaque tenseur  $x \otimes l$  sur  $xl$ , est un monomorphisme de  $k^{(\sigma)}(t^n)$ -algèbres.

En particulier, pour toute extension intermédiaire  $k^{(\sigma)}(t^n) \subset L \subset k^{(\sigma)}((t^n))$  de dimension finie sur  $k^{(\sigma)}(t^n)$ , l'algèbre  $H(t, \sigma) \otimes_{k^{(\sigma)}(t^n)} L$  est un corps.

**Preuve :** En toute généralité, si  $A, B, C$  désignent trois  $k$ -algèbres et  $f : A \rightarrow C$ ,  $g : B \rightarrow C$  sont deux morphismes de  $k$ -algèbres, alors l'application  $k$ -linéaire de  $A \otimes_k B \rightarrow C$  qui au tenseur  $a \otimes b$  associe  $f(a)g(b)$ , est un morphisme d'algèbres si et seulement si  $\text{Im}(g)$  est inclus dans le commutant<sup>5</sup> dans  $C$  de  $\text{Im}(f)$  (ce qui équivaut à dire que  $\text{Im}(f)$  est inclus dans le commutant dans  $C$  de  $\text{Im}(g)$ ). Dans notre situation,  $k^{(\sigma)}((t^n))$  est inclus dans le centre de  $H((T, \sigma))$ , ce qui montre que  $\tau$  est bien un morphisme d'algèbres.

Pour l'injectivité de  $\tau$ , considérons  $h_1, \dots, h_s \in H(t, \sigma)$  et  $z_1, \dots, z_s \in k^{(\sigma)}((t^n))$  tels que  $x = \sum_{m=1}^s h_m \otimes z_m$  vérifie  $\tau(x) = 0$ . Puisque  $H[t, \sigma]$  est un anneau de Ore (voir [Coh95, Chapter 2]), en appliquant  $s$  fois la possible écriture  $b^{-1}a = a'b^{-1}$  ( $a, b, a', b' \in H[t, \sigma]$ ), on déduit l'existence d'un polynôme  $u \in H[t, \sigma] - \{0\}$  tel que pour tout  $m \in \{1, \dots, s\}$ , on a  $h_m u \in H[t, \sigma]$ . Comme  $u \otimes 1$  est inversible et comme  $\tau(x)\tau(u \otimes 1) = \tau(\sum_{m=1}^s h_m u \otimes z_m)$ , pour montrer que  $x = 0$ , on peut supposer que les  $h_m$  sont dans  $H[t, \sigma]$ . Le même type de manipulation permet de supposer que les  $z_m$  sont dans  $k^{(\sigma)}[[t^n]]$ .

Fixons une  $k^{(\sigma)}$ -base  $(e_j)_{j \in J}$  de  $H$ . En utilisant la centralité de  $k^{(\sigma)}(t^n)$ , on peut écrire

<sup>5</sup>Etant donné un anneau  $R$  et une partie  $S$  de  $A$ , le commutant de  $S$  dans  $R$  est l'ensemble des  $x \in R$  qui commutent avec tous les éléments de  $S$ .

chacun des  $h_m$  sous la forme d'une somme finie

$$\begin{aligned}
h_m(t) &= \sum_{l=0}^{l_m} t^{ln} \sum_{k=0}^{n-1} a_{l,k,m} t^k \text{ avec } a_{l,k,m} \in H \\
&= \sum_{l=0}^{l_m} t^{ln} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j \in J_m} \lambda_{l,k,j,m} e_j \right) t^k \text{ avec } J_m \subset J \text{ un sous-ensemble fini choisi} \\
&\quad \text{uniformément pour } l \text{ et } k \text{ variant et } \lambda_{l,k,j,m} \in k^{(\sigma)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j \in J_m} e_j t^k P_{k,j,m}(t^n) \text{ avec } P_{k,j,m}(t^n) \in k^{(\sigma)}[t^n].
\end{aligned}$$

On a alors

$$h_m \otimes z_m = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j \in J_m} (e_j t^k P_{k,j,m}(t^n)) \otimes z_m = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j \in J_m} (e_j t^k) \otimes (P_{k,j,m}(t^n) z_m)$$

et en sommant pour  $m = 1, \dots, s$ , on trouve finalement une partie  $J_0 = \bigcup_m J_m \subset J$  finie et des séries

$$z_{k,j} = \sum_{m=1}^s P_{k,j,m}(t^n) z_m \in k^{(\sigma)}[[t^n]]$$

(en ayant pris soin de poser  $P_{k,j,m}(t^n) = 0$  si  $j \notin J_m$ ) telles que

$$x = \sum_{m=1}^s h_m \otimes z_m = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j \in J_0} (e_j t^k) \otimes z_{k,j}.$$

En posant formellement  $z_{k,j} = \sum_{l \geq 0} \alpha_{k,j,l} t^{ln}$  (avec  $\alpha_{k,j,l} \in k^{(\sigma)}$ ) et en utilisant la centralité,

on trouve alors

$$\tau(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j \in J_0} e_j t^k \sum_{l \geq 0} \alpha_{k,j,l} t^{ln} = \sum_{l \geq 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j \in J_0} \alpha_{k,j,l} e_j \right) t^{ln+k} = 0.$$

On en déduit que, pour tout  $k = 0, \dots, n-1$  et tout  $l \geq 0$ , on a  $\sum_{j \in J_0} \alpha_{k,j,l} e_j = 0$ . La famille  $(e_j)_j$  étant une  $k^{(\sigma)}$ -base de  $H$ , on a alors  $\alpha_{k,j,l} = 0$  pour tous  $k, j, l$ . Ainsi, toutes les séries  $z_{k,j}$  sont nulles et donc  $x = 0$ .

Pour le dernier point de la proposition, considérons  $k^{(\sigma)}(t^n) \subset L \subset k^{(\sigma)}((t^n))$  tel que le corps  $L$  soit de dimension finie sur  $k^{(\sigma)}(t^n)$ . Puisque l'anneau unitaire  $H(t, \sigma) \otimes_{k^{(\sigma)}(t^n)} L$  se plonge dans le corps  $H((t, \sigma))$ , il est donc intègre. En tant que  $H(t, \sigma)$ -espace vectoriel à gauche,  $H(t, \sigma) \otimes_{k^{(\sigma)}(t^n)} L$  est de dimension  $[L : k^{(\sigma)}(t^n)] < +\infty$ . Le lemme 2.1.3. qui suit montre alors que  $H(t, \sigma) \otimes_{k^{(\sigma)}(t^n)} L$  est bien un corps.

□

**Lemme 2.1.3.** — *Si  $A$  désigne un anneau unitaire intègre contenant un corps  $K$  (non nécessairement commutatif) tel que  $A$  soit de dimension finie en tant que  $K$ -espace vectoriel à gauche (pour la multiplication à droite dans  $A$ ), alors  $A$  est un corps.*

**Preuve :** Fixons  $x \in A \setminus \{0\}$  et notons  $m_x : a \mapsto ax$  la multiplication à droite par  $x$ . L'application  $m_x$  est un  $K$ -endomorphisme de  $A$ , mais comme  $A$  est supposé intègre,

cette application linéaire est injective. Rappelons que les théorèmes classiques (théorème du rang, etc.) d'algèbre linéaire sur les corps commutatifs restent valables sur les corps gauches (voir [Ehr11, §3.11] et [Ehr11, §3.12]). En application du théorème du rang et puisque  $A$  est supposé de dimension finie sur  $K$ , on en déduit que  $m_x$  est surjective. Ainsi, il existe  $x^{-1} \in A$  tel que  $m_x(x^{-1}) = x^{-1}x = 1$ . Donc, tout  $x \neq 0$  possède un inverse à gauche mais comme 1 est un neutre bilatère, finalement, tout  $x \neq 0$  possède un inverse à droite.

□

Maintenant, venons-en à la

**Preuve du théorème A :** Supposons que le  $\text{PIGS}_{k^{(\sigma)}}$  admet une réponse positive. Soit  $G$  un groupe fini. En notant  $n \geq 1$  l'ordre de  $\sigma$ , par hypothèse, il existe une extension galoisienne finie  $L/k^{(\sigma)}(t^n)$  de groupe  $G$  telle que  $L \subset k^{(\sigma)}((t^n))$ . Par la proposition 2.1.2, l'algèbre  $H(t, \sigma) \otimes_{k^{(\sigma)}(t^n)} L$  reste un corps. De plus, par le lemme 2.1.1, l'extension  $H(t, \sigma) \otimes_{k^{(\sigma)}(t^n)} L/H(t, \sigma)$  est galoisienne de groupe de Galois  $G$ . Par conséquent, le  $\text{PIG}_{H(t, \sigma)}$  admet une réponse positive. En particulier, si  $k^{(\sigma)}$  contient un corps ample, alors, comme rappelé dans l'introduction, le  $\text{PIGS}_{k^{(\sigma)}}$  admet une réponse positive et il en est donc de même du  $\text{PIG}_{H(t, \sigma)}$ .

□

**Remarque.**—Soient  $H$  un corps gauche de centre  $k$  et  $\sigma$  un automorphisme d'ordre fini  $n \geq 1$  de  $H$ . Soit  $G$  un groupe fini vérifiant l'un des quatre cas suivants :

- 1)  $G$  abélien et  $k$  infini,
- 2)  $G = S_n$  ( $n \geq 3$ ) et  $k$  infini,
- 3)  $G = A_n$  ( $n \geq 4$ ) et  $k$  est de caractéristique nulle,
- 4)  $G$  résoluble et  $k$  de caractéristique positive.

Par la preuve de [DL19, Proposition 12], il existe  $k_0 \subset k^{(\sigma)}$  et une extension galoisienne  $L/k_0(t^n)$  de groupe  $G$  et vérifie  $L \subset k_0((t^n))$ . En conséquence,  $Lk^{(\sigma)}/k^{(\sigma)}(t^n)$  est galoisienne de groupe de  $G$  vérifiant  $Lk^{(\sigma)} \subset k^{(\sigma)}((t^n))$ . Avec la même preuve du théorème A,  $G$  est groupe de Galois sur  $H(t, \sigma)$ .

**Exemples d'application.**— Dans [DL19], les auteurs fournissent des exemples de corps non commutatifs, de dimensions finies sur leurs centres et sur lesquels le  $\text{PIG}$  admet une réponse positive. Ils montrent que si  $H$  est un corps gauche contenant un corps ample dans son centre, alors le  $\text{PIG}_{H(t)}$  admet une réponse positive, où  $H(t)$  est de dimension finie sur son centre. Notre théorème A est bien plus général comme le montre les exemples suivants.

a) En considérant la conjugaison complexe  $\tau$  sur  $\mathbb{C}$ , le corps  $\mathbb{C}(t, \tau)$  est bien une algèbre simple centrale de centre  $\mathbb{R}(t^2)$ , qui contient un corps ample. Le corps  $\mathbb{C}(t, \tau)$  est bien de dimension finie sur son centre mais les résultats de [DL19] ne peuvent s'appliquer car l'indéterminée n'est pas centrale. Notre théorème A assure cependant une réponse positive au  $\text{PIG}_{\mathbb{C}(t, \tau)}$ .

b) Lorsque  $k_0$  est un corps ample à groupe de Brauer nul (par exemple lorsque  $k_0$  est PAC<sup>6</sup>), les résultats de [DL19] sont sans intérêt puisqu'il n'existe pas d'algèbre simple centrale non triviale de centre  $k_0$ . Pour autant, notre théorème A s'applique non trivialement à des

---

<sup>6</sup>Un corps  $k$  est dit PAC (Pseudo Algébriquement Clos) si toute variété non vide définie sur  $k$  admet au moins un  $k$ -point rationnel. Par exemple, un corps algébriquement clos. Le fait qu'être PAC implique avoir un groupe de Brauer nul vient de [FJ08, Theorem 11.6.4]. Voir [FJ08] pour plus de détails sur les corps PAC.

corps  $H$  de centre  $k_0$  un corps ample à groupe de Brauer nul. Par exemple, si l'on prend  $k_0 = \mathbb{C}(\!(u)\!),$  on a  $\overline{k_0} = \text{Puis}(\mathbb{C})$  et  $\text{Gal}(\overline{k_0}/k_0) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$ . En considérant  $\sigma$  un générateur de  $\widehat{\mathbb{Z}}$ , on voit que  $H = \overline{k_0}(y, \sigma)$  est de centre  $k_0$  et le théorème A assure que le PIG est vrai sur  $H(t)$ .

## 2.2 Théorème B

Dans leur article [DD04], les auteurs introduisent la notion galoisienne de  $\psi$ -liberté, dont la définition peut s'adapter au cas des corps gauches. Rappelons en quelques mots de quoi il s'agit. Un corps commutatif  $H$  est dit  $\psi$ -libre si pour tout système projectif  $(G_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de groupes finis où  $s_n : G_n \twoheadrightarrow G_{n-1}$  est un épimorphisme pour tout  $n \geq 1$  (ce que Dèbes et Deschamps appellent dans leur article un système complet de groupes finis), il existe une tour d'extensions finies galoisiennes  $(H_n/H)_{n \in \mathbb{N}}$  et une suite d'isomorphismes  $(\epsilon_n : G_n \rightarrow \text{Gal}(H_n/H))_{n \in \mathbb{N}}$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\epsilon_n \circ s_{n+1} = \text{res}_{H_n/H}^{H_{n+1}/H} \circ \epsilon_{n+1},$$

où  $\text{res}_{H_n/H}^{H_{n+1}/H} : \text{Gal}(H_{n+1}/H) \rightarrow \text{Gal}(H_n/H)$  désigne l'épimorphisme de restriction.

Dans ce cas, on dit que la tour  $(H_n/H)_{n \in \mathbb{N}}$  réalise le système complet  $(G_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Cette définition n'est pas directement applicable dans le cas où  $H$  est un corps gauche. En effet (voir [Coh95, Chapter 3]), si l'on dispose d'une tour d'extensions galoisiennes finies  $M/L/H$ , la traditionnelle suite exacte

$$1 \rightarrow \text{Gal}(M/L) \rightarrow \text{Gal}(M/H) \rightarrow \text{Gal}(L/H) \rightarrow 1,$$

valable dans le cas commutatif, doit être remplacée par la suite

$$1 \rightarrow \text{Gal}(M/L) \rightarrow \mathcal{N}_{\text{Gal}(M/H)}(\text{Gal}(M/L)) \rightarrow \text{Gal}(L/H) \rightarrow 1,$$

où  $\mathcal{N}_{\text{Gal}(M/H)}(\text{Gal}(M/L))$  désigne le normalisateur de  $\text{Gal}(M/L)$  dans  $\text{Gal}(M/H)$  (dans cette situation, on sait alors que  $\text{Gal}(M/H)$  est le plus petit  $N$ -sous-groupe<sup>7</sup> contenant le normalisateur). Ainsi, l'application  $\text{res}_{L/H}^{M/H}$  n'est pas nécessairement définie. Une manière de pallier à ce problème consiste à considérer des extensions *extérieures*. En effet, dans cette situation, les éléments  $x \in M$  tels que l'automorphisme intérieur  $I(x) : m \in M \mapsto xmx^{-1} \in M$  appartiennent au groupe  $\mathcal{N}_{\text{Gal}(M/H)}(\text{Gal}(M/L))$  sont exactement les éléments du centre  $Z(M)$  de  $M$ . Puisque  $Z(M)$  est un corps, le groupe  $\mathcal{N}_{\text{Gal}(M/H)}(\text{Gal}(M/L))$  est donc un  $N$ -groupe et l'on a donc  $\mathcal{N}_{\text{Gal}(M/H)}(\text{Gal}(M/L)) = \text{Gal}(M/H)$ . On peut donc définir la  $\psi$ -liberté d'un corps gauche de la même manière que dans le cas commutatif, mais en demandant que chaque extension  $H_n/H$  soit extérieure. Un autre intérêt à ne considérer que des extensions extérieures est que, dans cette situation, la théorie de Krull des extensions galoisiennes infinies reste valide dans le cas relativement algébrique, comme mentionné dans l'introduction. Pour ces raisons, nous étendons la définition de  $\psi$ -liberté comme suit :

**Définition 2.2.1.**—*Un corps  $H$  est dit  $\psi$ -libre si pour tout système complet de groupes finis  $(G_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , il existe une tour d'extensions  $(H_n/H)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :*

a)  $\Omega = \bigcup_n H_n$  est une extension galoisienne extérieure, relativement algébrique à gauche,

<sup>7</sup>Un sous-groupe  $J$  de  $\text{Gal}(M/H)$  est dit  $N$ -groupe si l'ensemble  $\{x \in M \setminus \{0\} \mid I(x) \in J\} \cup \{0\}$ , où  $I(x)(m) = xmx^{-1}$  pour tout  $m \in M$ , est une algèbre sur le centre  $Z(M)$  de  $M$ .



b) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_n/H$  est galoisienne (nécessairement extérieure) de groupe  $G_n$  et il existe  $\epsilon_n : G_n \simeq \text{Gal}(H_n/H)$ , vérifiant

$$\epsilon_n \circ s_{n+1} = \text{res}_{H_n/H}^{H_{n+1}/H} \circ \epsilon_{n+1}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , où  $\text{res}_{H_n/H}^{H_{n+1}/H} : \text{Gal}(H_{n+1}/H) \rightarrow \text{Gal}(H_n/H)$  désigne l'épimorphisme de restriction.

Eu égard aux propriétés de la théorie de Galois infinie des corps gauches, la preuve présentée dans [DD04, Proposition 1.2] montre immédiatement que  $\psi$ -liberté d'un corps gauche équivaut juste à l'existence d'une extension relativement algébrique galoisienne extérieure de groupe de Galois le groupe prolibre de rang dénombrable  $\widehat{F}_\omega$  (c'est-à-dire la réalisation d'un système complet de groupes finis particulier qui définit ce groupe).

**Proposition 2.2.2.** — Soient  $H$  un corps gauche,  $k$  un corps contenu dans le centre de  $H$  et  $(L_n/k)_{n \in \mathbb{N}}$  une tour d'extensions galoisiennes qui réalise un système complet de groupes finis  $(G_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Supposons que  $M_n = H \otimes_k L_n$  reste un corps pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors :

- 1) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'extension  $M_n/H$  est galoisienne extérieure relativement algébrique à gauche de groupe  $G_n$ ,
- 2) si l'on pose  $L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ , alors  $M = L \otimes_k H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$  est un corps qui est une extension galoisienne extérieure relativement algébrique à gauche de  $H$ ,
- 3) la tour d'extensions galoisiennes  $(M_n/H)_{n \in \mathbb{N}}$  réalise le système  $(G_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sorte que

$$\text{Gal}(M/H) \simeq \varprojlim_n G_n.$$

**Preuve :** 1) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $M_n$  est un corps, l'extension  $M_n/H$  est galoisienne de groupe de Galois  $G_n$ . En remarquant  $[M_n : H] = \text{Gal}(M_n/H)$ , on déduit de [Des18, Théorème] que  $M_n/H$  est extérieure. Le fait que  $M_n/H$  soit relativement algébrique est clair.

2) La suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  filtre  $M$ , donc  $M$  est un corps. D'une part, l'extension  $M/H$  est galoisienne car  $L/k$  l'est. D'autre part,  $M/H$  est extérieure car tout  $x \in M$  est dans un certain  $M_n$ . De plus, l'extension  $M/H$  est relativement algébrique en étant filtrée par les extensions relativement algébriques  $M_n/H$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

3) Par hypothèse, il existe une suite d'isomorphismes  $(\epsilon_n : G_n \rightarrow \text{Gal}(L_n/k))_{n \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\epsilon_n \circ s_{n+1} = \text{res}_{L_n/k}^{L_{n+1}/k} \circ \epsilon_{n+1}, \quad (2)$$

où  $\text{res}_{L_n/k}^{L_{n+1}/k}$  désigne le morphisme de restriction. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , en considérant l'isomorphisme  $\Psi_n : \text{Gal}(L_n/k) \rightarrow \text{Gal}(M_n/H)$  défini dans (1), on vérifie que l'on a

$$\Psi_n \circ \text{res}_{L_n/k}^{L_{n+1}/k} = \text{res}_{M_n/H}^{M_{n+1}/H} \circ \Psi_{n+1} \quad (3)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\tilde{\epsilon}_n = \Psi_n \circ \epsilon_n$ . Alors, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_n \circ s_{n+1} &= \Psi_n \circ (\epsilon_n \circ s_{n+1}) = \left( \Psi_n \circ \text{res}_{L_n/k}^{L_{n+1}/k} \right) \circ \epsilon_{n+1} = \text{res}_{M_n/H}^{M_{n+1}/H} \circ (\Psi_{n+1} \circ \epsilon_{n+1}) \\ &= \text{res}_{M_n/H}^{M_{n+1}/H} \circ \tilde{\epsilon}_{n+1} \end{aligned}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La deuxième (resp. troisième) égalité vient de l'égalité (2) (resp. (3)). Il reste à montrer l'isomorphisme. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\text{res}_{M_{n+1}/H}^{M/H} \circ \text{res}_{M_n/H}^{M_{n+1}/H} = \text{res}_{M_n/H}^{M/H}$ , donc on déduit un morphisme  $\Phi : \text{Gal}(M/H) \rightarrow \varprojlim_n \text{Gal}(M_n/H)$ , qui est un isomorphisme car  $(M_n/H)_{n \in \mathbb{N}}$  filtre  $M/H$ .

□

Etant donné un corps commutatif  $\psi$ -libre  $k$  et un corps gauche  $H$  contenant  $k$  dans son centre, on voit que si pour tout système complet de groupes finis  $(G_n, s_n)$ , on sait trouver une tour  $(L_n/k)$  réalisant ce système et telle que  $H \otimes_k L_n$  reste un corps pour tout  $n$ , alors  $H$  sera  $\psi$ -libre. C'est cette idée que nous allons utiliser pour montrer le théorème B. Nous exploitons à cet effet la construction présentée dans [DD04] pour montrer la

**Proposition 2.2.3.**— *Soit  $k$  un corps commutatif contenant un corps  $k_0$  qui est, soit réel clos, soit hensélien de caractéristique résiduelle nulle et contenant  $\mu_\infty$ . Alors, pour tout système complet de groupes finis  $(G_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , il existe une tour d'extensions galoisiennes  $(L_n/k(t))_{n \in \mathbb{N}}$  qui réalise  $(G_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $L_n \subset k((t))$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Preuve :** Il suffit de montrer le résultat lorsque  $k = k_0$ . En effet, supposons qu'il existe une tour  $(F_n/k_0(t))_n$  qui réalise  $(G_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $F_n \subset k_0((t))$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $L_n = F_n k$ . On obtient que la tour  $(L_n/k(t))_{n \in \mathbb{N}}$  réalise aussi  $(G_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et que l'on a  $L_n \subset k((t))$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Nous remarquons que, quitte à faire le changement de variables  $t \mapsto 1/t$ , il suffit de trouver une tour  $(L_n/k(t))_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $L_n \subset k((1/t))$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour la preuve, nous allons distinguer selon que le corps  $k$  est réel clos ou valué hensélien.

**-1er cas : Le corps  $k$  est réel clos.**

Si  $k = \mathbb{R}$ , alors cela résulte de [DD04, Remarque 2.2]. Dans le cas général, voir la preuve de [DD04, Théorème 2.3].

**-2ème cas : Le corps  $k$  est valué hensélien.**

Notons  $v$  la valuation sur  $k$  et  $(k_v, v)$  le complété de  $(k, v)$ . Par les constructions de [DD04, Partie 3.1], il existe une suite croissante de parties finies non vides  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $k$  et une tour d'extensions galoisiennes  $(\tilde{L}_n/k_v(t))_{n \in \mathbb{N}}$  de points de branchement<sup>8</sup>  $U_n$  telles que  $(\tilde{L}_n/k_v(t))_{n \in \mathbb{N}}$  réalise régulièrement (c'est-à-dire  $\tilde{L}_n \cap \bar{k}_v = k_v$ ) le système  $(G_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la spécialisation<sup>9</sup>  $(\tilde{L}_n)_\infty$  de  $\tilde{L}_n/k_v(t)$  en  $\infty$  est égale à  $k_v$ . La preuve du [DD04, Théorème 3.4] montre que la tour  $(\tilde{L}_n/k_v(t))_{n \in \mathbb{N}}$  admet un modèle  $(L_n/k(t))_{n \in \mathbb{N}}$  (c'est-à-dire  $\tilde{L}_n = L_n k_v$ ) qui réalise régulièrement le système complet  $(G_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , puisque  $\infty$  n'est pas un point de branchement de  $\tilde{L}_n/k_v(t)$ , le point  $\infty$  n'est pas non plus un point de branchement de  $L_n/k(t)$ . Vu que  $(k, v)$  est hensélien pour une valuation de rang 1, on a  $k_v \cap \bar{k} = k$ . Or la spécialisation  $(L_n)_\infty$  de  $L_n$  en  $\infty$  est incluse à la fois dans  $\bar{k}$  et dans la spécialisation  $(\tilde{L}_n)_\infty$  de  $\tilde{L}_n$  en  $\infty$ , donc  $(L_n)_\infty = k$ .

□

<sup>8</sup>Etant donnée une extension finie galoisienne  $E/K(t)$   $K$ -régulière (c'est-à-dire  $E \cap \bar{K} = K$ ), on dit que  $t_0 \in \mathbb{P}^1(\bar{K})$  est un *point de branchement* de  $E/K(t)$  si l'idéal  $\langle t - t_0 \rangle$  est ramifié dans la clôture intégrale de  $\bar{K}[t - t_0]$  dans  $E\bar{K}$  (si  $t_0 = \infty$ ,  $t - t_0$  doit être remplacé par  $1/t$ ).

<sup>9</sup>Etant donné une extension finie galoisienne  $E/K(t)$   $K$ -régulière et  $t_0 \in \mathbb{P}^1(K)$ , la *spécialisation* de  $E/K(t)$  en  $t_0$ , notée  $E_{t_0}/K$ , est l'extension résiduelle en un idéal premier  $\mathcal{P}$  au dessus de  $\langle t - t_0 \rangle$ . L'extension  $E/K(T)$  étant galoisienne, le corps  $E_{t_0}$  ne dépend pas du choix de  $\mathcal{P}$ .

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour établir la  $\psi$ -liberté d'un certain corps des fractions rationnels tordu :

**Théorème B'.**—*Soient  $H$  un corps gauche de centre  $k$  et  $\sigma$  un automorphisme d'ordre fini de  $H$ . Supposons que  $k^{(\sigma)}$  contient un corps  $k_0$  qui est, soit réel clos, soit hensélien de caractéristique résiduelle nulle et contenant le groupe des racines de l'unité  $\mu_\infty$ . Alors, le corps  $H(t, \sigma)$  est  $\psi$ -libre au sens de la définition 2.2.1.*

**Preuve :** Considérons un système complet de groupes finis  $(G_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Par la proposition 2.2.3, il existe une réalisation  $(L_n/k^{(\sigma)}(t^n))_{n \in \mathbb{N}}$  du système complet  $(G_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $L_n \subset k^{(\sigma)}(t^n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par la proposition 2.1.2, l'algèbre  $M_n = H(t, \sigma) \otimes_{k^{(\sigma)}(t^n)} L_n$  reste un corps pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La proposition 2.2.2 montre que  $M/H = (\bigcup_n M_n)/H$  est galoisienne extérieure, relativement algébrique à gauche et que la tour  $(M_n/H(t, \sigma))_{n \in \mathbb{N}}$  est galoisienne finie, relativement algébrique à gauche réalisant  $(G_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Donc,  $H(t, \sigma)$  est  $\psi$ -libre.

□

On voit que le théorème B' est équivalent au théorème B, comme remarqué précédemment.

**Exemple d'application.**—Dans le théorème B, en prenant  $H = \mathbb{H}$  le corps des quaternions de Hamilton (de centre  $\mathbb{R}$ ) et  $\sigma = \text{Id}$ , on obtient que le groupe  $\widehat{F}_\omega$  est groupe de Galois sur  $\mathbb{H}(t)$ . De même, le groupe  $\widehat{F}_\omega$  est groupe de Galois sur  $L(t, \sigma)$ , où  $L/\mathbb{C}((u))$  est une extension finie non triviale et  $\sigma \in \text{Gal}(L/\mathbb{C}((u)))$ .

## Bibliographie

- [ALP20] Gil Alon, François Legrand, and Elad Paran. Galois groups over rational function fields over skew fields. *Manuscript*, 2020. arXiv:2002.10300.
- [BSF13] Lior Bary-Soroker and Arno Fehm. Open problems in the theory of ample fields. In *Geometric and differential Galois theories*, volume 27 of *Sémin. Congr.*, pages 1–11. Soc. Math. France, Paris, 2013.
- [Coh95] Paul Moritz Cohn. *Skew fields. Theory of general division rings*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 57. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xvi + 500 pp.
- [DD04] Pierre Dèbes and Bruno Deschamps. Corps  $\psi$ -libres et théorie inverse de Galois infinie. (French). *J. Reine Angew. Math.*, 574:197–218, 2004.
- [Des18] Bruno Deschamps. Des extensions plus petites que leurs groupes de Galois. (French). *Comm. Algebra*, 46(10):4555–4560, 2018.
- [DL19] Bruno Deschamps and François Legrand. Le problème inverse de Galois sur les corps des fractions tordus à indéterminée centrale. (French). 2019. To appear in *Journal of Pure and Applied Algebra*. <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2019.106240>.
- [Ehr11] Gertrude Ehrlich. *Fundamental Concepts of Abstract Algebra*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2011.

- [FJ08] Michael D. Fried and Moshe Jarden. *Field arithmetic*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], 11. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2008. Revised by Jarden. xxiv + 792 pp.
- [Jac56] Nathan Jacobson. *Structure of rings*. American mathematical society colloquium publications, 1956.
- [Jar11] Moshe Jarden. *Algebraic patching*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2011. xxiv + 290 pp.
- [Pop96] Florian Pop. Embedding problems over large fields. *Ann. of Math. (2)*, 144(1):1–34, 1996.
- [Pop14] Florian Pop. Little survey on large fields - old & new. In *Valuation theory in interaction*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 432–463. Eur. Math. Soc., Zürich, 2014.

**Angelot Behajaina**

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES NICOLAS ORESME, CNRS UMR 6139

Université de Caen - Normandie

BP 5186, 14032 Caen Cedex - France

E-mail : angelot.behajaina@unicaen.fr