



HAL
open science

Conjecture de SYRACUSE : avancées inédites

Rénald Simonetto

► **To cite this version:**

| Rénald Simonetto. Conjecture de SYRACUSE : avancées inédites. 2017. hal-02939413

HAL Id: hal-02939413

<https://hal.science/hal-02939413>

Submitted on 15 Sep 2020

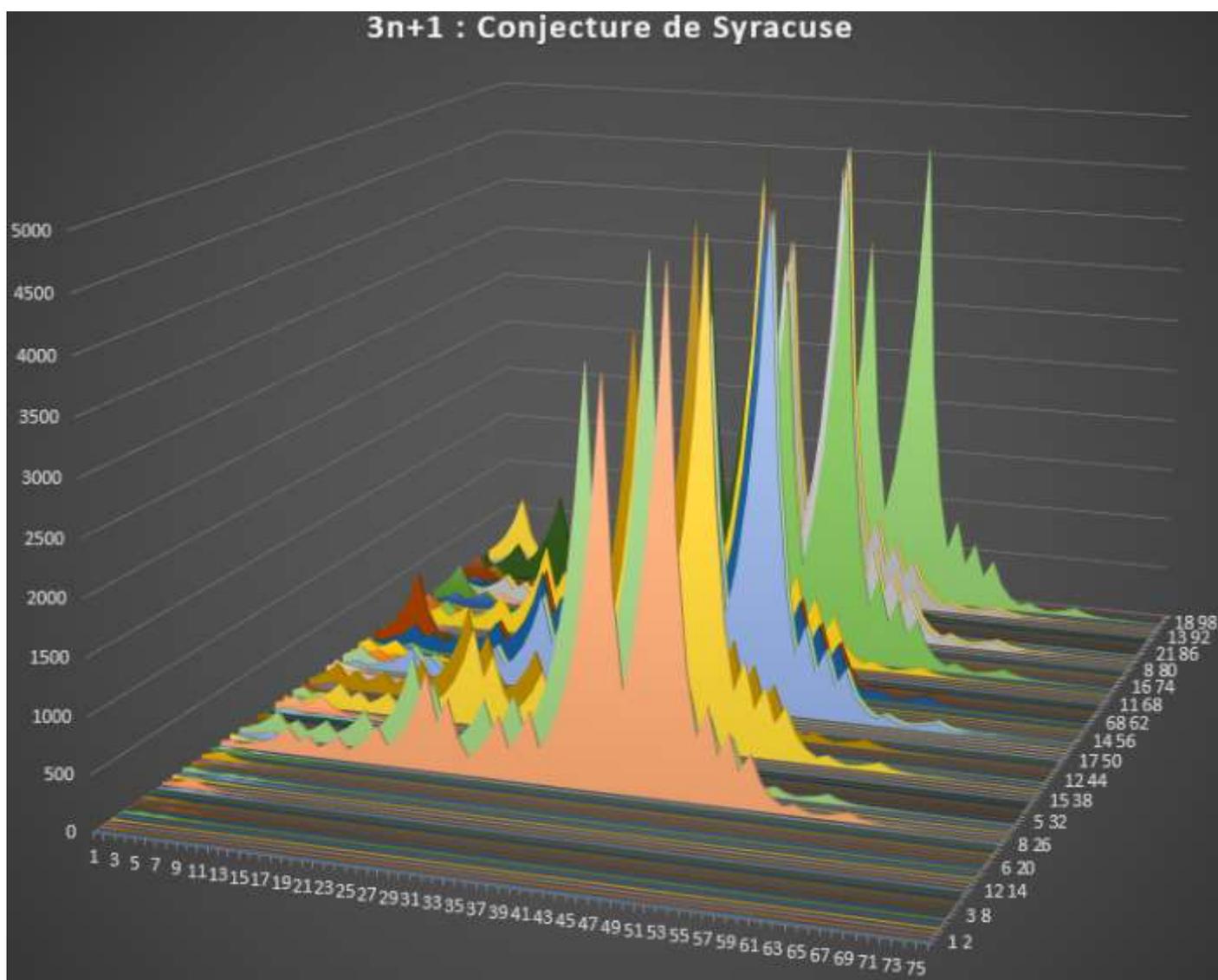
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Conjecture de SYRACUSE : avancées inédites

Ou conjecture de COLLATZ ou problème $3x+1$

Rénald Simonetto



© 2017

mathsyracuse.wordpress.com

A mes parents,
sœurs, frère et mes enfants.

© 2017, Réналd Simonetto, Paris, France.

ISBN-13 : 9781533061195

ISBN-10 : 153306119X

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L.122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les "copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective" et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, "toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite" (art. L.122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L.335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

« On ne force pas une curiosité, on l'éveille. »,
Daniel Pennac, Comme un roman.

« La ténacité peut avoir raison de la raison elle-même. »,
Paul Carvel, Jets d'encre.

« Si l'idée n'est pas a priori absurde, elle est sans espoir. »
« L'imagination est plus importante que le savoir. »
« Un problème sans solution est un problème mal posé. »
Albert Einstein.

1. Préface

Il est, parmi les grands défis mathématiques, des problèmes qui apparaissent extrêmement simples mais qui font cauchemarder les mathématiciens les plus aguerris, les plus passionnés, les plus fanatiques.

Prenez un nombre quelconque,
S'il est impair multipliez-le par 3 et ajoutez-y 1,
S'il est pair divisez-le par 2,
Et recommencez l'opération.

Au travers d'un parcours chaotique, quel que soit le nombre choisi, il retombera à 1.
Et personne ne parvient à le prouver !

Vraiment ?

La formidable puissance brute de calcul des ordinateurs du XXI siècle ne parvenant pas à résoudre ce problème accessible à la compréhension d'un enfant de 6 ans me fascina immédiatement.

Nous étions une dizaine d'amis, lorsque je soumis cette curiosité mathématique pour s'interroger ensemble sur la complexité du monde qui nous entoure et nous demander si les mathématiques étaient un outil pertinent ou non pour l'expliquer, l'interpréter ou même le comprendre.

Cet étonnant message divin consistant à réduire tous les nombres à la singularité la plus élémentaire, le chiffre 1, au travers d'un extraordinaire parcours chaotique provoqua les réflexions les plus drôles et les plus variées.

L'auteur de cet ouvrage, nous offre non seulement une compilation des pistes de réflexions les plus diverses et modernes pour la résolution de cette singulière énigme $3x+1$, fameuse conjecture de Syracuse, mais il souligne également des pistes plus aventureuses et atypiques de mode de résolution. Il explore des chemins tortueux et novateurs rendant ces approches accessibles à tous. Il ne renonce pas à entamer une chasse logique et pragmatique pour débusquer une élucubration divine vraisemblablement encore inintelligible à la rationalité humaine.

Si les mathématiques ne sont pas prêtes pour la résolution de ce type de problème selon beaucoup de scientifiques internationaux reconnus, l'auteur nous permet d'appréhender la théorie élémentaire des nombres au travers de réflexions à la fois logiques, visuelles et empiriques.

Il développe une approche novatrice, ludique et ouverte en proposant à tous de contribuer à la résolution de ce problème théorique particulièrement complexe et passionnant. Il nous expose via des graphiques la représentation d'un message subliminal. Il traduit les mathématiques par des vols et des périodes pour chaque nombre. Chaque lecteur est invité à apporter sa propre

contribution sur son blog. Enfin, il partage son interprétation personnelle pour permettre la résolution de ce problème qui hante les nuits de chaque mathématicien qui sommeille en nous.

Je souhaite au lecteur le même véritable plaisir et délectation à découvrir les outils de réflexions mis en œuvre par l'auteur dans cet ouvrage que j'ai moi-même ressenti.

Bonne lecture à tous.

Sommaire

1. PREFACE	4
2. CONJECTURE DE SYRACUSE OU DE COLLATZ	10
1. POURQUOI CHERCHER ?.....	12
2. NOTATION	13
3. DUREE DE VOL	15
4. FORME ALLEGORIQUE : ARBRE	15
5. FORME ALLEGORIQUE : POMMADE MAGIQUE.....	15
3. SUITE DE SYRACUSE SIMPLIFIEE OU COMPRESSEE	16
1. NOTATION	19
2. SUITES ALTERNATIVES.....	20
3. SUITE DE SYRACUSE COMPLEMENTAIRE ET PSEUDO COMPLEMENTAIRE	26
1. <i>Nombre d'itérations consécutives paires et impaires identiques</i>	31
4. SUITE DE SYRACUSE MODULO 4.....	32
1. <i>Suite de Syracuse simplifiée modulo 4</i>	32
2. <i>Suite de Syracuse pseudo complémentaire modulo 4</i>	36
5. FONCTION I DE LA DUREE DU VOL.....	36
6. FORME ALLEGORIQUE : TROU NOIR	37
7. FORME ALLEGORIQUE : BOURSE	38
4. OBSERVATIONS	39
1. OBSERVATIONS GRAPHIQUES : DROITES LOGARITHMIQUES.....	40
1. <i>Droites logarithmiques croissantes</i>	44
2. <i>Droites logarithmiques décroissantes</i>	49
3. <i>Hauteur de vol maximale selon la valeur de départ de la suite</i>	51
4. <i>Facteurs multiplicateurs</i>	55
5. <i>Suite dénuée de perturbation</i>	57
2. OBSERVATIONS NUMERIQUES : PARITES ALTERNÉES	58
3. PROPORTION D'ITERATIONS PAIRES ET IMPAIRES D'UN MEME VOL	61
4. FORME ALLEGORIQUE : AUTOROUTES.....	66
5. FORME ALLEGORIQUE : CHEVEUX.....	66
5. STRATEGIES DE RESOLUTIONS	67
1. FORME ALLEGORIQUE : ROME.....	68
2. FORME ALLEGORIQUE : MUSIQUE.....	68
6. UNE PREUVE DE CONVERGENCE EST-ELLE POSSIBLE ?	69
1. AUX LIMITES	69
2. SI LA VALEUR DE DEPART EST GRANDE	71
3. ECART ENTRE DEUX VOLS N ET M.....	80
1. <i>Somme des taux de variations</i>	83
2. <i>Mesure des accroissements linéaires</i>	84
4. SOMME DES UN(N) PAR RANG N POUR TOUS $N \leq C$	86
1. <i>Cycle final {1,2}</i>	94
5. BORNES ET ENCADREMENT	95
1. <i>Borne inférieure : ne peut pas être plus petit que</i>	95
2. <i>Borne supérieure : ne peut pas être plus grand que</i>	97
6. DECROISSANCE.....	100
7. TAUX DE CROISSANCE ET DE DECROISSANCE.....	101
8. CONVERGENCE.....	109
1. <i>Vitesse de convergence linéaire</i>	109
2. <i>Vitesse de convergence quadratique</i>	110

3.	<i>Taux de convergence minimum d'itérations paires vis-à-vis des impaires</i>	111
4.	<i>Itérations des impaires de la forme $2k+1, 4k+3, 8k+7, 16k+15$...</i>	113
9.	FORME ALLEGORIQUE : SANG.....	115
10.	FORME ALLEGORIQUE : HUMEUR.....	115
7.	OUTILS ET AUTRES FORMES	116
1.	AVANT-PROPOS.....	117
1.	<i>Règles de parité</i>	117
2.	<i>Relations combinatoires des nombres entiers</i>	118
3.	<i>Relation entre puissances de 2 et 3</i>	120
4.	<i>Décomposition en puissance de 2</i>	121
5.	<i>Décomposition en puissance de 10</i>	123
6.	<i>Décomposition en produit de facteurs premiers</i>	125
7.	<i>Horloge ou roue à modulus</i>	126
8.	<i>Modulo 10 ou l'analyse des unités</i>	129
9.	<i>Ajout dans la suite</i>	132
10.	<i>Crible géométrique de Matiassevitch</i>	134
11.	<i>Convexité</i>	139
12.	<i>Alphabet de Syracuse</i>	140
2.	MOYENNES, SOMMES ET PRODUITS.....	141
1.	<i>Moyenne</i>	141
2.	<i>Somme</i>	144
3.	<i>Somme des rapports</i>	150
4.	<i>Produit</i>	152
5.	<i>Produit des rapports</i>	157
6.	<i>Moyenne quadratique</i>	160
7.	<i>Moyenne quadratique des itérés</i>	161
8.	<i>Moyenne de Heinz</i>	162
9.	<i>Suite pseudo complémentaire</i>	162
3.	APPROCHE TRIGONOMETRIQUE	163
1.	<i>Papier quadrillé pour tracer un vol i de N jusqu'à 100</i>	165
2.	<i>Convergence trigonométrique</i>	169
3.	<i>Autres formes trigonométriques</i>	171
4.	FORME DISCRETE A REELLE.....	180
5.	FORME COMPLEXE DANS LE CERCLE TRIGONOMETRIQUE	183
6.	FONCTION DE SYRACUSE	186
7.	PARCOURS DE DROITES	188
8.	TRANSLATIONS VERTICALES ET HORIZONTALES	190
1.	<i>Translation sur N au rang $n=1$</i>	191
2.	<i>Translation sur N au rang n quelconque</i>	194
3.	<i>Relation entre les vols avec des valeurs de départ proportionnelles</i>	197
9.	DISTANCES ET CYCLE UNIQUE	199
10.	ORDRE RETROGRADE, INVERSE OU DES PREDECESSEURS.....	204
1.	<i>Ordre rétrograde modulo 2</i>	205
2.	<i>Mailles du filet de la suite de Syracuse rétrograde</i>	209
3.	<i>Nombre de valeurs de la suite de Syracuse rétrograde par rang</i>	211
4.	<i>Boucles de la suite rétrograde</i>	217
5.	<i>Itération rétrograde modulo 2</i>	221
6.	<i>Forme trigonométrique rétrograde modulo 2</i>	223
7.	<i>Ordre rétrograde modulo 4</i>	227
8.	<i>Itération rétrograde modulo 4</i>	230
9.	<i>Forme trigonométrique rétrograde modulo 4</i>	231
11.	SUBDIVISIONS ENTRE DEUX PUISSANCES DE 2	234
12.	EMPILEMENTS.....	237
13.	COMBINAISONS DE VOLS	240
1.	<i>Etude préliminaire</i>	241
2.	<i>Combinaisons linéaires de trois vols collatéraux</i>	243

3.	<i>Sommes d'entiers consécutifs avec Syracuse</i>	246
4.	<i>Combinaisons linéaires de plusieurs vols collatéraux</i>	250
5.	<i>Combinaisons au second rang de la suite de Syracuse</i>	252
6.	<i>Combinaisons de produits de vols collatéraux</i>	254
14.	AUTRES PISTES	258
1.	<i>Transformée de Laplace</i>	259
2.	<i>Transformée en z, équation caractéristique et série génératrice</i>	263
3.	<i>Polynômisation de la suite de Syracuse</i>	266
4.	<i>Alternative : miroir négatif</i>	268
5.	<i>Au carré</i>	269
6.	<i>Forme polaire</i>	271
7.	<i>Incrémentation impaire</i>	272
15.	FORME ALLEGORIQUE : CERVEAU.....	273
16.	FORME ALLEGORIQUE : COURANT ELECTRIQUE	273
8.	RESOLUTION ET PREUVE	274
1.	SEQUENCES IDENTIQUES DE VOLS	275
2.	UNICITE DU CYCLE FINAL $\{2,1,2,1,\dots\}$ DE LA SUITE DE SYRACUSE.....	277
1.	<i>Point d'attraction</i>	281
2.	<i>Infinité de cycles réels de longueurs finies</i>	282
3.	RESOLUTION PARTIELLE.....	283
1.	<i>Colonne vertébrale en puissance de 2 : N toujours pair</i>	284
2.	<i>Ensemble des nombres pairs</i>	286
3.	<i>Sous ensemble impair puis toujours pairs</i>	287
4.	<i>1^{ère} généralisation : N p fois impairs puis r fois pairs</i>	289
5.	<i>2^{nde} généralisation : N quelconque</i>	293
4.	TRANSITIONS : CONDITIONS DE CHANGEMENT DE PARITE	299
1.	<i>n fois pairs / n fois impairs</i>	300
2.	<i>Transition de pair(s) à impair</i>	303
3.	<i>Transition d'impair(s) à pair</i>	305
4.	<i>Transition de parité à une autre : méthode rapide de calcul d'un vol</i>	308
5.	<i>Conditions sur N pour des itérations successives</i>	311
5.	RESOLUTION PAR ITERATION MULTIPLE.....	312
1.	<i>Trajectoires $4m+3$</i>	321
2.	<i>Autre cycle possible ?</i>	324
3.	<i>Calcul indiciel de la suite de Syracuse</i>	326
4.	<i>Descente rapide vers 1 possible ?</i>	331
5.	<i>Analyse rétrograde</i>	332
6.	<i>Forme globale</i>	337
6.	ITERATION INDICIELLE MODULO 4.....	339
7.	TRAJECTOIRES, $U_N(N) = 4k + 3$ ET $U_N(N) < N$	342
1.	<i>A-t-on $U_k(N) < N$ dans tous les cas ?</i>	351
2.	<i>Quelle est la forme d'un entier qui croîtrait sans fin ?</i>	355
3.	<i>Conditions pour une forme $4k+3$ et taux d'attraction</i>	358
8.	FORME ALLEGORIQUE : DIVINITE	371
9.	FORME ALLEGORIQUE : VIE ET MORT	371
9.	CONCLUSION ET PERSPECTIVES	372
1.	ET APRES.....	373
2.	FORME ALLEGORIQUE : TEMPS	374
3.	FORME ALLEGORIQUE : RECETTE.....	374
10.	REFERENCES	375
1.	SUR LE WEB	375
2.	ARTICLES ET PUBLICATIONS	376
3.	FORME ALLEGORIQUE : VECU.....	383
4.	FORME ALLEGORIQUE : INTERFERENCES ELECTRIQUES	383

11. REMERCIEMENTS ET A PROPOS DE L'AUTEUR	384
1. FORME ALLEGORIQUE : CELLULE	386
2. FORME ALLEGORIQUE : VAGUES.....	387
12. ANNEXES	388
1. TABLEAU DES 128 PREMIERS VOLS DE LA SUITE DE SYRACUSE	389
2. AUTRES FORMES ALLEGORIQUES	392
1. <i>Réseau ferroviaire</i>	392
2. <i>Rues</i>	392
3. CONJECTURE DE SYRACUSE	393

2. Conjecture de Syracuse ou de Collatz

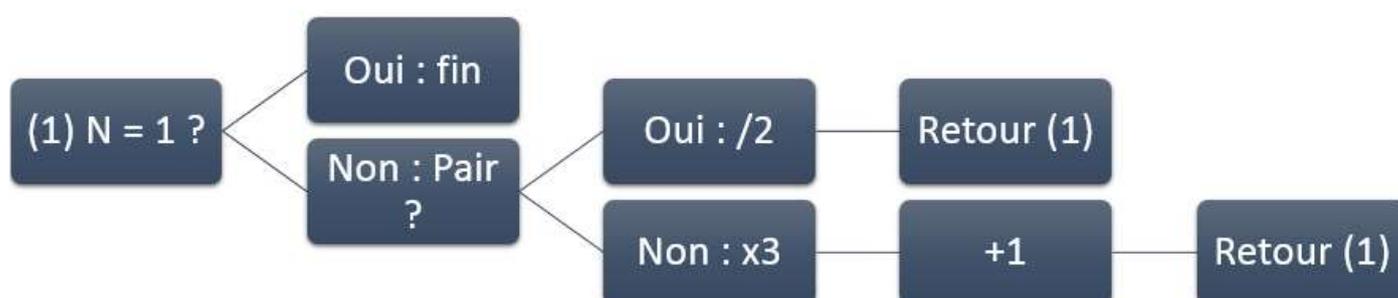
Tout d'abord, ce livre n'est pas un livre de mathématiques ni un livre d'expert, ni un livre destiné aux étudiants de sciences. Ce livre est une étude, parfois ludique mais stricte, autour de la conjecture de Syracuse afin de la faire connaître auprès d'un lectorat élargi et de la présenter sous différentes formes afin d'en élargir sa compréhension et en saisir son intérêt.

La conjecture de Syracuse, élaborée par **Lothar Collatz en 1937**, mathématicien allemand, reste à ce jour un mystère. Impossible pour quiconque de prouver ou réfuter cette hypothèse pourtant si simple à décrire. S'y intéresser revient vite à de l'addiction sans fin. En effet, comment un problème qui paraît simple résiste aux plus grands chercheurs de notre époque ? Bien sûr des avancées ont été faites. Mais force est de constater que la manipulation des nombres entiers combinés à leurs parités rend cet exercice toujours insurmontable.

En mathématiques, une **conjecture** est une assertion pour laquelle on ne connaît pas encore de démonstration, mais que l'on soupçonne d'être vraie, en l'absence de contre-exemple. Dans le langage courant, on désigne comme une conjecture, une hypothèse qui n'a encore reçu aucune confirmation.

La suite de Syracuse est une suite d'entiers naturels positifs définie comme suit :

1. Choisissez un nombre entier supérieur à 0,
2. S'il est pair, divisez-le par 2,
3. S'il est impair, multipliez-le par 3 et ajoutez 1,
4. Répétez l'opération 2 ou 3 ci-dessus selon la parité du nombre obtenu jusqu'à ce que vous obteniez le chiffre 1.



Par exemple, à partir de 14, on construit la suite des nombres :

14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

C'est la suite de Syracuse du nombre 14.

Après que le chiffre 1 ait été atteint, si on continue l'opération on obtient la suite de valeurs (1, 4, 2, 1, 4, 2...) qui se répète indéfiniment en un cycle de longueur 3, appelé cycle trivial.

A ce jour il n'a jamais été prouvé que cette suite, pour n'importe quel nombre choisi au départ, converge toujours vers 1.

Cette conjecture est l'hypothèse mathématique selon laquelle la suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif atteint 1.

La **conjecture de Syracuse** est aussi appelée **conjecture de Collatz, problème $3n+1$ ou $3x+1$** mais aussi **HOTPO** pour « half or triple plus one », ce qui signifie « la moitié ou le triple plus un ».

1. Pourquoi chercher ?

Quel est alors l'intérêt de résoudre ce problème ? Le résoudre revient-il à découvrir une toute nouvelle branche des mathématiques ? Ou serait-ce un « simple » théorème de plus ? On l'ignore et c'est pour cela que cette conjecture hante bon nombre de spécialistes. Aussi étonnant que cela puisse paraître, les nombres recèlent de curiosité et de mystère insoupçonnés.

Cet ouvrage se propose de vous présenter la conjecture, des méthodes et des résultats commentés et illustrés pour, dans un premier temps, vous familiariser avec l'étendue réelle du problème.

Puis, On ira un peu plus loin pour comprendre les structures même du problème. Enfin on tentera de résoudre et prouver cette conjecture avec des résultats parfois originaux. Vous saurez ainsi pourquoi cette conjecture résiste encore, 79 ans après qu'elle ait été définie.

On prend comme hypothèse, dans un premier temps, que la conjecture est vérifiée, c'est-à-dire qu'elle est vraie pour tout entier positif. Cela évitera de prouver certains théorèmes parfois évidents, parfois toujours en recherche.

2. Notation

La suite de Syracuse d'un nombre entier N est définie par récurrence, de la manière suivante :

$$u_0 = N$$

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

Et pour tout entier $n \geq 0$:

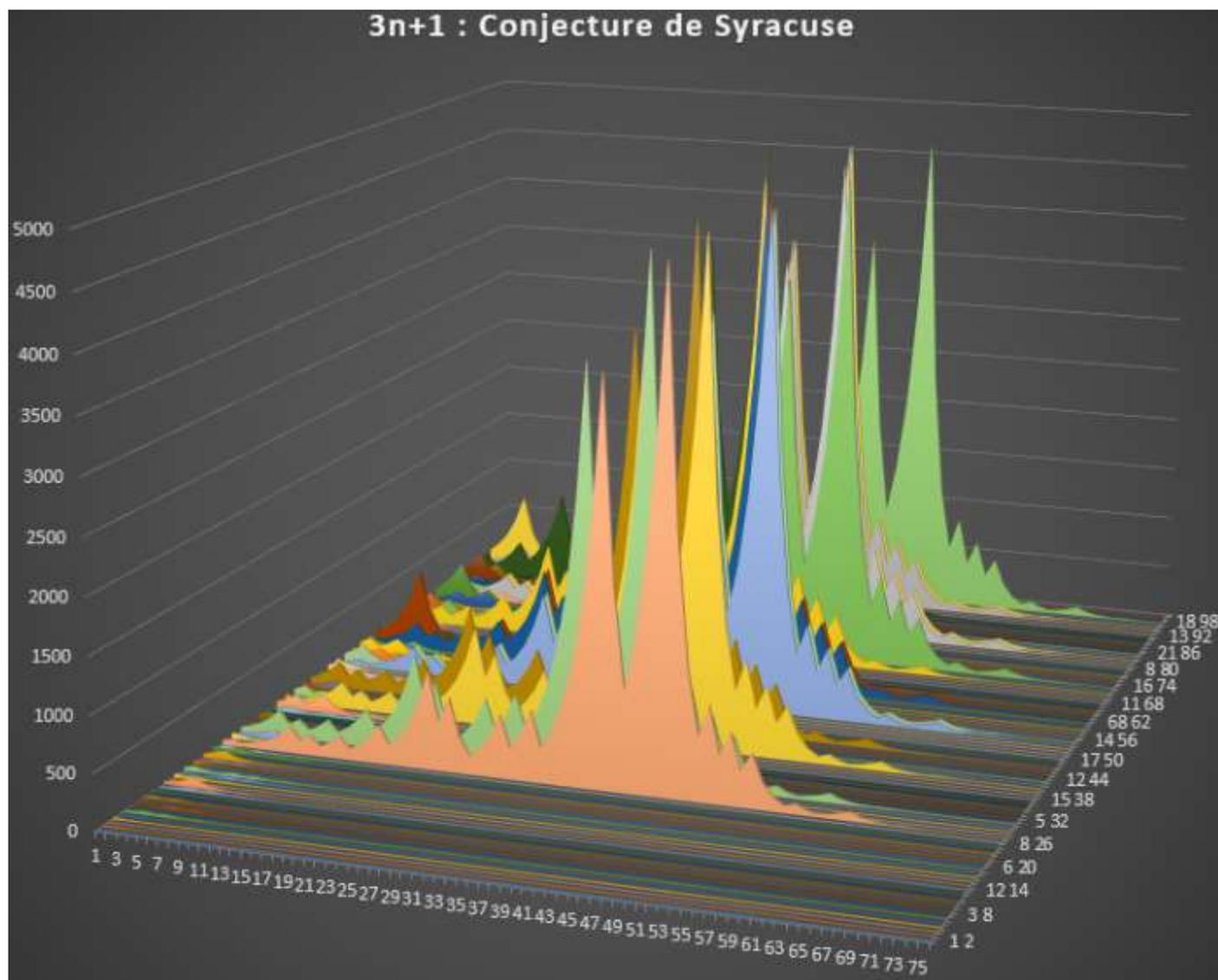
La conjecture affirme que, pour tout $N > 0$, il existe un indice n tel que $u_n = 1$.

L'observation graphique de la suite pour $N = 15$ et pour $N = 127$ montre que la suite peut s'élever assez haut avant de retomber vers 1. Les graphiques font penser à la chute chaotique d'un grêlon ou bien à la trajectoire d'une feuille emportée par le vent. De cette observation est né tout un vocabulaire imagé : on parlera du **vol** de la suite. On définit alors :

- **Le temps de vol** : c'est le plus petit indice n tel que $u_n = 1$.
Il est de 17 pour la suite de Syracuse 15 et de 46 pour la suite de Syracuse 127.
- **Le temps de vol en altitude** : c'est le plus petit indice n tel que $u_{n+1} \leq u_0$.
Il est de 10 pour la suite de Syracuse 15 et de 23 pour la suite de Syracuse 127.
- **L'altitude maximale** : c'est la valeur maximale de la suite.
- Elle est de 160 pour la suite de Syracuse 15 et de 4372 pour la suite de Syracuse 127.

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}	...
15	46	23	70	35	106	53	160	80	40	20	10	5	16	8	4	2	1	...

Voici ci-dessous une représentation de cette suite qui atteint toujours 1 pour $N \leq 100$:



Légende :

- L'axe vertical représente l'altitude
- L'axe horizontal représente le temps de vol
- L'axe en profondeur représente la valeur de départ de la suite $N = U_0$

On remarque à la fois la magie de cette suite qui atteint finalement 1 malgré des altitudes et des temps de vol importants indépendamment de la valeur de départ de la suite. Cet aspect chaotique en vaguelettes représente une difficulté majeure de résolution mathématique.

3. Durée de vol

La conjecture admet des énoncés équivalents, par exemple :

- Pour tout N , la suite a une durée de vol finie ;
- Pour tout N , la suite a une durée de vol en altitude finie.

4. Forme allégorique : Arbre

Imaginez la suite de Syracuse comme bien plus large qu'une simple suite chaotique de nombres mais comme la représentation exacte de la vie, la nature ou tout autre aspect plus ou moins observable de notre environnement, à la fois infiniment gigantesque et minuscule.

A la fin de chaque chapitre deux formes allégoriques ont été ajoutées. Elles sont autant de superposition de la suite de Syracuse dans d'autres domaines que de possibilités que notre imaginaire permet. Là aussi, l'infini est possible et l'unité ou l'unicité en est toujours la clé.

Voici la première dénommée arbre. Imaginer un arbre plein de feuilles. Un fort vent arrive. Toutes les feuilles s'envolent à différentes hauteurs, restent en vol un temps distinct et atterrissent toutes sans exception sur le sol. Ici, chaque feuille de l'arbre représente un nombre entier et le sol le chiffre 1. Alors, saurez-vous prédire la force du vent à chaque instant, exercée sur chacune des innombrables feuilles de l'arbre ?

5. Forme allégorique : Pommade magique

Quels que soient les bleus, petits ou grands, la pommade soigne le corps comme par magie. Mais quels sont les principes actifs de cette pommade ? Si les nombres sont les symptômes ou bactéries dans notre corps, peu importe la maladie, la pommade guérira tout selon une durée variable (la durée de vol). D'abord, la pommade, si le bleu est grand ou petit mais profond, le fera gonfler pour le protéger en forçant l'immobilisation. Puis peu à peu la plaie se referme, l'aspect s'éclaircit, la bosse diminue, et le corps est guéri (état 1). Il faut donc une modification préalable à toute guérison. Les puissances de 2, aussi grandes soient elles, représentent tous des petits bobos ou maladies sans risques (guérison rapide = descente rapide vers 1). Le nombre 27 par exemple constitue une maladie grave, longue à se débarrasser et qui peut prendre des proportions gigantesques. Mais la pommade résout tout, avec le temps.

3. Suite de Syracuse simplifiée ou compressée

On remarque que pour tout U_n impair, $U_{n+1} = 3U_n + 1$ est toujours pair. Un nombre impair quelconque multiplié par un autre impair (3) est toujours impair. Et si on lui ajoute 1, il sera toujours pair. Ainsi, dans ce cas : $U_{n+2} = \frac{U_{n+1}}{2} = \frac{3U_n+1}{2}$.

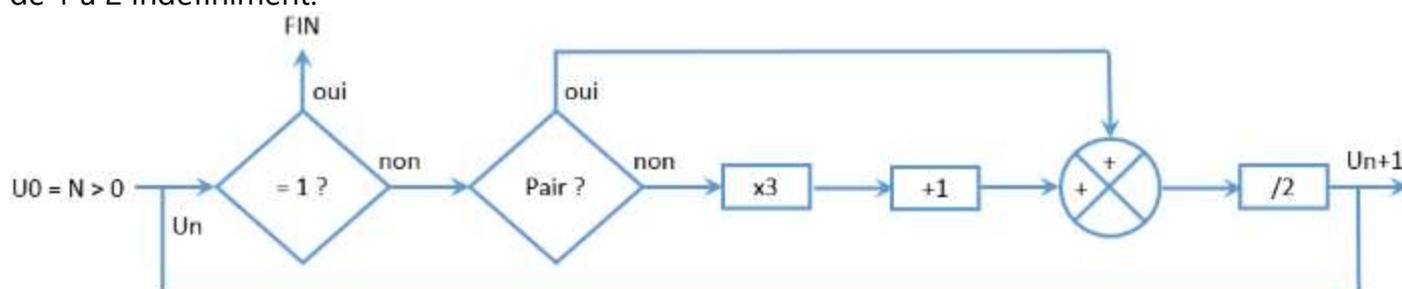
De ce fait, on a la suite de Syracuse simplifiée suivante qui admet les mêmes propriétés et convergence que la suite générale vers le cycle infini $\{2,1,2,1,\dots\}$ plutôt que $\{4,2,1,4,2,1,\dots\}$ précédemment. Ainsi, on pose :

$$U_{n+1} = \begin{cases} U_0 = N \\ \frac{U_n}{2} & \text{si } U_n \text{ est pair} \\ \frac{3U_n + 1}{2} & \text{si } U_n \text{ est impair} \end{cases}$$

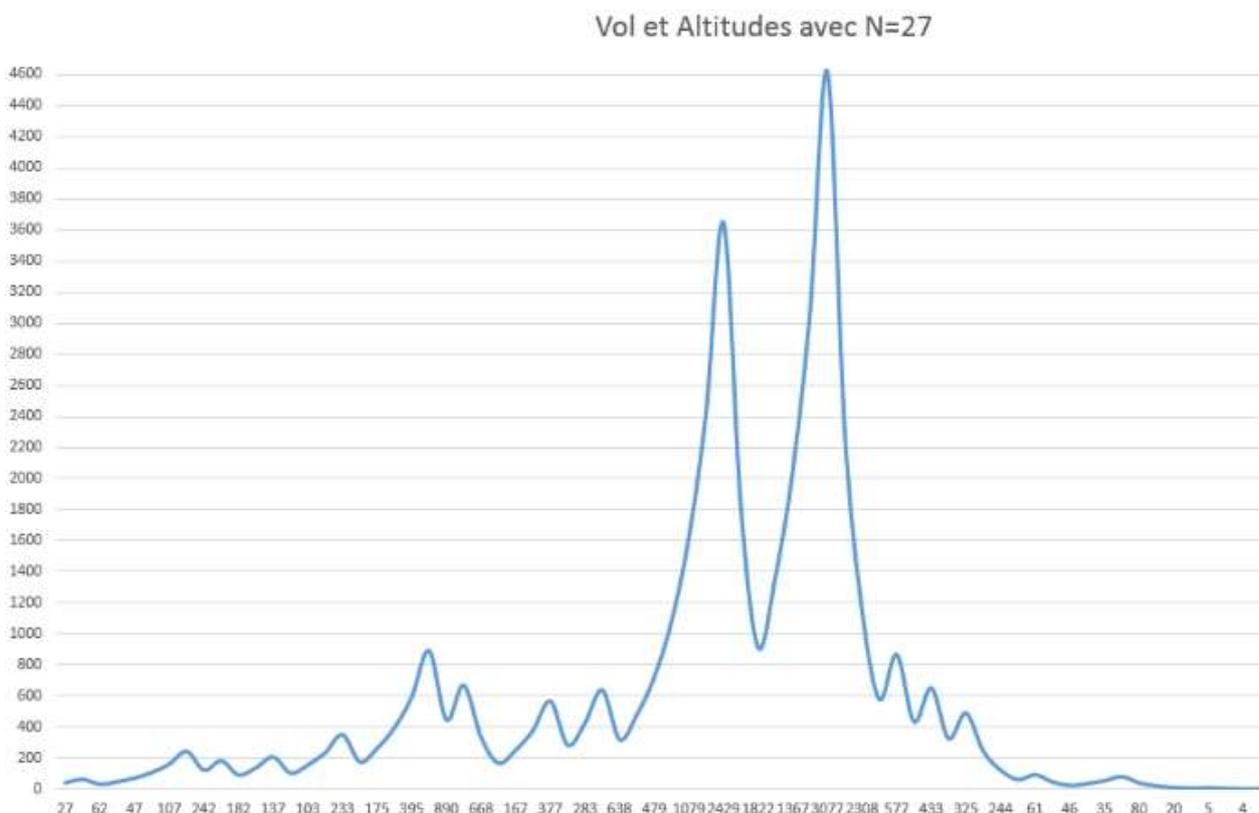
$\forall N > 0 \exists i / U_i = 1$

Du fait d'avoir intégré une étape de division par 2 aux nombres impairs de la suite, diminue d'autant la durée vol jusqu'à l'atteinte de 1. C'est pour cela qu'on l'appelle aussi suite compressée. Elle converge plus rapidement vers 1. Mais elle conserve toutes ses propriétés chaotiques de convergence, à ce jour, inexplicées.

Le graphique ci-dessous montre l'aspect autorégulé ou auto-asservi d'un tel système si la conjecture est vérifiée. En effet, quelle que soit l'entrée N, la sortie finit par jongler inlassablement de 1 à 2 indéfiniment.



Voici un exemple avec $N=27$, $i=70$ et l'altitude maximale est de 4616 :



Dans les écrits suivants, on considère **toujours** cette forme simplifiée plutôt que la forme générale. De plus, on notera indépendamment $U_n = U_n(N)$ quel que soit $N > 0$.

Pour illustrer les vols, durées de vols, fréquences ou occurrences de nombres pairs et impairs et leurs ratios, voici un tableau avec toutes ces valeurs pour $N < 26$:

#Impairs / #Pairs	#Pairs	#Impairs	i	$U_0(N) = N$	$U_n(N) \dots$																	
0,00	0	0	0	1																		
0,00	1	0	1	2	1																	
0,67	3	2	5	3	5	8	4	2	1													
0,00	2	0	2	4	2	1																
0,33	3	1	4	5	8	4	2	1														
0,50	4	2	6	6	3	5	8	4	2	1												
0,83	6	5	11	7	11	17	26	13	20	10	5	8	4	2	1							
0,00	3	0	3	8	4	2	1															
0,86	7	6	13	9	14	7	11	17	26	13	20	10	5	8	4	2	1					
0,25	4	1	5	10	5	8	4	2	1													
0,67	6	4	10	11	17	26	13	20	10	5	8	4	2	1								
0,40	5	2	7	12	6	3	5	8	4	2	1											

1. Notation

Soit la fonction suite $U_n(N)$ avec $(N, n) \in \mathbb{N}, N > 0$ et $n \geq 0$ telle que, quel que soit N :

$$\begin{aligned}
 U_0(N) &= N \\
 U_1(N) &= \frac{N}{2} \text{ si } N \text{ est pair} \\
 U_1(N) &= \frac{3N+1}{2} \text{ si } N \text{ est impair} \\
 U_2(N) &= \frac{U_1(N)}{2} \text{ si } U_1(N) \text{ est pair} \\
 U_2(N) &= \frac{3U_1(N)+1}{2} \text{ si } U_1(N) \text{ est impair} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Jusqu'à ce qu'il existe systématiquement un rang $i \in \mathbb{N}$ avec $i > 0$ tel que :
 $U_i(N) = 1$: Hypothèse de convergence à prouver.

De même, on peut également écrire :

$$\begin{aligned}
 U_0(N) &= N \\
 &\dots \\
 U_j(N) &= \frac{U_{j-1}(N)}{2} \text{ si } U_{j-1}(N) \text{ est pair } \forall i \geq j > 0 \\
 U_j(N) &= \frac{3U_{j-1}(N)+1}{2} \text{ si } U_{j-1}(N) \text{ est impair } \forall i \geq j > 0 \\
 &\dots \\
 U_i(N) &= 1
 \end{aligned}$$

Si $U_i(N)$ atteint 1, on entre systématiquement dans une boucle infinie $\{1, 2, 1, \dots\}$ car :

$$\begin{aligned}
 U_i(N) &= 1 \\
 U_{i+1}(N) &= \frac{3U_i(N)+1}{2} = 2 \\
 U_{i+2}(N) &= \frac{U_{i+1}(N)}{2} = 1 = U_i(N) \\
 U_{i+3}(N) &= 2 = U_{i+1}(N)
 \end{aligned}$$

Et ainsi de suite... soit :

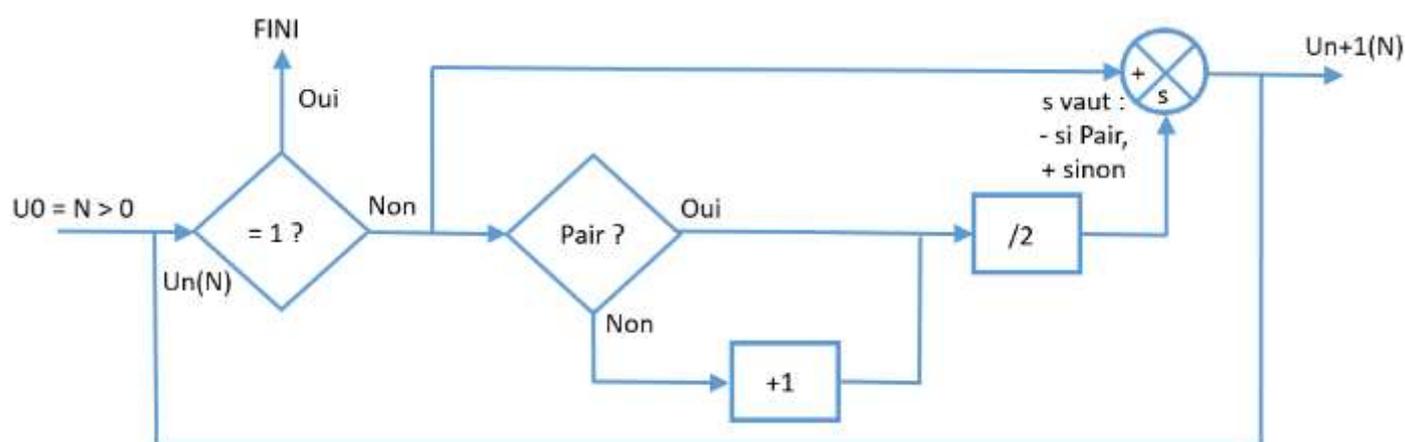
$$U_{i+2k}(N) = 1 \text{ et } U_{i+2k-1}(N) = 2 \quad \forall k \geq 0$$

2. Suites alternatives

La suite de Syracuse peut également s'écrire comme un ajout ou un retrait de sa propre moitié :

$$U_{n+1} = \begin{cases} U_0 = N \\ \left(U_n - \frac{U_n}{2} \right) \text{ si } U_n \text{ est pair} \\ \left(\left(U_n + \frac{U_n}{2} \right) + \frac{1}{2} = \left(U_n + \frac{U_n + 1}{2} \right) \right) \text{ si } U_n \text{ est impair} \\ \forall N > 0 \exists i / U_i = 1 \end{cases}$$

Voici le graphique qui illustre cette façon de voir la même suite de Syracuse :



Le $+1/2$ dans le cas impair permet de garantir la division entière (résultat sans virgule). Mais peut-on alors trouver d'autres formes qui suivent cette conjecture ? Essayons en retranchant $1/2$, soit :

$$U_{n+1} = \begin{cases} \left(U_n - \frac{U_n}{2} \right) \text{ si } U_n \text{ est pair} \\ \left(\left(U_n + \frac{U_n}{2} \right) - \frac{1}{2} = \left(\frac{3U_n - 1}{2} \right) \right) \text{ si } U_n \text{ est impair} \end{cases}$$

On essaie avec quelques nombres :

$N = 6 > 3 > 4 > 2 > 1 > 1 > 1 \dots$

$N = 11 > 16 > 8 > 4 > 2 > 1 > 1 \dots$

$N = 27 > 40 > 20 > 10 > 5 > 7 > 10 !!$

Cette suite ne converge pas vers 1 car il existe au moins 1 autre cycle infini $\{10, 5, 7, 10, \dots\}$.

Pour investiguer davantage, on teste toutes les combinaisons de signes positifs et négatifs de l'équation suivante :

$$U_{n+1} = \begin{cases} U_n \pm \frac{U_n}{2} \pm 1 \text{ si } U_n \text{ est pair} \\ U_n \pm \frac{U_n}{2} \pm \frac{1}{2} = U_n \pm \frac{U_n \pm 1}{2} \text{ si } U_n \text{ est impair} \end{cases}$$

Soit 36 combinaisons possibles (6 pairs x 6 impairs). Vous trouverez dans le tableau suivant les résultats de la plupart de ces combinaisons.

$U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{2} & \text{si } U_n \text{ est pair} \\ \frac{3U_n + 1}{2} & \text{si } U_n \text{ est impair} \end{cases}$	<p>Suite de Syracuse où selon sa conjecture toute valeur N>0 de départ converge vers 1 (cycle 1 > 2 > 1...), avec aucun contre-exemple trouvé à ce jour.</p>
$U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{2} & \text{si } U_n \text{ est pair} \\ \frac{3U_n - 1}{2} & \text{si } U_n \text{ est impair} \end{cases}$	<p>N = 6 > 3 > 4 > 2 > 1 > 1... N = 11 > 16 > 8 > 4 > 2 > 1 > 1... N = 17 > 25 > 37 > 55 > 82 > 41 > 61 > 91 > 136 > 68 > 34 > 17 !! boucle infinie N = 27 > 40 > 20 > 10 > 5 > 7 > 10 : nouvelle boucle infinie → Convergence observée vers 1 ou Deux cycles en 5 et 17 si N>0</p>
$U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{2} - 1 & \text{si } U_n \text{ est pair} \\ \frac{3U_n + 1}{2} & \text{si } U_n \text{ est impair} \end{cases}$	<p>N = 6 > 2 > 0 N = 11 > 17 > 26 > 12 > 5 > 8 > 3 > 5 > 8 !! boucle infinie différente du cas précédent et suivant N = 15 > 23 > 35 > 53 > 80 > 39 > 59 > 89 > 134 > 66 > 32 > 15 !! autre boucle infinie N = 27 > 41 > 62 > 30 > 14 > 6 > 2 > 0 → Convergence observée vers 0 ou Deux cycles en 3 et 15 si N>0</p>
$U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{2} - 1 & \text{si } U_n \text{ est pair} \\ \frac{3U_n - 1}{2} & \text{si } U_n \text{ est impair} \end{cases}$	<p>N = 6 > 2 > 0 N = 11 > 16 > 7 > 10 > 4 > 1 > 1... !! boucle infinie N = 13 > 19 > 28 > 13 !! autre boucle infinie N = 27 > 40 > 19 : idem ci-dessus N = 31 > 46 > 22 > 10 > 4 > 1 > 1... N = 33 > 49 > 73 > 109 > 163 > 244 > 121 > 181 > 271 > 406 > 202 > 100 > 49 : nouvelle boucle infinie → Convergence observée vers 0 ou 1 ou Deux cycles en 13 et 49 si N>0</p>
$U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{2} + 1 & \text{si } U_n \text{ est pair} \\ \frac{3U_n + 1}{2} & \text{si } U_n \text{ est impair} \end{cases}$	<p>N = 1 > 2 > 2 > 2... !! boucle infinie N = 6 > 4 > 3 > 5 > 8 > 5 > 8 !! boucle infinie différente N = 11 > 17 > 26 > 14 > 8 : idem ci-dessus N = 15 > 23 > 35 > 53 > 80 > 41 > 62 > 32 > 17 : idem ci-dessus N = 27 > 41 > 62 > 32 > 17 : idem ci-dessus N = 31 > 47 > 71 > 107 > 161 > 242 > 122 > 62 : idem ci-dessus N = 72 > 37 > 56 > 29 > 44 > 23 : idem ci-dessus → Nouvelle conjecture vers le cycle 5 > 8 > 5... si N>2</p>
$U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{2} + 1 & \text{si } U_n \text{ est pair} \\ \frac{3U_n - 1}{2} & \text{si } U_n \text{ est impair} \end{cases}$	<p>N = 1 > 1... N = 2 > 2... N = 6 > 4 > 3 > 4 > 3 !! boucle infinie</p>

	<p>N = 11 > 16 > 9 > 13 > 19 > 28 > 15 > 22 > 12 > 7 > 10 > 6 : idem ci-dessus N = 15 > 22 : idem ci-dessus N = 27 > 40 > 21 > 31 > 46 > 24 > 13 : idem ci-dessus N = 31 : idem ci-dessus N = 72 > 37 > 55 > 82 > 42 > 22 : idem ci-dessus → Nouvelle conjecture vers le cycle 3 > 4 > 3... si N>2</p>
$U_{n+1} = \begin{cases} U_n + \frac{U_n}{2} & \text{si } U_n \text{ est pair} \\ \frac{U_n + 1}{2} & \text{si } U_n \text{ est impair} \end{cases}$	<p>N = 1 > 1... N = 6 > 9 > 5 > 3 > 2 > 3 !! boucle infinie N = 11 > 6 : idem ci-dessus N = 27 > 14 > 21 > 11 : idem ci-dessus N = 31 > 16 > 24 > 36 > 54 > 81 > 41 > 21 > 11 : idem ci-dessus N = 72 > 108 > 162 > 243 > 122 > 183 > 92 > 138 > 207 > 104 > 156 > 234 > 351 > 176 > ... > 47 > 24 : idem ci-dessus → Nouvelle conjecture vers le cycle 2 > 3 > 2... si N>1</p>
$U_{n+1} = \begin{cases} U_n + \frac{U_n}{2} & \text{si } U_n \text{ est pair} \\ \frac{U_n - 1}{2} & \text{si } U_n \text{ est impair} \end{cases}$	<p>N = 6 > 9 > 4 > 6 : boucle infinie !! N = 11 > 5 > 2 > 3 > 1 > 0 N = 16 > 24 > 36 > 54 > 81 > 40 > 60 > 90 > 135 > 67 > 33 > 16 : nouvelle boucle infinie → Convergence observée vers 0 ou Deux cycles en 4 et 16 si N>0</p>

Visiblement il n'existe apparemment pas de suite simple équivalente à celle de Syracuse qui converge uniquement vers 1. En revanche il existe bien des conjectures (cf. les 3 grisées dans le tableau ci-dessus) qui convergeraient exclusivement vers d'autres uniques cycles infinis (différents de 1).

Vous trouverez dans les deux tableaux suivants les résultats pour les 36 combinaisons possibles testées pour $N < 131$:

		<i>Si U_n est pair alors $U_{n+1} = \dots$</i>		
		$\frac{U_n}{2} - 1$	$\frac{U_n}{2}$	$\frac{U_n}{2} + 1$
<i>Si U_n est impair alors $U_{n+1} = \dots$</i>	$\frac{U_n - 3}{2}$	Converge vers -2	0 ou cycle (-1, -2)	Cycle (0, 1, -1, -2)
	$\frac{U_n - 1}{2}$	Converge vers -1	Converge vers 0	2 ou cycle (0, 1)
	$\frac{U_n + 1}{2}$	Cycle (0, -1)	Converge vers 1	Converge vers 2 (ou 1 si $N=1$)
	$\frac{U_n + 3}{2}$	3 ou cycle (0, -1, 1, 2)	3 ou cycle (1, 2)	Converge vers 3 (ou 2 si $N < 3$)
<i>Si U_n est impair alors $U_{n+1} = \dots$</i>	$\frac{3(U_n - 1)}{2}$	3 ou cycles (-3, -6, -4), (23, 33, 48) et (83...)	0 ou 3 ou cycles (15, 21, 30) et (51...)	2, 3 cycles (0, 1), (7, 9, 12) et (19...)
	$\frac{3U_n - 1}{2}$	0 ou 1 ou cycles (13...) et (49...)	1 ou cycles (5...) et (17...)	Cycle (3, 4) (si $N > 2$)
	$\frac{3U_n + 1}{2}$	0 ou cycles (3...) et (15...)	Cycle (1, 2) : SYRACUSE	Cycle (5, 8) (si $N > 2$)
	$\frac{3(U_n + 1)}{2}$	Cycle (0, -1)	Cycle (3, 6)	2 ou cycles (3, 6, 4), (7, 12 ; 21), (25...) et (189...)

		<i>Si U_n est pair alors $U_{n+1} = \dots$</i>		
		$\frac{3U_n}{2} - 1$	$\frac{3U_n}{2}$	$\frac{3U_n}{2} + 1$
<i>Si U_n est impair alors $U_{n+1} = \dots$</i>	$\frac{U_n - 3}{2}$	2 ou cycles (-4, -7, -5), (22, 32, 47) et (82...)	-3 ou 0 ou cycles (12, 18, 27) et (48...)	-2 ou cycles (2, 4, 7) et (14...)
	$\frac{U_n - 1}{2}$	-1 ou 2 ou cycles (14, 20, 29) et (50...)	0 ou cycles (4...) et (16...)	Cycle (0, 1)
	$\frac{U_n + 1}{2}$	1 ou 2 ou cycles (6, 8, 11) et (18...)	Cycle (2, 3) (si $N > 1$)	Cycle (4, 7) (si $N > 1$)
	$\frac{U_n + 3}{2}$	Cycle (4, 5) (si $N > 3$)	Cycle (6, 9) (si $N > 3$)	cycles (4, 7, 5), (8, 13), (22...), (26...) et (190...)
<i>Si U_n est impair alors $U_{n+1} = \dots$</i>	$\frac{3(U_n - 1)}{2}$	Diverge (sauf pour $N=2$ et $N=3$)	Diverge (sauf pour $N < 4$)	Diverge (sauf pour $N=1$ et $N=3$)
	$\frac{3U_n - 1}{2}$	Diverge (sauf pour $N < 3$)	Diverge (sauf pour $N=1$)	Diverge (sauf pour $N=1$)
	$\frac{3U_n + 1}{2}$	Diverge (sauf pour $N < 3$)	Diverge	Diverge
	$\frac{3(U_n + 1)}{2}$	Diverge (sauf pour $N=2$)	Diverge	Diverge

Pour vérifier les convergences éventuelles vers un nombre unique ou un cycle unique, on teste pour les pairs et les impairs la décroissance d'un rang par rapport au suivant. C'est-à-dire qu'il faut que :

$$U_{n+1}(N) < U_n(N) \quad \forall n \geq 0 \text{ et } N > 0$$

Voici le tableau récapitulatif de ces tests de décroissance :

Si U_n pair alors $U_{n+1} = \dots$	Décroissant si...
$\frac{U_n - 1}{2}$	$U_n > -2$
$\frac{U_n}{2}$	$U_n > 0$
$\frac{U_n + 1}{2}$	$U_n > 2$
$\frac{3U_n - 1}{2}$	$U_n < 2 : impossible$
$\frac{3U_n}{2}$	$U_n < 0 : impossible$
$\frac{3U_n + 1}{2}$	$U_n < -2 : impossible$
$\frac{U_n - 3}{2}$	$U_n > -3$
$\frac{U_n - 1}{2}$	$U_n > -1$
$\frac{U_n + 1}{2}$	$U_n > 1$
$\frac{U_n + 3}{2}$	$U_n > 3$
$\frac{3(U_n - 1)}{2}$	$U_n < 3 : impossible$
$\frac{3U_n - 1}{2}$	$U_n < 1 : impossible$
$\frac{3U_n + 1}{2}$	$U_n < -1 : impossible$
$\frac{3(U_n + 1)}{2}$	$U_n < -3 : impossible$

Pour la suite de Syracuse, la partie paire décroît et la partie impaire croît (lignes grisées). La combinaison des deux, selon la conjecture, converge toujours vers 1. On observe que d'autres conjectures existent avec une partie paire ou impaire décroissante et l'autre partie croissante.

Lorsque les parties paires et impaires croissent, la suite diverge systématiquement. En revanche, lorsque les parties paires et impaires décroissent, la suite ne converge pas forcément systématiquement vers une valeur unique dans \mathbb{N} .

En effet, si la suite permet de passer en dessous de zéro, on part en boucle dans un cycle unique infini avec des nombres négatifs. On est donc hors de l'espace des entiers naturels positifs, c'est donc dans cet espace des valeurs indéterminées, et donc sans solution pour la suite. Dans l'espace \mathbb{Z} on observe des solutions sous forme de cycles infinis avec des nombres négatifs.

Enfin, pour les suites mixtes, comme la suite de Syracuse, rien n'est défini à l'avance. Une suite croissante divergente peut, dans certains cas seulement, devenir décroissante convergente en la

combinant avec une suite décroissante convergente. Plus la suite croît vite, et plus la suite décroissante à lui combiner doit avoir une décroissance forte pour contrer la croissance de la première suite. Mais cela n'est pas si simple car la parité joue des tours.

En effet, si la suite tombe plus souvent dans une parité de la suite croissante, la suite globale divergera. En revanche, si la suite tombe plus souvent dans une parité de la suite décroissante, elle convergera et effacera rang après rang l'effet de la suite croissante. Mais, le fait de favoriser une parité plutôt qu'une autre dans la combinaison de deux suites n'est pas du tout évident lorsque les facteurs multiplicateurs et diviseurs des deux suites sont proches. Néanmoins, voici quelques exemples complémentaires, de convergences vers une valeur ou un cycle unique, inspirés des tableaux précédents :

		<i>Si U_n est pair et $k \geq 0$ alors $U_{n+1} = \dots$</i>	
		$\frac{U_n}{2} + k$	$\frac{3U_n}{2} - k$
<i>Si U_n est impair et $k \geq 0$ alors $U_{n+1} = \dots$</i>	$\frac{U_n + 2k - 1}{2}$	<i>Converge vers $2k$ si $N > 2k - 1$</i>	-
	$\frac{U_n + 2k + 1}{2}$	<i>Converge vers $2k + 1$ si $N > 2k$</i>	<i>Cycle $(2(k + 1), 2k + 3)$ si $N > 2k + 1$</i>
	$\frac{U_n + 2k + 3}{2}$	-	<i>Cycle $(2(k + 3), 2k + 9)$ si $N > 2k + 3$</i>
	$\frac{3U_n - 2k + 1}{2}$	<i>Cycle $(2k + 1, 2(k + 1))$ si $N > 2k$</i>	-
	$\frac{3U_n - 2k + 3}{2}$	<i>Cycle $(2k + 3, 2(k + 3))$ si $N > 2k$</i>	-

Il existe donc bien sûr d'autres suites décroissantes qui convergent vers des cycles uniques mais leurs décroissances sont a priori toutes linéaires et assez rapides. On n'est pas face à une suite comme celle de Syracuse qui est totalement chaotique de par ses durées de vols sans logique apparente et de par ses hauteurs de vol tout à fait étonnantes. Rien de tel, qui a priori converge, n'a été observé dans toutes nos variations de la suite de Syracuse. Cette dernière reste aussi un mystère pour cela, son unicité de convergence chaotique observable par tous sans jamais en connaître la raison profonde et ainsi la moindre preuve.

3. Suite de Syracuse complémentaire et pseudo complémentaire

On se propose ici d'approfondir l'étude d'une suite exposée ci-dessus qui a toutes les raisons de retenir notre attention. En effet l'une d'elles suit a priori exactement le schéma de la suite de Syracuse avec un décalage de 1. On l'appelle conjecture de Syracuse complémentaire. Elle fluctue à l'inverse de la suite de Syracuse pour tout N de départ et à chaque rang n. C'est-à-dire que lorsque la valeur est paire la suite croît et lorsque qu'elle est impaire elle décroît. Ainsi on pose :

$$W_{n+1}(N) = \begin{cases} W_0(N) = N \\ \frac{3W_n(N)}{2} \text{ si } W_n(N) \text{ est pair} \\ \frac{W_n(N) - 1}{2} \text{ si } W_n(N) \text{ est impair} \end{cases}$$

Voici un exemple pour N < 33 :

N	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8	W9	W10	W11	W12	W13	W14	W15	W16	W17	W18
1	1	0																
2	3	1	0															
3	1	0																
4	6	9	4															
5	2	3	1	0														
6	9	4	6															
7	3	1	0															
8	12	18	27	13	6	9	4	6										
9	4	6	9															
10	15	7	3	1	0													
11	5	2	3	1	0													
12	18	27	13	6	9	4	6											
13	6	9	4	6														
14	21	10	15	7	3	1	0											
15	7	3	1	0														
16	24	36	54	81	40	60	90	135	67	33	16							
17	8	12	18	27	13	6	9	4	6									
18	27	13	6	9	4	6												
19	9	4	6	9														
20	30	45	22	33	16	24	36	54	81	40	60	90	135	67	33			
21	10	15	7	3	1	0												
22	33	16	24	36	54	81	40	60	90	135	67	33						
23	11	5	2	3	1	0												
24	36	54	81	40	60	90	135	67	33	16	24							
25	12	18	27	13	6	9	4	6										
26	39	19	9	4	6	9												
27	13	6	9	4	6													
28	42	63	31	15	7	3	1	0										

N	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8	W9	W10	W11	W12	W13	W14	W15	W16	W17	W18
29	14	21	10	15	7	3	1	0										
30	45	22	33	16	24	36	54	81	40	60	90	135	67	33				
31	15	7	3	1	0													
32	48	72	108	162	243	121	60	90	135	67	33	16	24	36	54	81	40	60

Si on évalue le taux de croissance des deux suites, on obtient :

$$\frac{U_{n+1}(N)}{U_n(N)} = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2U_n(N)} = \frac{1}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ est pair} \\ \frac{3U_n(N) + 1}{2U_n(N)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2U_n(N)} & \text{si } U_n(N) \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\frac{W_{n+1}(N)}{W_n(N)} = \begin{cases} \frac{3W_n(N)}{2W_n(N)} = \frac{3}{2} & \text{si } W_n(N) \text{ est pair} \\ \frac{W_n(N) - 1}{2W_n(N)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2W_n(N)} & \text{si } W_n(N) \text{ est impair} \end{cases}$$

On pose :

$$W_n(N) = U_n(N)$$

Et on calcule la moyenne de ces deux accroissements linéaires :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{U_{n+1}(N)}{U_n(N)} + \frac{W_{n+1}(N)}{W_n(N)} \right) = 1 \forall U_n(N)$$

Ce qui signifie qu'en moyenne les deux suites croissent ou décroissent avec la même variation mais à l'opposé. Lorsque l'une croît, l'autre décroît de la même variation. Si bien qu'en moyenne leurs variations sont constantes, leurs effets s'annulent mutuellement (puisqu'on les additionne dans le calcul de la moyenne).

Or, selon les valeurs de N on observe pour la suite complémentaire les résultats suivants :

- Convergence vers 0 ;
- Convergence vers le cycle {6, 9, 4} ;
- Convergence vers le cycle {24, 36, 54, 81, 40, 60, 90, 135, 67, 33, 16}.

Et il existe peut-être d'autres convergences ou divergences vers d'autres valeurs ou cycles, infinies ou pas...

Cette suite complémentaire n'est pas plus simple que la suite de Syracuse pour en apprendre davantage. Ainsi, on choisit une autre suite complémentaire, appelée pseudo complémentaire comme suit :

$$W_{n+1}(N) = \begin{cases} W_0(N) = N \\ \frac{3W_n(N)}{2} & \text{si } W_n(N) \text{ est pair} \\ \frac{W_n(N) + 1}{2} & \text{si } W_n(N) \text{ est impair} \end{cases}$$

Voici un exemple pour $N < 33$:

N	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8	W9	W10	W11	W12	W13	W14	W15	W16	...	i
1	1																	0
2	3	2																0
3	2																	1
4	6	9	5	3	2													5
5	3	2																2
6	9	5	3	2														4
7	4	6	9	5	3	2												6
8	12	18	27	14	21	11	6	9	5	3	2							11
9	5	3	2															3
10	15	8	12	18	27	14	21	11	6	9	5	3	2					13
11	6	9	5	3	2													5
12	18	27	14	21	11	6	9	5	3	2								10
13	7	4	6	9	5	3	2											7
14	21	11	6	9	5	3	2											7
15	8	12	18	27	14	21	11	6	9	5	3	2						12
16	24	36	54	81	41	21	11	6	9	5	3	2						12
17	9	5	3	2														4
18	27	14	21	11	6	9	5	3	2									9
19	10	15	8	12	18	27	14	21	11	6	9	5	3	2				14
20	30	45	23	12	18	27	14	21	11	6	9	5	3	2				14
21	11	6	9	5	3	2												6
22	33	17	9	5	3	2												6
23	12	18	27	14	21	11	6	9	5	3	2							11
24	36	54	81	41	21	11	6	9	5	3	2							11
25	13	7	4	6	9	5	3	2										8
26	39	20	30	45	23	12	18	27	14	21	11	6	9	5	3	2		16
27	14	21	11	6	9	5	3	2										8
28	42	63	32	48	72	108	162	243	122	183	92	138	207	104	156	234	...	70
29	15	8	12	18	27	14	21	11	6	9	5	3	2					13
30	45	23	12	18	27	14	21	11	6	9	5	3	2					13
31	16	24	36	54	81	41	21	11	6	9	5	3	2					13
32	48	72	108	162	243	122	183	92	138	207	104	156	234	351	176	264	...	67

A part pour la valeur initiale $N=1$ qui boucle sur le 1, toutes les autres valeurs de N entrent dans un cycle unique infini $\{3, 2\}$. On est tout à fait conforme à une suite de Syracuse. Encore plus utile et pratique, regardez les valeurs des vols i des valeurs de N . Ne vous rappellent-ils pas quelque chose de familier ? Eh bien oui, il y a une relation entre les vols de cette suite pseudo complémentaire et la suite de Syracuse. Voici le tableau qui le confirme :

W(N)		U(N)		W(N)		U(N)	
N	i	N	i	N	i	N	i
2	0	1	0	17	4	16	4
3	1	2	1	18	9	17	9

W(N)		U(N)		W(N)		U(N)	
4	5	3	5	19	14	18	14
5	2	4	2	20	14	19	14
6	4	5	4	21	6	20	6
7	6	6	6	22	6	21	6
8	11	7	11	23	11	22	11
9	3	8	3	24	11	23	11
10	13	9	13	25	8	24	8
11	5	10	5	26	16	25	16
12	10	11	10	27	8	26	8
13	7	12	7	28	70	27	70
14	7	13	7	29	13	28	13
15	12	14	12	30	13	29	13
16	12	15	12	31	13	30	13
				32	67	31	67

On a donc des valeurs différentes à chaque itération et un cycle final différent mais une durée de vol identique quel que soit N décalé de 1. Soit :

$$i_{U(N)} = i_{W(N+1)} \quad \forall N > 0$$

**Ainsi, si on sait évaluer les vols de la suite pseudo complémentaire,
On connaîtra directement ceux de la suite de Syracuse.**

De plus, on a les relations suivantes pour chaque rang n :

$$U_n(N) = W_n(N + 1) - 1 \text{ ou } U_n(N - 1) = W_n(N) - 1$$

$$W_n(N) = U_n(N - 1) + 1 \text{ ou } W_n(N + 1) = U_n(N) + 1$$

Par exemple avec N=3 :

Avec la suite de Syracuse Un(N) on obtient successivement : 3 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1

Et avec la pseudo-suite Wn(N+1) : 4 > 6 > 9 > 5 > 3 > 2

On a également pour un même rang avec comme point de départ :

$$W_n(N) = U_n(N)$$

Les relations suivantes :

$$W_{n+1}(N) + U_{n+1}(N) = 2U_n(N) + \frac{1 - (-1)^{U_n(N)}}{2} = 2W_n(N) + \frac{1 - (-1)^{W_n(N)}}{2}$$

$$W_{n+1}(N) - U_{n+1}(N) = (-1)^{U_n(N)}U_n(N) = (-1)^{W_n(N)}W_n(N)$$

Soit par addition :

$$W_{n+1}(N) = W_n(N) \left(1 + \frac{1}{2}(-1)^{W_n(N)} \right) + \frac{1 - (-1)^{W_n(N)}}{4}$$

Et par soustraction :

$$U_{n+1}(N) = U_n(N) \left(1 - \frac{1}{2}(-1)^{U_n(N)} \right) + \frac{1 - (-1)^{U_n(N)}}{4}$$

Ce qui correspond bien à :

$$U_{n+1}(N) = \frac{1}{4}(4U_n(N) + 1 - (2U_n(N) + 1)(-1)^{U_n(N)})$$

Si on évalue, comme précédemment, le taux de croissance des deux suites, on obtient :

$$\frac{U_{n+1}(N)}{U_n(N)} = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2U_n(N)} = \frac{1}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ est pair} \\ \frac{3U_n(N) + 1}{2U_n(N)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2U_n(N)} & \text{si } U_n(N) \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\frac{W_{n+1}(N)}{W_n(N)} = \begin{cases} \frac{3W_n(N)}{2W_n(N)} = \frac{3}{2} & \text{si } W_n(N) \text{ est pair} \\ \frac{W_n(N) + 1}{2W_n(N)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2W_n(N)} & \text{si } W_n(N) \text{ est impair} \end{cases}$$

On pose :

$$W_n(N) = U_n(N)$$

Et on calcul la moyenne de ces deux accroissements linéaires :

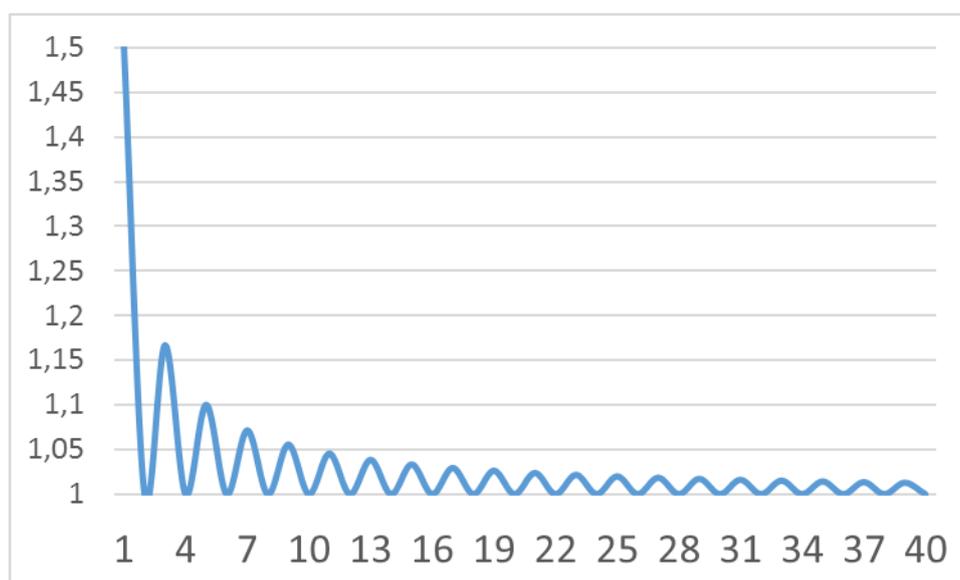
$$\frac{1}{2} \left(\frac{U_{n+1}(N)}{U_n(N)} + \frac{W_{n+1}(N)}{W_n(N)} \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } U_n(N) \text{ est pair} \\ 1 + \frac{1}{2U_n(N)} & \text{si } U_n(N) \text{ est impair} \end{cases}$$

Ce qui signifie qu'en moyenne les deux suites croissent ou décroissent avec la même variation opposée (pour les itérations paires) ou une variation légèrement croissante (pour les itérations impaires). Dans tous les cas, lorsque l'une croît, l'autre décroît de quasiment la même variation. Si bien qu'en moyenne leurs variations s'annulent quasiment (puisqu'on les additionne dans le calcul de la moyenne).

On peut écrire également, par exemple, cette moyenne de variation comme suit :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{U_{n+1}(N)}{U_n(N)} + \frac{W_{n+1}(N)}{W_n(N)} \right) = 1 + \frac{1}{2U_n(N)} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} U_n(N) \right) \quad \forall U_n(N) > 0$$

On obtient la courbe ci-dessous d'atténuation qui converge rapidement vers 1. Ce qui confirme qu'en moyenne les variations des deux suites sont bien quasiment les mêmes à l'opposé.



Mais alors comment calculer tous les vols i de W ? Cette question sera étudiée plus loin dans cet ouvrage. On doit préalablement revenir à la suite de Syracuse et en apprendre davantage. Ainsi, on aura d'autres informations et outils pour répondre à cette question. Cela permettra de savoir s'il est plus simple d'utiliser la pseudo complémentaire ou la suite de Syracuse elle-même pour la résoudre ou en connaître davantage.

1. Nombre d'itérations consécutives paires et impaires identiques

La suite pseudo complémentaire permet de déduire les relations suivantes :

$$\forall N > 1 \text{ et pair alors :}$$

$$U_n(N) = \frac{N}{2^n} : \text{devient impair après } n \text{ itérations}$$

$$U_n(N - 1) = \left(\frac{3}{2}\right)^n N - 1 : \text{devient pair après } n \text{ itérations}$$

Et les indices n ci-dessus sont bien identiques !!

Par exemple :

$$\text{Si } N = 2^n a \text{ alors } U_n(N) = a \text{ et } U_n(N - 1) = U_n(2^n a - 1) = 3^n a - 1$$

$$\rightarrow \text{devient pair après } n \text{ itérations}$$

Alors de même :

$$\text{Si } N = 2^n a - 1 \text{ alors } U_n(N) = 3^n a - 1 \text{ et } U_n(N + 1) = U_n(2^n a) = a$$

$$\rightarrow \text{devient impair après } n \text{ itérations}$$

Cette relation d'une valeur de départ N et ses voisins $N+1$ et $N-1$ est utile pour déduire l'évolution des vols de la suite de Syracuse.

4. Suite de Syracuse modulo 4

1. Suite de Syracuse simplifiée modulo 4

On s'affaire dans ce chapitre à répondre à plusieurs questions. Existe-t-il d'autres formes simplifiées de la suite de Syracuse ? Si oui sont-elles dénombrables ? Et en existe-t-il une ou plusieurs qui permette de résoudre, prouver ou simplifier davantage ce problème ?

En fait il existe une infinité de formes simplifiées. En factorisant des étapes de la forme originale de la suite on la décline à l'infini mais en rajoutant autant de cas supplémentaires à chaque étape, ou rang.

Par exemple, la forme simplifiée du chapitre précédent est celle correspondante à tout nombre modulo 2, avec donc 2 cas possibles à chaque étape : pair ou impair. Pour la forme modulo 4, il faudra choisir entre 4 cas à chaque étape. Et pour une forme modulo k , il faudra choisir parmi k cas à chaque étape. On peut donc reproduire à l'infini cette méthode. On a donc la forme générale suivante :

$$U_{n+1} = \begin{cases} U_0 = N \\ f_1(U_n) \text{ si } U_n = kp \\ f_2(U_n) \text{ si } U_n = kp + 1 \\ f_3(U_n) \text{ si } U_n = kp + 2 \\ \dots \\ f_k(U_n) \text{ si } U_n = kp + (k - 1) \end{cases}$$

Les fonctions f sont à calculer. Bonne nouvelle, elles sont relativement simples et systématiques à trouver.

Du fait que ces formes soient issues de la même forme originelle sans aucune information ou déclinaison supplémentaire, toutes ces formes ne rajoutent aucune complexité mais ne rendent pas plus simple le problème. Ces formes raccourcissent la durée de vol et sa hauteur, ce qui n'est en rien une simplification du problème, voir peut s'apparenter à masquer certains phénomènes remarquables et utiles à la compréhension du comportement de cette suite.

On verra plus loin que la forme simplifiée modulo 4 est utile pour l'analyse des trajectoires de la suite. Notamment les trajectoires de la forme $4k+3$ qui sont celles qui complexifient l'analyse et la capacité à prouver la conjecture. Vous lirez cela dans le chapitre consacré aux trajectoires.

La conjecture de Syracuse simplifiée modulo 4 s'exprime de la façon suivante :

$$U_0 = N \text{ et } \forall p > 0 :$$

$$U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{4} & \text{si } U_n = 4p \text{ (2 fois pair)} \\ \frac{3U_n + 1}{4} & \text{si } U_n = 4p + 1 \text{ (impair puis pair)} \\ \frac{3U_n + 2}{4} & \text{si } U_n = 4p + 2 \text{ (pair puis impair)} \\ \frac{9U_n + 5}{4} & \text{si } U_n = 4p + 3 \text{ (2 fois impair)} \end{cases}$$

$\forall N > 0 \exists i / U_i = 1$

Des exemples numériques sont donnés dans le tableau suivant.

Pour trouver ces 4 règles, il suffit d'appliquer la suite simplifiée modulo 2 (du chapitre précédent) aux 4 cas modulo 4 jusqu'à ce que la parité de U_n soit indéterminée. Ensuite on remplace la valeur de p par son équation en fonction de U_n . Ce qui donne pour cette 1^{ère} étape :

- Si $U_n = 4p > 2p > p$ alors $p = \frac{U_n}{4}$;
- Si $U_n = 4p + 1 > 6p + 2 > 3p + 1$ alors $p = \frac{U_n - 1}{4}$ et $3p + 1 = \frac{3U_n + 1}{4}$;
- Si $U_n = 4p + 2 > 2p + 1 > 3p + 2$ alors $p = \frac{U_n - 2}{4}$ et $3p + 2 = \frac{3U_n + 2}{4}$;
- Si $U_n = 4p + 3 > 6p + 5 > 9p + 8$ alors $p = \frac{U_n - 3}{4}$ et $9p + 8 = \frac{9U_n + 5}{4}$.

L'analyse des trajectoires plus loin, montrera que seule la forme $4p+3$ est possiblement divergente. C'est d'ailleurs la seule, des quatre cas ci-dessus, qui augmente après deux itérations. On va donc étudier les conditions pour que U_n « rentre » ou « reste » sous cette forme divergente, et estimer le taux de probabilité pour chacun de ces cas. Ainsi, on trouve que pour que :

$$\frac{U_n}{4} = 4k + 3 \text{ avec } U_n = 4p$$

il faut que : $p = 4k + 3 \forall k > 0$, soit 1 cas sur 16 (4×4) = 6,25%

$$\frac{3U_n + 1}{4} = 4k + 3 \text{ avec } U_n = 4p + 1$$

il faut que $3p + 1 = 4k + 3$, soit $p = \frac{4k + 2}{3} = \frac{4(3k' + 1) + 2}{3} = 4k' + 2 \forall k \geq 1$ et $k' > 0$,
soit 1 cas sur 48 ($4 \times 4 \times 3$) = 2,08%

$$\frac{3U_n + 2}{4} = 4k + 3 \text{ avec } U_n = 4p + 2$$

il faut que $3p + 2 = 4k + 3$, soit $p = \frac{4k + 1}{3} = \frac{4(3k' + 2) + 1}{3} = 4k' + 3 \forall k \geq 2$ et $k' \geq 0$,
soit 1 cas sur 48 ($4 \times 4 \times 3$) = 2,08%

$$\frac{9U_n + 5}{4} = 4k + 3 \text{ avec } U_n = 4p + 3$$

il faut que $9p + 8 = 4k + 3$, soit $p = \frac{4k - 5}{9} = \frac{4(9k' + 8) - 5}{9} = 4k' + 3 \forall k \geq 8$ et $k' \geq 0$,
soit 1 cas sur 144 ($4 \times 4 \times 9$) = 0,66%

En simplifiant, on trouve en définitif :

- $\frac{U_n}{4} = 4k + 3$ si $U_n = 4(4k + 3) = 16k + 12$ avec $k > 0$: 6,25% des cas
- $\frac{3U_{n+1}}{4} = 4k + 3$ si $U_n = \frac{16k+11}{3} = 16k' + 9$ avec $k = 3k' + 1 \geq 1$ et $k' \geq 0$: 2,08% des cas
- $\frac{3U_{n+2}}{4} = 4k + 3$ si $U_n = \frac{2(8k+5)}{3} = 16k' + 14 = 2(8k' + 7)$ avec $k = 3k' + 2 \geq 2$ et $k' \geq 0$: 2,08% des cas
- $\frac{9U_{n+5}}{4} = 4k + 3$ si $U_n = \frac{16k+7}{9} = 16k' + 15$ avec $k = 9k' + 8 \geq 8$ et $k' \geq 0$: 0,66% des cas

Ainsi, on a au total, $U_n(N)$ sous la forme possiblement divergente $4k+3$

Dans 11,11% des cas, soit exactement 1 cas sur 9.

Au bout de 2 itérations dans 1 cas sur 81... Et en n itérations dans 1 cas sur 9^n .

On a donc de moins en moins de cas possiblement divergents, itération après itération. Mais cela reste possible. De plus la suite peut entrer dans une autre forme que $4k+3$ puis revenir sous cette forme quelques itérations suivantes et diverger de nouveau. Il n'est donc de la sorte pas prouvé que la suite converge dans la grande majorité des cas malgré un cas de divergence peu probable itération après itération.

Pour illustrer les vols, durées de vols, voici un tableau avec toutes ces valeurs pour $N < 26$ avec la suite de Syracuse simplifiée modulo 4 :

Bien sûr les durées de vol i sont plus courtes et les descentes vers 1 plus rapides que pour la suite simplifiée modulo 2. Mais on doit faire le choix entre 4 cas au lieu de 2 à chaque étape ou itération.

i	$U_0(N) = N$	4k	4k+1	4k+2	4k+3	$U_n(N) \dots$							
0	1		√										
1	2			√		1							
3	3				√	8	2	1					
1	4	√				1							
2	5		√			4	1						
3	6			√		5	4	1					
6	7				√	17	13	10	8	2	1		
2	8	√				2	1						
7	9		√			7	17	13	10	8	2	1	
3	10			√		8	2	1					
5	11				√	26	20	5	4	1			
4	12	√				3	8	2	1				
4	13		√			10	8	2	1				
6	14			√		11	26	20	5	4	1		
6	15				√	35	80	20	5	4	1		
2	16	√				4	1						

i	$U_0(N) = N$	4k	4k+1	4k+2	4k+3	$U_n(N) \dots$							
5	17		√			13	10	8	2	1			
7	18			√		14	11	26	20	5	4	1	
7	19				√	44	11	26	20	5	4	1	
3	20	√				5	4	1					
3	21		√			16	4	1					
6	22			√		17	13	10	8	2	1		
6	23				√	53	40	10	8	2	1		
4	24	√				6	5	4	1				
8	25		√			19	44	11	26	20	5	4	1

2. Suite de Syracuse pseudo complémentaire modulo 4

De la même manière, on peut aussi calculer la suite pseudo complémentaire modulo 4. Cette dernière ne fait pas avancer nos recherches. On observe qu'également en modulo 4, en moyenne les variations des deux suites s'annulent quasiment, comme on l'a vu pour ces suites en modulo 2.

Voici donc l'expression de la suite pseudo complémentaire modulo 4 :

$$U_{n+1} = \begin{cases} \frac{9W_n}{4} \text{ si } U_n = 4p \text{ (2 fois pair)} \\ \frac{3(W_n + 1)}{4} \text{ si } U_n = 4p + 3 \text{ (impair puis pair)} \\ \frac{3W_n + 2}{4} \text{ si } U_n = 4p + 2 \text{ (pair puis impair)} \\ \frac{W_n + 3}{4} \text{ si } U_n = 4p + 1 \text{ (2 fois impair)} \end{cases}$$

$\forall N > 0 \exists i / W_i = 2$

Car :

- $4p > 6p > 3p$
- $4p+1 > 2p+1 > p+1$
- $4p+2 > 6p+3 > 3p+2$
- $4p+3 > 2p+2 > p+1$

5. Fonction i de la durée du vol

Existe-t-il simplement une fonction qui définisse la durée de vol de la suite de Syracuse ? Eh bien oui de manière récurrente bien entendu. On a en effet la formulation suivante pour la durée de vol i de la suite de Syracuse :

$$i(N) = 1 + \begin{cases} i(1) = 0 \\ i\left(\frac{N}{2}\right) \text{ si } N \text{ pair} \\ i\left(\frac{3N+1}{2}\right) \text{ si } N > 1 \text{ et impair} \end{cases}$$

Il suffit d'ajouter un incrément +1 à la formulation de la conjecture de Syracuse pour, à chaque rang, comptabiliser cumulativement le nombre de rang jusqu'à atteindre 1.

Par exemple, voici les valeurs des vols pour $N < 11$:

$$\begin{aligned} i(1) &= 0 \\ i(2) &= 1 + i(1) = 1 + 0 = 1 \\ i(3) &= 1 + i(5) = 1 + 1 + i(8) = 1 + 1 + 1 + i(4) = 1 + 1 + 1 + 1 + i(2) = 5 \\ i(4) &= 1 + i(2) = 2 \\ i(5) &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i(6) &= 1 + i(3) = 6 \\
 i(7) &= 1 + i(11) = 2 + i(17) = 3 + i(26) = 4 + i(13) = 5 + i(20) = 6 + i(10) = 7 + i(5) = 11 \\
 i(8) &= 1 + i(4) = 3 \\
 i(9) &= 1 + i(14) = 2 + i(7) = 13 \\
 i(10) &= 1 + i(5) = 5
 \end{aligned}$$

On note également les valeurs particulières suivantes :

$$i(2^p N) = 1 + i(2^{p-1} N) = 1 + 1 + i(2^{p-2} N) = \dots = p + i(N)$$

$$\rightarrow i(2^p N) = p + i(N) = p + 1 + \begin{cases} i\left(\frac{N}{2}\right) & \text{si } N \text{ pair} \\ i\left(\frac{3N+1}{2}\right) & \text{si } N \text{ impair} \end{cases}$$

Et :

$$i(2^p N - 1) = 1 + i(3 \cdot 2^{p-1} N - 1) = 2 + i(3^2 \cdot 2^{p-2} N - 1) = \dots = p + i(3^p N - 1)$$

$$\rightarrow i(2^p N - 1) = p + i(3^p N - 1) = p + 1 + \begin{cases} i\left(\frac{3^p N - 1}{2}\right) & \text{si } N \text{ impair} \\ i\left(\frac{3^{p+1} N}{2} - 1\right) & \text{si } N \text{ pair} \end{cases}$$

Ces formules sont efficaces pour calculer simplement et rapidement les vols de N. Par exemple :

$$\begin{aligned}
 i(6) &= i(2 \cdot 3) = 2 + i(5) = 2 + i(2 \cdot 3 - 1) = 4 + i(4) = 4 + i(2^2 \cdot 1) = 6 + i(1) = 6 \\
 i(7) &= i(2^3 \cdot 1 - 1) = 4 + i(13) = 4 + i(2 \cdot 7 - 1) = 6 + i(10) = 6 + i(2 \cdot 5) = 8 + i(8) = 8 + i(2^3 \cdot 1) \\
 &= 11 + i(1) = 11 \\
 i(9) &= i(2 \cdot 5 - 1) = 2 + i(7) = 13
 \end{aligned}$$

Sous une forme trigonométrique, on trouve :

$$\begin{aligned}
 i(1) &= 0 \\
 i(N) &= 1 + \frac{1 + (-1)^N}{2} i\left(\frac{N}{2}\right) + \frac{1 - (-1)^N}{2} i\left(\frac{3N+1}{2}\right) \\
 \rightarrow i(N) &= 1 + \frac{1}{2} \left(i\left(\frac{N}{2}\right) + i\left(\frac{3N+1}{2}\right) + (-1)^N \left(i\left(\frac{N}{2}\right) - i\left(\frac{3N+1}{2}\right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

On pourrait ici poursuivre avec une généralisation itérative de $i(N)$ afin d'obtenir une relation plus globale.

6. Forme allégorique : Trou noir

Toutes les étoiles du ciel sont indénombrables et en mouvement permanent au-dessus de nous tous. Imaginer, qu'aussi nombreuses soient elles, pour une durée temporelle de quelques nanosecondes à des milliards de milliers d'années lumières, elles se dirigent toutes sans exceptions, comme aspirées, vers un seul et unique trou noir (représenté par la valeur 1). Cette attraction universelle est à la fois sans explication et inévitable. Concernant les règles qui régissent notre univers, toutes les spéculations sont ouvertes.

7. Forme allégorique : Bourse

Les graphes des indices et valeurs boursières fluctuent sans cesse de manière, a priori chaotiques et imprévisibles. Or si on considère les actions d'achat/vente équivalentes à une parité paire/impair (l'action monte si elle est impaire ou baisse si elle est paire), alors il se dégage des tendances qui permettent de prédire, avec une certaine incertitude, les fluctuations futures. Les moyennes mobiles et les volumes échangés donnent également des informations sur les tendances futures des marchés. Toutes ces actions n'atteignent ni l'infini (divergence) ni zéro (tant qu'elles existent), mais restent enfermées dans un cycle chaotique lié au marché.

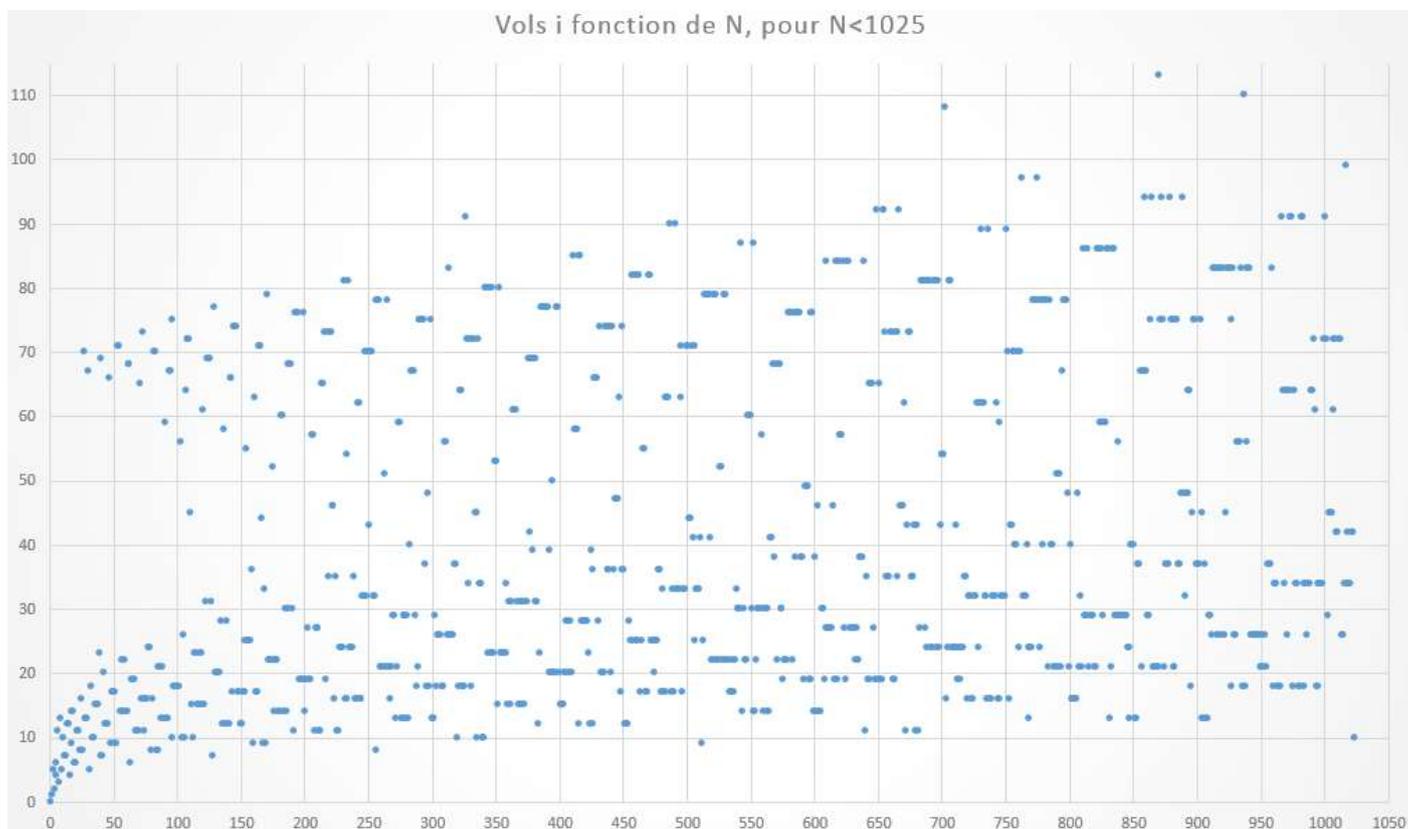
4. Observations

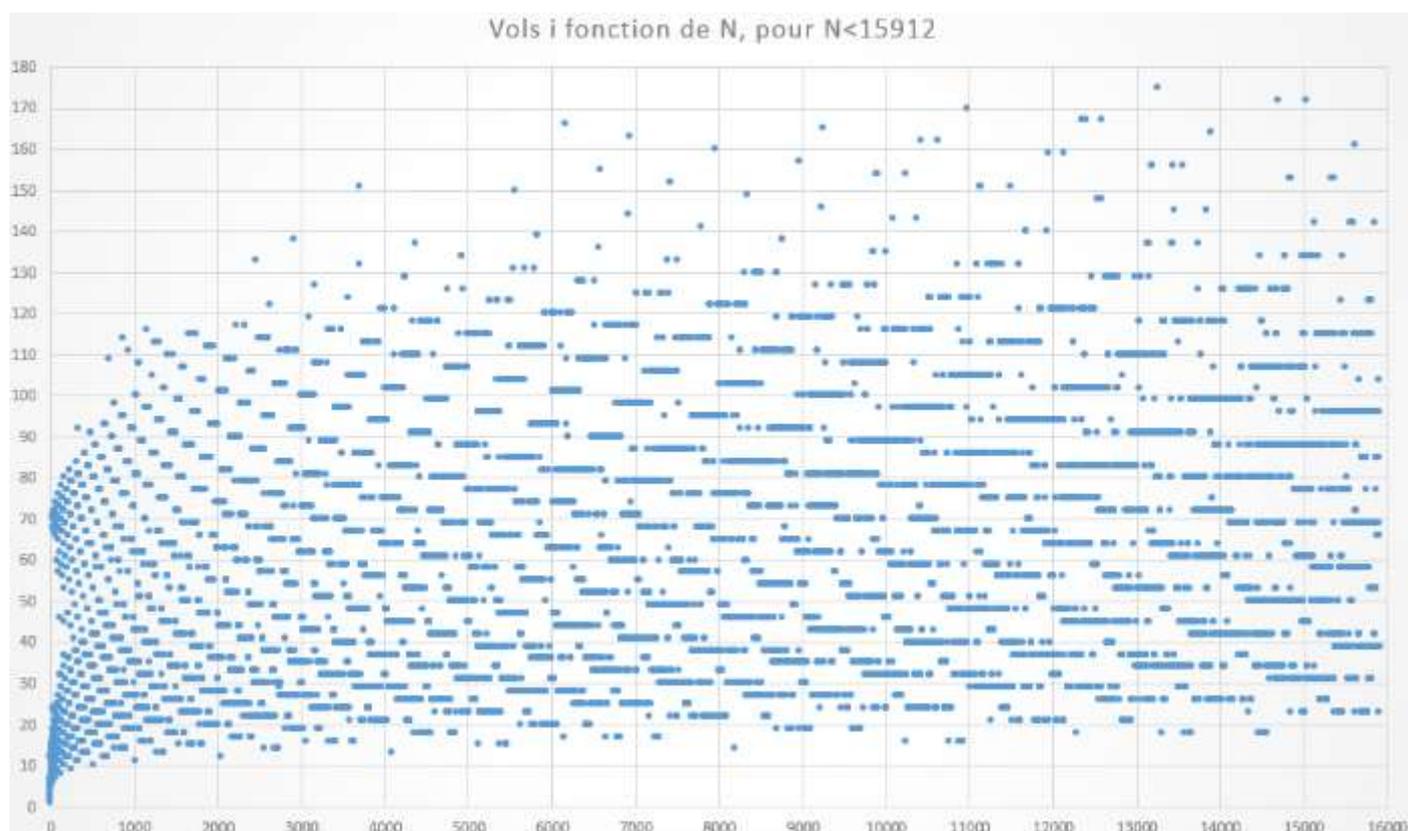
Pour étudier dans un premier temps les comportements de cette suite, on observe graphiquement et numériquement comment elle fluctue selon différents paramètres. Cela donne des indications sur les stratégies à adopter pour tenter de la résoudre et de la prouver, mais aussi sur les aspects remarquables à déceler et à retenir pour la suite. Par exemple des linéarités, des symétries, des cycles répétitifs, des moyennes particulières, et bien d'autres propriétés connues peuvent être observées, mises en évidence, et aider à l'exploration et l'exploitation de cette suite et de son analyse fine.

En revanche, ce travail d'observation est en aucun cas un exposé de théorèmes mathématiques. De ce fait, toutes les observations dans ce chapitre ne sont volontairement pas des preuves. On s'appuiera néanmoins dessus pour la suite.

1.Observations graphiques : droites logarithmiques

On trace tout d'abord ci-dessous les vols i en fonction des valeurs de départ N :





Pour interpréter simplement ces courbes, il suffit de considérer au plus simple les deux parités de la suite. En effet lorsque la suite suit un parcours de valeurs paires, on divise par 2 à chaque itération, soit un rapport $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ à partir de la valeur de départ N. De même, pour un parcours de valeurs impaires, on a un rapport $\left(\frac{3}{2}\right)^n$. Ce qui donne à partir d'une valeur de départ N, deux courbes logarithmiques opposées jusqu'à atteindre 1, soit :

$$1 = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^i N & \text{qu'avec des itérations paires} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^i N & \text{qu'avec des itérations impaires} \end{cases}$$

Soit :

$$i = \begin{cases} \frac{\ln(N)}{\ln(2)} & \text{qu'avec des itérations paires} \\ \frac{\ln(N)}{\ln(2) - \ln(3)} & \text{qu'avec des itérations impaires} \end{cases}$$

Bien entendu la seconde égalité n'atteint jamais 1 puisqu'elle débute à $N > 1$ et qu'elle est toujours croissante. Il faut donc considérer un mélange des deux courbes, soit :

$$1 = \frac{3^m}{2^m} \cdot \frac{1}{2^p} N = \frac{3^m}{2^i} N \text{ avec } i = p + m$$

Soit :

$$i = \frac{\ln(N) + m \cdot \ln(3)}{\ln(2)} = \frac{\ln(N) - p \cdot \ln(3)}{\ln(2) - \ln(3)}$$

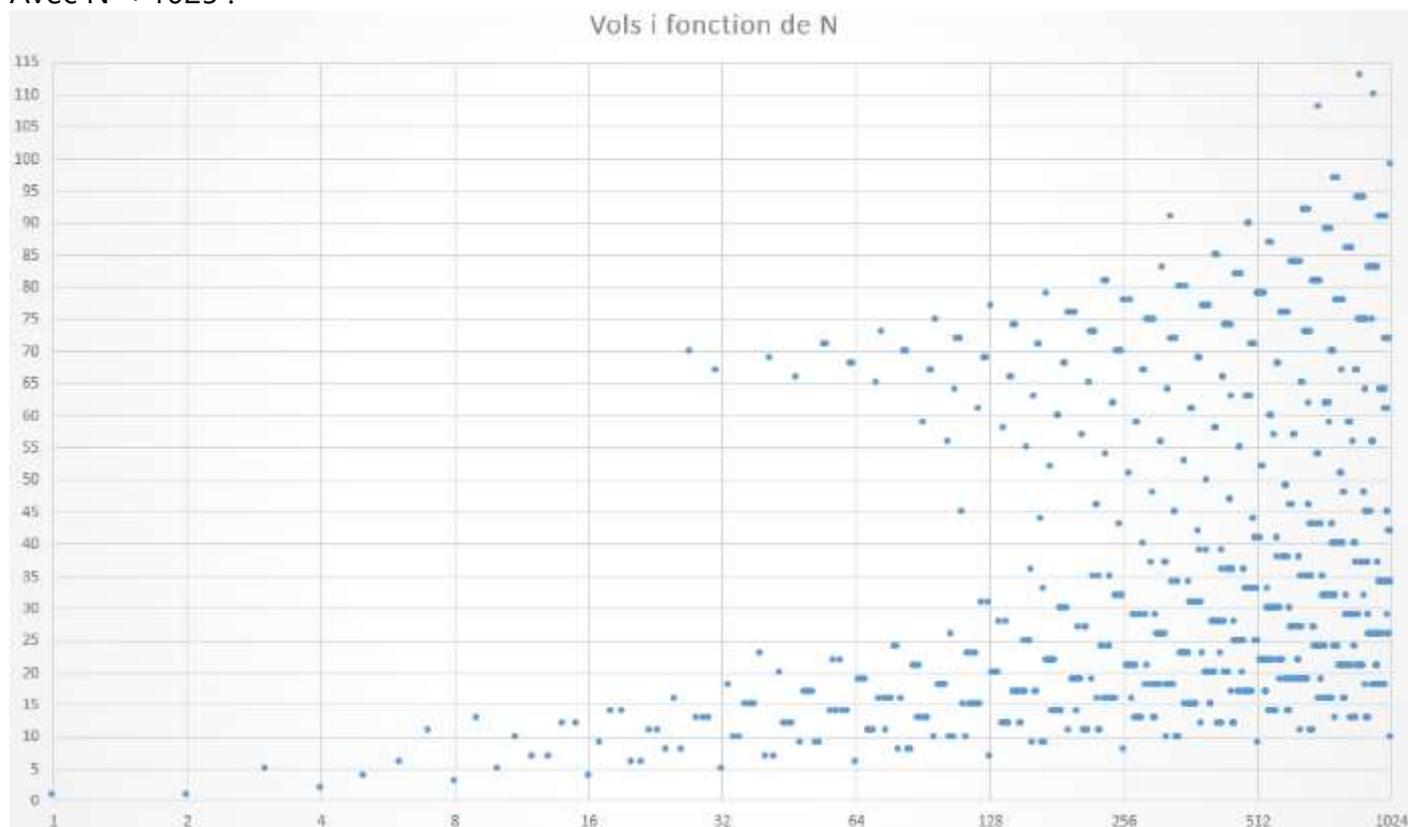
S'il y a autant d'itérations paires (p) que d'itérations impaires (m) en moyenne dans un vol, on a :

$$i \approx \frac{2 \ln(N)}{2 \ln(2) - \ln(3)} = 6,952 \cdot \ln(N) \text{ avec } p = m = \frac{i}{2}$$

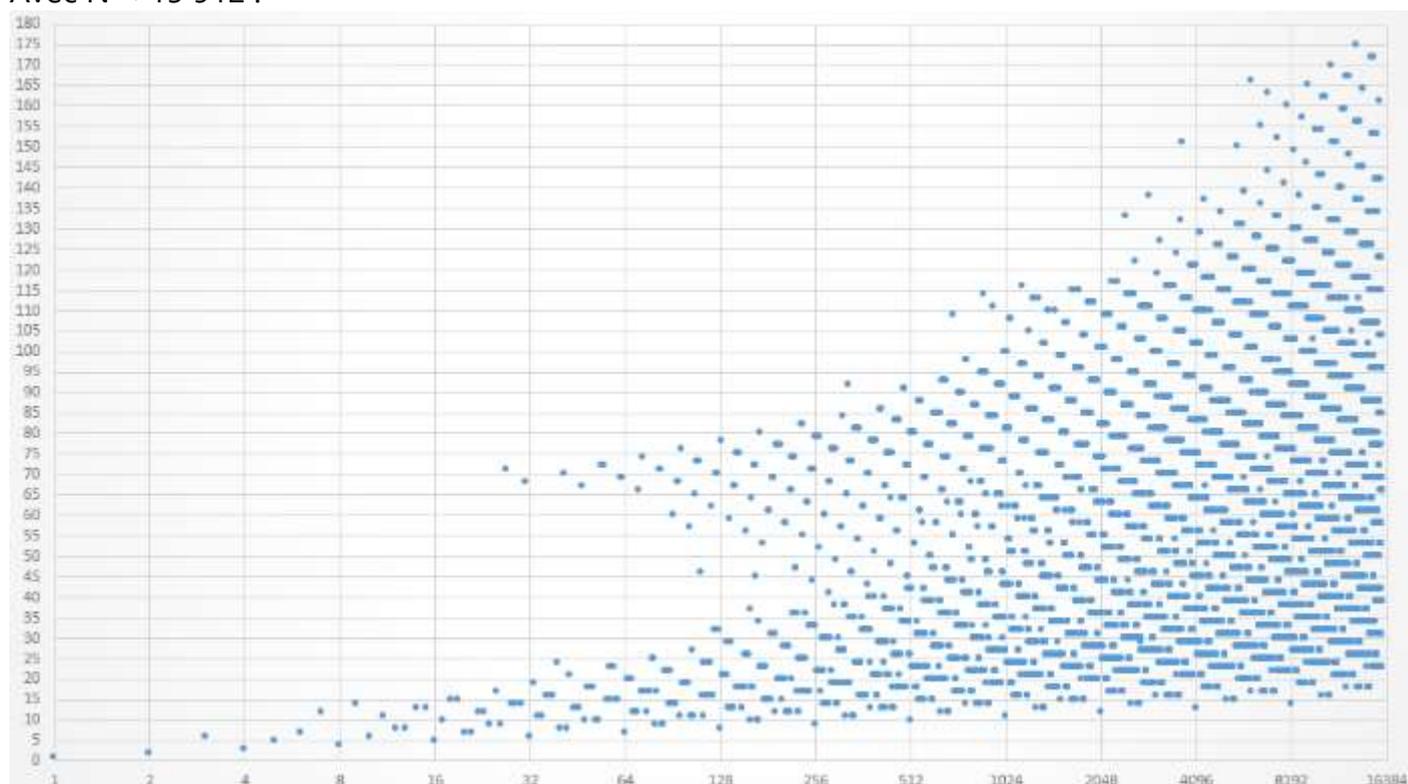
On a donc bien un vol qui suit le logarithme de la valeur de départ N. Attention ce résultat est une approximation. Elle n'est, selon les vols, pas précise.

On observe, en prenant une échelle logarithmique de base 2 pour les valeurs de départ N, des droites logarithmiques plus ou moins régulières. Voici ci-dessous ces mêmes graphiques en échelle logarithmique en abscisse :

Avec $N < 1025$:



Avec $N < 15\,912$:



Il apparaît trois types de droites logarithmiques. Les deux premières sont croissantes par rapport à l'axe horizontal et les autres sont décroissantes par rapport à l'axe vertical. Elles apparaissent, a priori, sous l'une des trois formes suivantes :

$$\text{Cas (1)} : i = a \cdot \ln(N) + b \text{ avec } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\text{Cas (2)} : i = a' \cdot \ln(N) + b' \text{ avec } a' > 0 \text{ et } b' > 0$$

$$\text{Cas (3)} : i = a'' \cdot \ln(N) + b'' \text{ avec } a'' < 0 \text{ et } b'' \gg 1$$

A priori, ces droites relierait 2 valeurs de départ N , notées ici N_a et N_b , et leurs vols i avec une relation du type :

$$\ln(N_b) - \ln(N_a) \approx K(i_a - i_b), \text{ avec } N_b > N_a \text{ et } i_b < i_a$$

Malheureusement en testant avec quelques valeurs de N , K n'est pas une constante. L'étude devra être davantage poussée pour mieux comprendre ce comportement, a priori, linéaire en base logarithmique.

1. Droites logarithmiques croissantes

Plus particulièrement, on observe pour le **cas (1)**, défini précédemment, des droites croissantes parallèles et en échelle logarithmique de la forme différente suivante :

$$i = k \cdot \ln(aN + b)$$

Soit :

$$e^{\frac{i}{k}} = aN + b$$

Or on remarque que :

$$\text{pour } N = 2, 4, 8 \dots 2^p, \text{ on a : } i = p \quad \forall p \geq 0$$

Ce qui indique que la puissance de 2 est à la base de la suite. On fait le choix suivant :

$$k = \frac{1}{\ln(2)} \text{ et donc : } \mathbf{2^i = aN + b}$$

Ce qui donne dans ce cas :

$$\text{pour } N = 2, 4, 8 \dots 2^p, \text{ on a : } a = 1 \text{ et } b = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{2^i = N \text{ et } i = \frac{\ln(N)}{\ln(2)}}$$

Et dans le cas général :

$$i = \frac{\ln(aN + b)}{\ln(2)} = \frac{\ln\left(N\left(a + \frac{b}{N}\right)\right)}{\ln(2)} = \frac{\ln(N) + \ln\left(a + \frac{b}{N}\right)}{\ln(2)}$$

$$\mathbf{i \geq \frac{\ln(N) + \ln(a)}{\ln(2)} \text{ si } N \gg b \text{ et avec } a \text{ impair}}$$

On teste ce résultat avec quelques valeurs de N bien choisies sur les courbes précédentes :

N	a	i estimé	i réel
2	1	1,0000	1
4	1	2,0000	2
8	1	3,0000	3
16	1	4,0000	4
32	1	5,0000	5
5	3	3,9069	4
21	3	5,9773	6
85	3	7,9944	8
341	3	9,9986	10
1365	3	11,9996	12
3	9	4,7549	5
227	9	10,9965	11
151	27	11,9933	12
302	27	12,9933	13
604	27	13,9933	14

L'approximation est proche de la valeur exacte. Mais la difficulté réside dans le choix de la variable a et de la valeur N.

Ainsi, on définit une classe à sa valeur de a correspondante à un ensemble de nombres entiers N comme suit :

On dit que N est de classe p si $a = 3^p$

De plus, on remarque que toutes les valeurs de N multiples paires au sein d'une même classe partagent le même vol i de cette classe incrémentée du nombre de fois que N est multiplié par 2. Soit :

N de classe 0, pour tout N toujours pair :

$$Si N = 2^i \text{ alors } i = \frac{\ln(N)}{\ln(2)} \text{ avec } i > 0$$

N de classe 1, pour tout N une fois impair puis toujours pair :

$$Si N = 5.2^k \text{ alors } i = k + 4 \geq \frac{\ln(N) + \ln(3)}{\ln(2)} = \frac{\ln(5) + \ln(3)}{\ln(2)} + k \text{ avec } k \gg 0$$

$$Si N = 21.2^k \text{ alors } i = k + 6 \geq \frac{\ln(N) + \ln(3)}{\ln(2)} = \frac{\ln(7) + 2.\ln(3)}{\ln(2)} + k \text{ avec } k \gg 0$$

$$Si N = 85.2^k \text{ alors } i = k + 8 \geq \frac{\ln(N) + \ln(3)}{\ln(2)} = \frac{\ln(17) + \ln(5) + \ln(3)}{\ln(2)} + k \text{ avec } k \gg 0$$

$$Si N = 341.2^k \text{ alors } i = k + 10 \geq \frac{\ln(N) + \ln(3)}{\ln(2)} = \frac{\ln(31) + \ln(11) + \ln(3)}{\ln(2)} + k \text{ avec } k \gg 0$$

$$Si N = 1365.2^k \text{ alors } i = k + 12 \geq \frac{\ln(N) + \ln(3)}{\ln(2)} = \frac{\ln(13) + \ln(7) + \ln(5) + 2.\ln(3)}{\ln(2)} + k$$

avec $k \gg 0$

...

N de classe 2, pour tout N deux fois impairs puis toujours pair :

$$Si N = 3.2^k \text{ alors } i = k + 5 \geq \frac{\ln(N) + 2.\ln(3)}{\ln(2)} = 3 \frac{\ln(3)}{\ln(2)} + k \text{ avec } k \gg 0$$

$$Si N = 227.2^k \text{ alors } i = k + 11 \geq \frac{\ln(N) + 2.\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{\ln(227) + 2.\ln(3)}{\ln(2)} + k \text{ avec } k \gg 0$$

...

N de classe 3, pour tout N trois fois impairs puis toujours pair :

$$Si N = 151.2^k \text{ alors } i = k + 12 \geq \frac{\ln(N) + 3.\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{\ln(151) + 3.\ln(3)}{\ln(2)} + k \text{ avec } k \gg 0$$

...

N de classe p , pour tout N p fois impairs puis toujours pair :

$$Si N = q.2^k \text{ alors } i = k + i_q \geq \frac{\ln(N) + p.\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{\ln(q) + p.\ln(3)}{\ln(2)} + k \text{ avec } k \gg 0 \text{ et } q \text{ impair}$$

...

...

N de dernière classe, pour tout N p fois impairs puis toujours pair :

$$Si N = q \cdot 2^k \text{ alors } i = k + i_q \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(N) + p \cdot \ln(3)}{\ln(2)} \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(q) + p \cdot \ln(3)}{\ln(2)} + k \right) = +\infty$$

avec k >> 0 et q impair

Les valeurs de q et les relations entre q et p ne sont ni connues, ni établies. Cela rend peu exploitable les derniers résultats ci-dessus.

Il existe une infinité de classes. Or, trouver tous les N d'une même classe n'est pas simple. Et quand bien même, si c'était le cas, la conjecture ne serait pas encore prouvée. En effet, toutes les classes réunies ne constituent pas l'ensemble des nombres entiers. Il manque les nombreux entiers qui jonglent d'une valeur impaire à une valeur paire dans la suite de Syracuse, alternativement ou une fois sur deux, ou une fois sur trois, etc. Soit encore une infinité de possibilités non explorées dans nos résultats actuels.

A noter que s'il existe une dernière classe avec p tendant vers l'infini, alors toutes les valeurs N contenus dans cette classe ont un vol tendant également vers l'infini. Mais cela ne signifie pas que la suite diverge, et que la conjecture est prouvée fausse. Car, par définition, il s'agit d'itérations impaires tendant vers l'infini qui ensuite sont toujours paires, et finissent donc par diminuer inlassablement vers 1. Les durées de vols sont longues mais pas éternelles. D'autres approches seront développées plus loin dans ce document pour prendre en compte l'ensemble des valeurs de N.

~

Dans le **cas (2)**, défini précédemment, des autres droites logarithmiques croissantes parallèles (cf. graphe suivant), on en retient une plus particulièrement. Celle qui coupe exactement les deux axes à leurs origines, à savoir :

N	1	2	4	8	16	32	64	...	$2^k \forall k \geq 0$
i	0	5	10	15	20	25	30	...	$5k$

On a ainsi :

$$i = 5k \text{ et } k = \frac{\ln(N)}{\ln(2)} \forall k \geq 0, \text{ soit : } i = 5 \frac{\ln(N)}{\ln(2)}$$

$$N = 2^k \text{ et } k = \frac{i}{5} \forall k \geq 0, \text{ soit : } N = 2^{\frac{i}{5}}$$

Cette droite n'est valable que pour les valeurs dont :

$$i = 2p + 37 \text{ ou } N = 4^{\frac{p}{5}} \cdot 2^{\frac{37}{5}} \forall p \geq 0$$

Les autres droites étant parallèles à cette dernière avec un décalage mesuré de 4, on en déduit que :

$$i = 5k \pm 4j \text{ et } k = \frac{\ln(N)}{\ln(2)} \forall k \geq 0, \text{ soit : } i = 5 \frac{\ln(N)}{\ln(2)} \pm 4j \forall j \geq 0$$

$$N = 2^k \text{ et } k = \frac{i \mp 4j}{5} \forall k \geq 0, \text{ soit : } N = 2^{\frac{i \mp 4j}{5}} \forall j \geq 0$$

Soit en définitif les relations suivantes :

$$i \approx 5 \frac{\ln(N)}{\ln(2)} + 4j \text{ et } N \approx 2^{\frac{i-4j}{5}} \forall i = 2p + 37 \text{ ou } \forall N = 4^{\frac{p}{5}} \cdot 2^{\frac{37}{5}} \text{ avec } p \geq 0 \text{ et } j \geq -i$$

On encadre j ci-dessus du fait que ces droites ne peuvent pas être inférieures à la droite directrice croissante de puissance de 2 (cf. classe 0 précédemment décrite). Cette contrainte entraine les deux inégalités suivantes :

$$\frac{\ln(N)}{\ln(2)} \leq 5 \frac{\ln(N)}{\ln(2)} + 4j \text{ et } 2^i \geq 2^{\frac{i-4j}{5}}$$

Soit :

$$j \geq -\frac{\ln(N)}{\ln(2)} = -i \text{ et } \frac{4(i+j)}{5} \ln(2) \geq 0$$

$$\rightarrow j \geq -i$$

Enfin voici quelques exemples qui illustrent ces résultats :

Via la suite de Syracuse : valeurs exactes								
N	159	283	377	502	251	334	444	790
i	37	41	43	45	44	46	48	52
Via le calcul des équations ci-dessus								
j	0	0	0	0	1	1	1	1
i	36,56	40,72	42,79	44,86	43,86	45,92	47,97	52,13
N	168,90	294,07	388,02	512,00	256,00	337,79	445,72	776,05
Taux d'erreurs								
%i	-1,18%	-0,67%	-0,48%	-0,32%	-0,32%	-0,18%	-0,06%	0,25%
%N	6,22%	3,91%	2,92%	1,99%	1,99%	1,14%	0,39%	-1,77%

Du fait que nos calculs sont basés sur des mesures et observations graphiques, les résultats que l'on obtient ne sont pas exacts. C'est néanmoins une bonne base d'approximation et rapide à calculer.

En revanche, tout cela n'est possible qu'en possession du graphe de N en fonction de i ou l'inverse. Or le graphe est tracé préalablement pour donner suite aux calculs des vols de la suite de Syracuse pour un grand nombre de valeurs initiales N. Il est donc complexe à partir d'un vol i ou d'une valeur initiale N choisie de calculer une valeur approchée de respectivement N ou i. En effet, la valeur de j, droite sur laquelle est placé le couple N et i, n'est pas connue à l'avance.

2. Droites logarithmiques décroissantes

Pour le dernier groupe de droites parallèles, le **cas (3)** défini précédemment, plus abruptes et décroissantes cette fois-ci, on observe d'autres propriétés.

Pour une même droite décroissante :

On voit un décalage régulier de 3 d'une valeur N à une autre, soit :

$$2^{i_1} = 2^{3p+i_2} \text{ soit } i_1 - i_2 = 3p \forall p > 0$$

On aperçoit également une proportionnalité logarithmique d'une valeur N à une autre, soit :

$$\frac{\ln(N_1)}{\ln(N_2)} = k$$

D'une droite décroissante à une autre du même type, ou lors d'un saut de droite :

On voit un décalage régulier de 2 d'une valeur N à une autre, soit :

$$2^{i_1} = 2^{2q+i'_1} \text{ soit } i_1 - i'_1 = 2q \forall q > 0$$

On aperçoit également une proportionnalité logarithmique d'une valeur N à une autre, soit :

$$\frac{\ln(N_1)}{\ln(N'_1)} = k'$$

Et ces droites sont perpendiculaires aux droites croissantes (2).

Sachant que lorsque :

$$y = ax + b \text{ et } y' = a'x + b' \text{ alors :}$$

Si $a = a'$: ces droites sont parallèles

Si $a \cdot a' = -1$: ces droites sont perpendiculaires

Si bien qu'en reprenant les équations du cas (2), on obtient :

$$i \approx 3j - \frac{\ln(2)}{5} \ln(N)$$

$$e^{\frac{5(3j-i)}{\ln(2)}} \approx N$$

$$N \approx e^{\frac{5(3j-i)}{\ln(2)}} = 2^{\frac{5(3j-i)}{\ln^2(2)}} = 32^{\frac{3j-i}{\ln^2(2)}} \forall i = 2p + 37 \text{ ou } \forall N = 4^p \cdot 2^{\frac{37}{5}} \text{ avec } p \geq 0 \text{ et } j \geq -i$$

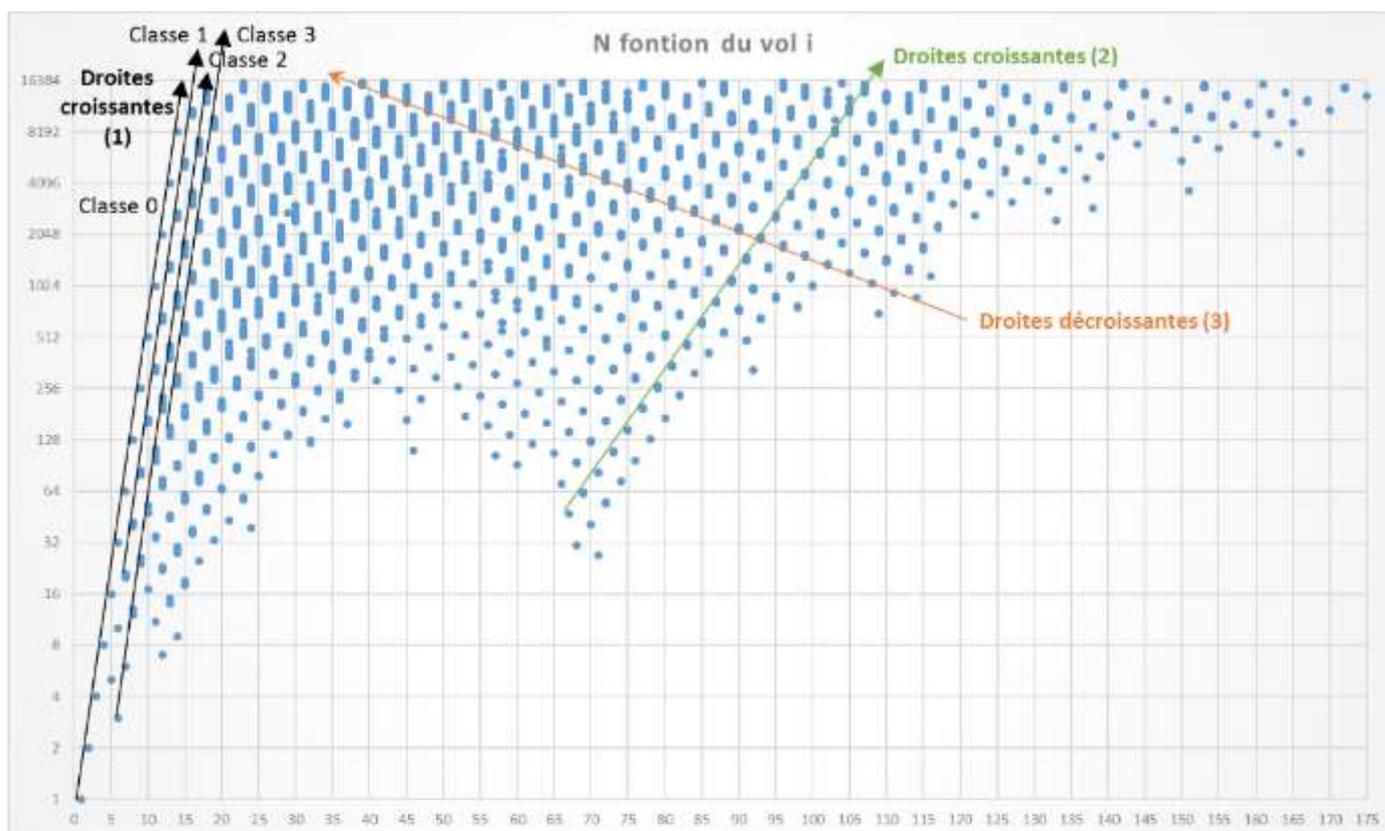
Enfin voici quelques exemples :

Via la suite de Syracuse : valeurs exactes								
N	129	147	164	188	214	444	502	3072 = 2 ¹¹ + 2 ¹⁰
i	78	75	72	69	66	48	45	...0...3k
Via le calcul des équations ci-dessus								
j	26	25	24	23	22	16	15	0
i	77,33	74,31	71,29	68,27	65,26	47,15	44,14	-1,11
N	1							
Taux d'erreurs								
%i	-0,9%	-0,9%	-1,0%	-1,0%	-1,1%	-1,8%	-1,9%	NA
%N	Proche de 100%							

Via la suite de Syracuse : valeurs exactes								
N	171	199	216	322	466	526 $\approx 2^9$	593	2^{12}
i	80	77	74	65	56	53	50	0...3k-1
Via le calcul des équations ci-dessus								
j	26	25	24	21	18	17	16	0
i	77,29	74,27	71,25	62,20	53,15	50,13	47,11	-1,15
N	1							
Taux d'erreurs								
%i	-3,4%	-3,5%	-3,7%	-4,3%	-5,1%	-5,4%	-5,8%	NA
%N	Proche de 100%							

Les valeurs de i sont précises alors que les valeurs de N sont inexactes. Cette approche n'est pas fiable car liée à une valeur j inconnue a priori.

Pour illustrer toutes ces observations de droites, voici un graphe correspondant aux valeurs de départ de la suite N en fonction des durées de vol i. On a ajouté des exemples de droites de classes 0 à 3 du cas (1) et des droites des cas (2) et (3).

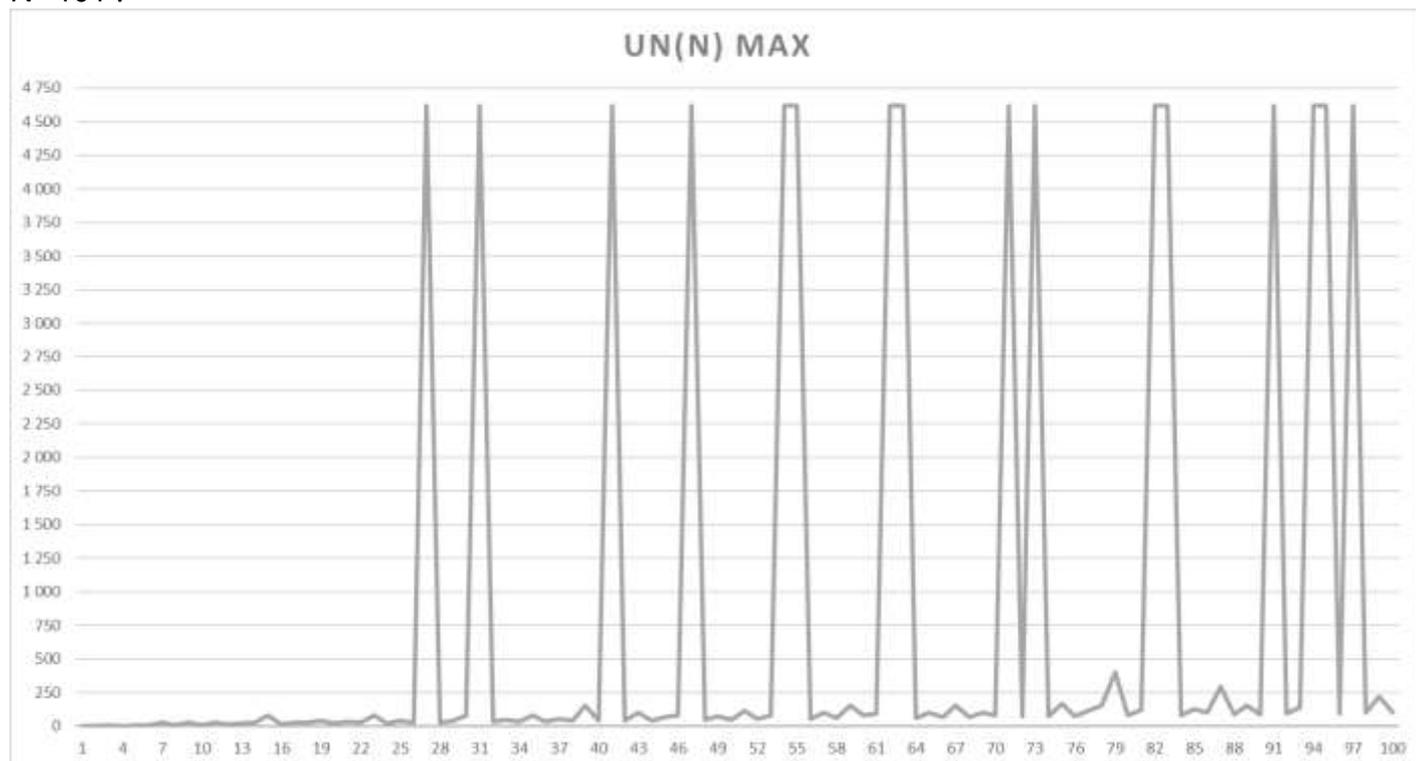


Il est visuellement évident que des relations existent. En revanche, il est numériquement complexe de les modéliser. Ces observations démontrent une structure de la suite de Syracuse à la fois très complexe et pleine de symétrie. Ce paradoxe n'est pas unique. On en verra d'autres plus loin tout à fait étonnants.

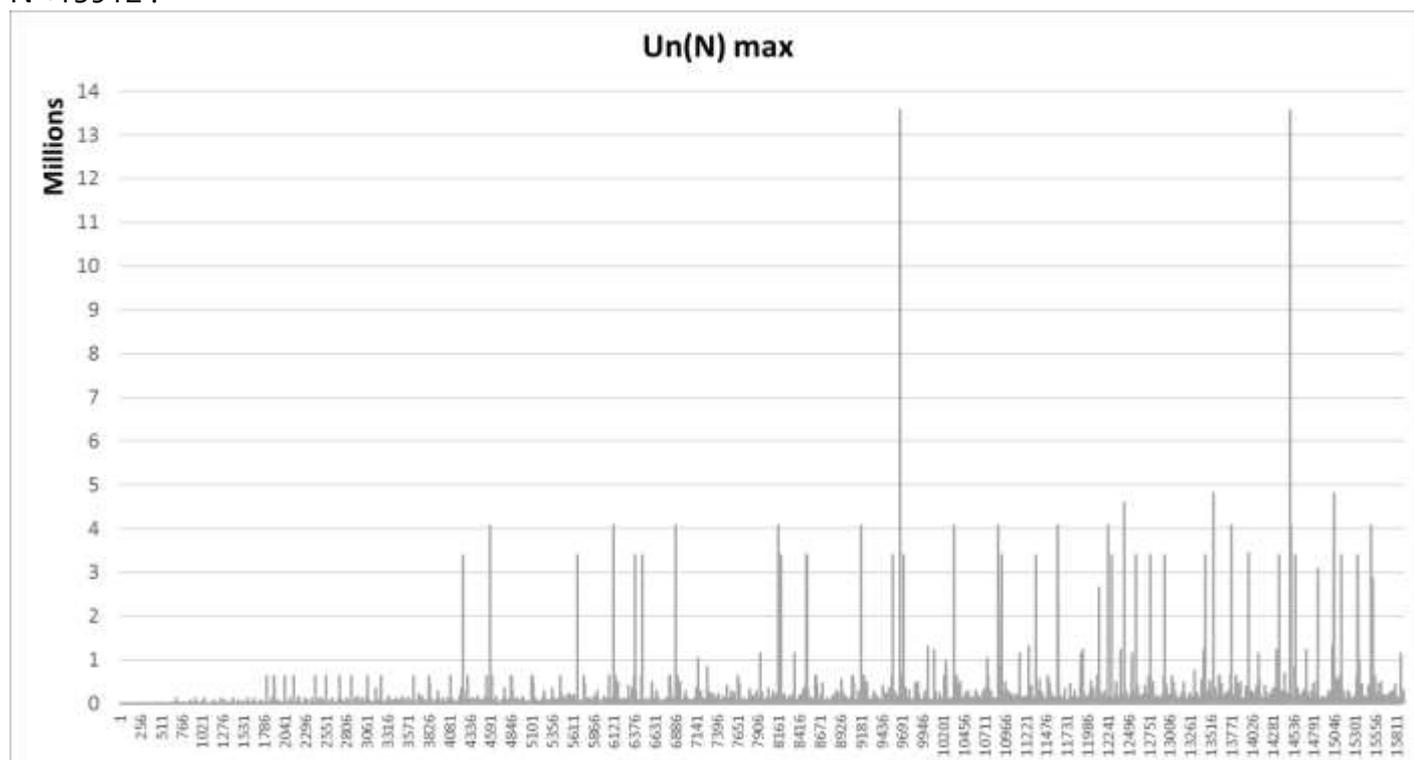
3. Hauteur de vol maximale selon la valeur de départ de la suite

Il suffit de trouver une seule valeur de N pour laquelle la suite de Syracuse s'envole à l'infini pour prouver que la conjecture est fautive. A ce jour, personne n'en a trouvé un. Pour s'en convaincre, voici une courbe représentant toutes les valeurs maximales de la suite de Syracuse pour :

$N < 101$:



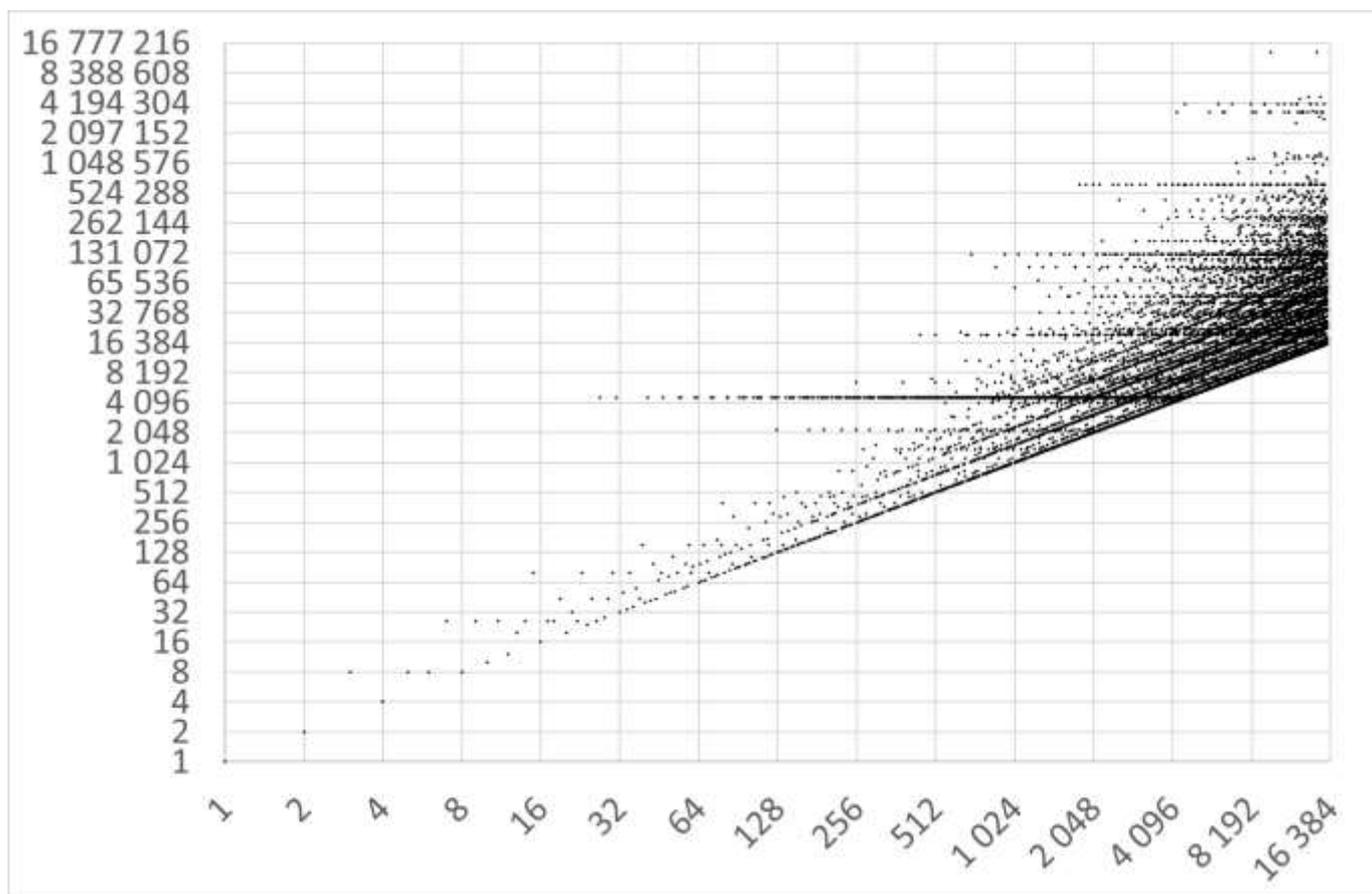
$N < 15912$:



Cela ne prouve rien, mais sur plus de 15900 nombres testés, le vol max est inférieur à 14 millions, et la durée max de vol est de 174 itérations avant de finir à 1. A priori ce maximum n'est jamais infini (sinon divergence de la suite) mais tend malgré tout et de manière chaotique vers l'infini. On est face à une difficulté de taille que l'on ne tentera pas dans cet ouvrage de prouver.

Il apparaît que plus la valeur de départ est grande plus un maximum important durant le vol existe. Cela s'apparente à de grandes marches d'escaliers. Ce qui signifie que pour une valeur de départ et son voisinage plus ou moins grand, le maximum de leurs vols sera le même, supérieur au voisinage précédent et inférieur au voisinage suivant. Ce principe de marche d'escalier n'a pas non plus été à ce jour prouvé. Mais on l'observe si on s'aventure vers de très grands nombres entiers.

Voici le même graphique que le précédent avec des échelles logarithmiques de base 2 en abscisse et en ordonnée ou chaque hauteur maximale représente un point :



On observe cette fois-ci beaucoup plus de choses. En effet, on voit nettement des lignes horizontales comme des paliers. Cela montre l'existence de hauteurs de vols maximales par palier de valeur de départ N. il existe donc pour certains N la relation suivante :

$$\ln(U_{n_{max}}(N)) = \ln(K_j)$$

$$\rightarrow U_{n_{max}}(N) = K_j \text{ avec } K_j \text{ constant pour un certain groupe } j \text{ de valeurs de } N$$

Par exemple :

$$K_1 = 8 = U_{n_{max}}(3) = U_{n_{max}}(5) = U_{n_{max}}(6) = U_{n_{max}}(8)$$

Ensuite on voit également des droites croissantes superposées et de même pente de 1. Elles représentent l'accroissement des durées de vols. Cette croissance est linéaire. Par exemple la hauteur max de $N=2^n$ est n, ainsi pour $N=32$ on a 32, pour $N=128$ on a 128, etc. la droite la plus basse du graphique est la droite des puissances de 2 reliant 1. On a donc la relation suivante :

$$\ln(U_{n_{max}}(N)) = \ln(N) = \ln(2^n)$$

$$\rightarrow U_{n_{max}}(N) = N \text{ si } N = 2^n$$

Par exemple :

$$U_{n_{max}}(16) = 16 \text{ car } 16 = 2^4$$

Les droites au-dessus sont parallèles, donc de pente 1 également. Elles montrent qu'il existe une relation du type :

$$\ln(U_{n_{max}}(N)) = \ln(N) + \ln(b_p) = \ln(b_p N)$$

$$\rightarrow U_{n_{max}}(N) = b_p N \text{ avec } b_p \text{ constant pour un certain groupe } p \text{ de valeurs de } N$$

Cette équation englobe la précédente avec :

$$b_1 = 1$$

Par exemple :

$$\begin{cases} U_{n_{max}}(29) = 44 = 29b_2 \\ U_{n_{max}}(33) = 50 = 33b_2 \\ U_{n_{max}}(37) = 56 = 37b_2 \end{cases} \rightarrow b_2 \approx \frac{3}{2} = 1,5$$

Enfin on voit que les écarts entre ces droites superposées sont constants.

4. Facteurs multiplicateurs

En prenant les itérations successives de la suite de Syracuse à partir des quatre valeurs de départ modulo 4 et en y intégrant de nouveau les quatre possibilités du modulo 4, on obtient tous les cas modulo 16 de la suite de Syracuse comme suit :

$$4(4k) = 16k \rightarrow 8k \rightarrow 4k \rightarrow 2k \rightarrow k : 1/16$$

$$4(4k + 1) = 16k + 4 \rightarrow 8k + 2 \rightarrow 4k + 1 \rightarrow 6k + 2 \rightarrow 3k + 1 : 3/16$$

$$4(4k + 2) = 16k + 8 \rightarrow 8k + 4 \rightarrow 4k + 2 \rightarrow 2k + 1 \rightarrow 3k + 2 : 3/16$$

$$4(4k + 3) = 16k + 12 \rightarrow 8k + 6 \rightarrow 4k + 3 \rightarrow 6k + 5 \rightarrow 9k + 8 : 9/16$$

$$4(4k) + 1 = 16k + 1 \rightarrow 24k + 2 \rightarrow 12k + 1 \rightarrow 18k + 2 \rightarrow 9k + 1 : 9/16$$

$$4(4k + 1) + 1 = 16k + 5 \rightarrow 24k + 8 \rightarrow 12k + 4 \rightarrow 6k + 2 \rightarrow 3k + 1 : 3/16$$

$$4(4k + 2) + 1 = 16k + 9 \rightarrow 24k + 14 \rightarrow 12k + 7 \rightarrow 18k + 11 \rightarrow 27k + 17 : 27/16$$

$$4(4k + 3) + 1 = 16k + 13 \rightarrow 24k + 20 \rightarrow 12k + 10 \rightarrow 6k + 5 \rightarrow 9k + 8 : 9/16$$

$$4(4k) + 2 = 16k + 2 \rightarrow 8k + 1 \rightarrow 12k + 2 \rightarrow 6k + 1 \rightarrow 9k + 2 : 9/16$$

$$4(4k + 1) + 2 = 16k + 6 \rightarrow 8k + 3 \rightarrow 12k + 5 \rightarrow 18k + 8 \rightarrow 9k + 4 : 9/16$$

$$4(4k + 2) + 2 = 16k + 10 \rightarrow 8k + 5 \rightarrow 12k + 8 \rightarrow 6k + 4 \rightarrow 3k + 2 : 3/16$$

$$4(4k + 3) + 2 = 16k + 14 \rightarrow 8k + 7 \rightarrow 12k + 11 \rightarrow 18k + 17 \rightarrow 27k + 26 : 27/16$$

$$4(4k) + 3 = 16k + 3 \rightarrow 24k + 5 \rightarrow 36k + 8 \rightarrow 18k + 4 \rightarrow 9k + 2 : 9/16$$

$$4(4k + 1) + 3 = 16k + 7 \rightarrow 24k + 11 \rightarrow 36k + 17 \rightarrow 54k + 26 \rightarrow 27k + 13 : 27/16$$

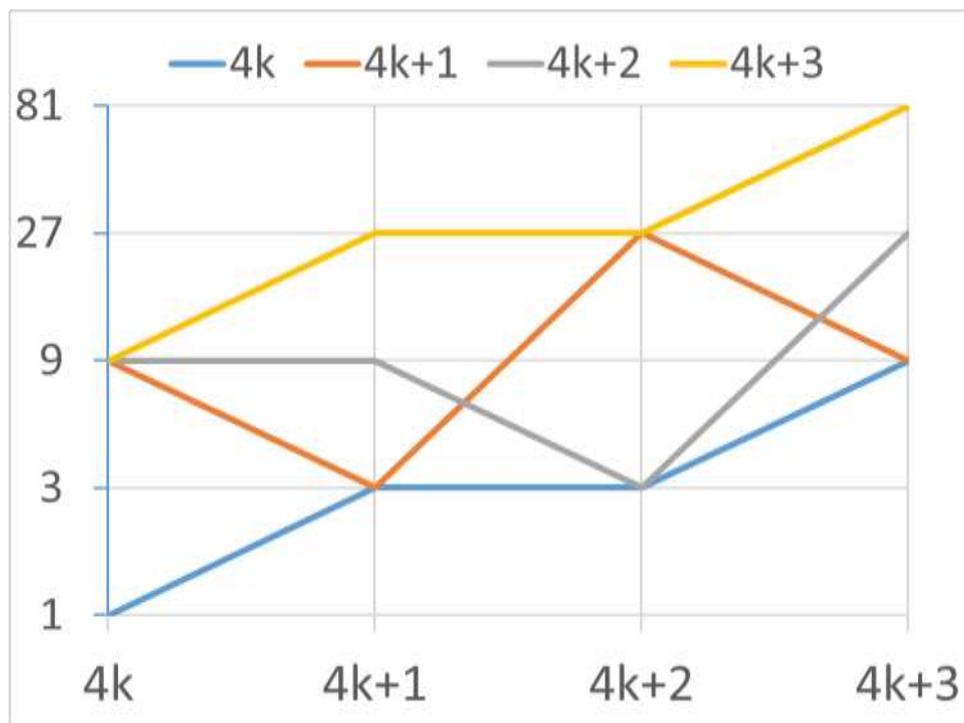
$$4(4k + 2) + 3 = 16k + 11 \rightarrow 24k + 17 \rightarrow 36k + 26 \rightarrow 18k + 13 \rightarrow 27k + 20 : 27/16$$

$$4(4k + 3) + 3 = 16k + 15 \rightarrow 24k + 23 \rightarrow 36k + 35 \rightarrow 54k + 53 \rightarrow 81k + 80 : 81/16$$

En bout de chaque ligne ci-dessus, on note le facteur multiplicateur globale. Ensuite, on construit un tableau croisé avec ces 16 cas (soit 4x4) en y indiquant le facteur multiplicateur associé. On obtient :

.../16	4k	4k+1	4k+2	4k+3	Somme
4k	1	9	9	9	28
4k+1	3	3	9	27	42
4k+2	3	27	3	27	60
4k+3	9	9	27	81	126
Somme	16	48	48	144	256

Et sous forme de graphe :



Les ordonnées sont sous une échelle logarithmique.

5. Suite dénuée de perturbation

Si la conjecture de Syracuse se rapporte à un arbre dont le vent fait voler les feuilles jusqu'à ce qu'elles tombent toutes par terre, alors on va supprimer ce vent pour étudier ce qu'il en reste.

Ainsi si :

$$U_0(N) = N \text{ et } U_{n+1}(N) = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(N) + 1}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

Alors la suite sans vent ou la perturbation croissante est notée comme suit :

$$V_0(N) = N \text{ et } V_{n+1}(N) = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{U_n(N) + 1}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

En effet cette suite est strictement décroissante jusqu'à 1. Ce qui revient à dire qu'elle se comporte comme la suite de Syracuse pour les valeurs paires mais continue sa décroissance pour les valeurs impaires.

On a donc la perturbation croissante ou le vent de suite de Syracuse qui vaut :

$$P_{n+1}(N) = U_{n+1}(N) - V_{n+1}(N) = \begin{cases} 0 & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ U_n(N) & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

La perturbation vaut donc la valeur du vol au rang n si elle est impaire, sinon il n'y a pas de perturbation. On peut aussi l'identifier comme un vol pair est un vol de plomb qui fait chuter la feuille et un vol impair est un vol de plume qui fait s'envoler davantage la feuille.

Côté perturbation, un vol de plomb (pair) est sans aucune perturbation (vent) et un vol de plume (impair) est avec une forte perturbation croissante (vent fort).

Mais la suite de Syracuse privée de vent ou de la moindre perturbation croissante ne révèle rien de nouveau ou de remarquable.

2.Observations numériques : parités alternées

On regarde maintenant les $U_n(N)$ et $U_{n+1}(N)$ pour $U_n(N) < 101$. Les deux premières colonnes représentent $U_n(N)$ et $U_{n+1}(N)$ par ordre croissant de $U_n(N)$ et les deux colonnes suivantes par ordre croissant de $U_{n+1}(N)$:

U_n	U_{n+1}	U_n	U_{n+1}												
0	0	0	0	25	38	38	19	51	77	25	38	75	113	51	77
1	2	2	1	26	13	13	20	50	25	76	38	76	38	51	77
2	1	1	2	27	41	40	20	51	77	78	39	77	116	53	80
3	5	4	2	28	14	42	21	52	26	80	40	78	39	55	83
4	2	6	3	29	44	44	22	53	80	27	41	79	119	57	86
5	8	8	4	30	15	15	23	54	27	82	41	80	40	59	89
6	3	3	5	31	47	46	23	55	83	84	42	81	122	61	92
7	11	10	5	32	16	48	24	56	28	86	43	82	41	63	95
8	4	12	6	33	50	50	25	57	86	29	44	83	125	65	98
9	14	14	7	34	17	50	25	58	29	88	44	84	42	67	101
10	5	5	8	35	53	17	26	59	89	90	45	85	128	69	104
11	17	16	8	36	18	52	26	60	30	92	46	86	43	71	107
12	6	18	9	37	56	54	27	61	92	31	47	87	131	73	110
13	20	20	10	38	19	56	28	62	31	94	47	88	44	75	113
14	7	7	11	39	59	19	29	63	95	96	48	89	134	77	116
15	23	22	11	40	20	58	29	64	32	98	49	90	45	79	119
16	8	24	12	41	62	60	30	65	98	33	50	91	137	81	122
17	26	26	13	42	21	62	31	66	33	100	50	92	46	83	125
18	9	9	14	43	65	21	32	67	101	35	53	93	140	85	128
19	29	28	14	44	22	64	32	68	34	37	56	94	47	87	131
20	10	30	15	45	68	66	33	69	104	39	59	95	143	89	134
21	32	32	16	46	23	68	34	70	35	41	62	96	48	91	137
22	11	11	17	47	71	23	35	71	107	43	65	97	146	93	140
23	35	34	17	48	24	70	35	72	36	45	68	98	49	95	143
24	12	36	18	49	74	72	36	73	110	47	71	99	149	97	146
				50	25	74	37	74	37	49	74	100	50	99	149

On note que tous les $U_{n+1}(N) < U_n(N)$ si U_n est pair. Logique puisque : $U_{n+1}(N) = \frac{U_n(N)}{2}$ dans ce cas. La suite est décroissante si $U_n(N)$ est pair au rang $U_{n+1}(N)$.

Ainsi, pour tout N pair, il est inutile d'étudier N mais son premier successeur impair, soit N/2 ou N/4 ... Seuls les nombres impairs de cette suite sont donc à étudier pour prouver la décroissance irréductible, la convergence vers 1 et enfin la conjecture.

Preuve par l'absurde :

Si tous les nombres N et ses successeurs $U_n(N)$ étaient pairs alors tous les $U_{n+1}(N) < U_n(N)$ jusqu'à ce que : $U_{n+1}(N) = 2$ et $U_{n+2}(N) = \frac{2}{2} = 1 = U_i(N)$. Ainsi la conjecture serait trivialement prouvée.

Ce cas existe et sera prouvé plus bas avec les puissances de 2. Mais les impairs ont une activité beaucoup plus chaotique qui résiste à ce jour à tous les esprits qui s’y sont penchés.

On remarque également que $U_{n+1}(N)$ peut être identique pour un N différent. On observe même une redondance, à savoir :

Pour tout $U_n(N) > 0$, $U_n(N)$ et $(3U_n(N) + 1)$ produisent $U_{n+1}(N) = \frac{3U_n(N)+1}{2}$, en toute logique car $U_n(N)$ est impair et $(3U_n(N) + 1)$ est pair.

Par exemple : $U_n(N) = 1$, et $3U_n(N) + 1 = 4$ et donc $U_{n+1}(N) = 2$ pour ces deux $U_n(N)$.
Même remarque avec 3 et 10 qui donnent 5, ou 5 et 16 qui donnent 8, ou encore 7 et 22 qui donnent 11, etc.

Ces doublons confortent sur le fait qu’étudier le devenir des nombres pairs n’a pas d’intérêt démonstratif.

On va donc maintenant s’intéresser aux nombres impairs pour $U_n(N) < 100$:

$U_n(N)$	$U_{n+1}(N)$		25	38	X	51	77		77	116	x
1	2	x	27	41		53	80	x	79	119	
3	5		29	44	X	55	83		81	122	x
5	8	x	31	47		57	86	x	83	125	
7	11		33	50	X	59	89		85	128	x
9	14	x	35	53		61	92	x	87	131	
11	17		37	56	X	63	95		89	134	x
13	20	x	39	59		65	98	x	91	137	
15	23		41	62	x	67	101		93	140	x
17	26	x	43	65		69	104	x	95	143	
19	29		45	68	x	71	107		97	146	x
21	32	x	47	71		73	110	x	99	149	
23	35		49	74	x	75	113				

On observe qu’un $U_n(N)$ impair sur deux produits un $U_{n+1}(N)$ pair. Or les nombres pairs ne sont pas utiles à étudier. On va donc garder uniquement les $U_n(N)$ impairs qui produisent des $U_{n+1}(N)$ impairs :

U_n	U_{n+1}	U_{n+2}		27	41	62	x	55	83	125		83	125	188	x
3	5	8	x	31	47	71		59	89	134	x	87	131	197	
7	11	17		35	53	80	x	63	95	143		91	137	206	x
11	17	26	x	39	59	89		67	101	152	x	95	143	215	
15	23	35		43	65	98	x	71	107	161		99	149	224	x
19	29	44	x	47	71	107		75	113	170	x				
23	35	53		51	77	116	x	79	119	179					

De nouveau, on observe qu'un $U_n(N)$ impair sur deux produits un $U_{n+2}(N)$ pair. De même que précédemment, on va donc garder uniquement les $U_n(N)$ impairs qui produisent des $U_{n+1}(N)$ et $U_{n+2}(N)$ impairs, et ainsi de suite :

Un impairs qui donne Un+1 et Un+2 impairs					Un impairs qui donne Un+1, Un+2 et Un+3 impairs					Un impairs qui donne Un+1, Un+2, Un+3 et Un+4 impairs					Un impairs qui donne Un+1, Un+2, Un+3, Un+4 et Un+5 impairs										
Un	Un+1	Un+2	Un+3		Un	Un+1	Un+2	Un+3	Un+4		Un	Un+1	Un+2	Un+3	Un+4	Un+5		Un	Un+1	Un+2	Un+3	Un+4	Un+5	Un+6	
7	11	17	26	x	15	23	35	53	80	x	31	47	71	107	161	242	x	63	95	143	215	323	485	728	x
15	23	35	53		31	47	71	107	161		63	95	143	215	323	485									
23	35	53	80	x	47	71	107	161	242	x	95	143	215	323	485	728	x								
31	47	71	107		63	95	143	215	323																
39	59	89	134	x	79	119	179	269	404	x															
47	71	107	161		95	143	215	323	485																
55	83	125	188	x																					
63	95	143	215																						
71	107	161	242	x																					
79	119	179	269																						
87	131	197	296	x																					
95	143	215	323																						

On observe qu'on a :

- 1 fois sur 2 : 1 $U_n(N)$ est pair et ainsi décroissant au rang $n+1$;
- 1 fois sur 2 : 1 $U_n(N)$ est impair et :
 - 1 fois sur 4 : 1 $U_n(N)$ est impair et donne 1 successeur $U_{n+1}(N)$ pair et ainsi décroissant au rang $n+2$;
 - 1 fois sur 4 : 1 $U_n(N)$ est impair et donne 1 successeur $U_{n+1}(N)$ impair et :
 - 1 fois sur 8 : 1 $U_n(N)$ est impair et donne 2 successeurs $U_{n+1}(N)$ et $U_{n+2}(N)$ impairs et décroissant au 2nd rang suivant ;
 - 1 fois sur 16 : 1 $U_n(N)$ est impair et donne 3 successeurs $U_{n+1}(N)$, $U_{n+2}(N)$ et $U_{n+3}(N)$ impairs et décroissant au 2nd rang suivant ;
 - 1 fois sur 32 : 1 $U_n(N)$ est impair et donne 4 successeurs $U_{n+1}(N)$, $U_{n+2}(N)$, $U_{n+3}(N)$ et $U_{n+4}(N)$ impairs et décroissant au 2nd rang suivant ;
 - 1 fois sur 64 : 1 $U_n(N)$ est impair et donne 5 successeurs $U_{n+1}(N)$, $U_{n+2}(N)$, $U_{n+3}(N)$, $U_{n+4}(N)$ et $U_{n+5}(N)$ impairs et décroissant au 2nd rang suivant ;
 - ...
 - 1 fois sur 2^{k+1} : 1 $U_n(N)$ est impair et donne k successeurs jusqu'à $U_{n+k}(N)$ inclus impairs (avec $k>0$) et décroissant au 2nd rang suivant ;
 - ...
 - **1 fois sur l'infini, c'est-à-dire dans aucun cas : 1 $U_n(N)$ est impair et donne une infinité de successeurs impairs et croît à l'infini (divergence certaine).**

La probabilité d'avoir un $U_{n+1}(N)$ impair est de moins en moins forte si ces prédécesseurs sont impairs. Et donc la croissance de la suite $\frac{3U_{n+1}}{2}$ est d'autant moins probable qu'elle s'enchaîne. Tous les autres cas décroissent au rang suivant $\left(\frac{U_n}{2}\right)$. Mais attention, le rang suivant ($U_{n+1}(N)$) peut de nouveau croître une infinité de fois même si la probabilité que cela arrive est divisée par deux à chaque rang.

3. Proportion d'itérations paires et impaires d'un même vol

On cherche à savoir ici si pour un même vol le nombre d'itérations paires est plus ou moins important par rapport au nombre d'itérations impaires. Si le nombre d'itérations paires, c'est-à-dire décroissantes ; est plus important on peut plus facilement imaginer que la suite converge dans la plupart des cas. Or, on n'est pas au bout de nos surprises. En effet, on va voir que parfois le nombre d'itérations impaires, c'est-à-dire croissantes, est plus important que le nombre d'itérations paires. Et que cela n'a, a priori, pas d'incidence sur la convergence vers 1 !

On verra également dans un chapitre suivant que les puissances de 2 jouent un rôle prépondérant pour la convergence. De ce fait, on pose :

$$\forall N = 2^k \text{ et } k > 0 \text{ alors } k = S_p(N) - S_I(N) > 0$$

avec $\begin{cases} S_I(N) = \text{nombre de } U_n(N) \text{ impairs pour } n \in \{0; i\} \\ S_p(N) = \text{nombre de } U_n(N) \text{ pairs pour } n \in \{0; i\} \end{cases}$

De plus, on remarque que le nombre d'itérations paires par rapport au nombre d'itérations impaires pour un $N > 0$ quelconque suit toujours la loi suivante :

$$\forall 0 < N < 2^k \text{ et } k > 0 \text{ alors } k > S_p(N) - S_I(N)$$

Cette inéquation est dû au fait que les puissances de 2 sont toujours paires rang après rang et qu'ainsi, dans ce cas, aucune valeur impaire apparaît dans la suite jusqu'à 1.

Enfin, il existe également le cas suivant correspondant à davantage de valeurs impaires que de paires, menant pourtant bien à 1 :

$$\forall 0 < N < 2^k \text{ alors } S_p(N) - S_I(N) < 0$$

Pour illustrer cela, voici un tableau avec le nombre de valeurs dans ce dernier cas pour $k < 21$:

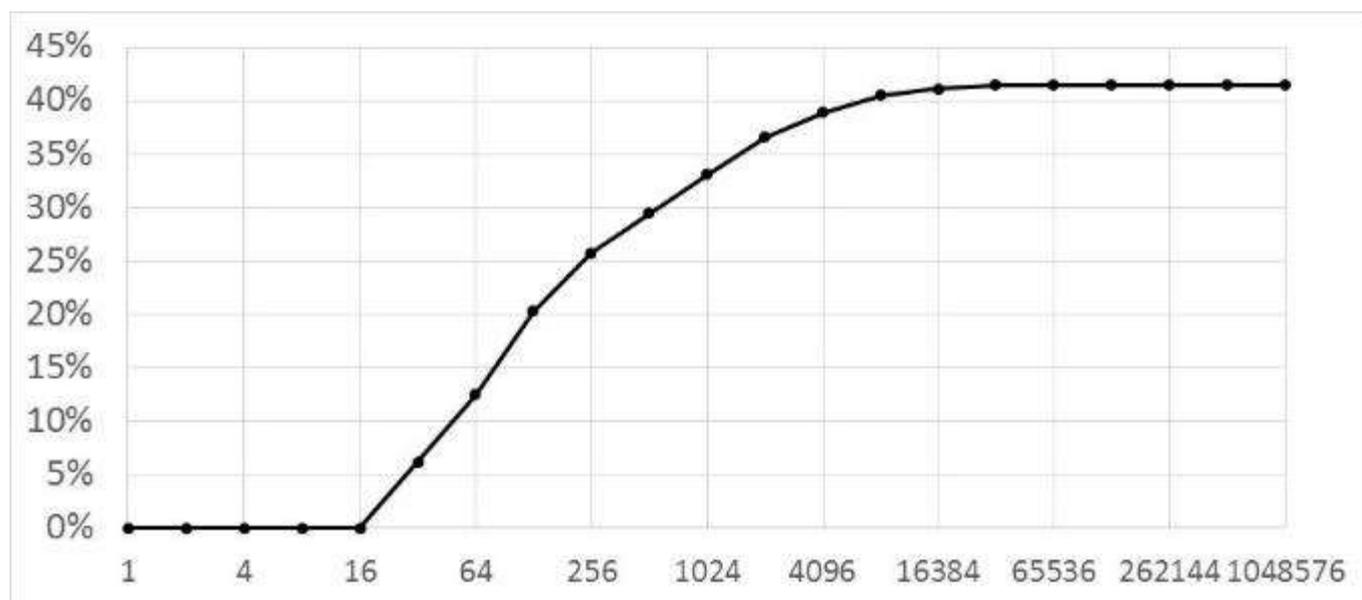
k	Nombre de $Sp(N) - Si(N) < 0$ pour $2^{k-1} < N \leq 2^k$	Valeurs N	Nombre de $Sp(N) - Si(N) < 0$ pour $N \leq 2^k$	2^k	$\frac{\text{Nombre de } Sp(N) - Si(N) < 0}{2^k}$ pour $N \leq 2^k$
0				1	
1				2	
2	0	Aucune	0	4	0,0%
3				8	
4				16	
5	2	27 et 31	2	32	6,3%
6	6	41, 47, 54, 55, 62 et 63	8	64	12,5%
7	18	71, 73, 82, 83, 91, 94, 95, 97, 103, 107, 108, 109, 110, 111, 121, 124, 125, 126	26	128	20,3%
8	40	...	66	256	25,8%
9	85		151	512	29,5%
10	188		339	1 024	33,1%
11	411		750	2 048	36,6%
12	845		1 595	4 096	38,9%
13	1 726		3 321	8 192	40,5%
14	3 418		6 739	16 384	41,1%
15	6 739*		13 478*	32 768	41,1%*
16	13 478*		26 956*	65 536	41,1%*
17	26 956*		53 912*	131 072	41,1%*
18	53 912*		107 824*	262 144	41,1%*
19	107 824*		215 648*	524 288	41,1%*
20	215 648*	431 296*	1 048 576	41,1%*	

*A partir de $k=15$ les valeurs marquées d'un astérisque sont des estimations.

Ce tableau relève deux points significatifs :

- Il est étonnant qu'avec davantage d'itérations impaires (que de paires) la suite converge vers 1 ;
- Il est étonnant que cette proportion augmente plus N (et ainsi k) est grand.

Voici la courbe du tableau précédent :



On est donc confronté à une difficulté de taille, malgré une divergence certaine lorsque $U_n(N)$ est impair, malgré un nombre de fois supérieur où $U_n(N)$ est impair plutôt que pair, et malgré un accroissement de ces cas quand le nombre de départ N choisi est grand, la suite de Syracuse converge malgré tout dans tous les cas, sans aucune exception trouvée à ce jour. Cette propriété remarquable est redoutable et pleine de mystère.

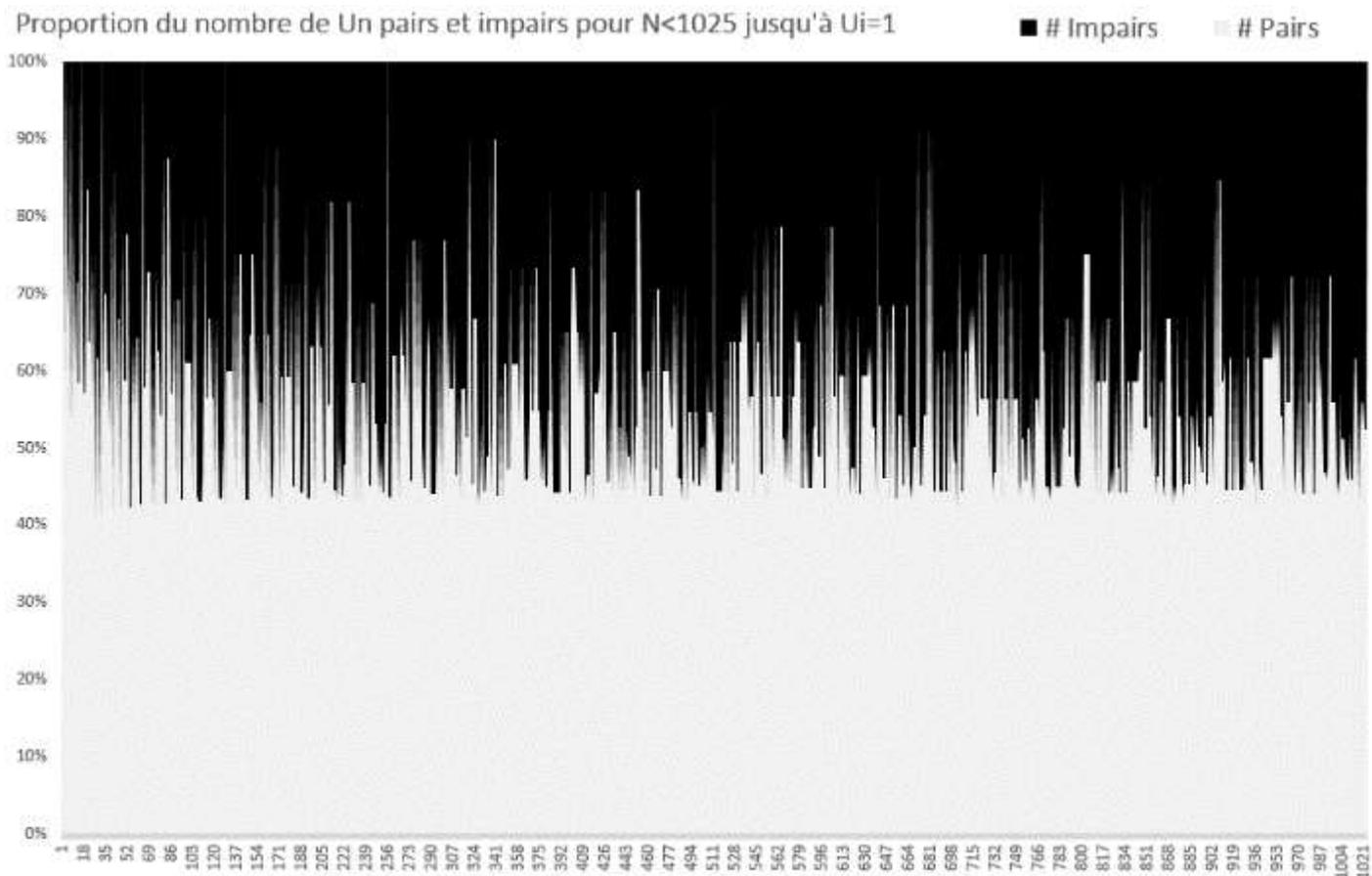
Autrement dit, si N est choisi grand, on a plus de 41% des vols qui ont davantage d'itérations impaires que de paires et qui, malgré tout, convergent inlassablement tous vers 1.

~

Les $U_n(N)$ pairs, étant divisés par 2, engendrent tous des $U_{n+1}(N)$ décroissants. A l'inverse, les $U_n(N)$ impairs engendrent des $U_{n+1}(N)$ croissants. On va s'intéresser de nouveau à la proportion des $U_n(N)$ pairs et impairs selon la valeur N de départ jusqu'à ce qu'on atteigne 1. Cela afin d'estimer si une convergence est a priori toujours possible.

Si le nombre de $U_n(N)$ impairs est bien supérieur au nombre de $U_n(N)$ pairs en fonction de la valeur N de départ, la suite sera divergente. A l'inverse elle aura davantage de chance d'être convergente ou du moins décroissante.

Voici une représentation graphique pour $N \leq 1024$ du nombre des $U_n(N)$ pairs et des $U_n(N)$ impairs jusqu'à ce que $U_n(N) = U_i(N) = 1$:



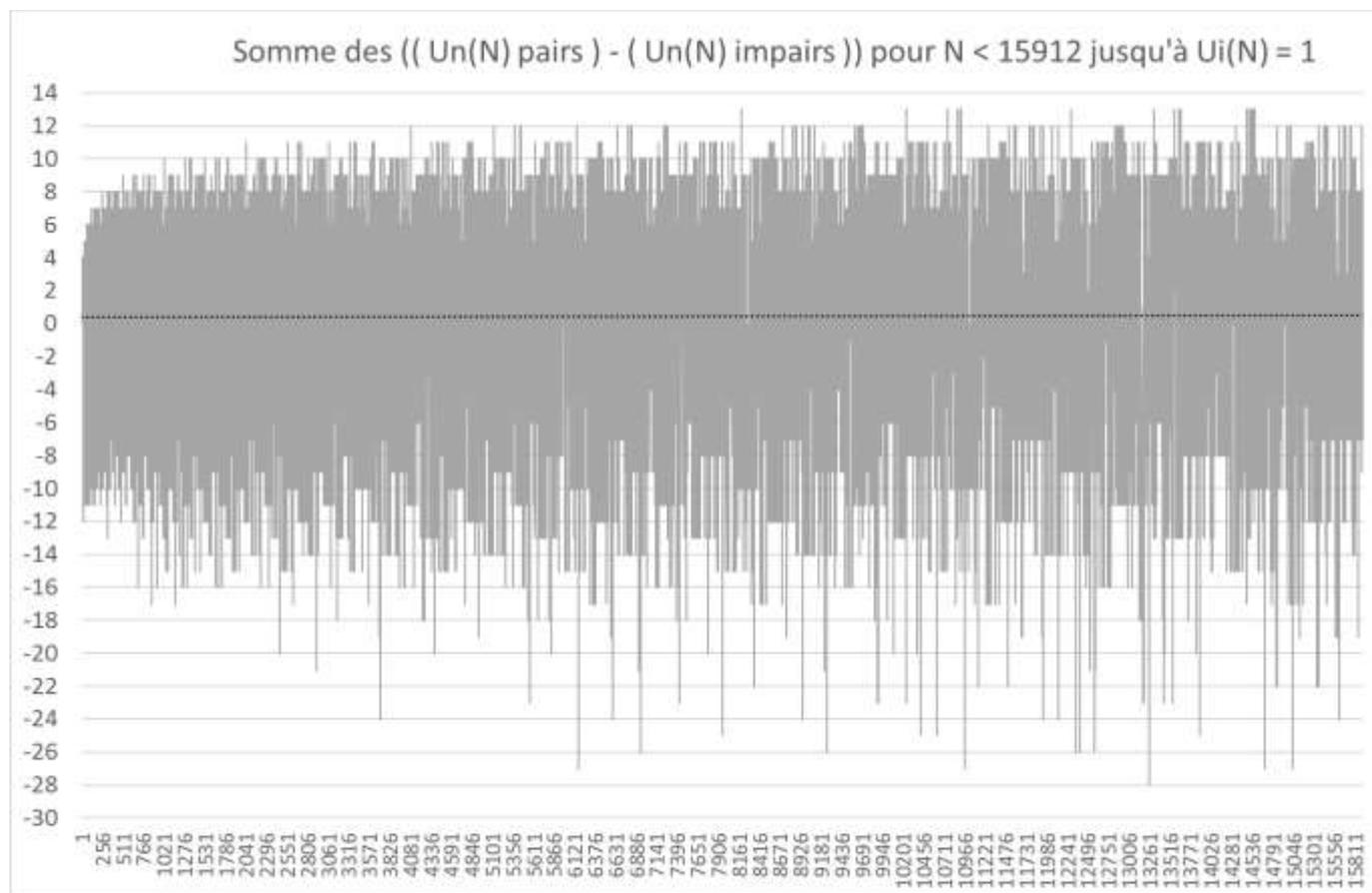
On remarque que le nombre de $U_n(N)$ pairs est à peu près égal au nombre de $U_n(N)$ impairs quel que soit N :

N ≤ ...	#Pairs	#Impairs	Moyenne #Pairs	Moyenne #Impairs	%Pairs	%Impairs	Ratio #Pairs/#Impairs
100	1 132	1 005	11,32	10,00	53,0%	47,0%	1,13
1 024	20 827	20 245	20,34	20,00	50,7%	49,3%	1,03
15 911	478 683	471 908	30,08	29,66	50,4%	49,6%	1,01
...
∞	A=∞	A=∞	B=∞	B=∞	50,0%	50,0%	1,00

La dernière ligne est une hypothèse.

A mesure que l'on prend davantage de valeurs N de départ en compte, le ratio du nombre de $U_n(N)$ pairs sur le nombre de $U_n(N)$ impairs tend vers 1. On ne peut donc à ce stade qu'imaginer que pour des N « petits » la convergence ou décroissance est favorable et pour des N « grands » voir « très grands » elle est beaucoup plus incertaine. Aucune conclusion ne peut être faite à ce stade.

En revanche, l'effet chaotique des altitudes de vols est confirmé d'autant plus que N est grand. D'ailleurs, pour étudier cet effet, voici une courbe des différences du nombre d'itérations paires et d'itérations impaires pour $N < 15912$:



On note qu'il existe un nombre non négligeable, de valeurs N de départ pour lesquels il y a jusqu'à 28 itérations impaires de plus que d'itérations paires pour néanmoins toujours aboutir à 1. Comment expliquer une telle différence sachant qu'une seule itération impaire fait croître la suite fois $3/2$ ($= +150\%$) et donc s'éloigner du point d'arrivée 1. Or, force est de constater, que même en ayant un nombre d'itérations paires bien inférieur au nombre d'itérations paires, la suite décroît inéluctablement vers 1.

Sur l'échantillon observé, la différence maximale est lorsqu'il y a 41% d'itérations impaires de plus que d'itérations paires. On avait déjà observé précédemment ce taux. Par exemple avec $N=27$ ($i=70$), on a 29 itérations paires et 41 itérations impaires. En outre, la moyenne sur cet ensemble reste néanmoins très proche de zéro. C'est-à-dire qu'il y a en moyenne autant de valeurs paires que d'impaires sur les 15911 premiers vols de la suite de Syracuse.

La proportion de nombre de $U_n(N)$ pairs et impaires sera revue en détail dans le paragraphe consacré aux trajectoires.

4. Forme allégorique : Autoroutes

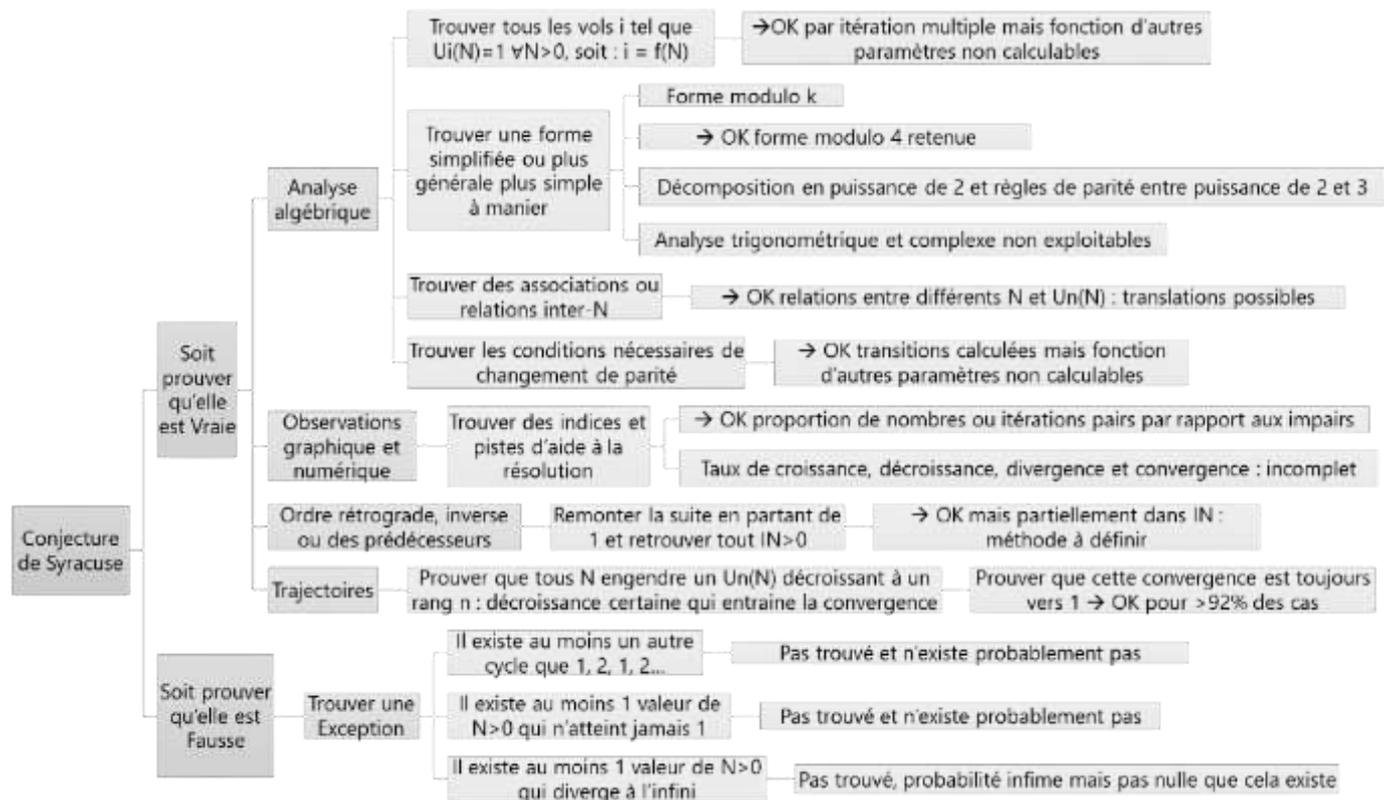
De nos jours, les autoroutes ont remplacé les chemins et Rome n'est plus hégémonique, mais chacune des capitales de chaque pays du monde centralisent le pouvoir et les décisions. Les chemins rejoignent les rues, qui rejoignent à leur tour les avenues, puis les routes départementales, les nationales, les voies rapides et enfin les autoroutes qui relient les capitales. Les capitales sont l'unité et les déplacements, toutes les valeurs entières.

5. Forme allégorique : Cheveux

Essayez de comptabiliser le nombre de cheveux de plusieurs têtes et leurs longueurs respectives. C'est à la fois impossible et chaque longueur est différente. Pas une est identique. Leur nombre est gigantesque. Or nos cheveux, aussi divers soient-ils, ont tous une racine commune, notre tête. Qu'ils soient bouclés, ondulés, raides, secs, gras, frisés, crépus, blonds, châains, gris, blancs ou noirs, ils s'accrochent tous à la même et unique racine ou entité, notre tête.

5. Stratégies de résolutions

Voici, représentées dans l'arbre ci-dessous, les différentes stratégies étudiées dans cet ouvrage :



Bien sûr, ces stratégies sont à la fois limitées par leurs nombres et aussi par leurs profondeurs de recherche. L'une d'entre elles ou la combinaison de plusieurs d'entre elles permet peut-être de se diriger vers une preuve ou un contre-exemple de la conjecture de Syracuse.

1. Forme allégorique : Rome

Selon l'adage bien connu de l'époque : « tous les chemins mènent à Rome ». Cela indiquait que le pouvoir et les décisions qui régissaient une partie de la planète étaient prises à Rome. La ville était vue comme le centre névralgique du monde. Elle représentait ainsi l'unité du monde, le point commun qui régissait toutes les cités. Considérons tous les déplacements de l'époque, plus ou moins lointains, avec plus ou moins de moyens élaborés pour se déplacer (à pied, à cheval, en calèche...) et selon une géographie variée (plate, en pente, en montagne...). Eh bien, si « tous les chemins mènent à Rome », alors tous ces déplacements convergent vers Rome, symbole de l'unité des cités. Rome représente l'unité 1, et les durées de déplacements variés et selon différents reliefs de tous les hommes : tous les nombres entiers.

2. Forme allégorique : Musique

Il existe une infinité de musiques plus ou moins agréables à l'oreille de chacun. Mais toutes ont un refrain régulier qui revient sans cesse. Ainsi, les notes flottent harmoniquement et retombent inlassablement au refrain comme par évidence, enchantement ou surprise. On passe des aigus aux graves, on les combine également, on entend plusieurs variations, et on retourne naturellement encore et toujours au refrain, unique et central.

6. Une preuve de convergence est-elle possible ?

On va, dans les pages qui suivent et de différentes manières, tenter de déceler si une convergence certaine de la suite de Syracuse est possible indépendamment de la valeur N de départ.

Des approximations donnent des indices ou des tendances parfois fortes mais ne prouvent en rien la convergence ou la divergence complète. On arrive malgré tout à des résultats significatifs et utiles pour la suite.

1. Aux limites

Tout d'abord, grossièrement, on a 1 chance sur 2 d'avoir un nombre impair au rang n. Puis de nouveau 1 chance sur 2 d'en avoir un autre au rang n+1, etc. Ce raisonnement mène à une limite nulle d'avoir une probabilité avec uniquement des successeurs impairs lorsque n tend vers l'infini. C'est-à-dire :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^k} \right) = 0$$

Mais rien ne prouve que la suite de Syracuse suive, rang après rang, une probabilité d'une chance sur deux de tomber sur un nombre impair. Ce raisonnement n'est donc ni précis, ni valable.

Une autre façon de s'en convaincre est d'étudier si la somme S de la fonction y suivante est finie. Si oui, la suite peut converger. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante.

$$y = \frac{1}{2^x} = 2^{-x} = \cosh(x \ln(2)) - \sinh(x \ln(2))$$

S représente le fait qu'on a, a priori, 1 chance sur 2 d'avoir un nombre impair au rang n, puis de nouveau 1 chance sur 2 au rang suivant, etc. Soit :

$$S = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} (1 + \dots) \right) \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$S = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{x=1}^m \frac{1}{2^x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^m} \sum_{x=0}^{m-1} 2^x \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^m} \right) = 1$$

Rappel : pour trouver ce résultat, il suffit de se ramener à une suite géométrique usuelle dont on connaît la somme. Pour cela, il suffit de multiplier par 2^m le numérateur à développer et le dénominateur à factoriser. La suite géométrique révélée, il ne reste plus qu'à appliquer sa formule bien connue, que voici à tout hasard :

$$\sum_{x=0}^m a^x = \frac{1 - a^{m+1}}{1 - a}$$

Mais, de nouveau, un passage de temps en temps à des valeurs paires et en majorité à des valeurs impaires produirait invariablement une suite croissante divergente.

Ces observations, aussi simples soient elles, serviront pour la suite.

2.Si la valeur de départ est grande

On se propose de simplifier la suite en considérant N très grand. Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Si } U_n(N) \text{ est pair alors } U_{n+1}(N) &= \frac{U_n(N)}{2} \\ \text{Si } U_n(N) \text{ est impair alors } U_{n+1}(N) &= \frac{3U_n(N) + 1}{2} \approx \frac{3U_n(N)}{2} \end{aligned}$$

Si en moyenne quel que soit N très grand $U_n(N)$ est 1 fois sur 2 pair et 1 fois sur 2 impair, on définit le taux de convergence $T_c(N)$ suivant :

$$T_c(N) = \frac{U_n(N) - U_{n+1}(N)}{U_n(N)} \approx 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{i}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{i}{2}} = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\right)^i = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^i \quad \forall i > 0 \text{ et } N \gg 0$$

Or, si N est très grand, la durée minimale de vol est aussi a priori grande, ainsi on pose :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_c(N) \approx \lim_{i \rightarrow \infty} T_c(N) \approx \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^i\right) = 1 = 100\%$$

Par exemple, pour un N grand quelconque :

- Si le vol i est court : $i=10$ alors $T_c(N) \approx 76,27\%$
- Si le vol i est long : $i=100$ alors $T_c(N) \approx 99,99\%$
- Si le vol i est très long : $i=1000$ alors $T_c(N) \approx 100\%$

On sait bien que cela fait beaucoup de si, et cela ne constitue pas une preuve. Mais cette approche simplifiée au maximum donne un aperçu du réel taux rapide de convergence dans la majorité des cas de la suite de Syracuse avec N choisi grand.

A partir de la formule précédente, on peut également estimer la durée de vol i. En effet, en suivant le même raisonnement simplifié, on a :

$$U_i(N) = 1 \approx U_{i-1}(N) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = U_{i-2}(N) \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot \frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = U_{i-3}(N) \left(\frac{1}{2}\right)^{3 \cdot \frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{3 \cdot \frac{1}{2}} = \dots = N \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{i}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{i}{2}}$$

$$U_i(N) = 1 \approx N \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{i}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{i}{2}} = N \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\right)^i = N \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^i \text{ avec } N \gg 0$$

D'où dans ce cas-là, en passant l'équation en logarithmique, on obtient :

$$i = \frac{2 \ln(N)}{2 \ln(2) - \ln(3)} \approx 6,952 \cdot \ln(N) \approx \frac{146}{21} \ln(N)$$

C'est un résultat que l'on a déjà trouvé précédemment par observation graphique des durées de vols selon N et par intuition.

Par exemple :

- Si $N=100$ alors $i=18$ et via notre approximation : $i=32$;
- Si $N=1\ 000$ alors $i=72$ et via notre approximation : $i=48$;
- Si $N=10\ 000$ alors $i=23$ et via notre approximation : $i=64$;
- Si $N=10\ 001$ alors $i=115$ et via notre approximation : $i=64$.

Du fait que l'on ait fait des hypothèses simplificatrices beaucoup trop importantes, les valeurs de i en fonction de N choisis grands, sont totalement imprécises et bien loin des durées de vols réelles i . La suite réagit de manière chaotique alors que notre approximation est linéaire par rapport au logarithme de N . Cela ne pourra jamais coïncider. Cette première approche ne donne qu'une tendance grossière de décroissance de la suite de Syracuse.

On peut ajouter un paramètre aux équations précédentes pour affiner notre résultat. Il suffit de considérer le nombre d'itérations paires et impaires différent jusqu'à atteindre 1. Ce qui donne avec les mêmes hypothèses que précédemment :

Avec p comme indice des itérations paires :

$$T_c(N) \approx 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p \left(\frac{3}{2}\right)^{i-p} = 1 - \frac{3^{i-p}}{2^i} = 1 - \frac{1}{3^p} \left(\frac{3}{2}\right)^i \quad \forall i \geq p \geq 0 \text{ et } N \gg 0$$

Ou avec m comme indice des itérations impaires :

$$T_c(N) \approx 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{i-m} \left(\frac{3}{2}\right)^m = 1 - \frac{3^m}{2^i} = \quad \forall i > m \geq 0 \text{ et } N \gg 0$$

On a bien sûr :

$$i = p + m$$

De même que précédemment, on considère i grand (durée du vol long) si N est grand, soit :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_c(N) \approx \lim_{i \rightarrow \infty} T_c(N) \approx \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3^{i-p}}{2^i}\right) = 100\% \text{ ssi : } 3^{i-p} < 2^i, \text{ sinon diverge.}$$

Ou bien :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_c(N) \approx \lim_{i \rightarrow \infty} T_c(N) \approx \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3^m}{2^i}\right) = 100\% \text{ ssi : } 3^m < 2^i, \text{ sinon diverge.}$$

En effet, pour garantir cette convergence certaine, il faut et il suffit que le dénominateur soit plus grand que le numérateur, soit :

$$3^{i-p} < 2^i \text{ ou } 3^m < 2^i$$

C'est-à-dire :

$$(i - p) \ln(3) < i \cdot \ln(2) \text{ ou } m \cdot \ln(3) < i \cdot \ln(2)$$

D'où :

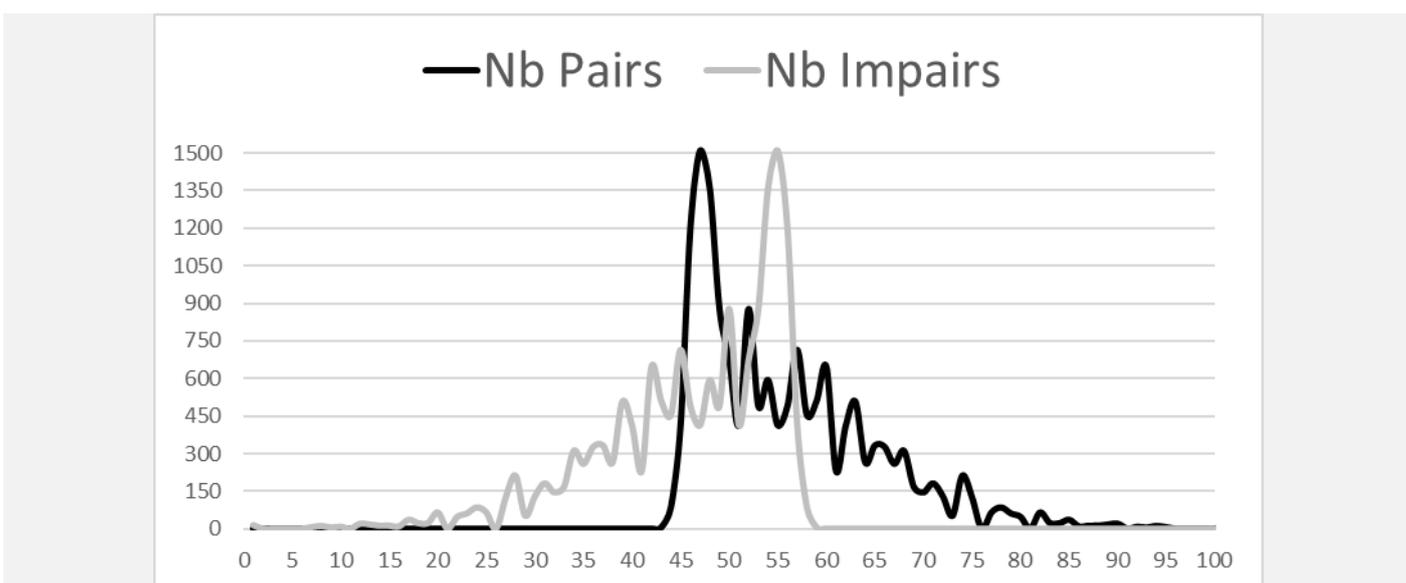
$$p > \left(1 - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}\right) i \approx 0,369 \cdot i \approx \frac{31}{84} i$$

$$m < i \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0,631 \cdot i \approx \frac{53}{84} i$$

Il faut donc, pour que la suite converge, qu'il y ait durant un même vol :
Au minimum 37% d'itérations paires et,
Au maximum 63% d'itérations impaires.

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, les 50% minimum d'itérations paires ne sont pas nécessaires, la limite est plus basse pour garantir une convergence. C'est pourtant étonnant puisque les itérations paires font décroître la suite et les impaires croître. Testons-le avec $N=27$: $i=70$ avec seulement 29 itérations paires et 41 impaires. Soit, dans ce cas, seul 41% d'itérations paires suffisent pour atteindre 1.

Pour mieux comprendre la répartition du taux d'itérations paires par rapport au taux d'itérations impaires, on a parcouru les 15911 premiers vols et comptabilisé ces taux. Voici le graphe pour $N < 15912$ de la répartition de ces taux :



Ce graphique montre (pour $N < 15912$) les taux du nombre d'itérations paires $\frac{p}{i}$ (et respectivement impaires $\frac{m}{i}$) par rapport au nombre de vols i .

Par exemple, prenons toutes les valeurs de départ $N < 15912$ dont la proportion d'itérations paires est égale à 70% de i (et donc 30% d'impaires), alors cela représente 150 vols i . De même la proportion d'itérations impaires égale à 55% (et donc 45% de paires) correspond à 1510 vols i (la majorité).

On a logiquement un effet miroir ou une symétrie verticale de chaque côté des 50% de l'axe des abscisses. En effet, à 50% de vols i les valeurs paires et impaires sont identiques. C'est-à-dire que le

même nombre de vols i existent pour un nombre d'itérations paires et impaires identiques ($p = m = \frac{i}{2}$). C'est le cas le plus simple que l'on avait déjà étudié au début de ce chapitre. On sait maintenant, à l'aide de ces courbes, que ce n'est pas le cas le plus fréquent.

Ensuite, par complémentarité ($i = m + p$), on a le même nombre d'itérations paires que d'impaires si le premier vaut par exemple 30% et le second 70% ($100\% = \frac{30+70}{100} = \frac{70+30}{100} = \frac{m+p}{i}$).

A noté que pour 0% de vols i on a des itérations impaires et que pour 100% de vols i on a des itérations paires. Cela s'explique car il existe des vols qu'avec des itérations paires, ce sont toutes les valeurs de N en puissance de 2 uniquement. Et par complément, il n'existe aucun vols i avec que des itérations impaires, sinon la suite divergerait dans tous les cas. Attention, on constate tout cela pour $N < 15912$, on ne prouve encore rien.

Enfin, la forme de ce graphe est tout à fait étonnante. Pour les paires, on a aucune itération avant 42% de vols i , puis un pic, puis une descente rapide vers 90% et enfin un léger pic à 100%. Cette répartition n'est pas linéaire et ne coïncide avec aucune forme simple connue.

On peut néanmoins en aparté conjecturer que la probabilité du taux de parité de la suite de Syracuse suit une combinaison linéaire de lois normales de la forme :

$$E(x) = \frac{3}{4}e^{-\frac{3}{2}(x+1)^2} + \frac{3}{4}e^{-\frac{3}{2}(x-1)^2} + e^{-\frac{1}{2}(x+3)^2} + e^{-\frac{1}{2}(x-3)^2}$$

$$= \left(\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}(x^2+1)} + 2e^{-\frac{1}{2}(x^2+9)} \right) \cosh(3x) = \left(\frac{3}{2}e^{-x^2} + 2e^{-3} \right) e^{-\frac{x^2+3}{2}} \cosh(3x)$$

On aurait ainsi une somme de deux lois normales imbriquées ou décalées l'une par rapport à l'autre.

Mais, il faudrait refaire ce graphe avec une valeur maximale N beaucoup plus importante pour vérifier cette tendance. On peut néanmoins approximer cette descente comme une forme d'exponentielle. Pour cela on pose préalablement :

I : nombre de vols i de même proportion d'itérations paires (respectivement impaires) ;

I_{\max} : le plus grand des nombres des vols i de même proportion d'itérations paires (respectivement impaires).

On obtient :

$$\text{Pour les itérations paires : } I = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{p}{i} \leq \frac{2}{5} \\ I_{\max} \cdot e^{-\left(\frac{p-2}{i-5}\right)} = I_{\max} \cdot e^{\left(\frac{2-p}{5-i}\right)} & \text{si } \frac{p}{i} > \frac{2}{5} = 40\% \end{cases}$$

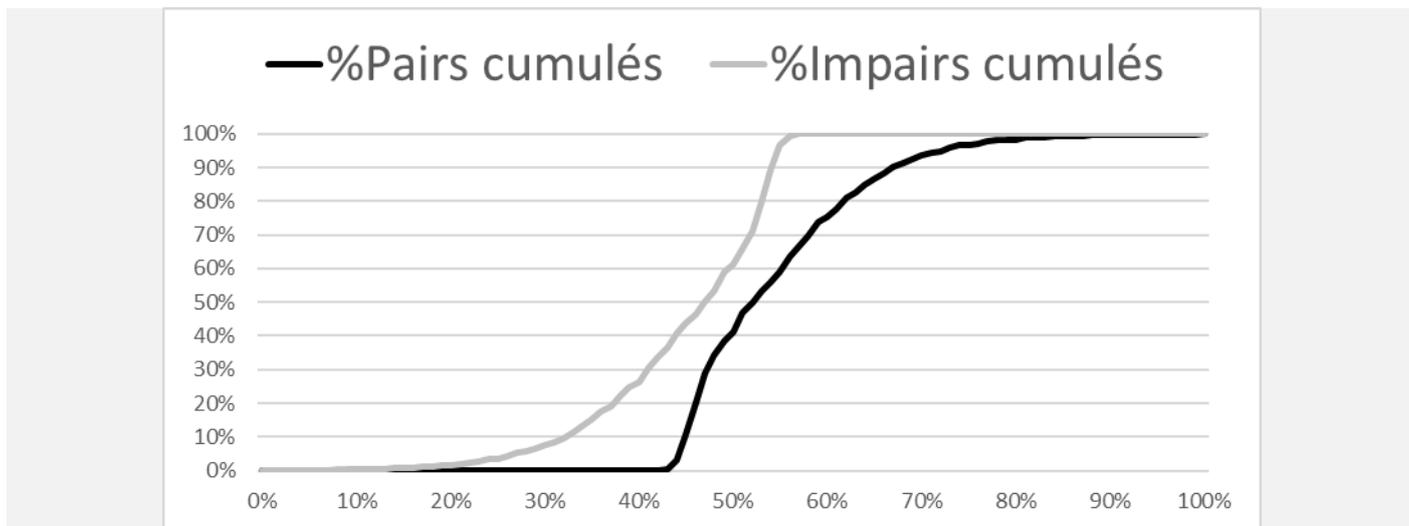
$$\text{Pour les itérations impaires : } I = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{m}{i} \geq \frac{3}{5} \\ I_{\max} \cdot e^{\left(\frac{m-3}{i-5}\right)} & \text{si } \frac{m}{i} < \frac{3}{5} = 60\% \end{cases}$$

Car :

$$\begin{aligned} \text{Si } \frac{p}{i} < 42\% = \frac{42}{100} = \frac{21}{50} \text{ alors } \frac{p}{i} \leq \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 40\% \\ \text{et si } \frac{m}{i} > 58\% = \frac{58}{100} = \frac{29}{50} \text{ alors } \frac{m}{i} \geq \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 60\% \end{aligned}$$

On retrace le même graphe en cumulant les valeurs des taux d'itérations paires $\frac{p}{i}$ et impaires $\frac{m}{i}$ pour les abscisses. Et on ramène le nombre des vols i de même proportionnalité d'itérations paires ou impaires à un taux en pourcentage (*en posant* $\frac{l}{l_{\max}} = 100\%$) sur les ordonnées.

On obtient les deux courbes suivantes :



L'abscisse représente le taux d'itérations paires (respectivement impaires) ;
 L'ordonnée représente le taux du nombre de vols i .

Cette fois-ci les courbes observées sont remarquables. Les exponentielles sont bien nettes. On connaît donc ainsi les taux de proportion d'itérations paires et impaires d'un vol. Comme précédemment, ces courbes se décrivent mathématiquement comme suit :

$$i = p + m, \text{ soit : } \frac{p}{i} + \frac{m}{i} = 1$$

$$\text{Pour les itérations paires : } \frac{I}{I_{max}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{p}{i} \leq \frac{2}{5} \\ 1 - e^{-\frac{p}{i} + \frac{2}{5}} & \text{si } \frac{p}{i} > \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\text{Pour les itérations impaires : } \frac{I}{I_{max}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{m}{i} \geq \frac{3}{5} \\ e^{\frac{m}{i} - \frac{3}{5}} & \text{si } \frac{m}{i} < \frac{3}{5} \end{cases}$$

Revenons maintenant à nos limites. A l'infini, le résultat ne change pas, et converge, malgré le changement de proportion d'itérations paires et impaires. En revanche, on trouve une valeur plus fine pour i :

$$U_i(N) = 1 \approx N \left(\frac{1}{2}\right)^p \left(\frac{3}{2}\right)^{i-p} = \frac{N}{3^p} \left(\frac{3}{2}\right)^i = \frac{N}{2^i} 3^{i-p} \text{ avec } N \gg 0$$

Et :

$$U_i(N) = 1 \approx N \left(\frac{1}{2}\right)^{i-m} \left(\frac{3}{2}\right)^m = \frac{N}{2^i} 3^m \text{ avec } N \gg 0$$

D'où dans ce cas :

$$i = \frac{p \cdot \ln(3) - \ln(N)}{\ln(3) - \ln(2)} = \frac{m \cdot \ln(3) + \ln(N)}{\ln(2)}$$

Avec :

$$p = \frac{m(\ln(3) - \ln(2)) + \ln(N)}{\ln(2)} \text{ et } m = \frac{p \cdot \ln(2) - \ln(N)}{\ln(3) - \ln(2)}$$

Pour que m et p soient positifs il faut que :

$$p \geq \frac{\ln(N)}{\ln(2)}$$

Et si $p = \frac{\ln(N)}{\ln(2)}$ alors $m = 0$, car $N = 2^p = 2^i$: toujours pair

Et avec les valeurs les plus probables car plus fréquentes de m et p comme suit :

$$i = p + m = \frac{3}{5}i + \frac{2}{5}i$$

On obtient :

$$U_i(N) = 1 \approx N \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}i} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{5}i} = \frac{9^{\frac{i}{5}}}{2^i} N \text{ avec } N \gg 0$$

$$\rightarrow i \approx \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{2}{9^{\frac{1}{5}}}\right)} = \frac{\ln(N)}{\ln(2) - \frac{2}{5}\ln(3)} = \frac{5\ln(N)}{5\ln(2) - 2\ln(3)} \approx 3,941 \cdot \ln(N)$$

Reprenons les exemples précédents :

Valeurs réelles				
N	10 000	10 001	1 000	100
p	17	51	33	11
m	6	64	39	7
i	23	115	72	18
Valeurs calculées				
i via p	23,3	115,5	72,4	18,4
i via m	22,8	114,7	71,8	17,7
Taux d'erreurs				
i via p	1,5%	0,4%	0,5%	2,5%
i via m	-0,9%	-0,2%	-0,3%	-1,5%
Valeurs calculées sans p et m				
i via p=3i/5 et m=2i/5	36,3	36,3	27,2	18,2
Taux d'erreurs				
i via p=3i/5 et m=2i/5	57,8%	-68,4%	-62,2%	0,8%

On note des écarts plus précis que précédemment mais comment choisir arbitrairement p et m au départ ? Si on avait une méthode, même par itération, pour calculer préalablement une valeur approchée de p ou m, on aurait une approximation de i tout à fait précise.

Or, là aussi, selon le choix de p ou m (arbitraire) on n'obtient pas de résultats concluants. Les hypothèses prises s'éloignent du comportement réel de la suite dès lors que N est plus petit et que le $+1$ des itérations impaires n'est plus négligeable. On considère donc ces résultats peu exploitables pour la suite de l'étude. En revanche les proportions les plus fréquentes de 60% pour les paires et 40% pour les impaires sont des données que l'on réutilisera plusieurs fois dans les pages qui suivent.

~

On va maintenant procéder d'une manière différente. Si on choisit un N suffisamment grand, on a déjà vu que dans ce cas la suite s'exprime comme suit :

$$U_0(N) = N \text{ et } U_{n+1}(N) = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(N)}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases} \text{ avec } N \gg 0 \text{ et } n \geq 0$$

On peut également écrire cette suite sous la forme inconditionnelle suivante :

$$U_{n+1}(N) = \frac{U_n(N)}{4} (1 + (-1)^{U_n(N)}) + \frac{3U_n(N)}{4} (1 - (-1)^{U_n(N)})$$

Cette équation est issue des mêmes principes développés dans le chapitre de cet ouvrage dédié à l'approche trigonométrique. Considérez donc, dans un premier temps, qu'elle est juste. Vous aurez toutes les explications ultérieurement dans le chapitre des équations trigonométriques de la suite de Syracuse.

En simplifiant, on obtient :

$$U_{n+1}(N) = U_n(N) \left(1 - \frac{(-1)^{U_n(N)}}{2} \right) = U_n(N) \left(1 - \frac{\cos(\pi U_n(N))}{2} \right)$$

Et par itération on obtient simplement l'expression suivante :

$$U_{n+1}(N) = U_0(N) \left(1 - \frac{(-1)^{U_n(N)}}{2} \right) \left(1 - \frac{(-1)^{U_{n-1}(N)}}{2} \right) \left(1 - \frac{(-1)^{U_{n-2}(N)}}{2} \right) \left(1 - \frac{(-1)^{U_{n-3}(N)}}{2} \right) \dots$$

Soit :

$$U_n(N) = N \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{(-1)^{U_j(N)}}{2} \right)$$

Et au rang i , on obtient :

$$U_i(N) = 1 = N \prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{(-1)^{U_j(N)}}{2} \right)$$

Ainsi :

$$\frac{1}{N} = \prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{(-1)^{U_j(N)}}{2} \right) = \prod_{j=0}^p \left(1 - \frac{1}{2} \right) \prod_{j=0}^m \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \prod_{j=0}^p \frac{1}{2} \prod_{j=0}^m \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{2} \right)^p \left(\frac{3}{2} \right)^m \text{ avec } i = m + p$$

Soit :

$$\ln(N) - p \cdot \ln(2) + m(\ln(3) - \ln(2)) = 0 \text{ avec } i = m + p$$

D'où :

$$p = \frac{\ln(N) + m(\ln(3) - \ln(2))}{\ln(2)} = \frac{\ln(N) + i(\ln(3) - \ln(2))}{\ln(3)} \text{ avec } i = m + p$$

Et :

$$m = \frac{p \cdot \ln(2) - \ln(N)}{\ln(3) - \ln(2)} = \frac{i \cdot \ln(2) - \ln(N)}{\ln(3)} \text{ avec } i = m + p$$

On retrouve bien les mêmes relations que précédemment, à savoir :

$$i = \frac{p \cdot \ln(3) - \ln(N)}{\ln(3) - \ln(2)} = \frac{m \cdot \ln(3) + \ln(N)}{\ln(2)}$$

Comme N est par hypothèse grand, cette approche diverge. La suite ne peut donc pas se simplifier de la sorte si N est grand. En effet, si la suite converge, N devient moins important et l'approximation faite initialement n'est plus valable car +1 n'est plus négligeable par rapport à 3N (cas des impairs). On n'ira donc pas plus loin dans cette approche.

3. Ecart entre deux vols N et M

Une variante de cette approche serait de sommer les éléments d'un vol à partir d'une valeur de départ N quelconque. Puis de faire la même opération à partir d'une autre valeur de départ M quelconque. Enfin, de soustraire ces deux sommes de suites (ou séries numériques).

Pour que la conjecture de Syracuse soit prouvée, il faut et il suffit de prouver que quel que soit N et M, la différence de la somme de leurs vols est une valeur toujours finie (ou bien, n'est jamais infinie). De ce fait, la preuve serait faite que la suite converge dans tous les cas vers le même cycle.

En équation, cela donne cela :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (U_k(N) - U_k(M)) = \sum_{k=0}^{i_N} (U_k(N) - U_k(M)) + \sum_{k=i_N}^{\infty} (U_k(N) - U_k(M)) \text{ avec } i_N \geq i_M > 0$$

Or une fois avoir atteint ou dépassé le rang i, les valeurs valent une fois sur deux 1 ou 2 à l'infini, soit :

$$\sum_{k=i_N}^{\infty} (U_k(N) - U_k(M)) = \sum_{k=i_N}^{\infty} \left(\frac{1+2}{2} - \frac{1+2}{2} \right) = 0$$

On a donc si tout vol atteint le cycle unique final :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (U_k(N) - U_k(M)) = \sum_{k=0}^{i_N} (U_k(N) - U_k(M)) < K < \infty \text{ avec } i_N \geq i_M > 0 \text{ et } K \in \mathbb{N}$$

On n'a à ce stade rien prouvé mais juste décrit ce que l'on observe, à savoir la différence des sommes des valeurs de deux vols à l'infini donne toujours une somme finie. De plus, cette somme comporte un nombre de termes correspondants à la durée de vol la plus longue entre N et M (ici on a choisi N).

Par exemple :

$$N = 28 > 14 > 7 > 11 > 17 > 26 > 13 > 20 > 10 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1 : i_N = 13$$

$$M = 170 > 85 > 128 > 64 > 32 > 16 > 8 > 4 > 2 > 1 : i_M = 9$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (U_k(N) - U_k(M)) = \sum_{k=0}^{13} (U_k(N) - U_k(M))$$

$$= (28 - 170) + (14 - 85) + (7 - 128) + (11 - 64) + (26 - 32) + (13 - 16) + (20 - 8) + (10 - 4) + (5 - 2) + (8 - 1) + (4 - 2) + (2 - 1) + (1 - 2) = 166 - 516 = -350$$

On complète par des 2, 1... les valeurs aux rangs de M supérieures à son vol et inférieures ou égales au vol de N. au-delà du rang du vol de N, les valeurs de N et M s'annulent à l'infini comme suit :

$$(2 - 2) + (1 - 1) \dots = 0 \text{ si les vols de N et M sont synchrones}$$

$$(1 - 2) + (2 - 1) + \dots = 0 \text{ ou } (2 - 1) + (1 - 2) + \dots = 0 \text{ si les vols de N et M sont asynchrones}$$

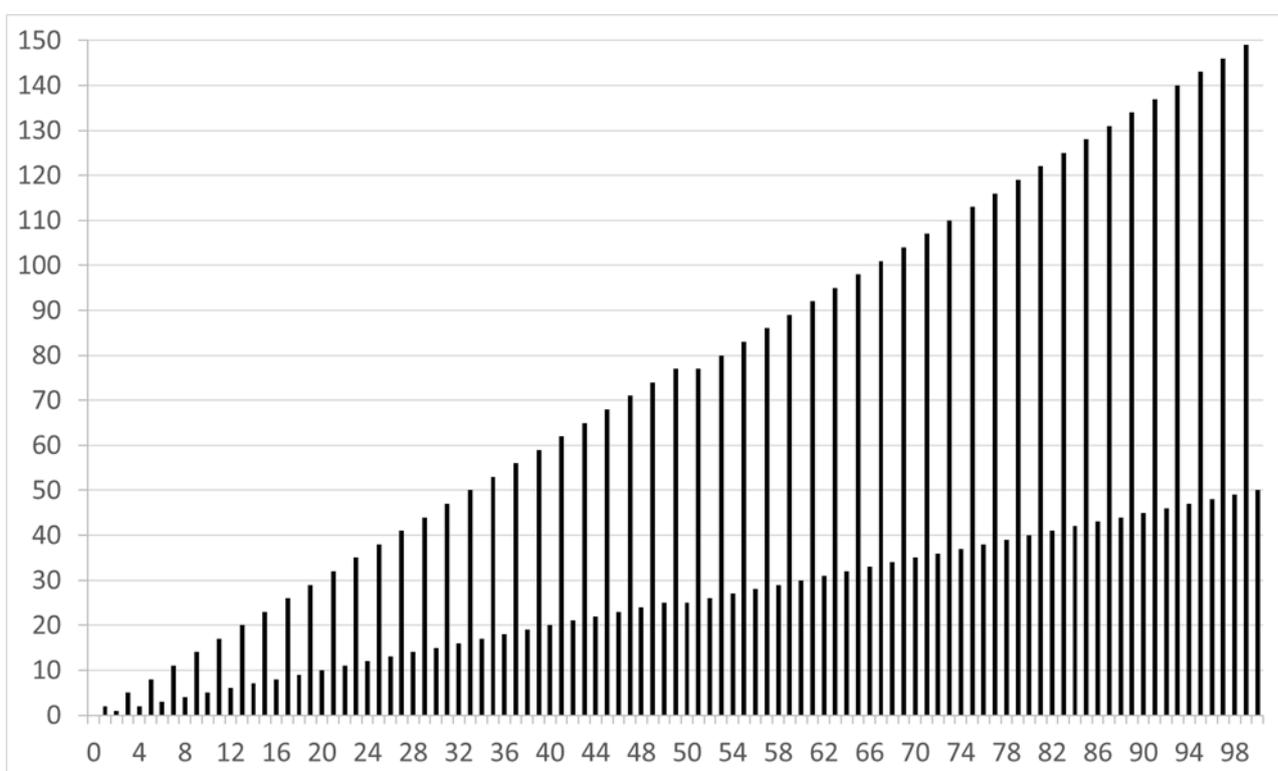
Pour arriver à prouver tout cela, il faut préalablement borner cette somme de différence finie. On va essayer en sommant nos deux suites. On pose :

$$S_{N,M} = \sum_{n=0}^{i_N} (U_n(N) - U_n(M))$$

Avec :

$$U_{n+1}(N) = \sum_{k=0}^{\infty} (k \cdot \delta(U_n(N) - 2k) + (3k + 2) \cdot \delta(U_n(N) - 2k - 1)) \text{ avec } \delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Voici sans surprise le graphique de cette équation pour $N \leq 100$:



L'équation ci-dessus, tout à fait nouvelle, parcourt à chaque rang n l'ensemble des entiers positifs \mathbb{N} pour ne garder à chaque rang n qu'une valeur. Cette valeur correspond à $U_n(N)$ à laquelle on applique la suite selon sa parité, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \text{Si } U_n(N) = 2k \text{ (pair) alors on garde } k &= \frac{U_n(N)}{2} \\ \text{Si } U_n(N) = 2k + 1 \text{ (impair) alors on garde } 3k + 2 &= 3 \frac{U_n(N) - 1}{2} + 2 = \frac{3U_n(N) + 1}{2} \end{aligned}$$

La fonction δ est appelé impulsion de Dirac. Et dans le cadre de sommes de Dirac, on appelle cela un peigne de Dirac. Cela s'explique graphiquement par des pics (comme un peigne) sur chaque valeur entière de hauteurs ici croissantes.

On obtient donc en définitif (en inversant les sommes) :

$$S_{N,M} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{i_N} \left(k(\delta(U_n(N) - 2k) - \delta(U_n(M) - 2k)) \right. \right. \\ \left. \left. + (3k + 2)(\delta(U_n(N) - 2k - 1) - \delta(U_n(M) - 2k - 1)) \right) \right)$$

L'impulsion de Dirac n'est pas une fonction. Il faut donc l'approcher avec une fonction. Voici plusieurs fonctions qui s'apparentent à l'impulsion de Dirac :

$$\text{Avec } n > 0 \text{ et } a \gg 1 : \delta(x) \approx \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 + (ax)^2} : \text{fonction Lorentzienne} \\ \frac{1}{1 + a|x|} : \text{fonction Lorentzienne absolue} \\ e^{-(ax)^{2n}} : \text{distribution normale ou Gaussienne} \\ e^{-a|x|} : \text{distribution de Laplace} \\ \frac{\sin(ax)}{ax} : \text{fonction sinus cardinal} \\ \frac{\sin^{2n}(ax)}{(ax)^{2n}} : \text{fonction sinus cardinal au carré} \\ \frac{4e^{-ax}}{(1 + e^{-ax})^2} : \text{rapport d'exponentielles décroissantes} \\ \frac{4e^{ax}}{(1 + e^{ax})^2} : \text{rapport d'exponentielles croissantes} \end{array} \right.$$

Dans le cas des impulsions de Dirac, on a l'égalité étonnante suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta(k) = \int_0^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Dans notre cas, cela donne :

$$U_{n+1}(N) = \int_0^{\infty} (k\delta(U_n(N) - 2k) + (3k + 2)\delta(U_n(N) - 2k - 1)) dk$$

$$\text{Soit : } U_{n+1}(N) = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(N) + 1}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

Et :

$$\sum_{n=0}^{i_N} U_n(N) = N + \sum_{n=0}^{i_N} \left(\int_0^{\infty} (k\delta(U_n(N) - 2k) + (3k + 2)\delta(U_n(N) - 2k - 1)) dk \right)$$

Mais tout cela mène à des impasses de résolution dont je vous fais grâce. Ce n'est pas une bonne approche, même si on a vu ici des notions que l'on réutilise plus loin dans cet ouvrage.

1. Somme des taux de variations

La somme des variations (croissantes et décroissantes) rang après rang vaut :

$$\text{Croissante si } \sum \text{Variations} > 0$$

$$\text{Stable si } \sum \text{Variations} = 0$$

$$\text{Décroissante si } \sum \text{Variations} < 0$$

Appliquée à la suite de Syracuse, on a :

$$V_P(N) = U_{n+1}(N) - U_n(N) = \frac{U_n(N)}{2} - U_n(N) = -\frac{U_n(N)}{2} \text{ si } U_n(N) \text{ pair}$$

$$V_I(N) = U_{n+1}(N) - U_n(N) = \frac{3U_n(N) + 1}{2} - U_n(N) = \frac{U_n(N) + 1}{2} \text{ si } U_n(N) \text{ impair}$$

Ainsi, la suite décroît si :

$$\sum_{\substack{n=0 \text{ si} \\ U_n(N) \text{ pair}}}^i V_P(N) + \sum_{\substack{n=0 \text{ si} \\ U_n(N) \text{ impair}}}^i V_I(N) < 0$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{\substack{n=0 \\ \text{si } U_n(N) \text{ pair}}}^i U_n(N) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=0 \\ \text{si } U_n(N) \text{ impair}}}^i (U_n(N) + 1) < 0$$

$$\rightarrow n_I < \sum_{\substack{n=0 \\ \text{si } U_n(N) \text{ pair}}}^i U_n(N) - \sum_{\substack{n=0 \\ \text{si } U_n(N) \text{ impair}}}^i U_n(N)$$

La suite de Syracuse est donc toujours décroissante si le nombre d'itérations impaires est inférieure à la différence de toutes les valeurs paires et impaires de la suite jusqu'à atteindre 1.

Par exemple :

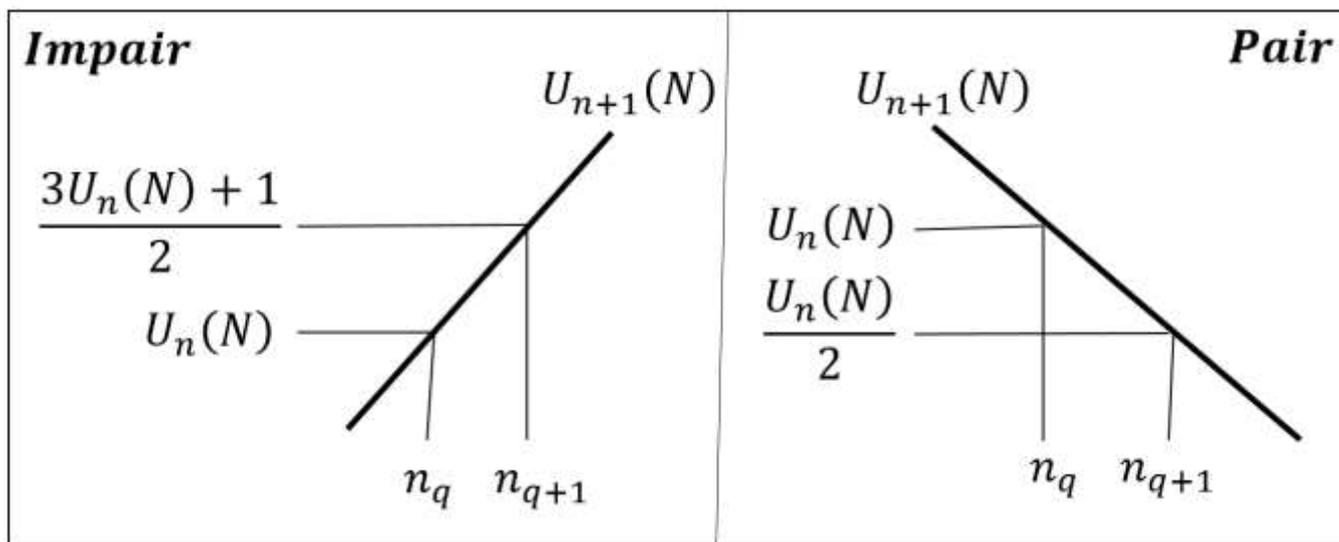
$$N = 3 \xrightarrow{V_I} 5 \xrightarrow{V_I} 8 \xrightarrow{V_P} 4 \xrightarrow{V_P} 2 \xrightarrow{V_P} 1$$

$$\sum_{\substack{n=0 \text{ si} \\ U_n(N) \text{ pair}}}^i V_P(N) = 8 + 4 + 2 = 14 \text{ et } \sum_{\substack{n=0 \text{ si} \\ U_n(N) \text{ impair}}}^i V_I(N) = 3 + 5 = 8$$

$$\rightarrow n_I = 2 < 14 - 8 = 6$$

2. Mesure des accroissements linéaires

On représente chaque rang de la suite de Syracuse selon sa croissance (itérations impaires) ou sa décroissance (itérations paires) comme suit :



On cherche les équations qui régissent ces évolutions. Soit :

$$U_{n+1}(N) = \begin{cases} a_p n + b_p \text{ avec } \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} = a_p n_{q+1} + b_p & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ U_n(N) = a_p n_q + b_p \end{cases} \\ a_I n + b_I \text{ avec } \begin{cases} \frac{3U_n(N) + 1}{2} = a_I n_{q+1} + b_I & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \\ U_n(N) = a_I n_q + b_I \end{cases} \end{cases}$$

D'où en calculant les quatre variables a et b, il vient :

$$\begin{cases} -\frac{U_n(N)}{2(n_{q+1} - n_q)}(n - n_q) + U_n(N) = \frac{U_n(N)}{2} \left(2 - \frac{n - n_q}{n_{q+1} - n_q} \right) & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{U_n(N) + 1}{2(n_{q+1} - n_q)}(n - n_q) + U_n(N) = \frac{U_n(N)}{2} \left(2 + \frac{n - n_q}{n_{q+1} - n_q} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{n - n_q}{n_{q+1} - n_q} \right) & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

Soit :

$$U_{n+1}(N) = U_n(N) + \frac{1}{2} \left(\frac{n - n_q}{n_{q+1} - n_q} \right) \cdot \begin{cases} (-U_n(N)) & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ (U_n(N) + 1) & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

Puisque les parités peuvent changer d'un rang à l'autre, on choisit un échantillonnage de 1 ou pas de 1, soit :

$$n_{q+1} = n_q + 1$$

Ce qui donne :

$$U_{n+1}(n) = U_n(N) + \frac{n - n_q}{2} \cdot \begin{cases} (-U_n(N)) \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ (U_n(N) + 1) \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

4. Somme des $U_n(N)$ par rang n pour tous $N \leq C$

On se propose ici d'additionner toutes les valeurs de $U_n(N)$ par rang n pour toutes les valeurs de départ $N \leq C$ une constante. Pour se donner une idée de cette démarche, on calcule le tableau suivant pour $C=12$:

$U_n(N)$	$U_0(N)=N$	$U_1(N)$	$U_2(N)$	$U_3(N)$	$U_4(N)$	$U_5(N)$	$U_6(N)$	$U_7(N)$	$U_8(N)$	$U_9(N)$	$U_{10}(N)$	$U_{11}(N)$	$U_{12}(N)$	$U_{13}(N)$	$U_{...}(N)$
1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1 ou 2
2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1 ou 2
3	3	5	8	4	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1 ou 2
4	4	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1 ou 2
5	5	8	4	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1 ou 2
6	6	3	5	8	4	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1 ou 2
7	7	11	17	26	13	20	10	5	8	4	2	1	2	1	1 ou 2
8	8	4	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1 ou 2
9	9	14	7	11	17	26	13	20	10	5	8	4	2	1	1 ou 2
10	10	5	8	4	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1 ou 2
11	11	17	26	13	20	10	5	8	4	2	1	2	1	2	1 ou 2
C	12	6	3	5	8	4	2	1	2	1	2	1	2	1	1 ou 2
Totaux	78	78	84	79	73	72	42	46	36	24	25	20	19	17	12 ou 24
	S0(12)	S1(12)	S2(12)	S3(12)	S4(12)	S5(12)	S6(12)	S7(12)	S8(12)	S9(12)	S10(12)	S11(12)	S12(12)	S13(12)	S...(12)
Sn(C)	6,50	6,50	7,00	6,58	6,08	6,00	3,50	3,83	3,00	2,00	2,08	1,67	1,58	1,42	1 ou 2

On a posé préalablement :

$$S_n(C) = \sum_{j=1}^C \frac{U_n(j)}{C}$$

Cette variable représente la somme pour un rang n fixe de toutes les valeurs de la suite de Syracuse de $N=1$ jusqu'à $N=C$.

On remarque sur le tableau précédent que les deux premières valeurs de S sont identiques. On remarque également que lorsque le rang n est suffisamment grand, si la conjecture est vérifiée, toutes les valeurs sont égales à 1 ou 2. De ce fait, leur somme sur C vaut 1 ou 2.

Calculons maintenant les valeurs de S aux premiers rangs :

Au rang 0

$$S_0(C) = \sum_{j=1}^C \frac{U_0(j)}{C} = \frac{1}{C} \sum_{j=1}^C j = \frac{1}{C} \cdot \frac{C(C+1)}{2} = \frac{C+1}{2} \quad \forall C > 0$$

On vérifie visuellement cette égalité dans le tableau précédent.

Au rang 1

$$\begin{aligned} \text{Avec } C \text{ pair : } \sum_{j=1}^C \frac{U_1(j)}{C} &= \frac{1}{C} \left(\sum_{j=1}^{\frac{C}{2}} \frac{U_0(2j)}{2} + \sum_{j=1}^{\frac{C}{2}} \frac{3U_0(2j-1)+1}{2} \right) = \frac{1}{C} \left(\sum_{j=1}^{\frac{C}{2}} \frac{2j}{2} + \sum_{j=1}^{\frac{C}{2}} \frac{3(2j-1)+1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{\frac{C}{2}} (j+3j-1) = \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{\frac{C}{2}} (4j-1) = \frac{1}{C} \cdot 4 \cdot \frac{C}{4} \left(\frac{C}{2} + 1 \right) - \frac{1}{C} \cdot \frac{C}{2} = \frac{C}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{C+1}{2} \end{aligned}$$

On a donc :

$$S_0(C) = S_1(C) = \sum_{j=1}^C \frac{U_0(j)}{C} = \sum_{j=1}^C \frac{U_1(j)}{C} = \frac{C+1}{2} \text{ avec } C \text{ pair}$$

On vérifie visuellement cette égalité dans le tableau précédent.

On a d'ailleurs 2 à 2 :

$$\begin{aligned} U_0(N) + U_0(N+1) &= N + N + 1 = 2N + 1 \\ U_1(N) + U_1(N+1) &= \frac{3N+1}{2} + \frac{N+1}{2} = 2N + 1 \text{ si } N \text{ impair} \end{aligned}$$

Soit :

$$U_0(N) + U_0(N+1) = U_1(N) + U_1(N+1) = 2N + 1 \text{ si } N \text{ impair}$$

Cette égalité est visible dans le tableau précédent.

Au rang 2

On sait préalablement que :

- $4k > 2k > k$
- $4k-1 > 6k-1 > 9k-1$
- $4k-2 > 2k-1 > 3k-1$
- $4k-3 > 6k-4 > 3k-2$

Ce qui permet de calculer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^C \frac{U_2(j)}{C} &= \frac{1}{C} \left(\sum_{j=1}^{\frac{C}{4}} \left(\frac{U_1(4j)}{2} + \frac{U_1(4j-3)}{2} \right) + \sum_{j=1}^{\frac{C}{4}} \left(\frac{3U_1(4j-2)+1}{2} + \frac{3U_1(4j-1)+1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{C} \left(\sum_{j=1}^{\frac{C}{4}} \left(\frac{2j}{2} + \frac{6j-4}{2} \right) + \sum_{j=1}^{\frac{C}{4}} \left(\frac{3(2j-1)+1}{2} + \frac{3(6j-1)+1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{C} \left(\sum_{j=1}^{\frac{C}{4}} (4j-2) + \sum_{j=1}^{\frac{C}{4}} (12j-2) \right) = \frac{4}{C} \sum_{j=1}^{\frac{C}{4}} (4j-1) = \frac{4}{C} \left(4 \cdot \frac{C}{8} \left(\frac{C}{4} + 1 \right) - \frac{C}{4} \right) = \frac{C}{2} + 1 \end{aligned}$$

D'où :

$$S_2(C) = \sum_{j=1}^C \frac{U_2(j)}{C} = \frac{C+2}{2} \text{ avec } C = 4k$$

$$S_2(C) - \frac{1}{2} = S_1(C) = S_0(C) \text{ avec } C = 4k$$

On vérifie visuellement cette égalité dans le tableau précédent.

Au rang 3

Sur le même principe que précédemment on calcul d'abord les (pas 4 mais) 8 itérations modulaires de la suite de Syracuse suivantes pour obtenir notre rang 3 :

- $8k > 4k > 2k > k$
- $8k-1 > 12k-1 > 18k-1 > 27k-1$
- $8k-2 > 4k-1 > 6k-1 > 9k-1$
- $8k-3 > 12k-4 > 6k-2 > 3k-1$
- $8k-4 > 4k-2 > 2k-1 > 3k-1$
- $8k-5 > 12k-7 > 18k-10 > 9k-5$
- $8k-6 > 4k-3 > 6k-4 > 3k-2$
- $8k-7 > 12k-10 > 6k-5 > 9k-7$

Ce qui donne :

Avec $C = 8k$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^C \frac{U_3(j)}{C} &= \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{\frac{C}{8}} \left(\frac{U_2(8j)}{2} + \frac{U_2(8j-3)}{2} + \frac{U_2(8j-5)}{2} + \frac{U_2(8j-6)}{2} \right) \\ &+ \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{\frac{C}{8}} \left(\frac{3U_2(8j-1)+1}{2} + \frac{3U_2(8j-2)+1}{2} + \frac{3U_2(8j-4)+1}{2} + \frac{3U_2(8j-7)+1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{\frac{C}{8}} (j + 3j - 1 + 9j - 5 + 3j - 2) + \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{\frac{C}{8}} (27j - 1 + 9j - 1 + 3j - 1 + 9j - 7) \\ &= \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{\frac{C}{8}} (16j - 8) + \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{\frac{C}{8}} (48j - 10) = \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{\frac{C}{8}} (64j - 18) = \frac{2}{C} \left(32 \cdot \frac{C}{16} \left(\frac{C}{8} + 1 \right) - 9 \cdot \frac{C}{8} \right) \\ &= \frac{2C+7}{4} \end{aligned}$$

D'où :

$$S_3(C) = \sum_{j=1}^C \frac{U_3(j)}{C} = \frac{2C+7}{4} \text{ avec } C = 8k$$

On vérifie visuellement cette égalité dans le tableau précédent.

Au rang 4

On essaie un dernier rang avant une tentative de généralisation. On calcul au préalable les 16 cas possibles pour atteindre le rang 4 :

- $16k > 8k > 4k > 2k > k$
- $16k-1 > 24k-1 > 36k-1 > 54k-1 > 81k-1$
- $16k-2 > 8k-1 > 12k-1 > 18k-1 > 27k-1$
- $16k-3 > 24k-4 > 12k-2 > 6k-1 > \mathbf{9k-1}$
- $16k-4 > 8k-2 > 4k-1 > 6k-1 > \mathbf{9k-1}$
- $16k-5 > 24k-7 > 36k-10 > 18k-5 > 27k-7$
- $16k-6 > 8k-3 > 12k-4 > 6k-2 > \mathbf{3k-1}$
- $16k-7 > 24k-10 > 12k-5 > 18k-7 > 27k-10$
- $16k-8 > 8k-4 > 4k-2 > 2k-1 > \mathbf{3k-1}$
- $16k-9 > 24k-13 > 36k-19 > 54k-28 > 27k-14$
- $16k-10 > 8k-5 > 12k-7 > 18k-10 > 9k-5$
- $16k-11 > 24k-16 > 12k-8 > 6k-4 > \mathbf{3k-2}$
- $16k-12 > 8k-6 > 4k-3 > 6k-4 > \mathbf{3k-2}$
- $16k-13 > 24k-19 > 36k-28 > 18k-14 > \mathbf{9k-7}$
- $16k-14 > 8k-7 > 12k-10 > 6k-5 > \mathbf{9k-7}$
- $16k-15 > 24k-22 > 12k-11 > 18k-16 > 9k-8$

En aparté, on remarque qu'au dernier rang (U4), décrit ci-dessus pour 16 vols consécutifs, certaines valeurs sont identiques. Par exemple $16k+13$ et $16k+14$ donne en 4 itérations $9k-7$. De même pour les deux valeurs précédentes. Ces valeurs sont indiquées en gras ci-dessus. Pas moins de 8 sur 16, la moitié, sont identiques deux à deux. Comment interpréter cela ? Tout simplement, la suite de Syracuse admet une notion de voisinage. En effet, on observe pour des valeurs proches de N de départs (par exemple $N-1$, N et $N+1$) qu'elles convergent en partie (pas toutes et pas toujours) vers la même valeur au bout d'un certain nombre de rangs variables. En clair, les valeurs N de départs proches rejoignent en partie les mêmes branches qui elles-mêmes rejoignent des branches communes et ainsi de suite jusqu'au tronc commun de puissance de 2 qui ramène tout nombre entier positif à 1. C'est une belle démonstration écrite de la conjecture de Syracuse n'est-ce pas ? mais bien loin d'une quelconque preuve on en convient.

Revenons à nos calculs. On effectue la somme de la dernière colonne ci-dessus comme suit :

Avec $C = 16k$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\frac{C}{16}} \frac{U_4(j)}{C} &= \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{\frac{C}{16}} ((1 + 81 + 27 + 9 + 9 + 27 + 3 + 27 + 3 + 27 + 9 + 3 + 3 + 9 + 9 + 9)j \\ &\quad - (0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 7 + 1 + 10 + 1 + 14 + 5 + 2 + 2 + 7 + 7 + 8)) \\ &= \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{\frac{C}{16}} (256j - 68) = \frac{1}{C} \left(256 \frac{C}{32} \left(\frac{C}{16} + 1 \right) - 68 \frac{C}{16} \right) \\ &= \frac{256}{32} \left(\frac{C}{16} + 1 \right) - \frac{68}{16} = \frac{8C + 60}{16} = \frac{2C + 15}{4} = \frac{C + 7}{2} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

D'où :

$$S_4(C) = \sum_{j=1}^C \frac{U_4(j)}{C} = \frac{2C + 15}{4} \text{ avec } C = 16k$$

On vérifie cette égalité dans le tableau précédent en calculant préalablement les rangs 4 de N=13 à 16.

Au rang n

Plutôt que de calculer le rang suivant (32 cas !), essayons une 1^{ère} généralisation. Pour cela on reprend nos résultats précédents. En effet, on a pour ces premiers rangs :

$$S_0(C) = S_1(C) = \frac{C + 1}{2} \text{ avec } C = 2k \rightarrow S_1(2k) = k + \frac{1}{2}$$

$$S_2(C) = \frac{C + 2}{2} \text{ avec } C = 4k \rightarrow S_2(4k) = 2k + 1$$

$$S_3(C) = \frac{2C + 7}{4} = \frac{C + 3}{2} + \frac{1}{4} \text{ avec } C = 8k \rightarrow S_3(8k) = 4k + \frac{7}{4}$$

$$S_4(C) = \frac{2C + 15}{4} = \frac{C + 7}{2} + \frac{1}{4} \text{ avec } C = 16k \rightarrow S_4(16k) = 8k + \frac{15}{4}$$

On a étendu aux deux rangs suivants pour trouver :

$$S_5(32k) = 16k + \frac{93}{16}$$

$$S_6(64k) = 32k + \frac{703}{64}$$

...

On a donc une forme générale qui ressemble à :

$$S_n(C) = \sum_{j=1}^C \frac{U_n(j)}{C} = \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{\frac{C}{2^n}} (2^{2^n} j - a_n) = \frac{1}{C} \left(2^{2^n} \frac{C}{2^{n+1}} \left(\frac{C}{2^n} + 1 \right) - a_n \frac{C}{2^n} \right)$$

$$\rightarrow S_n(C) = \frac{C}{2} + 2^{n-1} - \frac{a_n}{2^n} \text{ avec } \begin{cases} C = 2^n k \text{ avec } k > 0 \\ a_n = 2^n q_n \text{ avec } q_n > 0 \\ n > 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow S_n(2^n k) = 2^{n-1} (k + 1) - q_n$$

Mais alors, comment calculer la valeur de a ou q ? Patience.

Voici un tableau qui représente ces résultats avec k=1 jusqu'au rang 6 :

C	k	2k	4k	8k	16k	32k	64k	...	(2^n)k
C avec k=1	1	2	4	8	16	32	64	...	2^n
	S0(C)	S1(C)	S2(C)	S3(C)	S4(C)	S5(C)	S6(C)	...	Sn(C)
n	0	1	2	3	4	5	6	...	infini
Sn(C)	1,00	1,50	3,00	5,75	11,75	21,81	42,98	...	1 ou 2
C.Sn(C)	1	3	12	46	188	698	2 751	...	2^n ou 2^(n+1)

On remarque bien que S augmente au fil des rangs et selon les hauteurs et durées des vols plus ou moins importantes avant de diminuer puisque, selon la conjecture tous les vols tombent à 1 puis 2 puis 1, etc.

Prenons l'équation générale de S_n et développons :

$$\begin{aligned}
 S_n(C) &= \sum_{j=1}^C \frac{U_n(j)}{C} = \frac{1}{C} \sum_{j=1 \text{ si } U_{n-1}(j) \text{ pair}}^C \left(\frac{U_{n-1}(j)}{2} \right) + \frac{1}{C} \sum_{j=1 \text{ si } U_{n-1}(j) \text{ impair}}^C \left(\frac{3U_{n-1}(j) + 1}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2C} \left(\sum_{j=1 \text{ si } U_{n-1}(j) \text{ pair}}^C U_{n-1}(j) + \sum_{j=1 \text{ si } U_{n-1}(j) \text{ impair}}^C (3U_{n-1}(j) + 1) \right) \\
 &= \frac{1}{2C} \left(\sum_{j=1 \text{ si } U_{n-1}(j) \text{ pair}}^C U_{n-1}(j) + 3 \sum_{j=1 \text{ si } U_{n-1}(j) \text{ impair}}^C U_{n-1}(j) + m \right) \\
 &= \sum_{j=1}^C \frac{U_{n-1}(j)}{2C} \left(1 + 2 \cdot \frac{(1 - (-1)^{U_{n-1}(j)})}{2} \right) + \frac{m}{2C} = \sum_{j=1}^C \frac{U_{n-1}(j)}{2C} (2 - (-1)^{U_{n-1}(j)}) + \frac{m}{2C}
 \end{aligned}$$

m représente le nombre valeurs impaires au rang $n-1$ de 1 à C . on a vu que ce nombre est exactement :

$$m = \frac{C}{2} \text{ avec } C = 2^n k$$

De ce fait, on a :

$$S_n(C) = \sum_{j=1}^C \frac{U_{n-1}(j)}{2C} (2 - (-1)^{U_{n-1}(j)}) + \frac{1}{4} = \sum_{j=1}^C \frac{U_{n-1}(j)}{C} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^C \frac{U_{n-1}(j)}{C} (-1)^{U_{n-1}(j)} + \frac{1}{4}$$

$$S_n(C) = S_{n-1}(C) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^C \frac{U_{n-1}(j)}{C} (-1)^{U_{n-1}(j)}$$

$$= S_{n-1}(C) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1 \text{ si } U_{n-1}(j) \text{ impair}}^C \frac{U_{n-1}(j)}{C} - \sum_{j=1 \text{ si } U_{n-1}(j) \text{ pair}}^C \frac{U_{n-1}(j)}{C} \right)$$

Développons les séries :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1 \text{ si } U_{n-1}(j) \text{ impair}}^C \frac{U_{n-1}(j)}{C} - \sum_{j=1 \text{ si } U_{n-1}(j) \text{ pair}}^C \frac{U_{n-1}(j)}{C} &= \sum_{j=1}^{\frac{C}{2^n}} \frac{m_1 j - m_2}{C} - \sum_{j=1}^{\frac{C}{2^n}} \frac{p_1 j - p_2}{C} \\
 &= \sum_{j=1}^{\frac{C}{2^n}} \frac{(m_1 - p_1)j - (m_2 - p_2)}{C} = \frac{(m_1 - p_1)}{C} \cdot \frac{C}{2^{n+1}} \left(\frac{C}{2^n} + 1 \right) - \frac{(m_2 - p_2)}{C} \cdot \frac{C}{2^n} \\
 &= \frac{(m_1 - p_1)C + 2^n(m_1 - p_1) - 2^{n+1}(m_2 - p_2)}{2^{2n+1}} = \frac{(m_1 - p_1)C}{2^{2n+1}} + \frac{m_1 - p_1}{2^{n+1}} - \frac{m_2 - p_2}{2^n} \\
 &\rightarrow S_n(C) = S_{n-1}(C) + \frac{1}{4} + \frac{(C + 2^n)(m_1 - p_1) - 2^{n+1}(m_2 - p_2)}{2^{2(n+1)}}
 \end{aligned}$$

Comme on a trouvé précédemment :

$$S_n(C) = \frac{C}{2} + 2^{n-1} - \frac{a_n}{2^n}$$

Par identification des deux équations on a :

$$(1) S_n(C) = \frac{C}{2} + 2^{n-1} - \frac{a_n}{2^n} = S_{n-1}(C) + \frac{1}{4} + \frac{(C + 2^n)(m_1 - p_1) - 2^{n+1}(m_2 - p_2)}{2^{2(n+1)}}$$

On sait également par définition ou construction que :

$$(2) m_1 + p_1 = 2^{2n}$$

$$(3) m_2 + p_2 = a_n$$

Attention, ici les indices m et p dépendent du rang n.

On a donc trois équations et cinq inconnues. Ce n'est donc pas soluble en l'état.

Soit :

$$S_{n-1}(C) = \frac{C}{2} + 2^{n-1} - \frac{a_n}{2^n} - \frac{1}{4} - \frac{(C + 2^n)(m_1 - p_1) - 2^{n+1}(m_2 - p_2)}{2^{2(n+1)}}$$

On remplace les m :

$$S_{n-1}(C) = \frac{C}{2} + 2^{n-1} - \frac{a_n}{2^n} - \frac{1}{4} - \frac{(C + 2^n)(2^{2n} - 2p_1) - 2^{n+1}(a_n - 2p_2)}{2^{2(n+1)}}$$

$$S_{n-1}(C) = \frac{3C - 1}{4} + 3 \cdot 2^{n-2} - \frac{2^{n+1}a_n - 2(C + 2^n)p_1 + 2^{n+2}p_2}{2^{2(n+1)}}$$

On reste sans suite dans ce développement pour au moins deux raisons. La première par manque d'équation pour rechercher les inconnues. Peut-être par symétrie on peut en trouver une autre. La seconde plus évidente par conjecture jamais prouvée. En effet, si nous arrivions ici à trouver cette équation qui relie S à C, alors nous pourrions sans grande difficulté prouver que tous les vols N atteignent 1 à un certain rang. On est bloqué comme l'ensemble de la communauté scientifique. Mais ce développement n'a pas été inutile puisqu'on a appris davantage sur cette suite de Syracuse et son évolution rang après rang.

Pour conclure on peut aussi tenter une approche comme suit :

$$\begin{aligned} S_n(C) &= \sum_{j=1}^C \frac{U_n(j)}{C} = \frac{1}{C} \sum_{j=1 \text{ si } U_{n-1}(j) \text{ pair}}^C \left(\frac{U_{n-1}(j)}{2} \right) + \frac{1}{C} \sum_{j=1 \text{ si } U_{n-1}(j) \text{ impair}}^C \left(\frac{3U_{n-1}(j) + 1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2C} \left(\sum_{j=1 \text{ si } U_{n-1}(j) \text{ pair}}^C U_{n-1}(j) + \sum_{j=1 \text{ si } U_{n-1}(j) \text{ impair}}^C U_{n-1}(j) \left(3 + \frac{1}{U_{n-1}(j)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2C} \sum_{j=1}^C U_{n-1}(j) \left(\frac{1 + (-1)^{U_{n-1}(j)}}{2} + \left(\frac{1 - (-1)^{U_{n-1}(j)}}{2} \right) \left(3 + \frac{1}{U_{n-1}(j)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4C} \sum_{j=1}^C U_{n-1}(j) \left(4 + \frac{1}{U_{n-1}(j)} - (-1)^{U_{n-1}(j)} \left(2 + \frac{1}{U_{n-1}(j)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{C} \left(\sum_{j=1}^C U_{n-1}(j) + \frac{C}{4} - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^C (-1)^{U_{n-1}(j)} (1 + 2U_{n-1}(j)) \right) \end{aligned}$$

On peut itérer cette équation avec tous les rangs n inférieurs jusqu'à 0 car on a :

$$S_{n-1}(C) = \sum_{j=1}^C \frac{U_{n-1}(j)}{C} = \sum_{j=1}^C \frac{U_{n-2}(j)}{C} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4C} \sum_{j=1}^C (-1)^{U_{n-2}(j)} (1 + 2U_{n-2}(j))$$

$$S_{n-2}(C) = \sum_{j=1}^C \frac{U_{n-2}(j)}{C} = \sum_{j=1}^C \frac{U_{n-3}(j)}{C} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4C} \sum_{j=1}^C (-1)^{U_{n-3}(j)} (1 + 2U_{n-3}(j))$$

...

Ce qui devient :

$$\begin{aligned}
 S_n(C) &= \frac{1}{C} \left(\sum_{j=1}^C U_0(j) + n \frac{C}{4} - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^C (-1)^{U_k(j)} (1 + 2U_k(j)) \right) \\
 &= \frac{1}{C} \left(\frac{C}{2} (C + 1) + n \frac{C}{4} - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^C (-1)^{U_k(j)} (1 + 2U_k(j)) \right) \\
 \rightarrow S_n(C) &= \frac{C + 1}{2} + \frac{n}{4} - \frac{1}{4C} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^C (-1)^{U_k(j)} (1 + 2U_k(j))
 \end{aligned}$$

On inverse les sommes et on continue :

$$\begin{aligned}
 S_n(C) &= \frac{C + 1}{2} + \frac{n}{4} - \frac{1}{4C} \sum_{j=1}^C \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{U_k(j)} (1 + 2U_k(j)) \\
 &= \frac{C + 1}{2} + \frac{n}{4} - \frac{1}{4C} \sum_{j=1}^C \sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^{U_k(j)} + 2(-1)^{U_k(j)} U_k(j) \right) \\
 &= \frac{C + 1}{2} + \frac{n}{4} - \frac{1}{4C} \sum_{j=1}^C \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{U_k(j)} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{U_k(j)} U_k(j) \right) \\
 &= \frac{C + 1}{2} + \frac{n}{4} - \frac{1}{4C} \sum_{j=1}^C \left(p_j - m_j + 2j(-1)^j + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{U_k(j)} U_k(j) \right)
 \end{aligned}$$

Avec $\begin{cases} m_j : \text{nombre d'itérations impaires du vol } N = j \text{ durant } n \text{ itérations} \\ p_j : \text{nombre d'itérations paires du vol } N = j \text{ durant } n \text{ itérations} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 S_n(C) &= \frac{C + 1}{2} + \frac{n}{4} \\
 &\quad - \frac{1}{4C} \sum_{j=1}^C \left(p_j - m_j + 2j(-1)^j \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{U_k(j)} \left(\frac{U_{k-1}(j)}{2} \cdot \frac{1 + (-1)^{U_{k-1}(j)}}{2} + \frac{3U_{k-1}(j) + 1}{2} \cdot \frac{1 - (-1)^{U_{k-1}(j)}}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{C + 1}{2} + \frac{n}{4} - \frac{1}{4C} \sum_{j=1}^C \left(p_j - m_j + 2j(-1)^j \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{U_k(j)} (4U_{k-1}(j) - 2(-1)^{U_{k-1}(j)} U_{k-1}(j) + 1 - (-1)^{U_{k-1}(j)}) \right)
 \end{aligned}$$

...

Là encore difficile d'aller plus loin.

1. Cycle final {1,2}

On s'intéresse ici au cycle final de la suite de Syracuse. On a vu dans le tableau précédent que :

$$C \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^c U_n(j) \right) \leq 2C$$

Soit :

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^c \frac{U_n(j)}{C} \right) \leq 2$$

Ou bien :

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(C) \leq 2$$

Cela représente bien la somme de tous les cycles finaux de la suite de Syracuse divisée par C.

En moyenne, on peut également considérer que :

$$1 \leq \lim_{C \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^c \frac{U_n(j)}{C} \right) \right) \leq 2$$

$$1 \leq \lim_{C \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^c \frac{U_n(j)}{C} \right) \right) \approx \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{\frac{C}{2}} (1+2) = \frac{1}{C} \cdot 3 \cdot \frac{C}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \leq 2$$

Soit :

$$1 \leq \lim_{C \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(C) \right) \approx \frac{3}{2} = 1,5 \leq 2$$

Que l'on note plus simplement :

$$S_\infty(\infty) = \frac{3}{2}$$

On a considéré ici qu'en moyenne à l'infini la suite de Syracuse, si sa conjecture est vraie, est équirépartie. C'est-à-dire qu'elle contient autant de 1 que de 2 au rang n infini avec un nombre de valeurs de départ N infini également.

5. Bornes et encadrement

La suite est-elle bornée pour tout N ? Y répondre n'est pas simple car cela éliminerait la divergence de celle-ci. Néanmoins, en voici une tentative.

1. Borne inférieure : ne peut pas être plus petit que...

On trouve l'inéquation suivante sans effort :

$$1 \leq 2 \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 3 + \frac{1}{U_n}$$

On effectue le produit de chaque terme suivant jusqu'au rang i :

$$1 \leq \prod_{k=0}^{i-1} \left(2 \frac{U_{k+1}}{U_k} \right) \leq \prod_{k=0}^{i-1} \left(3 + \frac{1}{U_k} \right)$$

Or :

$$3 \leq 3 + \frac{1}{U_n} \leq 4, \text{ car } U_n \geq 1$$

Et :

$$\prod_{k=0}^{i-1} \left(2 \frac{U_{k+1}}{U_k} \right) = \frac{2^i U_i}{U_0} = \frac{2^i}{N} \text{ avec } U_i = 1$$

Donc :

$$1 \leq \frac{2^i}{N} \leq 4^i \rightarrow \frac{1}{2^i} \leq \frac{1}{N} \leq 2^i \rightarrow \frac{1}{2^i} \leq N \leq 2^i$$

$$\ln(N) \leq i \cdot \ln(2)$$

$$i \geq \frac{\ln(N)}{\ln(2)} ; 1 \leq N \leq 2^i$$

Ce résultat est évident puisque dès que N est différent d'une puissance de 2, la durée de vol i sera supérieure à sa puissance de 2. Car cette dernière constitue la trajectoire la plus courte (voir chapitre sur les puissances de 2, colonne vertébrale de la suite).

On vérifie le même résultat en inversant le rapport :

$$1 \geq \frac{U_n}{2U_{n+1}} \geq \frac{U_n}{3U_n + 1}$$

On effectue le produit de chaque terme suivant jusqu'au rang i :

$$1 \geq \prod_{k=0}^{i-1} \left(\frac{U_k}{2U_{k+1}} \right) \geq \prod_{k=0}^{i-1} \left(\frac{U_k}{3U_k + 1} \right)$$

Or :

$$\frac{1}{4} \leq \frac{U_n}{3U_n + 1} \leq \frac{1}{3}, \text{ car } U_n \geq 1$$

$$\prod_{k=0}^{i-1} \left(\frac{U_k}{2U_{k+1}} \right) = \frac{U_0}{2^i U_i} = \frac{N}{2^i}$$

Donc :

$$1 \geq \frac{N}{2^i} \geq \frac{1}{4^i} \rightarrow 2^i \geq N \geq \frac{1}{2^i} \rightarrow i \geq \frac{\ln(N)}{\ln(2)}$$

~

Voici une autre approche de la borne min. Dans le chapitre plus loin dans cet ouvrage de résolution par itérations multiples, on a trouvé l'équation suivante :

$$U_n(N) = \frac{3^{\sum_{j=1}^{p-1} n_{2j}}}{2^{\sum_{j=1}^p n_j}} N + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3^{\sum_{j=1}^k n_{p-2j+1}}}{2^{\sum_{j=1}^{2k} n_{p-j+1}}} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n_{p-2k+1}} \right) \right) \text{ avec } \begin{cases} n_1 = 0 \text{ si } N \text{ impair} \\ n_1 > 0 \text{ si } N \text{ pair} \\ p \text{ impair} \\ n_p \geq 3 \end{cases}$$

Si on cherche le minimum de U, on pose :

$$\min(U_n(N)) = \frac{3^0}{2^{\sum_{j=1}^p n_j}} N + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3^0}{2^{\sum_{j=1}^{2k} n_{p-j+1}}} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n_{p-2k+1}} \right) \right) \text{ car on a pour minimiser } n_{2j} = 0 \forall j$$

Soit :

$$\min(U_n(N)) = \frac{N}{2^{\sum_{j=1}^p n_j}} + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3^{n_{p-2k+1}} - 2^{n_{p-2k+1}}}{3^{n_{p-2k+1}} 2^{\sum_{j=1}^{2k} n_{p-j+1}}} \right)$$

Et à l'infini :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \min(U_n(N)) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{N}{2^{\sum_{j=1}^p n_j}} + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3^{n_{p-2k+1}} - 2^{n_{p-2k+1}}}{3^{n_{p-2k+1}} 2^{\sum_{j=1}^{2k} n_{p-j+1}}} \right) \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3^{n_{p-2k+1}} - 2^{n_{p-2k+1}}}{3^{n_{p-2k+1}} 2^{\sum_{j=1}^{2k} n_{p-j+1}}} \right) \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{3^0 - 2^0}{3^0 2^{n_p}} + \frac{3^0 - 2^0}{3^0 2^{n_p + n_{p-2}}} + \frac{3^0 - 2^0}{3^0 2^{n_p + n_{p-2} + n_{p-4}}} + \dots + \frac{3^0 - 2^0}{3^0 2^{n_p + n_{p-2} + n_{p-4} + \dots + n_3}} \right) = 0 \end{aligned}$$

On trouve ainsi une limite nulle.

2. Borne supérieure : ne peut pas être plus grand que...

Bien entendu, trouver une borne supérieure à la suite, signifie que la suite n'atteint jamais l'infini pour quel que soit son rang n . Cela ne prouve pas la convergence, car la suite peut très bien avoir une valeur quelconque à chaque rang n , sans atteindre l'infini, mais aussi sans retomber sur le cycle final à 1. On peut dire que la suite flotterait et c'est son vol qui serait infini, pas sa hauteur de vol. Mais la connaissance de cette borne supérieure aiderait considérablement, et éliminerait la possibilité de divergence à l'infini.

Tentons l'expérience, avoir $i \leq f(N)$ ou $N \geq g(i)$, permettrait de connaître toutes les durées de vols maximales. Pour cela on a déjà observé que les trajectoires des valeurs de départ N positives sont de la forme suivante :

$$U_n(N) \geq 2^i = e^{i \cdot \ln(2)} \text{ car } N = 2^i \text{ est le vol le plus court vers } 1$$

De ce fait, on pose :

$$U_n(N) \geq K \cdot e^{a(i-n)}$$

Sachant qu'il existe les valeurs particulières suivantes :

$$U_i(N) = 1 \geq K, \text{ on choisit } K = 1$$

$$U_0(N) = N \geq K \cdot e^{ai}, \text{ on choisit } a = \frac{\ln(N)}{i}$$

D'où :

$$U_n(N) \geq e^{\ln(N)(1-\frac{n}{i})} = N^{(1-\frac{n}{i})}, \text{ avec } 0 \leq n \leq i$$

Soit :

$$U_n(N) \geq N^{(1-\frac{n}{i})}, \text{ avec } 0 \leq n \leq i$$

Par exemple dans le cas des vols les plus rapides (puissances de 2) :

$$\text{Si } N = 2^i, \text{ on a bien : } U_n(N) \geq 2^{i-n}$$

En passant cette inéquation en logarithme, on obtient une borne pour i :

$$\ln(U_n(N)) \geq \left(1 - \frac{n}{i}\right) \ln(N)$$

$$i \leq \frac{n \cdot \ln(N)}{\ln(N) - \ln(U_n(N))} = \frac{\ln(N^n)}{\ln\left(\frac{N}{U_n(N)}\right)} \text{ avec } U_n(N) \neq N, \text{ soit } n > 0$$

Cette borne supérieure n'est valable que pour le rang n correspondant à la hauteur de vol le plus haut de la suite pour un N de départ choisi. Or, avec N , on ne connaît pas à l'avance son plus haut vol et à quel rang il apparaît. De ce fait, cette inéquation n'est pas exploitable en l'état.

D'autres courbes d'approximation de la suite peuvent être trouvées selon différentes formes. En voici quelques-unes, sachant qu'il en existe une multitude. Avec les conditions communes :

$$U_i(N) = 1 \text{ et } U_0(N) = N$$

Forme	Equation	Borne sur i	Condition
$U_n(N) = Ke^{a(i-n)}$	$U_n(N) = e^{\frac{i-n}{i}\ln(N)}$ $= N^{(1-\frac{n}{i})}$	$i \leq \frac{n \cdot \ln(N)}{\ln(N) - \ln(U_n(N))}$	$U_1(N) = \frac{N}{2}$ $\rightarrow i = \frac{\ln(N)}{\ln(2)}$
$U_n(N) = K(1 - \ln(a \cdot i - b \cdot n))$	$U_n(N) = N - \frac{\ln(n+1)}{\ln(i+1)}$	$i \geq (n+1)^{\frac{1}{U_n(N)-N}} - 1$	$U_1(N) = \frac{N}{2}$ $\rightarrow i = 4^N - 1$
$U_n(N) = \frac{K}{n+a \cdot i}$	$U_n(N) = \frac{N \cdot i}{(N-1)n+i}$	$i \leq \frac{n(N-1)U_n(N)}{N-U_n(N)}$	$U_1(N) = \frac{N}{2}$ $\rightarrow i = N-1$
$U_n(N) = a + b \cdot n + c \cdot n^2$, avec $N = -\frac{b}{2a}$ (sommet)	$U_n(N) = N - 2N^2n + \frac{2iN^2 - N + 1}{i^2}n^2$	$i \leq 2n$ si N grand	$U_1(N) = \frac{N}{2}$ $\rightarrow i = \frac{2N \mp \sqrt{5N-1}}{2N-1}$ ≈ 1 si N grand

On retrouve la même difficulté que précédemment à trouver une borne supérieure de durée de vol avec toutes les équations d'approximation du tableau ci-dessus.

La question est : quelle méthode appliquer pour trouver une borne supérieure au vol de la suite quel que soit la valeur N de départ ? Cette borne doit de plus être indépendante du rang n et de la valeur de la suite à ce rang. Cela se ramène à trouver le maximum que la suite atteint à chaque vol avec la valeur initiale N. Sachant que la suite se comporte de manière imprévisible et chaotique, il paraît impossible de définir cette borne.

En conséquence on ne saura pas si la suite atteint un maximum infini à un rang n avec une ou des valeurs N choisies. On ne saura pas non plus si la suite est infinie. C'est-à-dire si sa durée de vol ne s'arrête jamais. En effet, il peut y avoir un seul cycle final (2, 1, 2, 1...) et des vols qui s'éternisent, avant ce cycle final, à l'infini. Ou bien, des vols qui rencontrent d'autres cycles finaux et tournent à l'infini en boucle dans ces autres cycles inconnus.

Bref, encore un bon nombre de questions sans réponse qui renforce le côté mystique de la conjecture de Syracuse. Maintenant vous avez quelques éléments pour vous aussi être hanté quelques nuits par cette simple suite que personne n'arrive à déchiffrer et sur plusieurs aspects. Vous n'allez pas être déçu, car ce n'est que le début. Les pages suivantes devraient vous surprendre tout autant sinon plus. Jugez par vous-même.

~

Voici une autre approche de la borne max. Dans le chapitre plus loin dans cet ouvrage de résolution par itérations multiples, on a trouvé l'équation suivante :

$$U_n(N) = \frac{3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}}}{2^{\sum_{j=1}^p n_j}} N + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3^{\sum_{j=1}^k n_{p-2j+1}}}{2^{\sum_{j=1}^{2k} n_{p-j+1}}} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n_{p-2k+1}} \right) \right) \text{ avec } \begin{cases} n_1 = 0 \text{ si } N \text{ impair} \\ n_1 > 0 \text{ si } N \text{ pair} \\ p \text{ impair} \\ n_p \geq 3 \end{cases}$$

Si on cherche le maximum de U, on pose :

$$\max(U_n(N)) = \left(\frac{3}{2} \right)^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}} N + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3^{n_{p-2k+1}} - 2^{n_{p-2k+1}}}{3^{n_{p-2k+1}} 2^{\sum_{j=1}^{2k} n_{p-j+1}}} \right) \text{ avec pour maximiser } n_{2j+1} = 0 \forall j$$

Et à l'infini :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \max(U_n(N)) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{n_2+n_4+n_6+\dots+n_{p-1}} N + \frac{3^{n_{p-1}} - 2^{n_{p-1}}}{3^{n_{p-1}} 2^{n_{p-1}}} + \frac{3^{n_{p-3}} - 2^{n_{p-3}}}{3^{n_{p-3}} 2^{n_{p-1}+n_{p-3}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3^{n_{p-5}} - 2^{n_{p-5}}}{3^{n_{p-5}} 2^{n_{p-1}+n_{p-3}+n_{p-5}}} + \dots + \frac{3^{n_2} - 2^{n_2}}{3^{n_2} 2^{n_{p-1}+n_{p-3}+n_{p-5}+\dots+n_2}} \right) = \infty \end{aligned}$$

La limite tend vers l'infini car le premier terme multiplicateur de N tend vers l'infini alors que la somme des autres termes est finie puisque ses dénominateurs tendent vers l'infini à l'infini.

~

On peut finalement estimer la durée d'un vol de N avec le raisonnement suivant. Si à chaque rang n, on a en moyenne une équi-répartition des itérations paires et impaires, on peut poser l'approximation suivante :

$$\begin{aligned} U_n(N) &= \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot N = \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot N = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n \cdot N \\ \rightarrow \frac{U_n(N)}{N} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n \approx 0,866^n < 1 : \text{moyenne décroissante} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n(N)}{N} = 0 : \text{moyenne convergente vers 0}$$

Or au rang i, on a, a priori, toujours selon la conjecture :

$$U_i(N) = \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{i}{2}} \cdot N = 1$$

Soit au carré :

$$\left(\frac{4}{3} \right)^i = N^2$$

Et donc :

$$i = \frac{2 \cdot \ln(N)}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{2 \cdot \ln(N)}{2 \cdot \ln(2) - \ln(3)} \approx 6,9521 \ln(N)$$

Bonne nouvelle, cette approximation est en pratique vérifiée.

6. Décroissance

On observe que la décroissance de la suite est effective dans 3 cas sur 4. Pour le dernier cas, du type $U_n(N) = 4k + 3$, la décroissance est effective dans 1 cas sur 4 et a priori 1 fois sur 2 à chaque itération, soit :

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{p} \right) = \sum_{j=1}^p \left(\frac{1}{2} \right)^j = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{p+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{p+1}$$

Dans ces conditions, on a une décroissance D certaine de la suite telle que :

$$D = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{p+1} \right) \right) = 1 = 100\%$$

La conjecture de Syracuse décroît donc a priori dans tous les cas. Mais cela ne constitue pas une preuve. C'est une approximation qui donne une tendance de comportement de la suite de Syracuse.

7. Taux de croissance et de décroissance

On pose, comme suit, T le taux de croissance ou de décroissance de deux valeurs qui se suivent dans la suite :

$$T_n(N) = U_{n+1}(N) - U_n(N)$$

Par exemple :

$$T_0(N) = U_1(N) - N, \text{ pour } n = 0$$

Si valeur paire : décroissance d'une moitié

$$T_n(N) = \frac{U_n(N)}{2} - U_n(N) = -\frac{U_n(N)}{2} < 0$$

Si valeur impaire : croissance d'une moitié + 1/2

$$T_n(N) = \frac{3U_n(N) + 1}{2} - U_n(N) = \frac{U_n(N) + 1}{2} > 0$$

Le 1/2 est juste là pour garantir une valeur divisée par 2 entière.

On va rechercher le taux de croissance moyenne de la suite de Syracuse avec :

$$U_{n+1}(N) - U_n(N) = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} - U_n(N) = -\frac{U_n(N)}{2} \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(N) + 1}{2} - U_n(N) = \frac{U_n(N) + 1}{2} \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

La croissance moyenne est la suivante :

$$\text{Croissance Moyenne}(U_{n+1}(N) - U_n(N)) = \frac{-\frac{U_n(N)}{2} + \frac{U_n(N) + 1}{2}}{2} = \frac{1}{4} > 0$$

La croissance est en moyenne positive, tout porte à croire que notre suite de Syracuse croît lentement et diverge à l'infini. Mais ce n'est pas ce que l'on observe numériquement. Ce calcul est trop grossier. Prenons une pondération des itérations paires et impaires en considérant que les itérations paires sont un peu plus fréquentes que les impaires (respectivement 3/5 et 2/5).

Qu'arrive-t-il à notre croissance moyenne, dite maintenant pondérée ?

$$\text{Moyenne pondérée}(U_{n+1}(N) - U_n(N)) = \frac{-\frac{U_n(N)}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{U_n(N) + 1}{2} \cdot \frac{2}{5}}{2} = \frac{2 - U_n(N)}{20} < 0 \text{ si } U_n(N) > 2$$

Et bien, dans ce cas, la suite de Syracuse décroît en moyenne pondérée.

Du fait que les pondérations ne sont pas identiques d'un vol à un autre, cette moyenne n'est qu'une approximation de la majorité des vols N. Mais il peut exister des vols qui s'éloignent de cette moyenne et divergent.

Dans le cas général avec p, pondération des itérations paires, et m des impaires, on obtient :

$$\text{Moyenne pondérée}(U_{n+1}(N) - U_n(N)) = \frac{-\frac{U_n(N)}{2} \cdot p + \frac{U_n(N) + 1}{2} \cdot m}{2} = \frac{m + (m - p)U_n(N)}{4} < 0$$

$$\text{si } U_n(N) > \frac{m}{p-m} \text{ avec } \begin{cases} 1 \geq m \geq 0 \\ 1 \geq p \geq 0 \\ m+p=1 \\ m \neq p \end{cases}$$

Soit :

$$U_n(N) > \frac{m}{p-m} = \frac{p-1}{1-2p} = \frac{m}{1-2m} \text{ et } U_n(N) \geq 1$$

La relation est vérifiée si et seulement si :

$$\begin{aligned} 1 > \frac{m}{p-m} &\rightarrow \mathbf{1 \geq p > 2m \geq 0} \\ p+m=1 > 3m &\rightarrow \mathbf{m < \frac{1}{3} \text{ et } p > \frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Il suffit donc qu'il y ait au moins 2 fois plus d'itérations paires que d'impaires pour garantir une moyenne décroissante. Cette condition est bien supérieure à la réalité observée numériquement. Elle constitue une borne minimale de convergence et non supérieure comme on espérerait trouver.

Mais si on reconsidère :

$$U_n(N) > 1 \text{ ou } U_n(N) \geq 2$$

Alors :

$$\begin{aligned} 2 > \frac{m}{p-m} &\rightarrow \mathbf{1 \geq p > \frac{2}{3}m \geq 0} \\ p+m=1 > \frac{5}{3}m &\rightarrow \mathbf{m < \frac{3}{5} \text{ et } p > \frac{2}{3}m} \\ p+m=1 < \frac{3}{5}+p &\rightarrow \mathbf{p > \frac{2}{5}} \end{aligned}$$

On retrouve exactement les limites de pondération que l'on a utilisées précédemment, et basées sur des observations numériques déjà décrites dans cet ouvrage.

~

Si on additionne tous les taux de croissance Tc pour un vol, on obtient tout d'abord par définition :

$$T_c(N) = \sum_{n=0}^{i-1} T_n(N) = (U_1(N) - N) + (U_2(N) - U_1(N)) + \dots + (U_i(N) - U_{i-1}(N)) = -N + U_i(N) = 1 - N$$

De plus, on a également :

$$T_c(N) = \sum_{n=0}^{i-1} T_n(N) = \sum_{j=1}^p \left(-\frac{U_{pj}(N)}{2} \right) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{U_{mj}(N)}{2} + \frac{1}{2} \right) \text{ avec } i = p + m$$

Soit :

$$T_c(N) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^m U_{mj}(N) - \sum_{j=1}^p U_{pj}(N) \right) + \frac{m}{2} = 1 - N$$

Et si on se limite aux nombreux cas où le nombre de parité paires et impaires sont identiques sur un vol complet (jusqu'au rang i), on a :

$$p = m = \frac{i}{2} \text{ avec } i \text{ pair}$$

Alors :

$$T_c(N) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i/2} (U_{mj}(N) - U_{pj}(N)) + \frac{i}{4} = 1 - N$$

Soit :

$$i = 2 \sum_{j=1}^{i/2} (U_{pj}(N) - U_{mj}(N)) - 4(N - 1)$$

On ne connaît pas les valeurs de la suite à un rang donné à l'avance. De ce fait, on ne peut pas calculer le vol i sans parcourir la suite préalablement.

Voici un exemple :

$N = 222 > 111 > 167 > 251 > 377 > 566 > 283 > 425 > 638 > 319 > 479 > 719 > 1079 > 1619 > 2429 > 3644 > 1822 > 911 > 1367 > 2051 > 3077 > 4616 > 2308 > 1154 > 577 > 866 > 433 > 650 > 325 > 488 > 244 > 122 > 61 > 92 > 46 > 23 > 35 > 53 > 80 > 40 > 20 > 10 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1$
 D'où : $i = 46$

On divise cette suite en 2 parties : les paires et les impaires que l'on somme séparément comme suit :

Pour les pairs : $222 + 566 + 638 + 3644 + 1822 + 4616 + 2308 + 1154 + 866 + 650 + 488 + 244 + 122 + 92 + 46 + 80 + 40 + 20 + 10 + 8 + 4 + 2 = 17\ 642$

Pour les impaires : $111 + 167 + 251 + 377 + 283 + 425 + 319 + 479 + 719 + 1079 + 1619 + 2429 + 911 + 1367 + 2051 + 3077 + 577 + 433 + 325 + 61 + 23 + 35 + 53 + 5 = 17\ 177$

En, reprenant notre équation ci-dessus, on obtient bien :

$$i = 2(17642 - 17177) - 4(222 - 1) = 2(465) - 4(221) = 46$$

Revenons maintenant à nos taux de croissance et leur calcul :

$$U_{n+1}(N) = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(N) + 1}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

D'où :

$$U_{n+1}(N) - U_n(N) = \begin{cases} -\frac{U_n(N)}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{U_n(N) + 1}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

Et :

$$U_{n+2}(N) = \begin{cases} \frac{U_{n+1}(N)}{2} \text{ si } U_{n+1}(N) \text{ pair} = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{4} \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(N) + 1}{4} \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases} \\ \frac{3U_{n+1}(N) + 1}{2} \text{ si } U_{n+1}(N) \text{ impair} = \begin{cases} \frac{3U_n(N) + 2}{4} \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{9U_n(N) + 5}{4} \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases} \end{cases}$$

D'où :

$$U_{n+2}(N) - U_{n+1}(N) = \begin{cases} -\frac{U_{n+1}(N)}{2} \text{ si } U_{n+1}(N) \text{ pair} = \begin{cases} -\frac{U_n(N)}{4} \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ -\frac{3U_n(N) + 1}{4} \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases} \\ \frac{U_{n+1}(N) + 1}{2} \text{ si } U_{n+1}(N) \text{ impair} = \begin{cases} \frac{U_n(N) + 2}{4} \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3(U_n(N) + 1)}{4} \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases} \end{cases}$$

De même, au rang suivant, on obtient :

$$\begin{cases} U_{n+3}(N) - U_{n+2}(N) = \\ -\frac{U_{n+2}(N)}{2} \text{ si } U_{n+2}(N) \text{ pair} = \begin{cases} -\frac{U_{n+1}(N)}{4} \text{ si } U_{n+1}(N) \text{ pair} = \begin{cases} -\frac{U_n(N)}{8} \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ -\frac{3U_n(N) + 1}{8} \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases} \\ -\frac{3U_{n+1}(N) + 1}{4} \text{ si } U_{n+1}(N) \text{ impair} = \begin{cases} -\frac{3U_n(N) + 2}{8} \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ -\frac{9U_n(N) + 5}{8} \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases} \end{cases} \\ \frac{U_{n+2}(N) + 1}{2} \text{ si } U_{n+2}(N) \text{ impair} = \begin{cases} \frac{U_{n+1}(N) + 2}{4} \text{ si } U_{n+1}(N) \text{ pair} = \begin{cases} \frac{U_n(N) + 4}{8} \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(N) + 5}{8} \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases} \\ \frac{3(U_{n+1}(N) + 1)}{4} \text{ si } U_{n+1}(N) \text{ impair} = \begin{cases} \frac{3(U_n(N) + 2)}{8} \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{9(U_n(N) + 1)}{8} \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

On ne remarque pas de simplification ou factorisation notable pour une généralisation simple au rang n par défaut. De plus, chaque étape rajoute une parité supplémentaire qui double le nombre de cas possibles. On ne pourra donc pas de cette manière-ci s'en réduire au rang n quel que soit le rang parcouru.

~

Si on reprend la croissance et la décroissance à chaque rang d'un vol, on a calculé les variations d'une itération paire et d'une impaire comme suit :

Pour les impairs, on a :

$$\Delta U_n(N) = \frac{3U_n(N) + 1}{2} - U_n(N) = \frac{U_n(N) + 1}{2} \text{ et } \Delta n = 1 : \text{échantillonnage ou pas de 1}$$

Et pour les pairs :

$$\Delta U_n(N) = \frac{U_n(N)}{2} - U_n(N) = -\frac{U_n(N)}{2} \text{ et } \Delta n = 1 : \text{échantillonnage ou pas de 1}$$

Si tous les vols tombent à 1, alors la somme des taux d'accroissements d'un même vol est égale à 1 moins la valeur de départ N. Soit :

$$U_i(N) - U_0(N) = 1 - N = \sum_{j=0}^{i-1} \Delta U_j(N)$$

$$\rightarrow N = 1 - \sum_{j=0}^{i-1} \Delta U_j(N)$$

Par exemple avec $N=3 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1$, on a bien :

$$N = 3 = 1 - \left(\frac{3+1}{2} + \frac{5+1}{2} - \frac{8}{2} - \frac{4}{2} - \frac{2}{2} \right) = 1 - (2 + 3 - 4 - 2 - 1) = 1 - (-2) = 3$$

On a vu que cette équation peut s'écrire aussi comme suit :

$$N = 1 - \left(\sum_{j=0}^{i-1} \text{si } U_j(N) \text{ pair} - \frac{U_j(N)}{2} + \sum_{j=0}^{i-1} \text{si } U_j(N) \text{ impair} \frac{U_j(N) + 1}{2} \right)$$

Soit :

$$N = 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{i-1} a_j(N) \text{ avec } \begin{cases} a_j(N) = U_j(N) \text{ si } U_j(N) \text{ pair} \\ a_j(N) = -(U_j(N) + 1) \text{ si } U_j(N) \text{ impair} \end{cases}$$

Par exemple avec $N=3 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1$, on a bien :

$$N = 3 = 1 + \frac{1}{2} (-3 + 1) - (5 + 1) + 8 + 4 + 2 = 1 + \frac{1}{2} (-4 - 6 + 14) = 1 + \frac{4}{2} = 3$$

On développe cette équation comme cela :

$$N = 1 - \left(\sum_{j=0}^{i-1} \text{si } U_j(N) \text{ pair} - \frac{U_j(N)}{2} + \sum_{j=0}^{i-1} \text{si } U_j(N) \text{ impair} \frac{U_j(N)}{2} + \sum_{j=0}^{i-1} \text{si } U_j(N) \text{ impair} \frac{1}{2} \right)$$

$$N = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{U_j(N)} \frac{U_j(N)}{2} - \frac{m}{2} \text{ avec } m < i$$

m représente le nombre d'itérations impaires du vol N, soit :

$$N = \frac{1}{2} \left(2 - m + \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{U_j(N)} U_j(N) \right) \text{ avec } m < i$$

Par exemple avec $N=3 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1$, on a bien :

$$N = 3 = \frac{1}{2} (2 - 2 + (-3 - 5 + 8 + 4 + 2)) = \frac{6}{2} = 3$$

Si on développe un peu plus loin, on obtient :

$$N = \frac{1}{2} \left(2 - m + (-1)^{U_0(N)} U_0(N) + (-1)^{U_1(N)} U_1(N) + (-1)^{U_2(N)} U_2(N) + \dots + (-1)^{U_{i-1}(N)} U_{i-1}(N) \right)$$

$$N = \frac{1}{2} \left(2 - m + (-1)^N N + (-1)^{U_1(N)} \frac{1}{2} \left(U_0(N) + \frac{1}{2} (2U_0(N) + 1) (1 - (-1)^{U_0(N)}) \right) \right. \\ \left. + (-1)^{U_2(N)} \frac{1}{2} \left(U_1(N) + \frac{1}{2} (2U_1(N) + 1) (1 - (-1)^{U_1(N)}) \right) + \dots + (-1)^{U_{i-1}(N)} U_{i-1}(N) \right)$$

$$N = \frac{1}{2} \left(2 - m + (-1)^N N + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{U_j(N)} \left(U_{j-1}(N) + \frac{1}{2} (2U_{j-1}(N) + 1) (1 - (-1)^{U_{j-1}(N)}) \right) \right)$$

$$N = \frac{1}{2} \left(2 - m + (-1)^N N + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{U_j(N)} \left(U_{j-1}(N) (2 - (-1)^{U_{j-1}(N)}) + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{U_{j-1}(N)}) \right) \right)$$

En continuant l'itération des valeurs du vol, on obtient :

$$N = \frac{1}{2} \left(2 - m + (-1)^N N \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{i-1} (-1)^{U_j(N)} \left(\left(\left(U_{j-3}(N) (2 - (-1)^{U_{j-3}(N)}) + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{U_{j-3}(N)}) \right) (2 - (-1)^{U_{j-2}(N)}) + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{U_{j-2}(N)}) \right) (2 - (-1)^{U_{j-1}(N)}) + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{U_{j-1}(N)}) \right) \right)$$

$$N = \frac{1}{2} \left(2 - m + (-1)^N N \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (-1)^{U_{i-1}(N)} \left(\left(\left(U_0(N) (2 - (-1)^{U_0(N)}) + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{U_0(N)}) \right) (2 - (-1)^{U_1(N)}) + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{U_1(N)}) \right) (\dots) (2 - (-1)^{U_{i-3}(N)}) + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{U_{i-3}(N)}) \right) (2 - (-1)^{U_{i-2}(N)}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{U_{i-2}(N)}) \right)$$

Soit :

$$N = \frac{1}{2} \left(2 - m + (-1)^N N + \frac{1}{2} (-1)^{U_{i-1}(N)} \prod_{j=0}^{i-2} \left(U_j(N) (2 - (-1)^{U_j(N)}) + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{U_j(N)}) \right) \right)$$

Et :

$$U_0(N) = N; \quad U_i(N) = 1 \text{ et } U_{i-1}(N) = 2$$

D'où :

$$N = \frac{1}{2} \left(2 - m + (-1)^N N + \frac{1}{2} \left(N(2 - (-1)^N) + \frac{1}{2} (1 - (-1)^N) \right) \prod_{j=1}^{i-2} \left(U_j(N) (2 - (-1)^{U_j(N)}) + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{U_j(N)}) \right) \right)$$

$$N = \frac{1}{2} \left(2 - m + (-1)^N N + \frac{1}{2} \left(N(2 - (-1)^N) + \frac{1}{2} (1 - (-1)^N) \right) \prod_{j=1 \text{ si } U_j(N) \text{ impair}}^{i-2} (3U_j(N) + 1) \prod_{j=1 \text{ si } U_j(N) \text{ pair}}^{i-2} U_j(N) \right)$$

$$N = \frac{1}{2} \left(2 - m + (-1)^N N + \frac{1}{2} \left(N(2 - (-1)^N) + \frac{1}{2} (1 - (-1)^N) \right) \prod_{j=1 \text{ si } U_j(N) \text{ impair}}^{i-2} U_j(N) \left(3 + \frac{1}{U_j(N)} \right) \prod_{j=1 \text{ si } U_j(N) \text{ pair}}^{i-2} U_j(N) \right)$$

$$N = \frac{1}{2} \left(2 - m + (-1)^N N + \frac{1}{2} \left(N(2 - (-1)^N) + \frac{1}{2} (1 - (-1)^N) \right) \prod_{j=1 \text{ si } U_j(N) \text{ impair}}^{i-2} \left(3 + \frac{1}{U_j(N)} \right) \prod_{j=1}^{i-2} U_j(N) \right)$$

On verra plus loin dans cet ouvrage que :

$$2^i = N \cdot \prod_{j=0 \text{ pour } U_j \text{ impair}}^{i-1} \left(3 + \frac{1}{U_j(N)} \right)$$

De ce fait, on obtient :

$$N = \frac{1}{2} \left(2 - m + (-1)^N N + \frac{1}{2} \left(N(2 - (-1)^N) + \frac{1}{2} (1 - (-1)^N) \right) \frac{2^i}{\left(3 + \frac{1}{N} \right) \left(3 + \frac{1}{U_{i-1}(N)} \right)} \prod_{j=1}^{i-2} U_j(N) \right)$$

D'où :

$$N = 1 - \frac{m}{2} + (-1)^N \frac{N}{2} + \left(1 + 4N - (-1)^N(1 + 2N)\right) \frac{2^{i-2}}{7(1 + 3N)} \prod_{j=1}^{i-2} U_j(N)$$

Ainsi, si N est pair :

$$N = 1 - \frac{m}{2} + \frac{N}{2} + \frac{2^{i-1}N}{7(1 + 3N)} \prod_{j=1}^{i-2} U_j(N) \rightarrow N = 2 - m + \frac{2^i}{7} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{N} + 3\right)} \prod_{j=1}^{i-2} U_j(N)$$

$$\prod_{j=1}^{i-2} U_j(N) = \frac{7(N + m - 2)}{2^i} \left(3 + \frac{1}{N}\right)$$

Ou bien pour l'ensemble des produits des termes d'un vol avec N pair :

$$\prod_{j=0}^{i-1} U_j(N) = \frac{7(N + m - 2)(3N + 1)}{2^{i-1}} = \frac{7}{2^{i-1}} (3N^2 + N(3m - 5) + m - 2) \text{ avec } m > N + 2$$

On a utilisé l'égalité suivante :

$$\prod_{j=0}^i U_j(N) = \prod_{j=0}^{i-1} U_j(N) = 2N \prod_{j=1}^{i-2} U_j(N)$$

Et si N est impair :

$$N = 1 - \frac{m}{2} - \frac{N}{2} + \frac{2^{i-1}}{7} \prod_{j=1}^{i-2} U_j(N) \rightarrow N = \frac{1}{3} \left(2 - m + \frac{2^i}{7} \prod_{j=1}^{i-2} U_j(N)\right)$$

$$\prod_{j=1}^{i-2} U_j(N) = \frac{7(3N + m - 2)}{2^i}$$

Ou bien pour l'ensemble des produits des termes d'un vol avec N impair :

$$\prod_{j=0}^{i-1} U_j(N) = \frac{7N(3N + m - 2)}{2^{i-1}} = \frac{7}{2^{i-1}} (3N^2 + N(m - 2)) \text{ avec } m > 2 - 3N$$

En définitif on obtient à partir d'une somme de variation de taux d'accroissement une relation par parité du produit d'un vol de la suite de Syracuse. Ce résultat sera exploité plus loin dans cet ouvrage pour comprendre notamment l'impact et les proportions du nombre d'itérations impaires (variable m) dans un vol de N à 1.

8. Convergence

Pour prouver la convergence d'une telle suite il faut successivement prouver :

- Qu'il existe un et un seul cycle final 1, 2, 1, 2, 1... pour tout N entier positif
 - Sinon la suite itérerait à l'infini dans un ou plusieurs autres cycles ;
- Que la suite ne diverge jamais dans au moins un vol vers une valeur infinie
 - Sinon la suite irait à l'infini au moins une fois ;
- Que pour tout N entier positif la suite finit toujours par décroître vers le seul cycle final 1, 2, 1, 2, 1...
 - Sinon la suite itérerait sans fin : c'est-à-dire pas forcément vers une valeur infinie ou un autre cycle.

Cette recherche n'est pas assez avancée pour être développée à ce stade dans cet ouvrage.

Néanmoins, des éléments de réponses tangibles sont exposés dans les chapitres suivants de ce document.

1. Vitesse de convergence linéaire

On cherche à savoir si :

$$U_{n+1}(N) - U_i(N) \leq k(U_n(N) - U_i(N)) \text{ avec } 1 > k \geq 0$$

Soit :

$$U_{n+1}(N) - 1 = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} - 1 = \frac{U_n(N) - 2}{2} \leq k(U_n(N) - 1) \text{ si } U_n(N) \geq 2 \frac{k-1}{2k-1}, \text{ pair et } k \neq \frac{1}{2} \\ \frac{3U_n(N) + 1}{2} - 1 = \frac{3U_n(N) - 1}{2} \leq k(U_n(N) - 1) \text{ si } U_n(N) \geq \frac{2k-1}{2k-3}, \text{ impair et } k \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Pour avoir un k unique, il faut que :

$$2 \frac{1-k}{1-2k} = \frac{1-2k}{3-2k} \rightarrow k = \frac{5}{6} < 1 : \text{convergence linéaire si } U_n(N) \geq -\frac{1}{2}$$

On a donc bien une convergence linéaire possible vers 1 avec :

$$U_{n+1}(N) - 1 \leq \frac{5}{6}(U_n(N) - 1) \quad \forall U_n(N) > 0 \text{ et } \forall N > 0$$

2. Vitesse de convergence quadratique

On cherche à savoir si :

$$U_{n+1}(N) - U_i(N) \leq k(U_n(N) - U_i(N))^2 \text{ avec } k > 0$$

Soit :

$$U_{n+1}(N) - 1 = \begin{cases} \frac{U_n(N) - 2}{2} \leq k(U_n(N) - 1)^2 \text{ si } U_n(N) \text{ pair et } kU_n(N)^2 - (2k + 1)U_n(N) + (k + 1) \geq 0 \\ \frac{3U_n(N) - 1}{2} \leq k(U_n(N) - 1)^2 \text{ si } U_n(N) \text{ impair et } kU_n(N)^2 - (2k + 3)U_n(N) + (k + 1) \geq 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} (U_n(N) - 1) \left(U_n(N) - \frac{k+1}{k} \right) \geq 0 \rightarrow U_n(N) \geq \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k} \geq 1 \text{ avec } k \neq 0 \\ \left(U_n(N) - 1 - \frac{3 + \sqrt{9 + 8k}}{2k} \right) \left(U_n(N) - 1 - \frac{3 - \sqrt{9 + 8k}}{2k} \right) \geq 0 \rightarrow U_n(N) \geq 1 + \frac{3 + \sqrt{9 + 8k}}{2k} \text{ avec } k \geq -\frac{9}{8} \end{cases}$$

Or :

$$1 + \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{3 + \sqrt{9 + 8k}}{2k} \rightarrow U_n(N) \geq 1 + \frac{3 + \sqrt{9 + 8k}}{2k} \quad \forall k > 0$$

Ainsi par exemple :

$$\text{Avec } k = \frac{1}{2}, \text{ on a : } U_{n+1}(N) - 1 = \begin{cases} \frac{U_n(N) - 2}{2} \leq \frac{1}{2}(U_n(N) - 1)^2 \text{ avec } U_n(N) \geq 3 \\ \frac{3U_n(N) - 1}{2} \leq \frac{1}{2}(U_n(N) - 1)^2 \text{ avec } U_n(N) \geq 5 + \sqrt{13} \approx 8,61 \end{cases}$$

$$\text{Avec } k = 1, \text{ on a : } U_{n+1}(N) - 1 = \begin{cases} \frac{U_n(N) - 2}{2} \leq (U_n(N) - 1)^2 \text{ avec } U_n(N) \geq 2 \\ \frac{3U_n(N) - 1}{2} \leq (U_n(N) - 1)^2 \text{ avec } U_n(N) \geq \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \approx 4,56 \end{cases}$$

$$\text{Avec } k = \frac{x^2 - 9}{8} \text{ (} x > 3 \text{), on a :}$$

$$U_{n+1}(N) - 1 = \begin{cases} \frac{U_n(N) - 2}{2} \leq \frac{x^2 - 9}{8} (U_n(N) - 1)^2 \text{ avec } U_n(N) \geq 1 + \frac{8}{x^2 - 9} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9} = \frac{x + 1}{x - 3} \cdot \frac{x - 1}{x + 3} \\ \frac{3U_n(N) - 1}{2} \leq \frac{x^2 - 9}{8} (U_n(N) - 1)^2 \text{ avec } U_n(N) \geq 1 + 4 \frac{x + 3}{x^2 - 9} = \frac{x + 1}{x - 3} \end{cases}$$

On a donc bien une convergence quadratique possible vers 1 avec :

$$U_{n+1}(N) - 1 \leq k(U_n(N) - 1)^2 \quad \forall U_n(N) > 1 + \frac{3 + \sqrt{9 + 8k}}{2k}, \quad \forall N > 0 \text{ et } \forall k = \frac{x^2 - 9}{8} > 0$$

3. Taux de convergence minimum d'itérations paires vis-à-vis des impaires

Prenons les quatre combinaisons de deux parités successives. On itère chacune des combinaisons comme si elles se répétaient indépendamment des autres, à savoir :

$$\begin{aligned}
 &U_0 = 1 \rightarrow \\
 (PI)^n : U_{n+1} &= \frac{3 \frac{U_n}{2} + 1}{2} \rightarrow 4U_{n+1} = 3U_n + 2 \rightarrow U_\infty = 2 \\
 (IP)^n : U_{n+1} &= \frac{3U_n + 1}{4} \rightarrow 4U_{n+1} = 3U_n + 1 \rightarrow U_\infty = 1 \\
 (PP)^n : U_{n+1} &= \frac{U_n}{4} \rightarrow 4U_{n+1} = U_n \rightarrow U_\infty = 0 \\
 (II)^n : U_{n+1} &= \frac{3 \frac{3U_n + 1}{2} + 1}{2} \rightarrow 4U_{n+1} = 9U_n + 5 \rightarrow U_\infty = \infty
 \end{aligned}$$

On constate sans surprise que la succession d'itérations toujours paires, ou alternées paires / impaires ou impaires / paires conduit toujours à une convergence de la suite de Syracuse. En revanche, seul le cas d'itérations impaires diverge. Essayons donc de combiner ce cas divergent avec les autres comme suit :

$$\begin{aligned}
 &U_0 = 1 \rightarrow \\
 (PI)^n(II)^nP : U_{n+1} &= \frac{3 \frac{3 \frac{3 \frac{U_n}{2} + 1}{2} + 1}{4} + 1}{4} = \frac{27U_n + 38}{32} \rightarrow 32U_{n+1} = 27U_n + 38 \rightarrow U_\infty = \frac{38}{5} \\
 (IP)^n(II)^nP : U_{n+1} &= \frac{3 \frac{3 \frac{3U_n + 1}{4} + 1}{2} + 1}{4} = \frac{27U_n + 29}{32} \rightarrow 32U_{n+1} = 27U_n + 29 \rightarrow U_\infty = \frac{29}{5} \\
 (PP)^n(II)^n : U_{n+1} &= \frac{3 \frac{3 \frac{U_n}{4} + 1}{2} + 1}{2} = \frac{9U_n + 20}{16} \rightarrow 16U_{n+1} = 9U_n + 20 \rightarrow U_\infty = \frac{20}{7} \\
 (II)^n(PI)^nP : U_{n+1} &= \frac{3 \frac{3 \frac{3 \frac{3U_n + 1}{2} + 1}{2} + 1}{4} + 1}{4} = \frac{27U_n + 23}{32} \rightarrow 32U_{n+1} = 27U_n + 23 \rightarrow U_\infty = \frac{23}{5} \\
 (II)^n(IP)^nP : U_{n+1} &= \frac{3 \frac{3 \frac{3 \frac{3U_n + 1}{2} + 1}{2} + 1}{2} + 1}{4} = \frac{27U_n + 19}{32} \rightarrow 32U_{n+1} = 27U_n + 19 \rightarrow U_\infty = \frac{19}{5} \\
 (II)^n(PP)^n : U_{n+1} &= \frac{3 \frac{3 \frac{3 \frac{U_n}{2} + 1}{2} + 1}{2} + 1}{4} = \frac{9U_n + 5}{16} \rightarrow 16U_{n+1} = 9U_n + 5 \rightarrow U_\infty = \frac{5}{7}
 \end{aligned}$$

Elles convergent toutes, sachant que l'on a ajouté une itération paire dans 4 cas sur les 6 combinaisons possibles. De manière générale, on a convergence lorsque :

$$AU_{n+1} = BU_n + C \rightarrow U_\infty = \frac{C}{A - B} \text{ si } A > B$$

On en déduit que seul les facteurs de n sont utiles pour la convergence. De ce fait :

$$2^{p+m}U_{n+1} = 3^mU_n + C \rightarrow U_\infty = \frac{C}{2^{p+m} - 3^m} \text{ si } 2^{p+m} > 3^m$$

p représente le nombre d'itérations paires et m celui d'impaires.

La condition suffisante est donc :

$$3^m < 2^{p+m}$$

Soit :

$$\frac{p}{m} > \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 1 \approx 0,5849 \rightarrow \frac{p}{m} \geq 58,5\%$$

$$\text{Ou bien : } \frac{m}{p} < \frac{\ln(2)}{\ln(3) - \ln(2)} \approx 1,7095 \rightarrow \frac{m}{p} \leq 170,9\%$$

On a donc besoin pour une convergence certaine de la suite de Syracuse que le nombre d'itérations paires soit au moins égale à 58,5% du nombre d'itérations impaires.

Par exemple si un vol comporte 100 itérations impaires, il faudra au minimum 59 itérations paires supplémentaires pour que la suite converge, et cela quelle que soit l'ordre des itérations, car :

$$5,1 \cdot 10^{47} = 3^{100} < 2^{159} = 7,3 \cdot 10^{47}$$

On peut aussi écrire pour la durée totale d'un vol notée n :

$$2,709p \approx \frac{\ln(3)}{\ln(3) - \ln(2)}p > n = p + m > \frac{\ln(3)}{\ln(2)}m \approx 1,585m$$

Il étonnant de vérifier qu'il n'est pas nécessaire d'avoir autant voire plus d'itérations paires (décroissantes) que d'itérations impaires (croissantes) pour que la suite converge. C'est la magie et la complexité de la conjecture de Syracuse.

4. Itérations des impaires de la forme $2k+1, 4k+3, 8k+7, 16k+15...$

On remarque que les impaires d'une certaine forme diverge plusieurs fois de suite. Le bon candidat pour cela est un nombre toujours impair rang après rang. Ce nombre ou ces nombres existent-ils ? Si c'est le cas notre conjecture de Syracuse est fausse.

On note préalablement qu'un nombre impair donne un nombre impair si :

$$\begin{aligned} U_n(2k+1) &= 3k+2 = 6k'+5 \text{ avec } k = 2k'+1 > 0 \\ U_n(6k+5) &= 9k+8 = 18k'+17 \text{ avec } k = 2k'+1 > 0 \\ U_n(18k+17) &= 27k+26 = 54k'+53 \text{ avec } k = 2k'+1 > 0 \end{aligned}$$

$$U_n(2 \cdot 3^p k + 2 \cdot 3^p - 1) = 3^{p+1}k + 3^{p+1} - 1 = 3^{p+1}2k' + 2 \cdot 3^{p+1} - 1 \text{ avec } k = 2k' + 1 > 0$$

Où :

$$U_n(2 \cdot 3^p(k+1) - 1) = 3^{p+1}(k+1) - 1 = 2 \cdot 3^{p+1}(k'+1) - 1 \text{ avec } k = 2k' + 1 > 0$$

Soit par décalage :

$$U_n(2 \cdot 3^p k - 1) = 3^{p+1}k - 1 = 2 \cdot 3^{p+1}k' - 1 \text{ avec } k = 2k' > 0$$

On obtient une divergence rang après rang jusqu'à ce que k ne soit plus pair. Alors l'expression globale devient paire et est divisée par deux comme suit :

$$U_n(3^p k - 1) = \frac{3^p k - 1}{2} \text{ avec } k = 2k' + 1 > 0$$

Mais on peut de nouveau avoir une séquence d'étapes impaires, et donc divergentes, si :

$$\frac{3^p k - 1}{2} = 2 \cdot 3^{p'} k'' - 1 \rightarrow U_n(2 \cdot 3^{p'} k'' - 1) = 3^{p'+1} k'' - 1 = 2 \cdot 3^{p'+1} k''' - 1 \text{ avec } k'' = 2k''' > 0$$

Et ainsi de suite... soit p itérations divergentes pour une ou plusieurs convergentes (ici une, car une seule division par 2) puis de nouveau p' itérations divergentes, etc. Ce modèle peut en théorie conduire à une divergence certaine par séquences multiples. Mais les taux de divergences sont-ils à coup sûr plus importants que ceux de convergences ? C'est-à-dire, a-t-on, dans ce modèle, en moyenne une croissance ou une décroissance certaine ? Ce sont des questions dont les réponses indiqueront si une divergence infinie existe ou non.

Voyons une autre approche. Pour le vérifier, on pose :

$$N = 2^n(M+1) - 1 \text{ avec } M \text{ impair} \rightarrow U_n(N) = \left(\frac{3}{2}\right)^n (N+1) - 1 = 3^n(M+1) - 1$$

Et si :

$$U_n(N) = 2^k(K+1) - 1 \text{ avec } K \text{ impair} \rightarrow U_{n+k}(N) = \left(\frac{3}{2}\right)^k (U_n(N)+1) - 1 = 3^k(K+1) - 1$$

Or :

$$K = \frac{3^n}{2^k}(M+1) - 1 \rightarrow U_{n+k}(N) = \left(\frac{3}{2}\right)^k 3^n(M+1) - 1$$

Et si de nouveau :

$$U_{n+k}(N) = 2^p(P+1) - 1 \text{ avec } P \text{ impair} \rightarrow U_{n+k+p}(N) = \left(\frac{3}{2}\right)^p (U_{n+k}(N)+1) - 1 = 3^p(P+1) - 1$$

Or :

$$P = \frac{3^k}{2^p} (K + 1) - 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{3^n}{2^p} (M + 1) - 1 \rightarrow U_{n+k+p}(N) = \left(\frac{3}{2}\right)^{k+p} 3^n (M + 1) - 1$$

...

Et ainsi de suite jusqu'à :

$$\rightarrow U_{\sum_{j=0}^n k_j}(N) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\sum_{j=1}^n k_j} 3^{k_0} (M + 1) - 1$$

Sachant que :

$$M = \frac{N + 1}{2^n} - 1$$

On a finalement :

$$\rightarrow \mathbf{U_{\sum_{j=0}^n k_j}(N) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\sum_{j=0}^n k_j} (N + 1) - 1}$$

On a donc possiblement au moins un nombre entier très grand qui est toujours impair rang après rang et qui ainsi croît sans fin. Cela prouverait que la conjecture de Syracuse est fausse.

Et de quelle forme serait cet entier au départ ? Il suffit donc que :

$$N = \left(\frac{2}{3}\right)^{\sum_{j=0}^{n-1} k_j} 2^{k_n} (K + 1) - 1 \text{ avec } K \text{ impair}$$

Et pour que la division soit entière, il faut que K soit de la forme :

$$K = 3^{\sum_{j=0}^{n-1} k_j} n - 1 \text{ avec } n > 0$$

$$\rightarrow K = 3^{\sum_{j=0}^{n-1} k_j} (n - 1) + 3^{\sum_{j=0}^{n-1} k_j} - 1 \text{ avec } n > 0$$

D'où :

$$\mathbf{N = 2^{\sum_{j=0}^n k_j} n - 1 \stackrel{\text{def}}{=} 2^n (M + 1) - 1}$$

Cela ne parait pas impossible, n'est-ce pas ?

9. Forme allégorique : Sang

Le cœur est indispensable à tout homme pour vivre. Cette formidable pompe organique irrigue le sang dans tous notre corps pour entre autres transporter l'indispensable oxygène à nos muscles via les globules rouges, nos anticorps via les globules blancs, le plasma, les enzymes, etc. Cette énorme quantité de globules circulent un peu partout dans notre corps avec pour toutes, un point de passage commun : le cœur. Le cœur est l'unité et les milliards de globules, tous les entiers.

10. Forme allégorique : Humeur

L'aspect chaotique et imprévisible de la suite peut également prendre sa source dans l'humeur humaine. Un enfant par exemple, passe de la joie à la tristesse en quelques secondes. Un adulte met un peu plus de temps.

7. Outils et autres formes

L'objet de ce chapitre est de bâtir une panoplie d'outils d'aide à la compréhension élargie de cette suite *via*, entre autres, des formes différentes, détournées ou déformées de cette suite de Syracuse. En outre, ce chapitre présente par exemple la forme rétrograde de la suite permettant de remonter la suite « en marche arrière ».

1. Avant-propos

On commence par quelques rappels basiques et essentiels sur les règles de parité, les relations entre les puissances de 2 et 3 et la décomposition de tout entier en puissance de 2. Ces relations sont utiles pour la suite.

1. Règles de parité

En avant-propos, voici un rappel sur la manipulation des nombres pairs et impairs :

Additions et soustractions	Produits	Divisions
<ul style="list-style-type: none"> • $P \pm P = P$ • $P \pm I = I \pm P = I$ • $I \pm I = P$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $P \times P = P$ • $P \times I = I \times P = P$ • $I \times I = I$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $P1 / P2 = \text{indéterminé} = P \text{ ou } I$ <ul style="list-style-type: none"> ○ Avec $P1 \geq P2$ et $P1$ divisible par $P2$ • $P / I = P$ avec $P=2k.I$ • $I / P = \text{impossible dans IN}$ <ul style="list-style-type: none"> ○ Ne donne pas un nombre entier • $I1 / I2 = I$ <ul style="list-style-type: none"> ○ Avec $I1 \geq I2$ et $I1$ divisible par $I2$

Avec $P = \text{nombre Pair}$, et $I = \text{nombre Impair}$.

Pour la conjecture, on a :

Si N est pair : $U_1 = \frac{N}{2}$ soit : $\frac{P}{P} = P \text{ ou } I ?$

Si N est impair : $U_1 = \frac{3N+1}{2}$ soit : $\frac{I \times I + I}{P} = \frac{I+I}{P} = \frac{P}{P} = P \text{ ou } I ?$

Si bien que l'on ne peut pas à l'avance déterminer la parité de $U_{n+1}(N) \dots$

2. Relations combinatoires des nombres entiers

Voici de manière non exhaustive, quelques relations intéressantes des nombres entiers.

Carrés :

$$n = 2k + 1 = (k + 1) + (k) = (k + 1)^2 - k^2$$

$$n = 4k = 2((k + 1) + (k - 1)) = (2k + 1) + (2k - 1) = (k + 1)^2 - (k - 1)^2$$

$$1 + x^k + x^{2k} = 3 \text{ si } k = 3p, \text{ sinon } = 0, \text{ avec } k > 0 \rightarrow x = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Puissances de 2 :

$$n^3 = a^2 - b^2$$

$$2^{2n} = 3k + 1$$

$$2^{2n+1} = 3k + 2$$

$$2^{n+1} - 1 = S_n = \sum_{j=0}^{+\infty} 2^j$$

$$2^n = S_{n-1} + 1$$

$$2^{2n} - 1 = \prod_{j=0}^{n-1} (2^{2^j} + 1) = 3 \prod_{j=1}^{n-1} (2^{2^j} + 1)$$

$$2^k = p_j \text{ mod } n \text{ si } k = a_i \text{ mod } q \text{ (mêmes relations pour } 3^k)$$

Nombres premiers :

$$p \text{ premier si : } p^2 = 24k + 1$$

$$p \text{ premier si : } (p - 1)! - kp = -1$$

$$2^n - 1 \text{ est premier que si } n \text{ est premier}$$

Divisibilité :

$$a^n - b^n \text{ est divisible par } a - b \text{ et divisible par } a + b \text{ si } n \text{ est pair}$$

$$a^n - 1 \text{ est divisible par } a - 1$$

$$a^n - 1 \text{ est divisible par } a^2 - 1 \text{ si } n \text{ pair}$$

$$a^n + b^n \text{ n impair} = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - a b^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n + 1 \text{ n impair} = (a - 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots - a + 1)$$

$$a^{2n+1} + 1 = (a + 1)(a^{2n} - a^{2n-1} + \dots - a + 1)$$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$$

$$m = a^2 + b^2, n = c^2 + d^2 \text{ alors } m.n = u^2 + v^2$$

4k+3 jamais somme de 2 carrés :

$$n = a^2 + b^2 \neq 3 \text{ mod } 4$$

Soit : tous les impairs somme de 2 carrés sont tous en 4n+1

~

On pose l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} 2^a 3^b &= 3^b 2^a \\ 2^a 3^b - 1 &= 3^b 2^a - 1 \\ 2^a(2^c + 1) - 1 &= 3^b(3^d + 1) - 1 \\ 2^{a+c} + (2^a - 1) &= 3^{b+d} + (3^d - 1) \\ 2^{a+c} + 3^e &= 3^{b+d} + 2^f \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} 3^b &= 2^c + 1 \\ 2^a &= 3^d + 1 \\ 3^e &= 2^a - 1 \\ 2^f &= 3^b - 1 \\ \rightarrow 3^e &= 3^d \text{ et } 2^f = 2^c \rightarrow e = d \text{ et } f = c \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} 2^{a+c} + 3^d &= 3^{b+d} + 2^c \\ 2^{a+c} - 3^{b+d} &= 2^c - 3^d \\ \text{avec } \begin{cases} 0 \neq a > d, \text{ et } a \text{ pair} \\ 0 \neq b < c, \text{ et } c \text{ impair} \end{cases} \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} 2^c(2^a - 1) &= 3^d(3^b - 1) \\ 2^c 3^d &= (2^a - 1)(3^b - 1) \\ 2^a + 3^b &= 2^a 3^b - 2^c 3^d + 1 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} 2^a 3^b &= (2^c + 1)(3^d + 1) \\ 2^c + 3^d &= 2^a 3^b - 2^c 3^d - 1 \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} 2^a - 2^c + 3^b - 3^d &= 2 \\ 2^a + 2^c + 3^b + 3^d &= 2(2^a 3^b - 2^c 3^d) \end{aligned}$$

3. Relation entre puissances de 2 et 3

Pour simplifier et comprendre des résultats plus loin, on doit préalablement se rappeler les relations simples entre les puissances de 2 et 3. En posant :

$$b = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$$

On a :

$$2^a = 3^{a \frac{\ln(2)}{\ln(3)}} = 3^{\frac{a}{b}}$$

$$3^a = 2^{a \frac{\ln(3)}{\ln(2)}} = 2^{ab}$$

Alors :

$$\begin{aligned} 3^a 2^a &= 3^{a \left(\frac{\ln(3) + \ln(2)}{\ln(3)} \right)} = 2^{a \left(\frac{\ln(3) + \ln(2)}{\ln(2)} \right)} = 3^{a \left(\frac{1}{b} + 1 \right)} = 2^{a(b+1)} \\ \left(\frac{3}{2} \right)^a &= 3^{a \left(\frac{\ln(3) - \ln(2)}{\ln(3)} \right)} = 2^{a \left(\frac{\ln(3) - \ln(2)}{\ln(2)} \right)} = 3^{a \left(1 - \frac{1}{b} \right)} = 2^{a(b-1)} \\ \left(\frac{2}{3} \right)^a &= 3^{a \left(\frac{-\ln(3) + \ln(2)}{\ln(3)} \right)} = 2^{a \left(\frac{-\ln(3) + \ln(2)}{\ln(2)} \right)} = 3^{a \left(\frac{1}{b} - 1 \right)} = 2^{a(1-b)} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} 2^a - 3^a &= 3^{\frac{a}{b}} - 3^a = 3^a \left(3^{\frac{1}{b} - 1} - 1 \right) \\ 3^a - 2^a &= 2^{ab} - 2^a = 2^a (2^b - 1) \end{aligned}$$

Ces équations serviront pour factoriser d'autres équations plus tard.

4. Décomposition en puissance de 2

Tout nombre entier peut se décomposer en puissance de 2. Ainsi, on pose :

$$U_n(N) = a_0 2^0 + a_1 2^1 + a_2 2^2 \dots = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j 2^j) \text{ avec } a_j = 0 \text{ ou } 1$$

Par exemple :

$$253 = 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$$

On a donc :

$$U_{n+1}(N) = \frac{U_n(N)}{2} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{j-1} \text{ si } U_n(N) \text{ pair et donc } a_0 = 0$$

$$U_{n+1}(N) = \frac{3U_n(N) + 1}{2} = 2 + 3 \sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{j-1} \text{ si } U_n(N) \text{ impair et donc } a_0 = 1$$

On s'intéresse au cas le plus délicat pour prouver la décroissance de la suite dans tous les cas. Ce cas est lorsque : $U_n(N)$ ou $N=4k+3$. Ainsi, on a donc :

$$U_n(N) = 4k + 3 = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j 2^j) \text{ avec } a_j = 0 \text{ ou } 1 \text{ et } k \geq 0$$

On analyse les valeurs des sommes des puissances de 2 pour les nombres de la forme $4k+3$ dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31		
Puissance de 2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2		
	2		4		4		4		4		4		4		4		4		4		4		4		4		4		4		4		4	
	3			8		8		8		8		8		8		8		8		8		8		8		8		8		8		8		8
	4				16		16		16		16		16		16		16		16		16		16		16		16		16		16		16	
	5								32		32		32		32		32		32		32		32		32		32		32		32		32	
	6																	64		64		64		64		64		64		64		64		64
4k+3	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79	83	87	91	95	99	103	107	111	115	119	123	127		

On en déduit les valeurs suivantes des a_j en observant les fréquences d'apparition des puissances de 2 par ligne du tableau ci-dessus :

$$a_0 = 1 \forall k \geq 0$$

$$a_1 = 1 \forall k \geq 0$$

$$a_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 2p + 1 \text{ (impair)} \forall p \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$a_3 = \begin{cases} 1 & \text{si } 4p + 2 \leq k \leq 4p + 3 \forall p \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$a_4 = \begin{cases} 1 & \text{si } 8p + 4 \leq k \leq 8p + 7 \forall p \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$a_5 = \begin{cases} 1 & \text{si } 16p + 8 \leq k \leq 16p + 15 \forall p \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

...

Soit dans le cas général :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{a_0 = a_1 = 1 \forall k \geq 0} \\
 \text{pour } j \geq 2 : \mathbf{a_j} &= \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } 2^{j-2}(2p+1) \leq k \leq 2^{j-1}(p+1) - 1 \forall p \geq 0 \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 U_{n+1}(N) &= \frac{3U_n(N) + 1}{2} = 6k + 5 = 5 + 3 \sum_{j=2}^{\infty} a_j 2^{j-1} \text{ si } U_n(N) = 4k + 3 \forall k \geq 0 \\
 U_{n+2}(N) &= \frac{3U_{n+1}(N) + 1}{2} = 9k + 8 = 8 + 9 \sum_{j=2}^{\infty} a_j 2^{j-1} \text{ si } U_n(N) = 4k + 3 \forall k \geq 0
 \end{aligned}$$

Le rang suivant est différent selon que la valeur au rang $n+2$ est paire ou impaire.

5. Décomposition en puissance de 10

On sait qu'un nombre entier peut se décomposer en sommes de puissances de 10. On sait également que le logarithme en base 10 donne le nombre de chiffres que compose un nombre entier. De ce fait, on pose :

$$N = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\ln(N)}{\ln(10)} \rfloor} a_k \cdot 10^k \quad \forall N > 0 \text{ et } 0 \leq a_k \leq 9$$

Par exemple :

$$N = 537 = 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \text{ et } \frac{\ln(213)}{\ln(10)} + 1 = 3,73 \rightarrow \text{nombre à 3 chiffres}$$

On sait aussi qu'un nombre entier multiplié par 5 se termine toujours par 0 ou 5. Soit :

$$5N = \begin{cases} \text{xxxx}0 & \text{si } N \text{ pair} \\ \text{xxxx}5 & \text{si } N \text{ impair} \end{cases}$$

D'où :

$$5N = 10^{\frac{\ln(5N)}{\ln(10)}} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\ln(N)}{\ln(10)} \rfloor} b_k \cdot 10^k \rightarrow b_0 = \begin{cases} 5 & \text{si } N \text{ pair} \\ 0 & \text{si } N \text{ impair} \end{cases} \rightarrow 5a_0 = \begin{cases} x5 & \text{si } N \text{ pair} \\ x0 & \text{si } N \text{ impair} \end{cases}$$

$$5a_0 = 10c_1 + c_0, \text{ or } c_0 = b_0 \rightarrow 5a_0 = 10c_1 + b_0 \rightarrow a_0 = 2c_1 + \frac{b_0}{5}$$

Par exemple :

$$N = 537 \rightarrow 5N = 2685 \rightarrow b_0 = 5 \rightarrow 5a_0 = 35$$

Si on applique cette décomposition en base 10 à la suite de Syracuse, il vient à partir du tableau ci-dessous :

Si $U_n(N)$ pair						Soit $a_0(n)$ pair	
Si $a_k(n)$ pair =	8	6	4	2	0		
$\frac{a_k(n)}{2} =$	4	3	2	1	0		
Alors $a_k(n+1) =$	4	3	2	1	0	$a_k(n+1) = \frac{a_k(n)}{2}$	
Et si $a_k(n)$ impair =	9	7	5	3	1		
$\frac{a_k(n)}{2} =$	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5		
Alors $a_k(n+1) =$	4	3	2	1	0	$a_k(n+1) = \frac{a_k(n) - 1}{2}$	
Et $a_{k-1}(n+1) =$	+5	+5	+5	+5	+5	$a_{k-1}(n+1) = a_{k-1}(n+1) + 5$	

Si $U_n(N)$ impair						Soit $a_0(n)$ impair
Et si $a_k(n)$ pair = $\frac{3a_k(n) + 1}{2} =$	8	6	4	2	0	
	12,5	9,5	6,5	3,5	0,5	
Alors $a_k(n + 1) =$	2	9	6	3	0	$a_k(n + 1) = \frac{3a_k(n)}{2}$ sauf pour 8 il faut retrancher 10
Et $a_{k-1}(n + 1) =$	+5	+5	+5	+5	+5	$a_{k-1}(n + 1) = a_{k-1}(n + 1) + 5$
Et $a_{k+1}(n + 1) =$	+1	0	0	0	0	$a_{k+1}(n + 1) = a_{k+1}(n + 1) + 1$ pour 8 uniquement
Et si $a_k(n)$ impair = $\frac{3a_k(n) + 1}{2} =$	9	7	5	3	1	
	14	11	8	5	2	
Alors $a_k(n + 1) =$	4	1	8	5	2	$a_k(n + 1) = \frac{3a_k(n) + 1}{2}$ sauf pour 7 et 9 il faut retrancher 10
Et $a_{k+1}(n + 1) =$	+1	+1	0	0	0	$a_{k+1}(n + 1) = a_{k+1}(n + 1) + 1$ pour 7 et 9 uniquement

L'équation générale suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{Si } U_n(N) &= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{\ln(U_n(N))}{\ln(10)} \right\rfloor} a_k(n) \cdot 10^k \quad \forall N > 0 \text{ et } 0 \leq a_k(n) \leq 9 \\
 \text{Alors } U_{n+1}(N) &= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{\ln(U_{n+1}(N))}{\ln(10)} \right\rfloor} a_k(n+1) \cdot 10^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{\ln(U_n(N))}{\ln(10)} \right\rfloor + 1} 10^k \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2} a_0(n)\right) \left(\frac{a_k(n)}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} a_k(n)\right) + \frac{a_k(n) - 1}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} a_k(n)\right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 5 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} a_{k+1}(n)\right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} a_0(n)\right) \left(\frac{3a_k(n)}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} a_k(n)\right) + 5 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} a_{k+1}(n)\right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{3a_k(n) + 1}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} a_k(n)\right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2} a_{k-1}(n)\right) - 10 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} a_k(n)\right) \right) (a_k(n) - 1)(a_k(n) - 3)(a_k(n) - 5) \frac{5}{192} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2} a_{k-1}(n)\right) - 10 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} a_k(n)\right) \right) (a_k(n) - 2)(a_k(n) - 4)(a_k(n) - 6) \frac{a_k(n)}{384} \right) \right)
 \end{aligned}$$

On a utilisé les cosinus et sinus au carré pour filtrer les parités.

6. Décomposition en produit de facteurs premiers

On pose :

$$N = \prod_{j=1}^k a_j^{p_j} \text{ avec } k = \text{nombre de facteurs premier}$$

Par exemple :

$$N = 22 = 2.11$$

$$N = 27 = 3^3$$

$$N = 1260 = 2^2.3^3.5.7$$

Cette décomposition peut éventuellement simplifier des calculs ou faire ressortir des propriétés nouvelles de la suite de Syracuse.

7. Horloge ou roue à modulus

Un nombre est modulo p s'il est en est multiple avec un reste ou non inférieur à p . en clair :

$$a = kp + r \text{ signifie que } a \text{ est modulo } p \text{ (} k \text{ fois) avec un reste } 0 \leq r < p$$

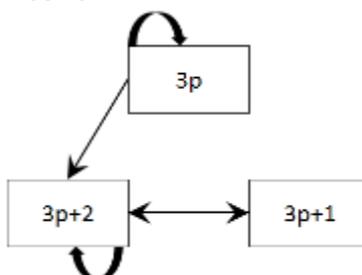
Concernant la suite de Syracuse, on s'intéresse au modulo des nombres qui la compose dans un vol et leurs trajectoires. C'est-à-dire par exemple à partir d'une valeur de départ N modulo p , vers quelle(s) valeur(s) suivante(s) on se dirige toujours modulo p (avec un reste identique ou différent) ? Les réponses à cette question, issue de l'analyse combinatoire, donnent des indications sur les formes de parcours des vols. Ces formes, étant ici analysées via leurs modules, ont une représentation cyclique. En effet, prenons par exemple un modulo 5, on a 5 cas : $5p$, $5p+1$, $5p+2$, $5p+3$ et $5p+4$. Puisque le cas suivant est $5p+5=5(p+1)=5p'$ qui est de nouveau de la forme $5p$.

Sur ce principe on a tracé les horloges de modulus suivants de la suite de Syracuse. Le terme horloge est issue du fait qu'un cadran d'horloge est une représentation des heures modulo 12.

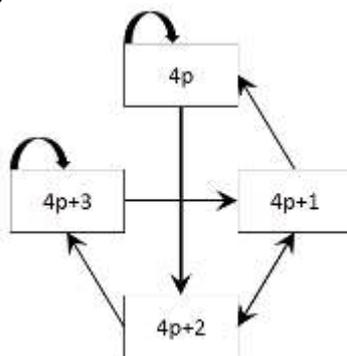
Modulo 2 : symétrie parfaite



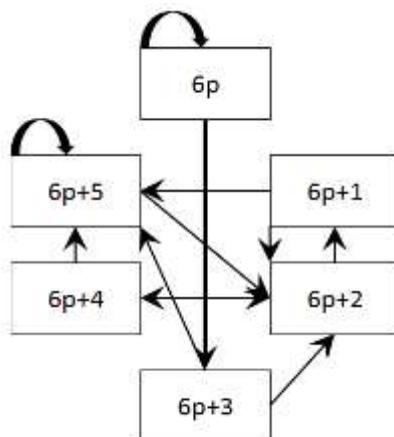
Modulo 3 : les complications commencent



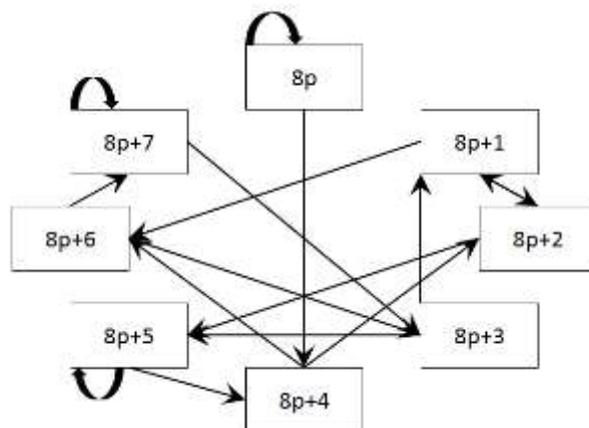
Modulo 4 : la référence pour les analyses futures



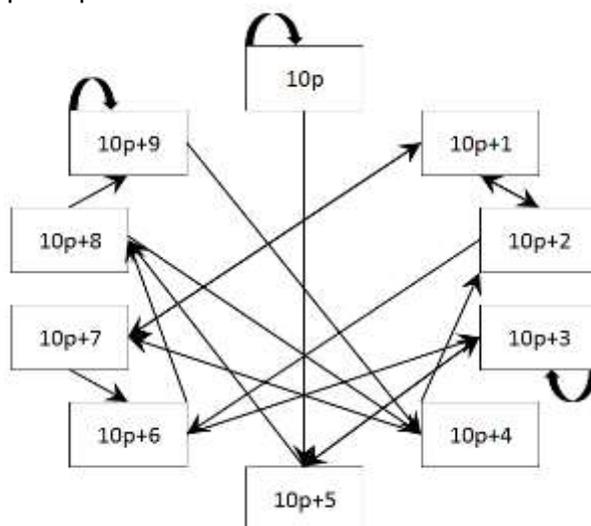
Modulo 6 : l'horloge s'emballe



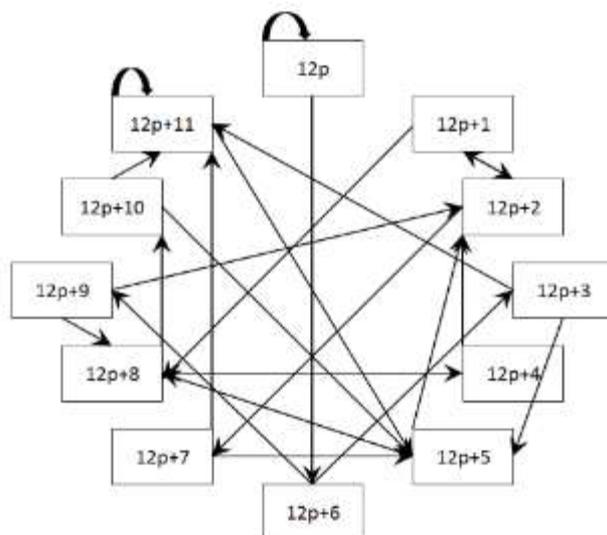
Modulo 8 : quelques symétries subsistent



Modulo 10 : on s'y attendait presque



Modulo 12 : vous avez l'heure ?



On l'aura compris, au-delà de 6, les modulus appliqués à la suite de Syracuse sont très vite complexes à analyser. Les relations modulaires d'un rang à l'autre d'un vol sont à la fois multiples et sans symétries ou logiques apparentes. Néanmoins, l'horloge modulo 4 sera plus loin dans cet ouvrage largement exploité et fort utile à la compréhension, par exemple dans le chapitre consacré aux trajectoires.

8. Modulo 10 ou l'analyse des unités

Quel est le successeur selon l'unité et la dizaine de N ?

Il existe 10 cas pour l'unité (de 0 à 9). Et il existe 2 cas pour les dizaines (paires ou impaires) car une dizaine paire ou nulle ne change pas l'unité si le nombre est divisé par 2. En revanche si une dizaine est impaire, l'unité change si le nombre est divisé par 2. On a donc $10 \times 2 = 20$ cas à traiter :

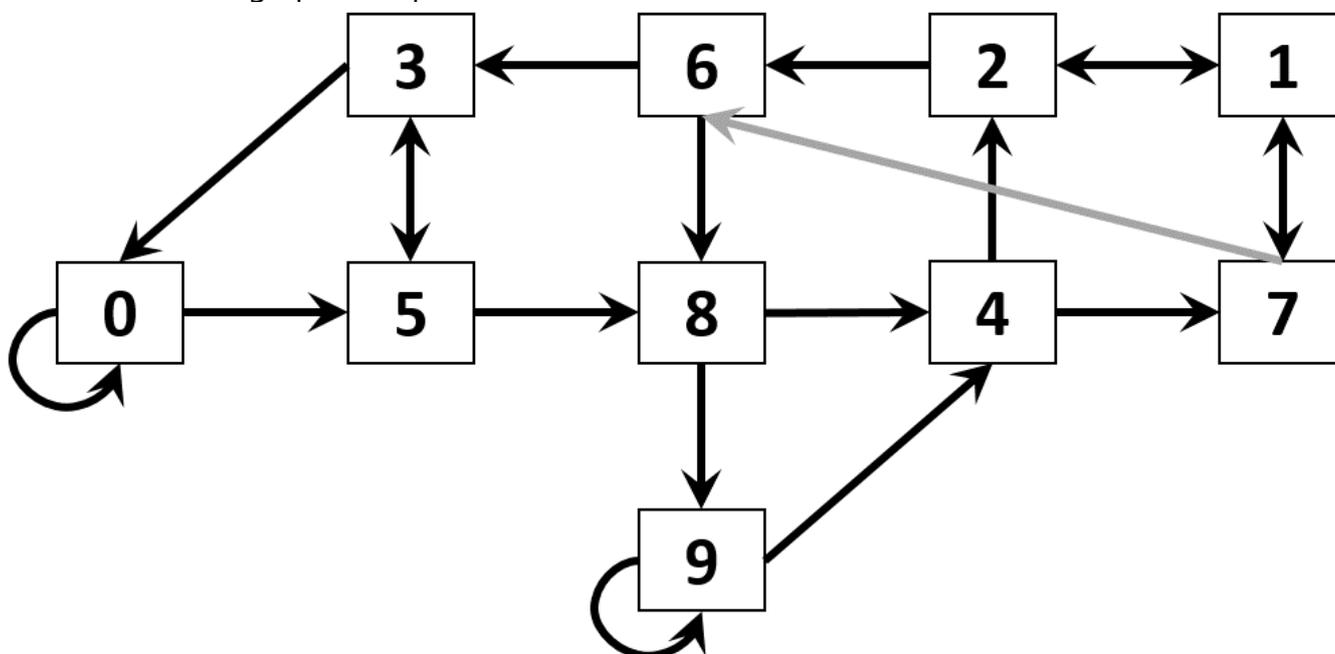
- **Unité 0 et dizaine paire ou nulle** : $U_0(N) = N = xx00 : \text{pair} \rightarrow U_1(N) = xxx0 : \text{pair}$
- **Unité 0 et dizaine impaire** : $U_0(N) = N = xx10 : \text{pair} \rightarrow U_1(N) = xxx5 : \text{impair}$
- **Unité 1 et dizaine paire ou nulle** : $U_0(N) = N = xx01 : \text{impair} \rightarrow U_1(N) = \frac{3 \cdot xx01 + 1}{2} = \frac{xx03 + 1}{2} = \frac{xx04}{2} = xxx2 : \text{pair}$
- **Unité 1 et dizaine impaire** : $U_0(N) = N = xx11 : \text{impair} \rightarrow U_1(N) = \frac{3 \cdot xx11 + 1}{2} = \frac{xx33 + 1}{2} = \frac{xx34}{2} = xxx7 : \text{impair}$
- **Unité 2 et dizaine paire ou nulle** : $U_0(N) = N = xx02 : \text{pair} \rightarrow U_1(N) = \frac{xx02}{2} = xxx1 : \text{impair}$
- **Unité 2 et dizaine impaire** : $U_0(N) = N = xx12 : \text{pair} \rightarrow U_1(N) = \frac{xx12}{2} = xxx6 : \text{pair}$
- **Unité 3 et dizaine paire ou nulle** : $U_0(N) = N = xx03 : \text{impair} \rightarrow U_1(N) = \frac{3 \cdot xx03 + 1}{2} = \frac{xx09 + 1}{2} = \frac{xx10}{2} = xxx5 : \text{impair}$
- **Unité 3 et dizaine impaire** : $U_0(N) = N = xx13 : \text{impair} \rightarrow U_1(N) = \frac{3 \cdot xx13 + 1}{2} = \frac{xx39 + 1}{2} = \frac{xx40}{2} = xxx0 : \text{pair}$
- **Unité 4 et dizaine paire ou nulle** : $U_0(N) = N = xx04 : \text{pair} \rightarrow U_1(N) = \frac{xx04}{2} = xxx2 : \text{pair}$
- **Unité 4 et dizaine impaire** : $U_0(N) = N = xx14 : \text{pair} \rightarrow U_1(N) = \frac{xx14}{2} = xxx7 : \text{impair}$
- **Unité 5 et dizaine paire ou nulle** : $U_0(N) = N = xx05 : \text{impair} \rightarrow U_1(N) = \frac{3 \cdot xx05 + 1}{2} = \frac{xx15 + 1}{2} = \frac{xx16}{2} = xxx8 : \text{pair}$
- **Unité 5 et dizaine impaire** : $U_0(N) = N = xx15 : \text{impair} \rightarrow U_1(N) = \frac{3 \cdot xx15 + 1}{2} = \frac{xx45 + 1}{2} = \frac{xx46}{2} = xxx3 : \text{impair}$
- **Unité 6 et dizaine paire ou nulle** : $U_0(N) = N = xx06 : \text{pair} \rightarrow U_1(N) = \frac{xx06}{2} = xxx3 : \text{impair}$
- **Unité 6 et dizaine impaire** : $U_0(N) = N = xx16 : \text{pair} \rightarrow U_1(N) = \frac{xx16}{2} = xxx8 : \text{pair}$
- **Unité 7 et dizaine paire ou nulle** : $U_0(N) = N = xx07 : \text{impair} \rightarrow U_1(N) = \frac{3 \cdot xx07 + 1}{2} = \frac{xx21 + 1}{2} = \frac{xx22}{2} = xxx1 : \text{impair}$
- **Unité 7 et dizaine impaire** : $U_0(N) = N = xx17 : \text{impair} \rightarrow U_1(N) = \frac{3 \cdot xx17 + 1}{2} = \frac{xx51 + 1}{2} = \frac{xx52}{2} = xxx6 : \text{pair}$
- **Unité 8 et dizaine paire ou nulle** : $U_0(N) = N = xx08 : \text{pair} \rightarrow U_1(N) = \frac{xx08}{2} = xxx4 : \text{pair}$
- **Unité 8 et dizaine impaire** : $U_0(N) = N = xx18 : \text{pair} \rightarrow U_1(N) = \frac{xx18}{2} = xxx9 : \text{impair}$
- **Unité 9 et dizaine paire ou nulle** : $U_0(N) = N = xx09 : \text{impair} \rightarrow U_1(N) = \frac{3 \cdot xx09 + 1}{2} = \frac{xx27 + 1}{2} = \frac{xx28}{2} = xxx4 : \text{pair}$
- **Unité 9 et dizaine impaire** : $U_0(N) = N = xx19 : \text{impair} \rightarrow U_1(N) = \frac{3 \cdot xx19 + 1}{2} = \frac{xx57 + 1}{2} = \frac{xx58}{2} = xxx9 : \text{impair}$

On a donc les parcours suivants selon l'unité de N :

	Unité									
	0	5	3	8	9	4	2	7	1	6
Dizaine paire	0	8	5	4	4	2	1	1	2	3
Dizaine impaire	5	3	0	9	9	7	6	6	7	8

On note que chaque unité paire ou impaire engendre au rang suivant un nombre pair ou impair. Soit une chance sur deux dans tous les cas. La répartition est uniforme.

Soit sous forme de graphe, les parcours suivants :



Difficile à cette étape d'en tirer la moindre conclusion. En effet, aucune unité est isolée, centrale ou dominante vis-à-vis des autres.

En regardant de plus près, on distingue quelques parcours de vols intéressants. Pour cela, on s'intéresse aux parcours de cycles d'unités d'une séquence ou morceau de vol avec la même parité. En effet, grâce à notre étude ci-dessus on sait parfaitement la valeur de l'unité du nombre et donc de sa parité. Il suffit donc de regarder dans le graphe ci-dessus les parcours (en suivant les flèches) conservant une même parité. On trouve ainsi aisément toutes les séquences de vol :

- Toujours impaires si l'unité est successivement :
 - Toujours 9,
 - 3 (ou 5) puis 5 (ou 3) puis de nouveau 3 (ou 5), etc.
 - 1 (ou 7) puis 7 (ou 1) puis de nouveau 1 (ou 7), etc.
- Toujours paires si l'unité est successivement :

- Toujours 0,
- 8 (ou 4 ou 2 ou 6) puis 4 (ou 2 ou 6 ou 8) puis 2 (ou 6 ou 8 ou 4) puis 6 (ou 8 ou 4 ou 2) et de nouveau 8 (ou 4 ou 2 ou 6), etc.

Il existe donc 3 cycles impairs et 2 cycles pairs. Ces cycles sont possiblement infinis. En trouver un suffirait à prouver que la conjecture de Syracuse est fautive. Concernant les 2 cycles pairs, la suite étant décroissante dans le cas de nombres pairs rang après rang, ils ne sont donc jamais infinis. Concernant les 3 cycles impairs, la suite étant dans ce cas croissante, il est possible qu'au moins un nombre ait un vol infini en restant dans l'un de ses 3 cycles impairs. On est donc passé de 5 cas possibles à 3 pour prouver...que la conjecture de Syracuse n'est pas forcément vraie. C'est mathématiquement possible malgré l'absence de contre-exemple connu.

Ainsi, pour trouver un contre-exemple il faut trouver un nombre entier qui vérifie au moins l'une des 3 propositions suivantes :

- x est tel que $\frac{3x+1}{2} = \text{toujours une unité de 9 rang après rang}$;
- x est tel que $\frac{3x+1}{2} = \text{successivement une unité de 3 puis 5 rang après rang}$;
- x est tel que $\frac{3x+1}{2} = \text{successivement une unité de 1 puis 7 rang après rang}$.

Par exemple 159 débute par 5 itérations impaires avec une unité de 9 :

$$N=159 > 239 > 359 > 539 > 809 > 1214 \dots > 1$$

Par exemple 63 débute par 6 itérations impaires avec une unité alternativement de 3 puis 5 :

$$N=63 > 95 > 143 > 215 > 323 > 485 > 728 \dots > 1$$

Par exemple 31 débute par 5 itérations impaires avec une unité alternativement de 1 puis 7 :

$$N=31 > 47 > 71 > 107 > 161 > 242 \dots > 1$$

Bon courage.

9. Ajout dans la suite

Et si notre suite de Syracuse était incomplète ? On serait face à une seule partie de la suite. Et l'autre partie nous révélerait enfin son mystère et ses secrets. Essayons d'élargir notre suite comme suit :

$$U_{n+1}(N) = at + b = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} = at_p + b \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(N) + 1}{2} = at_l + b \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} t_p = \frac{U_n(N)}{2a} - \frac{b}{a} \\ t_l = \frac{3U_n(N) + 1}{2a} - \frac{b}{a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{2U_n(N) + 1}{2(t_l - t_p)} \\ b = \frac{U_n(N)t_l - (3U_n(N) + 1)t_p}{2(t_l - t_p)} \end{cases}$$

D'où :

$$U_{n+1}(N) = \frac{(2U_n(N) + 1)t + U_n(N)(t_l - 3t_p) - t_p}{2(t_l - t_p)} \text{ avec } \begin{cases} t = t_p \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ t = t_l \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \\ t_l \neq t_p \end{cases}$$

Soit :

$$U_{n+1}(N) = \frac{2U_n(N) + 1}{2} \left(\frac{t - t_p}{t_l - t_p} \right) + \frac{U_n(N)}{2} \text{ avec } \begin{cases} t = t_p \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ t = t_l \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \\ t_l \neq t_p \end{cases}$$

On peut également simplement trouver :

$$U_{n+1}(N) = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} (t - t_p + 1) \text{ avec } t = t_p \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{1}{2} (t - t_l + 3U_n(N) + 1) \text{ avec } t = t_l \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

Et cela aussi :

$$U_{n+1}(N) = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{4} \left(\frac{t}{t_p} + 1 \right) \text{ avec } t = t_p \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t_l} + 3U_n(N) \right) \text{ avec } t = t_l \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

Et on retrouve la même relation si avec ces deux équations on choisit :

$$t_l = t_p = 1 \rightarrow U_{n+1}(N) = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} \left(\frac{t+1}{2} \right) \text{ ou } \frac{U_n(N)}{2} t \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(N) + t}{2} \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases} \text{ et } t = 1$$

Mais ces deux dernières relations ne sont pas utiles car dépendante de la parité de la valeur de la suite.

On choisit :

$$t_p = 0 \text{ et } t_l = 1 \rightarrow U_{n+1}(N) = \frac{2U_n(N) + 1}{2} t + \frac{U_n(N)}{2} \text{ avec } \begin{cases} t = 0 \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ t = 1 \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

En utilisant la trigonométrie on retrouve sans mal :

$$U_{n+1}(N) = \frac{1}{2} \left((2U_n(N) + 1) \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} U_n(N) \right) + U_n(N) \right)$$

Ces variations de la suite ne permettent pas d'observer des nouveautés. Néanmoins, il en existe une infinité. Peut-être alors, existe-t-il en une qui révèle sa singularité. Une idée ?

10. Crible géométrique de Matiassevitch

Le crible géométrique de Matiassevitch, du nom de son inventeur, permet entre autres de repérer les nombres premiers en traçant des multiplications à l'aide d'une simple règle. On peut donc également l'utiliser pour suivre graphiquement un vol de la suite de Syracuse. En effet, d'un rang à un autre on effectue une simple multiplication par $\frac{1}{2}$ dans le cas pair et par $\frac{3}{2}$ dans le cas impair avec une addition d' $\frac{1}{2}$.

Tout d'abord voici le crible décrit tel qu'il a été créé.

Pour la multiplication

On pose :

$$y(x) = ax + b \text{ avec le point } y(n) = y(-n) = n^2$$

Soit écrit autrement : $m^2an + b = n^2$ et $-am + b = m^2$

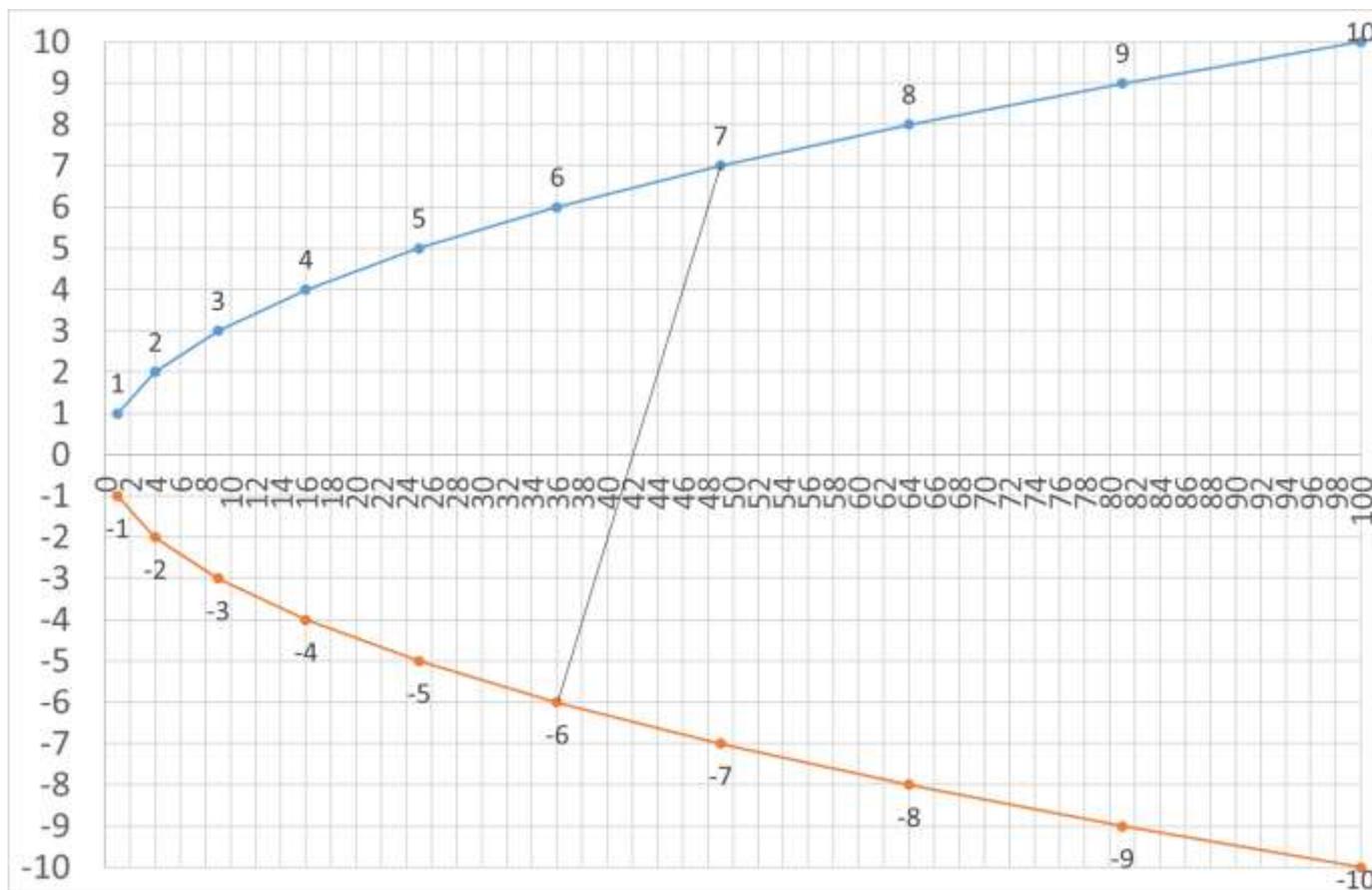
$$\text{Par addition : } a = n - m \text{ et } b = nm$$

$$\rightarrow y(x) = (n - m)x + nm$$

$$\text{Et en particulier si } x = 0 \rightarrow y(0) = nm$$

On a donc une droite qui coupe l'axe des abscisses à la valeur du produit de ses ordonnées.

Voici le graphique ou l'abaque qui permet de faire des multiplications en traçant de simples droites. On a tracé par exemple 7×6 qui donne bien sur l'axe des abscisses 42 :



L'intérêt de cet astucieux crible réside dans le fait que si on trace toutes les droites de toutes les multiplications entières, les seules valeurs de l'axe des abscisses, sans aucune droites qui les traversent, sont les nombres premiers puisque ces derniers ne sont divisibles que par 1 et eux même.

Pour l'addition

Sur le même principe, on trace un abaque de l'addition via des droites. Pour cela on pose :

$$y(x) = ax + b \text{ avec } y(C) = y(-C) = 2n \text{ soit : } aC + b = 2n \text{ et } -aC + b = 2m$$

$$\rightarrow a = \frac{n-m}{C} \text{ et } b = n+m$$

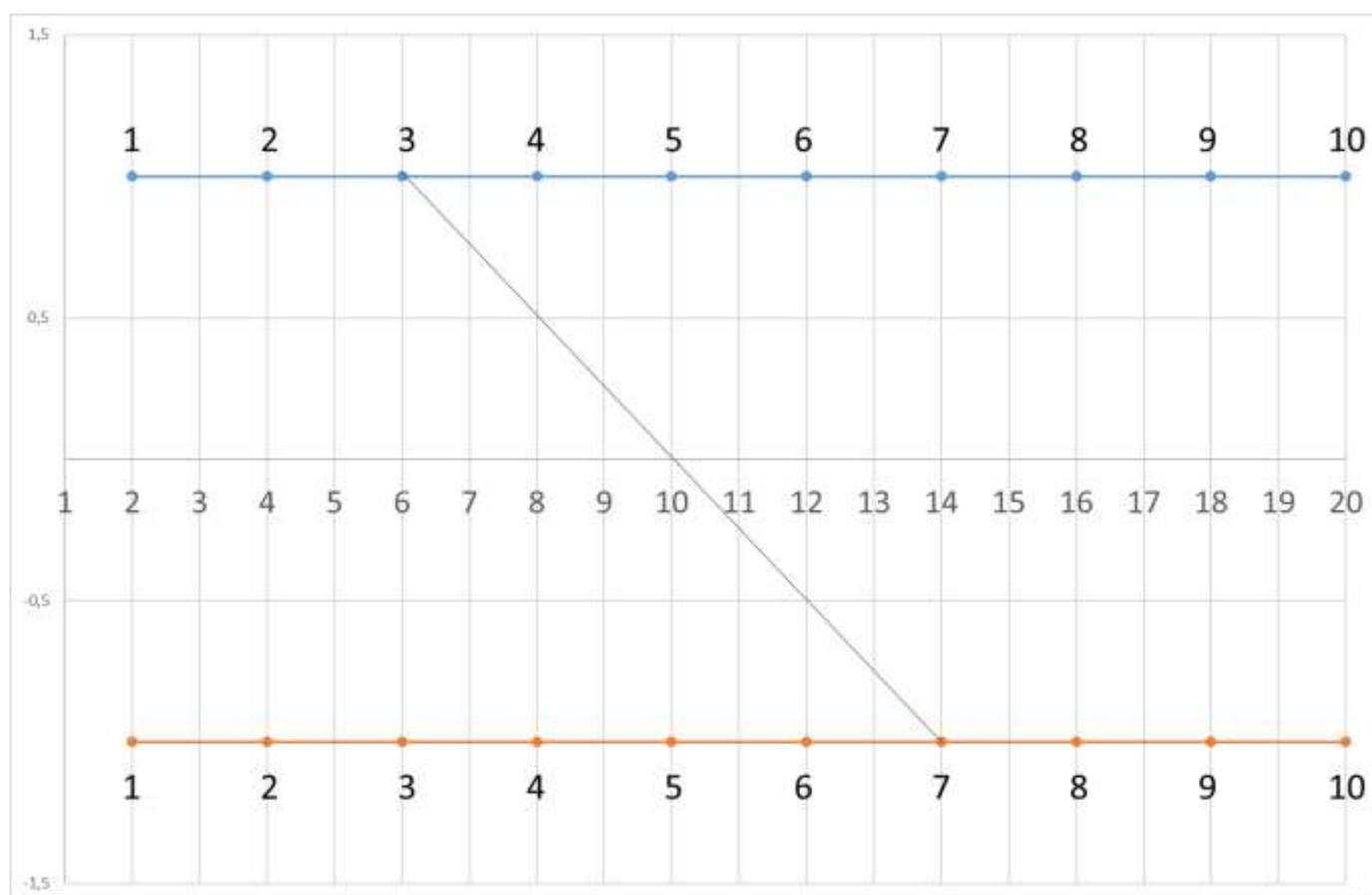
C est une constante quelconque, on choisit $C = 1$

$$\rightarrow y(x) = (n-m)x + (n+m)$$

Et en particulier si $x = 0 \rightarrow y(0) = n+m$

On a donc une droite qui coupe l'axe des abscisses à la valeur de la somme de ses ordonnées.

Voici le graphique ou l'abaque qui permet de faire des additions en traçant de simples droites. On a tracé par exemple $3+7$ qui donne bien sur l'axe des abscisses 10 :



Cet abaque est très simple à reproduire sur une règle en carton pour apprendre et comprendre très jeune le principe d'une addition de quantité.

Dans le cas général

Voyons maintenant l'ensemble des possibilités que permet ce type de construction. Pour cela on pose :

$$y(x) = ax + b \text{ avec } f(n) = f(-n) \text{ soit : } f(n) = an + b \text{ et } f(-m) = -am + b$$

$$\rightarrow a = \frac{f(n) - f(-m)}{n + m} \text{ et } b = \frac{mf(n) + nf(-m)}{n + m}$$

$$\rightarrow y(x) = \frac{1}{n + m} \left((f(n) - f(-m))x + mf(n) + nf(-m) \right)$$

$$\text{Et en particulier si } x = 0 \rightarrow y(0) = \frac{mf(n) + nf(-m)}{n + m}$$

On peut donc avec ce crible tracer avec des droites des fonctions.

Appliqué à la conjecture de Syracuse

On pose :

$$f(x) = cx^2 + dx + e$$

$$\text{Avec } y(x) = ax + b \text{ on a : } an + b = cn^2 + dn + e \text{ et } -am + b = cm^2 - dm + e$$

$$\rightarrow a = c(n - m) + d \text{ et } b = cnm + e$$

$$\rightarrow y(x) = c(n - m)x + cnm + e$$

$$\text{Et en particulier si } x = 0 \rightarrow y(0) = cnm + e \quad \forall d$$

Dans le cas pair, il suffit de choisir :

$$c = \frac{1}{2} \text{ et } e = 0 \text{ on a ainsi si } m = 1 : y(0) = \frac{n}{2}$$

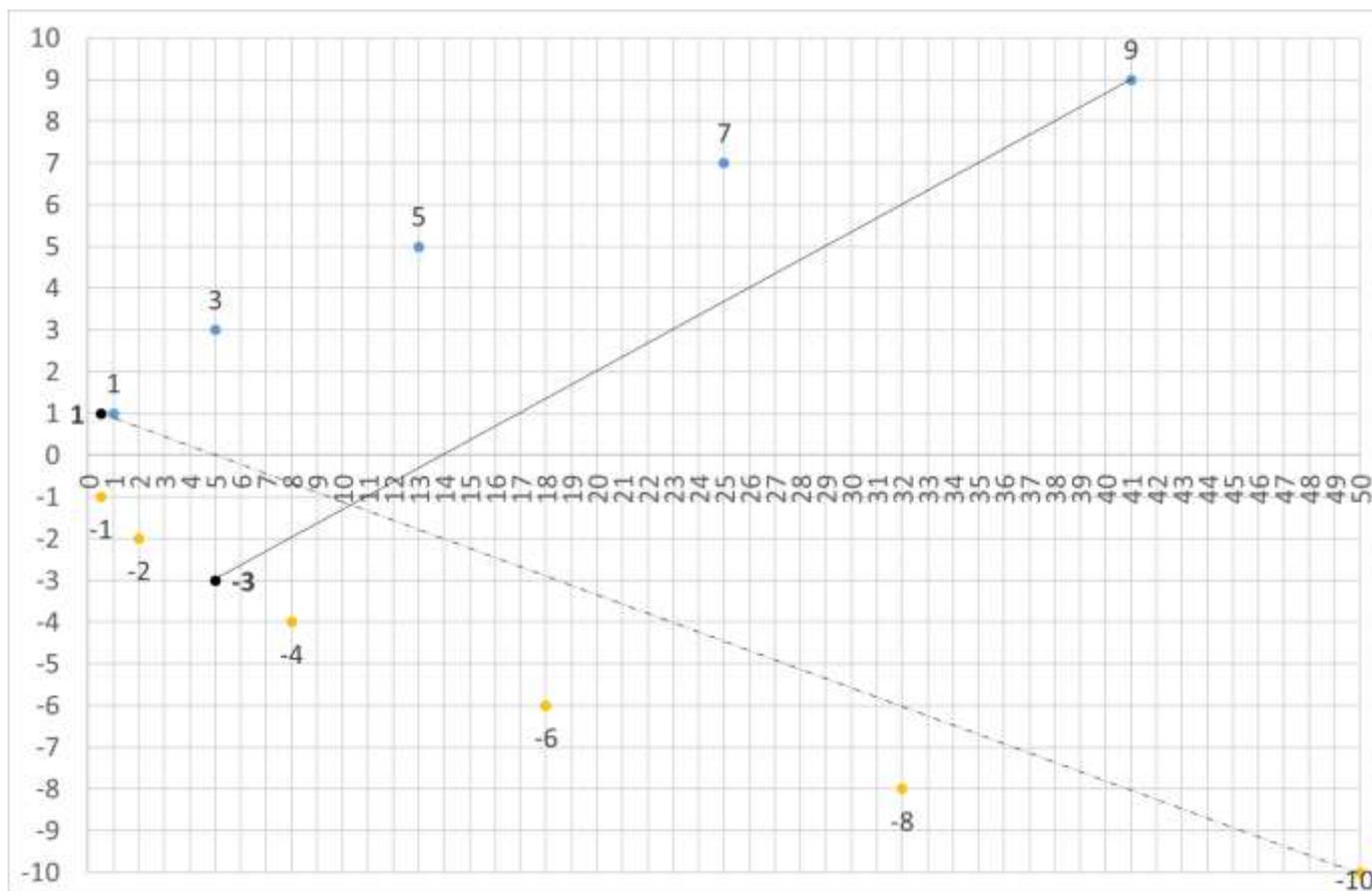
Il suffit donc de tracer les droites coupants systématiquement $m=1$ et un n pair. Les valeurs de la suite de Syracuse se trouvent alors à l'intersection de ces droites et de l'axe des abscisses.

Dans le cas impair, il suffit de choisir :

$$c = \frac{1}{2} \text{ et } e = \frac{1}{2} \text{ on a ainsi si } m = 3 : y(0) = \frac{3n + 1}{2}$$

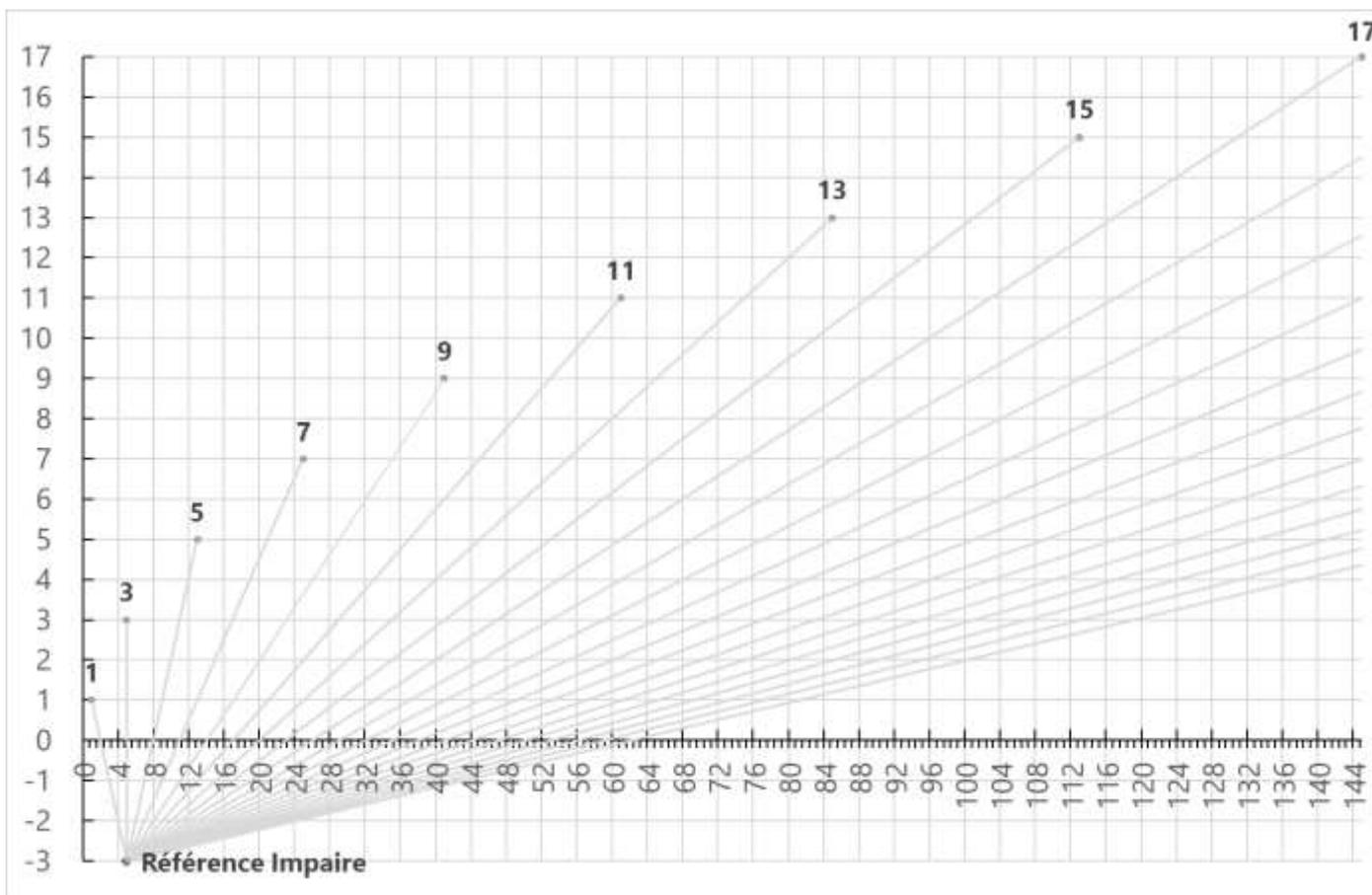
Il suffit donc de tracer les droites coupants systématiquement $m=3$ et un n impair. Les valeurs de la suite de Syracuse se trouvent alors à l'intersection de ces droites et de l'axe des abscisses.

Voici une première illustration graphique :



En haut (axe des ordonnées positives) on a représenté les itérations impaires et en bas (axe des ordonnées négatives) les itérations paires. On a pris comme exemple la valeur 9, qui reliée à -3 en gras (point de référence des nombres impairs) donne bien $14 = (3 \times 9 + 1) / 3$ sur l'axe des abscisses. De même on a pris la valeur 10, qui reliée à 1 en gras (point de référence des nombres pairs) donne bien $5 = 10 / 2$ sur l'axe des abscisses.

Malgré l'aspect pratique, on remarque que cette construction ne permet pas de calculer des vols très important. De ce fait, on construit un autre abaque sur le même principe mais qu'avec les nombres impairs. Car un nombre pair se divise par deux de tête. Ce qui nous donne sous une autre échelle le graphique de crible de la suite de Syracuse suivant :



Plus besoin de tracer des lignes elles sont déjà là. Elles sont notées jusqu'à 17 mais les suivantes sur le côté droit vont jusqu'à 41. Par exemple le 3 donne en abscisse 5, le 5 donne en abscisse 8, $8/2=4$, $4/2=2$ et enfin $2/2=1$.

Ce crible est une façon simple et rapide d'appréhender les vols de la suite de Syracuse.

11. Convexité

La suite de Syracuse est convexe si :

$$f(xN + (1-x)(N+k)) \leq xf(N) + (1-x)f(N+k)$$

Soit :

$$f(N + (1-x)k) \leq xf(N) + (1-x)f(N+k) \quad \forall N > 0 \text{ et } \forall k \geq 0$$

On a 2 parités pour chacune des 3 variables, soit les 8 combinaisons possibles suivantes :

$$\{N, k, x\} = PPP : \frac{N + (1-x)k}{2} \leq \frac{xN}{2} + \frac{(1-x)(N+k)}{2} \rightarrow \text{Egalité } \forall x \text{ et } \forall k$$

$$\{N, k, x\} = III : \frac{3N + 3(1-x)k + 1}{2} \leq \frac{3xN + x}{2} + \frac{(1-x)(N+k)}{2}$$

$$\rightarrow (2(N+k) + 1)(1-x) \leq 0 : \text{vrai si } x \geq 1$$

$$\{N, k, x\} = PII : \frac{N + (1-x)k}{2} \leq \frac{xN}{2} + \frac{(1-x)(3N + 3k + 1)}{2}$$

$$\rightarrow (-2(N+k) + 1)(1-x) \leq 0 : \text{vrai si } x \leq 1$$

$$\{N, k, x\} = IPP : \frac{3N + 3(1-x)k + 1}{2} \leq \frac{3xN + x}{2} + \frac{(1-x)(3N + 3k + 1)}{2} \rightarrow \text{Egalité } \forall x \text{ et } \forall k$$

$$\{N, k, x\} = IIP : \frac{N + (1-x)k}{2} \leq \frac{3xN + x}{2} + \frac{(1-x)(N+k)}{2} \rightarrow (2N+1)x \geq 0 : \text{vrai si } x \geq 0$$

$$\{N, k, x\} = PPI : \frac{N + (1-x)k}{2} \leq \frac{xN}{2} + \frac{(1-x)(N+k)}{2} \rightarrow \text{Egalité } \forall x \text{ et } \forall k$$

$$\{N, k, x\} = IPI : \frac{3N + 3(1-x)k + 1}{2} \leq \frac{3xN + x}{2} + \frac{(1-x)(3N + 3k + 1)}{2} \rightarrow \text{Egalité } \forall x \text{ et } \forall k$$

$$\{N, k, x\} = PIP : \frac{3N + 3(1-x)k + 1}{2} \leq \frac{xN}{2} + \frac{(1-x)(3N + 3k + 1)}{2} \rightarrow (4N+1)x \leq 0 : \text{vrai si } x \leq 0$$

Ce qui donne le tableau récapitulatif suivant :

k	Pair				Impair			
N	Pair		Impair		Pair		Impair	
x	Pair	Impair	Pair	Impair	Pair	Impair	Pair	Impair
->	Egalité $\forall x$				$x \leq 0$	$x \leq 1$	$x \geq 0$	$x \geq 1$

Comme $x > 0$, la fonction f n'est convexe que si k est pair ou si k et N sont impairs, soit 6 cas sur 8 ou 3 cas sur 4 : 75% des cas.

12. Alphabet de Syracuse

Il existe 26 lettres dans l'alphabet. Or 27 est le premier vol de la suite de Syracuse qui a une durée longue et étonnante par rapport aux 26 premiers vols tout à fait proches les uns des autres. Les 26 premiers vols peuvent donc être considérés comme l'alphabet de Syracuse. A partir de cet alphabet, on peut former des mots. Le vol 27 est donc le premier mot de la suite.

On remarque également que toutes les voyelles sont des impaires. En effet si on numérote l'alphabet de 1 à 26, on a les correspondances suivantes :

A=1 ; E=5 ; I=9 ; O=15 ; U=21 ; Y=25.

Les 6 voyelles de notre alphabet sont donc impaires.

Comment écrire en lettre un nombre supérieur à 26 ? par exemple pour 27 on peut au choix avoir :

A = en modulo 26, rotation cyclique de l'alphabet

ZA = 26 et 1

BG = 2 et 7

AA = en base 26, A est la première dizaine

Tout cela ne donne pas d'indices sur les vols.

2. Moyennes, sommes et produits

Ce chapitre est consacré à l'étude des moyennes, produits et sommes de la suite de Syracuse. Ces études sont étonnamment pleines de surprises et de richesse. On trouve de nouvelles relations tout à fait utiles qui améliorent significativement notre compréhension de la suite.

1. Moyenne

L'étude des moyennes de la suite de Syracuse donnera peut-être des informations complémentaires à celles déjà amassées. Ainsi, on pose :

$$M_n = \frac{U_{n+1}(N) + U_n(N)}{2}$$

On a 4 cas distincts à étudier :

(1) PP : 2 itérations paires :

$$M_n = \frac{\frac{U_n(N)}{2} + \frac{U_{n-1}(N)}{2}}{2} = \frac{U_n(N) + U_{n-1}(N)}{4} = \frac{M_{n-1}}{2}$$

Donc :

$$M_n < M_{n-1} \rightarrow \text{la suite décroît toujours en moyenne}$$

(2) PI : 1 itération paire suivie d'1 impaire :

$$M_n = \frac{\frac{3U_n(N) + 1}{2} + \frac{U_{n-1}(N)}{2}}{2} = \frac{3U_n(N) + 1 + U_{n-1}(N)}{4} = \frac{2U_n(N) + 1}{4} + \frac{M_{n-1}}{2}$$

On va subdiviser le premier terme pour faire apparaître la moyenne n-1 et ainsi de suite :

$$M_n = \frac{1}{4} + \frac{U_n(N)}{2^7} + \frac{M_{n-1}}{2^6} + \frac{M_{n-1}}{2^4} + \frac{M_{n-1}}{2^2} + \frac{M_{n-1}}{2}$$

Si on continue l'opération on obtient :

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{1}{4} + \frac{M_{n-1}}{2} + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{U_n(N)}{2^{2k+1}} + \sum_{j=1}^k \frac{M_{n-1}}{2^{2j}} \right) = \frac{1}{4} + \frac{M_{n-1}}{2} + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{U_n(N)}{2^{2k+1}} + M_{n-1} \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{4}\right)^j \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{M_{n-1}}{2} + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{U_n(N)}{2^{2k+1}} + \frac{M_{n-1}}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \right) \right) = \frac{1}{4} + \frac{M_{n-1}}{2} + \frac{M_{n-1}}{3} \end{aligned}$$

Soit :

$$M_n = \frac{5}{6}M_{n-1} + \frac{1}{4}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \text{Si } M_{n-1} > \frac{3}{2} \text{ alors } M_n < M_{n-1} &\rightarrow \text{la suite décroît en moyenne} \\ \text{Si } M_{n-1} < \frac{3}{2} \text{ alors } M_n > M_{n-1} &\rightarrow \text{la suite croît en moyenne} \end{aligned}$$

(3) IP : 1 itération impaire suivie d'1 paire :

$$M_n = \frac{\frac{U_n(N)}{2} + \frac{3U_{n-1}(N) + 1}{2}}{2} = \frac{U_n(N) + 3U_{n-1}(N) + 1}{4} = \frac{2U_{n-1}(N) + 1}{4} + \frac{M_{n-1}}{2}$$

Or :

$$M_n = \frac{1}{4} + \frac{M_{n-1}}{2} + \frac{U_{n-1}(N) + \frac{2U_n(N) - 1}{3}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{M_{n-1}}{2} + \frac{M_{n-1}}{3} + \frac{U_{n-1}(N) - 1}{12}$$

On va subdiviser le dernier terme pour faire apparaître la moyenne n-1 et ainsi de suite :

$$M_n = \frac{1}{4} + \frac{M_{n-1}}{2} + \frac{M_{n-1}}{3} - \frac{1}{12} + \frac{M_{n-1}}{36} - \frac{1}{72} + \frac{U_{n-1}(N)}{72}$$

$$M_n = \frac{1}{4} + \frac{M_{n-1}}{2} + \frac{M_{n-1}}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{M_{n-1}}{3^2 2^2} - \frac{1}{3^2 2^3} + \frac{U_{n-1}(N)}{3^2 2^3}$$

Si on continue l'opération on obtient :

$$M_n = \frac{1}{4} + \frac{M_{n-1}}{2} + \frac{M_{n-1}}{3} - \frac{1}{12} + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{U_{n-1}(N)}{3^k 2^{k+1}} + \sum_{j=2}^k \left(\frac{M_{n-1}}{3^j 2^j} - \frac{1}{3^j 2^{j+1}} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} M_{n-1} + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{U_n(N)}{3^k 2^{k+1}} + \left(M_{n-1} - \frac{1}{2} \right) \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{6} \right)^{j+1} \right)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} M_{n-1} + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{U_n(N)}{3^k 2^{k+1}} + \left(M_{n-1} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{30} \left(1 - \left(\frac{1}{6} \right)^{k+1} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} M_{n-1} + \frac{M_{n-1}}{30} - \frac{1}{60} = \frac{13}{15} M_{n-1} + \frac{3}{20}$$

Soit :

$$M_n = \frac{13}{15} M_{n-1} + \frac{3}{20}$$

Donc :

Si $M_{n-1} > \frac{9}{8}$ alors $M_n < M_{n-1} \rightarrow$ la suite décroît en moyenne
Si $M_{n-1} < \frac{9}{8}$ alors $M_n > M_{n-1} \rightarrow$ la suite croît en moyenne

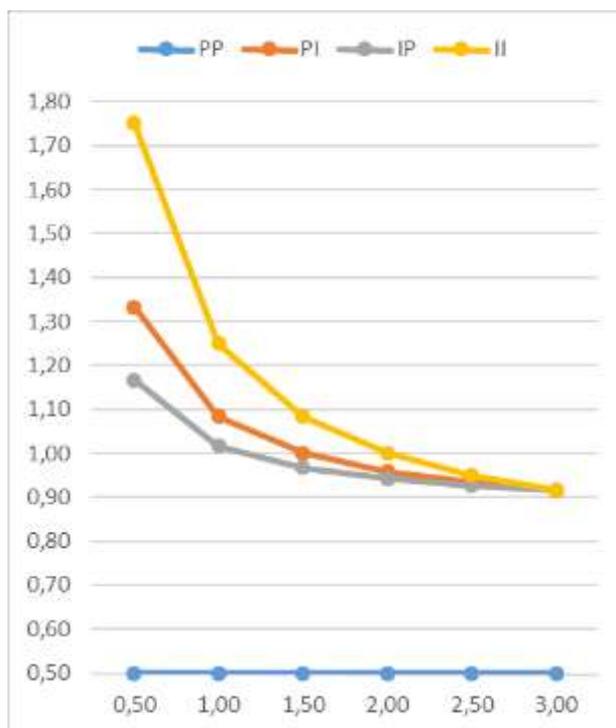
(4) II : 2 itérations impaires :

$$M_n = \frac{\frac{3U_n(N) + 1}{2} + \frac{3U_{n-1}(N) + 1}{2}}{2} = \frac{3U_n(N) + 3U_{n-1}(N) + 2}{4} = \frac{3}{4} M_{n-1} + \frac{1}{2}$$

Donc :

Si $M_{n-1} > 2$ alors $M_n < M_{n-1} \rightarrow$ la suite décroît en moyenne
Si $M_{n-1} < 2$ alors $M_n > M_{n-1} \rightarrow$ la suite croît en moyenne

Et voici, pour mieux comprendre, une représentation graphique de $\frac{M_n}{M_{n-1}}$ selon M_{n-1} dans ces 4 cas :



On voit bien que si la moyenne au rang n-1 est supérieure à 2 alors le rapport des moyennes (au rang suivant) est toujours inférieur à 1, et ainsi la suite décroît toujours. En revanche, si on a une moyenne n-1 inférieure à 2, alors la suite croît ou décroît selon les 4 cas de parité.

De plus si on poursuit le calcul des moyennes avec davantage de terme, c'est-à-dire pour les 3 premiers termes : leur addition divisée par 3, pour les 4 : leur addition divisée par 4, et pour les n premiers termes : leur addition divisée par n, soit en définitif :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(N) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n U_k(N)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{i_N} U_k(N) + \sum_{k=i_N+1}^n U_k(N) \right)$$

Or après le rang i, la suite vaut, si la conjecture est vérifiée, toujours alternativement 1 ou 2, d'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(N) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{i_N} U_k(N) + \frac{(n+2-i_N)(1+2)}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{i_N} U_k(N) + \frac{3}{2} + \frac{3}{n} - \frac{3i_N}{2n}$$

Si la suite converge vers le cycle unique infini quel que soit N et qu'aucun terme est infini, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(N) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_i(N)}{n} + \frac{3}{2} + \frac{3}{n} - \frac{3i_N}{2n} = \frac{3}{2}$$

La moyenne à l'infini est égale à la moyenne du cycle final infini (1,5) car de 0 à i, la somme des valeurs de la suite est finie (en hauteur et en durée).

2. Somme

Une autre approche consiste à calculer la somme des valeurs de la suite jusqu'à l'infini en soustrayant la partie du cycle infini qui démarre a priori à partir du rang i .

La somme S des $U_n(N)$ pour un N choisi est composée a priori d'une partie finie convergente S_c vers 1 au rang i et d'une partie divergente S_d , soit :

$$S(N) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(N) = S_c(N) + S_d(N) = \sum_{j=0}^i U_j(N) + \sum_{j=i+1}^{\infty} U_j(N) = \left(N + \sum_{j=1}^{i-1} U_j(N) + 1 \right) + S_d(N), \forall N > 0$$

On sait également déjà par observation que quel que soit N , on a, a priori, toujours : $U_{i-1}(N) = 2$, $U_{i-2}(N) = 4$ et $U_{i-3}(N) = 8$, ce qui donne :

$$S_c(N) = \sum_{j=0}^i U_j(N) = N + \sum_{j=1}^{i-4} U_j(N) + 8 + 4 + 2 + 1 = N + 15 + \sum_{j=1}^{i-4} U_j(N)$$

De plus en utilisant la forme trigonométrique (cf. chapitre suivant) de la suite, on obtient :

$$\begin{aligned} S_c(N) &= N + 15 + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{i-4} \left(1 + 4U_{j-1}(N) - (1 + 2U_{j-1}(N)) (-1)^{U_{j-1}(N)} \right) \\ &= N + 15 + \frac{i-4}{4} + \sum_{j=1}^{i-4} U_{j-1}(N) - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{i-4} (-1)^{U_{j-1}(N)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-4} U_{j-1}(N) (-1)^{U_{j-1}(N)} \\ &= N + 14 + \frac{i}{4} + \left(N + \sum_{j=1}^{i-5} U_j(N) \right) - \frac{1}{4} \left((-1)^N + \sum_{j=1}^{i-5} (-1)^{U_j(N)} \right) - \frac{1}{2} \left(N(-1)^N + \sum_{j=1}^{i-5} U_j(N) (-1)^{U_j(N)} \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$S_c(N) = N + 15 + \frac{1}{4} (i - 4 + 4N - (1 + 2N)(-1)^N) - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{i-5} (-1)^{U_j(N)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-5} U_j(N) (-1)^{U_j(N)} + \sum_{j=1}^{i-5} U_j(N)$$

De même que précédemment, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{i-5} U_j(N) &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{i-5} \left(1 + 4U_{j-1}(N) - (1 + 2U_{j-1}(N)) (-1)^{U_{j-1}(N)} \right) \\ &= \frac{i-5}{4} + \sum_{j=1}^{i-5} U_{j-1}(N) - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{i-5} (-1)^{U_{j-1}(N)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-5} U_{j-1}(N) (-1)^{U_{j-1}(N)} \\ &= \frac{i-5}{4} + \left(N + \sum_{j=1}^{i-6} U_j(N) \right) - \frac{1}{4} \left((-1)^N + \sum_{j=1}^{i-6} (-1)^{U_j(N)} \right) - \frac{1}{2} \left(N(-1)^N + \sum_{j=1}^{i-6} U_j(N) (-1)^{U_j(N)} \right) \\ &= \frac{1}{4} (i - 5 + 4N - (1 + 2N)(-1)^N) - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{i-6} (-1)^{U_j(N)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-6} U_j(N) (-1)^{U_j(N)} + \sum_{j=1}^{i-6} U_j(N) \end{aligned}$$

En remplaçant de nouveau le dernier terme par sa forme trigonométrique et ainsi de suite, on obtient finalement l'équation générique suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{i-5} U_j(N) &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{i-5} (i - (j + 4) + 4N - (1 + 2N)(-1)^N) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{i-7} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-6-k} (-1)^{U_j(N)} + \sum_{j=1}^{i-6-k} U_j(N) (-1)^{U_j(N)} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left((i - 5)(i - 4 + 4N - (1 + 2N)(-1)^N) - \frac{(i - 5)(i - 4)}{2} - \sum_{k=0}^{i-7} \left(\sum_{j=1}^{i-6-k} (1 + 2U_j(N)) (-1)^{U_j(N)} \right) \right) \\ \sum_{j=1}^{i-5} U_j(N) &= \frac{1}{4} \left((i - 5) \left(\frac{i}{2} - 2 + 4N - (1 + 2N)(-1)^N \right) - \sum_{k=0}^{i-7} \left(\sum_{j=1}^{i-6-k} (1 + 2U_j(N)) (-1)^{U_j(N)} \right) \right) \end{aligned}$$

Soit en définitif :

$$\begin{aligned} Sc(N) &= \frac{1}{4} \left((i - 4)(i - 3 + 4N - (1 + 2N)(-1)^N) - \frac{(i - 4)(i - 3)}{2} - \sum_{k=0}^{i-6} \left(\sum_{j=1}^{i-5-k} (1 + 2U_j(N)) (-1)^{U_j(N)} \right) \right) \\ &\quad + N + 15 \\ Sc(N) &= N + 15 + \frac{1}{4} \left((i - 4) \left(\frac{i - 3}{2} + 4N - (1 + 2N)(-1)^N \right) - \sum_{k=0}^{i-6} \left(\sum_{j=1}^{i-5-k} (1 + 2U_j(N)) (-1)^{U_j(N)} \right) \right) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{i-6} \left(\sum_{j=1}^{i-5-k} (1 + 2U_j(N)) (-1)^{U_j(N)} \right) &= (i - 5)(1 + 2U_1(N))(-1)^{U_1(N)} + (i - 4)(1 + 2U_2(N))(-1)^{U_2(N)} + \dots \\ &\quad + 2(1 + 2U_{i-6}(N))(-1)^{U_{i-6}(N)} + (1 + 2U_{i-5}(N))(-1)^{U_{i-5}(N)} \\ &= \sum_{j=1}^{i-5} (i - (j + 4)) (1 + 2U_j(N)) (-1)^{U_j(N)} \end{aligned}$$

Soit en définitif :

$$\sum_{j=0}^i U_j(N) = N + 15 + \frac{1}{4} \left((i - 4) \left(\frac{i - 3}{2} + 4N - (1 + 2N)(-1)^N \right) - \sum_{j=1}^{i-5} (i - j - 4) (1 + 2U_j(N)) (-1)^{U_j(N)} \right)$$

Prenons un exemple avec $N=12 > 6 > 3 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1$, $i=7$

D'où par calcul direct :

$$Sc(12) = \sum_{j=0}^i U_j(12) = 12 + 6 + 3 + 5 + 8 + 4 + 2 + 1 = 41$$

Et via notre équation ci-dessus :

$$\begin{aligned} Sc(12) &= 12 + 15 + \frac{1}{4} \left(3 \left(\frac{4}{2} + 4 \cdot 12 - (1 + 2 \cdot 12)(-1)^{12} \right) - \sum_{j=1}^2 (7 - j - 4) (1 + 2U_j(N)) (-1)^{U_j(N)} \right) \\ &= 27 + \frac{1}{4} (3(2 + 48 - 25) - 2(1 + 2U_1(N))(-1)^{U_1(N)} - (1 + 2U_2(N))(-1)^{U_2(N)}) \end{aligned}$$

$$= 27 + \frac{1}{4}(75 - 2(1 + 2.6) + (1 + 2.3)) = 27 + \frac{1}{4}(75 - 26 + 7) = 27 + \frac{56}{4} = 27 + 14 = 41$$

On retrouve bien la même somme.

Cette approche peut encore être avancée mais cela revient à un calcul fastidieux et finalement une impasse de résolution. De plus, cette approche renseigne peu sur la suite de Syracuse. On n'ira donc pas plus loin dans cette étude.

~

On va maintenant effectuer cette somme de manière plus directe et en déduire un encadrement. Pour cela on pose :

$$S_{N,i} = U_0(N) + U_1(N) + U_2(N) \dots + U_i(N) = \sum_{k=0}^i U_k(N) = N + \sum_{k=1}^i U_k(N)$$

$$S_{N,i} = N + \sum_{k=1 \text{ pour les } U_k(N) \text{ pair}}^i \frac{U_{k-1}(N)}{2} + \sum_{k=1 \text{ pour les } U_k(N) \text{ impair}}^i \frac{U_{k-1}(N)}{2} \left(3 + \frac{1}{U_{k-1}(N)}\right)$$

$$S_{N,i} = N + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{U_k(N)}{2} x \text{ avec } \begin{cases} x = 1 \text{ si } U_k(N) \text{ pair} \\ 4 \geq x \geq 3 \text{ si } U_k(N) \text{ impair} \end{cases}$$

$$\text{car } 4 \geq \left(3 + \frac{1}{U_k(N)}\right) \geq 3 \quad \forall U_k(N) > 0$$

On peut donc borner S comme suit :

$$N + \frac{4}{2}(S(N) - 1) \leq S_{N,i} \leq N + \frac{1}{2}(S(N) - 1) \text{ avec } U_i(N) = 1$$

D'où :

$$S_{N,i} \geq 2N - 1$$

On n'a ici malheureusement pas d'autre encadrement, car l'autre inéquation est négative, et ainsi ne donne pas de borne supérieure.

On prend comme exemple $N=3 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1, i=5$

$$S_{3,5} = 3 + 5 + 8 + 4 + 2 + 1 = 23$$

$$S_{3,5} \geq 2.3 - 1 = 5$$

On trouve bien une valeur approchée mais pas très précise.

Prenons un autre exemple avec $N=11 > 17 > 26 > 13 > 20 > 10 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1, i=10$

$$S_{11,10} = 11 + 17 + 26 + 13 + 20 + 10 + 5 + 8 + 4 + 2 + 1 = 117$$

$$S_{11,10} \geq 2.11 - 1 = 21$$

De même, notre approximation est juste mais pas précise.

On reprend maintenant cette somme comme suit :

$$S_{N,i} = \sum_{k=0}^i U_k(N) = N + 1 + \sum_{k=1}^{i-1} U_k(N) \text{ si } U_i(N) = 1$$

Soit :

$$S_{N,i} = N + 1 + \sum_{p=1}^{i-1} \text{pour les } U_p(N) \text{ pair} \frac{U_{p-1}(N)}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} \text{pour les } U_j(N) \text{ impair} \frac{U_{j-1}(N)}{2} \left(3 + \frac{1}{U_{j-1}(N)} \right)$$

$$S_{N,i} = N + 1 + \frac{1}{2} \left(\sum_{p=0}^{i-2} \text{pour les } U_p(N) \text{ pair} U_p(N) a_p(N) + \sum_{j=0}^{i-2} \text{pour les } U_j(N) \text{ impair} U_j(N) a_j(N) \right)$$

$$\text{avec } a_k(N) = \begin{cases} 1 & \text{si } k/U_k(N) \text{ pair} \\ \left(3 + \frac{1}{U_k(N)} \right) & \text{si } k/U_k(N) \text{ impair} \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$S_{N,i} = N + \frac{U_0(N)a_0(N) + U_1(N)a_1(N) + U_2(N)a_2(N) + \dots + U_{i-2}(N)a_{i-2}(N)}{2} + 1$$

Soit :

$$S_{N,i} = 1 + N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{i-2} U_k(N) a_k(N) \text{ avec } a_k(N) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ correspond à un } U_k(N) \text{ pair} \\ \left(3 + \frac{1}{U_k(N)} \right) & \text{si } k \text{ correspond à un } U_k(N) \text{ impair} \end{cases}$$

Or :

$$U_k(N) = \frac{U_{k-1}(N)}{2} a_{k-1}(N)$$

Donc en poursuivant sur ce principe, l'itération devient :

$$S_{N,i} = 1 + N + N \frac{a_0(N)}{2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{i-2} U_{k-1}(N) a_{k-1}(N) a_k(N)$$

$$S_{N,i} = 1 + N + N \frac{a_0(N)}{2} + N \frac{a_0(N)a_1(N)}{4} + \frac{1}{8} \sum_{k=2}^{i-2} U_{k-2}(N) a_{k-2}(N) a_{k-1}(N) a_k(N)$$

D'où :

$$S_{N,i} = 1 + N \left(1 + \sum_{k=0}^{i-2} \left(\prod_{j=0}^k \frac{a_j(N)}{2} \right) \right) = 1 + N \left(1 + \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{1}{2^k} \prod_{j=0}^k a_j(N) \right) \right)$$

$$\text{Avec } a_k(N) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ correspond à un } U_k(N) \text{ pair} \\ \left(3 + \frac{1}{U_k(N)} \right) = \left(3 + \frac{2^k}{N \cdot \prod_{j=0}^{k-1} a_j(N)} \right) & \text{si } k \text{ correspond à un } U_k(N) \text{ impair} \end{cases}$$

Soit :

$$S_{N,i} = 1 + N \left(1 + \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{1}{2^k} \prod_{j=0}^k \left(3 + \frac{2^j}{N \cdot \prod_{p=0}^{j-1} a_p(N)} \right) \right) \right)$$

Car $U_k(N)$ est un élément de la somme S. Et on a démontré qu'il vaut :

$$U_k(N) = \frac{N}{2^k} \prod_{j=0}^{k-1} a_j(N) = \frac{N}{2^k} \prod_{j=0}^{k-1} \text{pour } U_j(N) \text{ impair} \left(3 + \frac{2^j}{N \cdot \prod_{p=0}^{j-1} a_p(N)} \right)$$

Ce qui signifie que :

$$a_k(N) = 3 + \frac{2^k}{N \cdot \prod_{j=0}^{k-1} a_j(N)} \text{ si } U_k(N) \text{ est impair}$$

Soit dans ce cas :

$$2^k = N \left(\prod_{j=0}^{k-1} a_j(N) \right) (a_k(N) - 3) \text{ si } U_k(N) \text{ est impair}$$

Et avec dans le cas des itérations impaires :

$$4 \geq a_k(N) \geq 3$$

On a les bornes suivantes :

$$\frac{N}{2^k} 4^k \geq U_k(N) = \frac{N}{2^k} \prod_{j=0}^{k-1} a_j(N) \geq \frac{N}{2^k} 3^k$$

$$2^k N \geq U_k(N) \geq \left(\frac{3}{2}\right)^k N$$

Puisque tous les vols d'un nombre N pair se déduisent d'un nombre impair inférieur à N, dans le cas d'un nombre de départ N impair, on a pour que le dernier terme de l'inéquation ci-dessus soit entier et supérieur à $U_k(N)$, il faut soustraire un nombre impair à N, soit :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k N > \left(\frac{3}{2}\right)^k (N - 2s - 1) \rightarrow \frac{N - 2s - 1}{2^k} = p \text{ si } N = 2^k p + 2s + 1 \rightarrow U_k(N) > 3^k p \text{ avec } p < N$$

Ce qui donne :

$$2^k N \geq U_k(N) \geq \left(\frac{3}{2}\right)^k N > 3^k p \text{ avec } p < N$$

Prenons un exemple pour essayer de saisir le sens et l'intérêt de tout cela.

On choisit $N=3 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1$ d'où $i=5$ avec 2 itérations impaires au départ.

Il vient selon les résultats ci-dessus :

$$S_{3,5} = 3 + 5 + 8 + 4 + 2 + 1 = 23$$

$$S_{3,5} = 1 + 3 \left(1 + \sum_{k=0}^3 \frac{1}{2^k} \left(\prod_{j=0}^k a_j(N) \right) \right)$$

$$S_{3,5} = 1 + 3 \left(1 + \frac{a_0(N)}{2} + \frac{a_0(N)a_1(N)}{4} + \frac{a_0(N)a_1(N)a_2(N)}{8} + \frac{a_0(N)a_1(N)a_2(N)a_3(N)}{16} \right)$$

Or $a_j(N)$ vaut 1 pour les itérations paires, d'où :

$$S_{3,5} = 1 + 3 \left(1 + \frac{a_0(N)}{2} + \frac{a_0(N)a_1(N)}{4} + \frac{a_0(N)a_1(N)}{8} + \frac{a_0(N)a_1(N)}{16} \right) = 1 + 3 \left(1 + \frac{a_0(N)}{2} + \frac{7a_0(N)a_1(N)}{16} \right)$$

$$S_{3,5} = \frac{16 + 3(16 + 8a_0(N) + 7a_0(N)a_1(N))}{16} = 4 + \frac{3a_0(N)(8 + 7a_1(N))}{16}$$

Avec :

$$a_0(N) = \left(3 + \frac{1}{U_0(N)} \right) = \left(3 + \frac{1}{N} \right) = \left(3 + \frac{1}{3} \right) = \frac{10}{3}$$

$$a_1(N) = \left(3 + \frac{1}{U_1(N)} \right) = \left(3 + \frac{2^1}{N \cdot a_0(N)} \right) = \left(3 + \frac{2}{3 \cdot \frac{10}{3}} \right) = \frac{16}{5}$$

Et donc :

$$S_{3,5} = 4 + \frac{3 \cdot \frac{10}{3} \left(8 + 7 \cdot \frac{16}{5} \right)}{16} = 23$$

Et on a également bien dans cet exemple :

$$2^1 3 = 6 \geq U_1(N) = 5 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^1 3 = \frac{9}{2} = 4,5 > 3^1 p = 6 \text{ avec } p = 2 < N = 3$$

On remarquera également qu'avec :

$$U_0(N) = N \text{ et } U_0(2^p N) = 2^p N$$

On a :

$$S_{N,i} = U_0(N) + U_1(N) + U_2(N) + U_3(N) + \dots + U_i(N)$$

Et :

$$S_{2^p N,i} = U_0(2^p N) + U_1(2^p N) + U_2(2^p N) + U_3(2^p N) + \dots + U_i(2^p N)$$

$$S_{2^p N,i} = U_0(2^p N) + U_1(2^p N) + U_2(2^p N) + \dots + U_{p-1}(2^p N) + U_p(2^p N) + U_{p+1}(2^p N) + \dots + U_i(2^p N)$$

Or à partir du rang p , on a atteint N , puisqu'avant on était p fois pairs. On a donc :

$$S_{2^p N,i} = U_0(2^p N) + U_1(2^p N) + U_2(2^p N) + \dots + U_{p-1}(2^p N) + U_0(N) + U_1(N) + U_2(N) + \dots + U_i(N)$$

$$S_{2^p N,i} = 2^p N + 2^{p-1} N + 2^{p-2} N + \dots + 2N + U_0(N) + U_1(N) + U_2(N) + \dots + U_i(N)$$

D'où :

$$S_{2^p N,i} = N \sum_{k=1}^p 2^k + S_{N,i} = 2N \frac{1 - 2^p}{1 - 2} + S_{N,i}$$

$$\mathbf{S_{2^p N,i} = 2N(2^p - 1) + S_{N,i}}$$

Par exemple avec $N1 = 3$ et $N2 = 2^2 \cdot 3 = 12$, on a bien :

$$S_{12,i} = 12 + 6 + 3 + 5 + 8 + 4 + 2 + 1 = 41$$

$$S_{12,i} = 2 \cdot 3(2^2 - 1) + S_{3,i} = 6 \cdot 3 + (3 + 5 + 8 + 4 + 2 + 1) = 18 + 23 = 41$$

3. Somme des rapports

On pose :

$$S(N) = \frac{U_1(N)}{U_0(N)} + \frac{U_2(N)}{U_1(N)} + \frac{U_3(N)}{U_2(N)} \dots + \frac{U_i(N)}{U_{i-1}(N)} = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{U_{k+1}(N)}{U_k(N)}$$

$$S(N) = \sum_{k=0}^{i-1} \text{pour } U_k(N) \text{ pair} \frac{n_k}{2n_k} + \sum_{k=0}^{i-1} \text{pour } U_k(N) \text{ impair} \frac{3n_k + 2}{2n_k + 1} \text{ avec } n_k > 0$$

$$S(N) = \sum_{k=0}^{i-1} \text{pour } U_k(N) \text{ pair} \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{i-1} \text{pour } U_k(N) \text{ impair} \frac{3 + \frac{2}{n_k}}{2 + \frac{1}{n_k}} = \frac{p}{2} + m \cdot \frac{3 + \frac{2}{e_m}}{2 + \frac{1}{e_m}} \text{ avec } \begin{cases} i = p + m \\ e_m \text{ une moyenne} \end{cases}$$

D'où l'encadrement suivant :

$$\frac{p}{2} + \frac{3m}{2} \leq S(N) \leq \frac{p}{2} + \frac{5m}{3}$$

$$\frac{i}{2} + m \leq S(N) \leq \frac{i}{2} + \frac{7m}{6}$$

Et en moyenne :

$$S(N) \approx \frac{i}{2} + \frac{13m}{12}$$

Si on choisit :

$$m = \frac{2i}{5}$$

Alors :

$$0,9 = \frac{9}{10} \leq \frac{S(N)}{i} \leq \frac{29}{30} \approx 0,96667$$

Ainsi, $S(N)$ est à peu près égale à son vol (le nombre d'itérations pour atteindre 1) :

$$S(N) < i \text{ mais aussi } S(N) \approx i$$

De plus, si on prend la moyenne, on obtient :

$$\frac{S(N)}{i} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{9}{10} + \frac{29}{30} \right) = \frac{14}{15} \approx 0,93333$$

On prend comme exemple $N=3 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1$, $i=5$

$$0,9 \leq \frac{S(N)}{i} = \frac{1}{5} \left(\frac{5}{3} + \frac{8}{5} + \frac{4}{8} + \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{143}{150} \approx 0,95333 \approx 0,93333 \leq 0,96667$$

On trouve bien une valeur approchée précise, car notre encadrement est serré.

Prenons un autre exemple avec $N=11 > 17 > 26 > 13 > 20 > 10 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1$, $i=10$

$$0,9 \leq \frac{S(N)}{i} = \frac{1}{10} \left(\frac{17}{11} + \frac{26}{17} + \frac{13}{26} + \frac{20}{13} + \frac{10}{20} + \frac{5}{10} + \frac{8}{5} + \frac{4}{8} + \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{55994}{60775} \approx 0,92133 \approx 0,93333$$

$$\leq 0,96667$$

On trouve bien une valeur approchée précise, car notre encadrement est serré.

On remarquera également qu'avec :

$$U_0(N) = N \text{ et } U_0(2^p N) = 2^p N$$

On a :

$$S(N) = \frac{U_1(N)}{U_0(N)} + \frac{U_2(N)}{U_1(N)} + \frac{U_3(N)}{U_2(N)} \dots + \frac{U_i(N)}{U_{i-1}(N)} = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{U_{k+1}(N)}{U_k(N)}$$

$$S(2^p N) = \frac{2^{p-1}N}{2^p N} + \frac{2^{p-2}N}{2^{p-1}N} + \frac{2^{p-3}N}{2^{p-2}N} + \dots + \frac{N}{2N} + \frac{U_1(N)}{U_0(N)} + \frac{U_2(N)}{U_1(N)} + \dots + \frac{U_i(N)}{U_{i-1}(N)}$$

$$S(2^p N) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{2} + S(N) = \frac{p}{2} + S(N)$$

D'où :

$$S(2^p N) = \frac{p}{2} + S(N)$$

Par exemple avec $N1 = 3$ et $N2 = 2^2 \cdot 3 = 12$, on a bien :

$$S(3) = \frac{5}{3} + \frac{8}{5} + \frac{4}{8} + \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{143}{30}$$

$$S(12) = \frac{6}{12} + \frac{3}{6} + \frac{5}{3} + \frac{8}{5} + \frac{4}{8} + \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{173}{30} \text{ ou } S(12) = \frac{2}{2} + S(3) = 1 + \frac{143}{30} = \frac{173}{30}$$

4. Produit

On pose :

$$P_{N,i} = U_0(N)U_1(N)U_2(N)U_3(N) \dots U_i(N) = \prod_{k=0}^i U_k(N) = N \prod_{k=1}^{i-1} U_k(N) \text{ si } U_i(N) = 1$$

On a alors dans les cas pairs et impairs :

$$\begin{aligned} P_{N,i} &= N \cdot \prod_{p \text{ pour } U_p \text{ pair}}^{i-1} \left(\frac{U_p(N)}{2} \right) \cdot \prod_{j \text{ pour } U_j \text{ impair}}^{i-1} \left(\frac{3U_j(N) + 1}{2} \right) \\ &= N \cdot \prod_{k=0}^{i-1} \left(\frac{U_k(N)}{2} \right) \cdot \prod_{j \text{ pour } U_j \text{ impair}}^{i-1} \left(3 + \frac{1}{U_j(N)} \right) \\ P_{N,i} &= \frac{N}{2^i} \left(N \cdot \prod_{k=1}^{i-1} U_k(N) \right) \cdot \prod_{j \text{ pour } U_j \text{ impair}}^{i-1} \left(3 + \frac{1}{U_j(N)} \right) = \frac{N}{2^i} P_{N,i} \cdot \prod_{j \text{ pour } U_j \text{ impair}}^{i-1} \left(3 + \frac{1}{U_j(N)} \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$2^i = N \cdot \prod_{j=0 \text{ pour } U_j \text{ impair}}^{i-1} \left(3 + \frac{1}{U_j(N)} \right)$$

On a donc trouvé une relation entre les itérations impaires d'un vol, la valeur N de départ et la durée de vol i de N jusqu'à 1.

Par exemple :

$N=3 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1$, $i=5$ et 2 cas impairs, soit :

$$2^5 = 32 = 3 \left(3 + \frac{1}{3} \right) \left(3 + \frac{1}{5} \right) = 3 \frac{10}{3} \cdot \frac{16}{5} = 32$$

Si on reprend l'équation précédente, et passons ses membres au logarithme pour obtenir des additions plutôt que des produits, on obtient :

$$\begin{aligned} i \cdot \ln(2) &= \ln(N) + \sum_{j/U_j \text{ impair}}^{i-1} \ln \left(3 + \frac{1}{U_j(N)} \right) \\ i &= \frac{\ln(N)}{\ln(2)} + \sum_{j/U_j \text{ impair}}^{i-1} \frac{\ln \left(3 + \frac{1}{U_j(N)} \right)}{\ln(2)} \end{aligned}$$

Or :

$$U_j(N) \geq 1$$

D'où :

$$\begin{aligned} i &\leq \frac{\ln(N)}{\ln(2)} + \sum_{j/U_j \text{ impair}}^{i-1} \frac{\ln(4)}{\ln(2)} = \frac{\ln(N)}{\ln(2)} + \sum_{j/U_j \text{ impair}}^{i-1} 2 = \frac{\ln(N)}{\ln(2)} + 2m \\ \text{Ou : } 2^i &\leq 2^{2m} N \text{ avec } m = \text{nombre d'itérations impaires} \end{aligned}$$

Et :

$$i \geq \frac{\ln(N)}{\ln(2)} + \sum_{j/U_j \text{ impair}}^{i-1} \frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{\ln(N) + m \cdot \ln(3)}{\ln(2)}$$

Ou : $2^i \geq 3^m N$ avec $m = \text{nombre d'itérations impaires}$

Soit :

$$\frac{\ln(N) + m \cdot \ln(3)}{\ln(2)} \leq i \leq 2m + \frac{\ln(N)}{\ln(2)}$$

$$3^m \leq \frac{2^i}{N} \leq 4^m \text{ avec } m = \text{nombre d'itérations impaires du vol } N$$

Reprenons note exemple précédent de $N=3$, $i=5$ et $m=2$, soit :

$$i = 5 \leq \frac{\ln(3)}{\ln(2)} + 4 \approx 5,59$$

$$\text{Ou : } 2^5 = 32 \leq 2^4 \cdot 3 = 48$$

Et :

$$i = 5 \geq \frac{\ln(3) + 2\ln(3)}{\ln(2)} = 3 \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 4,76$$

$$\text{Ou : } 2^5 = 32 \geq 3^2 \cdot 3 = 27$$

Donc i vaut bien 5 mais la principale difficulté est que m n'est pas connu ou calculable à l'avance pour un N quelconque choisi au départ.

~

On peut également retrouver ces équations en posant :

$$\frac{2^i}{N} \approx \left(3 + \frac{1}{e_m}\right)^m \text{ avec } e_m \geq 1 \text{ une moyenne et } i = m + p$$

On a donc l'encadrement suivant :

$$(3 + 0)^m \leq \frac{2^i}{N} \leq (3 + 1)^m$$

D'où de nouveau :

$$3^m \leq \frac{2^i}{N} \leq 4^m \text{ et } 2^{i+1} \approx N(3^m + 4^m)$$

L'approximation ci-dessus est simplement issue de la moyenne linéaire de l'encadrement.

En passant en logarithmique, on retrouve également l'encadrement suivant :

$$\frac{m \cdot \ln(3) + \ln(N)}{\ln(2)} \leq i \leq 2m + \frac{\ln(N)}{\ln(2)} \text{ et } i \approx m + \frac{m \cdot \ln(3) + 2 \ln(N)}{2 \ln(2)}$$

L'approximation ci-dessus est la moyenne linéaire de l'encadrement.

Reprenons notre exemple précédent pour calculer les moyennes avec $N=3$, $i=5$ et $m=2$, soit :

$$2^{5+1} = 64 \approx 3(3^2 + 4^2) = 75$$

$$i = 5 \approx 2 + \frac{2 \ln(3) + 2 \ln(3)}{2 \ln(2)} = 2 + 2 \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 5,17$$

La valeur de durée de vol i est ici bien approximée. Mais il faut connaître préalablement le nombre d'itérations impaires du vol.

On va donc chercher une approximation sans se soucier du nombre d'itérations impaires avec une autre approximation. Pour cela, on reprend nos dernières équations pour borner i en posant :

$$m = \frac{i}{k} \text{ avec } k > 1$$

Ce qui donne :

$$i \leq \frac{\ln(N)}{\ln(2)} + \frac{2i}{k} \rightarrow i \leq \frac{\ln(N)}{\ln(2)} \left(\frac{k}{k-2} \right) \text{ avec } k > 2$$

$$\text{ou } 2^i \leq N^{\left(\frac{k}{k-2}\right)}$$

Et :

$$i \geq \frac{\ln(N) + \frac{i}{k} \ln(3)}{\ln(2)} \rightarrow i \geq \ln(N) \left(\frac{k}{k \cdot \ln(2) - \ln(3)} \right) \text{ avec } k > \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$$

$$\text{ou } 2^i \geq N^{\left(\frac{k \cdot \ln(2)}{k \cdot \ln(2) - \ln(3)}\right)}$$

Soit :

$$\frac{k \cdot \ln(N)}{(k-2)\ln(2)} \geq i \geq \frac{k \cdot \ln(N)}{k \cdot \ln(2) - \ln(3)} \text{ avec } k > 2$$

$$N^{\frac{k}{k-2}} \geq 2^i \geq N^{\frac{k \cdot \ln(2)}{k \cdot \ln(2) - \ln(3)}}$$

On sait par l'observation (cf. chapitre précédent sur les observations) que la probabilité la plus forte de proportion d'itérations impaires dans un vol est de $m = \frac{2i}{5}$ soit $k = \frac{5}{2}$, ce qui donne dans ce cas le plus fréquent :

$$5 \frac{\ln(N)}{\ln(2)} \geq i \geq \frac{5 \ln(N)}{5 \ln(2) - 2 \ln(3)} \approx 2,732 \frac{\ln(N)}{\ln(2)}$$

$$N^5 \geq 2^i \geq N^{\left(\frac{5 \ln(2)}{5 \ln(2) - 2 \ln(3)}\right)} \approx N^{2,732}$$

$$9^{\frac{i}{5}} N \leq 2^i \leq 16^{\frac{i}{5}} N \text{ et } 2^{i+1} \approx N \left(9^{\frac{i}{5}} + 16^{\frac{i}{5}} \right)$$

Et en moyenne des encadrements, on obtient :

$$i \approx 5 \left(\frac{3 \ln(2) - \ln(3)}{5 \ln(2) - 2 \ln(3)} \right) \frac{\ln(N)}{\ln(2)} \approx 5,577 \cdot \ln(N)$$

$$2^i \approx N^{5 \left(\frac{3 \ln(2) - \ln(3)}{5 \ln(2) - 2 \ln(3)} \right)} \approx N^{3,866}$$

Par exemple avec $N=3$, $i=5$ on a bien :

$$5 \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 7,925 \geq 5 \geq 4,330 \approx \frac{5 \ln(3)}{5 \ln(2) - 2 \ln(3)}$$

$$\text{et } 3^5 = 243 \geq 2^5 = 32 \geq 20,117 \approx 3^{2,732}$$

$$9^{\frac{5}{5}} \cdot 3 = 27 \leq 2^5 = 32 \leq 16^{\frac{5}{5}} \cdot 3 = 48$$

$$2^{5+1} = 64 \approx 3 \left(9^{\frac{5}{5}} + 16^{\frac{5}{5}} \right) = 75$$

Et pour les moyennes :

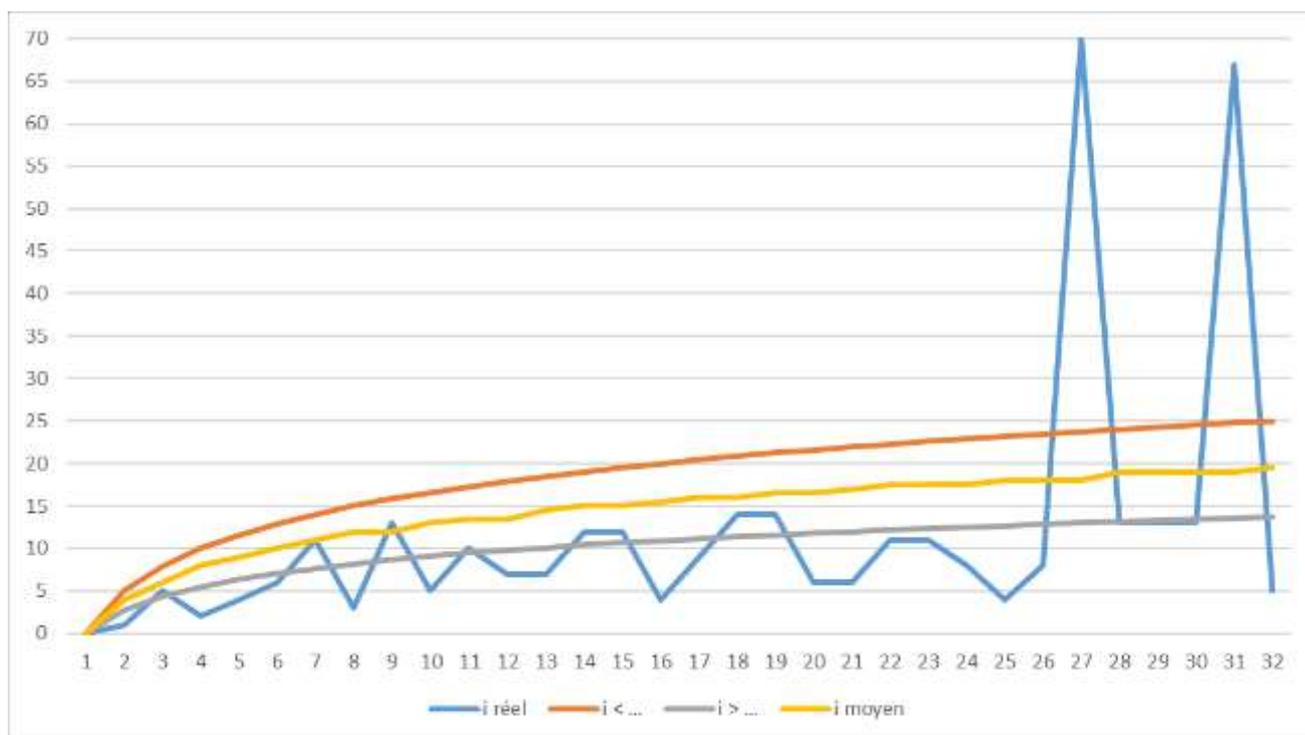
$$i = 5 \approx 5,577 \cdot \ln(3) = 6,127$$

$$2^5 = 32 \approx 3^{3,866} = 69,917$$

Les résultats sont vérifiés mais les approximations ne sont pas toujours très précises.

Ici le vol i vaut une valeur entre 7 et 5. La valeur exacte est 5, c'est-à-dire proche du milieu ou de la moyenne de 7 et 5 = 6. Comme on se trouve dans un cas d'approximation de la plus grande fréquence d'itérations impaires, le résultat est moins approché que le précédent avec la valeur de m réelle.

Essayons de vérifier notre approximation avec un plus grand nombre de valeurs N de départ dans le graphique suivant :



On remarque que la borne inférieure de i est trop haute pour les N en puissance de 2 ou $i = \frac{\ln(N)}{\ln(2)}$.

Cela se corrige simplement et est tout à fait normal. Ce sont des cas particuliers, puisque plus N augmente plus les N en puissance de 2 sont rares. La borne inférieure prise ici est une borne haute moyenne issue des 16000 premiers vols. C'est également pour cela qu'il existe d'autres cas qui sont en dessous de la borne inférieure.

De plus, la borne haute de i est très éloignée pour certaines valeurs de N comme 27 ou 31 qui font des bons tout à fait imprédictibles avec ce modèle.

Enfin, la moyenne des bornes haute et basse est une approximation qui, dans la majeure partie des cas, ne s'éloigne pas trop de la réalité sans toutefois y parvenir suffisamment souvent pour garder notre modèle en tant que référence fiable.

On remarquera également qu'avec :

$$U_0(N) = N \text{ et } U_0(2^p N) = 2^p N$$

On a :

$$P_{N,i} = U_0(N)U_1(N)U_2(N)U_3(N) \dots U_i(N)$$

$$P_{2^p N,i} = (2^p N)(2^{p-1} N) \dots (2N)U_0(N)U_1(N)U_2(N)U_3(N) \dots U_i(N)$$

$$P_{2^p N,i} = N^p \left(\prod_{k=1}^p 2^k \right) P_{N,i} = N^p 2^{\sum_{k=1}^p k} P_{N,i} = N^p 2^{\frac{p(p+1)}{2}} P_{N,i}$$

Soit :

$$P_{2^p N,i} = 2^{\frac{p(p+1)}{2}} \cdot N^p \cdot P_{N,i}$$

Ou bien :

$$\frac{2^{i+p}}{2^p N} = \frac{2^i}{N} = \prod_{j=0 \text{ pour } U_j \text{ impair}}^{i+p-1} \left(3 + \frac{1}{U_j(2^p N)} \right) = \prod_{j=p-1 \text{ pour } U_j \text{ impair}}^{i+p-1} \left(3 + \frac{1}{U_j(N)} \right)$$

Par exemple avec $N1 = 3$ et $N2 = 2^2 \cdot 3 = 12$, on a bien :

$$P_{12,i} = 12 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 69120$$

$$P_{12,i} = 2^{\frac{2 \cdot 3}{2}} \cdot 3^2 \cdot P_{3,i} = 8 \cdot 9 \cdot (3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1) = 72 \cdot 960 = 69120$$

5. Produit des rapports

Soit :

$$P(N) = \frac{U_1(N)}{U_0(N)} \cdot \frac{U_2(N)}{U_1(N)} \cdot \frac{U_3(N)}{U_2(N)} \cdots \frac{U_i(N)}{U_{i-1}(N)} = \frac{U_i(N)}{U_0(N)} = \frac{1}{N}$$

$$P(N) = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{U_{k+1}(N)}{U_k(N)} = \left(\prod_{k=0 \text{ pour } U_k(N) \text{ pair}}^{i-1} \frac{n_k}{2n_k} \right) \left(\prod_{k=0 \text{ pour } U_k(N) \text{ impair}}^{i-1} \frac{3n_k + 2}{2n_k + 1} \right) \text{ avec } n_k > 0$$

$$= \left(\prod_{k=0 \text{ pour } U_k(N) \text{ pair}}^{i-1} \frac{1}{2} \right) \left(\prod_{k=0 \text{ pour } U_k(N) \text{ impair}}^{i-1} \frac{3 + \frac{2}{n_k}}{2 + \frac{1}{n_k}} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^p \left(\frac{3 + \frac{2}{e_m}}{2 + \frac{1}{e_m}} \right)^m \text{ avec } \begin{cases} i = p + m \\ e_m \text{ une moyenne} \end{cases}$$

D'où :

$$\frac{1}{N} = \left(\frac{1}{2} \right)^{i-m} \left(\frac{3 + \frac{2}{e_m}}{2 + \frac{1}{e_m}} \right)^m \text{ avec } \begin{cases} e_m \rightarrow \infty \text{ si beaucoup d'itérations impaires} \\ e_m = 1 \text{ si très peu d'itérations impaires} \end{cases}$$

On peut ainsi poser l'encadrement suivant :

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{i-m} \left(\frac{3}{2} \right)^m \leq \frac{1}{N} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{i-m} \left(\frac{3+2}{2+1} \right)^m$$

$$\left(\frac{3}{2} \right)^m \leq \frac{2^{i-m}}{N} \leq \left(\frac{5}{3} \right)^m$$

$$\frac{2^i}{3^m} \leq N \leq 2^i \left(\frac{3}{10} \right)^m$$

$$3^m \leq \frac{2^i}{N} \leq \left(\frac{10}{3} \right)^m$$

Soit :

$$\frac{\ln(N) + m \ln(3)}{\ln(2)} \leq i \leq \frac{\ln(N) + m(\ln(5) - \ln(3))}{\ln(2)} + m$$

Et en moyenne :

$$i \approx \frac{m(\ln(5) + \ln(2)) + 2 \ln(N)}{2 \ln(2)}$$

Si on choisit :

$$m = \frac{2i}{5}$$

$$\frac{5 \ln(N)}{5 \ln(2) - 2 \ln(3)} \leq i \leq \frac{5 \ln(N)}{3 \ln(2) - 2(\ln(5) - \ln(3))}$$

Et si on fait la moyenne des 2 membres qui encadrent i , on obtient :

$$i \approx \frac{5 \ln(N)}{4 \ln(2) - \ln(5)} \approx 4,2986 \ln(N)$$

De plus, on a déjà calculé que :

$$\frac{2^i}{N} = \prod_{k=1 \text{ pour } U_k(N) \text{ impair}}^{i-1} \left(3 + \frac{1}{U_k(N)}\right)$$

D'où :

$$3^m \leq \prod_{k=1 \text{ si } U_k(N) \text{ impair}}^{i-1} \left(3 + \frac{1}{U_k(N)}\right) \leq \left(\frac{10}{3}\right)^m = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^m \quad \forall N > 0$$

A noter que ces 2 inéquations sont indépendantes de la valeur de départ N choisie.

Si on fait la moyenne de cet encadrement, on obtient :

$$\frac{1}{2} \left(3^m + \left(3 + \frac{1}{3}\right)^m\right) \approx \frac{2^i}{N} = \prod_{k=1 \text{ si } U_k(N) \text{ impair}}^{i-1} \left(3 + \frac{1}{U_k(N)}\right) \quad \forall N > 0$$

Prenons par exemple $N=3 > 5 > 8 > 4 > 1$. Soit $i=5$, $p=3$ et $m=2$. Soit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(3^2 + \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2\right) &\approx \frac{2^5}{3} = \left(3 + \frac{1}{3}\right) \left(3 + \frac{1}{5}\right) \\ \frac{181}{18} &\approx \frac{32}{3} = \left(\frac{10}{3}\right) \left(\frac{16}{5}\right) \\ \frac{181}{18} &\approx \frac{32}{3} = \frac{160}{15} \end{aligned}$$

$10,055 \approx 10,666$, soit identique à moins de 6% prêt.

De plus :

$$i = 5 \approx 4,2986 \ln(3) = 4,7225$$

Mais on ne connaît pas p , m et i sachant N ! On va donc prendre les plus fortes fréquences observées de m et p , soit :

$$p = \frac{3i}{5} \text{ et } m = \frac{2i}{5}$$

Ce qui donne :

$$\frac{1}{2} \left(3^{\frac{2i}{5}} + \left(3 + \frac{1}{3}\right)^{\frac{2i}{5}}\right) > \frac{1}{2} \left(3^{\frac{2i}{5}} + 3^{\frac{2i}{5}}\right) = 3^{\frac{2i}{5}} < \frac{2^i}{N} \rightarrow \frac{3^{\frac{2i}{5}}}{2^i} < \frac{1}{N} \rightarrow i > \frac{5 \ln(N)}{5 \ln(2) - 2 \ln(3)} \approx 3,9416 \ln(N)$$

On remarquera également qu'avec :

$$U_0(N) = N \text{ et } U_0(2^p N) = 2^p N$$

On a :

$$\begin{aligned} P(N) &= \frac{U_1(N)}{U_0(N)} \cdot \frac{U_2(N)}{U_1(N)} \cdot \frac{U_3(N)}{U_2(N)} \cdots \frac{U_i(N)}{U_{i-1}(N)} = \frac{U_i(N)}{U_0(N)} = \frac{1}{N} \\ P(2^p N) &= \frac{2^{p-1} N}{2^p N} \cdot \frac{2^{p-2} N}{2^{p-1} N} \cdot \frac{2^{p-3} N}{2^{p-2} N} \cdots \frac{N}{2N} \cdot \frac{U_1(N)}{U_0(N)} \cdot \frac{U_2(N)}{U_1(N)} \cdots \frac{U_i(N)}{U_{i-1}(N)} = \frac{U_i(2^p N)}{U_0(2^p N)} = \frac{1}{2^p N} \end{aligned}$$

D'où :

$$P(2^p N) = \left(\frac{1}{2}\right)^p P(N) = \frac{P(N)}{2^p} = \frac{1}{2^p N}$$

Par exemple avec $N_1 = 3$ et $N_2 = 2^2 \cdot 3 = 12$, on a bien :

$$P(3) = \frac{1}{3}$$

$$P(12) = \frac{1}{2^2 \cdot 3} = \frac{1}{12}$$

~

Une autre approche consiste à modifier légèrement le rapport de ces produits comme suit :

$$P(N) = \left(\frac{U_0(N) - \frac{1}{2}}{U_1(N) - \frac{1}{2}} \right) \left(\frac{U_1(N) - \frac{1}{2}}{U_2(N) - \frac{1}{2}} \right) \left(\frac{U_2(N) - \frac{1}{2}}{U_3(N) - \frac{1}{2}} \right) \dots \left(\frac{U_{i-1}(N) - \frac{1}{2}}{U_i(N) - \frac{1}{2}} \right) = \frac{U_0(N) - \frac{1}{2}}{U_i(N) - \frac{1}{2}} = 2N - 1$$

On a retranché $\frac{1}{2}$ pour simplifier les itérations impaires. Ce qui nous donne :

$$P(N) = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{U_k(N) - \frac{1}{2}}{U_{k+1}(N) - \frac{1}{2}} = \left(\prod_{k=0 \text{ pour } U_k(N) \text{ pair}}^{i-1} \frac{U_k(N) - \frac{1}{2}}{\frac{U_k(N)}{2} - \frac{1}{2}} \right) \left(\prod_{k=0 \text{ pour } U_k(N) \text{ impair}}^{i-1} \frac{U_k(N) - \frac{1}{2}}{\frac{3U_k(N) + 1}{2} - \frac{1}{2}} \right)$$

$$P(N) = \left(\prod_{k=0 \text{ pour } U_k(N) \text{ pair}}^{i-1} \frac{2U_k(N) - 1}{U_k(N) - 1} \right) \left(\prod_{k=0 \text{ pour } U_k(N) \text{ impair}}^{i-1} \frac{2U_k(N) - 1}{3U_k(N)} \right)$$

$$P(N) = \left(\prod_{k=0 \text{ pour } U_k(N) \text{ pair}}^{i-1} \frac{2 - \frac{1}{U_k(N)}}{1 - \frac{1}{U_k(N)}} \right) \left(\prod_{k=0 \text{ pour } U_k(N) \text{ impair}}^{i-1} \frac{2 - \frac{1}{U_k(N)}}{3} \right)$$

D'où :

$$P(N) = \frac{1}{3^m} \left(\prod_{k=0}^{i-1} 2 - \frac{1}{U_k(N)} \right) \left(\prod_{k=0 \text{ pour } U_k(N) \text{ pair}}^{i-1} \frac{U_k(N)}{U_k(N) - 1} \right) = 2N - 1$$

Ou bien :

$$3^m(2N - 1) = \left(\prod_{k=0}^{i-1} 2 - \frac{1}{U_k(N)} \right) \left(\prod_{k=0 \text{ pour } U_k(N) \text{ pair}}^{i-1} \frac{U_k(N)}{U_k(N) - 1} \right) \text{ avec } i = p + m$$

Soit en définitif le nouvel encadrement :

$$2^p \leq 3^{i-p}(2N - 1) \leq 2^i$$

On a ici considéré dans l'équation précédente $U_k(N)$ le plus petit (1 ou 2) puis le plus grand pour trouver simplement ces bornes.

Et sachant qu'on avait déjà trouvé :

$$3^{i-p} \leq \frac{2^i}{N} \leq 4^{i-p}$$

On en déduit :

$$0 \leq \frac{2^p}{2N - 1} \leq 3^{i-p} \leq \frac{2^i}{(2N - 1)} \leq \frac{2^i}{N} \leq 4^{i-p} \leq \infty$$

Et :

$$2^i \leq 4^{i-p} N = \frac{2^i 2^i}{2^{2p}} N \rightarrow 2^{2p} \leq 2^i N \rightarrow 2p \leq i + \frac{\ln(N)}{\ln(2)} \text{ ou } p - m \leq \frac{\ln(N)}{\ln(2)}$$

Soit :

$$i = p + m \geq \frac{\ln(N)}{\ln(2)} \geq p - m$$

6. Moyenne quadratique

On pose la moyenne suivante :

$$M_q = \sqrt{\left(\frac{3x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{10x^2 + 6x + 1} \text{ avec } x \geq 1$$

Pour qu'il y ait une convergence, il faut que cette moyenne soit inférieure à l'unité. C'est-à-dire que la suite de Syracuse décroît (< 1). Soit :

$$1 \geq M_q \geq 0 \rightarrow 1 \geq \frac{1}{2} \sqrt{10x^2 + 6x + 1} \geq 0$$

D'où :

$$4 \geq 10x^2 + 6x + 1 \geq 0$$

Soit le système :

$$\begin{cases} 10x^2 + 6x + 1 \geq 0 \rightarrow \text{toujours vrai puisque } x \geq 1 \\ 10x^2 + 6x - 3 \leq 0 \end{cases}$$

La seconde inéquation admet les deux solutions suivantes :

$$x = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{39}}{6} \approx 0,54; \frac{-3 - \sqrt{39}}{6} \approx -1,54 \right\}$$

D'où :

$$M_q \leq 1 \text{ ssi } \frac{-3 + \sqrt{39}}{6} \geq x \geq \frac{-3 - \sqrt{39}}{6}$$

Or,

$$x \geq 1 \rightarrow M_q \text{ ne peut pas être inférieur à } 1!$$

Cette moyenne quadratique n'est donc pas décroissante, et dans tous les cas.

7. Moyenne quadratique des itérés

Etudions une autre approche de moyenne quadratique en prenant les formes itérés n fois toujours pairs et n fois toujours impairs de la suite de Syracuse. Ainsi, on pose :

$$M_{qn} = \sqrt{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n (x+1) - 1\right)^2 + \left(\frac{x}{2^n}\right)^2} = \frac{1}{2^n} \sqrt{(3^{2n} + 1)x^2 + 2(3^n - 2^n)3^n x + (3^n - 2^n)^2}$$

avec $x \geq 1$ et $n \geq 1$

De même que précédemment, pour qu'il y ait une convergence, il faut que cette moyenne soit inférieure à l'unité. C'est-à-dire que la suite de Syracuse décroît (< 1). Soit :

$$1 \geq M_{qn} \geq 0 \rightarrow 1 \geq \frac{1}{2^n} \sqrt{(3^{2n} + 1)x^2 + 2(3^n - 2^n)3^n x + (3^n - 2^n)^2} \geq 0$$

D'où :

$$2^{2n} \geq (3^{2n} + 1)x^2 + 2(3^n - 2^n)3^n x + (3^n - 2^n)^2 \geq 0$$

Soit le système :

$$\begin{cases} (3^{2n} + 1)x^2 + 2(3^n - 2^n)3^n x + (3^n - 2^n)^2 \geq 0 \rightarrow \text{toujours vrai puisque } x \geq 1 \\ (3^{2n} + 1)x^2 + 2(3^n - 2^n)3^n x + (3^n - 2^n)^2 - 2^{2n} \leq 0 \end{cases}$$

La seconde inéquation admet les deux solutions suivantes :

$$x = \frac{-(3^n - 2^n)3^n \pm \sqrt{(3^{2n} + 1)2^{2n} - (3^n - 2^n)^2}}{(3^{2n} + 1)} = \frac{-(3^n - 2^n)3^n \pm \sqrt{3^n(3^n(2^{2n} - 1) + 2^{n+1})}}{(3^{2n} + 1)}$$

D'où :

$$M_q \leq 1 \text{ ssi :}$$

$$\frac{-(3^n - 2^n)3^n + \sqrt{3^n(3^n(2^{2n} - 1) + 2^{n+1})}}{(3^{2n} + 1)} \geq x \geq \frac{-(3^n - 2^n)3^n - \sqrt{3^n(3^n(2^{2n} - 1) + 2^{n+1})}}{(3^{2n} + 1)}$$

Or,

$$x \geq 1 \rightarrow M_q \text{ ne peut pas être inférieur à } 1 \forall n \geq 1 !$$

Cette moyenne quadratique n'est donc pas décroissante, et dans tous les cas.

8. Moyenne de Heinz

Cette moyenne permet de calculer une moyenne entre la moyenne arithmétique et la géométrique. C'est-à-dire :

$$H_{\frac{1}{2}}(x, y) = \sqrt{x \cdot y} < H_n(x, y) < H_0(x, y) = \frac{x + y}{2}$$

Elle est définie par :

$$H_n(x, y) = \frac{x^n y^{1-n} + x^{1-n} y^n}{2} \text{ avec } 0 < n < \frac{1}{2}$$

Appliquée à la suite de Syracuse, on obtient simplement :

$$H_x(U_n(N), U_{n+1}(N)) = \frac{U_n(N)^x U_{n+1}(N)^{1-x} + U_n(N)^{1-x} U_{n+1}(N)^x}{2} \text{ avec } 0 < x < \frac{1}{2}$$

$$H_x(U_n(N), U_{n+1}(N)) = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{4} (2^x + 2^{1-x}) & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{U_n(N)}{2} \left(2^{-x} \left(3 + \frac{1}{U_n(N)} \right)^x + 2^{x-1} \left(3 + \frac{1}{U_n(N)} \right)^{1-x} \right) & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

Soit l'encadrement suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,75 = \frac{3}{4} \geq \frac{H_x(U_n(N), U_{n+1}(N))}{U_n(N)} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71 \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ 1,50 = \frac{3}{2} \geq \frac{1}{4} \left(5 + \frac{1}{U_n(N)} \right) \geq \frac{H_x(U_n(N), U_{n+1}(N))}{U_n(N)} \geq \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2U_n(N)}} \geq \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,22 \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{array} \right.$$

9. Suite pseudo complémentaire

On peut tout à fait reprendre ces calculs de moyennes, sommes et produits en les appliquant à la suite de Syracuse pseudo complémentaire $W(N)$. On aura alors d'autres équations que l'on sait ramener à la suite de Syracuse à l'aide des relations déjà vues entre $W(N)$ et $U(N)$.

3.Approche trigonométrique

Soit les fonctions I et P déterminantes de la parité comme suit :

Si x est pair : I(x) = 0 et P(x) = 1

Si x est impair : I(x) = 1 et P(x) = 0

Alors la conjecture simplifiée de Syracuse se limite à l'équation :

$$U_{n+1}(N) = P(U_n(N)) \frac{U_n(N)}{2} + I(U_n(N)) \frac{3U_n(N) + 1}{2}$$

Puis on choisit les équations trigonométriques suivantes qui vérifient les règles énoncées ci-dessus :

$$I(x) = \frac{1 - \cos(\pi x)}{2} = \frac{1 - (-1)^x}{2} = \frac{2 - e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{4} = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$P(x) = \frac{1 + \cos(\pi x)}{2} = \frac{1 + (-1)^x}{2} = \frac{2 + e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{4} = \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$\forall x \in \mathbb{N} \text{ et } x > 0$

A la marge et sachant que :

$$\frac{d^n e^{-x}}{dx} = (-1)^n e^{-x} \rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n f(x)$$

Alors les fonctions de sélections paires et impaires pourraient également s'écrire :

$$P = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{f^{(n)}(x)}{f(x)} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(-1)^n f(x)}{f(x)} \right) = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{f^{(n)}(x)}{f(x)} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(-1)^n f(x)}{f(x)} \right) = \frac{1 - (-1)^n}{2}$$

La conjecture de Syracuse devient après factorisation au choix :

$$U_{n+1}(N) = \frac{1}{4} \left(4U_n(N) + 1 - (2U_n(N) + 1) \cos(\pi U_n(N)) \right)$$

$$U_{n+1}(N) = \frac{1}{4} \left(4U_n(N) + 1 - (2U_n(N) + 1) (-1)^{U_n(N)} \right)$$

$$U_{n+1}(N) = \frac{1}{4} \left(4U_n(N) + 1 - \left(U_n(N) + \frac{1}{2} \right) (e^{i\pi U_n(N)} + e^{-i\pi U_n(N)}) \right)$$

$$U_{n+1}(N) = \frac{1}{2} \left((3U_n(N) + 1) \sin^2\left(\frac{\pi}{2} U_n(N)\right) + U_n(N) \cos^2\left(\frac{\pi}{2} U_n(N)\right) \right)$$

De plus, avec :

$$\cos(2a) = 2 \cos^2(a) - 1$$

On trouve également les deux équations suivantes :

$$U_{n+1}(N) = \frac{1}{2} \left(3U_n(N) + 1 - (2U_n(N) + 1) \cos^2\left(\frac{\pi U_n(N)}{2}\right) \right)$$

$$U_{n+1}(N) = \frac{1}{2} \left(U_n(N) + (2U_n(N) + 1) \sin^2\left(\frac{\pi U_n(N)}{2}\right) \right)$$

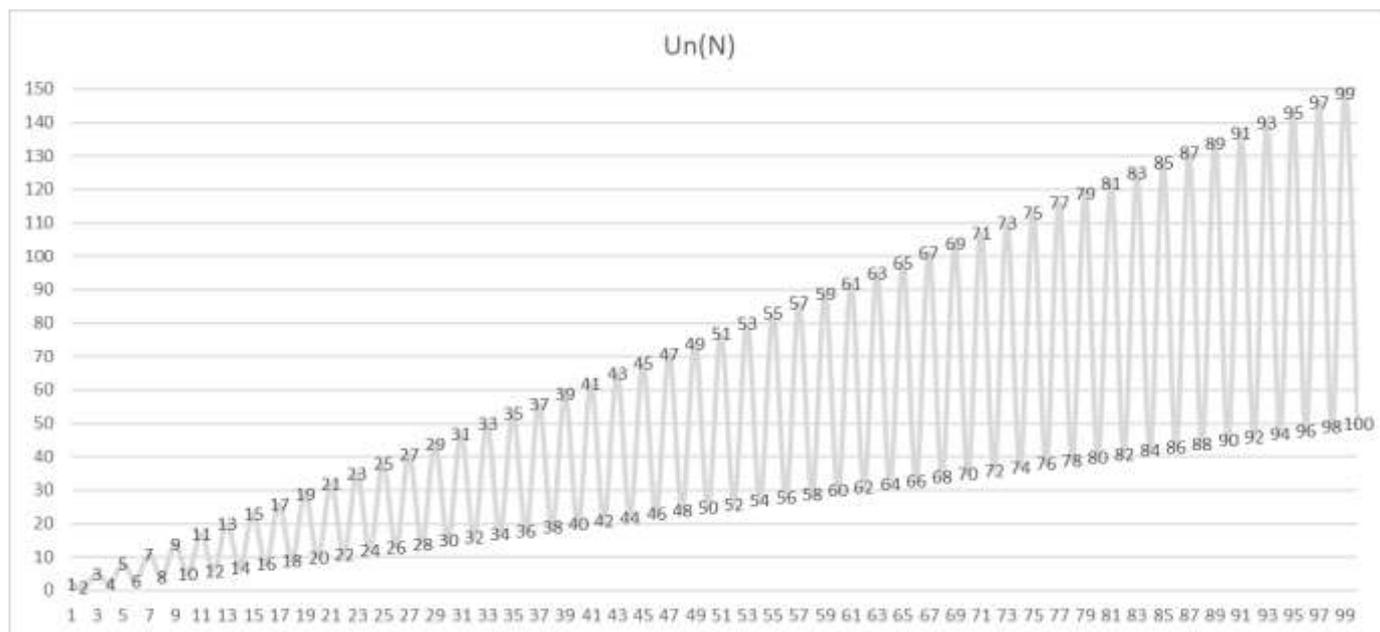
Test de vérification des équations $U_{n+1}(N)$ ci-dessus :

Si $U_n(N)$ est pair alors on retrouve bien : $U_{n+1}(N) = \frac{U_n(N)}{2}$

Si $U_n(N)$ est impair alors on retrouve bien : $U_{n+1}(N) = \frac{3U_n(N)+1}{2}$

Voici une représentation graphique de ces équations ou l'on voit bien la droite :

- $\frac{x}{2}$ Correspondante aux nombres pairs et,
- $\frac{3x+1}{2}$ Correspondante aux nombres impairs :



La promesse de ces équations réside dans le fait qu'une seule et unique équation permet de définir la suite. Le fait d'ôter la condition de parité promet a priori une simplification du problème.

En pratique, la conjecture a encore montré toute sa difficulté à être résolue. Et malheureusement ces équations s'avèrent bien difficiles à manipuler et ne simplifient en définitif pas le problème.

Ces équations sont l'ensemble des solutions d'un rang à l'autre mais ne définissent en aucun cas un vol. il faut toujours parcourir rang après rang pour connaître le vol d'une valeur. Si ces équations trigonométriques pouvaient simplement se simplifier par itérations on aurait un modèle simplifié et généralisé. Mais malheureusement on n'est loin d'avoir ce cas ici.

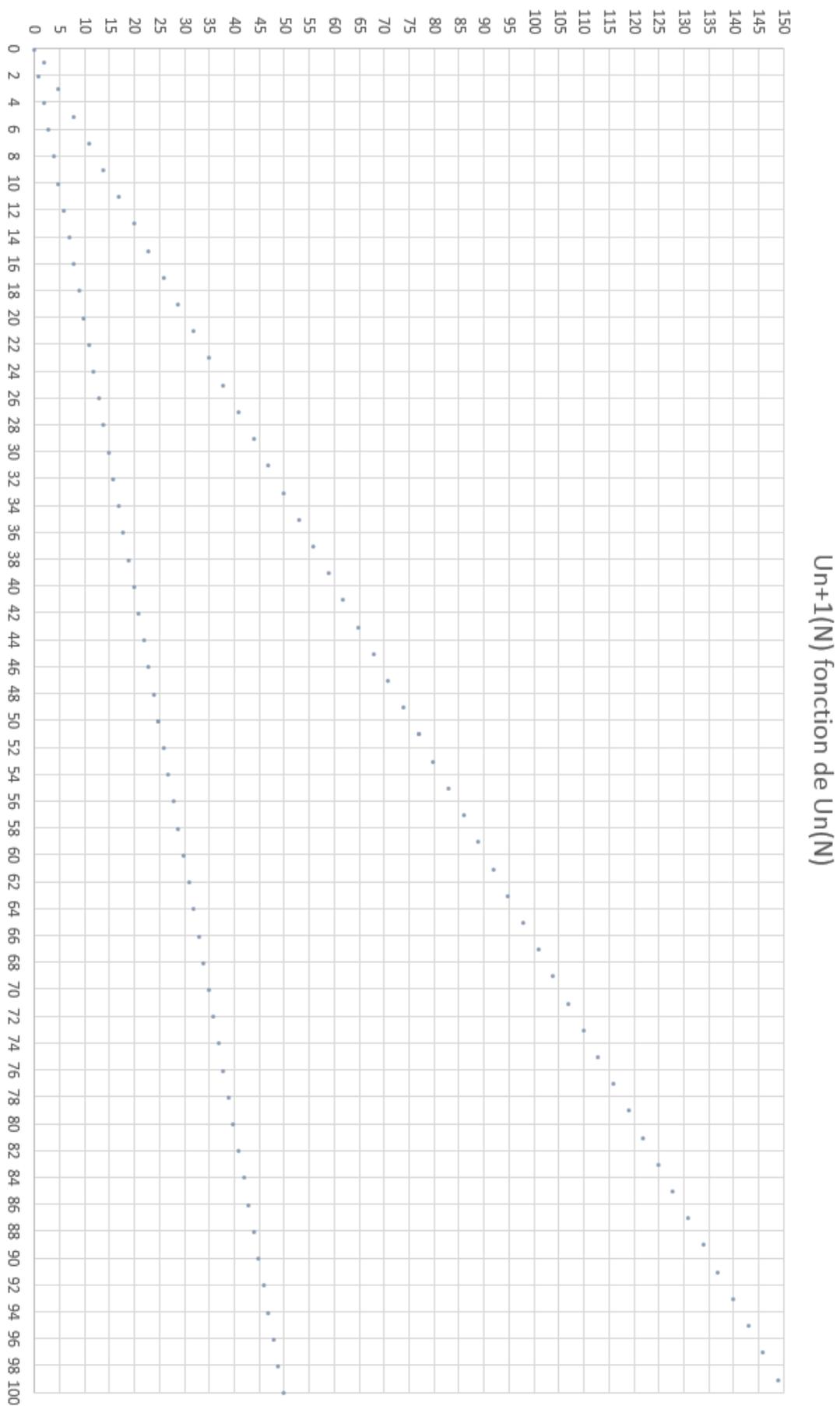
1. Papier quadrillé pour tracer un vol i de N jusqu'à 100

La page suivante vous permet de tracer les vols i pour les $N \leq 100$ sur papier quadrillé. Pour cela il vous suffit de :

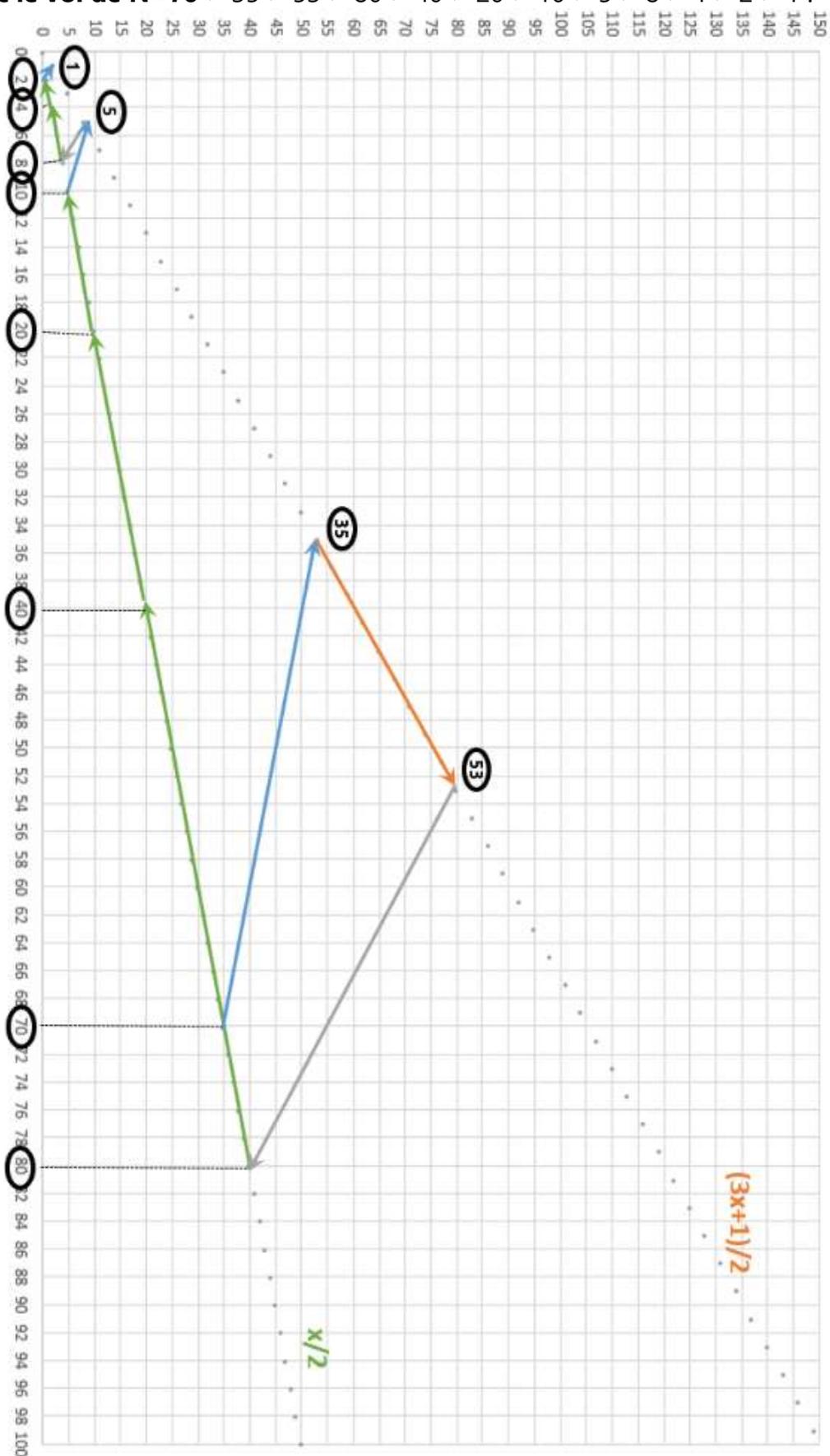
1. Choisir un nombre de départ N et de le reporter sur l'abscisse,
2. Tracer une droite verticale jusqu'à ce qu'elle corresponde à un point sur le quadrillage :
droite $\frac{x}{2}$ si N est pair ou $\frac{3x+1}{2}$ si N est impair,
3. A partir de ce point d'intersection, reporter la valeur de l'ordonnée sur l'abscisse et recommencer l'étape précédente (2) jusqu'à atteindre 1.

Ce papier quadrillé est suivi de deux exemples de vol pour $N=70$ et 84.

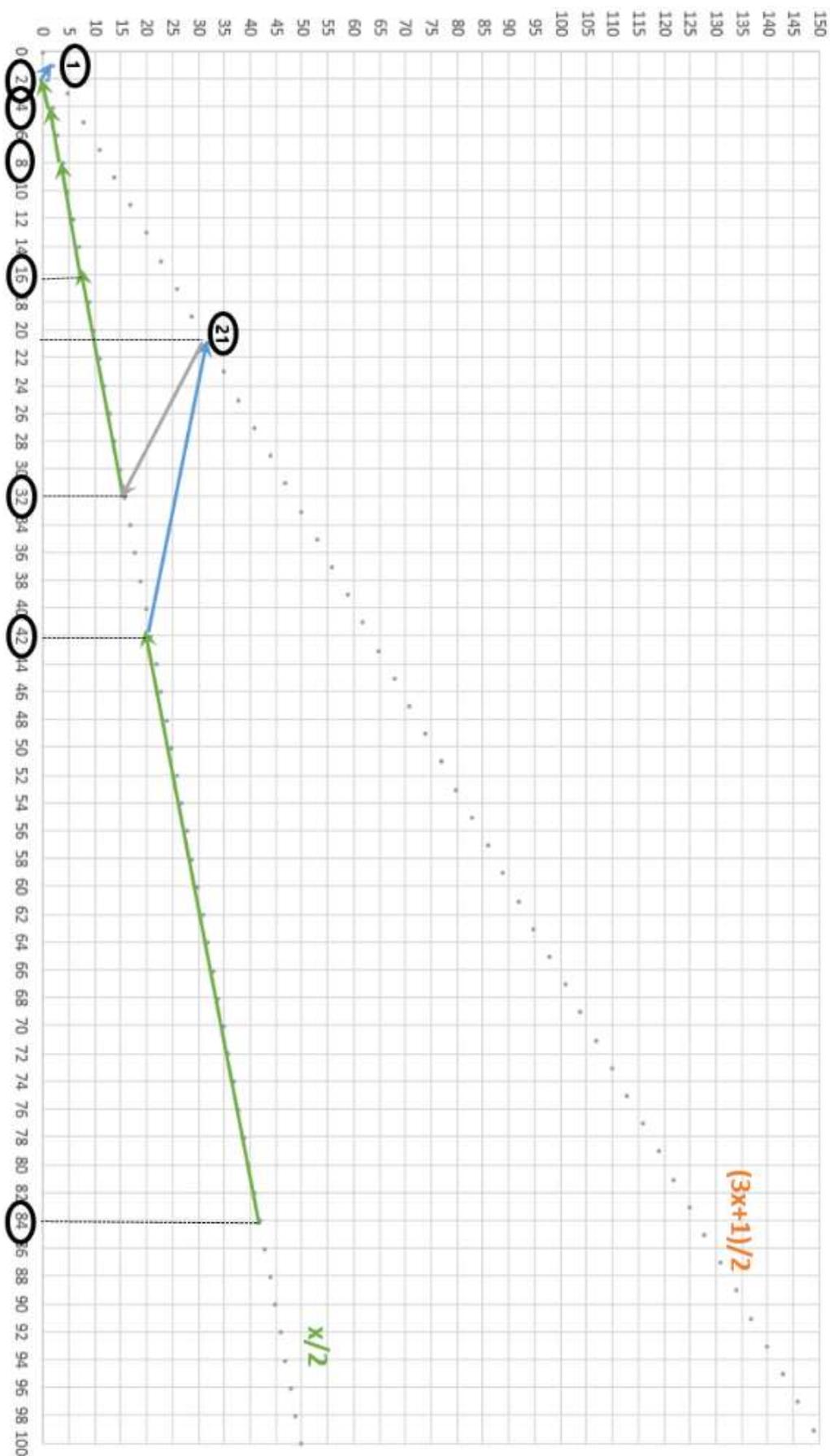
Des explications complémentaires dans le chapitre dédié aux parcours de droites apportent des éléments utiles à la compréhension graphique et analytique des parcours des vols de la suite de Syracuse.



Exemple avec le vol de $N=70 > 35 > 53 > 80 > 40 > 20 > 10 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1$:



Exemple avec le vol de $N=84 > 42 > 21 > 32 > 16 > 8 > 4 > 2 > 1$:



2. Convergence trigonométrique

Si on conjecture qu'un seul cycle final existe, à partir du rang $i-1$ de N , et qu'il vaut toujours 1 après une valeur paire et 2 après une valeur impaire, alors ce cycle se définit sous les formes trigonométriques équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
 U_{i+k}(N) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}U_{i+k-1}(N)\right) + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}U_{i+k-1}(N)\right) \text{ avec } k \geq 0 \\
 U_{i+k}(N) &= \frac{3 - \cos(\pi U_{i+k-1}(N))}{2} = \frac{3 - (-1)^{U_{i+k-1}(N)}}{2} \\
 U_{i+k}(N) &= 2 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}U_{i+k-1}(N)\right) = 1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}U_{i+k-1}(N)\right)
 \end{aligned}$$

Explication : on a tout simplement mis 1 lorsque la valeur est paire (cosinus au carré) et 2 lorsqu'elle est impaire (sinus au carré).

De ce fait si on retranche cette équation à la suite de Syracuse et que l'on cherche son zéro (où elle s'annule), on saura qu'elle converge bien vers ce cycle. Soit à résoudre au choix :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4}(4U_n(N) + 1 - (2U_n(N) + 1)\cos(\pi U_n(N))) - \frac{3 - \cos(\pi U_n(N))}{2} &= 0 \\
 \frac{1}{4}(4U_n(N) + 1 - (2U_n(N) + 1)(-1)^{U_n(N)}) - \frac{3 - (-1)^{U_n(N)}}{2} &= 0 \\
 \frac{1}{2}\left((3U_n(N) + 1)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}U_n(N)\right) + U_n(N)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}U_n(N)\right)\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}U_n(N)\right) - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}U_n(N)\right) &= 0 \\
 \frac{1}{2}\left(3U_n(N) + 1 - (2U_n(N) + 1)\cos^2\left(\frac{\pi U_n(N)}{2}\right)\right) - 2 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}U_n(N)\right) &= 0 \\
 \frac{1}{2}\left(U_n(N) + (2U_n(N) + 1)\sin^2\left(\frac{\pi U_n(N)}{2}\right)\right) - 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}U_n(N)\right) &= 0
 \end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4}(4U_n(N) - 5 + (1 - 2U_n(N))\cos(\pi U_n(N))) &= 0 \\
 \frac{1}{4}(4U_n(N) - 5 + (1 - 2U_n(N))(-1)^{U_n(N)}) &= 0 \\
 \frac{1}{2}\left(3(U_n(N) - 1)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}U_n(N)\right) + (U_n(N) - 2)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}U_n(N)\right)\right) &= 0 \\
 \frac{1}{2}\left(3(U_n(N) - 1) + (1 - 2U_n(N))\cos^2\left(\frac{\pi U_n(N)}{2}\right)\right) &= 0 \\
 \frac{1}{2}\left(U_n(N) - 2 + (2U_n(N) - 1)\sin^2\left(\frac{\pi U_n(N)}{2}\right)\right) &= 0
 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{cases}
 4U_n(N) - 5 + (1 - 2U_n(N)) = 0 \rightarrow U_n(N) = 2 \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\
 4U_n(N) - 5 - (1 - 2U_n(N)) = 0 \rightarrow U_n(N) = 1 \text{ si } U_n(N) \text{ impair}
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 (U_n(N) - 2) = 0 \rightarrow U_n(N) = 2 \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\
 3(U_n(N) - 1) = 0 \rightarrow U_n(N) = 1 \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \\
 3(U_n(N) - 1) + (1 - 2U_n(N)) = 0 \rightarrow U_n(N) = 2 \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\
 \begin{cases}
 3(U_n(N) - 1) = 0 \rightarrow U_n(N) = 1 \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \\
 U_n(N) - 2 = 0 \rightarrow U_n(N) = 2 \text{ si } U_n(N) \text{ pair}
 \end{cases} \\
 U_n(N) - 2 + (2U_n(N) - 1) = 0 \rightarrow U_n(N) = 1 \text{ si } U_n(N) \text{ impair}
 \end{cases}$$

On a donc bien un cycle final $\{1, 2\}$.

3. Autres formes trigonométriques

On peut également trouver d'autres équations trigonométriques de $U_n(N)$ avec les relations connues suivantes :

$$\text{avec : } \frac{\pi}{2} - a = \pi U_n(N), \text{ on a : } a = -\frac{\pi U_n(N)}{2}$$

D'où :

$$\cos(\pi U_n(N)) = \sin\left(-\frac{\pi U_n(N)}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi U_n(N)}{2}\right)$$

$$\sin(\pi U_n(N)) = \cos\left(-\frac{\pi U_n(N)}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi U_n(N)}{2}\right)$$

Et avec :

$$\pi - a = \pi U_n(N), \text{ on a : } a = \pi(1 - U_n(N))$$

D'où :

$$\cos(\pi U_n(N)) = -\cos(\pi(1 - U_n(N)))$$

Et :

$$\frac{1 - \cos(\pi U_n(N))}{2} = \frac{1 + \cos(\pi(U_n(N) + 1))}{2}$$

Je vous laisse le soin d'en trouver d'autres équivalentes.

~

Il existe encore d'autres façons de présenter notre suite de Syracuse. Pour relier les entiers à une forme réelle, voici une autre relation tout à fait intéressante. On utilise une courbe Gaussienne, appelée aussi loi normale en probabilité, que l'on positionne sur chacune des valeurs entières, comme un filtre ou une fenêtre, et que l'on annule partout ailleurs. Ce qui donne à partir de :

$$e^{-x^2}$$

L'approximation suivante :

$$h \cdot e^{-a(x-x_0)^2}$$

h représente la hauteur de la Gaussienne au point x_0 : différente selon que x_0 soit pair ou impair ; a représente l'accélération à laquelle la Gaussienne retourne à 0 pour tout x différent de x_0 .

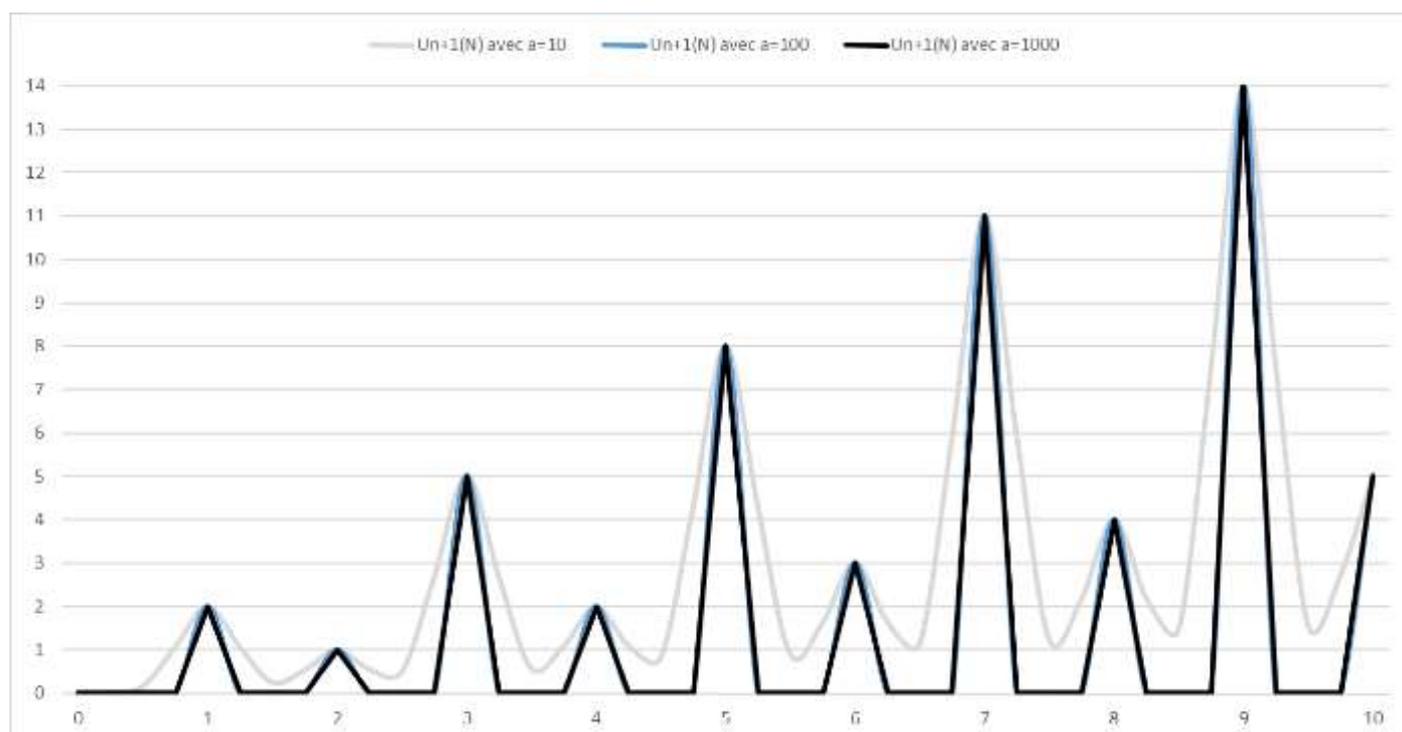
Pour respecter les règles de parité de notre suite, on remplace x_0 par $2k$ (respectivement par $2k+1$) et la hauteur sera $\frac{2k}{2} = k$ (respectivement $\frac{3(2k+1)+1}{2} = 3k + 2$). Enfin on additionne toutes ces Gaussiennes pour chacune des valeurs entières positives. Ce qui en définitif donne :

$$U_{n+1}(N) = \sum_{k=0}^{\infty} (k \cdot e^{-a(U_n(N)-2k)^2} + (3k + 2) e^{-a(U_n(N)-2k-1)^2})$$

Et pour la suite pseudo complémentaire, on obtient de la même manière :

$$W_{n+1}(N) = \sum_{k=0}^{\infty} (3k \cdot e^{-a(W_n(N)-2k)^2} + (k + 1) e^{-a(W_n(N)-2k-1)^2})$$

A noter que cette somme comporte, si a suffisamment grand, qu'un seul terme positif par $U_n(N)$ fixé. Cette équation est représentée dans le graphique suivant :



On retrouve bien les 2 droites $x/2$ pour les valeurs paires, et $(3x+1)/2$ pour les valeurs impaires, et zéro dans tous les autres cas de valeurs réelles (non entières). Plus a est grand plus la courbe est proche d'impulsions de Dirac uniquement sur toutes les valeurs entières.

Cette courbe équivaut à l'équation trigonométrique précédemment présentée avec des exposants pairs bien plus grand :

$$U_{n+1}(N) = \frac{U_n(N)}{2} \cos^{2k} \left(\frac{\pi U_n(N)}{2} \right) + \frac{3U_n(N) + 1}{2} \sin^{2k} \left(\frac{\pi U_n(N)}{2} \right) \text{ avec } k > 10^3$$

On a donc la relation :

$$U_{n+1}(N) = \sum_{k=0}^{\infty} (k \cdot e^{-a(U_n(N)-2k)^2} + (3k + 2)e^{-a(U_n(N)-2k-1)^2}) \\ \approx \frac{U_n(N)}{2} \cos^{2a} \left(\frac{\pi U_n(N)}{2} \right) + \frac{3U_n(N) + 1}{2} \sin^{2a} \left(\frac{\pi U_n(N)}{2} \right) \text{ avec } a > 10^3$$

Enfin, on peut simplifier l'équation à l'aide des valeurs absolues plutôt que les carrés, il vient :

$$U_{n+1}(N) = \sum_{k=0}^{\infty} (k \cdot e^{-a|U_n(N)-2k|} + (3k + 2)e^{-a|U_n(N)-2k-1|})$$

Cette forme d'équation en valeur absolue s'apparente cette fois-ci à une loi ou une distribution de Laplace appelée densité de distribution en probabilité. Elle diffère quelque peu de la loi normale dite Gaussienne.

La différence qu'avec les carrés (Gaussienne) c'est la courbure ou l'angle au sommet des valeurs entières. Il est obtus pour les carrés (arrondi comme pour les paraboles) et aigu pour les valeurs absolues (en pointe). Si bien que l'équation avec les valeurs absolues est à la fois plus simple et plus précise (elle atteint plus rapidement le zéro)

Si a est suffisamment grand, la somme géométrique se confond avec l'intégrale réelle suivante puisque seul pour des valeurs $U_n(N)$ entières on obtient des valeurs entières et différentes de zéro :

$$U_{n+1}(N) = \int_{k=0}^{\infty} (k \cdot e^{-a(U_n(N)-2k)^2} + (3k + 2)e^{-a(U_n(N)-2k-1)^2}) dk$$

Soit en intégrant cette Gaussienne :

$$U_{n+1}(N) = \frac{1}{8a} \left(-\sqrt{a\pi}(1 + 4U_n(N)) + e^{-a \cdot U_n(N)^2} (1 + 3e^{-(a-2U_n(N))}) \right)$$

En considérant a suffisamment grand, on obtient :

$$U_{n+1}(N) \approx -\frac{\sqrt{\pi}(4U_n(N) + 1)}{\sqrt{a} \cdot 8}$$

On procède de la même manière avec une autre forme d'impulsions de Dirac vu précédemment dans cet ouvrage, soit :

$$U_{n+1}(N) = 4 \int_{k=0}^{\infty} \left(\frac{ke^{a(U_n(N)-2k)}}{(1 + e^{a(U_n(N)-2k)})^2} + \frac{(3k+2)e^{a(U_n(N)-2k-1)}}{(1 + e^{a(U_n(N)-2k-1)})^2} \right) dk$$

Et en intégrant cette équation, on obtient :

$$U_{n+1}(N) = \left(-\frac{2ke^{a(U_n(N)-2k)}}{a(e^{a(U_n(N)-2k)} + 1)} - \frac{\ln(e^{a(U_n(N)-2k)} + 1)}{a^2} + \frac{6k}{a} - \frac{3}{a^2} \ln(e^{a(U_n(N)+2k+1)} + e^{2aU_n(N)}) - \frac{2(3k+2)e^{aU_n(N)}}{a(e^{aU_n(N)} + e^{a(2k+1)})} \right)_{k=0}^{\infty}$$

$$U_{n+1}(N) = \frac{1}{a^2} \left(\ln(e^{aU_n(N)} + 1) + 3 \ln(e^{a(U_n(N)+1)} + e^{2aU_n(N)}) + \frac{4ae^{aU_n(N)}}{e^{aU_n(N)} + e^a} \right)$$

Et si a est suffisamment grand, on a :

$$U_{n+1}(N) \approx \frac{7U_n(N) + 4}{a}$$

Malheureusement ces deux solutions d'intégration et d'approximation ne sont pas utiles dans notre recherche.

~

On déduit également d'autres formes trigonométriques suites aux résultats de ce chapitre :

$$U_{n+1}(N) = \frac{1}{2} \left(U_n(N) \left| \cos \left(\frac{\pi U_n(N)}{2} \right) \right| + (3U_n(N) + 1) \left| \sin \left(\frac{\pi U_n(N)}{2} \right) \right| \right)$$

$$U_{n+1}(N) = \frac{U_n(N)}{2} + \left(U_n(N) + \frac{1}{2} \right) \left| \sin \left(\frac{\pi U_n(N)}{2} \right) \right|$$

$$U_{n+1}(N) = \frac{3U_n(N) + 1}{2} - \left(U_n(N) + \frac{1}{2} \right) \left| \cos \left(\frac{\pi U_n(N)}{2} \right) \right|$$

De plus, sachant que :

$$a^0 = 1 \text{ et } a^1 = a \quad \forall a$$

On peut également écrire l'équation trigonométrique de la suite de Syracuse comme suit :

$$U_{n+1}(N) = \frac{1}{2} \left(3 \left| \sin \left(\frac{\pi U_n(N)}{2} \right) \right| U_n(N) + \left| \sin \left(\frac{\pi U_n(N)}{2} \right) \right| \right)$$

$$U_{n+1}(N) = \frac{1}{2} \left(3^{\sin^2 \left(\frac{\pi U_n(N)}{2} \right)} U_n(N) + \sin^2 \left(\frac{\pi U_n(N)}{2} \right) \right)$$

~

On peut également reprendre cette équation exponentielle pour le cycle final comme suit :

$$U_{i+p+k}(N) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-a(U_{i+p-1}(N)-2k)^2} + 2e^{-a(U_{i+p-1}(N)-2k-1)^2} \right) \quad \forall p \geq 0$$

On retrouve bien 1 ou 2 selon la parité de U.

Si on soustrait ce cycle final à la suite de Syracuse sous forme trigonométrique, on obtient a priori une suite finie dans tous les cas. C'est-à-dire qu'au-delà du rang i correspondant au cycle final, on devrait trouver zéro à chaque rang. On recherche donc son zéro pour obtenir :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left((k-1)e^{-a(U_n(N)-2k)^2} + 3ke^{-a(U_n(N)-2k-1)^2} \right) = 0$$

Soit les 2 cas de zéro possibles suivants :

$$\begin{cases} \dots + 0 + 0 + (k-1) + 0 + 0 + \dots = 0 \rightarrow k = 1 \text{ si } U_n(N) = 2k \text{ (pair) soit } U_n(N) = 2 \\ \dots + 0 + 0 + 3k + 0 + 0 + \dots = 0 \rightarrow k = 0 \text{ si } U_n(N) = 2k + 1 \text{ (impair) soit } U_n(N) = 1 \end{cases}$$

On retrouve bien la convergence vers le cycle final {1, 2}.

~

Et oui encore d'autres formes peuvent être élaborées. Comment ? en voici une autre tout à fait intéressante :

$$U_{n+1}(N) = \left(\frac{U_n(N)}{2} - f\left(\frac{U_n(N)}{2}\right) \right) (3U_n(N) + 1) + \frac{U_n(N)}{2}$$

Avec f une fonction en escalier, c'est-à-dire :

$$f(x) = \text{valeur entiere}(x) \forall x \geq 0$$

Soit en simplifiant :

$$U_{n+1}(N) = (3U_n(N) + 2) \frac{U_n(N)}{2} - (3U_n(N) + 1) f\left(\frac{U_n(N)}{2}\right)$$

Quelques explications s'imposent. Cette équation est issue d'un raisonnement simple que je livre ici. Prenez un nombre entier positif et divisez-le par 2. S'il était pair votre division donne un nombre entier, s'il était impair elle donne un nombre entier + 1/2. Si on retranche de cette division la valeur entière de cette même division, on obtient 0 si votre valeur de départ était paire et 1/2 si elle était impaire. Si bien que l'on sait séparer la parité et ainsi multiplier cette différence par le cas impair x2 de la suite de Syracuse si la valeur de départ est impaire et ajouter le cas pair de la suite de Syracuse pour la valeur de départ paire.

Il faut donc maintenant construire f. Plusieurs options sont possibles. En voici quelques-unes ci-dessous.

On cherche une courbe qui vaut 1 pour chaque nombre entier et zéro partout ailleurs. Ensuite on intègre cette courbe pour avoir une courbe cumulée (somme des surfaces) de la 1^{ère} pour avoir des marches d'escalier unitaires. Soit :

$$f(x) = \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} \delta(x - k) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int \delta(x - k) dx \right) = \sum_{k=1}^{\infty} H(x - k)$$

H est la fonction de Heaviside tel que :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ soit : } H(x - k) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Voilà par exemple 8 courbes qui répondent à cette forme :

$$f(x) = \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-a(x-k)^2} \right) dx; f(x) = \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-a|x-k|} \right) dx$$

$$f(x) = 2b \int \sin^{2a} \left(\frac{\pi}{2} x \right) dx = \frac{b}{2^{a-1}} \int (\cos(\pi x) - 1)^a dx \quad (b = 1 \text{ si } a = 1)$$

$$f(x) = 2b \int \cos^{2a}(\pi x) dx = \frac{b}{2^{a-1}} \int (\cos(2\pi x) + 1)^a dx \quad (b = 1 \text{ si } a = 1)$$

$$f(x) = 2 \int \left| \sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right| dx; f(x) = 2 \int |\cos(\pi x)| dx$$

$$f(x) = \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a(x-k)^2 + 1} \right) dx; f(x) = \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a|x-k| + 1} \right) dx$$

On peut également remplacer le carré ou la valeur absolue ci-dessus par des racines carrées du carré ($\sqrt{y^2}$). Mais les calculs se compliqueraient.

A noter que l'ordre des opérations des sommes et des intégrales sont interchangeable puisqu'il s'agit d'additions. On choisit de calculer d'abord les intégrales puis les séries (sommes entières).

On choisira par exemple comme fonction f l'équation suivante avec laquelle on obtient :

$$f(x) = \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a(x-k)^2 + 1} \right) dx = -\frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{k=1}^{\infty} \text{atan}(\sqrt{a}(k-x))$$

Ce qui nous donne finalement :

$$U_{n+1}(N) = \frac{3U_n(N) + 2}{2} U_n(N) + \frac{3U_n(N) + 1}{\sqrt{a}} \sum_{k=1}^{\infty} \text{atan} \left(\sqrt{a} \left(k - \frac{U_n(N)}{2} \right) \right)$$

Malheureusement, cette représentation nouvelle ne permet pas de simplifier ou d'obtenir des informations supplémentaires utiles pour la suite.

~

Enfin, on peut chercher de nouvelles autres formes trigonométriques avec les fonctions paires et impaires comme suit :

$$P(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } I(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \rightarrow I + P = 1$$

On a donc :

$$U_{n+1}(N) = \frac{3U_n(N) + 1}{2} I(U_n(N)) + \frac{U_n(N)}{2} P(U_n(N)) \\ = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} (3I + P) + \frac{I}{2} = \begin{cases} U_n(N) \left(\frac{1}{2} + I \right) + \frac{I}{2} = \frac{1}{2} (U_n(N) + (2U_n(N) + 1)I) \\ \frac{1}{2} (2U_n(N) + U_n(N)(I - P) + I) \end{cases} \\ \frac{U_n(N)}{2} (3 - 2P) + \frac{1 - P}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} (3U_n(N) + 1 - (2U_n(N) + 1)P) \\ \frac{1}{2} (U_n(N)(2I + 1) + 1 - P) \end{cases} \end{cases}$$

Selon le choix de la forme des fonctions I et P, les 4 équations ci-dessus peuvent s'écrire de différentes manières.

De même, pour la suite trigonométrique pseudo complémentaire de Syracuse, on a :

$$W_{n+1}(N) = \frac{W_n(N) + 1}{2} I(W_n(N)) + \frac{3W_n(N)}{2} P(W_n(N)) \\ = \begin{cases} \frac{W_n(N)}{2} (3P + I) + \frac{I}{2} = \begin{cases} W_n(N) \left(\frac{1}{2} + P \right) + \frac{I}{2} = \frac{1}{2} (W_n(N)(1 + 2P) + I) \\ \frac{1}{2} (W_n(N)(3 - 2I) + I) = \frac{1}{2} (3W_n(N) + (1 - 2W_n(N))I) \end{cases} \\ W_n(N) + \frac{W_n(N)}{2} (P - I) + \frac{1 - P}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} (2W_n(N) + W_n(N)(P - I) + I) \\ \frac{1}{2} (W_n(N) + 1 + (2W_n(N) - 1)P) \end{cases} \end{cases}$$

Selon le choix de la forme des fonctions I et P, les 4 équations ci-dessus peuvent s'écrire de manières variées.

Et pour rappel, on peut jongler d'une suite à l'autre avec les relations suivantes :

$$W_n(N) = U_n(N) + 1 \rightarrow U_n(N) + W_n(N) = 2U_n(N) + 1$$

~

Voici encore une autre forme de la suite de Syracuse. Pour cela on prend préalablement le logarithme de la suite comme suit :

$$\begin{aligned} \ln(U_{n+1}(N)) &= \\ \left\{ \begin{array}{l} \ln\left(\frac{U_n(N)}{2}\right) = \ln(U_n(N)) - \ln(2) \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ \ln\left(\frac{3U_n(N)+1}{2}\right) = \ln(3U_n(N)+1) - \ln(2) = \ln\left(U_n(N)\left(3 + \frac{1}{U_n(N)}\right)\right) - \ln(2) \\ \qquad = \ln(U_n(N)) - \ln(2) + \ln\left(3 + \frac{1}{U_n(N)}\right) \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{array} \right. \\ \rightarrow \ln(U_{n+1}(N)) &= \ln(U_n(N)) - \ln(2) + \left(\frac{1 - (-1)^{U_n(N)}}{2}\right) \ln\left(3 + \frac{1}{U_n(N)}\right) \end{aligned}$$

On élève ensuite à l'exponentielle l'équation précédente pour retrouver notre suite :

$$\begin{aligned} \rightarrow U_{n+1}(N) &= e^{\ln(U_{n+1}(N))} = \frac{U_n(N)}{2} \left(3 + \frac{1}{U_n(N)}\right)^{\frac{1 - (-1)^{U_n(N)}}{2}} = \frac{U_n(N)}{2} \left(\sqrt{3 + \frac{1}{U_n(N)}}\right)^{1 - (-1)^{U_n(N)}} \\ U_{n+1}(N) &= \frac{U_n(N)}{2} \sqrt{3 + \frac{1}{U_n(N)}} \left(\sqrt{3 + \frac{1}{U_n(N)}}\right)^{(-1)^{U_n(N)} \pm 1} = \frac{3U_n(N) + 1}{2} \left(\sqrt{3 + \frac{1}{U_n(N)}}\right)^{-1 - (-1)^{U_n(N)}} \\ \rightarrow U_{n+1}(N) &= \frac{U_n(N)}{2} \left(3 + \frac{1}{U_n(N)}\right)^{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}U_n(N)\right)} = \frac{3U_n(N) + 1}{2} \left(3 + \frac{1}{U_n(N)}\right)^{-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}U_n(N)\right)} \end{aligned}$$

Ces équations nouvelles n'apportent malheureusement pas de simplification.

4. Forme discrète à réelle

En faisant la différence d'un rang à l'autre, on introduit les équations différentielles réelles suivantes :

$$U_{n+1}(N) - U_n(N) = \begin{cases} -\frac{U_n(N)}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{U_n(N) + 1}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y' = -\frac{y}{2} & \text{si } y \text{ pair} \rightarrow y = c_P e^{-\frac{x}{2}} \\ y' = \frac{y+1}{2} & \text{si } y \text{ impair} \rightarrow y = c_I e^{\frac{x}{2}} - 1 \end{cases}$$

Et en tenant compte de la condition initiale (pour $x=0$), on a :

$$U_0(N) = N \rightarrow y = N = c_P = c_I - 1 \rightarrow \begin{cases} c_P = N \\ c_I = N + 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow y = \begin{cases} N e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \text{ pair} \\ (N+1)e^{\frac{x}{2}} - 1 & \text{si } x \text{ impair} \end{cases}$$

Soit :

$$\ln(y) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + \ln(N) & \text{si } x \text{ pair} \\ \frac{x}{2} + \ln(N+1) + \ln\left(1 - \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{N+1}\right) & \text{si } x \text{ impair} \end{cases}$$

Par approximation linéaire on pose :

$$\rightarrow y \approx \begin{cases} \frac{N}{1 + \frac{x}{2}} = \frac{2N}{x+2} & \text{si } x \text{ pair} \\ \frac{2(N+1)e^{\frac{x}{2}}}{\left(1 + \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{N+1}\right)\left(2 + \frac{e^{-x}}{(N+1)^2}\right)} & \text{si } x \text{ impair} \end{cases}$$

Car :

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{N+1}\right) &\approx -\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{N+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{N+1}\right)^2 = -\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{N+1} - \frac{e^{-x}}{2(N+1)^2} \\ \rightarrow \ln(y) &\approx \frac{x}{2} + \ln(N+1) - \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{N+1} - \frac{e^{-x}}{2(N+1)^2} \\ \rightarrow y &\approx (N+1)e^{\frac{x}{2}} e^{-\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{N+1}} e^{-\frac{e^{-x}}{2(N+1)^2}} \approx (N+1)e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{1 + \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{N+1}}\right) \left(\frac{1}{1 + \frac{e^{-x}}{2(N+1)^2}}\right) \\ &= \frac{2(N+1)^4 e^{\frac{x}{2}}}{(N+1 + e^{-\frac{x}{2}})(2(N+1)^2 + e^{-x})} = \frac{2(N+1)e^{\frac{x}{2}}}{\left(1 + \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{N+1}\right)\left(2 + \frac{e^{-x}}{(N+1)^2}\right)} \end{aligned}$$

Par récurrence, pour les itérations paires, on trouve :

$$a_n = \frac{N}{1 + \frac{a_{n-1}}{2}} \rightarrow a_n = 2 \left(\frac{N}{\sqrt{2N+1} - 1} - 1 \right) = \sqrt{2N+1} - 1$$

Par exemple :

$$\text{Si } N = a_0 = 40 \rightarrow a_n = \sqrt{2.40 + 1} - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$\text{Si } N = a_0 = 24 \rightarrow a_n = \sqrt{2.24 + 1} - 1 = 7 - 1 = 6$$

$$\text{Si } N = a_0 = 12 \rightarrow a_n = \sqrt{2.12 + 1} - 1 = 5 - 1 = 4$$

Enfin, sous forme trigonométrique, on trouve simplement :

$$\begin{aligned} y &= \left((N+1)e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + Ne^{-\frac{x}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left((N+1)e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) (1 - \cos(\pi x)) + \frac{N}{2} e^{-\frac{x}{2}} (1 + \cos(\pi x)) \\ \rightarrow y &= N \left(\cosh\left(\frac{x}{2}\right) - \sinh\left(\frac{x}{2}\right) \cos(\pi x) \right) + \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \end{aligned}$$

Mais aussi :

$$\begin{aligned} y &= \left((N+1)e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \left(Ne^{-\frac{x}{2}} \right)^{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = Ne^{-\frac{x}{2}} \left(e^x + \frac{e^x - e^{\frac{x}{2}}}{N} \right)^{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \\ \rightarrow y &= Ne^{-\frac{x}{2}} \left(\left(\left(1 + \frac{1}{N} \right) e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{N} \right) e^{\frac{x}{2}} \right)^{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = Ne^{-\frac{x}{2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \left(\left(1 + \frac{1}{N} \right) e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{N} \right)^{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Mais encore, sachant déjà que :

$$U_{n+1}(N) = \frac{U_n(N)}{2} + \frac{2U_n(N) + 1}{2} \sin^2\left(\frac{\pi U_n(N)}{2}\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned} y &= Ne^{-\frac{x}{2}} + \left((N+1)e^{\frac{x}{2}} - Ne^{-\frac{x}{2}} - 1 \right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ y &= Ne^{-\frac{x}{2}} + \left(2N \sinh\left(\frac{x}{2}\right) + e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ y &= N \left(e^{\frac{x}{2}} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) + e^{-\frac{x}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) + \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ y &= \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2} \left(-N(e^x + 1) + e^{\frac{x}{2}} - e^x + \left(N(e^x - 1) - e^{\frac{x}{2}} + e^x \right) \cos(\pi x) \right) \\ y &= e^{-\frac{x}{2}} \left(-N + \left(e^x(N+1) - e^{\frac{x}{2}} - N \right) \frac{\cos(\pi x) - 1}{2} \right) \\ \rightarrow y &= N \left(\cos(\pi x) \sinh\left(\frac{x}{2}\right) - \cosh\left(\frac{x}{2}\right) \right) + \left(1 - e^{\frac{x}{2}} \right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{aligned}$$

On sait également que sous une autre forme équivalente, on a :

$$U_{n+1}(N) = \frac{U_n(N)}{2} \left(3 + \frac{1}{U_n(N)} \right)^{\sin^2\left(\frac{\pi U_n(N)}{2}\right)} = \frac{1}{2} U_n(N) \cos^2\left(\frac{\pi U_n(N)}{2}\right) (3U_n(N) + 1)^{\sin^2\left(\frac{\pi U_n(N)}{2}\right)}$$

Ce qui donne :

$$\rightarrow y = Ne^{-\frac{x}{2}} \left(\left(1 + \frac{1}{N} \right) e^x - \frac{e^{\frac{x}{2}}}{N} \right)^{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$\begin{aligned} y &= \left(Ne^{-\frac{x}{2}} \right)^{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \left((N+1)e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = Ne^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{(N+1)e^{\frac{x}{2}} - 1}{Ne^{-\frac{x}{2}}} \right)^{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \\ &= Ne^{-\frac{x}{2}} \left(\left(1 + \frac{1}{N} \right) e^x - \frac{1}{N} e^{\frac{x}{2}} \right)^{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = Ne^{-\frac{x}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \left(\left(1 + \frac{1}{N} \right) e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{N} \right)^{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \end{aligned}$$

Encore une :

$$\begin{cases} \ln(y) = \ln(N) - \frac{x}{2} \text{ si } x \text{ pair} \\ \ln(y) \approx \ln(N+1) + \frac{x}{2} \text{ si } x \text{ impair} \end{cases}$$

$$\rightarrow \ln(y) \approx \ln(N) - (-1)^x \frac{x}{2}$$

$$\rightarrow y \approx Ne^{-\frac{x}{2} \cos(\pi x)} = \frac{N}{\sqrt{e^{x \cos(\pi x)}}}$$

Toutes ces formes sont à la marge de la suite de Syracuse originelle. Elles n'en sont pas exploitables car leurs équivalences avec la suite sont limitées malgré leurs comportements approchés.

5. Forme complexe dans le cercle trigonométrique

Une autre façon d'observer la suite de Syracuse est de la convertir en une équation en nombres complexes qui prendra comme partie réelle tous les nombres entiers pairs et comme partie imaginaire tous les nombres entiers impairs. On ne sait pas par avance où cette piste mènera. Mais cela donnera peut-être davantage d'information sur cette suite et son comportement caché.

La collecte d'information complémentaire sur cette suite suffit à nourrir les recherches et tenter d'avancer. Toute idée nouvelle est dans ce sens bonne à étudier.

Construisons donc une équation complexe dont la partie réelle correspond à l'itération paire de la suite de Syracuse et la partie imaginaire à l'itération impaire. Ainsi, on a :

$$y_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \left(\frac{3x_n + 1}{2}\right)i \text{ avec } x_0 = N \text{ et } i^2 = -1$$

$$x_{n+1} = \begin{cases} \text{Re}(y_{n+1}) \text{ si } x_n \text{ pair} \\ \text{Im}(y_{n+1}) \text{ si } x_n \text{ impair} \end{cases}$$

Par exemple avec $N=5$ on obtient :

$$x_0 = 5$$

$$y_1 = \frac{5}{2} + 8i \rightarrow x_1 = \text{Im}(y_1) = 8$$

$$y_2 = 4 + \frac{25}{2}i \rightarrow x_2 = \text{Re}(y_2) = 4$$

$$y_3 = 2 + \frac{13}{2}i \rightarrow x_3 = \text{Re}(y_3) = 2$$

$$y_4 = 1 + \frac{7}{2}i : \text{ on retrouve bien en 4 itérations } x_4 = \text{Re}(y_4) = 1$$

$$y_5 = \frac{1}{2} + 2i \rightarrow x_5 = \text{Im}(y_5) = 2 = x_3$$

~

Pour modéliser un tel système, on évalue y à l'aide des formes trigonométriques de la suite de Syracuse. En effet, la suite suit le parcours de deux droites : l'une en $\frac{x}{2}$ et l'autre en $\frac{3x+1}{2}$. Ce qui signifie en langage simple que lorsqu'on avance d'un rang sur l'axe des abscisses (des réels), dans un cas (pour les nombres pairs) on monte de moitié et dans l'autre cas (pour les nombres impairs) on monte une fois et demie ($3/2$) et on ajoute $1/2$. Si bien qu'on pose naturellement pour respecter ces pentes de progressions :

$$y_p = x + \frac{x}{2}i \text{ si } x \text{ pair}$$

$$y_I = x + \left(\frac{3x + 1}{2}\right)i \text{ si } x \text{ impair}$$

Ensuite on construit une seule équation issue des deux précédentes avec un test de parité pour chacune pour avoir la même équation que ci-dessus selon la parité :

$$y = y_P P + y_I I \text{ avec } \begin{cases} P = A + Bi \\ I = C + Di \end{cases}$$

En développant y, on obtient :

$$y = \left(x + \frac{x}{2}i\right)(A + Bi) + \left(x + \left(\frac{3x+1}{2}\right)i\right)(C + Di)$$

$$y = \left(xA - \frac{x}{2}B\right) + \left(\frac{x}{2}A + xB\right)i + \left(xC - \left(\frac{3x+1}{2}\right)D\right) + \left(\left(\frac{3x+1}{2}\right)C + xD\right)i$$

Or :

$$y = \frac{x}{2} + 0i + 0 + \left(\frac{3x+1}{2}\right)i$$

Car la partie réelle de y correspond à la valeur de la parité paire, et la partie imaginaire de y à la valeur de la parité impaire.

Par identification facteur à facteur, on obtient :

$$\begin{aligned} xA - \frac{x}{2}B &= \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2}A + xB &= 0 \\ xC - \left(\frac{3x+1}{2}\right)D &= 0 \\ \left(\frac{3x+1}{2}\right)C + xD &= \frac{3x+1}{2} \end{aligned}$$

Soit :

$$P = A + Bi = \frac{2-i}{5} \text{ avec } \begin{cases} A = \frac{2}{5} \\ B = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Et :

$$I = C + Di = \frac{1}{\frac{2x}{3x+1} + i} \text{ avec } \begin{cases} C = \frac{(3x+1)^2}{4x^2 + (3x+1)^2} \\ D = \frac{2x(3x+1)}{4x^2 + (3x+1)^2} \end{cases}$$

Car :

$$I = \frac{3x+1}{4x^2 + (3x+1)^2} (3x+1 + 2xi) = \frac{3x+1}{2x + (3x+1)i} = \frac{1}{\frac{2x}{3x+1} + i}$$

D'où la vérification suivante :

$$y = \left(x + \frac{x}{2}i\right)\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right) + \left(x + \left(\frac{3x+1}{2}\right)i\right)\left(\frac{3x+1}{4x^2 + (3x+1)^2}\right)(3x+1 + 2xi)$$

$$y = \left(x + \frac{x}{2}i\right)\left(\frac{2-i}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3x+1}{4x^2 + (3x+1)^2}\right)(2x + (3x+1)i)(3x+1 + 2xi)$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{3x+1}{2}i$$

~

Sous un autre angle, avec les mêmes hypothèses de départ, on peut également considérer les équations de parité comme suit :

$$y = y_P(x)P(x) + y_I(x)I(x) \text{ avec } \begin{cases} P(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On choisit P et I comme suit :

$$P(x) = \frac{1 + i^{2x}}{2} \text{ et } I(x) = \frac{1 - i^{2x}}{2} \text{ avec } i^2 = -1$$

Cette fois-ci on calcule le rang suivant dans la partie imaginaire de y, ce qui donne :

$$y_n = x_n + ix_{n+1} \text{ et } x_{n+1} = \text{Im}(y_n)$$

Soit une équivalence complexe de la forme suivante :

$$y = \begin{cases} \left(1 + \frac{i}{2}\right)x = x + \frac{x}{2}i & \text{si } x \text{ pair} \\ \left(1 + \frac{3i}{2}\right)x + \frac{i}{2} = x + \left(\frac{3x+1}{2}\right)i & \text{si } x \text{ impair} \end{cases}$$

$$\rightarrow y = \left(x + \frac{x}{2}i\right)\frac{1+i^{2x}}{2} + \left(x + \left(\frac{3x+1}{2}\right)i\right)\frac{1-i^{2x}}{2}$$

$$y = \frac{1}{4}(2x + xi + i^{2x}(2x + xi) + 2x + (3x + 1)i - i^{2x}(2x + (3x + 1)i))$$

$$y = x + \left(x + \frac{1}{4} - \frac{i^{2x}}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)i = x + \left(\frac{(2 - i^{2x})x}{2} + \frac{1 - i^{2x}}{4}\right)i = \begin{cases} x + \frac{x}{2}i & \text{si } x \text{ pair} \\ x + \left(\frac{3x+1}{2}\right)i & \text{si } x \text{ impair} \end{cases}$$

Basé sur le même principe, on obtient pour la suite de Syracuse inverse ou rétrograde :

$$y_1 = (1 + 2i)x = x + 2xi \quad \forall x > 0$$

$$y_2 = \left(1 + \frac{2i}{3}\right)x - \frac{i}{3} = x + \left(\frac{2x-1}{3}\right)i \quad \forall x = 3k + 2$$

$$\rightarrow y_2 = 3k + 2 + (2k + 1)i$$

$$\rightarrow y = \begin{cases} x + 2xi & \forall x > 0 \\ x + \left(\frac{2x-1}{3}\right)i & \forall x = 3k + 2 \text{ et } k \geq 0 \end{cases}$$

Ces approches novatrices méritent des approfondissements pour en tirer un quelconque bénéfice dans nos recherches. Le lecteur s'intéressera notamment aux représentations graphiques et géométriques que l'on peut en faire. Cette visualisation est en effet beaucoup plus féconde et claire. A suivre donc.

6. Fonction de Syracuse

On cherche une autre fonction pour décrire la suite de Syracuse fidèlement. On procède tout d'abord en recherchant une fonction qui s'annule quand on atteint la valeur de la suite au rang suivant. Ainsi, on pose :

$$\text{Si } F_n(x) = \left(x - \frac{U_n}{2}\right) \left(x - \frac{3U_n + 1}{2}\right) \text{ alors } F_n(x) = 0 \text{ si } x = \frac{U_n}{2} \text{ ou } \frac{3U_n + 1}{2}$$

Cette fonction est fidèle aux comportements de la suite mais ne simplifie pas la condition de parité.

~

On recherche maintenant une fonction qui prend la valeur d'une itération paire pour la valeur p et d'une impaire pour la valeur m. ainsi, on pose :

$$\text{Si } U_{n+1}(x) = \frac{U_n}{2} \left(\frac{x-m}{p-m}\right) + \left(\frac{3U_n+1}{2}\right) \left(\frac{p-x}{p-m}\right) \text{ avec } \begin{cases} m \neq p \\ U_0(x) = N \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} U_{n+1}(p) = \frac{U_n}{2} \\ U_{n+1}(m) = \frac{3U_n+1}{2} \end{cases}$$

Que l'on peut aussi écrire de la manière suivante :

$$U_{n+1}(x) = \frac{(3U_n+1)p - U_n m - (2U_n+1)x}{2(p-m)} = \frac{(3p-2x-m)U_n + p-x}{2(p-m)}$$

On choisit ensuite des valeurs remarquables de p et m pour obtenir une équation de la suite de Syracuse simplifiée. Ainsi, on teste les différentes possibilités suivantes :

$$\text{Si } p = km \neq 0 \rightarrow U_{n+1}(x) = \frac{((3U_n+1)k - U_n)m - (2U_n+1)x}{2m(k-1)} = \frac{(3U_n+1)k - U_n}{2(k-1)} - \frac{(2U_n+1)x}{2m(k-1)}$$

Où :

$$\text{Si } p = \frac{1}{m} \neq |1| \rightarrow U_{n+1}(x) = \frac{U_n m^2 + (2U_n+1)mx - (3U_n+1)}{2(m^2-1)} = \frac{(m^2+2mx-3)U_n + mx - 1}{2(m^2-1)}$$

Où :

$$\text{Si } p = m + 1 \rightarrow U_{n+1}(x) = \left(m - x + \frac{3}{2}\right) U_n + \frac{m-x+1}{2}$$

$$\text{Soit, si } p = 0 \text{ et } m = 1 \Rightarrow U_{n+1}(x) = \frac{(1+2x)U_n + x}{2} = \left(\frac{1}{2} + x\right) U_n + \frac{x}{2}$$

$$\text{Ou, si } m = 0 \text{ et } p = 1 \rightarrow U_{n+1}(x) = \frac{(3-2x)U_n + 1 - x}{2} = \left(\frac{3}{2} - x\right) U_n + \frac{1-x}{2}$$

$$U_1(0) = U_2(1)$$

$$U_1(1) = U_2(0)$$

Où :

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{3} + \frac{m}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{m}{3}\right)^2 + \left(\frac{m}{4}\right)^2} = \frac{5m}{12} \rightarrow U_{n+1}(x) = \frac{3}{7} \left(\frac{4x}{m} - \frac{1}{2}\right) \left(U_n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}$$

Où :

$$p = m - \frac{1}{m} = \frac{m^2 - 1}{m} \rightarrow U_{n+1}(x) = \frac{1}{2}((-2m^2 + 3 + 2mx)U_n - m^2 + 1 + mx)$$

Où :

$$p = am + b \rightarrow U_{n+1}(x) = \frac{((3a - 1)m + 3b - 2x)U_n + am + b - x}{2((a - 1)m + b)}$$

Où :

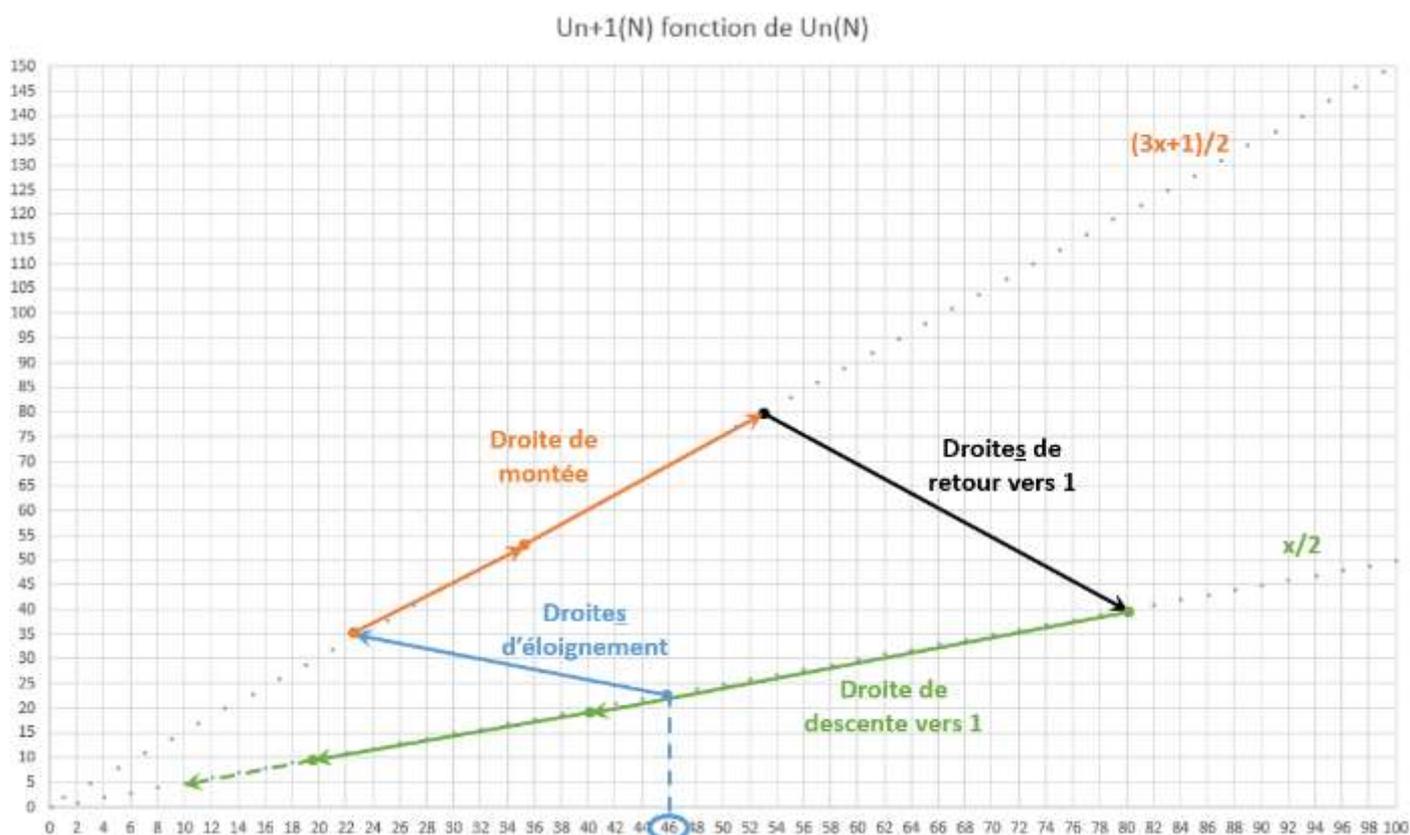
$$pm = k^2 \rightarrow U_{n+1}(x) = \frac{(3k^2 - m^2 - 2mx)U_n + k^2 - mx}{2(k^2 - m^2)}$$

Il existe donc bien une infinité d'équations pour la suite de Syracuse.

7. Parcours de droites

Sur le graphique précédent, on peut parcourir les 2 droites qui définissent la suite et essayer de calculer les droites de passage de l'une à l'autre. Si ces droites sont généralisables alors un élément supplémentaire de recherche peut être élucidé.

Voici pour commencer, un exemple graphique des premiers $U_n(N)$ avec $N=46$:

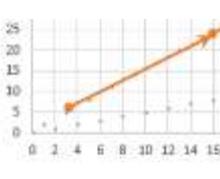
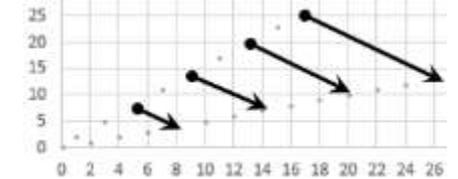
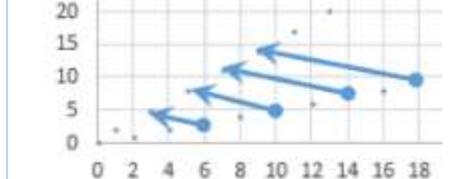


Son vol dure les 12 itérations suivantes :

$46 > 23 > 35 > 53 > 80 > 40 > 20 > 10 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1$.

On a déjà pu voir précédemment les vols de 70 et 84 sur ce même papier quadrillé.

On observe les relations suivantes :

Droite de descente vers 1	Droite de montée	Droites de retour vers 1	Droites d'éloignement
$y = \frac{x}{2}$ $\forall x \text{ pair}$ Et reste sur cette droite ssi : $\forall x = 4p$ $\text{avec } p \geq 0$	$y = \frac{3x + 1}{2}$ $\forall x \text{ impair}$ Et reste sur cette droite ssi : $\forall x = 4p + 3$ $\text{avec } p \geq 0$	En prenant 2 couples $(x_1 ; y_1)$ et $(x_2 ; y_2)$ issues des droites de descente et de montée, on a : $y_1 = 2y_2 = x_2 = \frac{3x_1 + 1}{2}$ D'où : $y = \frac{3x_1 + 1}{2(x_1 + 1)}(2x_1 + 1 - x)$ $\forall x_1 = 4p + 1 \text{ avec } p \geq 0$ Où : $y = -\frac{3}{2}\left(\frac{x_2}{x_2 + 1}\right)(x + 1) + 2x_2$ $\forall x_2 = 6p + 2 \text{ avec } p \geq 0$	En prenant 2 couples $(x_1 ; y_1)$ et $(x_2 ; y_2)$ issues des droites de descente et de montée, on a : $y_1 = x_2 = \frac{x_1}{2} ; y_2 = \frac{3x_2 + 1}{2}$ D'où : $y = -\left(\frac{x_1 + 2}{2x_1}\right)x + (x_1 + 1)$ $\forall x_1 = 4p + 2 \text{ avec } p \geq 0$ Où : $y = -\left(\frac{x_2 + 1}{2x_2}\right)x + (2x_2 + 1)$ $\forall x_2 \text{ impair}$
De pair vers pair	D'impair vers impair	D'impair vers pair	De pair vers impair
Vers le bas 1 fois sur 4	Vers le haut 1 fois sur 4	Vers le bas 1 fois sur 4	Vers le haut 1 fois sur 4
			
Droite décroissante	Droite croissante	Droites de connexion ou de liaison	

On a donc bien 4 cas correspondants aux combinaisons de parité l'une après l'autre. Notez bien que passer de pair à impair ou d'impair à pair n'est pas la même chose. L'ordre d'un rang n au rang n+1 compte.

On verra plus en détail le comportement des trajectoires de ces 4 cas dans un chapitre plus loin portant le même nom.

A partir de ces parcours de droites, on peut, comme décrit dans cet ouvrage dans le chapitre consacré aux distances, également vérifier l'unicité du cycle final de longueur deux.

8. Translations verticales et horizontales

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les éventuelles inter-relations existantes entre les valeurs de départ choisies N de la suite de Syracuse. On cherche en priorité à identifier si entre 2 puis k valeurs de N des relations suivantes $U_n(N)$ existent et perdurent ou pas avec n itérations.

Une translation horizontale de la suite correspond à un déplacement de la suite d'un rang n aux suivants (avec le même N de départ). Cela n'est rien d'autre que la définition de la suite de Syracuse pour un N donné.

Une translation verticale de la suite correspond à un déplacement de la suite pour un même rang n avec des valeurs de départ N différentes. Cela n'est rien d'autre qu'un passage ou pont d'une suite de Syracuse à une autre. Par extension on pourra dire d'un N à un autre.

1. Translation sur N au rang n=1

En reprenant la relation :

$$U_1(N) = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{si } N \text{ pair} \\ \frac{3N+1}{2} & \text{si } N \text{ impair} \end{cases}$$

On a pour N+1 :

$$U_1(N+1) = \begin{cases} \frac{N+1}{2} = \frac{U_1(N)+1}{3} & \text{si } N \text{ impair} \\ \frac{3N+4}{2} = 3U_1(N)+2 & \text{si } N \text{ pair} \end{cases}$$

De même :

$$U_1(N-1) = \begin{cases} \frac{N-1}{2} = \frac{U_1(N)-2}{3} & \text{si } N \text{ impair} \\ \frac{3N-2}{2} = 3U_1(N)-1 & \text{si } N \text{ pair} \end{cases}$$

Au rang suivant on obtient :

$$U_1(N+2) = \begin{cases} \frac{N+2}{2} = U_1(N)+1 & \text{si } N \text{ pair} \\ \frac{3N+7}{2} = U_1(N)+3 & \text{si } N \text{ impair} \end{cases}$$

Et :

$$U_1(N-2) = \begin{cases} \frac{N-2}{2} = U_1(N)-1 & \text{si } N \text{ pair} \\ \frac{3N-5}{2} = U_1(N)-3 & \text{si } N \text{ impair} \end{cases}$$

Si on continue aux 2 rangs suivants, on a :

$$U_1(N+3) = \begin{cases} \frac{N+3}{2} = \frac{U_1(N)+4}{3} & \text{si } N \text{ impair} \\ \frac{3N+10}{2} = 3U_1(N)+5 & \text{si } N \text{ pair} \end{cases}$$

$$U_1(N-3) = \begin{cases} \frac{N-3}{2} = \frac{U_1(N)-5}{3} & \text{si } N \text{ impair} \\ \frac{3N-8}{2} = 3U_1(N)-4 & \text{si } N \text{ pair} \end{cases}$$

Et :

$$U_1(N+4) = \begin{cases} \frac{N+4}{2} = U_1(N)+2 & \text{si } N \text{ pair} \\ \frac{3N+13}{2} = U_1(N)+6 & \text{si } N \text{ impair} \end{cases}$$

$$U_1(N-4) = \begin{cases} \frac{N-4}{2} = U_1(N)-2 & \text{si } N \text{ pair} \\ \frac{3N-11}{2} = U_1(N)-6 & \text{si } N \text{ impair} \end{cases}$$

Si on continue, par itération on obtient :

$$\forall k \geq 0 \text{ et } N > 0 :$$

$$U_1(N + 2k) = \begin{cases} \frac{N + 2k}{2} = U_1(N) + k \text{ si } N \text{ pair} \\ \frac{3N + 6k + 1}{2} = U_1(N) + 3k \text{ si } N \text{ impair} \end{cases}$$

$$U_1(N - 2k) = \begin{cases} \frac{N - 2k}{2} = U_1(N) - k \text{ si } N \text{ pair} \\ \frac{3N - 6k + 1}{2} = U_1(N) - 3k \text{ si } N \text{ impair} \end{cases}$$

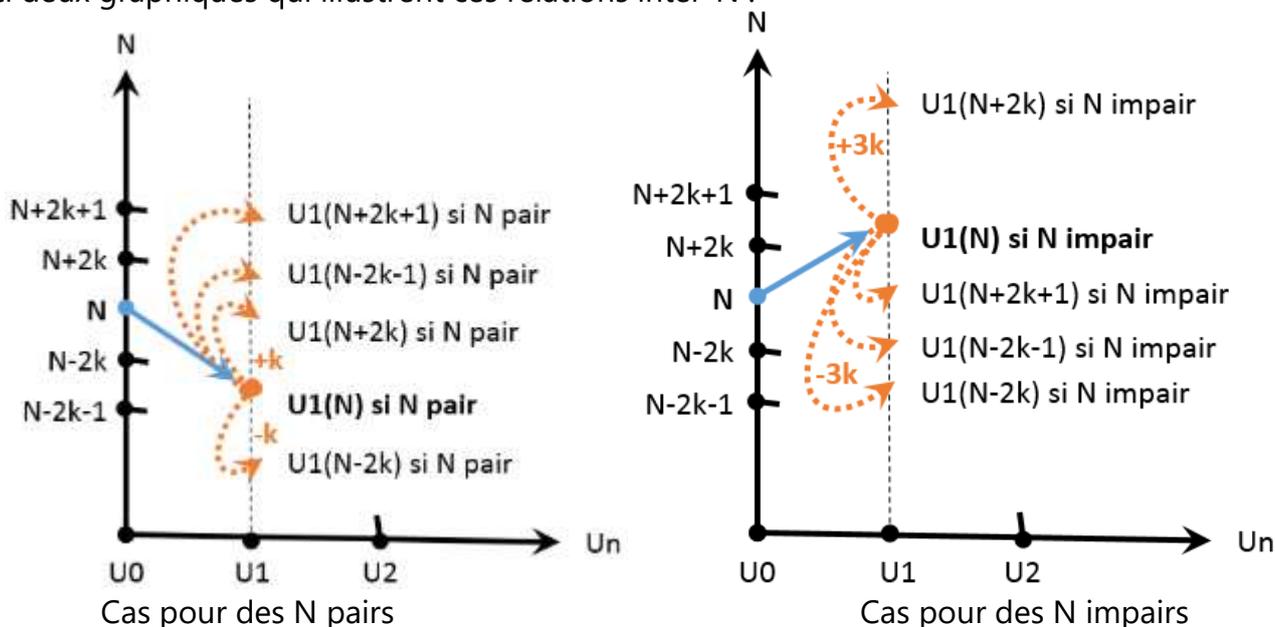
$$U_1(N + 2k + 1) = \begin{cases} \frac{N + 2k + 1}{2} = \frac{U_1(N) + 1}{3} + k \text{ si } N \text{ impair} \\ \frac{3N + 6k + 4}{2} = 3(U_1(N) + k) + 2 \text{ si } N \text{ pair} \end{cases}$$

$$U_1(N - 2k - 1) = \begin{cases} \frac{N - 2k - 1}{2} = \frac{U_1(N) - 2}{3} - k \text{ si } N \text{ impair} \\ \frac{3N - 6k - 2}{2} = 3(U_1(N) - k) - 1 \text{ si } N \text{ pair} \end{cases}$$

Il existe donc bien des relations linéaires entre deux valeurs initiales N pour la suite de Syracuse.

On note dans les deux premières équations ci-dessus, une symétrie parfaite pour deux N de même parité, et une dissymétrie pour deux N de parité distincte.

Voici deux graphiques qui illustrent ces relations inter-N :



Au rang 0 on a par définition :

$$\forall k > 0 \text{ et } N > 0 : U_0(N + k) = N + k$$

On peut également en déduire sans difficulté les relations inter membres, c'est-à-dire :

$$\forall k \geq 0 \text{ et } N > 0 :$$

$$\begin{aligned} \text{si } N \text{ pair} : U_1(N + 2k) &= \begin{cases} U_1(N - 2k) + 2k \\ U_1(N + 2k + 1) - N - 2k - 2 \\ U_1(N - 2k - 1) - N + 4k + 1 \end{cases} \\ \text{si } N \text{ pair} : U_1(N - 2k) &= \begin{cases} U_1(N + 2k + 1) - N - 4k - 2 \\ U_1(N - 2k - 1) - N + 2k + 1 \end{cases} \\ \text{si } N \text{ pair} : U_1(N + 2k + 1) &= U_1(N - 2k - 1) + 6k + 3 \\ \\ \text{si } N \text{ impair} : U_1(N + 2k) &= \begin{cases} U_1(N - 2k) + 6k \\ U_1(N + 2k + 1) + N + 2k \\ U_1(N - 2k - 1) + N + 4k + 1 \end{cases} \\ \text{si } N \text{ impair} : U_1(N - 2k) &= \begin{cases} U_1(N + 2k + 1) + N - 4k \\ U_1(N - 2k - 1) + N - 2k + 1 \end{cases} \\ \text{si } N \text{ impair} : U_1(N + 2k + 1) &= U_1(N - 2k - 1) + 2k + 1 \end{aligned}$$

Par exemple avec $k=0$, on a dans tous les cas :

$$\begin{aligned} \text{si } N \text{ pair} : U_1(N + 1) &= U_1(N - 1) + 3 \\ \text{si } N \text{ impair} : U_1(N + 1) &= U_1(N - 1) + 1 \end{aligned}$$

2. Translation sur N au rang n quelconque

Si l'on souhaite se positionner au rang n, il y a autant de dédoublement pair/impair que de cas présents. Et donc par itération une infinité de cas. C'est-à-dire qu'au rang 0 on a 1 cas, au rang 1 : 4 cas, au rang 2 : 8 cas, au rang 3 : 16 cas ... au rang n : 2^{n+1} cas.

En d'autres termes, le parcours vertical (d'un N à un autre) est possible simplement par les équations ci-dessus. Mais le parcours horizontal (d'un rang n à un autre) paraît trop varié pour le généraliser dans des équations. On verra dans les chapitres suivants que des généralisations sont malgré tout possibles.

En revanche, on peut parcourir la suite à partir d'un rang n quelconque au rang suivant n+1 avec des références de départ N et M différentes, selon les conditions ci-dessous. On dira qu'on effectue une boucle. En effet on part d'un rang n pour obtenir la valeur de la suite au rang n+1. Puis on se déplace verticalement en incrémentant ou décrémentant volontairement le résultat. Enfin on calcule la valeur de la suite au rang précédent qu'il aurait fallu avoir pour obtenir notre résultat avec le décalage volontaire positif ou négatif. En définitif, on effectue bien une boucle ouverte d'un $U_n(N)$ à un autre en passant par le rang suivant.

$$U_{n+1}(M) = U_{n+1}(N) + 2k = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} + 2k = \begin{cases} \frac{U_n(M)}{2} & \text{si } U_n(M) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(M) + 1}{2} & \text{si } U_n(M) \text{ impair} \end{cases} & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(N) + 1}{2} + 2k = \begin{cases} \frac{U_n(M)}{2} & \text{si } U_n(M) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(M) + 1}{2} & \text{si } U_n(M) \text{ impair} \end{cases} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

$$U_{n+1}(M) = U_{n+1}(N) + 2k + 1 = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} + 2k + 1 = \begin{cases} \frac{U_n(M)}{2} & \text{si } U_n(M) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(M) + 1}{2} & \text{si } U_n(M) \text{ impair} \end{cases} & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(N) + 1}{2} + 2k + 1 = \begin{cases} \frac{U_n(M)}{2} & \text{si } U_n(M) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(M) + 1}{2} & \text{si } U_n(M) \text{ impair} \end{cases} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

Et :

$$U_{n+1}(M) = U_{n+1}(N) - 2k = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} - 2k = \begin{cases} \frac{U_n(M)}{2} & \text{si } U_n(M) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(M) + 1}{2} & \text{si } U_n(M) \text{ impair} \end{cases} & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(N) + 1}{2} - 2k = \begin{cases} \frac{U_n(M)}{2} & \text{si } U_n(M) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(M) + 1}{2} & \text{si } U_n(M) \text{ impair} \end{cases} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

$$U_{n+1}(M) = U_{n+1}(N) - 2k - 1$$

$$= \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} - 2k - 1 = \begin{cases} \frac{U_n(M)}{2} \text{ si } U_n(M) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(M) + 1}{2} \text{ si } U_n(M) \text{ impair} \end{cases} & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(N) + 1}{2} - 2k - 1 = \begin{cases} \frac{U_n(M)}{2} \text{ si } U_n(M) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(M) + 1}{2} \text{ si } U_n(M) \text{ impair} \end{cases} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

D'où les relations suivantes :

$$U_{n+1}(M) = U_{n+1}(N) + 2k = \begin{cases} \begin{cases} U_n(M) = U_n(N) + 4k \text{ si } U_n(M) \text{ pair} \\ U_n(M) = \frac{U_n(N) + 4k - 1}{3} \text{ si } U_n(M) \text{ impair} \end{cases} & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \begin{cases} U_n(M) = 3U_n(N) + 4k + 1 \text{ si } U_n(M) \text{ pair} \\ U_n(M) = U_n(N) + \frac{4k}{3} \text{ si } U_n(M) \text{ impair, et } k \bmod 3 \end{cases} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

$$U_{n+1}(M) = U_{n+1}(N) + 2k + 1 = \begin{cases} \begin{cases} U_n(M) = U_n(N) + 4k + 2 \text{ si } U_n(M) \text{ pair} \\ U_n(M) = \frac{U_n(N) + 4k + 1}{3} \text{ si } U_n(M) \text{ impair} \end{cases} & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \begin{cases} U_n(M) = 3U_n(N) + 4k + 3 \text{ si } U_n(M) \text{ pair} \\ U_n(M) = U_n(N) + \frac{4k + 2}{3} \text{ si } U_n(M) \text{ impair, et } k + 1 \bmod 3 \end{cases} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

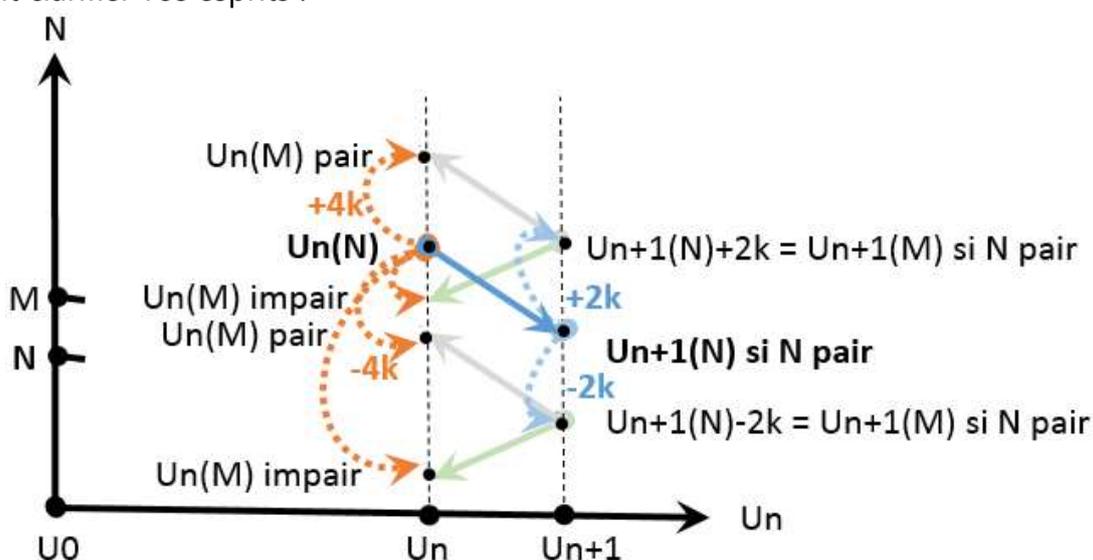
Et :

$$U_{n+1}(M) = U_{n+1}(N) - 2k = \begin{cases} \begin{cases} U_n(M) = U_n(N) - 4k \text{ si } U_n(M) \text{ pair} \\ U_n(M) = \frac{U_n(N) - 4k - 1}{3} \text{ si } U_n(M) \text{ impair} \end{cases} & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \begin{cases} U_n(M) = 3U_n(N) - 4k + 1 \text{ si } U_n(M) \text{ pair} \\ U_n(M) = U_n(N) - \frac{4k}{3} \text{ si } U_n(M) \text{ impair, et } k \bmod 3 \end{cases} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

$$U_{n+1}(M) = U_{n+1}(N) - 2k - 1 = \begin{cases} \begin{cases} U_n(M) = U_n(N) - 4k - 2 \text{ si } U_n(M) \text{ pair} \\ U_n(M) = \frac{U_n(N) - 4k - 3}{3} \text{ si } U_n(M) \text{ impair} \end{cases} & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \begin{cases} U_n(M) = 3U_n(N) - 4k - 1 \text{ si } U_n(M) \text{ pair} \\ U_n(M) = U_n(N) - \frac{4k + 2}{3} \text{ si } U_n(M) \text{ impair, et } k + 1 \bmod 3 \end{cases} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

Toutes ces équations semblent lourdes et dénuées de sens de par leurs nombres et variétés. Or il n'en est rien. Pour illustrer cela, rien ne vaut un bon graphique.

Cela devrait clarifier vos esprits :



Cas pour les N pairs avec une translation de $U_{n+1}(N)$ de $\pm 2k$

On peut très bien maintenant modéliser avec le même raisonnement les translations de la suite de Syracuse inverse ou rétrograde sur un rang $n+1$ au rang n , puis sur un rang $n+1$ à un rang précédent quelconque (jusqu'à N au plus). Cela montrerait les relations inverses en remontant la suite plutôt que de la descendre.

On peut également analyser les translations montantes ou descendantes pour la suite de Syracuse pseudo complémentaire. Il reste donc encore beaucoup de pistes pour analyser les conséquences et informations de ces translations et leurs modélisations.

3. Relation entre les vols avec des valeurs de départ proportionnelles

Comment évaluer une valeur de départ notée K.N à partir d'une autre N après n_2 itérations paires (ou impaires) pour la première et n_1 itérations paires (ou impaires) pour la seconde ? Cette question qui peut paraître saugrenue sert pourtant à passer (ou effectuer un saut) d'un vol N à un vol K.N à un rang n donné sans en connaître tous ses éléments et sans effectuer chacune des itérations l'une après l'autre jusqu'au rang n_2 . On déduit n_2 de n_1 et K.N de N.

Ces possibilités de sauts d'un vol à un autre, serviront plus loin dans cet ouvrage en mixant les résultats qui suivent avec d'autres équations généralisées. « Patience est mère de sagesse ».

Il existe quatre cas relatifs aux parités à tester, soit :

(1) PP : 2 vols pairs n_1 et n_2 lorsque :

$$\frac{N}{2^{n_1}} = \frac{KN}{2^{n_2}}$$

D'où :

$$K = 2^{n_2-n_1} \rightarrow n_2 = n_1 + \frac{\ln(K)}{\ln(2)}$$

K est une puissance de 2. Mais N n'est pas forcément pair. De ce fait, il faut avoir en tête que la valeur de la suite au bout de n_1 itérations pour N et n_2 pour K.N est soit paire soit impaire.

(2) IP : Vol impair n_1 et vol pair n_2 lorsque :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n_1} (N + 1) - 1 = \frac{KN}{2^{n_2}}$$

D'où :

$$K = 3^{n_1} 2^{n_2-n_1} \left(1 + \frac{1}{N}\right) - \frac{2^{n_2}}{N} \rightarrow n_2 = n_1 + \frac{\ln(K) + \ln(N) - \ln((N + 1)3^{n_1} - 2^{n_1})}{\ln(2)}$$

Il faut ici également considérer les deux sous cas : celui où au terme de n_1 itérations la valeur de la suite est toujours impaire ou celle au cours duquel elle est passée paire.

(3) PI : Vol pair n_1 et vol impair n_2 lorsque :

$$\frac{N}{2^{n_1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n_2} (KN + 1) - 1$$

D'où :

$$K = \frac{N + 2^{n_1} - 2^{n_1-n_2} 3^{n_2}}{2^{n_1-n_2} 3^{n_2} N} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n_2} \left(\frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{N}\right) - \frac{1}{N} \rightarrow n_2 = \frac{\ln(KN + 1) - \ln\left(\frac{N}{2^{n_1}} + 1\right)}{\ln(2) - \ln(3)}$$

Il faut ici également considérer les mêmes deux sous cas que précédemment.

(4) II : 2 vols impairs n_1 et n_2 lorsque :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n_1} (N + 1) - 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{n_2} (KN + 1) - 1$$

D'où :

$$K = \left(\frac{2}{3}\right)^{n_2 - n_1} \left(1 + \frac{1}{N}\right) - \frac{1}{N} \rightarrow n_2 = n_1 + \frac{\ln(N + 1) - \ln(KN + 1)}{\ln(3) - \ln(2)}$$

Il faut ici également considérer les mêmes deux sous cas que précédemment.

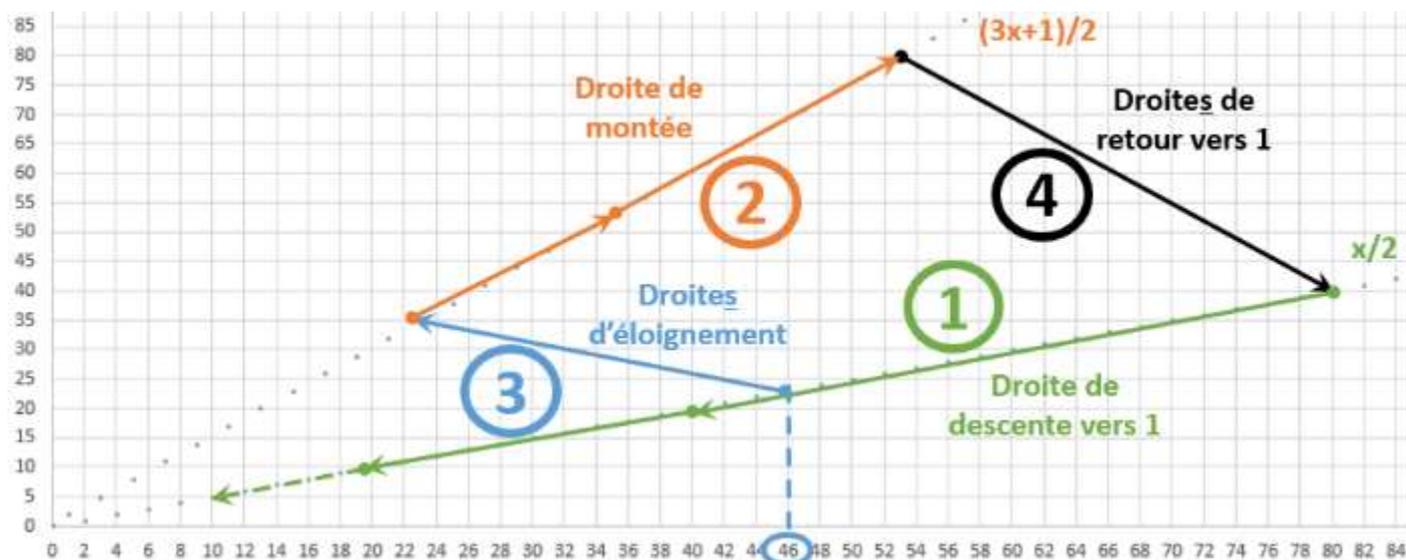
On a donc bien des relations précises entre les vols et rangs n de valeurs de départ proportionnelles quelle que soit leur parité. Ces relations sont malgré tout complexes à manipuler et exploiter comme telles.

9. Distances et cycle unique

Une distance est régie par l'équation suivante :

$$d^2 = (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 \text{ avec } d \geq 0$$

Il existe 4 types de distance d'une valeur à une autre dans la suite de Syracuse. Elles correspondent aux 4 cas de permutation des x et y dans l'équation d'une distance. En effet :



(1) PP : la descente d'un pair à sa moitié paire

$$d_1^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$d_1^2 = \left(x_1 - \frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{2} - \frac{x_1}{4}\right)^2 = \left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}x_1^2$$

$$d_1 = \frac{\sqrt{5}}{4}x_1$$

(2) II : la montée d'un impair vers un autre impair

$$d_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d_2^2 = \left(\frac{3x_1 + 1}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\left(\frac{3x_1 + 1}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{3x_1 + 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_1 + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}(x_1 + 1)\right)^2 = \frac{13}{16}(x_1 + 1)^2$$

$$d_2 = \frac{\sqrt{13}}{4}(x_1 + 1)$$

(3) PI : la montée d'un pair vers un impair

$$d_3^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d_3^2 = \left(x_1 - \frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\frac{x_1}{2} + 1}{2} - \frac{x_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1 + 2}{4}\right)^2 = \frac{5x_1^2 + 4x_1 + 4}{16}$$

$$d_3 = \frac{1}{4}\sqrt{5x_1^2 + 4x_1 + 4}$$

(4) IP : la descente d'un impair vers un pair

$$d_4^2 = \left(\frac{3x_1 + 1}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{3x_1 + 1}{2} - \frac{3x_1 + 1}{4}\right)^2 = \left(\frac{x_1 + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3x_1 + 1}{4}\right)^2 = \frac{13x_1^2 + 14x_1 + 5}{16}$$

$$d_4 = \frac{1}{4} \sqrt{13x_1^2 + 14x_1 + 5}$$

Ces distances ont un sens pour étudier les cycles possibles de la suite de Syracuse.

Cycles vers un ou plusieurs points fixes – de longueur 1

Pour identifier si la suite atteint au moins un point fixe une fois, il suffit d'observer le graphe précédent des distances. d_2 et d_1 sont deux ensembles de droites qui, par construction, ne se coupent qu'en :

$$\frac{3x + 1}{2} = \frac{x}{2} \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Cette valeur négative n'est pas entière. On ne pourra donc jamais avoir un point fixe final (ou une intersection, ou un point commun) sur ces droites. d_2 croît sans arrêt vers l'infini. Donc là aussi, pas de point fixe possible. Enfin, d_1 décroît vers 2 (plus petit entier pair). Comme 2 est pair il passera par définition à 1, et ce dernier est placé sur d_2 qui, on l'a vu, tend vers l'infini.

d_3 et d_4 sont des ensembles de distances intermédiaires et ne peuvent pas, par définition, constituer une ou des solutions d'un point fixe. En effet, il existe toujours un antécédent ou un successeur de d_3 ou d_4 .

Donc aucune solution vers un point fixe pour la suite de Syracuse.

Cycles de longueur 2

Pour avoir au moins un cycle de longueur 2 (c'est-à-dire une oscillation entre deux valeurs), il faut et il suffit qu'on passe d'une valeur à une autre. Pour cela, les droites d_2 et d_1 , ayant des sens de direction uniques opposés et ne se croissant jamais par construction, ne sont pas des solutions possibles. En revanche les droites d_3 et d_4 sont une solution possible de cycles de longueur 2 si elles sont confondues. En effet, elles sont de sens opposés, on peut donc imaginer un passage de l'une vers l'autre. A noter également que x_1 est différent selon la distance utilisée, correspondante à une valeur paire ou impaire. Pour tout cela il faut et il suffit que :

$$d_3(2x_1) = d_4(x_1) \rightarrow \frac{1}{4} \sqrt{5(2x_1)^2 + 4(2x_1) + 4} = \frac{1}{4} \sqrt{13x_1^2 + 14x_1 + 5}$$

Soit élevé au carré, on obtient :

$$20x_1^2 + 8x_1 + 4 = 13x_1^2 + 14x_1 + 5 \rightarrow 7x_1^2 - 6x_1 - 1 = 0$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{3 \pm 4}{7} = \left\{1; -\frac{1}{7}\right\} \rightarrow \text{on a donc une solution unique de longueur 2 dans } \mathbb{N} : x_1 = 1.$$

Le cycle unique de longueur 2 est donc $\{2,1\}$ à l'infini.

Cycles de longueur 3

En suivant le même raisonnement, suivant le graphe précédent, on trouve 2 cas de cycles possibles :

- 1^{er} cas : {d2, d4, d3}
- 2nd cas : {d4, d1, d3}

Ces deux cycles possibles correspondent à des triangles. On a donc à l'aide du théorème de Pythagore les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{1er\ cas : } d_3^2 = d_2^2 + d_4^2 \\
 & \rightarrow 5(2x_1)^2 + 4(2x_1) + 4 = 13(x_1^2 + 2x_1 + 1) + 13x_1^2 + 14x_1 + 5 \\
 & \qquad \qquad \qquad 6x_1^2 + 32x_1 + 14 = 0 \\
 & x_1 = \frac{-8 \pm \sqrt{43}}{3} < 0 \rightarrow \text{ nombres négatifs, pas de solution dans } \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{2nd\ cas : } d_1^2 = d_3^2 + d_4^2 \\
 & \rightarrow 5(2x_1)^2 = 5(2x_1)^2 + 4(2x_1) + 4 + 13x_1^2 + 14x_1 + 5 \\
 & \qquad \qquad \qquad 13x_1^2 + 22x_1 + 9 = 0 \\
 & x_1 = \frac{-11 \pm 2}{13} = \left\{ -\frac{9}{13}; -1 \right\} < 0 \rightarrow \text{ nombres négatifs, pas de solution dans } \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Il n'existe donc pas de cycles entiers de longueur 3 pour la suite de Syracuse.

Cycles de longueur 4

En suivant le même raisonnement, suivant le graphe précédent, on trouve 3 cas de cycles possibles :

- 1^{er} cas : {d2, d4, d1, d3}
- 2nd cas : {d2, d2, d4, d3}
- 3^{ième} cas : {d4, d1, d1, d3}

Ces 3 cycles possibles s'apparentent à des courbes d'hystérésis. On trace une droite entre deux distances des cycles ci-dessus. Cette droite correspond à l'hypoténuse d'un triangle. On a donc à l'aide du théorème de Pythagore les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{1er\ cas : } H^2 = d_2^2 + d_4^2 = d_1^2 + d_3^2 \\
 & \rightarrow 13(x_1^2 + 2x_1 + 1) + 13x_1^2 + 14x_1 + 5 = 5(2x_1)^2 + 5(2x_1)^2 + 4(2x_1) + 4 \\
 & \qquad \qquad \qquad 7x_1^2 - 16x_1 - 7 = 0 \\
 & x_1 = \frac{-8 \pm \sqrt{113}}{4} < 1 \rightarrow \text{ nombre non entier, pas de solution dans } \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Les deux cas suivants sont des triangles, soit :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{2nd\ cas : } d_3^2 = (2d_2)^2 + d_4^2 \\
 & \rightarrow 5(2x_1)^2 + 4(2x_1) + 4 = 52(x_1^2 + 2x_1 + 1) + 13x_1^2 + 14x_1 + 5 \\
 & \qquad \qquad \qquad 45x_1^2 + 110x_1 + 53 = 0 \\
 & x_1 = \frac{-55 \pm 8\sqrt{10}}{45} < 0 \rightarrow \text{ nombre négatif, pas de solution dans } \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

3ième cas : $d_4^2 = (2d_1)^2 + d_3^2$

$$\rightarrow 13x_1^2 + 14x_1 + 5 = 20(2x_1)^2 + 5(2x_1)^2 + 4(2x_1) + 4$$

$$87x_1^2 - 6x_1 - 1 = 0$$

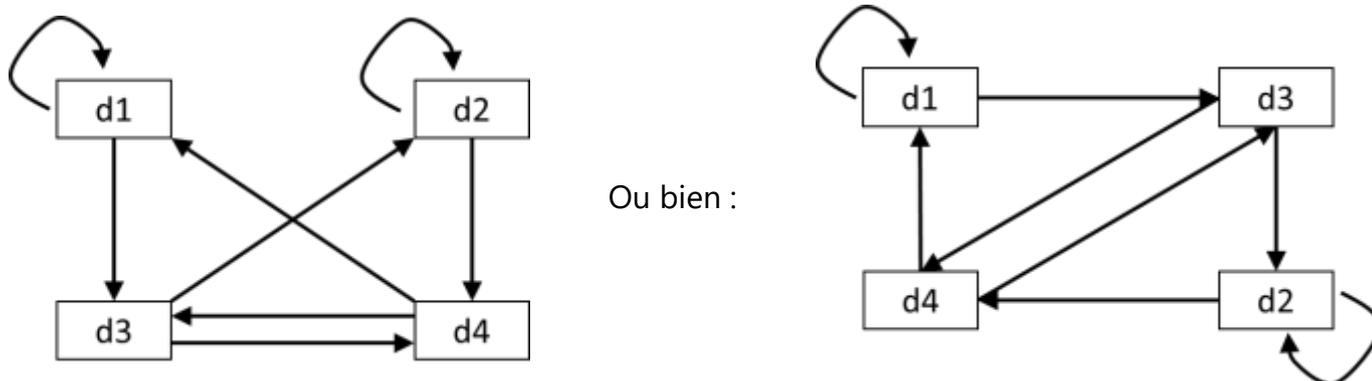
$$x_1 = \frac{3 \pm 4\sqrt{6}}{87} \approx \{0,147; -0,078\} < 1 \rightarrow \text{nombre irrationnel, pas de solution dans } \mathbb{N}$$

Il n'existe donc pas également de cycle de longueur 4 pour la suite de Syracuse.

Cycles de longueur L

Au-dessus de longueur 4, le nombre de cas possibles augmentent rapidement et rend cette méthode des distances pas adaptée à nos résolutions.

On peut essayer de limiter le champ de recherche avec les règles de restriction suivantes issues, une nouvelle fois, du graphe des distances précédent :



Ou bien :

On retrouvera ces mêmes relations dans le chapitre des trajectoires plus loin dans cet ouvrage. On verra que ces distances correspondent à des multiples de 4, c'est-à-dire :

$$\exists k_i \in \mathbb{N} \text{ tel que } \begin{cases} d_1 \rightarrow 4k_1 \\ d_4 \rightarrow 4k_4 + 1 \\ d_3 \rightarrow 4k_3 + 2 \\ d_2 \rightarrow 4k_2 + 3 \end{cases}$$

De plus, ces 4 distances sont ordonnées comme suit :

$$d_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} < d_3 = \sqrt{2} = d_4 < d_2 = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ si } x_1 = 1$$

$$d_2 = \frac{\sqrt{13}}{4}(x_1 + 1) < d_4 = \frac{\sqrt{13}}{4}x_1 + e(x_1) < d_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}x_1 < d_3 = \frac{\sqrt{5}}{2}x_1 + e'(x_1) \text{ si } x_1 > 1$$

Soit :

$$d_1 < d_4 = d_3 < d_2 \text{ si } x_1 = 1$$

$$d_2 < d_4 < d_1 < d_3 \text{ si } x_1 > 1$$

Ces restrictions limitent le nombre de cycles possibles de longueur L et donc le nombre de cas à tester. Néanmoins, ce nombre augmente, malgré tout, très rapidement selon L. Cela ne permet

donc finalement pas de généraliser notre approche quelle que soit L . Et ainsi, nous ne pouvons pas prouver qu'au moins un autre cycle de longueur L existe ou pas.

10. Ordre rétrograde, inverse ou des prédécesseurs

Un ordre rétrograde, inverse ou des prédécesseurs signifie de parcourir l'arbre de la suite de Syracuse en partant de la fin, c'est-à-dire l'unité, en remontant vers tous les entiers naturels positifs. De cette façon on peut sans erreur reconstituer l'arbre de la suite de Syracuse. On étudie dans les pages suivantes à la fois l'arbre modulo 2 correspondant à la suite de Syracuse simplifiée mais aussi celui modulo 4. Enfin on itérera ces résultats pour obtenir les formes générales des suites inversées ou rétrogrades ou des prédécesseurs afin d'en connaître davantage sur leurs types d'expansion et leurs comportements.

1. Ordre rétrograde modulo 2

Tous les atterrissages finissent avec la même séquence 1, 2, 1... En partant de cette fin, on essaye de remonter l'arbre de la suite de Syracuse. Ainsi, avec :

$$U_{n+1}(N) = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ Pair} \\ \frac{3U_n(N) + 1}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ Impair} \end{cases}$$

On obtient la fonction rétrograde suivante :

$$U1_n(N) = 2U_{n+1}(N) \text{ avec } \forall U_{n+1}(N) > 0$$

$$U2_n(N) = \frac{2U_{n+1}(N) - 1}{3} \text{ avec } U_{n+1}(N) = 3k + 2, \forall k \geq 0$$

En effet, en ordre inverse, la suite peut générer 2 valeurs de $U_n(N)$ différentes au même rang :

- U1 pour tous les pairs à une fréquence de 1/1,
- U2 pour tous les impairs à une fréquence de 1/3.

Le calcul de U1 est évident avec la suite de Syracuse.

Le calcul de U2 également mais il faut s'assurer que le numérateur soit bien divisible par 3 et donne un entier. Pour cela il suffit que :

$$2U - 1 = 3p, \text{ soit } U = \frac{3p + 1}{2}$$

En posant :

$$p = 2k, \text{ alors : } U = 3k + \frac{1}{2} : \text{ jamais entier}$$

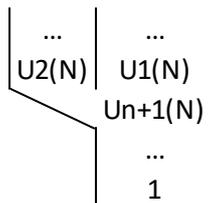
$$p = 2k + 1, \text{ alors : } U = 3k + 2 \text{ et } k = \frac{U - 2}{3}$$

La seule division par 3 entière est donc pour $U=3k+2$.

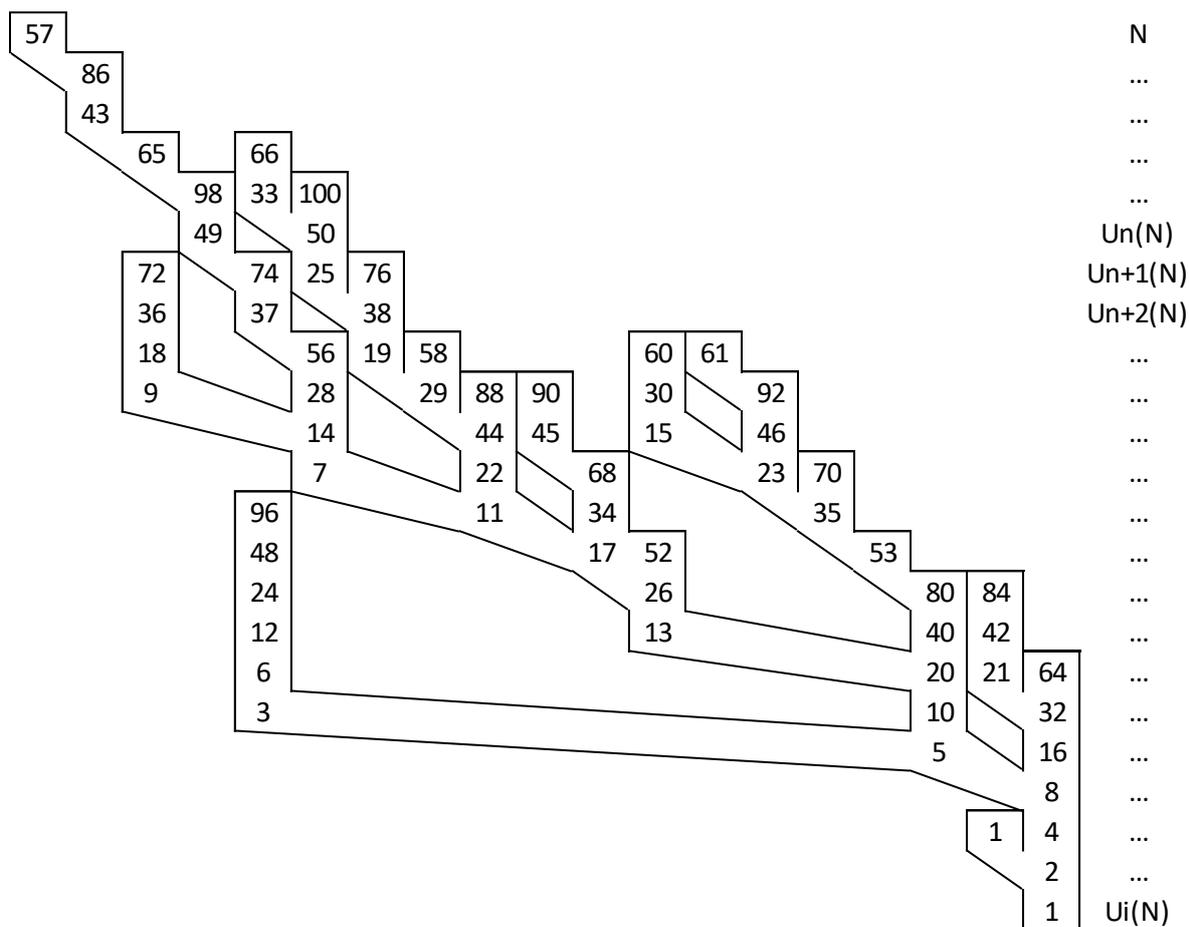
$U_{n+1}(N)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
$U1_n(N)$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64
$U2_n(N)$	-	1	-	-	3	-	-	5	-	-	7	-	-	9	-	-	11	-	-	13	-	-	15	-	-	17	-	-	19	-	-	21
k	-	0	-	-	1	-	-	2	-	-	3	-	-	4	-	-	5	-	-	6	-	-	7	-	-	8	-	-	9	-	-	10

On observe dans le tableau ci-dessus qu'on a bien 1 $U_n(N)$ pair pour chaque $U_{n+1}(N)$, et 1 $U_n(N)$ impair tous les 3 $U_{n+1}(N)$.

On va construire de nouveau l'arbre de la suite de Syracuse en partant cette fois-ci du seul point d'arrivée selon la conjecture : 1. Avec la représentation suivante :



Cela donne pour tout $U_1(N) \leq 100$ et $U_2(N) \leq 100$ le graphique suivant :



Cet arbre contient 69 des 100 valeurs N de départ. Les 31 autres $N \leq 100$ sont plus haut dans l'arbre (à d'autres étages) et passent par des valeurs de $U_n(N)$ supérieures à 100 avant de les atteindre.

Pour vous donner une idée plus précise de sa forme, vous trouverez sur la page suivante le même arbre plus large avec $N \leq 1000$.

On sait maintenant à la fois monter et descendre dans la suite de Syracuse. Mais en est-on bien sûr ? En fait pas tout à fait. Car comment choisir, si en partant d'un N, la suite de Syracuse suit le chemin de U1 ou de U2 ?

~

On peut aussi se demander quelle est la proportion du nombre d'entiers par rang inverse. C'est-à-dire, par exemple, pour les premiers rangs, on observe :

- Rang i : 1 entier 1 branche avec {1} ;
- Rang $i-1$: 1 entier 1 branche avec {2} ;
- Rang $i-2$: 1 entier 1 branche avec {4} ;
- Rang $i-3$: 1 entier 1 branche avec {8} ;
- Rang $i-4$: 2 entiers 2 branches avec {16, 5} ;
- Rang $i-5$: 3 entiers 3 branches avec {32, 10, 3} ;

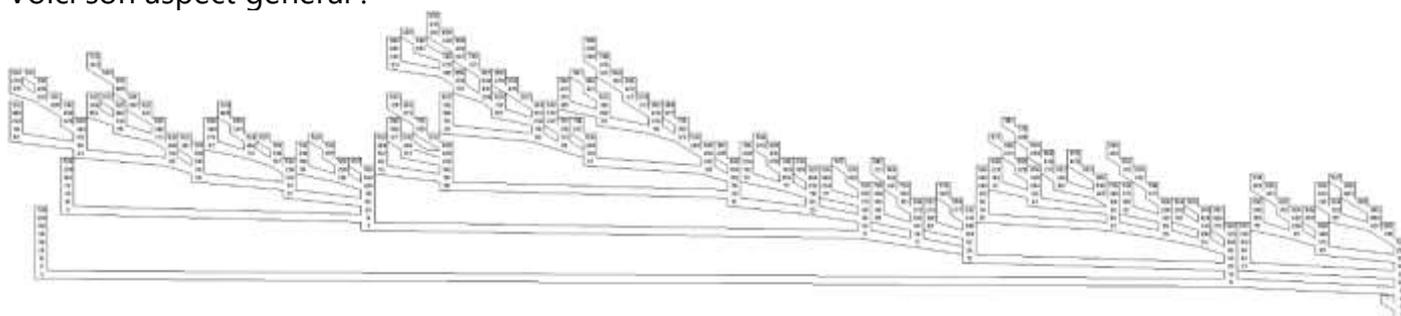
Etc.

On arrive très vite à un calcul complexe. Cela démontre que si les règles de création et de prolongement des branches de l'arbre inverse de la suite de Syracuse sont bien connues, la modélisation complète de cet arbre est un vrai problème.

Cette modélisation est possible par un processus d'itérations.

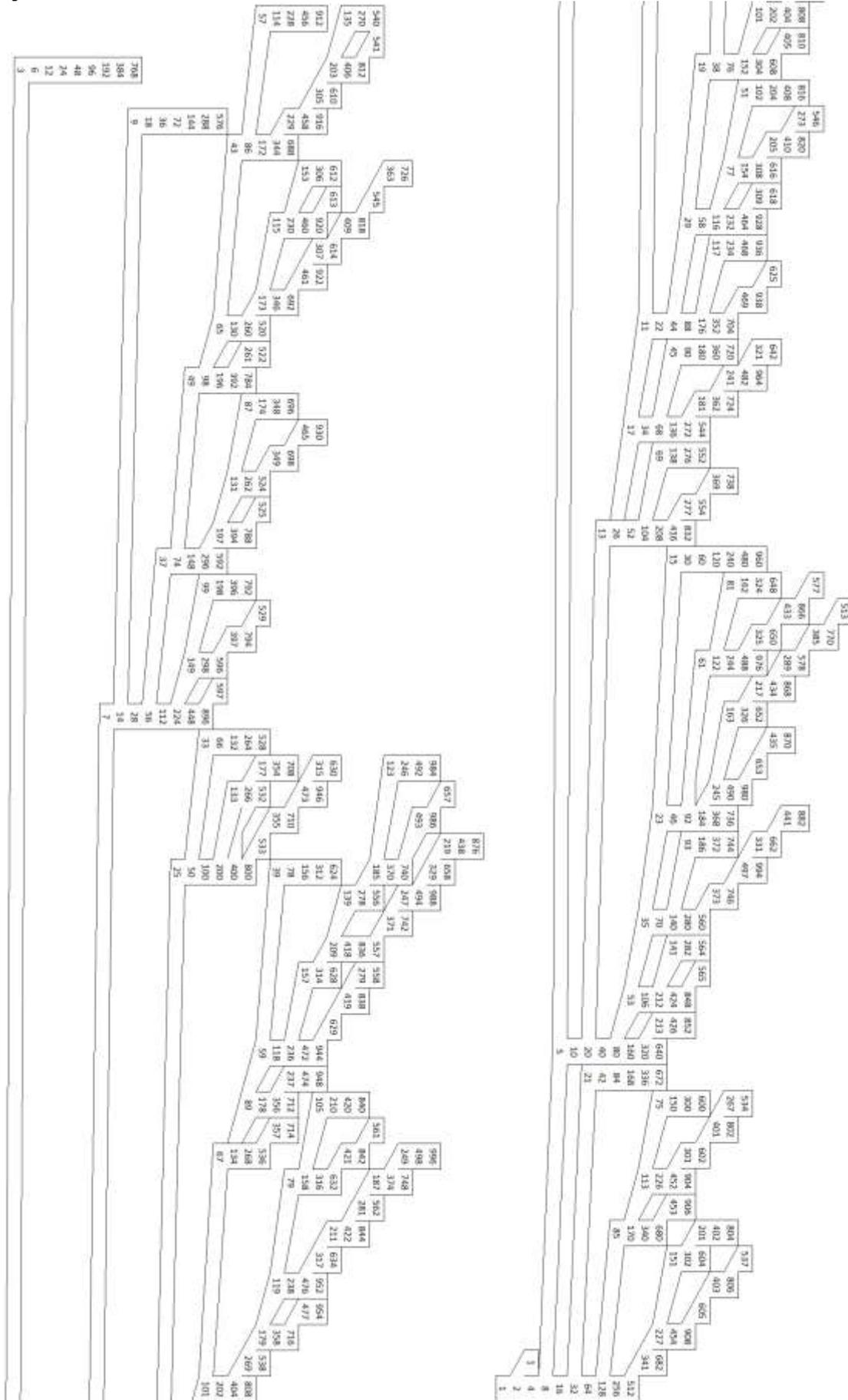
Arbre de Syracuse avec $N \leq 1000$

Voici son aspect général :



Et sur la page suivante le même arbre découpé en deux parties pour que les nombres soient visibles.

Arbre de Syracuse avec $N \leq 1000$



2. Mailles du filet de la suite de Syracuse rétrograde

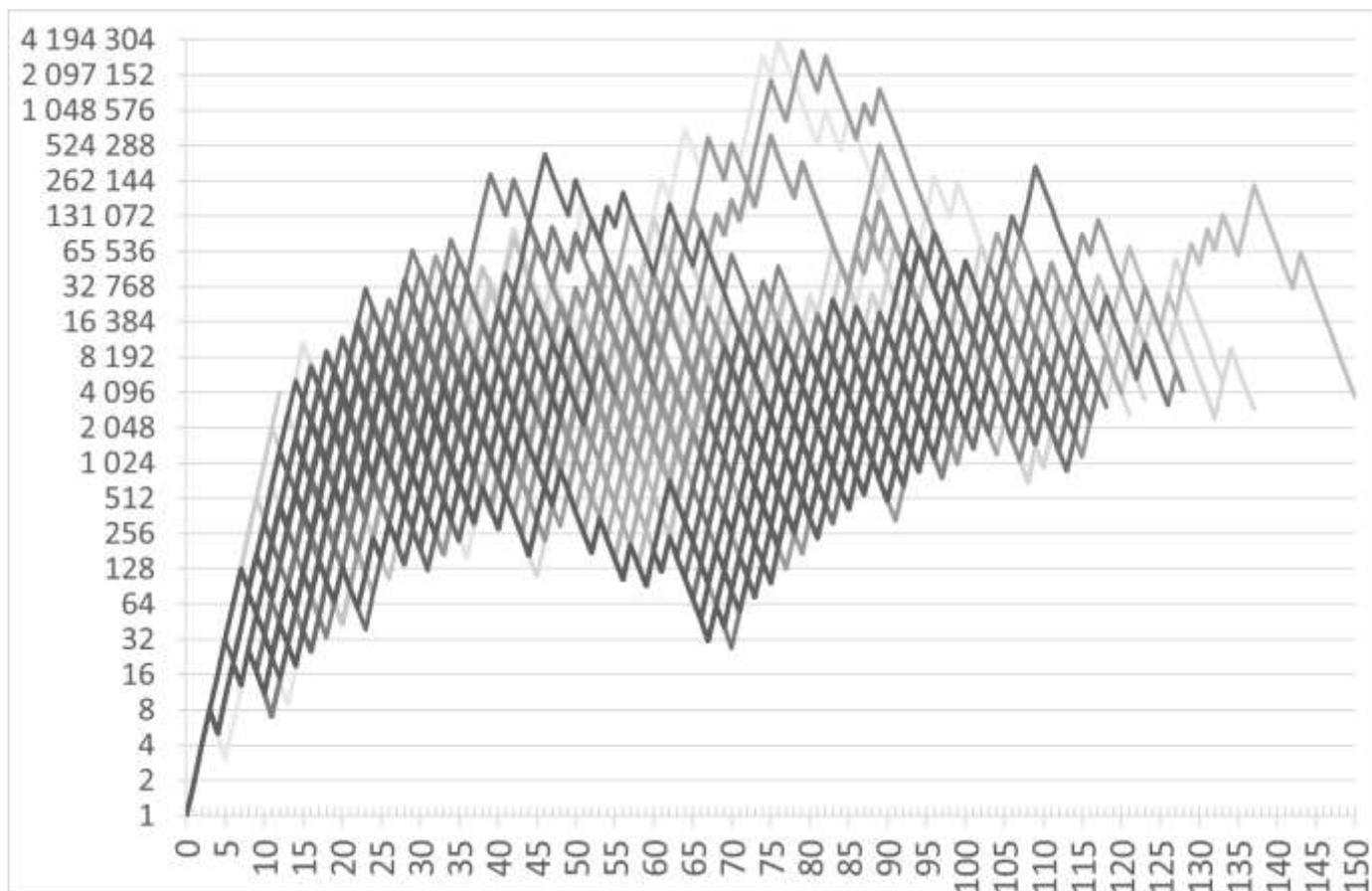
La représentation graphique précédente ne tient pas compte des emplacements des valeurs de la suite de Syracuse rétrograde. En effet, seules les valeurs sont indiquées dans l'ordre rétrograde et par ordre d'apparition en remontant l'arbre de Syracuse mais la position des valeurs ne respecte aucune échelle. Par exemple la valeur 512 (puissance de 2) sur la première colonne est au même niveau vertical que la valeur 170.

Pour remédier à cette représentation lisible mais simplifiée, on a construit cette fois, de manière fidèle aux échelles l'ensemble des 5000 premiers vols de la suite de Syracuse rétrograde (à partir de la valeur 1 en remontant l'arbre). On constate dans un premier lieu que beaucoup de parcours ou de branches sont communes à plusieurs valeurs de départ N voisines ou non. De ce fait on dénombre environ 1808 branches uniques pour l'ensemble des 5000 premiers vols ($N \leq 5000$). Ce n'est pas surprenant puisque la structure même de la suite est un arbre auquel toutes les branches se rattachent au tronc commun de puissance de 2 et aboutissant à 1.

On observe un fait plus étonnant et nouveau : les branches de la suite forment comme des mailles régulières d'un filet. Ces mailles sont en forme de losanges. Certaines mailles sont manquantes dans le filet mais peut être que si N avait été choisi plus grand que 5000, ces mailles seraient bien présentes. Une recherche avec des outils plus évolués permettrait de confirmer ou pas cette hypothèse.

En outre, cette régularité des mailles de ce filet montre un nouveau visage de la suite tout à fait étonnant et utile. En effet, cela est peut-être un nouveau moyen d'étude de la suite et d'analyse systémique.

Voici le filet de la suite de Syracuse rétrograde pour $N \leq 5000$:



Pour davantage de lisibilité, l'échelle verticale est en logarithmique népérien de base 2. Les plus longs vols ont jusqu'à 150 itérations. Et les plus hauts vols vont jusqu'à près de 4 millions. Cette représentation est une nouvelle approche de la suite par maillage.

3. Nombre de valeurs de la suite de Syracuse rétrograde par rang

On souhaite connaître de manière exacte le nombre de valeurs par niveau de l'arbre de Syracuse en partant de 1 et en remontant l'arbre.

Par exemple au niveau 0 on a 1 valeur qui est le 1, au niveau 1 on a 1 valeur qui est 2, etc.

Voici un tableau de ces premières valeurs :

Niveaux	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Valeur impaire initiale
	1	2	4	8	5	3	6	12	24	48	96	192	384	768	1 536	3 072	3
					10	20	13	26	17	11	7	14	9	18	36		9
														28	56	37	37
																112	7
											22	44	29	19	38		19
														58	116		29
													88	176	117		117
															352		11
										34	68	45	90	180	360		45
												136	272	181	362		181
														544	1 088		17
									52	104	69	138	276	552	1 104		69
											208	416	277	554	369		369
															1 108		277
													832	1 664	1 109		1 109
															3 328		13
							40	80	53	35	23	15	30	60	120		15
												46	92	61	122		61
														184	368		23
												70	140	93	186	372	93
														280	560	373	373
																1 120	35
											106	212	141	282	564	1 128	141
													424	848	565	1 130	565
															1 696	3 392	53
										160	320	213	426	852	1 704	3 408	213
												640	1 280	853	1 706	1 137	1 137
																3 412	853
														2 560	5 120	3 413	3 413
																10 240	5
				16	32	21	42	84	168	336	672	1 344	2 688	5 376	10 752		21
					64	128	85	170	113	75	150	300	600	1 200			75
											226	452	301	602	401		401
																1 204	301
													904	1 808	1 205		1 205
																3 616	113
										340	680	453	906	1 812	3 624		453
													1 360	2 720	1 813	3 626	1 813
															5 440	10 880	85
								256	512	341	227	151	302	201	402		201
															604	1 208	151
												454	908	605	403		403
																1 210	605
															1 816	3 632	227
											682	1 364	909	1 818	3 636		909
														2 728	5 456	3 637	3 637
																10 912	341
										1 024	2 048	1 365	2 730	5 460	10 920		1 365
													4 096	8 192	5 461	10 922	5 461
															16 384	32 768	1
Nombre de valeurs	1	1	1	1	2	3	4	5	6	8	12	18	24	31	39	50	

Pour rappel chaque niveau comporte au plus 2 prédécesseurs par valeur, c'est-à-dire :

$$U1_n(N) = 2U_{n+1}(N) \text{ avec } U_{n+1}(N) > 0$$

$$U2_n(N) = \frac{2U_{n+1}(N) - 1}{3} \text{ avec } U_{n+1}(N) = 3k + 2 \text{ et } k \geq 0$$

Et à partir de l'équation itérée rétrograde modulo 2 suivante et déjà présentée dans cet ouvrage :

$$N = \frac{2^{\sum_{k=1}^p n_k}}{3^{\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2k}}} + \sum_{j=2}^p \frac{2^{\sum_{k=j}^p n_k}}{3^{\sum_{k=j-1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2k}}} (-1)^j \quad \forall p \geq 1 \text{ et impair}$$

On l'avait trouvé à partir de l'itération successive de :

$$N = \dots 2^{n_5} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n_4} \left(2^{n_3} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n_2} (2^{n_1} + 1) - 1 \right) + 1 \right) - 1 \right) \dots$$

On peut alors calculer le nombre de valeurs de l'arbre de Syracuse par niveau. En effet on a :

$$\begin{aligned} \text{Niveau 0 : } n_k &= 0 \quad \forall k > 0 \rightarrow N = \mathbf{1} = 2^0 \neq 3p + 2 \\ \text{Niveau 1 : } n_1 &= 1 \text{ et } n_k = 0 \quad \forall k > 1 \rightarrow N = \mathbf{2} = 2^1 \neq 3p + 2 \text{ si } p > 0 \\ \text{Niveau 2 : } n_1 &= 2 \text{ et } n_k = 0 \quad \forall k > 1 \rightarrow N = \mathbf{4} = 2^2 \neq 3p + 2 \\ \text{Niveau 3 : } n_1 &= 3 \text{ et } n_k = 0 \quad \forall k > 1 \rightarrow N = \mathbf{8} = 2^3 = 3p + 2 \\ &\rightarrow \text{nouvelle branche au rang suivant} \\ \text{Niveau 4 : } \left\{ \begin{array}{l} n_1 = 4 \text{ et } n_k = 0 \quad \forall k > 1 \rightarrow N = \mathbf{16} = 2^4 \neq 3p + 2 \\ n_1 = 3, n_2 = 1 \text{ et } n_k = 0 \quad \forall k > 2 \rightarrow N = \mathbf{5} = 3p + 2 \rightarrow \text{nouvelle branche} \end{array} \right. \\ \text{Niveau 5 : } \left\{ \begin{array}{l} n_1 = 5 \text{ et } n_k = 0 \quad \forall k > 1 \rightarrow N = \mathbf{32} = 2^5 = 3p + 2 \rightarrow \text{nouvelle branche} \\ n_1 = 3, n_2 = 1, n_3 = 1 \text{ et } n_k = 0 \quad \forall k > 3 \rightarrow N = \mathbf{10} \neq 3p + 2 \\ n_1 = 3, n_2 = 2 \text{ et } n_k = 0 \quad \forall k > 3 \rightarrow N = \mathbf{3} \neq 3p + 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

...

Pour plus de visibilité on a construit sur le même principe le tableau suivant des 11 premiers niveaux :

N	Doubles	Nouvelle branche si N=3k+2	Doubles	Nouvelle branche si N=3k+2	Doubles	Nouvelle branche si N=3k+2	Doubles	Nouvelle branche si N=3k+2	Doubles	Nouvelle branche si N=3k+2	Niveau vertical n°	Nombre de valeurs par niveau	Nombre de valeurs cumulées par niveau
1											0	1	1
	2										1	1	2
	4										2	1	3
	8										3	1	4
	16	5									4	2	6
	32		10		3						5	3	9
	64	21	20			6					6	4	13
	128		40 42		13	12					7	5	18
	256	85	80 84			24 26					8	6	24
	512		160 168 170		53	48 52		17			9	8	32
	1 024	341	320 336 340		113	96 104 106	35		34	11	10	12	44
	2 048		640 672 680 682	227 213		192 208 212 226	75 69	70 68	23	22	11	18	62
0	1		2		3		4		5		6	Niveau horizontal n°	
1	11		20		19		7		3		1	Nombre de valeurs par niveau	
1	12		32		51		58		61		62	Nombre de valeurs cumulées par niveau	

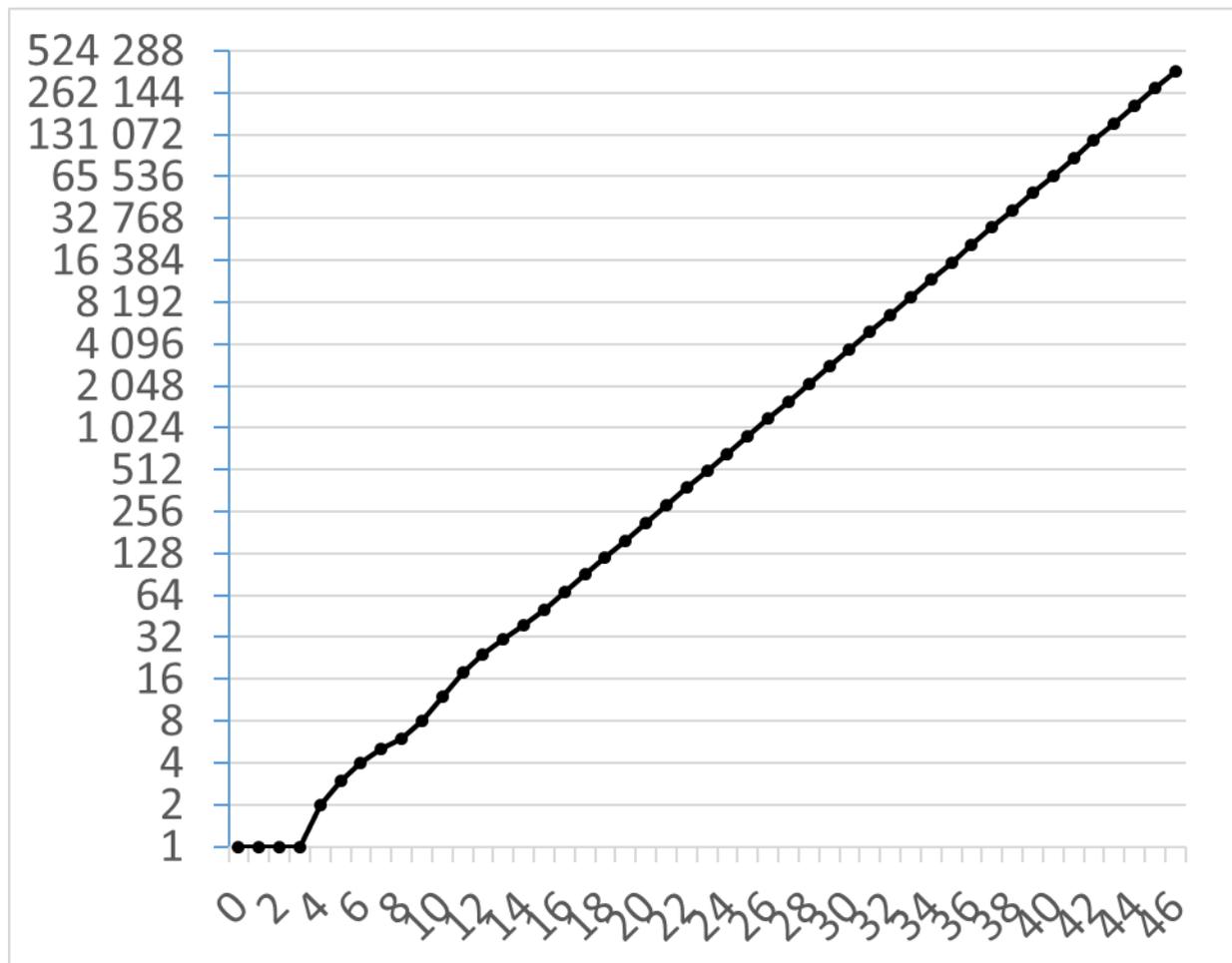
Les 11 premiers niveaux (verticaux) correspondent à 6 niveaux d'itérations (horizontaux) successifs. C'est une difficulté de taille. Chaque niveau vertical supplémentaire ajoute 1 à plusieurs niveaux horizontaux, c'est-à-dire plusieurs itérations. Et ces dernières doivent être chacune déterminées

préalablement. C'est simple à coder dans un programme informatique. Ça l'est beaucoup moins en équation mathématique. En effet, aucun calcul simple permet de comptabiliser le nombre de valeurs cumulées ou non (voir les deux dernières colonnes ci-dessus) par niveau vertical.

La course vers des approximations est donc ouverte. Tout d'abord il faut davantage de niveau pour en extraire une approximation. Voici donc les valeurs des 46 1ers niveaux :

Niveau	Valeurs par niveau	Niveau	Valeurs par niveau	Niveau	Valeurs par niveau	Niveau	Valeurs par niveau
0	1	12	24	24	665	36	21 122
1	1	13	31	25	885	37	28 150
2	1	14	39	26	1 187	38	37 536
3	1	15	50	27	1 590	39	50 067
4	2	16	68	28	2 122	40	66 763
5	3	17	91	29	2 829	41	89 009
6	4	18	120	30	3 765	42	118 631
7	5	19	159	31	5 014	43	158 171
8	6	20	211	32	6 682	44	210 939
9	8	21	282	33	8 902	45	281 334
10	12	22	381	34	11 878	46	375 129
11	18	23	505	35	15 844		

Si on trace la courbe en échelle logarithmique de ces valeurs par niveau on obtient :



Incroyable, l'évolution du nombre de valeurs par niveau de l'arbre de la suite de Syracuse est exponentielle (c'est-à-dire linéaire en logarithme népérien). On va donc pouvoir faire une approximation précise basée sur cette observation. Pour cela on pose :

$$y = a \cdot e^{b \cdot x}$$

$$\rightarrow \ln(y) = \ln(a) + b \cdot x$$

Avec 2 points suffisamment éloignés et linéaires en logarithme, on a :

$$\ln(y_1) = \ln(a) + b \cdot x_1$$

$$\ln(y_2) = \ln(a) + b \cdot x_2$$

D'où par soustraction :

$$b = \frac{\ln(y_1) - \ln(y_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right)}{x_1 - x_2}$$

Et ainsi :

$$\ln(a) = \frac{x_1 \ln(y_2) - x_2 \ln(y_1)}{x_1 - x_2} = \frac{\ln\left(\frac{y_2^{x_1}}{y_1^{x_2}}\right)}{x_1 - x_2}$$

$$\rightarrow a = e^{\frac{\ln\left(\frac{y_2^{x_1}}{y_1^{x_2}}\right)}{x_1 - x_2}} = \left(\frac{y_2^{x_1}}{y_1^{x_2}}\right)^{\frac{1}{x_1 - x_2}}$$

En définitif on obtient l'équation d'approximation suivante :

$$\rightarrow y = \left(\frac{y_2^{x_1}}{y_1^{x_2}}\right)^{\frac{1}{x_1-x_2}} e^{\left(\frac{\ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right)}{x_1-x_2}\right)^x} = \left(\frac{y_2^{x_1}}{y_1^{x_2}}\right)^{\frac{1}{x_1-x_2}} \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\frac{x}{x_1-x_2}}$$

$$\text{ou bien : } y = \left(\frac{y_2^{x_1-x}}{y_1^{x_2-x}}\right)^{\frac{1}{x_1-x_2}} = (y_2^{x-x_1} \cdot y_1^{x_2-x})^{x_1-x_2}$$

On choisit suivant la courbe précédente les 2 points suivant pour calculer l'équation de y :

$$\{x_1; y_1\} = \{15; 50\} \text{ et } \{x_2; y_2\} = \{46; 375\} \rightarrow y \approx \frac{2}{3} e^{\frac{2}{7}x}$$

$$\text{Comme ici } x_2 \approx 3x_1 \rightarrow y \approx y_1 \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{x}{2x_1}} \approx 50(0,000133)^{\frac{1}{2} - \frac{x}{31}}$$

Cette approximation est précise, confondue avec la courbe précédente.

En conclusion, le nombre de valeurs par niveau de la suite de Syracuse progresse exponentiellement.

Nous l'avons déjà observé. Cela n'est pas une surprise puisque à chaque niveau on a les tous les doubles des valeurs précédentes qui s'ajoutent auxquels il faut ajouter les formes $3k+2$. Comme il y a de plus en plus de valeurs par niveau, il y a plus de probabilité de tomber sur une forme $3k+2$ et ainsi d'avoir davantage de valeurs au niveau suivant, et ainsi de suite.

4. Boucles de la suite rétrograde

Une boucle est une séquence de parité. Par exemple : pair – pair – impair – pair. On recherche le moyen de connaître l'ensemble de ces boucles de la suite de Syracuse rétrograde. Ensuite on teste quelques valeurs de départ N qui ont les mêmes boucles rang après rang. Enfin, on essaie de trouver des relations entre ces valeurs N de même boucle.

On a vu que la forme rétrograde répondait à la fonction suivante :

$$f(N) = \begin{cases} 2N \forall N > 0 \text{ ET,} \\ \frac{2N-1}{3} = 2k+1 \text{ si } N = 3k+2 \forall k > 0 \end{cases}$$

On a donc une ou deux valeurs à chaque itération de $f(N)$.

Etudions préalablement les entiers modulus 3 :

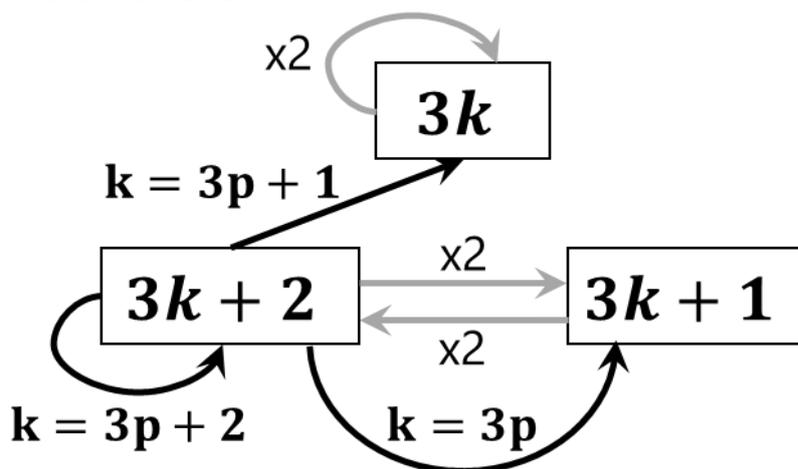
$$f(3k) = 2(3k) = 6k = 3(2k) = 3k_0$$

$$f(3k+1) = 2(3k+1) = 6k+2 = 3(2k)+2 = 3k_1+2$$

$$f(3k+2) = \begin{cases} 2(3k+2) = 6k+4 = 3(2k+1)+1 = 3k_2+1 \text{ ET,} \\ \frac{2(3k+2)-1}{3} = 2k+1 = \begin{cases} 2(3p+1)+1 = 3(2p+1) = 3k_2 \text{ OU,} \\ 2(3p)+1 = 3(2p)+1 = 3k_2+1 \text{ OU,} \\ 2(3p+2)+1 = 3(2p+3)+2 = 3k_2+2 \end{cases} \end{cases}$$

Attention, $2k+1$ est toujours impair alors que $3k$, $3k+1$ et $3k+2$ ne le sont qu'une fois sur deux, d'où la restriction de parité ci-dessus de ces derniers.

On a donc le schéma relationnel suivant :



Les flèches grises représentent les doublements. Et les flèches noires représentent les créations de branches selon les valeurs de k modulo 3 indiquées.

On remarque que les formes $3k+1$ et $3k+2$ jouent au ping-pong, se rendant la balle à chaque rang suivant, tandis que la forme $3k$ reste isolée rang après rang. Grâce à la forme $3k+2$ qui est la seule

générer deux valeurs, soit une branche supplémentaire débutant toujours par un impaire $2k+1$, la forme $3k$ sort de son isolement et devient accessible.

Passons à l'étape suivante pour voir si ce schéma relationnel se conserve rang après rang.

Sachant que :

$$2^n = (3-1)2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} - (3-1)2^{n-2} = 3(2^{n-1} - 2^{n-2}) + (3-1)2^{n-3} = \dots$$

$$\rightarrow 2^n = \begin{cases} 3 \left(\sum_{j=2}^{n-1} (-2)^j \right) + 2 = 3k + 2 \text{ avec } n \text{ impair et } k \text{ pair OU,} \\ 3 \left(\sum_{j=2}^{n-1} -(-2)^j \right) - 2 = 3 \left(\left(\sum_{j=2}^{n-1} -(-2)^j \right) - 1 \right) + 1 = 3k + 1 \text{ si } n \text{ pair et } k \text{ impair} \end{cases}$$

Et que :

$$\frac{2^n - 1}{3} \text{ est entier ssi } n \text{ est pair}$$

Analysons les formes des n doublements des entiers modulus 3 qui correspondent à n itérations de la suite de Syracuse rétrograde :

$$2^n(3k) = 3(2^n k) = 3k_0$$

$$2^n(3k+1) = \begin{cases} 3(2^n k) + 2^n - 1 + 1 = 3 \left(2^n k + \frac{2^n - 1}{3} \right) + 1 = 3k_1 + 1 \text{ si } n \text{ pair OU,} \\ 3(2^n k) + 2^n - 2 + 2 = 2(3(2^{n-1}k) + 2^{n-1} - 1 + 1) = 2 \left(3 \left(2^{n-1}k + \frac{2^{n-1} - 1}{3} \right) + 1 \right) \\ = 2(3k_1 + 1) = 3(2k_1) + 2 = 3k'_1 + 2 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$2^n(3k+2) = \begin{cases} 3(2^n k) + 2^{n+1} - 1 + 1 = 3 \left(2^n k + \frac{2^{n+1} - 1}{3} \right) + 1 = 3k_2 + 1 \text{ si } n \text{ impair OU,} \\ 3(2^n k) + 2^{n+1} - 2 + 2 = 2(3(2^{n-1}k) + 2^n - 1 + 1) = 2 \left(3 \left(2^{n-1}k + \frac{2^n - 1}{3} \right) + 1 \right) \\ = 2(3k_2 + 1) = 3(2k_2) + 2 = 3k'_2 + 2 \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$$

En reprenant les résultats des deux formes $3k+2$ ci-dessus, on étudie les formes de leur création de branche au rang suivant, comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Si } n \text{ impair : } f(2^n(3k+1)) &= f(3k'_1 + 2) = 2k'_1 + 1 = \frac{2(2^n(3k+1)) - 1}{3} = 2^{n+1}k + \frac{2^{n+1} - 1}{3} \\ &= 2^{n+1}(3k'_3) + \frac{2^{n+1} - 1}{3} = 3(2^{n+1}k'_3) + \frac{2^{n+1} - 1}{3} \\ &\rightarrow \begin{cases} \frac{2^{n+1} - 1}{3} = 3k_3 \rightarrow 2^{n+1} = 9k_3 + 1 \rightarrow n = 6p + 5 \text{ OU,} \\ \frac{2^{n+1} - 1}{3} = 3k_3 + 1 \rightarrow 2^{n+1} = 9k_3 + 4 \rightarrow n = 6p + 1 \text{ OU,} \\ \frac{2^{n+1} - 1}{3} = 3k_3 + 2 \rightarrow 2^{n+1} = 9k_3 + 7 \rightarrow n = 6p + 3 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\text{Si } n \text{ impair : } f(2^n(3k+1)) = \begin{cases} 3(2^{n+1}k'_3) + 3k_3 = 3(2^{n+1}k'_3 + k_3) = 3K \text{ OU}, \\ 3(2^{n+1}k'_3) + 3k_3 + 1 = 3(2^{n+1}k'_3 + k_3) + 1 = 3K + 1 \text{ OU}, \\ 3(2^{n+1}k'_3) + 3k_3 + 2 = 3(2^{n+1}k'_3 + k_3) + 2 = 3K + 2 \end{cases}$$

De même :

$$\begin{aligned} \text{Si } n \text{ pair : } f(2^n(3k+2)) &= f(3k'_2 + 2) = 2k'_2 + 1 = \frac{2(2^n(3k+2)) - 1}{3} = 2^{n+1}k + \frac{2^{n+2} - 1}{3} \\ &= 2^{n+1}(3k'_3) + \frac{2^{n+2} - 1}{3} = 3(2^{n+1}k'_3) + \frac{2^{n+2} - 1}{3} \\ &\rightarrow \begin{cases} \frac{2^{n+2} - 1}{3} = 3k_3 \rightarrow 2^{n+2} = 9k_3 + 1 \rightarrow n = 6p + 4 \text{ OU}, \\ \frac{2^{n+2} - 1}{3} = 3k_3 + 1 \rightarrow 2^{n+2} = 9k_3 + 4 \rightarrow n = 6p \text{ OU}, \\ \frac{2^{n+2} - 1}{3} = 3k_3 + 2 \rightarrow 2^{n+2} = 9k_3 + 7 \rightarrow n = 6p + 2 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\text{Si } n \text{ impair : } f(2^n(3k+2)) = \begin{cases} 3(2^{n+1}k'_3) + 3k_3 = 3(2^{n+1}k'_3 + k_3) = 3K \text{ OU}, \\ 3(2^{n+1}k'_3) + 3k_3 + 1 = 3(2^{n+1}k'_3 + k_3) + 1 = 3K + 1 \text{ OU}, \\ 3(2^{n+1}k'_3) + 3k_3 + 2 = 3(2^{n+1}k'_3 + k_3) + 2 = 3K + 2 \end{cases}$$

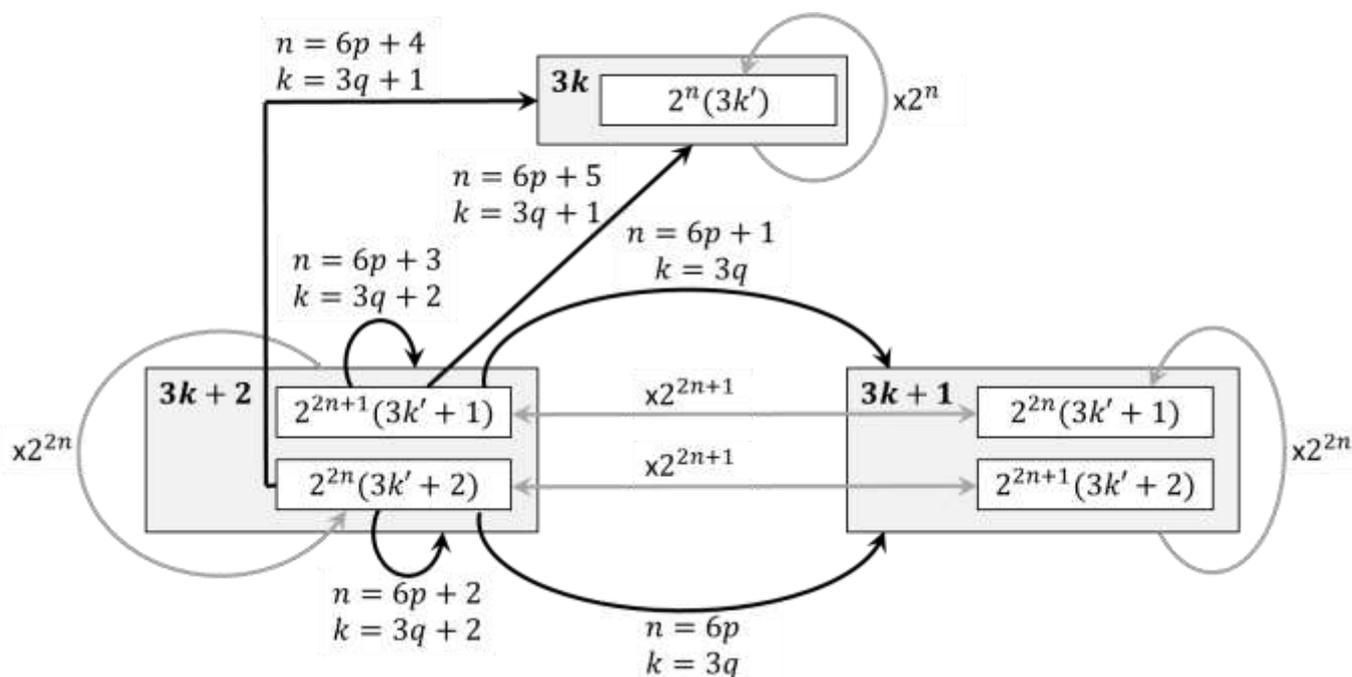
On a donc enfin pour résumer :

$$f(2^n(3k)) = f(3k_0) = 3p_0$$

$$f(2^n(3k+1)) = \begin{cases} \text{Si } n \text{ pair : } f(3k_1 + 1) = 3p_1 + 2 \text{ OU}, \\ \text{Si } n \text{ impair : } f(3k'_1 + 2) = \begin{cases} 3p'_1 + 1 \text{ ET}, \\ 2k'_1 + 1 = \begin{cases} 3k_3 \text{ si } n = 6p + 5 \text{ OU}, \\ 3k_3 + 1 \text{ si } n = 6p + 1 \text{ OU}, \\ 3k_3 + 2 \text{ si } n = 6p + 3 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$f(2^n(3k+2)) = \begin{cases} \text{Si } n \text{ impair : } f(3k_2 + 1) = 3p_2 + 2 \text{ OU}, \\ \text{Si } n \text{ pair : } f(3k'_2 + 2) = \begin{cases} 3p'_2 + 1 \text{ ET}, \\ 2k'_2 + 1 = \begin{cases} 3k_3 \text{ si } n = 6p + 4 \text{ OU}, \\ 3k_3 + 1 \text{ si } n = 6p \text{ OU}, \\ 3k_3 + 2 \text{ si } n = 6p + 2 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Soit en définitif le schéma de toutes ces relations ci-dessous. On y découvre la structure complète modulo 3 de la suite de Syracuse rétrograde :



Les flèches grises représentent les doubles sous formes de puissances de 2 paires et impaires. Les flèches noires représentent quant à elles la partie création de branche aux rangs suivants des formes $3k+2$.

Pour conclure, la suite de Syracuse rétrograde double à chaque étape et si elle revêt la forme $3k+2$ ajoute une nouvelle branche à son arbre. L'analyse détaillée de ses enchevêtrements modulo 3 révèle le caractère complexe de cette suite. Néanmoins, il apparaît des boucles, ou séquences de parités, déterminées.

L'arbre de Syracuse mène toutes ses branches au tronc central, les puissances de 2, qui à leurs tours mènent aux racines, l'unité 1. Les boucles, que l'on observe dans le schéma relationnel ci-dessus, représentent les formes des branches. C'est-à-dire plus ou moins inclinées vers le haut (les valeurs impaires) ou vers le bas (les valeurs paires).

Ne nombreuses questions sont alors en suspens. Par exemple, existe-t-il des boucles communes à plusieurs valeurs de départ N ? Bien sûr, mais comment les repérer, les exploiter ? Ces valeurs N suivant les mêmes boucles, ont-elles des relations entre elles ? Si oui, lesquelles ? Cela simplifie-t-il le problème ?

Le schéma relationnel permet de remonter l'arbre de Syracuse sans oublier aucune valeur et de comparer et analyser des parcours de parité, appelé boucles, équivalents entre plusieurs valeurs de départ N distincts. On peut ensuite chercher des relations entre ces valeurs N qui ont la particularité de suivre les mêmes boucles rang après rang.

5. Itération rétrograde modulo 2

On souhaite parcourir la suite à reculons beaucoup plus vite. C'est-à-dire en sachant sauter des rangs s'il existe des parités identiques consécutives : plusieurs $U_n(N)$ pairs (ou respectivement impairs) à suivre. Dans ce cas, on peut par itération connaître la suite rétrograde itérée comme suit :

Pour les pairs :

$$U_{1n}(N) = 2U_{n+1}(N) = 4U_{n+2}(N) = 8U_{n+3}(N) \dots$$

Cas pairs : $U_{1n}(N) = 2^k U_{n+k}(N) \forall k \geq 0$

Pour les impairs :

$$U_{2n}(N) = \frac{2U_{n+1}(N) - 1}{3} = \frac{2}{3} \left(\frac{2U_{n+2}(N) - 1}{3} \right) - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \left(\frac{2U_{n+3}(N) - 1}{3} \right) - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} = \dots$$

$$\rightarrow U_{2n}(N) = \left(\frac{2}{3}\right)^k U_{n+k}(N) - \sum_{j=1}^k \frac{2^{j-1}}{3^j} = \left(\frac{2}{3}\right)^k U_{n+k}(N) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(\frac{2}{3}\right)^j$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^k U_{n+k}(N) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k}{1 - \frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^k U_{n+k}(N) + \left(\frac{2}{3}\right)^k - 1 \forall k \geq 0$$

Cas impairs : $U_{2n}(N) = \left(\frac{2}{3}\right)^k (U_{n+k}(N) + 1) - 1 \forall k \geq 0$

Or on sait que pour $p \geq 0$:

- Lorsque $U_{n+k}(N) = 3p + 2$ alors $U_{1n}(N)$ et $U_{2n}(N)$ existent : 2 parcours montants sont possibles ;
- Lorsque $U_{n+k}(N) = 3p$ ou $3p + 1$ alors seul $U_{1n}(N)$ existe : 1 seul parcours montant possible.

Quelle trajectoire choisir pour à partir de 1 remonter la suite et atteindre N ? sachant qu'1 fois sur 3 il y a un choix de parcours entre U1 et U2 à prendre... la question reste entière.

~

On doit maintenant remonter l'arbre de Syracuse en ordre inverse jusqu'au N choisi. Pour cela, il suffit de prendre une fois sur deux les résultats précédents et d'itérer, ce qui donne :

$$N = U_0(N) = \dots U_{1n5} \left(U_{2n4} \left(U_{1n3} \left(U_{2n2} \left(U_{1n1}(N) \right) \right) \right) \right) \dots$$

Soit :

$$N = \dots 2^{n5} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n4} \left(2^{n3} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n2} (2^{n1} U_i(N) + 1) - 1 \right) + 1 \right) - 1 \right) \dots$$

$$N = \dots \frac{2^{n1+n2+n3+n4+n5}}{3^{n2+n4}} U_i(N) + \frac{2^{n2+n3+n4+n5}}{3^{n2+n4}} - \frac{2^{n3+n4+n5}}{3^{n4}} + \frac{2^{n4+n5}}{3^{n4}} - 2^{n5} \dots$$

$$N = \dots \frac{2^{n_2+n_3+n_4+n_5}}{3^{n_2+n_4}} (1 + 2^{n_1} U_i(N)) + \frac{2^{n_4+n_5}}{3^{n_4}} (1 - 2^{n_3}) - 2^{n_5} \dots$$

Sachant que par définition :

$$\sum_{j=1}^p n_j = i \text{ et } U_i(N) = 1$$

Et que par observation :

$$U_{i-1}(N) = 2; U_{i-2}(N) = 4; U_{i-3}(N) = 8 \rightarrow n_1 \geq 3$$

On obtient ainsi :

$$N = \frac{2^{\sum_{j=2}^p n_j}}{3^{\sum_{j=1}^2 n_{2j}}} (1 + 2^{n_1}) + \frac{2^{\sum_{j=4}^p n_j}}{3^{\sum_{j=1}^2 n_{2j}}} (1 - 2^{n_3}) + \frac{2^{\sum_{j=6}^p n_j}}{3^{\sum_{j=2}^2 n_{2j}}} (1 - 2^{n_5}) + \dots$$

Soit :

$$N = \frac{2^{1+\sum_{k=1}^p n_k}}{3^{\sum_{k=1}^{\frac{p}{2}} n_{2k}}} + \sum_{j=1}^{\frac{p}{2}} \frac{2^{\sum_{k=2j}^p n_k}}{3^{\sum_{k=j}^{\frac{p}{2}} n_{2k}}} (1 - 2^{n_{2j-1}}) \quad \forall p \geq 0 \text{ et } p \text{ pair}$$

$$N = \frac{2^{1+\sum_{k=1}^p n_k}}{3^{\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2k}}} - 2^{n_p} + \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{2^{\sum_{k=2j}^p n_k}}{3^{\sum_{k=j}^{\frac{p-1}{2}} n_{2k}}} (1 - 2^{n_{2j-1}}) \quad \forall p \geq 1 \text{ et } p \text{ impair}$$

Ou bien :

$$N = \frac{2^{\sum_{k=1}^p n_k}}{3^{\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2k}}} + \sum_{j=2}^p \frac{2^{\sum_{k=j}^p n_k}}{3^{\sum_{k=j-1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2k}}} (-1)^j \quad \forall p \geq 1 \text{ et } p \text{ impair}$$

Cette équation est utile notamment lorsqu'on verra, plus loin dans cet ouvrage, l'équation itérée de la suite de Syracuse de N. on pourra alors égaliser les deux N, l'un issu de la forme rétrograde et l'autre de la forme normale de la suite de Syracuse. Cela revient à égaliser une suite montante partant de 1 à une suite descendante partant de N.

On pourra faire de même avec la suite de Syracuse modulo 4 normale et rétrograde.

On pourra également, égaliser l'équation de N ci-dessus avec l'équivalente plus loin dans cet ouvrage de l'équation de N itérée d'ordre normal de n. On aurait ainsi, la correspondance entre la suite de Syracuse et la suite de Syracuse inverse ou rétrograde. On pourrait peut-être, via ces équations, l'une montante de 1 vers N et l'autre descendante de N vers 1, démontrer par leur égalité que la suite de Syracuse converge sans aucune exception. C'est une direction de résolution tout à fait intéressante à suivre. A vous de jouer.

6. Forme trigonométrique rétrograde modulo 2

Pour définir une forme trigonométrique de la suite de Syracuse inverse ou rétrograde modulo 2, on reprend les résultats précédents suivants :

$$U1_n(N) = 2U_{n+1}(N) \text{ avec } \forall U_{n+1}(N) > 0$$

$$U2_n(N) = \frac{2U_{n+1}(N) - 1}{3} \text{ avec } U_{n+1}(N) = 3k + 2, \forall k \geq 0$$

Soit :

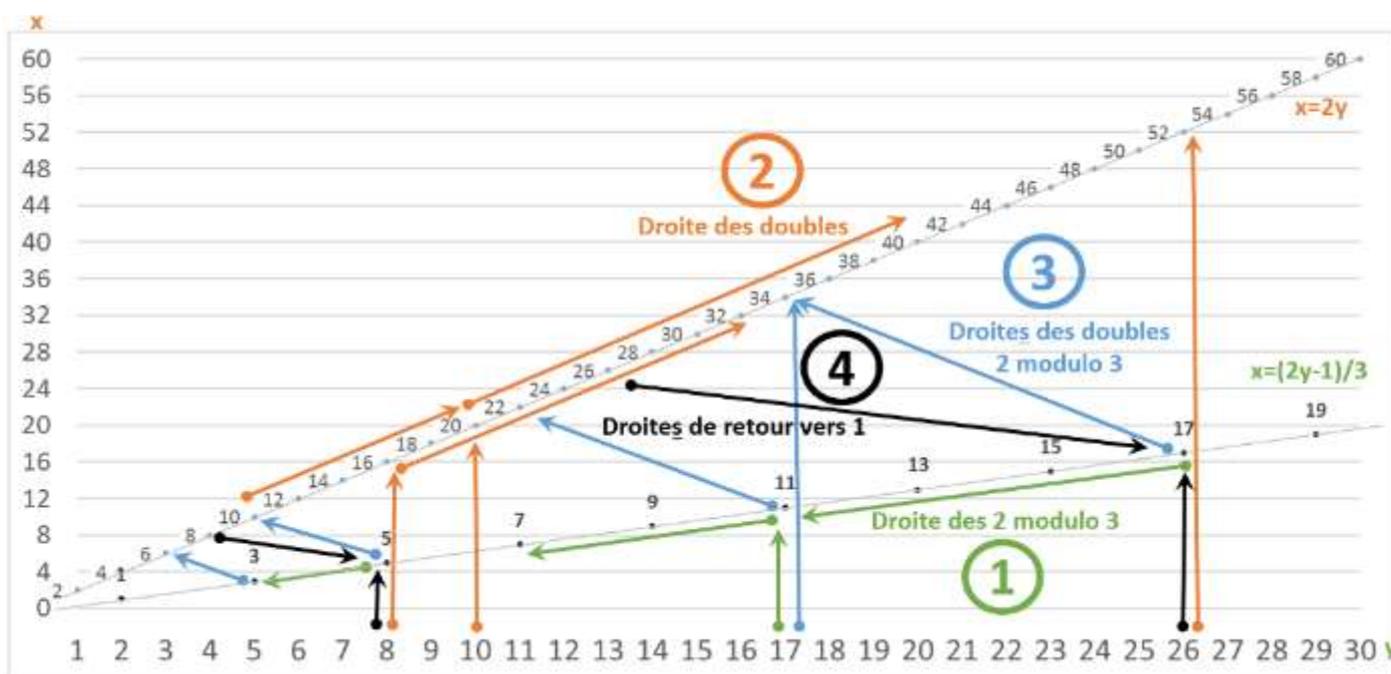
$$U2_n(N) = \frac{2U_{n+1}(N) - 1}{3} = \frac{2(3k + 2) - 1}{3} = 2k + 1 \forall k \geq 0$$

On a donc les deux solutions suivantes :

$$U1_n(N) = \sum_{k=0}^{\infty} 2ke^{-a(U_{n+1}(N)-k)^2} \forall U_{n+1}(N) > 0 \text{ et } a \gg 0$$

$$U2_n(N) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k + 1)e^{-a(U_{n+1}(N)-3k-2)^2} \forall U_{n+1}(N) = 3k + 2, k \geq 0 \text{ et } a \gg 0$$

Cela donne le graphique suivant :



Voici quelques explications de ce graphique. On trace deux droites : $x=2y$ et $x=(2y-1)/3$ correspondantes aux deux solutions. Mais la seconde n'est valable que pour des valeurs de la forme $3k+2$. C'est pourquoi on a indiqué uniquement les valeurs de la droite correspondant à ces $(3k+2)$ en abscisse. Par exemple pour 5 on a 3, pour 11 on a 7, etc.

La courbe orange contient tous les nombres pairs. La courbe verte contient tous les nombres impairs. Mais leurs échelles sont différentes. C'est pour cela que les nombres impairs sont plus rares que les nombres pairs dans l'arbre de la suite de Syracuse.

Lorsque que l'on débute par un nombre pair quelconque, on double. Par exemple : 10 en abscisse va vers 20, tout comme 8 vers 16 ou encore 26 vers 52. Ce sont les droites de bas en haut en orange, appelées droite des doubles. De même, lorsqu'on suit la courbe $x=2y$ en orange on double, par exemple : 10 donne 20, et 20 donne 40, ou 16 donne 32, etc.

Comme on double quel que soit la valeur, on double également pour les valeurs de la forme $3k+2$, appelées 2 modulo 3, par exemple : 17 donne 34, 11 donne 22, 5 donne 10 ou encore 3 donne 6. Ce sont les droites bleues. Celles qui doublent spécifiquement aux formes $3k+2$.

Ensuite, les valeurs de forme $3k+2$ ont soit une solution qui vaut leur double (droites bleues), soit une seconde solution qui vaut $(2y-1)/3$. Ce sont les droites vertes. Par exemple : 5 donne 10 mais aussi 3, 3 donne que 6 car 3 n'est pas de la forme $3k+2$, 11 donne 22 mais aussi 7, 17 donne 34 mais aussi 11, etc.

Enfin, certains doubles correspondent aussi à des formes $3k+2$. Par exemple : 8 donne 16 mais aussi 5, 26 donne 52 mais aussi 17. Ce sont les droites noires de retour vers 1 car en mode normal, c'est-à-dire en parcourant la suite de Syracuse dans le sens de la définition et non dans le sens inverse ou rétrograde, ces valeurs correspondent à un rattachement d'un impair à un pair, marquant le retour progressif vers 1 (si bien sûr aucun impair apparaît par la suite).

~

De plus, sachant que :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{2\pi}{3} 3k\right) &= \sin(2\pi k) = 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3} (3k + 1)\right) &= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3} (3k + 2)\right) &= \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin^2(k) &= \frac{1 - \cos(2k)}{2} \end{aligned}$$

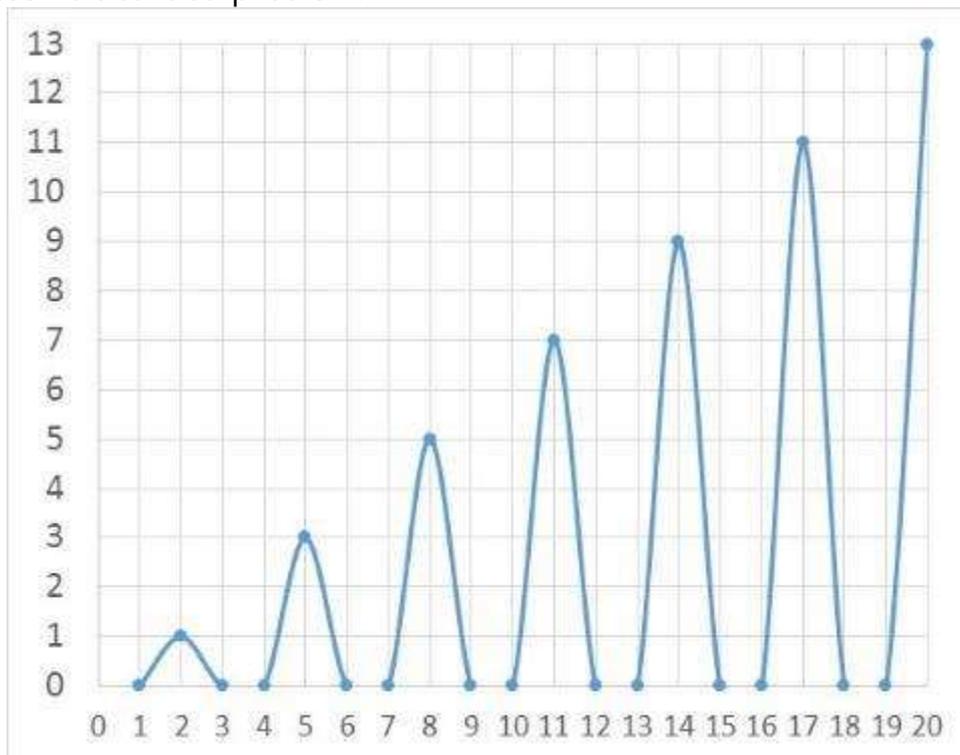
On trouve également simplement les équations trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned} U1_n(N) &= 2U_{n+1}(N) \quad \forall U_{n+1}(N) > 0 \\ U2_n(N) &= \frac{2}{3} \left(\frac{2U_{n+1}(N) - 1}{3} \right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} U_{n+1}(N)\right) \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3} U_{n+1}(N)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \forall U_{n+1}(N) \geq 0 \\ \rightarrow U2_n(N) &= \left(\frac{2U_{n+1}(N) - 1}{9} \right) \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{3} U_{n+1}(N)\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} U_{n+1}(N)\right) \right) \quad \forall U_{n+1}(N) \geq 0 \end{aligned}$$

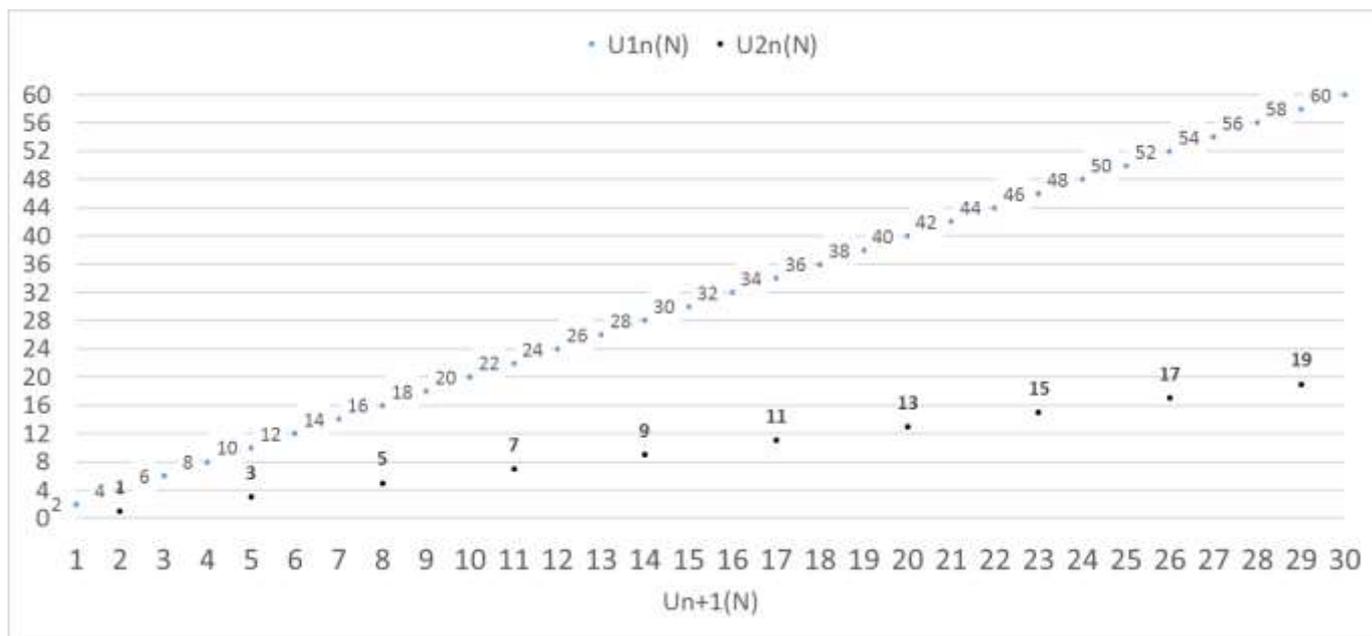
Pour la seconde équation ci-dessus, on vérifie bien que :

$$U2_n(N) = \begin{cases} 0 & \forall U_{n+1}(N) \neq 3k + 2, k \geq 0 \\ 2U_{n+1}(N) + 1 & \forall U_{n+1}(N) = 3k + 2, k \geq 0 \end{cases}$$

Voilà à quoi ressemble sans surprise U2 :



Si on superpose les points des solutions U1 et U2, on obtient simplement :



On retrouve les deux droites inverses de la suite, à savoir : $y_1 = 2x$ et $y_2 = \frac{2x-1}{3}$.

7. Ordre rétrograde modulo 4

On essaye maintenant de remonter l'arbre de la suite de Syracuse sous sa forme modulo 4. On reprend donc la forme de la conjecture de Syracuse simplifiée modulo 4 calculée précédemment :

$$U_0 = N \text{ et } \forall p > 0 :$$

$$U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{4} & \text{si } U_n = 4p \\ \frac{3U_n + 1}{4} & \text{si } U_n = 4p + 1 \\ \frac{3U_n + 2}{4} & \text{si } U_n = 4p + 2 \\ \frac{9U_n + 5}{4} & \text{si } U_n = 4p + 3 \end{cases}$$

$$\forall N > 0 \exists i / U_i = 1$$

On obtient simplement la fonction rétrograde suivante :

$$U1_n(N) = 4U_{n+1}(N) \quad \forall U_{n+1}(N) > 0$$

$$U2_n(N) = \frac{4U_{n+1}(N) - 1}{3} \quad \text{si } U_{n+1}(N) = 3k + 1, \forall k \geq 0$$

$$U3_n(N) = \frac{4U_{n+1}(N) - 2}{3} \quad \text{si } U_{n+1}(N) = 3k + 2, \forall k \geq 0$$

$$U4_n(N) = \frac{4U_{n+1}(N) - 5}{9} \quad \text{si } U_{n+1}(N) = 9k + 8, \forall k \geq 0$$

En effet, en ordre inverse, la suite peut générer 4 valeurs de $U_n(N)$ différentes :

- U1 pour 1 pair sur 2 à une fréquence de 1/1,
- U3 pour 1 pair sur 2 à une fréquence de 1/3,
- U2 pour 1 impair sur 2 à une fréquence de 1/3,
- U4 pour 1 impair sur 2 à une fréquence de 1/9.

On redécouvre ainsi sans surprise que les nombres pairs sont plus fréquents dans l'arbre de Syracuse modulo 4 que les nombres impairs. C'est-à-dire que les nombres pairs apparaissent plus nombreux que les nombres impairs en remontant l'arbre à partir de l'unité.

De même, on observe que pour U4 (correspondant aux nombres modulo 4 plus 3), leurs fréquences d'apparition dans l'arbre sont les moins fréquentes, mais les plus complexes.

Le calcul de U1 est évident avec la suite de Syracuse.

Le calcul de U2 et U3 également mais il faut s'assurer que le numérateur soit bien divisible par 3 et donne un entier. Pour cela il suffit que :

$$U2 : \frac{4U - 1}{3} = U + \frac{U - 1}{3}, \text{ soit } U = 3p + 1$$

$$U3 : \frac{4U - 2}{3} = U + \frac{U - 2}{3}, \text{ soit } U = 3p + 2$$

Et pour le calcul de U_4 , on procède comme suit :

$$U_4 : \frac{4U - 5}{9} = p, \text{ soit } U = \frac{9p + 5}{4} = p + \frac{p + 1}{4} + 1,$$

$$\text{soit } p = 4k - 1, \text{ soit } U = 9k - 1 \forall k > 0, \text{ soit } U = 9k + 8 \forall k \geq 0$$

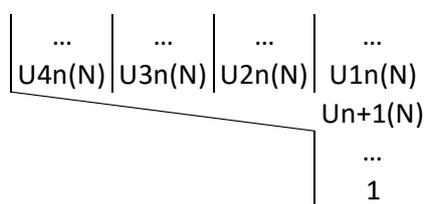
Pour bien comprendre ces résultats, voici un tableau (en 2 parties) les représentants pour $U_{n+1}(N) \leq 32$:

$U_{n+1}(N)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$U1_n(N)$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64
$U2_n(N)$	1	-	5	-	9	-	13	-	17	-	21	-	25	-	29	-
$U3_n(N)$	-	2	-	6	-	10	-	14	-	18	-	22	-	26	-	30
$U4_n(N)$	-	-	-	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
k	0	-	1	-	2	-	3	-	4	-	5	-	6	-	7	-
k pour $U4_n(N)$	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-

$U_{n+1}(N)$	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
$U1_n(N)$	68	72	76	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120	124	128
$U2_n(N)$	-	-	25	-	29	-	33	-	37	-	41	-	45	-	49	-
$U3_n(N)$	22	-	26	-	30	-	34	-	38	-	42	-	46	-	50	-
$U4_n(N)$	7	-	-	-	-	-	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-
k	5	-	6	-	7	-	8	-	9	-	10	-	11	-	12	-
k pour $U4_n(N)$	1	-	-	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-

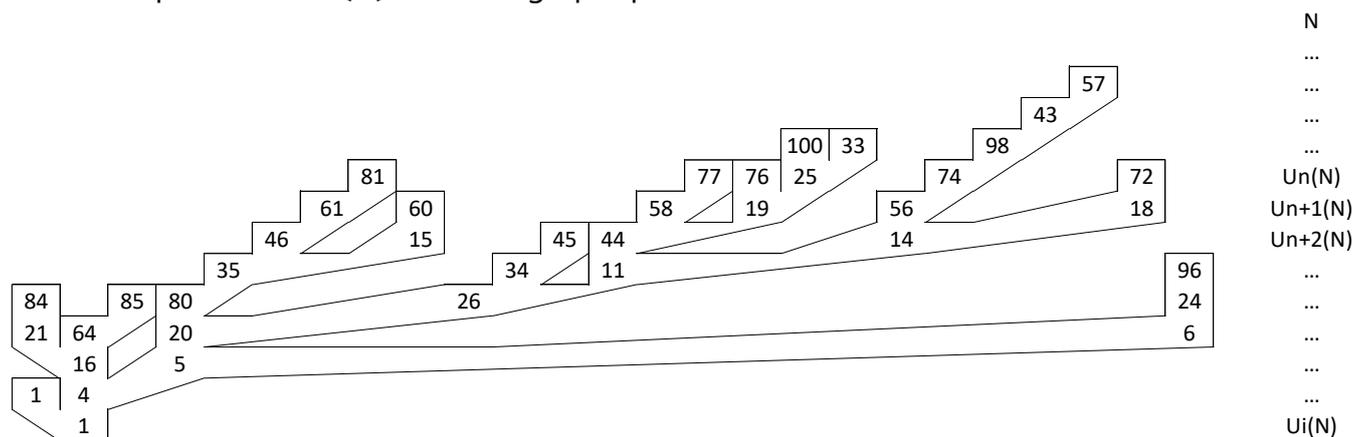
On observe qu'on a bien les fréquences et parités décrites précédemment.

On va construire de nouveau l'arbre de la suite de Syracuse en partant de l'unité et suivant la forme modulo 4 avec la représentation suivante :



A noter qu'il n'y a jamais 4 prédécesseurs sur un même rang, 3 au plus (cf. tableau précédent).

Cela donne pour tout $U1(N) \leq 100$ le graphique suivant :



Cet arbre contient exactement 40 des 100 valeurs N de départ. Les 60 autres $N \leq 100$ sont plus haut dans l'arbre (à d'autres étages) et passent par des valeurs de $U_n(N)$ supérieures à 100 avant de les atteindre.

On sait maintenant à la fois monter et descendre dans la suite de Syracuse modulo 4. Mais en est-on bien sûr ? En fait pas tout à fait. Car comment choisir, si en partant d'un N , la suite de Syracuse modulo 4 suit le chemin de $U1$, $U2$, $U3$ ou de $U4$?

8. Itération rétrograde modulo 4

On souhaite parcourir la suite modulo 4 à reculons beaucoup plus vite. C'est-à-dire en sachant sauter des rangs s'il existe des parités identiques consécutives : plusieurs $U_n(N)$ pairs (ou respectivement impairs) à suivre. Dans ce cas, on peut par itération connaître la suite rétrograde modulo 4 itérée comme suit :

Dans le 1^{er} cas :

$$U_{1n}(N) = 4U_{n+1}(N) = 16U_{n+2}(N) = 64U_{n+3}(N) \dots$$

$$\mathbf{1er\ cas : } U_{1n}(N) = \mathbf{4^k U_{n+k}(N) \forall k \geq 0}$$

Dans le 2nd cas :

$$U_{2n}(N) = \frac{4U_{n+1}(N) - 1}{3} = \frac{4}{3} \left(\frac{4U_{n+2}(N) - 1}{3} \right) - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \left(\frac{4}{3} \left(\frac{4U_{n+3}(N) - 1}{3} \right) - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} = \dots$$

$$\mathbf{2nd\ cas : } U_{2n}(N) = \left(\frac{4}{3} \right)^k (U_{n+k}(N) - 1) + 1 \text{ si } U_{n+k}(N) = 3p + 1, \forall (p, k) \geq 0$$

Dans le 3^{ième} cas :

$$U_{3n}(N) = \frac{4U_{n+1}(N) - 2}{3} = \frac{4}{3} \left(\frac{4U_{n+2}(N) - 2}{3} \right) - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \left(\frac{4}{3} \left(\frac{4U_{n+3}(N) - 2}{3} \right) - \frac{2}{3} \right) - \frac{2}{3} = \dots$$

$$\mathbf{3ième\ cas : } U_{3n}(N) = \left(\frac{4}{3} \right)^k (U_{n+k}(N) - 2) + 2 \text{ si } U_{n+k}(N) = 3p + 2, \forall (p, k) \geq 0$$

Dans le 4^{ième} cas :

$$U_{4n}(N) = \frac{4U_{n+1}(N) - 5}{9} = \frac{4}{9} \left(\frac{4U_{n+2}(N) - 5}{9} \right) - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \left(\frac{4}{9} \left(\frac{4U_{n+3}(N) - 5}{9} \right) - \frac{5}{9} \right) - \frac{5}{9} = \dots$$

$$\mathbf{4ième\ cas : } U_{4n}(N) = \left(\frac{4}{9} \right)^k (U_{n+k}(N) + 1) - 1 \text{ si } U_{n+k}(N) = 9p + 8, \forall (p, k) \geq 0$$

Or on sait donc que pour $p \geq 0$ et $q \geq 0$:

- Lorsque $U_{n+k}(N) = 3p$ alors seul $U_{1n}(N)$ existe : 1 seul parcours montant possible ;
- Lorsque $U_{n+k}(N) = 3p + 1$ alors $U_{1n}(N)$ et $U_{2n}(N)$ existent : 2 parcours possibles ;
- Lorsque $U_{n+k}(N) = 3p + 2$ alors $U_{1n}(N)$ et $U_{3n}(N)$ existent : 2 parcours possibles ;
 - Et si de plus $p = 3q + 2 \rightarrow U_{n+k}(N) = 9q + 8$ alors $U_{4n}(N)$ existe aussi : 1 parcours supplémentaire possible.

Quelle trajectoire choisir pour à partir de 1 remonter la suite et atteindre N ? Sachant que 2 fois sur 3 il y a un choix de parcours entre U1 et U2 ou U1 et U3 et 1 fois sur 9 entre U1, U3 ou U4 à prendre... la question reste entière.

9. Forme trigonométrique rétrograde modulo 4

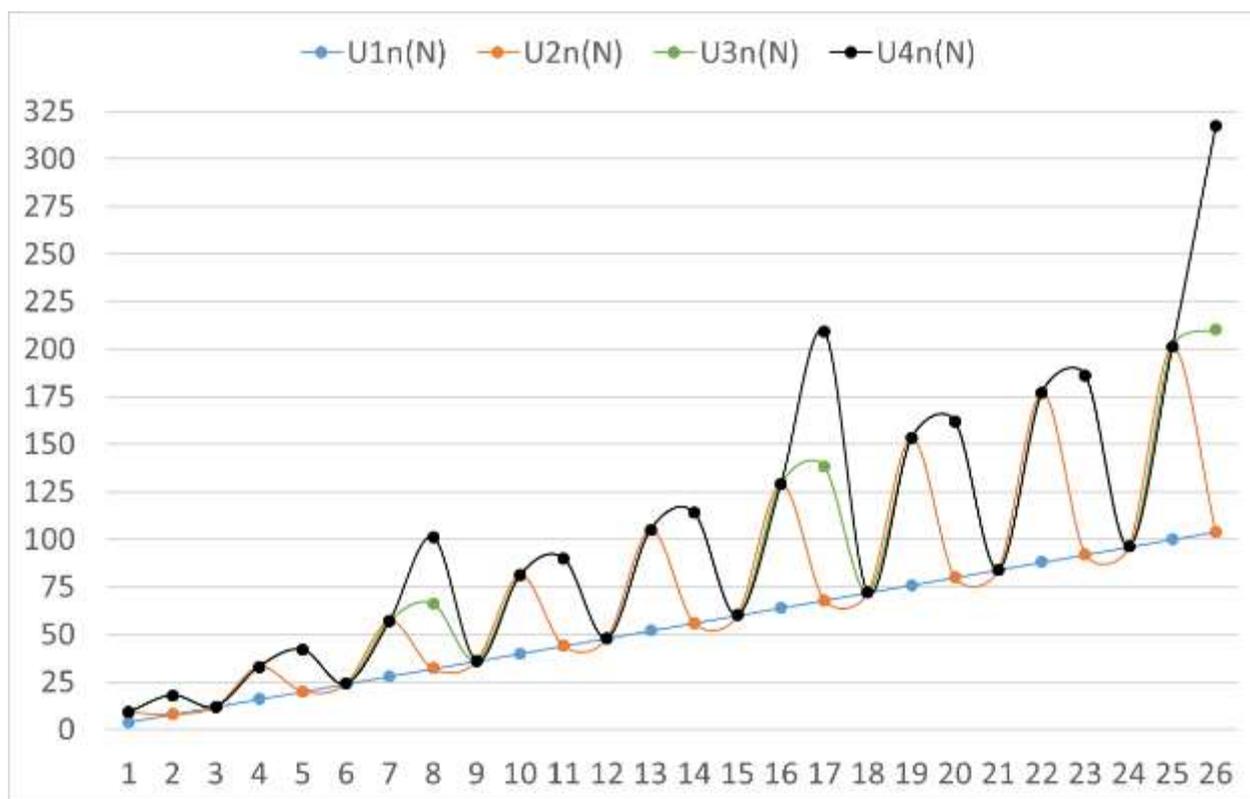
Nous allons ici présenter deux formes trigonométriques pour représenter la suite de Syracuse inverse ou rétrograde modulo 2. La première est directement issue de la suite originale. On applique le même raisonnement que pour bâtir notre suite trigonométrique, à savoir :

$$\begin{aligned}
 U1_n(N) &= 4k \quad \forall k > 0 \\
 U2_n(N) &= \frac{4(3k+1)-1}{3} = 4k+1, \quad \forall k \geq 0 \\
 U3_n(N) &= \frac{4(3k+2)-2}{3} = 4k+2 = 2(2k+1), \quad \forall k \geq 0 \\
 U4_n(N) &= \frac{4(9k+8)-5}{9} = 4k+3, \quad \forall k \geq 0
 \end{aligned}$$

On a donc les quatre solutions suivantes :

$$\begin{aligned}
 U1_n(N) &= \sum_{k=0}^{\infty} 4ke^{-a(U_{n+1}(N)-k)^2} \quad \forall U_{n+1}(N) > 0 \text{ et } a \gg 0 \\
 U2_n(N) &= \sum_{k=0}^{\infty} (4k+1)e^{-a(U_{n+1}(N)-3k-1)^2} \quad \forall U_{n+1}(N) = 3k+1, k \geq 0 \text{ et } a \gg 0 \\
 U3_n(N) &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)e^{-a(U_{n+1}(N)-3k-2)^2} \quad \forall U_{n+1}(N) = 3k+2, k \geq 0 \text{ et } a \gg 0 \\
 U4_n(N) &= \sum_{k=0}^{\infty} (4k+3)e^{-a(U_{n+1}(N)-9k-8)^2} \quad \forall U_{n+1}(N) = 9k+8, k \geq 0 \text{ et } a \gg 0
 \end{aligned}$$

Sous forme graphique, ces équations donnent les courbes suivantes :



On retrouve bien la droite $y=4x$ correspondant à $U1$.

Aux vues de ces courbes, on peut également reformuler ces quatre équations comme suit. Sachant que :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{2\pi}{3} 3k\right) &= \sin(2\pi k) = 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3} (3k + 1)\right) &= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3} (3k + 2)\right) &= \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{2\pi}{9} (9k + 8)\right) &= \sin\left(\frac{16\pi}{9}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) \\ \sin^2(k) &= \frac{1 - \cos(2k)}{2} \end{aligned}$$

On trouve également simplement les équations trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned} U1_n(N) &= 4U_{n+1}(N) \quad \forall U_{n+1}(N) > 0 \\ U2_n(N) &= \frac{2}{3} \left(\frac{4U_{n+1}(N) - 1}{3} \right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} U_{n+1}(N)\right) \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3} U_{n+1}(N)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \forall U_{n+1}(N) \geq 0 \\ U3_n(N) &= \frac{2}{3} \left(\frac{4U_{n+1}(N) - 2}{3} \right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} U_{n+1}(N)\right) \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3} U_{n+1}(N)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \forall U_{n+1}(N) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U4_n(N) = & \left(\frac{4U_{n+1}(N) - 5}{9} \right) \sin\left(\frac{2\pi}{9}U_{n+1}(N)\right) \left(-\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)} \right) \left(\sin\left(\frac{2\pi}{9}U_{n+1}(N)\right) \right) \\
 & - \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) \left(\sin\left(\frac{2\pi}{9}U_{n+1}(N)\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) \right) \left(\sin\left(\frac{2\pi}{9}U_{n+1}(N)\right) \right) \\
 & - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \left(\sin\left(\frac{2\pi}{9}U_{n+1}(N)\right) - \sin\left(\frac{8\pi}{9}\right) \right) \left(\sin\left(\frac{2\pi}{9}U_{n+1}(N)\right) \right) \\
 & - \sin\left(\frac{10\pi}{9}\right) \left(\sin\left(\frac{2\pi}{9}U_{n+1}(N)\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) \left(\sin\left(\frac{2\pi}{9}U_{n+1}(N)\right) - \sin\left(\frac{14\pi}{9}\right) \right) \forall U_{n+1}(N) \geq 0
 \end{aligned}$$

Soit en simplifiant :

$$\begin{aligned}
 & U1_n(N) = 4U_{n+1}(N) \forall U_{n+1}(N) > 0 \\
 U2_n(N) = & \left(\frac{4U_{n+1}(N) - 1}{9} \right) \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{3}U_{n+1}(N)\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}U_{n+1}(N)\right) \right) \forall U_{n+1}(N) \geq 0 \\
 U3_n(N) = & \left(\frac{4U_{n+1}(N) - 2}{9} \right) \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{3}U_{n+1}(N)\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}U_{n+1}(N)\right) \right) \forall U_{n+1}(N) \geq 0 \\
 U4_n(N) = & \left(\frac{4U_{n+1}(N) - 5}{144\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)} \right) \left(\cos\left(\frac{4\pi}{9}U_{n+1}(N)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{9}U_{n+1}(N)\right) - 1 \right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \right. \\
 & \left. + \cos\left(\frac{4\pi}{9}U_{n+1}(N)\right) \right) \left(\cos\left(\frac{4\pi}{9}U_{n+1}(N)\right) + \frac{1}{2} \right) \left(\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \right. \\
 & \left. - \cos\left(\frac{4\pi}{9}U_{n+1}(N)\right) \right) \forall U_{n+1}(N) \geq 0
 \end{aligned}$$

Ces équations permettent de tracer directement les courbes précédentes sans calcul rang après rang.

11. Subdivisions entre deux puissances de 2

Sachant que :

$$\begin{aligned} \text{Si } N = 2^k \text{ alors } i = k \quad \forall k \geq 0 \\ \text{Si } N = 2^{k+1} \text{ alors } i = k + 1 \quad \forall k \geq 0 \end{aligned}$$

On a entre ces deux puissances de 2, toutes les subdivisions entières positives suivantes :

$$N = 2^k + \frac{2^k}{2} = 3.2^{k-1} : i = \dots \quad \forall k \geq 1$$

Puis entre cette subdivision, les subdivisions suivantes :

$$N = 2^k + \frac{2^k}{4} = 5.2^{k-2} : i = \dots \quad \forall k \geq 2$$

$$N = 2^k + 3 \frac{2^k}{4} = 7.2^{k-2} : i = \dots \quad \forall k \geq 2$$

Puis de même :

$$N = 2^k + \frac{2^k}{8} = 9.2^{k-3} = 3^2.2^{k-3} : i = \dots \quad \forall k \geq 3$$

$$N = 2^k + 3 \frac{2^k}{8} = 11.2^{k-3} : i = \dots \quad \forall k \geq 3$$

$$N = 2^k + 5 \frac{2^k}{8} = 13.2^{k-3} : i = \dots \quad \forall k \geq 3$$

$$N = 2^k + 7 \frac{2^k}{8} = 15.2^{k-3} = 5.3.2^{k-3} : i = \dots \quad \forall k \geq 3$$

Puis de même :

$$N = 2^k + \frac{2^k}{16} = 17.2^{k-4} : i = \dots \quad \forall k \geq 4$$

$$N = 2^k + 3 \frac{2^k}{16} = 19.2^{k-4} : i = \dots \quad \forall k \geq 4$$

$$N = 2^k + 5 \frac{2^k}{16} = 21.2^{k-4} = 7.3.2^{k-4} : i = \dots \quad \forall k \geq 4$$

$$N = 2^k + 7 \frac{2^k}{16} = 23.2^{k-4} : i = \dots \quad \forall k \geq 4$$

$$N = 2^k + 9 \frac{2^k}{16} = 25.2^{k-4} = 5^2.2^{k-4} : i = \dots \quad \forall k \geq 4$$

$$N = 2^k + 11 \frac{2^k}{16} = 27.2^{k-4} = 3^3.2^{k-4} : i = \dots \quad \forall k \geq 4$$

$$N = 2^k + 13 \frac{2^k}{16} = 29.2^{k-4} : i = \dots \quad \forall k \geq 4$$

$$N = 2^k + 15 \frac{2^k}{16} = 31.2^{k-4} : i = \dots \quad \forall k \geq 4$$

...

Soit en définitif :

$$N = 2^k + (2q + 1) \frac{2^k}{2^p} = (2^p + 2q + 1)2^{k-p} : i = \dots \quad \forall q < 2^{p-1} \text{ et } k \geq p \geq 1$$

Donc k-p fois pairs, soit :

$$N = (2^p + 2q + 1)2^{k-p} : \text{pairs } k - p \text{ fois}$$

Puis :

$$U_{k-p}(N) = 2^p + 2q + 1 : \text{impair}$$

$$U_{k-p+1}(N) = \frac{3(2^p + 2q + 1) + 1}{2} = 3 \cdot 2^{p-1} + 3q + 2$$

$$U_{k-p+2}(N) = \begin{cases} 3 \cdot 2^{p-2} + \frac{3q}{2} + 1 & \text{si } q \text{ pair} \\ \frac{3(3 \cdot 2^{p-1} + 3q + 2) + 1}{2} = 3^2 \cdot 2^{p-2} + \frac{3^2 q + 7}{2} & \text{si } q \text{ impair} \end{cases}$$

Le rang suivant $U_{k-p+3}(N)$ est fonction de la parité de $U_{k-p+2}(N)$, et donc pas calculable à l'avance.

Prenons quelques cas particuliers :

$$q = q_{\max} = 2^{p-1} - 1 \text{ alors } U_{k-p+2}(N) = 3^2 \cdot 2^{p-1} - 1 : \text{impair}$$

$$U_{k-p+3}(N) = 3^3 \cdot 2^{p-2} - 1 : \text{impair et de même forme}$$

... toujours impair ...

$$U_k(N) = 3^p \cdot 2 - 1 : \text{impair}$$

$$U_{k+1}(N) = 3^{p+1} - 1 : \text{pair}$$

$$U_{k+2}(N) = \frac{3^{p+1} - 1}{2}$$

$$\text{Avec } p = \frac{\ln(2s+1)}{\ln(3)} = \frac{\ln(s) + \ln\left(2 + \frac{1}{s}\right)}{\ln(3)} \approx \frac{\ln(s)}{\ln(3)} \text{ si } s \gg 0$$

Second exemple :

$$q = q_{\min} = 0 \text{ alors } U_{k-p+2}(N) = 3 \cdot 2^{p-2} + 1 : \text{impair}$$

$$U_{k-p+3}(N) = 3^2 \cdot 2^{p-3} + 2 : \text{pair}$$

$$U_{k-p+4}(N) = 3^2 \cdot 2^{p-4} + 1 : \text{impair}$$

... alternativement pair puis impair ...

$$U_k(N) = 3^{\frac{p}{2}} + 1 \text{ si } p \text{ pair} : \text{impair}$$

$$U_{k+1}(N) = \frac{3^{\frac{p}{2}} + 1}{2} \text{ si } p \text{ pair}$$

$$\text{Avec } p = 2 \frac{\ln(2s-1)}{\ln(3)} = \frac{\ln\left(4s^2 \left(1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{4s^2}\right)\right)}{\ln(3)} \approx 2 \frac{\ln(s) + \ln(2)}{\ln(3)} \text{ si } s \gg 0$$

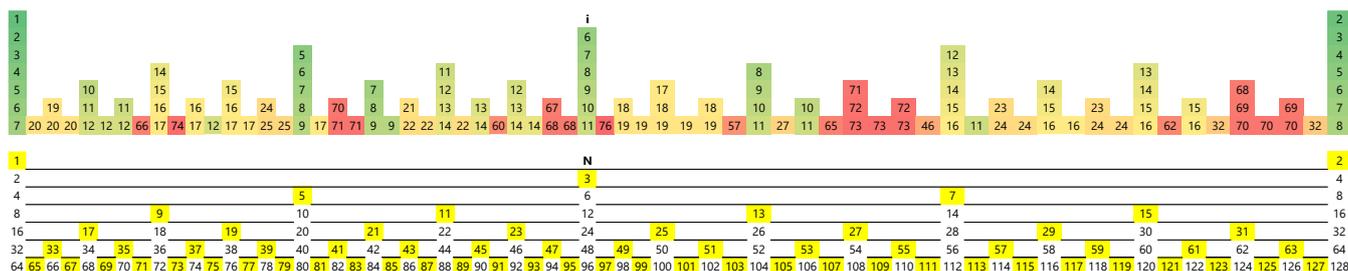
$$U_k(N) = 3^{\frac{p+1}{2}} + 2 \text{ si } p \text{ impair} : \text{impair}$$

$$U_{k+1}(N) = \frac{3^{\frac{p+3}{2}} + 7}{2} \text{ si } p \text{ impair}$$

$$\text{Avec } p = 2 \frac{\ln(2s+1)}{\ln(3)} - 3 = \frac{\ln\left(4s^2 \left(1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{4s^2}\right)\right)}{\ln(3)} - 3 \approx 2 \frac{\ln(s) + \ln(2)}{\ln(3)} - 3 \text{ si } s \gg 0$$

En essayant d'autres valeurs de q , on remarque qu'il n'y a pas de généralisation simple possible.

Voici ci-dessous le graphique inter-puissance de 2 des vols i puis des valeurs de départ $N < 129$:



Les fonds verts signifient que les vols sont courts, les fonds jaunes moyens et les fonds rouges longs. On distingue clairement que les durées de vols sont totalement chaotiques vis-à-vis de cette tentative de représentation.

Peut-être en élargissant cette représentation à N beaucoup plus grand on pourrait voir un dessin ou des zones plus foncées que d'autres et en tirer profit. Là aussi on se trouve face à une impasse.

12. Empilements

On représente la suite de Syracuse sous forme d'empilements avec à sa base en haut tous les nombres impairs ordonnés du plus petit vers le plus grand. En dessous de chacun des nombres impairs on empile leurs doubles dans l'ordre croissant. Ce qui donne le tableau suivant :

		Ligne des impairs +2 : X _m																		
		1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	...
Colonnes des pairs x2 : Y _{p(m)}	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	...	
	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	140	...	
	8	24	40	56	72	88	104	120	136	152	168	184	200	216	232	248	264	280	...	
	16	48	80	112	144	176	208	240	272	304	336	368	400	432	464	496	528	560	...	
	32	96	160	224	288	352	416	480	544	608	672	736	800	864	928	992	1056	1120	...	
	64	192	320	448	576	704	832	960	1088	1216	1344	1472	1600	1728	1856	1984	2112	2240	...	
	128	384	640	896	1152	1408	1664	1920	2176	2432	2688	2944	3200	3456	3712	3968	4224	4480	...	
	256	768	1280	1792	2304	2816	3328	3840	4352	4864	5376	5888	6400	6912	7424	7936	8448	8960	...	
	512	1536	2560	3584	4608	5632	6656	7680	8704	9728	10752	11776	12800	13824	14848	15872	16896	17920	...	
	1024	3072	5120	7168	9216	11264	13312	15360	17408	19456	21504	23552	25600	27648	29696	31744	33792	35840	...	
...	

On remarque que si on prend comme référence la première colonne, alors les colonnes suivantes sont inférieures si elles sont de la même couleur de fond. De ce fait, on fait ressortir les nombres impairs qui engendrent des sauts d'une ligne à une autre (inférieure à la précédente). On voit également clairement la forme logarithmique pour les entiers (parcours de gauche à droite sur un même fond de couleur).

A noter qu'il n'y a aucun doublon dans ce tableau. C'est-à-dire qu'aucun nombre n'apparaît plus d'une fois. Ce tableau à l'infini contient l'ensemble des entiers naturels positifs.

On pose :

$$X_{m+1} = X_m + 2 \text{ avec } X_0 = 1 \forall m \geq 0$$

$$Y_{p+1}(m) = 2Y_p(m) \text{ avec } Y_0(m) = X_m \forall m \geq 0 \text{ et } \forall p \geq 0$$

Par itération successive, on trouve :

$$X_m = X_0 + 2m = 2m + 1$$

$$Y_p(m) = 2^p X_m = 2^p(2m + 1)$$

Pour exploiter ces 2 résultats observables, on pose pour les itérations débutantes paires :

$$P \rightarrow P: \frac{x}{2} = x - 2^k(2p + 1) \text{ avec } k > 1 \text{ et } p \geq 0$$

Et :

$$P \rightarrow I: \frac{x}{2} = x - (2p' + 1) \text{ avec } p' \geq 0$$

On notera que ces deux équations décroissent et sont inférieures à x.

On obtient respectivement :

$$p = \frac{x - 2^{k+1}}{2^{k+2}}$$

$$p' = \frac{x-2}{4}$$

De même, on pose pour une itération d'impair vers pair :

$$I \rightarrow P: \frac{3x+1}{2} = 2^k(x-2p) \text{ avec } k > 0 \text{ et } p > 0$$

On notera que la partie entre parenthèse est inférieure à x après k itérations paires.

En développant cette équation et en isolant p, on obtient :

$$p = \frac{(2^{k+1}-3)x-1}{2^{k+2}} = \frac{x}{2} - \frac{3x+1}{2^{k+2}}$$

si k est grand: $p \approx \frac{x}{2}$

si k est petit: $k=1 \rightarrow p = \frac{x-1}{8}$

si $k=2 \rightarrow p = \frac{5x-1}{16}$

si $k=3 \rightarrow p = \frac{13x-1}{32}$

Par exemple :

Si $N = 5 > 8 > 4 > 2 > 1$, alors $k=3$ (3 itérations paires après l'impair de départ), et donc :

$$x = 5, p = \frac{13x-1}{32} = \frac{65-1}{32} = 2, \text{ et } x-2p = 1$$

En connaissant k, on peut passer directement ici de 5 à 1.

De même, on pose pour une itération d'impair vers impair :

$$I \rightarrow I: \frac{3x+1}{2} = x + 2^{k'}p' \text{ avec } k' > 0 \text{ et } p' > 0$$

On notera que la partie de droite de cette équation est supérieure à x et croît.

De la même manière que précédemment, on obtient :

$$p' = \frac{x+1}{2^{k'+1}}$$

Aux rangs suivants, on a :

$$\frac{3(x+2^{k'}p')+1}{2} = \frac{3x+3 \cdot 2^{k'}p'+1}{2} = x + 2^{k'}p' + 3 \cdot 2^{k'-1}p' = x + 5 \cdot 2^{k'-1}p'$$

$$\frac{3(x+5 \cdot 2^{k'-1}p')+1}{2} = \frac{3x+15 \cdot 2^{k'-1}p'+1}{2} = x + 2^{k'}p' + 15 \cdot 2^{k'-2}p' = x + 19 \cdot 2^{k'-2}p'$$

...

Et au rang k' :

$$= x + \sum_{j=0}^{k'} (3^j \cdot 2^{k'-j}) 2^{k'-k'}p' = x + p' \sum_{j=0}^{k'} (3^j \cdot 2^{k'-j}) = x + 2^{k'}p' \sum_{j=0}^{k'} \left(\frac{3}{2}\right)^j$$

$$= x + 2^{k'}p' \frac{\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{k'+1}\right)}{1 - \frac{3}{2}} = x + 2^{k'+1}p' \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k'+1} - 1\right) = x + (3^{k'+1} - 2^{k'+1})p'$$

$$= x + (3^{k'+1} - 2^{k'+1})p'$$

Si on recherche les cas d'impairs qui restent impairs et croît, on pose :

$$x + p'(3^{k'+1} - 2^{k'+1}) = 4q + 3$$

On a :

$$q = \frac{x - 3 + 3^{k'+1}p'}{4} - 2^{k'-1}p'$$

De plus, pour avoir :

$$\frac{3(4q + 3) + 1}{2} = 4q' + 3$$

$$6q + 5 = 4q' + 3$$

Il faut que :

$$q = \frac{2q' - 1}{3} = \frac{2(q'' + 2) - 1}{3} = \frac{2q''}{3} + 1 = \frac{2 \cdot 3q'''}{3} + 1 = 2q''' + 1 \text{ avec } q' = q'' + 2 \text{ et } q'' = 3q'''$$

On a donc :

$$x = 4q + 3 = 8q''' + 7 \text{ avec } p' = 0$$

De manière générale, pour que la suite croît sans fin, on doit avoir :

$$x_n = 2^n k + (2^n - 1)$$

$$x_n = 2^n(k + 1) - 1$$

Par exemple :

$$x_n = 4k + 3 ; 8k + 7 ; 16k + 15 \dots$$

Aux rangs suivants on a :

$$x_{n+1} = \frac{3x_n + 1}{2} = 3 \cdot 2^{n-1}(k + 1) - 1$$

$$x_{n+2} = \frac{3x_{n+1} + 1}{2} = 3^2 \cdot 2^{n-2}(k + 1) - 1$$

...

$$x_{2n} = \frac{3x_{2n-1} + 1}{2} = 3^n \cdot 2^0(k + 1) - 1 = 3^n(k + 1) - 1 > x_n$$

$$x_{2n+1} = \begin{cases} \frac{3^n(k + 1) - 1}{2} & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{3^{n+1}(k + 1)}{2} - 1 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

...

Les empilements permettent d'apprécier les progressions logarithmiques de la suite de Syracuse. Ils démontrent que l'ensemble de tous les éléments de la suite de Syracuse est la totalité de l'ensemble \mathbb{N}^+ des entiers naturels positifs et sans aucun doublon. Ils démontrent aussi qu'il existe un schéma/tableau simple de représentation de la progression de la suite de Syracuse. Les évolutions des vols sont alors mieux observables.

13. Combinaisons de vols

Ce chapitre est consacré à l'étude des relations entre collatéraux d'un vol. C'est-à-dire quelles relations les voisins d'un vol ont-ils avec ce vol ?

Pour cela, on change temporairement de nomenclature pour plus de clarté. On pose ainsi :

$$f(N) = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{si } N \text{ pair} \\ \frac{3N+1}{2} & \text{si } N \text{ impair} \end{cases} \quad \text{avec } N > 0$$

Il vient :

$$\begin{aligned} f(2N) &= N = a \\ f(2N+1) &= 3N+2 = b \end{aligned}$$

De ce fait on établit facilement :

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f(4N+2) = 2N+1 \\ f(-a+b) &= f(2N+2) = N+1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(a+b) - f(-a+b) &= N = a \\ f(a+b) + f(-a+b) &= 3N+2 = b \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} f(a+b) &= \frac{a+b}{2} = \frac{4N+2}{2} = 2N+1 \\ f(-a+b) &= \frac{-a+b}{2} = \frac{2N+2}{2} = N+1 \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= f(N) + f(3N+2) = \begin{cases} \frac{N}{2} + \frac{3N+2}{2} = 2N+1 & \text{si } N \text{ pair} \\ \frac{3N+1}{2} + \frac{9N+7}{2} = 6N+4 = 2(3N+2) & \text{si } N \text{ impair} \end{cases} \\ -f(a) + f(b) &= -f(N) + f(3N+2) = \begin{cases} -\frac{N}{2} + \frac{3N+2}{2} = N+1 & \text{si } N \text{ pair} \\ -\frac{3N+1}{2} + \frac{9N+7}{2} = 3N+3 = 3(N+1) & \text{si } N \text{ impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} f(a) &= \begin{cases} \frac{1}{2}((2N+1) - (N+1)) = \frac{N}{2} = \frac{a}{2} = \frac{b-2}{6} & \text{si } N \text{ pair} \\ \frac{1}{2}((6N+4) - (3N+3)) = \frac{3N+1}{2} = \frac{b-1}{2} = \frac{3a+1}{2} & \text{si } N \text{ impair} \end{cases} \\ f(b) &= \begin{cases} \frac{1}{2}((2N+1) + (N+1)) = \frac{3N+2}{2} = \frac{b}{2} = \frac{3a+2}{6} & \text{si } N \text{ pair} \\ \frac{1}{2}((6N+4) + (3N+3)) = \frac{9N+7}{2} = \frac{3b+1}{2} = \frac{9a+7}{2} & \text{si } N \text{ impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Tout cela semble bien compliqué, voir inutile. Voyons la suite.

1. Etude préliminaire

On part de l'observation simple suivante :

$$f(2k+1) = 3k+2 \text{ et } k = f(2k) \\ \rightarrow f(2k+1) = 3f(2k) + 2 \rightarrow f(2k+1) - 3f(2k) = 2$$

D'où :

$$2 = \begin{cases} f(N+1) - 3f(N) \text{ si } N \text{ pair} \\ f(N) - 3f(N-1) \text{ si } N \text{ impair} \end{cases}$$

En ajoutant le rang suivant :

$$\begin{cases} f(N+1) + 3f(N+2) = 3f(N) + f(N+3) \text{ si } N \text{ pair} \\ f(N) + 3f(N+1) = 3f(N-1) + f(N+2) \text{ si } N \text{ impair} \end{cases}$$

Soit :

$$\forall n > 0 \rightarrow 0 = \begin{cases} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k (f(N+2k+1) - 3f(N+2k)) \text{ si } N \text{ pair} \\ \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k (f(N+2k) - 3f(N+2k-1)) \text{ si } N \text{ impair} \end{cases}$$

Ou bien :

$$3 = \begin{cases} \frac{f(N+1) - f(N+3)}{f(N) - f(N+2)} \text{ si } N \text{ pair} \\ \frac{f(N) - f(N+2)}{f(N-1) - f(N+1)} \text{ si } N \text{ impair} \end{cases}$$

Si bien que :

$$2 = \begin{cases} f(N+2k+1) - 3f(N+2k) \text{ si } N \text{ pair} \\ f(N+2k) - 3f(N+2k-1) \text{ si } N \text{ impair} \end{cases} \\ 3 = \begin{cases} \frac{f(N+2k+1) - f(N+2k+3)}{f(N+2k) - f(N+2k+2)} \text{ si } N \text{ pair} \\ \frac{f(N+2k) - f(N+2k+2)}{f(N+2k-1) - f(N+2k+1)} \text{ si } N \text{ impair} \end{cases}$$

Enfin, voici également quelques résultats indépendants de la parité :

$$f(N-1) + 2f(N) + f(N+1) = 4N + 1$$

Au rang suivant :

$$f(N) + 2f(N+1) + f(N+2) = 4N + 5$$

Soit :

$$f(N+k-1) + 2f(N+k) + f(N+k+1) = 4(N+k) + 1$$

Ensuite :

$$-f(N-1) - f(N) + f(N+1) + f(N+2) = 4$$

Au rang suivant :

$$-f(N) - f(N+1) + f(N+2) + f(N+3) = 4$$

Soit :

$$f(N+k+2) + f(N+k+3) = 4 + f(N+k) + f(N+k+1)$$

Par soustraction :

$$-f(N-1) + 2f(N+1) - f(N+3) = 0$$

Au rang précédant :

$$-f(N - 2) + 2f(N) - f(N + 2) = 0$$

Soit :

$$f(N + k) = \frac{f(N + k - 2) + f(N + k + 2)}{2}$$

Mais alors, comment trouver plus généralement des ensembles de relations collatérales ? Voyons la suite.

2. Combinaisons linéaires de trois vols collatéraux

On essaie ici de voir s'il existe une relation linéaire entre un vol N et les deux vols collatéraux N+1 et N-1 au 1^{er} rang. Voici comment on procède :

$$\begin{aligned} f(N) &= \left\{ \frac{N}{2} \text{ ou } \frac{3N+1}{2} \right\} \\ f(N+1) &= \left\{ \frac{N+1}{2} \text{ ou } \frac{3N+4}{2} \right\} \\ f(N-1) &= \left\{ \frac{N-1}{2} \text{ ou } \frac{3N-2}{2} \right\} \end{aligned}$$

On recherche une équation tel que la combinaison linéaire des trois vols collatéraux soit égale qu'elle que soit la parité de N. Soit :

$$\begin{aligned} a \frac{N}{2} + b \frac{3N+4}{2} + c \frac{3N-2}{2} &= a \frac{3N+1}{2} + b \frac{N+1}{2} + c \frac{N-1}{2} \\ \rightarrow N(a+3b+3c) + 4b - 2c &= N(3a+b+c) + a + b - c \\ \rightarrow \begin{cases} a+3b+3c = 3a+b+c \\ 4b-2c = a+b-c \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} a = b+c \\ a = 3b-c \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b = c \end{cases} \end{aligned}$$

D'où en posant :

$$a = 2k \rightarrow b = c = k$$

On a le cas général suivant :

$$2kf(N) + k(f(N+1) + f(N-1)) = \begin{cases} 2k \frac{N}{2} + k \frac{3N+4}{2} + k \frac{3N-2}{2} = (4N+1)k \\ 2k \frac{3N+1}{2} + k \frac{N+1}{2} + k \frac{N-1}{2} = (4N+1)k \end{cases}$$

D'où :

$$2kf(N) + k(f(N+1) + f(N-1)) = (4N+1)k \quad \forall \text{ la parité de } N > 0$$

Ce qui donne en définitif, en divisant par k, l'équation étonnante suivante :

$$f(N-1) + 2f(N) + f(N+1) = 4N+1 \quad \forall \text{ la parité de } N > 0$$

Ou décalé d'un rang :

$$f(N) + 2f(N+1) + f(N+2) = 4N+5 \quad \forall \text{ la parité de } N > 0$$

Et en soustrayant ces deux équations, il vient :

$$-f(N-1) - f(N) + f(N+1) + f(N+2) = 4$$

On a ainsi, indépendant de la parité de N et de N lui-même, une équation reliant quatre collatéraux de N.

Poursuivons en décalant de nouveau et soustrayant, on obtient :

$$\begin{aligned} -f(N) - f(N+1) + f(N+2) + f(N+3) &= 4 \\ -f(N-1) + 2f(N+1) - f(N+3) &= 0 \end{aligned}$$

Où :

$$f(N-1) + f(N+3) = 2f(N+1) = \begin{cases} N+1 \text{ si } N \text{ pair} \\ 3N+4 \text{ si } N \text{ impair} \end{cases}$$

On a donc :

$$f(N) = \frac{f(N-2) + f(N+2)}{2} = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{si } N \text{ pair} \\ \frac{3N+1}{2} & \text{si } N \text{ impair} \end{cases}$$

On a donc une nouvelle équation pour décrire la suite de Syracuse. Cette formulation met en valeur la **moyenne arithmétique de deux collatéraux**, l'un supérieur et l'autre inférieur à N de deux unités.

On remarque aisément que l'on a également :

$$\frac{f(N-1) + f(N+1)}{2} = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{si } N \text{ impair} \\ \frac{3N+1}{2} & \text{si } N \text{ pair} \end{cases}$$

Si bien qu'en additionnant, on a :

$$f(N-2) + f(N-1) + f(N+1) + f(N+2) = 4N + 1 \forall \text{ la parité de } N$$

On peut étendre ce résultat en prenant les multiples de N pair et impair, soit :

$$f(N) = \frac{f(N-2k) + f(N+2k)}{2} = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{si } N \text{ pair} \\ \frac{3N+1}{2} & \text{si } N \text{ impair} \end{cases}$$

Et :

$$\frac{f(N-2k-1) + f(N+2k+1)}{2} = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{si } N \text{ impair} \\ \frac{3N+1}{2} & \text{si } N \text{ pair} \end{cases}$$

D'où :

$$f(N-2k) + f(N-2k-1) + f(N+2k+1) + f(N+2k) = 4N + 1 \forall \text{ la parité de } N$$

Revenons maintenant au résultat initial par un exemple :

$$N = 10 \rightarrow 2f(10) + f(11) + f(9) = 41$$

$$N = 11 \rightarrow 2f(11) + f(12) + f(10) = 45$$

On peut également retrouver ce résultat de la manière suivante :

$$\text{Si } N \text{ pair} \rightarrow f(N) = \frac{N}{2} ; f(N+1) = \frac{3N+1}{2} = 3f(N) + 2 ; f(N-1) = \frac{3N-1}{2} = 3f(N) - 1$$

$$\text{Si } N \text{ impair} \rightarrow f(N) = \frac{3N+1}{2} ; f(N+1) = \frac{N+1}{2} = \frac{f(N)+1}{3} ; f(N-1) = \frac{N-1}{2} = \frac{f(N)-2}{3}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & f(N-1) + 2f(N) + f(N+1) \\ &= \begin{cases} 3f(N) - 1 + 2f(N) + 3f(N) + 2 = 8f(N) + 1 = 4N + 1 \text{ si } N \text{ pair} \\ \frac{f(N)-2}{3} + 2f(N) + \frac{f(N)+1}{3} = \frac{1}{3}(8f(N)-1) = 4N + 1 \text{ si } N \text{ impair} \end{cases} \\ &\rightarrow f(N-1) + 2f(N) + f(N+1) = 4N + 1 \forall \text{ la parité de } N \end{aligned}$$

Aux deux rangs suivants, on obtient successivement :

$$f(2f(N) + f(N + 1) + f(N - 1)) = f(4N + 1) = 6N + 2 \forall \text{ la parité de } N > 0$$

$$f(f(2f(N) + f(N + 1) + f(N - 1))) = f(6N + 2) = 3N + 1 \forall \text{ la parité de } N > 0$$

On s'arrête là car au rang suivant la parité peut changer.

Par exemple :

$$N = 10 \rightarrow \begin{cases} f(2f(10) + f(11) + f(9)) = f(41) = 62 \\ f(f(2f(10) + f(11) + f(9))) = f(62) = 31 \end{cases}$$

$$N = 11 \rightarrow \begin{cases} f(2f(11) + f(12) + f(10)) = f(45) = 68 \\ f(f(2f(11) + f(12) + f(10))) = f(68) = 34 \end{cases}$$

On va maintenant sommer de manière alternée l'équation précédente comme suit :

$$\sum_{x=1}^N (-1)^{x+1} (f(x) + 2f(x + 1) + f(x + 2)) = \sum_{x=1}^N (-1)^{x+1} (4(x + 1) + 1) \text{ avec } N > 2 \text{ et impair}$$

Ce qui donne :

$$(f(1) + 2f(2) + f(3)) - (f(2) + 2f(3) + f(4)) + (f(3) + 2f(4) + f(5)) - \dots$$

$$+ (f(N) + 2f(N + 1) + f(N + 2)) = \sum_{x=1}^N (-1)^{x+1} (4x + 5)$$

En simplifiant les additions et soustractions, il ne reste que les deux premiers et deux derniers termes, soit :

$$f(1) + f(2) + f(N + 1) + f(N + 2) = \sum_{x=1}^N (-1)^{x+1} (4x + 5)$$

Or :

$$f(1) = 2 \text{ et } f(2) = 1 \rightarrow f(N + 1) + f(N + 2) = -3 + \sum_{x=1}^N (-1)^{x+1} (4x + 5)$$

Et comme N est impair, on a :

$$f(N + 1) + f(N + 2) + 3 = \frac{N + 1}{2} + \frac{3(N + 2) + 1}{2} + 3 = 2N + 7 = \sum_{x=1}^N (-1)^{x+1} (4x + 5)$$

Soit :

$$\sum_{x=1}^N (-1)^{x+1} (f(x) + 2f(x + 1) + f(x + 2)) = \sum_{x=1}^N (-1)^{x+1} (4x + 5) = 2N + 7 \text{ avec } N > 2 \text{ et impair}$$

Par exemple :

$$N = 3 \rightarrow \sum_{x=1}^3 (-1)^{x+1} (f(x) + 2f(x + 1) + f(x + 2))$$

$$= (f(1) + 2f(2) + f(3)) - (f(2) + 2f(3) + f(4)) + (f(3) + 2f(4) + f(5))$$

$$= (2 + 2.1 + 5) - (1 + 2.5 + 2) + (5 + 2.2 + 8) = 9 - 13 + 17 = 13$$

$$\text{Et : } 2N + 7 = 2.3 + 7 = 13$$

Mais il y a encore plus fou à découvrir.

3. Sommes d'entiers consécutifs avec Syracuse

On a également la somme décalée suivante qui donne :

$$\sum_{x=1}^{\frac{N}{2}} (f(2x) + 2f(2x + 1) + f(2x + 2)) = \sum_{x=1}^{\frac{N}{2}} (4(2x + 1) + 1) \text{ avec } N > 1 \text{ et pair}$$

Soit :

$$\begin{aligned} & (f(2) + 2f(3) + f(4)) + (f(4) + 2f(5) + f(6)) + \dots + (f(N) + 2f(N + 1) + f(N + 2)) \\ &= f(2) + 2(f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + \dots) + f(N + 2) \\ &= \sum_{x=1}^{\frac{N}{2}} (8x + 5) = 8 \frac{\frac{N}{2}(\frac{N}{2} + 1)}{2} + 5 \frac{N}{2} = \left(N + \frac{9}{2}\right)N \end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{x=1}^{\frac{N}{2}} (f(2x) + 2f(2x + 1) + f(2x + 2)) = (2N + 9) \frac{N}{2} \text{ avec } N > 1 \text{ et pair}$$

Sachant par ailleurs que :

$$\sum_{x=1}^N f(x) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + \dots + f(N)$$

On a donc :

$$\sum_{x=1}^N f(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{x=1}^{\frac{N}{2}} (f(2x) + 2f(2x + 1) + f(2x + 2)) \right) + f(1) + \frac{f(2)}{2} - f(N + 1) - \frac{f(N + 2)}{2}$$

Sachant que N est pair, on a :

$$f(1) = 2 ; f(2) = 1 ; f(N + 1) = \frac{3(N + 1) + 1}{2} = \frac{3N + 4}{2} ; f(N + 2) = \frac{N + 2}{2}$$

Soit :

$$\sum_{x=1}^N f(x) = \frac{N}{4} (2N + 9) + 2 + \frac{1}{2} - \frac{3N + 4}{2} - \frac{N + 2}{4} = \frac{N(N + 1)}{2}$$

D'où :

$$\sum_{x=1}^N f(x) = \frac{N(N + 1)}{2} \text{ avec } N > 1 \text{ et pair}$$

Ce résultat est connu et correspond à la somme des N premiers entiers. On a donc l'égalité étonnante suivante :

$$\sum_{x=1}^N f(x) = \sum_{x=1}^N x = \frac{N(N + 1)}{2} \text{ avec } N > 1 \text{ et pair}$$

Incroyable ! si vous souhaitez connaître la somme de N premiers termes, utilisez la suite de Syracuse ! C'est la même chose si N est pair.

Ecrit autrement :

$$\sum_{x=1}^N U_0(x) = \sum_{x=1}^N U_1(x) = \sum_{x=1}^N x = \frac{N(N+1)}{2} \text{ avec } N > 1 \text{ et pair}$$

Donc la somme des N premières valeurs de rang 0 est égale à la somme des N premières valeurs de rang 1.

On retrouve le même résultat pour les sommes avec N impair en utilisant la suite de Syracuse pseudo-complémentaire comme suit :

$$\sum_{x=1}^N w(x) = \sum_{x=1}^N x = \frac{N(N+1)}{2} \text{ avec } N > 0 \text{ et impair}$$

Incroyable ! si vous souhaitez connaître la somme de N premiers termes, utilisez la suite de Syracuse pseudo-complémentaire ! C'est la même chose si N est impair.

Avec pour rappel :

$$w(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2} & \text{si } x \text{ pair} \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x \text{ impair} \end{cases}$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} N = 4 &\rightarrow \sum_{x=1}^2 (f(2x) + 2f(2x+1) + f(2x+2)) = (f(2) + 2f(3) + f(4)) + (f(4) + 2f(5) + f(6)) \\ &= (1 + 2.5 + 2) + (2 + 2.8 + 3) = 13 + 21 = 34 \\ \text{Et : } &(2N + 9) \frac{N}{2} = (8 + 9)2 = 17.2 = 34 \end{aligned}$$

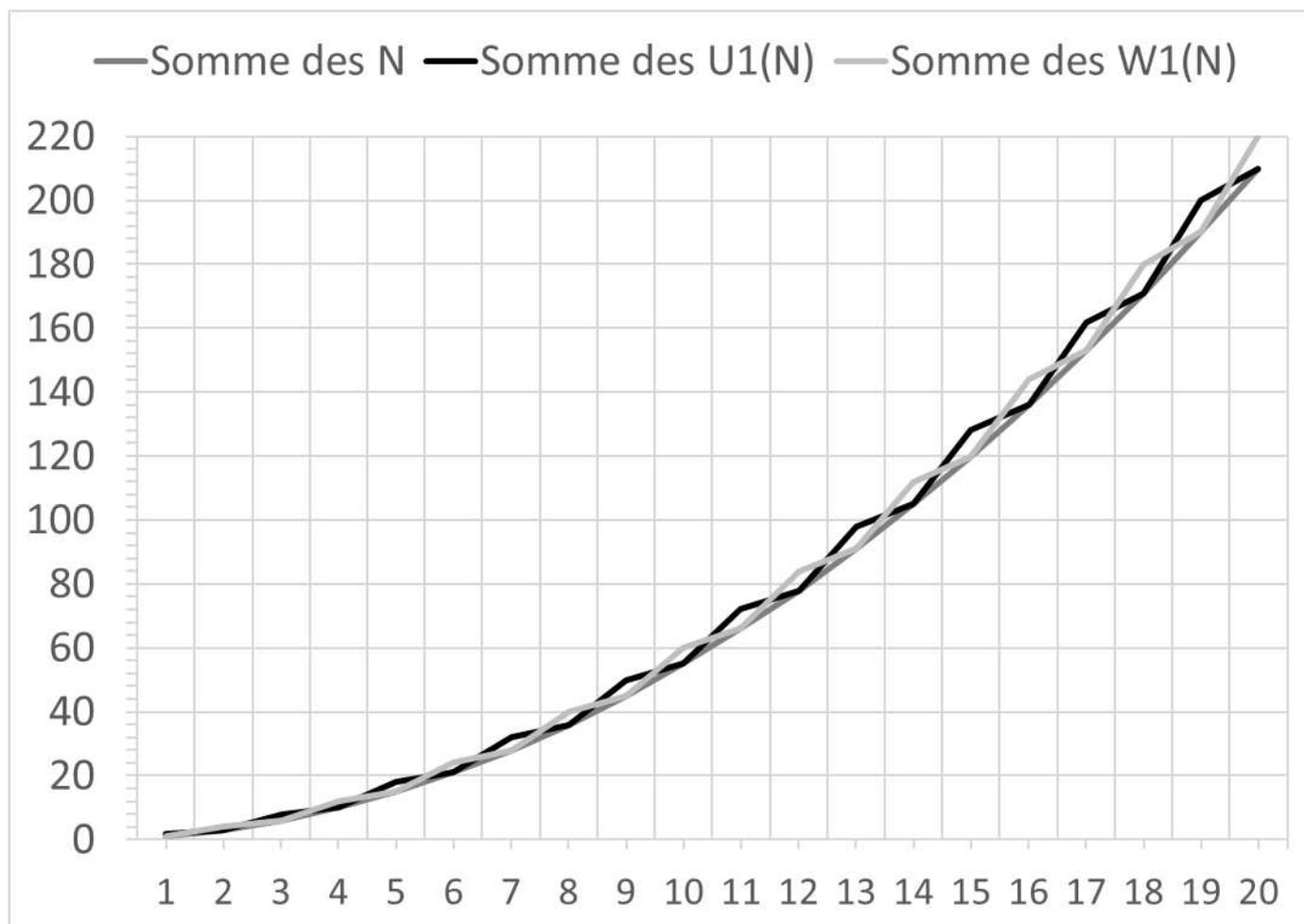
Ainsi que :

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^4 f(x) &= f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 2 + 1 + 5 + 2 = 10 \\ \text{Et : } &\frac{N(N+1)}{2} = \frac{4(4+1)}{2} = 10 \\ \text{qui vaut bien également : } &\sum_{x=1}^4 x = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \end{aligned}$$

Et pour une somme impaire :

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^5 w(x) &= w(1) + w(2) + w(3) + w(4) + w(5) = 1 + 3 + 2 + 6 + 3 = 15 \\ \text{Et : } &\frac{N(N+1)}{2} = \frac{5(5+1)}{2} = 15 \\ \text{qui vaut bien également : } &\sum_{x=1}^5 x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \end{aligned}$$

On a le graphique suivant qui montre bien les sommes des N premiers entiers et comment la suite de Syracuse et la pseudo-suite de Syracuse atteignent ces sommes une fois sur deux de manière entrelacée comme une fibre d'ADN :



On peut ici conjecturer qu'il existe une forme :

$$\sum_{x=1}^N U_1(x) = \sum_{x=1}^N x = x^2 \cos(a) \text{ et } \sum_{x=1}^N w(x) = \sum_{x=1}^N x = x^2 \sin(a)$$

Cette forme ne sera pas calculée ici.

On peut également retrouver le résultat précédent de la manière suivante. On scinde le calcul en deux : les sommes paires et les sommes impaires. Pour cela, on calcule d'abord la somme des valeurs N paires (ou N+1 impaires) au rang 1 de la suite de Syracuse jusqu'à la moitié de n :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} f(N+2k+1) &= \frac{N+1}{2} + \frac{N+3}{2} + \dots + \frac{N+n-1}{2} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{N+2k+1}{2} = \frac{n}{2} \left(\frac{N+1}{2} \right) + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} k \\ &= \frac{n(N+1)}{4} + \frac{\frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right)}{2} = \frac{n}{4} \left(\frac{n}{2} + N \right) \text{ avec } n \text{ pair et } N \text{ impair} \end{aligned}$$

Ensuite on procède de la même façon pour les valeurs N impaires :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} f(N+2k) &= \frac{3N+1}{2} + \frac{3N+7}{2} + \dots + \frac{3N+3n-5}{2} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{3N+6k+1}{2} = \frac{n}{2} \left(\frac{3N+1}{2} \right) + 3 \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} k \\ &= \frac{n(3N+1)}{4} + \frac{3n \left(\frac{n}{2} - 1 \right)}{2} = \frac{n \left(\frac{3n}{2} + 3N - 2 \right)}{4} \text{ avec } n \text{ pair et } N \text{ impair} \end{aligned}$$

Enfin, on additionne les deux résultats pour obtenir :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(N+k) = \frac{n}{4} \left(\frac{n}{2} + N \right) + \frac{n}{4} \left(\frac{3n}{2} + 3N - 2 \right) = \frac{n(n-1+2N)}{2}$$

Ainsi on a bien :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(N+k) = \frac{n(n-1+2N)}{2} \text{ avec } N=1 \rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^n k$$

~

On peut également calculer une somme d'une valeur à une autre, c'est-à-dire classiquement comme suit :

$$\sum_{k=n}^m k = \sum_{k=1}^m k - \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{m(m+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2} (m(m+1) - n(n-1)) \text{ avec } m > n \geq 0$$

Mais dorénavant aussi comme cela :

$$\sum_{k=n}^m k = \sum_{k=0}^{m-n} f(n+k) = \frac{(m-n+1)(m+n)}{2} = \frac{1}{2} (m^2 - n^2 + m + n) = \frac{1}{2} (m(m+1) - n(n-1))$$

Alors qu'il faut usuellement deux calculs pour calculer la somme consécutive entre deux nombres, la suite de Syracuse permet d'en faire qu'un seul !

Voici un exemple :

$$\text{Par calcul direct : } \sum_{k=7}^{12} k = 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 57$$

$$\text{Par formule classique : } \sum_{k=1}^{12} k - \sum_{k=1}^6 k = \frac{12 \cdot 13}{2} - \frac{6 \cdot 7}{2} = 6 \cdot 13 - 3 \cdot 7 = 57$$

$$\begin{aligned} \text{Par Syracuse direct : } \sum_{k=0}^{12-7} f(7+k) &= f(7) + f(8) + f(9) + f(10) + f(11) + f(12) \\ &= 11 + 4 + 14 + 5 + 17 + 6 = 57 \end{aligned}$$

$$\text{Par formule de Syracuse : } \sum_{k=0}^{12-7} f(7+k) = \frac{(12-7+1)(12+7)}{2} = \frac{6 \cdot 19}{2} = 57$$

On voit nettement que la dernière et que les deux calculs par formules sont les plus efficaces, surtout si la différence entre m et n est importante, entraînant plus de termes à évaluer par les calculs directs.

4. Combinaisons linéaires de plusieurs vols collatéraux

Cas de deux vols

En revanche ce type de combinaison linéaire collatérale de vols n'existe pas (pas de solution possible) dans le cas de deux suites, à savoir :

$$\begin{aligned} af(N-1) + bf(N) &\forall \text{ la parité de } N \\ af(N) + bf(N+1) &\forall \text{ la parité de } N \\ af(N-1) + bf(N+1) &\forall \text{ la parité de } N \end{aligned}$$

Mais aussi :

$$\begin{aligned} af(N) + bf(N+2k) &\forall \text{ la parité de } N \\ af(N) + bf(N+2k+1) &\forall \text{ la parité de } N \end{aligned}$$

En effet il n'existe pas, pour ces équations, de valeurs pour a et b.

Cas de trois vols éloignés

Essayons de généraliser ce résultat en considérant maintenant N et ses deux collatéraux éloignés de 2k+1, on recherche alors dans ce cas :

$$af(N) + bf(N+2k+1) + cf(N-(2k+1))$$

Soit :

$$\begin{aligned} a\frac{N}{2} + b\frac{3N+6k+4}{2} + c\frac{3N-6k-2}{2} &= a\frac{3N+1}{2} + b\frac{N+2k+1}{2} + c\frac{N-2k-1}{2} \\ \rightarrow \begin{cases} a+3b+3c = 3a+b+c \\ (6k+4)b - (6k+2)c = a + (2k+1)b - (2k+1)c \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} a = b+c \\ a = (4k+3)b - (4k+1)c \end{cases} \\ \rightarrow b = c = \frac{a}{2} \forall k \end{aligned}$$

Soit avec :

$$a = 2p \rightarrow b = c = p \forall k$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} 2pf(N) + p(f(N+2k+1) + f(N-(2k+1))) \\ = 2p\frac{3N+1}{2} + p\frac{N+2k+1}{2} + p\frac{N-2k-1}{2} = (4N+1)p \end{aligned}$$

Soit :

$$2pf(N) + p(f(N+2k+1) + f(N-(2k+1))) = (4N+1)p \forall \text{ la parité de } N \text{ et } k > 0$$

Et en divisant par p, on obtient l'équation générale suivante :

$$2f(N) + f(N+2k+1) + f(N-(2k+1)) = 4N+1 \forall \text{ la parité de } N \text{ et } k > 0$$

Par exemple :

$$2f(N) + f(N+3) + f(N-3) = 2f(N) + f(N+7) + f(N-7) = 4N+1$$

Soit avec N=8 :

$$\begin{aligned} 2f(8) + f(11) + f(5) &= 2.4 + 17 + 8 = 33 \\ 2f(8) + f(15) + f(1) &= 2.4 + 23 + 2 = 33 \end{aligned}$$

$$4.8 + 1 = 33$$

Ou avec $N=9$:

$$\begin{aligned} 2f(9) + f(12) + f(6) &= 2.14 + 6 + 3 = 37 \\ 2f(9) + f(16) + f(2) &= 2.14 + 8 + 1 = 37 \\ 4.9 + 1 &= 37 \end{aligned}$$

Cas de quatre vols collatéraux

Essayons avec quatre collatéraux, soit :

$$\begin{aligned} a \frac{N}{2} + b \frac{3(N+1)+1}{2} + c \frac{N+2}{2} + d \frac{3(N+3)+1}{2} &= a \frac{3N+1}{2} + b \frac{N+1}{2} + c \frac{3(N+2)+1}{2} + d \frac{N+3}{2} \\ \rightarrow N(a+3b+c+3d) + 4b+2c+10d &= N(3a+b+3c+d) + a+b+7c+3d \\ \rightarrow \begin{cases} a+3b+c+3d = 3a+b+3c+d \\ 4b+2c+10d = a+b+7c+3d \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} 2b+2d = 2a+2c \\ 3b+7d = a+5c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b+d = a+c \\ b+3d = 2c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = c-2d \\ b = 2c-3d \end{cases} \end{aligned}$$

On a deux équations à quatre inconnues, soit deux inconnues. Ce qui donne l'équation générale suivante :

$$\begin{aligned} (c-2d)f(N) + (2c-3d)f(N+1) + cf(N+2) + df(N+3) \\ = (c-2d) \frac{3N+1}{2} + (2c-3d) \frac{N+1}{2} + c \frac{3(N+2)+1}{2} + d \frac{N+3}{2} \\ = \frac{1}{2} (3Nc + c - 6Nd - 2d + 2Nc + 2c - 3Nd - 3d + 3Nc + 7c + Nd + 3d) \\ = 4N(c-d) + 5c - d \end{aligned}$$

Soit au global :

$$(c-2d)f(N) + (2c-3d)f(N+1) + cf(N+2) + df(N+3) = 4N(c-d) + 5c - d$$

Prenons par exemple :

$$c = 2 \text{ et } d = -1$$

Soit :

$$4f(N) + 7f(N+1) + 2f(N+2) - f(N+3) = 12N + 11 \forall \text{ la parité de } N > 0$$

Autre exemple avec :

$$c = d$$

Soit :

$$-cf(N) - cf(N+1) + cf(N+2) + cf(N+3) = 4c$$

Ce qui donne en divisant par c :

$$-f(N) - f(N+1) + f(N+2) + f(N+3) = 4 \forall \text{ la parité de } N > 0$$

Dernier exemple avec :

$$c = 3 \text{ et } d = 1$$

Soit :

$$f(N) + 3f(N+1) + 3f(N+2) + f(N+3) = 2(4N+7) \forall \text{ la parité de } N > 0$$

Il existe donc plusieurs combinaisons linéaires de 4 collatéraux.

Cas de M vols collatéraux

La question générale est : existe-t-il une ou des relations de collatéraux de manière plus étendue ? C'est-à-dire existe-t-il une équation avec des solutions de la forme suivante ?

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^M a_k \cdot f(N+k) = A \cdot N + B \text{ avec } M \text{ pair} \\
 = & \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_{2k} \cdot f(N+2k) + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} a_{2k+1} \cdot f(N+2k+1) = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_{2k} \left(\frac{N}{2} + k\right) + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} a_{2k+1} \left(\frac{3N}{2} + 3k + 2\right) \\
 = & \frac{N}{2} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}} a_{2k} + \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} a_{2k}(k) + \left(\frac{3N}{2} + 2\right) \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} a_{2k+1} + 3 \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1} a_{2k+1}(k) \\
 = & \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} \left(a_{2k} \frac{N}{2} + a_{2k+1} \left(\frac{3N}{2} + 2\right) \right) + a_M \frac{N}{2} + \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1} (a_{2k} + 3a_{2k+1})k + a_M \frac{M}{2} \\
 = & \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} (a_{2k} + 3a_{2k+1}) \right) N + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} ((a_{2k} + 3a_{2k+1})k + 2a_{2k+1}) + a_M \left(\frac{M+N}{2}\right) \\
 = & \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} (a_{2k} + 3a_{2k+1}) \right) N + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} (a_{2k} + a_{2k+1}(3k+2)) + a_M \left(\frac{M+N}{2}\right)
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^M a_k \cdot f(N+k) = \frac{N}{2} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} (a_{2k} + 3a_{2k+1}) + a_M \left(\frac{M+N}{2}\right) + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} (a_{2k} + a_{2k+1}(3k+2)) \text{ avec } M \text{ pair}$$

Ou bien :

$$\sum_{k=0}^M a_k \cdot f(N+k) = \frac{1}{2} \left(a_M(M+N) + \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} (a_{2k}(N+2) + a_{2k+1}(3N+6k+4)) \right) \text{ avec } M \text{ pair}$$

Il existe donc, comme on pouvait s'y attendre, une infinité de solutions dès que l'on combine un nombre pair de collatéraux.

5. Combinaisons au second rang de la suite de Syracuse

Cas de deux vols

Essayons de voir ce qui se passe au 2nd rang de la suite de Syracuse. Existe-t-il également des combinaisons linéaires ? Tout d'abord, on reprend les résultats de la suite de Syracuse modulo 4, à savoir les quatre cas possibles suivants :

$$\{IP; PI; II; PP\} = \left\{ \frac{3N+1}{4}; \frac{3N+2}{4}; \frac{9N+5}{4}; \frac{N}{4} \right\} \text{ avec } \begin{cases} P \text{ itération paire} \\ I \text{ itération impaire} \end{cases}$$

On pose préalablement :

$$f_2(N) = f(f(N))$$

Et plus généralement :

$$f_n(N) = \underbrace{f(\dots(f(f(N))))}_{n \text{ fois}} \text{ avec } f_1(N) \stackrel{\text{def}}{=} f(N)$$

On recherche alors :

$$\begin{aligned} & af_2(N) + bf_2(N+1) \\ = & \frac{3N+1}{4}a + \frac{3(N+1)+2}{4}b = \frac{3N+2}{4}a + \frac{9(N+1)+5}{4}b \\ = & \frac{9N+5}{4}a + \frac{N+1}{4}b = \frac{N}{4}a + \frac{3(N+1)+1}{4}b \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} (3a+3b)N + (a+5b) &= (3a+9b)N + (2a+14b) = (9a+b)N + (5a+b) = (a+3b)N + (4b) \\ &\rightarrow \begin{cases} 3a+3b = 3a+9b = 9a+b = a+3b \\ a+5b = 2a+14b = 5a+b = 4b \end{cases} \\ &\rightarrow \begin{cases} b = 3b; 4a = b \\ 0 = a+9b; 5a = 3b \end{cases} \end{aligned}$$

Il n'existe pas de solution unique pour a et b vérifiant ces égalités.

Cas de quatre vols

On peut aussi chercher s'il existe quatre équations pour une égalité de la forme :

$$\begin{aligned} & af_2(N) + bf_2(N+1) + cf_2(N+2) + df_2(N+3) \\ = & \frac{3N+1}{4}a + \frac{3(N+1)+2}{4}b + \frac{9(N+2)+5}{4}c + \frac{N+3}{4}d \\ = & \frac{3(N+3)+1}{4}d + \frac{3N+2}{4}a + \frac{9(N+1)+5}{4}b + \frac{N+2}{4}c \\ = & \frac{3(N+2)+1}{4}c + \frac{3(N+3)+2}{4}d + \frac{9N+5}{4}a + \frac{N+1}{4}b \\ = & \frac{3(N+1)+1}{4}b + \frac{3(N+2)+2}{4}c + \frac{9(N+3)+5}{4}d + \frac{N}{4}a \end{aligned}$$

On développe tout cela :

$$\begin{aligned} & (3N+1)a + (3N+5)b + (9N+23)c + (N+3)d \\ = & (3N+10)d + (3N+2)a + (9N+14)b + (N+2)c \\ = & (3N+7)c + (3N+11)d + (9N+5)a + (N+1)b \\ = & (3N+4)b + (3N+8)c + (9N+32)d + Na \end{aligned}$$

On factorise N :

$$\begin{aligned} & (3a+3b+9c+d)N + (a+5b+23c+3d) \\ = & (3d+3a+9b+c)N + (10d+2a+14b+2c) \\ = & (3c+3d+9a+b)N + (7c+11d+5a+b) \\ = & (3b+3c+9d+a)N + (4b+8c+32d) \end{aligned}$$

Soit les deux groupes d'égalités suivants :

$$\begin{aligned} (3a+3b+9c+d) &= (3d+3a+9b+c) = (3c+3d+9a+b) = (3b+3c+9d+a) \\ (a+5b+23c+3d) &= (10d+2a+14b+2c) = (7c+11d+5a+b) = (4b+8c+32d) \end{aligned}$$

Pour le premier on en déduit ces six égalités :

$$\begin{aligned}d &= 4c - 3b \\b &= 4a - 3d \\b + 3c &= d + 3a \\a + 3b &= c + 3d \\a &= 4d - 3c \\c &= 4b - 3a\end{aligned}$$

Il y a six équations à quatre inconnues. On trouve donc :

$$a = b = c = d$$

Or si on vérifie avec le second groupe d'égalités, on a :

$$\begin{aligned}a &= -9b + 21c - 7d \\c &= 5a - 3b - 21d \\b + 4c &= a + 2d \\a &= -5b + 3c + 11d \\a + b &= -15c + 29d \\d &= -3a + 13b - 5c\end{aligned}$$

Et on trouve au moins une égalité différente :

$$7c = 10d$$

Ainsi il n'existe pas d'égalité de la forme ci-dessous quelle que soit la parité de N :

$$af_2(N) + bf_2(N + 1) + cf_2(N + 2) + df_2(N + 3) = A.N + B$$

6. Combinaisons de produits de vols collatéraux

Cas de deux vols

On essaie maintenant de regarder les produits de collatéraux de la suite de Syracuse. Soit :

$$f(N) \cdot f(N + 1) = \begin{cases} \frac{N}{2} \cdot \frac{3(N + 1) + 1}{2} = \frac{N(3N + 4)}{4} & \text{si } N \text{ pair} \\ \frac{3N + 1}{2} \cdot \frac{N + 1}{2} = \frac{(N + 1)(3N + 1)}{4} & \text{si } N \text{ impair} \end{cases}$$

Pour deux collatéraux, on a :

$$\begin{aligned}(f(N) + a) \cdot (f(N + 1) + b) &= \left(\frac{N}{2} + a\right) \left(\frac{3(N + 1) + 1}{2} + b\right) = \left(\frac{3N + 1}{2} + a\right) \left(\frac{N + 1}{2} + b\right) \\(N + 2a)(3N + 4 + 2b) &= (3N + 1 + 2a)(N + 1 + 2b) \\3N^2 + 2(2 + b + 3a)N + 4a(2 + b) &= 3N^2 + 2(2 + a + 3b)N + (1 + 2a)(1 + 2b) \\ \rightarrow \begin{cases} 2 + b + 3a = 2 + a + 3b \\ 4a(2 + b) = (1 + 2a)(1 + 2b) \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} a = b \\ b = 3a - \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow a = b = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Soit :

$$\left(f(N) + \frac{1}{4}\right) \left(f(N + 1) + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3N + 1}{2} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{N + 1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} (2N + 1)(2N + 3)$$

D'où :

$$\left(f(N) + \frac{1}{4}\right) \left(f(N + 1) + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} (2N + 1)(2N + 3) \forall \text{ la parité de } N$$

Par exemple avec :

$$N = 3 \rightarrow \left(f(3) + \frac{1}{4}\right) \left(f(4) + \frac{1}{4}\right) = \left(5 + \frac{1}{4}\right) \left(2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{21}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{189}{16}$$

$$\text{Et } \frac{3}{16} (2N + 1)(2N + 3) = \frac{3}{16} 7 \cdot 9 = \frac{189}{16}$$

$$N = 6 \rightarrow \left(f(6) + \frac{1}{4}\right) \left(f(7) + \frac{1}{4}\right) = \left(3 + \frac{1}{4}\right) \left(11 + \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{4} \cdot \frac{45}{4} = \frac{585}{16}$$

$$\text{Et } \frac{3}{16} (2N + 1)(2N + 3) = \frac{3}{16} 13 \cdot 15 = \frac{585}{16}$$

Cas de quatre vols

Essayons avec quatre collatéraux :

$$\begin{aligned} & (f(N) + a)(f(N + 1) + b)(f(N + 2) + c)(f(N + 3) + d) \\ &= \left(\frac{3N + 1}{2} + a\right) \left(\frac{N + 1}{2} + b\right) \left(\frac{3(N + 2) + 1}{2} + c\right) \left(\frac{N + 3}{2} + d\right) \\ &= \left(\frac{N}{2} + a\right) \left(\frac{3(N + 1) + 1}{2} + b\right) \left(\frac{N + 2}{2} + c\right) \left(\frac{3(N + 3) + 1}{2} + d\right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & (3N + 1 + 2a)(N + 1 + 2b)(3N + 7 + 2c)(N + 3 + 2d) \\ &= (N + 2a)(3N + 4 + 2b)(N + 2 + 2c)(3N + 10 + 2d) \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} & (3N^2 + (4 + 2a + 6b)N + 1 + 2b + 2a + 4ab)(3N^2 + (16 + 6d + 2c)N + 21 + 6c + 14d + 4cd) \\ &= (3N^2 + (4 + 2b + 6a)N + 8a + 4ab)(3N^2 + (16 + 2d + 6c)N + 20 + 4d + 20c + 4cd) \end{aligned}$$

Par identification des puissances de N :

$$\left\{ \begin{array}{l} N^3 \rightarrow 3(16 + 6d + 2c) + 3(4 + 2a + 6b) = 3(16 + 2d + 6c) + 3(4 + 2b + 6a) \\ N^2 \rightarrow 3(21 + 6c + 14d + 4cd) + 3(1 + 2b + 2a + 4ab) + (4 + 2a + 6b)(16 + 6d + 2c) \\ \quad = 3(8a + 4ab) + 3(20 + 4d + 20c + 4cd) + (4 + 2b + 6a)(16 + 2d + 6c) \\ N^1 \rightarrow (4 + 2a + 6b)(21 + 6c + 14d + 4cd) + (16 + 6d + 2c)(1 + 2b + 2a + 4ab) \\ \quad = (4 + 2b + 6a)(20 + 4d + 20c + 4cd) + (16 + 2d + 6c)(8a + 4ab) \\ N^0 \rightarrow (1 + 2b + 2a + 4ab)(21 + 6c + 14d + 4cd) = (8a + 4ab)(20 + 4d + 20c + 4cd) \end{array} \right.$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} b + d = a + c \\ 3(21 + 6c + 14d + 4cd) + 3(1 + 2b + 2a + 4ab) + (4 + 2a + 6b)(16 + 6d + 2c) \\ \quad = 3(8a + 4ab) + 3(20 + 4d + 20c + 4cd) + (4 + 2b + 6a)(16 + 2d + 6c) \\ (4 + 2a + 6b)(21 + 6c + 14d + 4cd) + (16 + 6d + 2c)(1 + 2b + 2a + 4ab) \\ \quad = (4 + 2b + 6a)(20 + 4d + 20c + 4cd) + (16 + 2d + 6c)(8a + 4ab) \\ 21 + 6c + 14d + 4cd + 42b + 12bc + 28bd + 8bcd + 4ab + 40abd \\ \quad = 118a + 148ac + 4ad + 24acd + 56abc \end{array} \right.$$

Et après quelques manipulations, il vient les cinq solutions suivantes :

$$\{a; b; c; d\} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right\} \\ \left\{ \frac{1}{4}; 1; \frac{1}{4}; -\frac{1}{2} \right\} \\ \left\{ \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; -\frac{3}{4}; -\frac{5}{4} \right\} \\ \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; -\frac{17}{4}; -\frac{19}{4} \right\} \\ \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{7}{12}; -\frac{11}{12}; -\frac{7}{4} \right\} \end{cases}$$

Ainsi, on a donc les 5 égalités suivantes :

$$\begin{aligned} & \left(f(N) + \frac{1}{4} \right) \left(f(N+1) + \frac{1}{4} \right) \left(f(N+2) + \frac{1}{4} \right) \left(f(N+3) + \frac{1}{4} \right) \\ &= \left(\frac{3}{16} \right)^2 (2N+1)(2N+3)(2N+5)(2N+7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(f(N) + \frac{1}{4} \right) (f(N+1) + 1) \left(f(N+2) + \frac{1}{4} \right) \left(f(N+3) - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{3}{2} \right)^2 (2N+1)(N+2)(N+3)(2N+5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(f(N) + \frac{1}{4} \right) \left(f(N+1) + \frac{3}{4} \right) \left(f(N+2) - \frac{3}{4} \right) \left(f(N+3) - \frac{5}{4} \right) \\ &= \frac{3}{16^2} (2N+1)^2 (2N+5)(6N+11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(f(N) - \frac{1}{4} \right) \left(f(N+1) + \frac{1}{4} \right) \left(f(N+2) - \frac{17}{4} \right) \left(f(N+3) - \frac{19}{4} \right) \\ &= \frac{3}{16^2} (6N+1)(2N+3)(2N-1)(2N-13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(f(N) - \frac{1}{4} \right) \left(f(N+1) + \frac{7}{12} \right) \left(f(N+2) - \frac{11}{12} \right) \left(f(N+3) - \frac{7}{4} \right) \\ &= \frac{1}{16^2} \cdot \frac{1}{3} (6N+1)(6N+13)(18N+31)(2N-1) \end{aligned}$$

La première solution parmi ces cinq est tout à fait intéressante. En effet toutes les variables initialement recherchées sont égales à $\frac{1}{4}$ et identique à l'équation pour deux collatéraux.

Peut-on en déduire qu'il existe au moins une solution pour une infinité de collatéraux pairs avec les mêmes variables toutes à $\frac{1}{4}$? Essayons, soit :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (f(N+k) + a_k) = \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (f(N+2k) + a_{2k})(f(N+2k+1) + a_{2k+1}) \text{ avec } n \text{ impair}$$

$$\begin{aligned}
 &= \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{3(N+2k)+1}{2} + a_{2k} \right) \left(\frac{N+2k+1}{2} + a_{2k+1} \right) \\
 &= \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{N+2k}{2} + a_{2k} \right) \left(\frac{3(N+2k+1)+1}{2} + a_{2k+1} \right) \\
 \rightarrow &\prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (3N+6k+1+2a_{2k})(N+2k+1+a_{2k+1}) = \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (N+2k+2a_{2k})(3N+6k+4+2a_{2k+1}) \\
 &\prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (3N^2+4N+1+12k^2+4k(3N+2)+2(N+2k+1)a_{2k}+(3N+6k+1)a_{2k+1}+2a_{2k}a_{2k+1}) \\
 &= \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (3N^2+4N+12k^2+4k(3N+2)+2(3N+6k+4)a_{2k}+2(N+2k)a_{2k+1}+4a_{2k}a_{2k+1})
 \end{aligned}$$

Si tous les produits sont égaux membres à membres, l'égalité est respectée, soit :

$$\begin{aligned}
 &3N^2+4N+1+12k^2+4k(3N+2)+2(N+2k+1)a_{2k}+(3N+6k+1)a_{2k+1}+2a_{2k}a_{2k+1} \\
 &= 3N^2+4N+12k^2+4k(3N+2)+2(3N+6k+4)a_{2k}+2(N+2k)a_{2k+1}+4a_{2k}a_{2k+1} \quad \forall k \geq 0 \\
 \rightarrow &1+(N+2k+1)a_{2k+1}-2a_{2k}a_{2k+1}-2(2N+4k+3)a_{2k}=0 \rightarrow a_{2k+1} = \frac{2(2N+4k+3)a_{2k}-1}{N+2k+1-2a_{2k}}
 \end{aligned}$$

Il n'existe malheureusement pas de solution triviale à cette équation.

14. Autres pistes

On a élaboré ici, sans approfondir, d'autres pistes de recherche à mener ultérieurement. Non que celles-ci soient dénuées d'intérêts ou de priorités vis-à-vis des autres présentées précédemment, mais plutôt plus originales et moins enclin à être travaillées de prime abord. Cela donne au lecteur à la fois une idée des modèles mathématiques supplémentaires auquel on peut faire appel dans la compréhension de cette suite mais aussi des possibilités quasiment infinies de manipuler cette suite à la fois pleine de mystère et de révélation.

1. Transformée de Laplace

On reprend l'équation trigonométrique de la suite de Syracuse suivante :

$$U_{n+1}(N) = \frac{1}{4} \left(1 + 4U_n(N) - (1 + 2U_n(N)) \cos(\pi U_n(N)) \right)$$

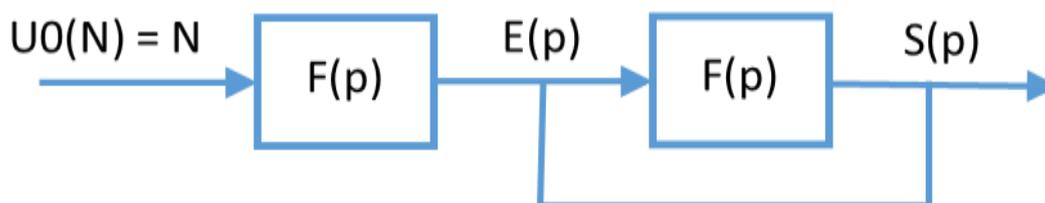
On calcule sa transformée de Laplace :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p} + \frac{4}{p^2} - \frac{p}{p^2 + \pi^2} - \frac{2(p^2 - \pi^2)}{(p^2 + \pi^2)^2} \right)$$

$$\rightarrow F(p) = \frac{2p^4 + \pi^2 p^3 + 10\pi^2 p^2 + \pi^4 p + 4\pi^4}{4p^2(p^2 + \pi^2)^2}$$

F(p) est appelée fonction de transfert de la sortie S(p) sur l'entrée E(p) du système de régulation.

Cette transformée de Laplace de la forme trigonométrique de la suite de Syracuse représente le schéma ci-dessous de la boucle fermée du système :



En effet, les fonctions trigonométriques que l'on a trouvées précédemment représentent toutes la même chose : l'ensemble des solutions de la suite de Syracuse d'un rang n au rang n+1. Cela ne représente pas un parcours ou un circuit complet de N jusqu'à 1. On a donc d'un côté une équation (sous différentes formes) qui donne l'ensemble des solutions et d'un autre côté une suite itérative qui donne des parcours à partir d'un N quelconque entier positif.

Pour bâtir un modèle qui représente tout l'ensemble de ces parcours de N à partir d'une forme trigonométrique, on propose ici de passer préalablement dans un autre ensemble via la transformée de Laplace, de construire ces parcours (par boucle fermée pour simuler les itérations) et enfin de revenir via la transformée de Laplace inverse dans notre ensemble initial des entiers positifs. Si cela est possible et fonctionne, le modèle final trouvé sera a priori l'image complète de la suite de Syracuse sans itération (ou généralisée) et on l'espère beaucoup plus simple à manipuler et comprendre.

En calculant la fonction de transfert de ce système autorégulé (aucun ajout de régulation dans la boucle fermée et qui a priori converge), on a une image fidèle de la suite de Syracuse en transformée de Laplace.

On double la fonction de transfert pour prendre en compte et bien démarrer de la valeur initiale N choisie, ensuite on boucle sur la fonction de transfert pour simuler n itérations.

On doit maintenant l'étudier puis, via la transformée de Laplace inverse, retourner dans l'espace des entiers pour découvrir sa forme modifiée et peut être plus complète.

En parcourant le schéma ci-dessus, on obtient les relations suivantes :

$$S(p) = F(p)E(p) = F(p)(F(p)N + S(p))$$

$$\rightarrow H(p) = \frac{S(p)}{N} = \frac{F(p)^2}{1 - F(p)}$$

D'où :

$$\rightarrow H(p) = \frac{(2p^4 + \pi^2 p^3 + 10\pi^2 p^2 + \pi^4 p + 4\pi^4)^2}{4p^2(p^2 + \pi^2)^2(4p^6 + 2(4\pi^2 - 1)p^4 - \pi^2 p^3 + 2\pi^2(2\pi^2 - 5)p^2 - \pi^4 p - 4\pi^4)}$$

D'où pour la valeur finale :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(N) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pH(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} -\frac{(4\pi^4)^2 p}{(4\pi^4)^2 p^2} = +\infty$$

On obtient l'infini ce qui présage que quel que soit N, pair ou impair, la suite de Syracuse tend vers l'infini. Ce résultat paraît faux puisque la suite décroît et converge au bout d'un certain rang n.

Et pour la valeur initiale :

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} U_n(N) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pH(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2p^9}{16p^{12}} = 0$$

On obtient zéro qui correspond bien au fait que la forme trigonométrique de la suite de Syracuse vaut zéro en zéro.

Peut-on retourner dans l'espace des réelles via la transformée de Laplace inverse pour connaître notre suite de Syracuse sous une autre forme ?

~

On peut également prendre comme fonction de référence pour la transformée de Laplace, l'équation déjà trouvée précédemment suivante :

$$U_{n+1}(N) = \sum_{k=0}^{\infty} (ke^{-a|U_n(N)-2k|} + (3k+2)e^{-a|U_n(N)-2k-1|})$$

La transformée de Laplace est définie par :

$$F(p) = L(U_{n+1}(N)) = \int_{x=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (ke^{-a|x-2k|} + (3k+2)e^{-a|x-2k-1|}) \right) e^{-px} dx$$

Les propriétés de linéarité permettent d'invertir l'intégration et la série et de décomposer en plusieurs intégrales simples :

$$\begin{aligned} F(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{x=0}^{\infty} (ke^{-a|x-2k|} + (3k+2)e^{-a|x-2k-1|}) e^{-px} dx \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(k \int_{x=0}^{\infty} e^{-a|x-2k|-px} dx + (3k+2) \int_{x=0}^{\infty} e^{-a|x-2k-1|-px} dx \right) \end{aligned}$$

Grâce à la relation de Chasles, on décompose de nouveau les intégrales en plusieurs pour s'affranchir des valeurs absolues :

$$\begin{aligned} F(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(k \int_{x=0}^{2k} e^{a(x-2k)-px} dx + k \int_{x=2k}^{\infty} e^{-a(x-2k)-px} dx + (3k+2) \int_{x=0}^{2k+1} e^{a(x-2k-1)-px} dx + (3k+2) \int_{x=2k+1}^{\infty} e^{-a(x-2k-1)-px} dx \right) \end{aligned}$$

On peut maintenant intégrer sans difficultés :

$$\begin{aligned} F(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(k \left(\frac{e^{a(x-2k)-px}}{a-p} \right)_0^{2k} + k \left(\frac{e^{-a(x-2k)-px}}{-a-p} \right)_{2k}^{\infty} + (3k+2) \left(\frac{e^{a(x-2k-1)-px}}{a-p} \right)_0^{2k+1} + (3k+2) \left(\frac{e^{-a(x-2k-1)-px}}{-a-p} \right)_{2k+1}^{\infty} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{a-p} (e^{-2kp} - e^{-2ka}) + \frac{k}{a+p} e^{-2kp} + \frac{3k+2}{a-p} (e^{-(2k+1)p} - e^{-(2k+1)a}) + \frac{3k+2}{a+p} e^{-(2k+1)p} \right) \\ &= \frac{1}{a^2 - p^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(k(a+p)(e^{-2kp} - e^{-2ka}) + k(a-p)e^{-2kp} + (3k+2)(a+p)(e^{-(2k+1)p} - e^{-(2k+1)a}) + (3k+2)(a-p)e^{-(2k+1)p} \right) \\ &= \frac{1}{a^2 - p^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(k(2ae^{-2kp} - (a+p)e^{-2ka}) + (3k+2)(2ae^{-(2k+1)p} - (a+p)e^{-(2k+1)a}) \right) \\ &= \frac{1}{a^2 - p^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(2ae^{-2kp}(k + (3k+2)e^{-p}) - (a+p)e^{-2ka}(k + (3k+2)e^{-a}) \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$F(p) = \frac{1}{a^2 - p^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(2ae^{-2kp}(k(1 + 3e^{-p}) + 2e^{-p}) - (a+p)e^{-2ka}(k(1 + 3e^{-a}) + 2e^{-a}) \right)$$

En sommant les itérations k , il vient :

$$F(p) = \frac{1}{a^2 - p^2} \left(2a(1 + 3e^{-p}) \sum_{k=0}^{\infty} k(e^{-2p})^k - (a+p)(1 + 3e^{-a}) \sum_{k=0}^{\infty} k(e^{-2a})^k + 4ae^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-2p})^k - 2(a+p)e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-2a})^k \right)$$

Sachant que par défaut :

$$\sum_{k=0}^n k \cdot a^k = \frac{a(n \cdot a^{n+1} - (n+1)a^n + 1)}{(1-a)^2} \text{ et } \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}$$

On obtient enfin :

$$F(p) = \frac{1}{a^2 - p^2} \left(\frac{2a(1 + 3e^{-p})e^{-2p}}{(1 - e^{-2p})^2} - \frac{(a+p)(1 + 3e^{-a})e^{-2a}}{(1 - e^{-2a})^2} + \frac{4ae^{-p}}{1 - e^{-2p}} - \frac{2(a+p)e^{-a}}{1 - e^{-2a}} \right)$$

$$F(p) = \frac{1}{a^2 - p^2} \left(\frac{2ae^{-p}(2 + e^{-p} + e^{-2p})}{(1 - e^{-2p})^2} - \frac{(a+p)e^{-a}(2 + e^{-a} + e^{-2a})}{(1 - e^{-2a})^2} \right)$$

$$F(p) = \frac{2ae^{-p}(2 + e^{-p} + e^{-2p})(1 - e^{-2a})^2 - (a+p)e^{-a}(2 + e^{-a} + e^{-2a})(1 - e^{-2p})^2}{(a^2 - p^2)(1 - e^{-2p})^2(1 - e^{-2a})^2}$$

Cette fonction est complexe, on peut la simplifier en considérant que :

$$e^{-a} \approx 0 \rightarrow F(p) = \frac{2ae^{-p}(2 + e^{-p} + e^{-2p})}{(a^2 - p^2)(1 - e^{-2p})^2}$$

Ensuite, le système bouclé (par itérations successives) suit le modèle suivant :

$$L(U_{n+1}(N)) = F(p) (N + L(U_{n+1}(N)))$$

$$\rightarrow L(U_{n+1}(N)) = \frac{F(p)}{1 - F(p)} N$$

Ce qui donne :

$$L(U_{n+1}(N)) = \frac{2ae^{-p}(2 + e^{-p} + e^{-2p})N}{(a^2 - p^2)(1 - e^{-2p})^2 - 2ae^{-p}(2 + e^{-p} + e^{-2p})}$$

D'où pour la valeur finale :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(N) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pL(U_{n+1}(N)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{8aNp}{-8a} = 0$$

Au bout d'un certain rang n plus ou moins grand, la suite décroît et converge.

Et pour la valeur initiale :

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} U_n(N) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pL(U_{n+1}(N)) = \frac{4aNe^{-p}}{p} = 0$$

La suite trigonométrique vaut bien zéro en zéro.

Enfin pour revenir dans l'ensemble des entiers, on applique la transformée de Laplace inverse :

$$U_{n+1}(N) = L^{-1} (L(U_{n+1}(N))) = \frac{2ae^{-p}(2 + e^{-p} + e^{-2p})N}{(a^2 - p^2)(1 - e^{-2p})^2 - 2ae^{-p}(2 + e^{-p} + e^{-2p})}$$

2. Transformée en z, équation caractéristique et série génératrice

On calcule à partir de la forme trigonométrique la **transformée en z** de la suite de Syracuse. On obtient l'équation suivante :

$$Z(z) = \frac{z(2z^2 + z + 1)}{(z^2 - 1)^2} = \frac{z(2z^2 + z + 1)}{(z + 1)^2(z - 1)^2} = \frac{z(2z^2 + z + 1)}{(z^2 + 2z + 1)(z^2 - 2z + 1)}$$

Avec :

$$Z(z) = 0 \text{ si } \begin{cases} z = 0 \\ z = \frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{7}) \\ z \neq 1 \text{ et } z \neq -1 \end{cases}$$

Si on applique le théorème de la valeur initiale :

$$N = U_0(N) = \lim_{n \rightarrow 0} U_n(N) \rightarrow \lim_{z \rightarrow +\infty} Z(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z(2z^2 + z + 1)}{(z + 1)^2(z - 1)^2} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{z} = 0$$

C'est la valeur minimale de N de la suite de Syracuse étendue à une forme trigonométrique (réelle et non entière).

Si on applique le théorème de la valeur finale :

$$1 = U_i(N) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(N) \rightarrow \lim_{z \rightarrow 1, |z| > 1} (z - 1)Z(z) = \lim_{z \rightarrow 1, |z| > 1} \frac{z(2z^2 + z + 1)}{(z + 1)^2(z - 1)} = \lim_{z \rightarrow 1, |z| > 1} \frac{1}{z - 1} = +\infty$$

Sous la forme de la transformée en z la suite de Syracuse ne converge pas. Ce qui est normale puisque qu'on se base sur la forme trigonométrique réelle, pour calculer la transformée en z, et celle-ci diverge également vers l'infinie.

~

On va maintenant rechercher l'**équation caractéristique** de la suite de Syracuse avec :

$$U_{n+1}(N) = \frac{1}{4} \left(1 + 4U_n(N) - (-1)^{U_n(N)}(1 + 2U_n(N)) \right)$$

Soit :

$$4U_{n+1}(N) + 2U_n(N)((-1)^{U_n(N)} - 2) = 1 - (-1)^{U_n(N)}$$

On a :

$$\text{Si pair : } 4U_{n+1}(N) - 2U_n(N) = 0 \rightarrow 4x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$1 \text{ racine simple } \rightarrow U_n(N) = a_0 \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$\text{Avec } U_0(N) = N = a_0$$

$$\rightarrow U_n(N) = U_0(N) \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{N}{2^n} \text{ si } N \text{ pair}$$

$$\text{Si impair : } 4U_{n+1}(N) - 6U_n(N) = 2 \rightarrow 2U_{n+1}(N) - 3U_n(N) = 1$$

$$\text{Or au rang suivant : } 2U_{n+2}(N) - 3U_{n+1}(N) = 1$$

$$\text{Par soustraction : } 2U_{n+2}(N) - 5U_{n+1}(N) + 3U_n(N) = 0 \rightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \rightarrow x = \left\{ \frac{3}{2}; 1 \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &2 \text{ racines simples} \rightarrow U_n(N) = a_0 \left(\frac{3}{2}\right)^n + a_1(1)^n \\
 &\text{Avec } U_0(N) = N = a_0 + a_1 \\
 &\text{Et } U_1(N) = \frac{3}{2}a_0 + a_1 = \frac{3N+1}{2} \text{ car } N \text{ impair} \\
 &\text{Par soustraction : } a_0 = N+1 \text{ et } a_1 = -1 \\
 &\rightarrow \mathbf{U_n(N) = \left(\frac{3}{2}\right)^n (N+1) - 1 \text{ si } N \text{ impair}}
 \end{aligned}$$

On retrouve bien les itérations itérées paires et impaires de la suite de Syracuse.

~

Si on reprend l'équation de départ et qu'on isole le terme alterné, on obtient :

$$(-1)^{U_n(N)} = \frac{-4U_{n+1}(N) + 4U_n(N) + 1}{2U_n(N) + 1}$$

On élève le tout au carré pour éliminer l'élément alterné de cette suite :

$$(-1)^{2U_n(N)} = 1 = \left(\frac{-4U_{n+1}(N) + 4U_n(N) + 1}{2U_n(N) + 1}\right)^2$$

Soit :

$$4U_{n+1}^2(N) - 2U_{n+1}(N) - 8U_{n+1}(N)U_n(N) + 3U_n^2(N) + U_n(N) = 0$$

Par factorisation :

$$(2U_{n+1}(N) - U_n(N))(2U_{n+1}(N) - 3U_n(N) - 1) = 0$$

D'où :

$$U_{n+1}(N) = \left\{ \frac{U_n(N)}{2}; \frac{3U_n(N) + 1}{2} \right\}$$

On retrouve bien les deux formes paires et impaires de la suite de Syracuse.

~

On étudie maintenant la **série génératrice** de la suite de Syracuse avec :

$$U_{n+1}(N) = \frac{1}{4} \left(1 + 4U_n(N) - (-1)^{U_n(N)}(1 + 2U_n(N)) \right)$$

On pose :

$$G(x) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} x^n (1 + 4n - (-1)^n(1 + 2n))$$

Sachant que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}; \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n nx^n = -\frac{x}{(1+x)^2}$$

On obtient :

$$G(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{4x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{(1+x)^2} \right) = \frac{x(x^2 + x + 2)}{(1-x^2)^2}$$

Or, il est difficile de trouver le comportement asymptotique de cette série génératrice de la suite de Syracuse.

On part cette fois-ci de :

$$U_{n+1}(N) = \sum_{k=1}^{\infty} (k\delta(U_n(N) - 2k) + (3k + 2)\delta(U_n(N) - 2k - 1))$$

On pose :

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n (nx^n + (3n + 2)x^{n+1})$$

Et on obtient de nouveau :

$$G(x) = (1 + 3x) \sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{(1 + 3x)x^2}{(1 - x^2)^2} + \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{x(x^2 + x + 2)}{(1 - x^2)^2}$$

Soit la même équation sous une forme légèrement différente :

$$U_{n+1}(N) = \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^{U_n(N)} + 2(2 - (-1)^{U_n(N)})U_n(N) \right)$$

On essaie avec la transformée en Z :

$$Z(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (kz^{-2k} + (3k + 2)z^{-2k-1}) = \frac{z^{-2}}{(1 - z^{-2})^2} + \frac{3z^{-3}}{(1 - z^{-2})^2} + \frac{2z^{-1}}{1 - z^{-2}}$$

$$\rightarrow Z(z) = Z\left(\frac{1}{x}\right) = G(x) = \frac{x(x^2 + x + 2)}{(1 - x^2)^2} \text{ avec } x = z^{-1}$$

On retrouve bien de nouveau la forme de la transformée en z vue précédemment.

3. Polynômisation de la suite de Syracuse

L'objectif de ce chapitre est de mettre sous forme de fonctions polynômiales irréductibles la suite de Syracuse. A chaque valeur N correspond un polynôme tel que $P(N)=1$.

Par exemple en prenant au départ $N=13$, on a :

$$N = 13 > 20 > 10 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1 \rightarrow i = 7$$

On cherche ensuite un polynôme de degré i comme suit :

$$P(x) = \sum_{k=0}^i a_k \cdot x^k \text{ avec } P(13) = 1$$

Soit via les itérations de la suite de Syracuse, on obtient :

$$P(13) = \frac{\left(\frac{3 \left(\frac{\left(\frac{3N+1}{2} \right)}{2} \right) + 1}{2} \right)}{2} = 1$$

D'où :

$$P(13) = \frac{3^2 N}{2^7} + \frac{3}{2^7} + \frac{1}{2^4} = \frac{9N + 11}{2^7} = 1$$

On obtient :

$$P(x) = \frac{9x + 11}{128} \text{ avec } P(13) = 1$$

Quel que soit N, les polynômes sont tous de degré 1, soit :

$$P(x) = a_1 \cdot x + a_0 \text{ avec } P(x) = 1$$

Si on prend les doubles de 13, on a :

$$N = 13 \cdot 2^n > \dots > 104 > 52 > 26 > 13 : i = 7 + n$$

Et ainsi :

$$P(3 \cdot 2^n) = 3^2 \frac{N}{2^{5 \cdot 2^n}} + \frac{3}{2^5} + \frac{1}{2^4} = \frac{9N + 5 \cdot 2^n}{2^{n+5}} = \frac{9 \left(\frac{N}{2^n} \right) + 5}{2^5} = 1$$

$$P(x) = \frac{9x + 5 \cdot 2^n}{2^{n+5}} = \frac{5x + 2^n}{2^{n+4}} \text{ avec } P(3 \cdot 2^n) = 1$$

On remarque que pour $n=0$, on retrouve le même résultat que le précédent, $P(13)=1$, malgré qu'elle soit différente de la précédente.

Car avec :

$$N = 2^n > 2^{n-1} > 2^{n-2} \dots > 4 > 2 > 1 : i = n$$

On a simplement :

$$P(2^n) = 2^n \frac{1}{2^n} = 1$$

$$P(x) = \frac{x}{2^n} \text{ avec } P(2^n) = 1$$

Dans le cas général, on a par itération généralisée l'équation suivante :

$$P(x) = a_1 x + a_0 \text{ avec } P(x) = 1$$

Soit :

$$P(x) = \dots \frac{1}{2^{n5}} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{n4} \left(\left(\frac{1}{2^{n3}} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{n2} \left(\left(\frac{1}{2^{n1}} x \right) + 1 \right) - 1 \right) \right) + 1 \right) - 1 \right) \dots = 1$$

$$P(x) = \dots \frac{3^{n2+n4}}{2^{n1+n2+n3+n4+n5}} x + \frac{3^{n2+n4}}{2^{n2+n3+n4+n5}} - \frac{3^{n4}}{2^{n3+n4+n5}} + \frac{3^{n4}}{2^{n4+n5}} - \frac{1}{2^{n5}} \dots = 1$$

Soit :

$$P(x) = \frac{3^{\sum_{k=1}^p n_{2k}}}{2^{\sum_{k=1}^p n_k}} x + \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3^{\sum_{k=1}^j n_{p+1-2k}}}{2^{\sum_{k=1}^j (n_{p+1-2k} + n_{p+2-2k})}} - \frac{3^{\sum_{k=1}^{j-1} n_{p+1-2k}}}{2^{n_p + \sum_{k=1}^{j-1} (n_{p+1-2k} + n_{p-2k})}} \right) = 1$$

avec $i = \sum_{j=1}^p n_j$, $n_j \geq 0$ et p impair

Ou encore :

$$P(x) = \frac{3^{\sum_{k=1}^p n_{2k}}}{2^i} (x + 2^{n_1}) - \frac{1}{2^{n_p}} + \sum_{j=1}^{\frac{p-3}{2}} \left(\frac{3^{\sum_{k=1}^j n_{p-2k+1}}}{2^{\sum_{k=1}^j (n_{p-2k+1} + n_{p-2k+2})}} \right) \left(1 - \frac{1}{2^{n_{p-2j}}} \right) = 1$$

Soit en définitif :

$$P(x) = \left(\frac{3^{\sum_{k=1}^p n_{2k}}}{2^i} \right) x + \left(\frac{3^{\sum_{k=1}^p n_{2k}}}{2^{i-n_1}} - \frac{1}{2^{n_p}} + \sum_{j=1}^{\frac{p-3}{2}} \left(\frac{3^{\sum_{k=1}^j n_{p-2k+1}}}{2^{\sum_{k=1}^j (n_{p-2k+1} + n_{p-2k+2})}} \right) \left(1 - \frac{1}{2^{n_{p-2j}}} \right) \right) = 1$$

Ce polynôme ne simplifie finalement pas la tâche.

4. Alternative : miroir négatif

Avec $N < 0$, on a la conjecture de Syracuse simplifiée en miroir négatif suivante :

$$V_0(N) = N \text{ et } V_{n+1}(N) = \begin{cases} \frac{V_n(N)}{2} \text{ si } V_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3V_n(N) - 1}{2} \text{ si } V_n(N) \text{ impair} \end{cases}, \exists i \geq 0 \text{ tel que } V_i(N) = -1 \forall N < 0$$

Prouver la conjecture revient à prouver que pour tout $N < 0$ la suite converge toujours vers -1.

On a donc l'équation suivante :

$$U_n(N) + V_n(-N) = 0 \forall N > 0 \text{ et } n \geq 0$$

On peut également rechercher sans difficultés des équations trigonométriques de cette suite V en reprenant, sur les mêmes principes, les résultats précédents dans cet ouvrage.

5. Au carré

On reprend la forme trigonométrique comme suit :

$$\begin{aligned} 1 + 4U_n(N) - (1 + 2U_n(N))(-1)^{U_n(N)} &= 4U_{n+1}(N) \\ 1 + 4(U_n(N) - U_{n+1}(N)) &= (1 + 2U_n(N))(-1)^{U_n(N)} \end{aligned}$$

On met les 2 membres au carré :

$$(1 + 4(U_n(N) - U_{n+1}(N)))^2 = (1 + 2U_n(N))^2$$

En identifiant un produit remarquable, on obtient :

$$\begin{aligned} (1 + 4(U_n(N) - U_{n+1}(N)))^2 - (1 + 2U_n(N))^2 &= 0 \\ 4(1 + 3U_n(N) - 2U_{n+1}(N))(U_n(N) - 2U_{n+1}(N)) &= 0 \end{aligned}$$

Soit :

$$\left(U_{n+1}(N) - \frac{U_n(N)}{2} \right) \left(U_{n+1}(N) - \frac{3U_n(N) + 1}{2} \right) = 0$$

Cela correspond bien à la forme de la suite de Syracuse dans les deux cas de parité. On peut d'ailleurs les tester comme suit :

$$\begin{aligned} &\text{Pair, si } U_n(N) = 2k \text{ alors :} \\ &\left(U_{n+1}(N) - \frac{2k}{2} \right) \left(U_{n+1}(N) - \frac{3(2k) + 1}{2} \right) = 0 \\ &= (U_{n+1}(N) - k) \left(U_{n+1}(N) - 3k - \frac{1}{2} \right) = U_{n+1}(N)^2 - \left(4k + \frac{1}{2} \right) U_{n+1}(N) + 3k^2 + \frac{k}{2} \\ U_{n+1}(N) &= \frac{4k + \frac{1}{2} \pm \sqrt{4k^2 + 2k + \frac{1}{4}}}{2} = \frac{4k + \frac{1}{2} \pm \left(2k + \frac{1}{2} \right)}{2} = \begin{cases} 3k + \frac{1}{2} : n' \text{ est pas entier} \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

On retrouve donc bien la solution unique dans le cas pair :

$$\text{Pair, si } U_n(N) = 2k \text{ alors } U_{n+1}(N) = k$$

$$\begin{aligned} &\text{Impair, si } U_n(N) = 2k + 1 \text{ alors :} \\ &\left(U_{n+1}(N) - \frac{2k + 1}{2} \right) \left(U_{n+1}(N) - \frac{3(2k + 1) + 1}{2} \right) = 0 \\ &= \left(U_{n+1}(N) - k - \frac{1}{2} \right) (U_{n+1}(N) - 3k - 2) = U_{n+1}(N)^2 - \left(4k + \frac{5}{2} \right) U_{n+1}(N) + 3k^2 + \frac{7k}{2} + 1 \\ U_{n+1}(N) &= \frac{4k + \frac{5}{2} \pm \sqrt{4k^2 + 6k + \frac{9}{4}}}{2} = \frac{4k + \frac{5}{2} \pm \left(2k + \frac{3}{2} \right)}{2} = \begin{cases} 3k + 2 \in \mathbb{N} \\ k + \frac{1}{2} : n' \text{ est pas entier} \end{cases} \end{aligned}$$

On retrouve donc bien la solution unique dans le cas impair :

$$\text{Pair, si } U_n(N) = 2k + 1 \text{ alors } U_{n+1}(N) = 3k + 2$$

Solutions :

$$U_{n+1}^1(N) = \frac{U_n(N)}{2} \text{ et } U_{n+1}^2(N) = \frac{3U_n(N) + 1}{2}$$

$U_n(N)$ doit être pair pour que $U_{n+1}^1(N)$ soit entier ou impair pour que $U_{n+1}^2(N)$ soit entier.

Sans surprise, on obtient une équation du second degré avec comme solution les deux cas, pair et impair, de la suite de Syracuse.

6. Forme polaire

On peut écrire la suite de Syracuse sous forme polaire. Il existe plusieurs façons pour cela. Par exemple en posant :

$$\begin{aligned} n &= D_n \cos(a_n) \\ U_n(N) &= D_n \sin(a_n) \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} a_n &= \arctan\left(\frac{U_n(N)}{n}\right) \\ D_n^2 &= \cos^2(a_n) + \sin^2(a_n) = n^2 + U_n^2(N) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} U_0(N) &= N = D_0 \sin(a_0) \\ i &= D_i \cos(a_i) \\ U_i(N) &= 1 = D_i \sin(a_i) \end{aligned}$$

Soit :

$$i = \frac{1}{\tan(a_i)}$$

Et dans l'espace complexe :

$$z_n = D_n e^{ia_n} = n + i \cdot U_n(N)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} n + 1 &= D_n \cos(a_n) + D_1 \cos(a_1) \\ U_{n+1}(N) &= D_{n+1} \sin(a_{n+1}) = \begin{cases} \frac{D_n}{2} \sin(a_n) & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3D_n \sin(a_n) + 1}{2} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Cette forme n'est pas simple à manipuler.

La plus évidente serait plutôt :

$$z_n(N) = U_n(N) e^{i\pi kn} \rightarrow z_{n+1}(N) = U_{n+1}(N) e^{i\pi kn} = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} e^{i\pi kn} & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(N) + 1}{2} e^{i\pi kn} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

Cette forme polaire, plus simple, permet de tracer un vol de N selon son module et son angle. Cela donne des graphiques en rotation par exemple (en appliquant un angle constant rang après rang) sur un plan à 3 axes. Ces graphiques accentuent la vision d'un champ d'attraction vers 1. C'est tout à fait éloquent.

7. Incrémentation impaire

On s'intéresse à la partie impaire de la suite de Syracuse. Elle croît suivant une progression bien précise. Sachant que dans ce cas :

$$U_{n+1}(N) = \frac{3U_n(N) + 1}{2} = \frac{3U_n(N) + 3 - 2}{2} = \frac{3}{2}(U_n(N) + 1) - 1$$

On regarde maintenant avec :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(U_n(N) + 2) - 2 &= \frac{3U_n(N)}{2} + 1 = U_{n+1}(N) + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}(U_n(N) + 3) - 3 &= \frac{3}{2}(U_n(N) + 1) = U_{n+1}(N) + 1 \\ \frac{3}{2}(U_n(N) + 4) - 4 &= \frac{3}{2}(U_n(N) + 1) + \frac{1}{2} = U_{n+1}(N) + \frac{3}{2} \\ &\dots \end{aligned}$$

D'où la relation :

$$\frac{3}{2}(U_n(N) + k) - k = \frac{3U_n(N) + k}{2} = U_{n+1}(N) + \frac{k-1}{2}$$

Cette relation est au cœur de la suite de Syracuse. Mais il est encore trop tôt pour l'exploiter.

15. Forme allégorique : Cerveau

Notre cerveau est indispensable à l'homme pour vivre normalement. Le système nerveux qui s'étend partout dans le corps permet de détecter toutes les sensations de touché, d'alerter en cas de danger et de douleurs, etc. L'ensemble des signaux, aussi faibles, forts, proches ou lointains soient-ils, de notre système nerveux remontent inlassablement vers notre cerveau qui les analyse et prend des décisions en permanence, parfois inconscientes et pourtant si vitales. Ces signaux sont tous les entiers et le cerveau l'unité qui centralise tout cela.

16. Forme allégorique : Courant électrique

En électricité, plus précisément dans le fonctionnement basique d'un transistor, le signal est binaire. 0 ou pair, le courant ne passe pas, 1 ou impair, le courant passe. Les milliards de transistors d'une puce d'ordinateur permettent des combinaisons quasi-infinies. Mais le principe est toujours et seulement basé sur 1 et 0, le cycle trivial qui régit tous nos complexes et performants ordinateurs, smartphones et tablettes.

8. Résolution et preuve

Voici le chapitre dont le titre a sûrement dû retenir toute votre attention. On va démontrer comment résoudre la suite de plusieurs manières et calculer ces résultats formellement.

Ensuite, on essaiera de prouver la conjecture de Syracuse en levant un par un les points bloquants. Dans ce chapitre, vous saurez identifier de manière certaine la structure profonde de la suite qui n'aura plus de secret à dévoiler. Vous aurez passé le cap d'expert. Et pourtant, de nouvelles questions apparaîtront inéluctablement...

1. Séquences identiques de vols

Préalablement à la résolution, on va ici étudier s'il existe des séquences identiques pour des vols différents. C'est-à-dire des morceaux de vols identiques pour des valeurs de départ N différentes. S'ils en existent, ont-elles des ou une relation commune extractible ? On va voir que oui.

Si on prend deux valeurs initiales N et M impaires tel que :

$$N - M = 2^n$$

Alors on dit que leurs vols correspondent pendant une séquence de n itérations. C'est-à-dire que les parités des n premiers vols de N et M sont les mêmes. Et les parités du vol au rang n+1 de N et M sont différentes. Au-delà de n+1 on ne sait pas affirmer à l'avance leur parité.

Pour prouver cela, on calcule les rangs de N-M comme suit :

$$U_0(N) - U_0(M) = N - M = 2^n \rightarrow N = 2^n + M$$

$$U_1(N) - U_1(M) = \frac{3N+1}{2} - \frac{3M+1}{2} = \frac{3(2^n+M)+1}{2} - \frac{3M+1}{2} = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$U_2(N) - U_2(M) = \begin{cases} \frac{\frac{3N+1}{2} - \frac{3M+1}{2}}{2} = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{2} = 3 \cdot 2^{n-2} \text{ si } U_1(N) \text{ ou } U_1(M) \text{ pair} \\ 3 \left(\frac{3N+1}{2} + 1 \right) - 3 \left(\frac{3M+1}{2} + 1 \right) = \frac{3^2(2^n+M)+5}{2^2} - \frac{3^2M+5}{2^2} = 3^2 \cdot 2^{n-2} \text{ sinon} \end{cases}$$

$$U_n(N) - U_n(M) = 3^m \text{ avec } n = m + p$$

m correspond aux nombres d'itérations impaires du vol N ou M sur les n premiers rangs de leur vol.

On a donc en définitive et en résumé :

Si $U_0(N) - U_0(M) = N - M = 2^n$ avec N et M impairs, alors :
 $U_n(N) - U_n(M) = 3^m$ avec $n = m + p$
et N et M suivent les mêmes parités durant leurs n premiers rangs,
puis leur parité s'oppose au rang n + 1.

Soit également :

$$U_n(N) - U_n(N - 2^n) = 3^m \text{ avec } n = m + p$$

Et au rang suivant :

$$U_{n+1}(N) = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2} = 3^m + \frac{3U_n(N - 2^n) + 1}{2} \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ \frac{3U_n(N) + 1}{2} = 3^m + \frac{U_n(N - 2^n)}{2} \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases}$$

Voici trois exemples :

N = 11 et M = 3 :

$\rightarrow N - M = 11 - 3 = 8 = 2^3 \rightarrow n = 3$

A - t - on bien les mêmes parités des vols de 11 et 3 durant les 3 premières itérations ?

11 \rightarrow 17 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1

3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1

*On a bien : impair → impair → pair → parité différente pour les vols 11 et 3 au 4ième rang.
De plus : $U_3(11) - U_3(3) = 13 - 4 = 9 = 3^2 \rightarrow m = 2$ et $p = 1$*

$N = 33$ et $M = 1$:

$$\rightarrow N - M = 33 - 1 = 32 = 2^5 \rightarrow n = 5$$

A - t - on bien les mêmes parités des vols de 33 et 1 durant les 5 premières itérations ?

$$33 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 38 \rightarrow 19 \rightarrow 29 \rightarrow 44 \rightarrow 44 \rightarrow 11 \rightarrow \dots \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow 1$$

On a bien : impair → pair → impair → pair → impair

→ parité différente pour les vols 33 et 1 au 6ième rang.

$$De plus : U_5(33) - U_5(1) = 29 - 2 = 27 = 3^3 \rightarrow m = 3 \text{ et } p = 2$$

$N = 63$ et $M = 31$:

$$\rightarrow N - M = 63 - 31 = 32 = 2^5 \rightarrow n = 5$$

A - t - on bien les mêmes parités des vols de 63 et 31 durant les 5 premières itérations ?

$$63 \rightarrow 95 \rightarrow 143 \rightarrow 215 \rightarrow 323 \rightarrow 485 \rightarrow \dots \rightarrow 1$$

$$31 \rightarrow 47 \rightarrow 71 \rightarrow 107 \rightarrow 161 \rightarrow 242 \rightarrow \dots \rightarrow 1$$

On a bien : impair → impair → impair → impair → impair

→ parité différente pour les vols 63 et 31 au 6ième rang.

$$De plus : U_5(63) - U_5(31) = 485 - 242 = 243 = 3^5 \rightarrow m = 5 \text{ et } p = 0$$

Cette propriété de la suite de Syracuse est tout à fait intéressante, nouvelle et utile. Comment l'interpréter ? Et bien, prenons au hasard un entier positive quelconque N. calculons ensuite sa différence avec la puissance de 2 la plus proche de N (que l'on nomme 2^n). On obtient M. Et bien M va suivre exactement la même séquence de parités durant n rang que N. puis au rang n+1 les parités de N et M vont s'inverser. Cela revient à suivre durant plusieurs rangs un vol via un autre.

De plus, on peut simplement connaître la valeur d'un rang n d'une valeur initiale N impaire directement en calculant les n rangs de la valeur initiale M impaire. L'intérêt réside dans le fait que M est d'autant plus inférieure à N que N est grand, et qu'ainsi les rangs n de M sont soit déjà connus ou soit beaucoup plus simple et rapide à calculer pour un ordinateur. On utilise ensuite l'équation suivante :

$$U_n(N) = 3^m + U_n(M) \text{ avec } n = m + p$$

Où :

$$U_n(N) = 3^m + U_n(N - 2^n) \text{ avec } n = m + p$$

2. Unicité du cycle final {2,1,2,1,...} de la suite de Syracuse

La somme Sc , qui débute au rang $i+1$, du cycle infini {2,1,2,1,2,1...}, de toute valeur N de départ de la suite vaut :

$$Sc_k(N) = \sum_{j=i+1}^k U_j(N) = 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + \dots = 2 \cdot \frac{k}{2} + 1 \cdot \frac{k}{2} = \frac{3k}{2}, \forall N > 0, k > i + 1$$

$$Sc(N) = \lim_{k \rightarrow +\infty} Sc_k(N) = +\infty, \forall N > 0$$

La somme S des $U_n(N)$ pour un N choisi est composée a priori d'une partie finie convergente vers 1 au rang i et d'une partie divergente Sc , soit :

$$S(N) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(N) = \sum_{j=0}^i U_j(N) + \sum_{j=i+1}^{\infty} U_j(N) = \left(N + \sum_{j=1}^{i-1} U_j(N) + 1 \right) + Sc(N), \forall N > 0$$

Une des façons de prouver la conjecture de Syracuse est de prouver qu'un seul cycle final existe pour toutes les valeurs entières positives de départ.

Ainsi, pour prouver l'unicité d'un seul cycle à 2 valeurs, ou de longueur 2, on va tout d'abord procéder de manière simple en considérant les différents cas possibles par nombre de valeurs de cycle comme suit :

Cycle(s) d'une valeur

S'il existe un ou plusieurs cycles d'une valeur, c'est-à-dire que tous ou certains $U_n(N)$ atteignent à partir d'un rang n une valeur fixe qui se répète aux rangs suivants à l'infini, alors il faut et il suffit que :

$$U_{n+1}(N) = U_n(N)$$

Ce qui engendre 2 cas à tester :

$$\text{Pair} : U_{n+1}(N) = \frac{U_n(N)}{2} = U_n(N) \rightarrow U_n(N) = 0 \text{ impossible car } N \text{ et } U_n(N) > 0 \text{ par définition}$$

Et :

$$\text{Impair} : U_{n+1}(N) = \frac{3U_n(N) + 1}{2} = U_n(N) \rightarrow U_n(N) = -1 \text{ impossible par définition}$$

Il n'existe donc pas de cycle à une seule valeur finale.

Cycle(s) de 2 valeurs

S'il existe un ou plusieurs cycles de 2 valeurs, c'est-à-dire que tous ou certains $U_n(N)$ atteignent à partir d'un rang n une de ces 2 valeurs qui se répètent aux rangs suivants à l'infini, alors il faut et il suffit que :

$$U_{n+2}(N) = U_n(N)$$

Ce qui engendre 4 (2^2) cas à tester (P=itération Pair et I=itération Impair) :

$$PP : U_{n+2}(N) = \frac{\frac{U_n(N)}{2}}{2} = \frac{U_n(N)}{4} = U_n(N) \rightarrow U_n(N) = 0 \text{ impossible par définition}$$

$$PI : U_{n+2}(N) = \frac{3\frac{U_n(N)}{2} + 1}{2} = \frac{3U_n(N) + 2}{4} = U_n(N) \rightarrow U_n(N) = 2$$

$$IP : U_{n+2}(N) = \frac{\frac{3U_n(N) + 1}{2}}{2} = \frac{3U_n(N) + 1}{4} = U_n(N) \rightarrow U_n(N) = 1$$

$$II : U_{n+2}(N) = \frac{3\left(\frac{3U_n(N) + 1}{2}\right) + 1}{2} = \frac{9U_n(N) + 5}{4} = U_n(N) \rightarrow U_n(N) = -1 \text{ impossible par définition}$$

**Et comme 2 donne 1 et 1 donne 2, on a bien :
1 seul cycle de 2 valeurs {2, 1} qui se répète à l'infini.**

Cycle(s) de 3 valeurs

On procède de la même manière pour déceler si un ou plusieurs cycles de 3 valeurs existent. Il faut cette fois-ci tester 8 (2^3) cas de :

$$U_{n+3}(N) = U_n(N)$$

Soit :

Cas	$U_{n+3}(N)$	$U_n(N)$	Commentaire
PPP	$\frac{U_n(N)}{8}$	0	Impossible car $\notin \mathbb{N}^+$
PPI	$\frac{3U_n(N) + 4}{8}$	4/5	Impossible car $\notin \mathbb{N}^+$
PIP	$\frac{3U_n(N) + 2}{8}$	2/5	Impossible car $\notin \mathbb{N}^+$
IPP	$\frac{3U_n(N) + 1}{8}$	1/5	Impossible car $\notin \mathbb{N}^+$
PII	$\frac{9U_n(N) + 10}{8}$	-10	Impossible car $\notin \mathbb{N}^+$
IPI	$\frac{9U_n(N) + 7}{8}$	-7	Impossible car $\notin \mathbb{N}^+$
IIP	$\frac{9U_n(N) + 5}{8}$	-5	Impossible car $\notin \mathbb{N}^+$
III	$\frac{27U_n(N) + 19}{8}$	-1	Impossible car $\notin \mathbb{N}^+$

Il n'existe donc aucun cycle de 3 valeurs dans la suite de Syracuse.

Cycle(s) de k valeurs

Si on continue avec la même méthode on en aurait pour des siècles... On va ici prendre le cas général de $U_n(N)$ pour déceler si d'autres cycles existent. En reprenant le cas généralisé déjà exposé dans cet ouvrage, on pose donc :

$$U_{n+k}(N) = \frac{3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}}}{2^{\sum_{j=1}^p n_j}} U_n(N) + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3^{\sum_{j=1}^k n_{p-2j+1}}}{2^{\sum_{j=1}^{2k} n_{p-j+1}}} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n_{p-2k+1}} \right) \right) = U_n(N)$$

Avec $\begin{cases} n_1 = 0 \text{ si } U_n(N) \text{ impair} \\ n_1 > 0 \text{ si } U_n(N) \text{ pair} \\ p \text{ impair} \end{cases}$

On isole $U_n(N)$:

$$U_n(N) = \frac{2^{\sum_{j=1}^p n_j}}{2^{\sum_{j=1}^p n_j} - 3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}}} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3^{\sum_{j=1}^k n_{p-2j+1}}}{2^{\sum_{j=1}^{2k} n_{p-j+1}}} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n_{p-2k+1}} \right) \right)$$

Cette équation est très complexe à manipuler. De ce fait, on va prendre tout d'abord un exemple.

Avec $p=5$ on obtient :

$$U_n(N) = \frac{2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}}{2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5} - 3^{n_2+n_4}} \left(\frac{3^{n_2+n_4}}{2^{n_2+n_3+n_4+n_5}} - \frac{3^{n_4}}{2^{n_3+n_4+n_5}} + \frac{3^{n_4}}{2^{n_4+n_5}} - \frac{1}{2^{n_5}} \right)$$

$$U_n(N) = \frac{3^{n_2+n_4} 2^{n_1} - 3^{n_4} 2^{n_1+n_2} + 3^{n_4} 2^{n_1+n_2+n_3} - 2^{n_1+n_2+n_3+n_4}}{2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5} - 3^{n_2+n_4}}$$

Pour avoir au moins un cycle il faut que :

$$U_n(N) > 0$$

Soit pour avoir une solution positive :

$$3^{n_2+n_4} 2^{n_1} - 3^{n_4} 2^{n_1+n_2} + 3^{n_4} 2^{n_1+n_2+n_3} - 2^{n_1+n_2+n_3+n_4} > 0$$

Pour avoir une division possible :

$$2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5} - 3^{n_2+n_4} \neq 0$$

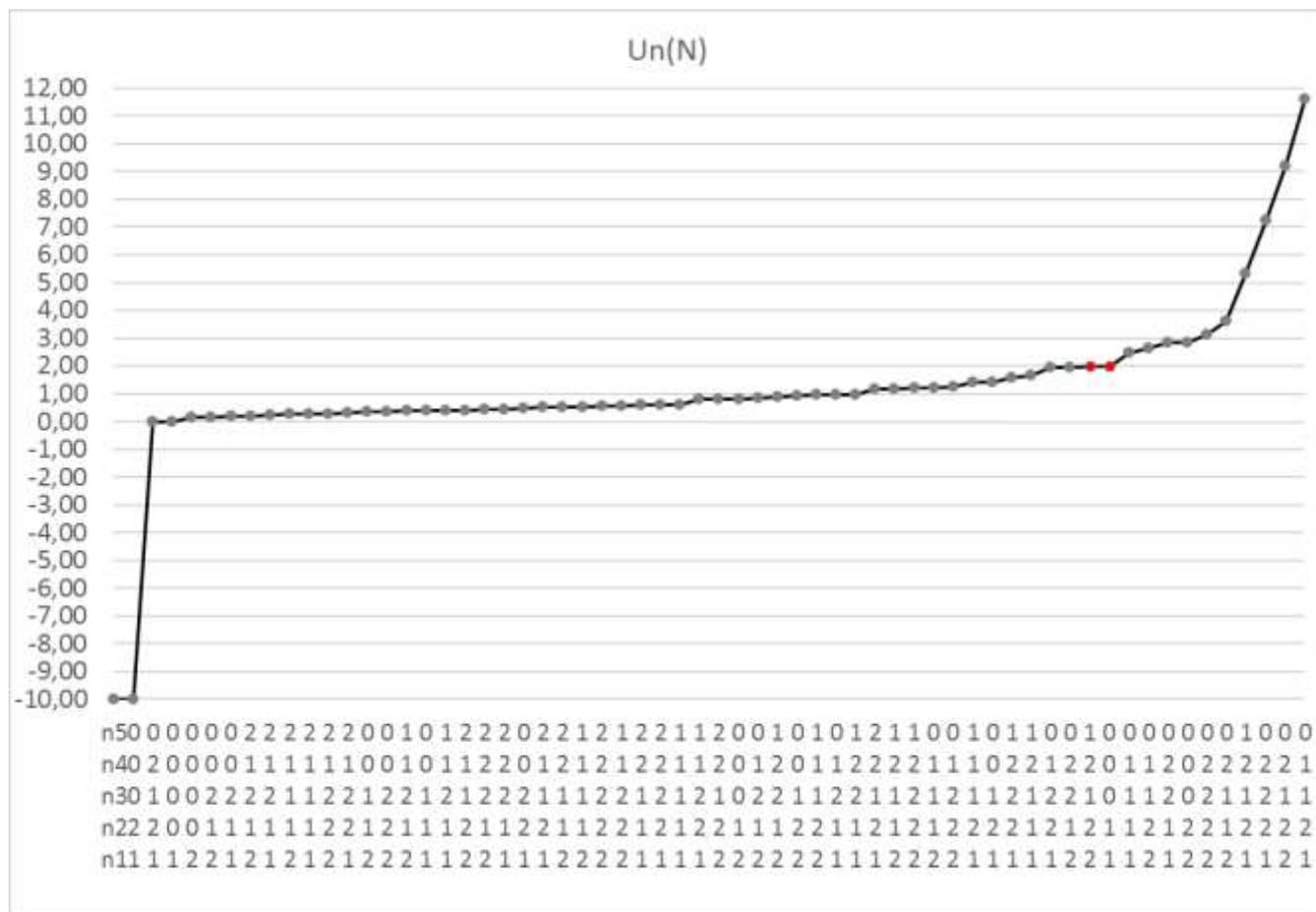
Et pour avoir une division entière :

$$3^{n_2+n_4} 2^{n_1} - 3^{n_4} 2^{n_1+n_2} + 3^{n_4} 2^{n_1+n_2+n_3} - 2^{n_1+n_2+n_3+n_4} = K(2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5} - 3^{n_2+n_4})$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} 2^{n_1} (3^{n_2+n_4} - 2^{n_2} (3^{n_4} - 2^{n_3} (3^{n_4} - 2^{n_4}))) &> 0 \\ 3^{n_2+n_4} - 2^{n_2} (3^{n_4} - 2^{n_3} (3^{n_4} - 2^{n_4})) &> 0 \\ 3^{n_4} (3^{n_2} + 2^{n_2} (2^{n_3} - 1)) &> 2^{n_2+n_3+n_4} \\ 2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5} \neq 3^{n_2+n_4} &> 2^{n_2} (3^{n_4} - 2^{n_3} (3^{n_4} - 2^{n_4})) \end{aligned}$$

Voici le graphique :



Seul deux points (en rouge) correspondent à une valeur entière et il s'agit de la valeur 2 pour :

- $n_1=n_2=1$ et $n_3=n_4=n_5=0$ ou,
- $n_1=n_2=n_3=n_4=1$ et $n_5=0$.

Cela représente le cas que l'on a déjà trouvé pour un cycle de 2 valeurs.

1. Point d'attraction

Comment valider qu'il existe un point d'attraction vers l'unité ? pour cela on recherche :

$$U_n(U_k(N)) - 1 = 0 \text{ et si } |U_n(U_k(N))'| < 1 \text{ alors :}$$

le couple $\{U_0(1) = 1; U_1(1) = 2\}$ est un point d'attraction ou attracteur

L'explication est simple. On cherche à prouver qu'au fil des rangs, tous les vols de la suite, quelle que soit la valeur de départ N, tendent vers la valeur 1. Donc à un certain rang, la valeur du vol se confond avec 1, leur différence ou écart est nulle. De plus, la dérivée du vol, au bout d'un certain rang, correspond à la courbure du vol. Si cette courbure est entre $] -1 ; 1[$ alors cela signifie qu'à chaque rang suivant le vol va converger puisque le coefficient multiplicateur est inférieur à 1.

On pose :

$$U_0(N) = N \text{ et } k_n \geq 1$$

$$\text{Alors : } U_{n+k_n}(N) = \begin{cases} \frac{U_n(N)}{2^{k_n}} & \text{si } U_n(N) \text{ } k_n \text{ fois pair} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{k_n} (U_n(N) + 1) - 1 & \text{si } U_n(N) \text{ } k_n \text{ fois impair} \end{cases}$$

Ou alors, sous forme trigonométrique :

$$U_{n+k_n}(N) = \frac{U_n(N)}{2^{k_n}} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} U_n(N)\right) + \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k_n} (U_n(N) + 1) - 1\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2} U_n(N)\right)$$

Ainsi :

$$U_n(U_k(N)) - 1 = 0 \rightarrow U_{n+k_n}(N) = \begin{cases} 1 = \frac{U_n(N)}{2^{k_n}} & \text{si } U_n(N) \text{ } k_n \text{ fois pair} \\ 2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{k_n} (U_n(N) + 1) - 1 & \text{si } U_n(N) \text{ } k_n \text{ fois impair} \end{cases}$$

D'où :

$$U_n(N) = \begin{cases} 2^{k_n} & \text{si } U_n(N) \text{ } k_n \text{ fois pair} \\ \frac{2^{k_n}}{3^{k_n-1}} - 1 & \text{si } U_n(N) \text{ } k_n \text{ fois impair} \end{cases}$$

Ce qui est tout à fait réalisable dans le cas pair.

Et dans le cas impair, pour avoir une division entière il faut que :

$$\frac{2^{k_n}}{3^{k_n-1}} = 3k \rightarrow 2^{k_n} = 3^{k_n} k \rightarrow \text{possible ssi } k_n = 1$$

Si maintenant on dérive :

$$U'_{n+k_n}(N) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{k_n} & \text{si } U_n(N) \text{ pair} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{k_n} & \text{si } U_n(N) \text{ impair} \end{cases} = \left(\frac{3^{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} U_n(N)\right)}}{2}\right)^{k_n}$$

On a bien ici et dans tous les cas :

$$|U_n(U_k(N))'| = \left(\frac{3^{\sin^2(\frac{\pi}{2}U_n(N))}}{2} \right)^{k_n} < 1$$

$$\text{Car : } \cos(\pi U_n(N)) > 1 - 2 \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \rightarrow U_n(N) > \frac{1}{\pi} \arccos\left(1 - 2 \frac{\ln(2)}{\ln(3)}\right) \approx 0,5843 \dots \approx \frac{97}{166}$$

Ce qui est toujours vrai puisque :

$$U_n(N) \geq 1$$

Les deux relations étant vérifiées, la suite de Syracuse admet le point d'attraction $\{1; 2\}$. Soit :

$$N = 1 \rightarrow U_1(N) = 2 \text{ et } N = 2 \rightarrow U_1(N) = 1$$

On a bien une attraction relative vers 1.

2. Infinité de cycles réels de longueurs finies

On a vu que l'unicité du cycle de la suite de Syracuse dans l'ensemble des entiers n'est pas simple à prouver. En revanche, dans l'ensemble des réels il est particulièrement simple de trouver une forme fractionnaire de départ de la suite pour N qui au bout de k+1 rangs retombe sur ce même N de départ. En voici une forme :

$$\text{Si } N = \frac{2^k}{2^{k+1} - 3} \text{ alors } U_{k+1}(N) = N \forall k > 0$$

En effet :

$$U_k(N) = \frac{\left(\frac{2^k}{2^{k+1} - 3}\right)}{2^k} = \frac{1}{2^{k+1} - 3} \text{ et } U_{k+1}(N) = \frac{3\left(\frac{1}{2^{k+1} - 3}\right) + 1}{2} = \frac{2^k}{2^{k+1} - 3} = N$$

On a donc une infinité de cycles réels de longueur k avec N sous forme de fraction, c'est-à-dire n'appartient pas à \mathbb{N} (nombre pair divisé par un impair).

Voici les 6 premières valeurs de cette forme :

$$N = \left\{ 2; \frac{4}{5}; \frac{8}{13}; \frac{16}{29}; \frac{32}{61}; \frac{64}{125}; \dots \right\}$$

Existe-t-il d'autres formes ? Sûrement...

3. Résolution partielle

Dans ce chapitre on se propose de définir les points initiaux N qui permettent à la fois de vérifier la convergence certaine vers 1 de la suite mais aussi d'en déduire le temps de vol i sans itérations.

La méthode consiste à trouver i en fonction d'un N choisi selon certains critères. Ainsi, on pourrait connaître le temps de vol i selon un N donné et dans ces cas, vérifier la véracité de la conjecture. La difficulté sera de généraliser cette méthode pour pouvoir dire : pour tout N on sait calculer le temps de vol i tel que $U_i(N) = 1$ et ainsi vérifier la conjecture dans tous les cas.

1. Colonne vertébrale en puissance de 2 : N toujours pair

Calculons maintenant un sous ensemble à ce problème.

∀ N ∈ IN, N > 0 et **pair** et tous ses diviseurs (à part le chiffre 1) sont également pairs, on a alors :

$$\begin{aligned}
 U_0(N) &= N = 2^r \\
 U_1(N) &= \frac{U_0(N)}{2} = \frac{2N}{2} \\
 U_2(N) &= \frac{U_1(N)}{2} = \frac{\left(\frac{2N}{2}\right)}{2} \\
 U_3(N) &= \frac{U_2(N)}{2} = \frac{\left(\frac{\left(\frac{2N}{2}\right)}{2}\right)}{2} \\
 &\dots \\
 U_j(N) &= \frac{U_{j-1}(N)}{2} \\
 &\dots \\
 U_i(N) &= 1
 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 U_i(N) &= N \prod_{j=1}^i \frac{1}{2} = 1 \\
 U_i(N) &= \frac{N}{2^i} = \frac{2^r}{2^i} = 2^{r-i} = 1
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 N &= 2^i = e^{i \ln(2)} \\
 \ln(N) &= i \ln(2) \\
 i &= \frac{\ln(N)}{\ln(2)} = \frac{\ln(2^r)}{\ln(2)} = r
 \end{aligned}$$

Dans ce cas (et uniquement dans celui-ci), $U_j(N)$ est strictement décroissante car il y a une division par 2 à chaque étape :

$$\begin{aligned}
 U_j(N) &= \frac{U_{j-1}(N)}{2} \\
 \text{Or : } \frac{U_{j-1}(N)}{2} &< U_{j-1}(N) \\
 \text{Et donc : } U_j(N) &< U_{j-1}(N)
 \end{aligned}$$

Donc si $N = 2^r$ alors le rang, ou temps de vol, i qui détermine lorsque $U_i(N) = 1$ vaut :

$$i = \frac{\ln(N)}{\ln(2)} = r$$

Exemple avec 4096 :

$U_n(N)$	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

De même : $i = \frac{\ln(4096)}{\ln(2)} = 2^{12} = 12$

Vous pouvez tester avec toutes les puissances de 2, car : $N = 2^i$

Mais on n'a, à ce stade, traité qu'une infime partie de $U_i(N) = 1$.

En effet, pour $N \leq 100$ on a traité seulement **7** possibilités : $N = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Et pour $N \leq 1000$ on a traité seulement 10 possibilités : $N = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$ et 512.

On connaît la colonne vertébrale de cette suite où tous les nombres convergent vers 1, si la conjecture est prouvée. Cette colonne vertébrale constitue le plus court chemin, ou le temps de vol le plus court, vers 1.

2. Ensemble des nombres pairs

Le résultat précédent permet une généralisation de l'ensemble des nombres pairs très utiles. En effet, si on pose N_a pair entier positif multiple de N_b impair entier positif :

$$N_a = 2^q N_b, \text{ avec } N_a > 0 \text{ pair, } N_b > 0 \text{ impair et } N_b < N_a$$

Alors on en déduit le vol de N_a en fonction du vol de N_b et inversement :

$$i_a = i_b + q, \text{ et } i_b = i_a - q$$

On a donc le vol de tous les entiers pairs dès qu'on a le vol des entiers impairs inférieurs.

Vérifier la conjecture revient donc à la vérifier uniquement pour les entiers impairs.

On peut donc maintenant faire abstraction de tous les entiers pairs dans nos recherches. On a divisé par deux l'effort à faire et sa résolution.

Pour $N \leq 100$ on n'a plus qu'à traiter 50 valeurs. En fait, 49 puisqu'on a déjà traité $N=1$, soit **51** valeurs déjà connues :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

3. Sous ensemble impair puis toujours pairs

Calculons maintenant un autre sous ensemble à ce problème autour de la colonne vertébrale de puissance de 2.

$\forall N \in \mathbb{N}, N > 0$ et **impair**, tel que :

$$U_0(N) = N = \frac{2^r - 1}{3} : \text{ toujours impair}$$

Remarque : pour que cette division soit entière il faut que **r soit pair**.

Il vient ensuite :

$$U_1(N) = 2^{r-1} : \text{ toujours pair}$$

$$U_r(N) = \dots = U_i(N) = 1$$

D'où $i = r$

Par exemple :

r	N	$U_1(N) \dots U_i(N)$
2	1	$2 \rightarrow 1 \dots$
4	5	$8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \dots$
6	21	$32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \dots$
8	85	$128 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \dots$

$$U_0(N) = N$$

$$U_1(N) = \frac{3N + 1}{2}$$

Soit :

$$U_i(N) = (3N + 1) \prod_{j=1}^i \left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$U_i(N) = \frac{3N + 1}{2^i}$$

En reliant ces 2 égalités, on a :

$$\frac{3N + 1}{2^i} = 1$$

$$3N + 1 = 2^i \text{ ou } N = \frac{2^i - 1}{3}$$

$$3N + 1 = e^{i \ln(2)}$$

$$\ln(3N + 1) = i \ln(2)$$

$$i = \frac{\ln(3N + 1)}{\ln(2)}$$

Dans ce cas (et uniquement celui-ci), $U_j(N)$ est strictement décroissante car il y a une division par 2 à chaque étape (sauf la 1^{ère} qui est en plus x3) :

$$U_j(N) = \frac{U_{j-1}(N)}{2}$$

$$\text{Or : } \frac{U_{j-1}(N)}{2} < U_{j-1}(N)$$

Et donc : $U_j(N) < U_{j-1}(N)$

Donc si $N = \frac{2^r - 1}{3}$, c'est à dire : $3N + 1 = 2^r$ alors le rang, ou temps de vol i , qui détermine lorsque $U_i(N) = 1$ vaut : $i = \frac{\ln(3N+1)}{\ln(2)} = r$

En aparté, on remarque que les solutions de type :

$$N_{p+1} = 4N_p + 1 \text{ avec } N_0 = 1$$

Sont les valeurs de notre équation précédente, à savoir : $1 > 5 > 21 > 85 > \dots$

D'où par itération :

$$N_p = 4^p + \sum_{k=0}^{p-1} 4^k = 4^p + \frac{1 - 4^p}{1 - 4} = \frac{4^{p+1} - 1}{3}$$

Soit par identification :

$$i = r = 2(p + 1)$$

Revenons à nos moutons. Par exemple avec 341 on a :

$U_n(N)$	341	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

De même : $i = \frac{\ln(3 * 341 + 1)}{\ln(2)} = 10$

Vous pouvez tester avec les nombres 5, 21 ou 85 qui vérifient bien l'équation : $N = \frac{2^i - 1}{3}$

Mais on n'a encore, à ce stade, traité qu'une infime partie de $U_i(N) = 1$.

En effet, pour $N \leq 100$ on a traité seulement 3 possibilités supplémentaires : $N = 5, 21, 85$. Soit **54** valeurs en tout :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Et pour $N \leq 1000$ on a traité seulement 4 possibilités supplémentaires : $N = 5, 21, 85$ et 341.

4. 1^{ère} généralisation : N p fois impairs puis r fois pairs

En généralisant le cas précédent, on obtient par récurrence successive le point initial N ci-dessous correspondant à tous les N p fois impairs puis r fois pairs. On a donc juste ajouté des itérations impaires au cas précédent.

$$N = \dots \frac{2 \left(\frac{2 \left(\frac{2 \left(\frac{2(2^r) - 1}{3} \right) - 1}{3} \right) - 1}{3} \right) - 1}{3} \dots$$

$$N = \frac{2^{r+p}}{3^p} - \frac{2^{p-1}}{3^p} - \frac{2^{p-2}}{3^{p-1}} - \dots - \frac{1}{3} = \frac{2^{r+p}}{3^p} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \left(\frac{2}{3}\right)^j$$

$$N = \frac{2^{r+p}}{3^p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p\right)}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)}$$

$$N = \frac{2^{r+p}}{3^p} - 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^p = \left(\frac{2}{3}\right)^p (2^r + 1) - 1$$

$$N = \left(\frac{2}{3}\right)^p (2^r + 1) - 1 \text{ avec } \begin{cases} p \leq r \\ r \text{ impair si } p > 0 \end{cases}$$

$r > p$ car le nombre d'itérations paires doit être supérieur ou égal au nombre d'itérations impaires pour garantir une décroissance. Pour rappel : 1 itération impaire augmente $U_n(N)$ d'environ la moitié $(3N/2 + 1/2)$ et 1 paire le diminue de moitié $(N/2)$. En moyenne avec 1 itération paire ou impaire sur 2, on a une évolution d'environ 0,75 $(3/2 * 1/2 = 3/4)$, soit décroissante. En revanche avec 2 itérations impaires et 1 paire, $U_n(N)$ évolue d'environ 1,12 $(9/4 * 1/2 = 9/8)$, soit croissante divergente.

La divisibilité entière par 3 est possible si :

$$3^p K = 2^r + 1, K > 0 \text{ et impair}$$

Sachant que :

$$2^{2n} - 1 = 3k, \text{ et } 2^{2n+1} + 1 = 3k'$$

Alors, il suffit que :

$$r = 2n + 1$$

Donc si r est impair, la divisibilité entière par 3 est assurée (avec $p > 0$).

De plus, si on pose :

$$r = 3^q m, q \geq 0, m \geq 0 \text{ et impair}$$

Alors la divisibilité entière est possible jusqu'à :

$$3^{q+1}$$

On en déduit ainsi que :

$$0 \leq p \leq q + 1$$

Soit :

$$N = \left(\frac{2}{3}\right)^p (2^{3^q m} + 1) - 1 \text{ avec } \begin{cases} \{q, m, p\} \geq \{0, 0, 0\} \\ p \leq q + 1 \text{ (et } p \leq 3^q m) \\ m \text{ impair si } p > 0 \end{cases}$$

Si $p = 0, r > 0$, on retrouve bien : $N = (2^r + 1) - 1 = 2^r$

En outre, si $p = 1, r > 2$ et impair, on retrouve bien : $N = \frac{2}{3}(2^r + 1) - 1 = \frac{2^{r+1}-1}{3}$

Si $p > 0, r > 2$ et impair, N est p fois impairs puis r fois pairs, d'où :

$$i = p + r$$

Ou : $i = p + 3^q m$

On peut également se prévaloir de p de la façon suivante :

$$p = i - r$$

$$N = \left(\frac{2}{3}\right)^{i-r} (2^r + 1) - 1 \text{ avec } \begin{cases} i \leq 2r \\ r \text{ impair si } i > r \end{cases}$$

D'où le vol i s'exprime avec :

$$i = \frac{\ln\left(\frac{N+1}{2^r+1}\left(\frac{2}{3}\right)^r\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\ln(N+1) - \ln(2^r+1)}{\ln(2) - \ln(3)} + r$$

Si r est grand :

$$i \approx \frac{\ln\left(\frac{N+1}{3^r}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\ln(N+1) - r \ln(3)}{\ln(2) - \ln(3)} \text{ si } r \gg 1$$

Pour illustrer ces résultats, voici tous les nombres N avec $p < 5$ et $r < 50$ dont on sait calculer directement le vol i :

p	r	N	i	p	r	N	i
0	0	1	0	1	3	5	4
0	1	2	1	1	5	21	6
0	2	4	2	1	7	85	8
0	3	8	3	1	9	341	10
0	4	16	4	1	11	1 365	12
0	5	32	5	1	13	5 461	14
0	6	64	6	1	15	21 845	16
0	7	128	7	1	17	87 381	18
0	8	256	8	1	19	349 525	20
0	9	512	9	1	21	1 398 101	22
0	10	1 024	10	1	22	5 592 405	24
0	11	2 048	11	1	25	22 369 621	26

p	r	N	i	p	r	N	i
0	12	4 096	12	1	27	89 478 485	28
0	13	8 192	13	1	29	357 913 941	30
0	14	16 384	14	1	31	1 431 655 765	32
0	15	32 768	15	1	33	5 726 623 061	34
0	16	65 536	16	1	35	22 906 492 245	36
0	17	131 072	17	1	37	91 625 968 981	38
0	18	262 144	18	1	39	366 503 875 925	40
0	19	524 288	19	1	41	1 466 015 503 701	42
0	20	1 048 576	20	1	43	5 864 062 014 805	44
0	21	2 097 152	21	1	45	23 456 248 059 221	46
0	22	4 194 304	22	1	47	93 824 992 236 885	48
0	23	8 388 608	23	1	49	375 299 968 947 541	50
0	24	16 777 216	24				
0	25	33 554 432	25	2	3	3	5
0	26	67 108 864	26	2	9	227	11
0	27	134 217 728	27	2	15	14 563	17
0	28	268 435 456	28	2	21	932 067	23
0	29	536 870 912	29	2	27	59 652 323	29
0	30	1 073 741 824	30	2	33	3 817 748 707	35
0	31	2 147 483 648	31	2	39	244 335 917 283	41
0	32	4 294 967 296	32	2	45	15 637 498 706 147	47
0	33	8 589 934 592	33				
0	34	17 179 869 184	34	3	9	151	12
0	35	34 359 738 368	35	3	27	39 768 215	30
0	36	68 719 476 736	36	3	45	10 424 999 137 431	48
0	37	137 438 953 472	37				
0	38	274 877 906 944	38	4	27	26 512 143	31
0	39	549 755 813 888	39				
0	40	1 099 511 627 776	40				
0	41	2 199 023 255 552	41				
0	42	4 398 046 511 104	42				
0	43	8 796 093 022 208	43				
0	44	17 592 186 044 416	44				
0	45	35 184 372 088 832	45				
0	46	70 368 744 177 664	46				
0	47	140 737 488 355 328	47				
0	48	281 474 976 710 656	48				
0	49	562 949 953 421 312	49				

On a étendu le champ des résultats, mais on est encore loin de résoudre tous les nombres de la conjecture de Syracuse.

En effet, pour $N \leq 100$ on a traité une seule valeur supplémentaire pour $N=3$, soit seulement **55** possibilités, incluant toutes celles des chapitres précédents.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

En effet, pour $N \leq 1000$ on a traité seulement 507 possibilités, incluant toutes celles des chapitres précédents.

En revanche, pour ces valeurs de N dont on sait déjà calculer le temps de vol i , on sait également les calculer pour leurs multiples pairs en ajoutant 1 à i pour un multiple de 2, 2 pour un multiple de 4, 3 pour un multiple de 8, etc.

C'est-à-dire pour $2N, 4N, 8N...2^r N, \forall r > 0$. De ce fait si on connaît le vol i de $N=3$, on connaît celui de $N=6$: celui de $N=3$ ajouté de 1 ; et celui de $N=12$ devient celui de $N=3$ ajouté de 2, etc.

Cela permet de remplir notre grille des $N \leq 100$ avec en tout 22 possibilités traitées.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On n'a pas traité les nombres dont la parité fluctue plus d'une fois. Or, par observation, cela concerne la majorité des nombres. On étudiera ultérieurement les proportions dans \mathbb{N} par nombre de changement de parité.

5. 2^{nde} généralisation : N quelconque

En reprenant le cas précédent, on ajoute entre chaque itération impaire, R_k itérations paires. On obtient par récurrence successive le nouveau point initial N suivant :

$$N = \dots 2^{R_5} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{R_4} \left(2^{R_3} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{R_2} (2^{R_1} + 1) - 1 \right) + 1 \right) - 1 \right) \dots$$

$$N = \dots \frac{2^{R_4+R_5}}{3^{R_4}} \left(\frac{2^{R_2+R_3}}{3^{R_2}} (2^{R_1} + 1) - 2^{R_3} + 1 \right) - 2^{R_5} \dots$$

$$N = \frac{2^{\sum_{k=1}^p R_k}}{3^{\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} R_{2k}}} \dots + \frac{2^{R_2+R_3+R_4+R_5}}{3^{R_2+R_4}} - \frac{2^{R_3+R_4+R_5}}{3^{R_4}} + \frac{2^{R_4+R_5}}{3^{R_4}} - 2^{R_5} \dots$$

Que l'on peut écrire, soit :

$$N = \dots + \frac{2^{R_2+R_3+R_4+R_5}}{3^{R_2+R_4}} (2^{R_1} + 1) - \frac{2^{R_4+R_5}}{3^{R_4}} (2^{R_3} - 1) - 2^{R_5} \dots$$

Ou soit :

$$N = \frac{2^{\sum_{k=1}^p R_k}}{3^{\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} R_{2k}}} \dots + \frac{2^{R_3+R_4+R_5}}{3^{R_2+R_4}} (2^{R_2} - 3^{R_2}) + \frac{2^{R_5}}{3^{R_4}} (2^{R_4} - 3^{R_4}) \dots$$

p représente le nombre de transitions paires à impaires au cours d'un vol complet de N jusqu'à 1. De plus :

$$p \text{ est toujours impair et } \begin{cases} R_p > 0 \text{ si } N \text{ pair} \\ R_p = 0 \text{ si } N \text{ impair} \end{cases}$$

On a donc finalement :

$$N = \frac{2^{\sum_{k=2}^p R_k}}{3^{\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} R_{2k}}} (2^{R_1} + 1) - 2^{R_p} - \sum_{k=2}^{\frac{p-1}{2}} \frac{2^{\sum_{j=2k}^p R_j}}{3^{\sum_{j=k}^{\frac{p-1}{2}} R_{2j}}} (2^{R_{2k-1}} - 1) \text{ avec } \begin{cases} p > 0 \text{ et impair} \\ R_q \geq 1 \text{ avec } q > 0 \\ R_1 \geq 3 \text{ et impair} \end{cases}$$

Soit :

$$N = \frac{2^{\sum_{k=1}^p R_k}}{3^{\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} R_{2k}}} + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{2^{\sum_{j=2k+1}^p R_j}}{3^{\sum_{j=k}^{\frac{p-1}{2}} R_{2j}}} (2^{R_{2k}} - 3^{R_{2k}}) \text{ avec } \begin{cases} p > 0 \text{ et impair} \\ R_q \geq 1 \text{ avec } q > 0 \\ R_1 \geq 3 \text{ et impair} \end{cases}$$

$$\text{Et : } i = \sum_{k=1}^p R_k$$

$R_1 \geq 3$ car tous les vols observés finissent par les 3 itérations paires : $8 > 4 > 2 > 1$.

R_1 est impair car pour qu'il y ait une transition de parité différente (impaire) il faut que :

$$\frac{2(2^{R_1}) - 1}{3} \text{ soit entier}$$

Sachant que $2^{2n} = 3k + 1 \rightarrow \frac{2(2^{R_1}) - 1}{3} = \frac{2^{2n} - 1}{3} = k$ est entier $\rightarrow R_1 = 2n - 1$: toujours impair

On voit donc que les itérations impaires (indices R_{2k}) jouent un rôle prédominant dans la suite de Syracuse.

En calculant la valeur de N, on vient de définir, et en une seule équation cette fois-ci, la suite de Syracuse rétrograde itérée modulo 2. En effet, on l'a, via une autre approche, déjà définie dans cet ouvrage pour tracer l'arbre de Syracuse afin de remonter la suite. Cela produit deux équations, une pour les valeurs paires et l'autre pour les valeurs impaires. Ici, on a maintenant une seule équation pour monter ou descendre l'arbre de Syracuse. En revanche, cette équation comporte plusieurs paramètres R que l'on ne peut pas choisir au hasard du fait de la contrainte de divisibilité entière. On a donc ajouté volontairement des contraintes ou critères supplémentaires pour modéliser N.

Attention contrairement à ce qu'on pourrait penser, l'inégalité suivante est fautive dans certains cas. Elle est néanmoins vérifiée dans la plupart des cas :

$$\text{Proposition fautive : } \sum_{q=1}^{\frac{p-1}{2}} R_{2q} \geq \sum_{q=0}^{\frac{p-1}{2}} R_{2q+1}$$

Cela revient à dire que, dans la majorité des cas, il y a davantage d'itérations paires que d'impaires. Ce qui semble évident pour redescendre à 1. Or il existe prêt de 40% des cas où les itérations impaires sont plus nombreuses et la trajectoire atteint pourtant 1 au bout d'un certain rang. A retenir.

On peut également écrire N avec son vol i sous cette forme :

$$N = \frac{2^i}{3^{\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} R_{2k}}} + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{2^{i-\sum_{j=1}^{2k} R_j}}{3^{\sum_{j=k}^{\frac{p-1}{2}} R_{2j}}} \text{ avec } \begin{cases} p > 0 \text{ et impair} \\ R_q \geq 1 \text{ avec } q > 0 \\ R_1 \geq 3 \text{ et impair} \end{cases}$$

En aparté, si $R_1 = r$ et $R_k = 1 \forall k > 1$, alors on trouve le résultat suivant :

$$\begin{aligned} N &= \frac{2^{r+p-1}}{3^{\frac{p-1}{2}}} + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{2^{p-2k}}{3^{\frac{p+1}{2}-k}} (2-3) = \frac{2^{r+p-1}}{3^{\frac{p-1}{2}}} - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{2^{p-2k}}{3^{\frac{p+1}{2}-k}} = \frac{2^{r+p-1}}{3^{\frac{p-1}{2}}} - \frac{2^p}{3^{\frac{p+1}{2}}} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{2^{-2k}}{3^{-k}} \\ &= \frac{2^{r+p-1}}{3^{\frac{p-1}{2}}} - \frac{2^p}{3^{\frac{p+1}{2}}} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{2^{r+p-1}}{3^{\frac{p-1}{2}}} - \frac{2^p}{3^{\frac{p+1}{2}}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{p-1}{2}}}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= \frac{2^{r+p-1}}{3^{\frac{p-1}{2}}} - \frac{2^p}{3^{\frac{p+1}{2}-1}} \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{p-1}{2}}\right) = \frac{2^p}{3^{\frac{p-1}{2}}} \left(2^{r-1} - 1 + \frac{3^{\frac{p-1}{2}}}{2^{p-1}}\right) = \frac{2^p}{3^{\frac{p-1}{2}}} (2^{r-1} - 1) + 2 \end{aligned}$$

$$\text{Et : } i = \sum_{k=1}^p R_k = r + p - 1$$

$$\text{Ainsi si : } N = \frac{2^p}{3^{\frac{p-1}{2}}} (2^{r-1} - 1) + 2 \text{ alors } i = r + p - 1$$

Cela correspond à un vol qui passe sans arrêt d'une valeur paire à impaire jusqu'à atteindre une puissance de 2 r fois.

Voici un tableau avec quelques exemples pour ces N particuliers :

p	1						3				5		7
r=R1	1	2	3	4	5	6	3	5	7	9	7	13	19
N	2	4	8	16	32	64	10	42	170	682	226	14 562	1 242 754
i=p+r-1	1	2	3	4	5	6	5	7	9	11	11	17	25

Par exemple en prenant p=3 et r=3 on obtient bien :

$$N = \frac{2^3}{3^1} (2^2 - 1) + 2 = \frac{8}{3} \cdot 3 + 2 = 10$$

$$i = 3 + 3 - 1 = 5$$

Ce qui se vérifie simplement par :

N=10 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1 d'où i=5.

La question est maintenant, quelles sont les conditions pour que la division par 3 dans l'équation de N soit entière ? Pour cela, reprenons notre équation de N et mettons-la sous le même dénominateur :

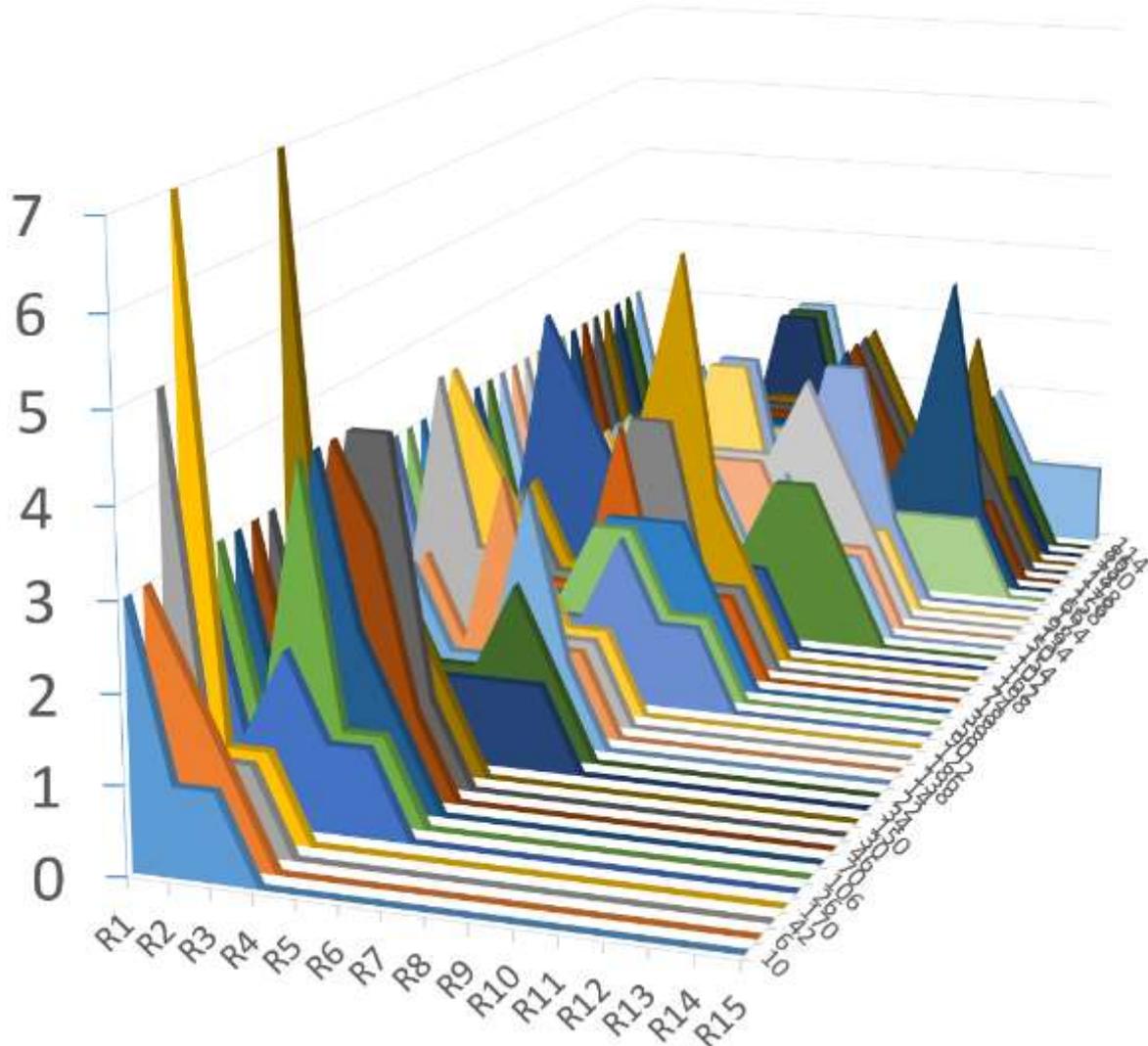
$$N = \frac{1}{3^{\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} R_{2k}}} \left(2^{\sum_{k=1}^p R_k} + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} 2^{\sum_{j=2k+1}^p R_j} 3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} R_{2j} - \sum_{j=k}^{\frac{p-1}{2}} R_{2j}} (2^{R_{2k}} - 3^{R_{2k}}) \right)$$

$$\rightarrow N = \frac{1}{3^{\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} R_{2k}}} \left(2^{\sum_{k=1}^p R_k} + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} 2^{\sum_{j=2k+1}^p R_j} 3^{\sum_{j=1}^{k-1} R_{2j}} (2^{R_{2k}} - 3^{R_{2k}}) \right)$$

$$\rightarrow N = \frac{1}{3^{\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} R_{2k}}} \left(2^{\sum_{k=1}^p R_k} + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(2^{\sum_{j=2k}^p R_j} 3^{\sum_{j=1}^{k-1} R_{2j}} - 2^{\sum_{j=2k+1}^p R_j} 3^{\sum_{j=1}^k R_{2j}} \right) \right)$$

Malheureusement, la divisibilité par 3 de cette équation est ardue. Il n'est donc pas possible de choisir les indices R garantissant une valeur de N entière. C'est un grand problème.

On trace ci-dessous à partir du tableau précédent le graphique suivant :



On voit bien le nombre de changement de parité (axe horizontal) et leur durée (axe vertical). Mais nous avons préalablement ordonné les valeurs de N de départ (axe de profondeur), si bien qu'on observe les vols avec le moins de changements de parité devant, et avec le plus au fond. On observe de nouveau l'aspect chaotique de la suite de Syracuse sous un autre aspect.

Le tableau précédent permet de remplir notre grille des $N \leq 100$ avec en tout **88** possibilités traitées. On a ajouté (fond jaune ci-dessous) 33 valeurs. Seules 12 valeurs de N ont des vols contenant plus de 15 transitions de parité.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Pour avoir un résultat exact, on doit maintenant enlever les doubles (pairs) des valeurs impaires que l'on n'a pas traitées. Cela nous donne finalement **84** possibilités réellement connues et 16 inconnues :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Avec la correspondance des vols i suivante :

0	1	5	2	4	6	11	3	13	5
10	7	7	12	12	4	9	14	14	6
6	11	11	8	16	8	70	13	13	13
67	5	18	10	10	15	15	15	23	7
69	7	20	12	12	12	66	9	17	17
17	9	9	71	71	14	22	14	22	14
14	68	68	6	19	19	19	11	11	11
65	16	73	16	11	16	16	24	24	8
16	70	70	8	8	21	21	13	21	13
59	13	13	67	67	10	75	18	18	18

On observe bien dans ce tableau les 16 vols (cases foncées) les plus longs pour $N \leq 100$.

On a de nouveau étendu le champ des résultats, mais on n'a rien prouvé en termes de convergence certaine vers 1 de la conjecture. De plus, les itérations R_k et p sont prises de manière arbitraire pour calculer N et non l'inverse en partant d'un N quelconque. Ainsi, malgré un résultat poussé, qui prend en compte tous les nombres de l'espace \mathbb{N} , il n'est, à ce stade, pas possible de conclure.

Chercher le rang du vol i pour tout N tel que : $U_i(N) = 1$,
Revient à chercher le rang m pour tout N tel que : $U_m(N) = 2^r$,
Puisqu'à ce rang r, on vérifie dans tous les cas la convergence vers le cycle infini 2,1,2,1...
Et ainsi : $i = m + r$ avec $m < i$ et $r > 0$

4. Transitions : conditions de changement de parité

On va s'intéresser aux conditions de changement de parité de la suite de Syracuse simplifiée. Cela permettra de mieux appréhender les vols selon le nombre initial N .

1. n fois pairs / n fois impairs

Tout d'abord on va étudier les 2 parties de la suite.

On pose pour la **partie paire** :

$$P_0(N) = N > 0 \text{ et } P_{n+1}(N) = \frac{P_n(N)}{2}$$

Par itération, cette suite donne :

$$P_n(N) = \dots \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{N}{2} \right) \right) \right) \dots$$

$$P_n(N) = \frac{N}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{N}{2^n} \right) = 0, \forall N$$

Suite décroissante qui converge vers 0.

On pose pour la **partie impaire** :

$$I_0(N) = N > 0 \text{ et } I_{n+1}(N) = \frac{3I_n(N) + 1}{2}$$

Par itération, cette suite donne :

$$I_n(N) = \dots \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} \left(\frac{3N}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \dots$$

$$I_n(N) = \left(\frac{3}{2} \right)^n N + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2} \right)^j$$

$$I_n(N) = \left(\frac{3}{2} \right)^n N + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2} \right)^n}{1 - \frac{3}{2}} \right)$$

$$I_n(N) = \left(\frac{3}{2} \right)^n N - 1 + \left(\frac{3}{2} \right)^n$$

$$I_n(N) = \left(\frac{3}{2} \right)^n (N + 1) - 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^n (N + 1) - 1 \right) = +\infty, \forall N$$

Suite croissante qui diverge.

Sauter des étapes

Cette équation est tout à fait surprenante. Elle permet de changer un nombre initialement en puissance de 2 en puissance de 3. Voici un exemple pour le visualiser :

$$\text{Soit } N = 2^n k - 1 \text{ avec } k > 0 \text{ et impair}$$

$$\rightarrow I_n(N) = \left(\frac{3}{2}\right)^n (2^n k - 1 + 1) - 1 = 3^n k - 1 \text{ et } I_{n+1}(N) = \frac{3^{n+1} k - 1}{2}$$

On a donc changé en n itérations la puissance de 2 en puissance de 3. Cela permet de sauter des étapes quand plusieurs nombres impairs se succèdent. Voici un exemple chiffré pour comprendre cette méthode. Prenons N=15 :

On ajoute 1, on cherche les puissances de 2 et on retranche 1 :

$$N = (15 + 1) - 1 = 16 - 1 = 2^4 - 1$$

On remplace le 2 par 3 et on divise par 2 pour trouver le rang 5 (nombre à la puissance +1 dans N) :

$$I_5(N) = \frac{3^4 - 1}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

Pair, donc on divise par 2 jusqu'à un nombre impair :

$$I_6(N) = 20$$

$$I_7(N) = 10$$

$$I_8(N) = 5$$

De même, on ajoute 1, on cherche les puissances de 2 et on retranche 1 :

$$I_8(N) = (5 + 1) - 1 = 6 - 1 = 2 \cdot 3 - 1$$

On remplace le 2 par 3 et on divise par 2 pour trouver le rang 10 (rang courant 8 + nombre à la puissance (1) +1 dans $I_8(N)$) :

$$I_{10}(N) = \frac{3 \cdot 3 - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Pair, donc on divise par 2 jusqu'à un nombre impair :

$$I_{11}(N) = 2$$

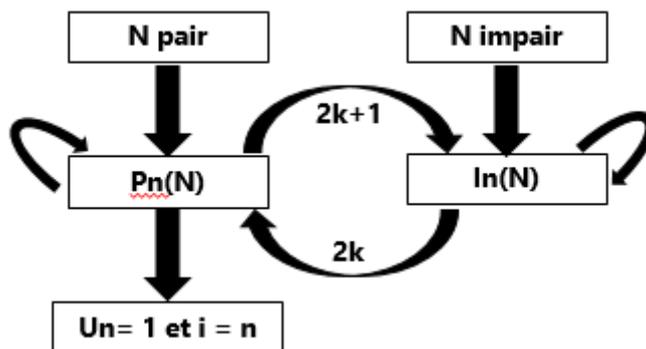
$$I_{12}(N) = 1$$

Donc i=12 mais on n'a effectué que 7 itérations (calculs) au lieu des 12 requises. Soit ici une économie de calcul pour un ordinateur de **42%** ! $\left(= \frac{12-7}{12} = \frac{5}{12}\right)$.

~

Lorsque N ou $U_n(N)$ est pair, la suite de Syracuse « utilise » la suite $P_n(N)$ une ou plusieurs fois jusqu'à obtenir un nombre impair ou le chiffre final 1. Ensuite $U_n(N)$ étant maintenant impair, la suite de Syracuse use la suite $I_n(N)$ une ou plusieurs fois jusqu'à obtenir un nombre pair, etc.

On a donc les séquences représentées dans le graphique suivant :



On va rechercher les moments de ces transitions de la suite : respectivement de pair à impair et d'impair à pair.

2. Transition de pair(s) à impair

Prenons un N toujours pair et itérons ce nombre jusqu'à ce qu'il ne soit plus pair. On a donc pour passer d'un nombre pair à un impair, l'équation suivante :

$$U_n(N) = P_n(N) = \frac{N}{2^n} = 2k + 1, \forall N > 0 \text{ et pair}, k \geq 0$$

$$N = 2^n(2k + 1)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{N}{2k + 1}\right)}{\ln(2)}$$

$$n = \frac{\ln(N) - \ln(2k + 1)}{\ln(2)}$$

A noter que dû à la décroissance de cette suite, on a :

$$N \geq 2(2k + 1)$$

Pour k=0, on retrouve le cas particulier des puissances de 2 suivant :

$$U_n(N) = P_n(N) = \frac{N}{2^n} = 1, \forall N > 0 \text{ et pair}$$

$$N = 2^n$$

$$n = \frac{\ln(N)}{\ln(2)} = i$$

Voici un tableau avec quelques résultats :

N	k	n	$U_n(N)$
2	0	1	1
4	0	2	1
6	1	1	3
8	0	3	1
10	2	1	5
12	1	2	3
14	3	1	7
16	0	4	1
18	4	1	9
20	2	2	5
22	5	1	11
24	1	3	3
26	6	1	13
28	3	2	7
30	7	1	15
32	0	5	1

Imaginons qu'il ne s'agisse pas de N (valeur choisie de départ de la suite) mais d'une section à partir d'un rang n, de $U_n(N)$ à $U_{n+m}(N)$ avec $m > 0$, toujours paire. On retrouve le même résultat

mais étendu à des tronçons de suites pairs pour différents N de départ. On a ainsi la notation suivante :

$$U_{n+m}(N) = P_m(U_n(N)) = \frac{U_n(N)}{2^m} = 2k + 1, \forall U_n(N) > 0 \text{ et pair}, k \geq 0$$

$$U_n(N) = 2^m(2k + 1)$$

$$m = \frac{\ln(U_n(N)) - \ln(2k + 1)}{\ln(2)}$$

On a donc calculé la durée de vol pair à partir d'un rang n.

On a donc une forme connue de $U_n(N)$ (ou de N comme vue précédemment) pour sauter m rangs d'un seul coup. C'est-à-dire :

$$\text{si } U_n(N) = 2^m(2p + 1) \text{ alors } U_{m+n}(N) = 2p + 1 \text{ et } m = \frac{\ln(U_n(N)) - \ln(2p + 1)}{\ln(2)} \forall p \geq 0$$

$$\text{Et si } N = 2^n(2p + 1) \text{ alors } U_n(N) = 2p + 1 \text{ et } n = \frac{\ln(N) - \ln(2p + 1)}{\ln(2)} \forall p \geq 0$$

On va maintenant s'intéresser au cas où k est impair, c'est-à-dire :

$$U_n(N) = P_n(N) = \frac{N}{2^n} = 2k + 1 = 2(2p + 1) + 1 = 4p + 3, \forall N > 0 \text{ et pair}, p \geq 0$$

$$N = 2^n(4p + 3)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{N}{4p + 3}\right)}{\ln(2)}$$

$$n = \frac{\ln(N) - \ln(4p + 3)}{\ln(2)}$$

Ce cas est à garder en tête car il constitue la source de la possible divergence de la suite et ainsi de la difficulté à prouver la convergence.

3. Transition d'impair(s) à pair

Pour passer d'un nombre impair à un pair, il suffit de vérifier :

$$U_n(N) = I_n(N) = \left(\frac{3}{2}\right)^n (N + 1) - 1 = 2k, \forall N > 0 \text{ et impair}, k \geq 1$$

$$3^n(N + 1) = 2^n(2k + 1)$$

$$N = \left(\frac{2}{3}\right)^n (2k + 1) - 1$$

$$n = \frac{\ln(2k + 1) - \ln(N + 1)}{\ln(3) - \ln(2)}$$

On peut identifier des cas particuliers qui permettent de faire abstraction de k.

Exemple 1, si on choisit :

$$n = \frac{\ln(2k + 1)}{\ln(3)} = \frac{\ln(N + 1)}{\ln(2)}$$

Alors :

$$U_n(N) = I_n(N) = 2k = 3^n - 1$$

$$k = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$N = 2^n - 1$$

Cet exemple concerne toutes les puissances de 2 moins l'unité.

Exemple 2, si on choisit :

$$p = \frac{N + 1}{2} = \frac{2k + 1}{3}, p > 0 \text{ et impair (pour que } k \text{ soit entier)}$$

Alors :

$$n = 1$$

$$U_n(N) = I_n(N) = 2k = 3p - 1$$

$$k = \frac{3p - 1}{2}$$

$$N = 2p - 1$$

Cet exemple concerne un nombre impair sur deux dans IN. Ce qui veut également dire qu'un **impair sur deux change de parité au bout d'un seul passage** dans la suite de Syracuse (car ici n=1) ! cf. le chapitre consacré aux trajectoires pour s'en convaincre.

Exemple 3, on tente une généralisation avec :

$$U_n(N) = 2k = 3^q p - 1, \text{ avec } q > 0, p > 0 \text{ et } p \text{ impair}$$

$$n = q \text{ et } k = \frac{3^q p - 1}{2}$$

Si N est de la forme :

$$N = 2^q p - 1 : \text{ impair avec } q > 0, p > 0 \text{ et } p \text{ impair}$$

$$U_0(N) = N = 2^q p - 1$$

$$U_1(N) = 3 \cdot 2^{q-1} p - 1 : \text{ impair}$$

$$U_2(N) = 3^2 2^{q-2} p - 1 : \text{ impair}$$

$$U_n(N) = 3^n 2^{q-n} p - 1 : \text{ impair, avec } q < n$$

$$Uq(N) = 3^q p - 1 = 2k : \text{pair, avec } q = n$$

$$n = q = \frac{\ln(N+1) - \ln(p)}{\ln(2)} \text{ et } k = \frac{3^q p - 1}{2} = \frac{(3^q - 2^q)p + N}{2}$$

Exemple 4, on tente une généralisation avec l'ensemble des nombres premiers :

$$Un(N) = 2k = 3^{n+b} \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \dots - 1$$

$$N = 2^n \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \dots - 1$$

Alors :

$$n = \frac{\ln(N+1) - b \cdot \ln(3) - c \cdot \ln(5) - d \cdot \ln(7) - e \cdot \ln(11) - \dots}{\ln(2)}$$

Cet exemple inclut tous les nombres impairs dans IN mais est peu exploitable dû à ses nombreux paramètres (exposants non définis). Pour illustrer, voici un tableau représentant ces résultats :

N	k	n	$U_n(N)$	p	Exemple
1	1	1	2	1	1 et 2
3	4	2	8		1
5	4	1	8	3	2
7	13	3	26		1
9	7	1	14	5	2
11	13	2	26		3 et 4
13	10	1	20	7	2
15	40	4	80		1
17	13	1	26	9	2
19	22	2	44		3 et 4
21	16	1	32	11	2
23	40	3	80		3 et 4
25	19	1	38	13	2
27	31	2	62		3 et 4
29	22	1	44	15	2
31	121	5	242		1
33	25	1	50	17	2

Imaginons qu'il ne s'agisse pas de N (valeur choisie de départ de la suite) mais d'une section à partir d'un rang n, de $U_n(N)$ à $U_{n+m}(N)$ avec $m > 0$, toujours impaire. On retrouve le même résultat mais étendu à des tronçons de suites impaires pour différents N de départ. On a ainsi la notation suivante :

$$U_{n+m}(N) = I_m(U_n(N)) = \left(\frac{3}{2}\right)^m (U_n(N) + 1) - 1 = 2k, \forall U_n(N) > 0 \text{ et impair, } k \geq 1$$

$$U_n(N) = \left(\frac{2}{3}\right)^m (2k + 1) - 1$$

$$m = \frac{\ln(2k + 1) - \ln(U_n(N) + 1)}{\ln(3) - \ln(2)}$$

On a donc calculé la durée de vol impaire à partir d'un rang n.

On a donc une forme connue de $U_n(N)$ (ou de N comme vue précédemment) pour sauter m rangs d'un seul coup. C'est-à-dire :

$$\text{si } U_n(N) = \left(\frac{2}{3}\right)^m (2k + 1) - 1 \text{ alors } U_{m+n}(N) = 2k \text{ et } m = \frac{\ln(2k + 1) - \ln(U_n(N) + 1)}{\ln(3) - \ln(2)}$$

$$\text{Et si } N = \left(\frac{2}{3}\right)^n (2k + 1) - 1 \text{ alors } U_n(N) = 2k \text{ et } n = \frac{\ln(2k + 1) - \ln(N + 1)}{\ln(3) - \ln(2)}$$

De même, on obtient au rang n à m les 4 cas particuliers suivants :

$$\text{si } U_n(N) = 2^m - 1 \text{ alors } U_{n+m}(N) = 3^m - 1 \text{ et } m = \frac{\ln(U_n(N) + 1)}{\ln(2)}$$

$$\text{si } U_n(N) = 2p - 1 \text{ alors } U_{n+m}(N) = 3p - 1 \text{ et } m = 1 \text{ avec } p > 0 \text{ et impair}$$

$$\text{si } U_n(N) = 2^m p - 1 \text{ alors } U_{n+m}(N) = 3^m p - 1 \text{ et } m = \frac{\ln(U_n(N) + 1) - \ln(p)}{\ln(2)} \text{ avec } p > 0 \text{ et impair}$$

$$\text{si } U_n(N) = 2^m \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \dots - 1 \text{ alors } U_{n+m}(N) = 3^{m+b} \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \dots - 1$$

$$\text{et } m = \frac{\ln(U_n(N) + 1) - b \cdot \ln(3) - c \cdot \ln(5) - d \cdot \ln(7) - e \cdot \ln(11) - \dots}{\ln(2)}$$

Pour rappel, on avait identifié ci-dessus les 4 cas particuliers suivants :

$$\text{si } N = 2^n - 1 \text{ alors } U_n(N) = 3^n - 1 \text{ et } n = \frac{\ln(N + 1)}{\ln(2)}$$

$$\text{si } N = 2p - 1 \text{ alors } U_n(N) = 3p - 1 \text{ et } n = 1 \text{ avec } p > 0 \text{ et impair}$$

$$\text{si } N = 2^n p - 1 \text{ alors } U_n(N) = 3^n p - 1 \text{ et } n = \frac{\ln(N + 1) - \ln(p)}{\ln(2)} \text{ avec } p > 0 \text{ et impair}$$

$$\text{si } N = 2^n \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \dots - 1 \text{ alors } U_n(N) = 3^{n+b} \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \dots - 1$$

$$\text{et } n = \frac{\ln(N + 1) - b \cdot \ln(3) - c \cdot \ln(5) - d \cdot \ln(7) - e \cdot \ln(11) - \dots}{\ln(2)}$$

4. Transition de parité à une autre : méthode rapide de calcul d'un vol

Vous trouverez ci-dessous 2 tableaux pour résumer les différents résultats de ce chapitre.

Les transitions à partir d'un nombre de départ N pair ou impair de la suite sont les suivantes :

Transition à partir de N	N	$U_n(N)$	p	n
De Pair(s) vers Impair	$2^n(2p + 1)$	$2p+1$	≥ 0	$\frac{\ln(N) - \ln(2p + 1)}{\ln(2)}$
	Cas particulier : $2^n(4p + 3)$	$4p+3$	≥ 0	$\frac{\ln(N) - \ln(4p + 3)}{\ln(2)}$
D'Impair(s) vers Pair	$\left(\frac{2}{3}\right)^n (2p + 1) - 1$	$2p$	≥ 1	$\frac{\ln(N + 1) - \ln(2p + 1)}{\ln(2) - \ln(3)}$
	Cas particulier : $2^n(2p + 1) - 1$	$3^n(2p + 1) - 1$	≥ 0	$\frac{\ln(N + 1) - \ln(2p + 1)}{\ln(2)}$

Les transitions à partir d'un rang n pair ou impair jusqu'au rang m de la suite sont les suivantes :

Transition à partir de $U_n(N)$	$U_n(N)$	$U_{n+m}(N)$	p	m
De Pair(s) vers Impair	$2^m(2p + 1)$	$2p+1$	≥ 0	$\frac{\ln(U_n(N)) - \ln(2p + 1)}{\ln(2)}$
	Cas particulier : $2^m(4p + 3)$	$4p+3$	≥ 0	$\frac{\ln(U_n(N)) - \ln(4p + 3)}{\ln(2)}$
D'Impair(s) vers Pair	$\left(\frac{2}{3}\right)^m (2p + 1) - 1$	$2p$	≥ 1	$\frac{\ln(U_n(N) + 1) - \ln(2p + 1)}{\ln(2) - \ln(3)}$
	Cas particulier : $2^m(2p + 1) - 1$	$3^m(2p + 1) - 1$	≥ 0	$\frac{\ln(U_n(N) + 1) - \ln(2p + 1)}{\ln(2)}$

On remarque que les formes finales de ces transitions des $U_n(N)$ ou $U_{n+m}(N)$ ne sont pas équivalentes aux formes de départs. C'est-à-dire que par exemple, une transition de pair(s) à impair ne donne pas une forme de $U_n(N)$ ou $U_{n+m}(N)$ qui correspond à une forme de départ d'une transition suivante d'impair(s) à pair. De ce fait, on ne peut pas simplement incorporer les transitions finales dans les transitions de départ dans les deux cas de parité.

Voici ci-dessous les relations pour passer d'une transition de parité à une autre jusqu'à obtenir 1. Ce tableau est à parcourir dans le sens des aiguilles d'une montre.

$U_n(N)$		$U_{n+m}(N)$
$2^m(2p' + 1)$	Pair(s) → Impair	$2p'+1$, si $p'=0$ FIN car $U_{n+m}(N) = 1$
Si $p = 2^{m-1}(2p' + 1)$	↑ ↓	Si $p' = \frac{2^{n-1}}{3^n}(2p + 1) - 1$
$2p$	Pair ← Impair(s)	$\left(\frac{2}{3}\right)^n (2p + 1) - 1$

Voici les étapes pour parcourir la suite au plus vite à l'aide du tableau ci-dessus jusqu'à obtenir la valeur 1 à partir d'une valeur de départ N choisie :

1. Choisissez une valeur N arbitraire >0 ;
2. Selon la parité de N positionnez-vous sur le tableau dans l'une des 2 cases possibles :
 - a. En haut à gauche si N est pair,
 - b. En bas à droite si N est impair ;
3. Calculer les valeurs de n (ou m) et p (ou p') qui correspond à la valeur de votre N choisi ;
4. Tourner une fois dans le sens des aiguilles d'une montre comme l'indique les flèches (à gauche ou à droite selon votre position) pour vous rendre à la case suivante qui vous donne directement votre nouvel $U_n(N)$;
 - a. Si vous êtes en haut à droite et que $p'=0$ alors vous avez fini et votre vol correspond à l'addition de tous vos vols intermédiaires (parcours horizontal uniquement) de ce tableau (cf. les 2 tableaux précédents pour les calculs des valeurs de n et m) ;
5. Calculer n (ou m) et p (ou p') en fonction de p' (ou p) selon l'équation de la case du dessus (ou du dessous selon votre position) ;
6. Tourner une fois dans le sens des aiguilles d'une montre comme l'indique les flèches (tout en haut ou tout en bas selon votre position) pour vous rendre à la case suivante ;
7. Calculer votre nouvel $U_n(N)$ correspondant à la case ou vous vous trouvez ;
8. Retourner à l'étape 4.

On a construit une méthode pour parcourir la suite de Syracuse rapidement, en sautant les parités successives identiques, tout en calculant les vols intermédiaires. Arrivé à 1 il suffit d'additionner ces vols pour connaître i.

Cette méthode est intéressante pour les nombres ayant de longs tronçons de même parité. Dans le cas d'un nombre qui change fréquemment de parité jusqu'à 1, le calcul est plus fastidieux car, comme on l'avait identifié plus haut, le passage d'une transition de parité à une autre n'est pas direct et demande un calcul de p (ou p') et n ou (m).

Prenons un exemple avec $N=30$:

La suite est la suivante : $N=30 > 15 > 23 > 35 > 53 > 80 > 40 > 20 > 10 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1$.

Ce qui nous donne un vol $i=13$ et donc 13 calculs pour chaque itération jusqu'à 1.

Prenons maintenant le tableau précédent. N est pair, donc :

$$N = 30 = 2 \cdot 15 = 2^m(2p' + 1) \rightarrow p' = 7 \text{ et } m = 1$$

$$U_1(30) = 2p' + 1 = 15 \text{ et } p' \neq 0 \rightarrow \text{on continue}$$

$$p' = 7 = \frac{2^{n-1}}{3^n} (2p + 1) - 1 \rightarrow p = 40 \text{ et } n = 4$$

$$\text{Vérification : } U_1(30) = \left(\frac{2}{3}\right)^n (2p + 1) - 1 = \frac{16}{81} 81 - 1 = 15$$

$$U_5(30) = 2p = 80$$

$$p = 40 = 2^3 \cdot 5 = 2^{m-1}(2p' + 1) \rightarrow p' = 2 \text{ et } m = 4$$

$$\text{Vérification : } U_5(30) = 2^m(2p' + 1) = 80$$

$$U_9(30) = 2p' + 1 = 5 \text{ et } p' \neq 0 \rightarrow \text{on continue}$$

$$p' = 2 = \frac{2^{n-1}}{3^n} (2p + 1) - 1 \rightarrow p = 4 \text{ et } n = 1$$

$$\text{Vérification : } U_9(30) = \left(\frac{2}{3}\right)^n (2p + 1) - 1 = \frac{2}{3} 9 - 1 = 5$$

$$U_{10}(30) = 2p = 8$$

$$p = 4 = 2^2 = 2^{m-1}(2p' + 1) \rightarrow p' = 0 \text{ et } m = 3$$

$$\text{Vérification : } U_{10}(30) = 2^m(2p' + 1) = 8$$

$$U_{13}(30) = 2p' + 1 = 1 \text{ et } p' = 0 \rightarrow \text{fin avec } i = 13$$

On a ainsi, dans cet exemple, fait 5 étapes au lieu de 13 en groupant les itérations successives de mêmes parités. Soit un gain de plus de 61% en temps de calcul. C'est d'autant plus rapide qu'il y a des itérations de mêmes parités successives. De plus, cette méthode est rapide et simple à coder. Cela ne donne pas toutes les valeurs de la suite mais permet d'arriver rapidement à la valeur d'un vol pour un N quelconque entier positif.

5. Conditions sur N pour des itérations successives

En complément, voici comment trouver les valeurs de N correspondantes à des **itérations impaires successives** :

Prenons tout d'abord un exemple avec n=5 et l'équation itérée des itérations impaires :

$$U_n(N) = \left(\frac{3}{2}\right)^5 (N + 1) - 1 = \frac{243N + 211}{32} = k$$

On a deux cas à traiter :

Si k est pair :

$$N = \frac{32k - 211}{243} = \frac{32(k' - 1) - 211}{243} = \frac{32k'}{243} - 1 \rightarrow k' = 243 \rightarrow k = 242 \rightarrow N = 31 : k = U_n(N) \text{ pair}$$

Si k est impair :

$$\begin{aligned} N &= \frac{32k - 211}{243} = \frac{32(k' - p) - 211}{243} = \frac{32k'}{243} - \frac{211 + 32p}{243} \\ \rightarrow p &= \frac{243k'' - 211}{32} = \frac{243(k''' + 1) - 211}{32} = \frac{243k'''}{32} + 1 \rightarrow k''' = 32 \rightarrow k'' = 33 \rightarrow p = 244 \\ \rightarrow N &= \frac{32k'}{243} - 33 \rightarrow k' > 243 \text{ et impair car } N > 0 \rightarrow k = 243k'''' - 244 \\ \rightarrow N &= 32(k'''' - 1) - 1 \text{ soit } \begin{cases} \text{si } k'''' = 3 \rightarrow N = 32 \cdot 2 - 1 = 63 \\ \text{si } k'''' = 5 \rightarrow N = 32 \cdot 4 - 1 = 127 \\ \dots \end{cases} \\ \rightarrow N &= 32 \cdot 2q - 1 = 2^6 q - 1 \text{ avec } q > 0 : k = U_n(N) \text{ impair} \end{aligned}$$

Dans le cas de n=5, on a donc une seule solution paire et une infinité de solutions impaires.

Etudions maintenant le cas général pour avoir n itérations impaires consécutives :

$$\begin{aligned} U_n(N) &= \left(\frac{3}{2}\right)^n (N + 1) - 1 = \frac{3^n N + 3^n - 2^n}{2^n} = \frac{3^n(N + 1)}{2^n} - 1 = k - 1 \\ \rightarrow N &= \frac{2^n k - 3^n}{3^n} = \frac{2^n k}{3^n} - 1 \rightarrow k = 3^n k' \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{Si } N = 2^n k' - 1 : \text{ impair} \\ \text{Alors : } U_n(N) = 3^n k' - 1 = k - 1 : \text{ pair} \end{cases}$$

On a donc une probabilité de $\frac{1}{2^n}$ d'avoir n itérations divergentes impaires, soit de plus en plus rare.

De même, voici comment trouver les valeurs de N correspondantes à des **itérations paires successives** :

$$U_n(N) = \frac{N}{2^n} = k \rightarrow N = 2^n k \text{ et } U_n(N) = k$$

On a donc une probabilité de $\frac{1}{2^n}$ d'avoir n itérations convergentes paires, soit de plus en plus rare.

5. Résolution par itération multiple

En reprenant les 2 équations d'itérations de parité multiple, déjà démontrées précédemment, suivantes :

$$P_n(N) = \frac{N}{2^n}$$

$$I_n(N) = \left(\frac{3}{2}\right)^n (N + 1) - 1$$

On en déduit par itérations successives avec :

$$U_i(N) = U_{\sum_{j=1}^p n_j}(N) = \dots P_{n_7} \left(I_{n_6} \left(P_{n_5} \left(I_{n_4} \left(P_{n_3} \left(I_{n_2} \left(P_{n_1}(N) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \dots = 1$$

Soit :

$$U_i(N) = 1 = \dots \frac{1}{2^{n_5}} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{n_4} \left(\frac{1}{2^{n_3}} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{n_2} \left(\frac{N}{2^{n_1}} + 1 \right) - 1 \right) + 1 \right) - 1 \right) \dots$$

$$U_i(N) = 1 = \dots \frac{3^{n_2+n_4}}{2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}} N + \frac{3^{n_2+n_4}}{2^{n_2+n_3+n_4+n_5}} - \frac{3^{n_4}}{2^{n_3+n_4+n_5}} + \frac{3^{n_4}}{2^{n_4+n_5}} - \frac{1}{2^{n_5}} \dots$$

Ou bien sous formes factorisées :

$$U_i(N) = 1 = \dots \frac{3^{n_2+n_4}}{2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}} (2^{n_1} + N) + \frac{3^{n_4}}{2^{n_3+n_4+n_5}} (2^{n_3} - 1) - \frac{1}{2^{n_5}} \dots$$

Soit :

$$U_i(N) = 1 = \frac{3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}}}{2^{\sum_{j=1}^p n_j}} N + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3^{\sum_{j=1}^k n_{p-2j+1}}}{2^{\sum_{j=1}^{2k} n_{p-j+1}}} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n_{p-2k+1}} \right) \right) \text{ avec } \begin{cases} n_1 = 0 \text{ si } N \text{ impair} \\ n_1 > 0 \text{ si } N \text{ pair} \\ p \text{ impair} \\ n_p \geq 3 \end{cases}$$

p est toujours impair car si $U_i(N) = 1$ alors $U_{i-1}(N) = 2$ et donc au rang p , c'est $P_{n_p}(U_n(N))$ qui est utilisé.

$n_p \geq 3$ car les dernières itérations vers 1 sont toujours paires et au nombre de 3 minimum (8, 4, 2, 1).

On peut également écrire plus simplement :

$$p = 5 \text{ et plus : } U_i(N) = 1 = \dots \frac{3^{n_2+n_4}}{2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}} N + \frac{3^{n_4}}{2^{n_2+n_3+n_4+n_5}} (3^{n_2} - 2^{n_2}) + \frac{1}{2^{n_4+n_5}} (3^{n_4} - 2^{n_4}) \dots$$

$$p = 7 \text{ et plus : } U_i(N) = 1$$

$$= \dots \frac{3^{n_2+n_4+n_6}}{2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7}} N + \frac{3^{n_4+n_6}}{2^{n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7}} (3^{n_2} - 2^{n_2}) + \frac{3^{n_6}}{2^{n_4+n_5+n_6+n_7}} (3^{n_4} - 2^{n_4})$$

$$- 2^{n_4} + \frac{1}{2^{n_6+n_7}} (3^{n_6} - 2^{n_6}) \dots$$

D'où :

$$U_i(N) = 1 = \frac{3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}}}{2^{\sum_{j=1}^p n_j}} N + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3^{\sum_{j=k+1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}}}{2^{\sum_{j=2k}^p n_j}} (3^{n_{2k}} - 2^{n_{2k}}) \right) \text{ avec } \begin{cases} n_1 = 0 \text{ si } N \text{ impair} \\ n_1 > 0 \text{ si } N \text{ pair} \\ p \text{ impair} \\ n_p \geq 3 \end{cases}$$

Pour que cette convergence soit vérifiée, il faut que :

$$N = \frac{2^{\sum_{j=1}^p n_j}}{3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3^{\sum_{j=1}^k n_{p-2j+1}}}{2^{\sum_{j=1}^{2k} n_{p-j+1}}} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n_{p-2k+1}} - 1 \right) \right) \right)$$

$$N = \frac{2^{\sum_{j=1}^p n_{p-j+1}}}{3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{p-2j+1}}} + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{2^{\sum_{j=2k+1}^p n_{p-j+1}}}{3^{\sum_{j=k+1}^{\frac{p-1}{2}} n_{p-2j+1}}} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n_{p-2k+1}} - 1 \right) \right)$$

Soit :

$$N = \frac{2^{\sum_{j=1}^p n_j}}{3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}}} - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{2^{\sum_{j=2k+1}^p n_{p-j+1}}}{3^{\sum_{j=k}^{\frac{p-1}{2}} n_{p-2j+1}}} (3^{n_{p-2k+1}} - 2^{n_{p-2k+1}}) \right)$$

Ou bien :

$$p = 5 \text{ et plus : } N = \frac{2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}}{3^{n_2+n_4}} - \frac{2^{n_1}}{3^{n_2}} (3^{n_2} - 2^{n_2}) - \frac{2^{n_1+n_2+n_3}}{3^{n_2+n_4}} (3^{n_4} - 2^{n_4}) \dots$$

$$p = 7 \text{ et plus : } N = \frac{2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7}}{3^{n_2+n_4+n_6}} - \frac{2^{n_1}}{3^{n_2}} (3^{n_2} - 2^{n_2}) - \frac{2^{n_1+n_2+n_3}}{3^{n_2+n_4}} (3^{n_4} - 2^{n_4}) - \frac{2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}}{3^{n_2+n_4+n_6}} (3^{n_6} - 2^{n_6}) \dots$$

Soit :

$$N = \frac{2^{\sum_{j=1}^p n_j}}{3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}}} - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{2^{\sum_{j=1}^{2k-1} n_j}}{3^{\sum_{j=1}^k n_{2j}}} (3^{n_{2k}} - 2^{n_{2k}}) \right)$$

Toujours avec :

$$i = \sum_{j=1}^p n_j$$

Pour illustrer ce résultat, on choisit quelques n_j arbitraires. Puis, on calcule N et i. Enfin on vérifie i avec la suite de Syracuse.

Pour p=1 on a :

$$N = 2^{n_1} \quad \forall n_1 > 0$$

Par exemple avec N=8, la conjecture donne : 4, 2 puis 1 soit : $n_1 = 3$ (3 itérations paires).

Avec l'équation précédente, on retrouve bien : $N = 2^3 = 8$ et $i = n_1 = 3$.

De plus, $\forall n_1 \geq 0, N \in \mathbb{N}$.

Pour p=3 on a :

$$N = 2^{n_1} \left(-1 + \left(\frac{2}{3} \right)^{n_2} (1 + 2^{n_3}) \right) = \frac{2^{n_1+n_2+n_3}}{3^{n_2}} - \frac{2^{n_1}}{3^{n_2}} (3^{n_2} - 2^{n_2}) = 2^{n_1} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n_2} (2^{n_3} + 1) - 1 \right)$$

Par exemple prenons $N=3$ qui devient dans la suite : 5, 8, 4, 2 puis 1.

Cela donne : $n_1 = 0$ (car N impair), $n_2 = 2$ (2 itérations impairs) et $n_3 = 3$ (puis 3 itérations pairs).

En reprenant l'équation précédente, on a bien :

$$N = 2^0 \left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 (1 + 2^3) \right) = -1 + \frac{4}{9}(1 + 8) = -1 + 4 = 3$$

Ou bien :

$$N = 2^0 \left(\frac{2^2(2^3 + 1)}{3^2} - 1 \right) = 4 - 1 = 3$$

Et :

$$i = n_1 + n_2 + n_3 = 5$$

Attention, cette fois-ci, $\forall n_1 \geq 0, n_2 \geq 1$ et $n_3 \geq 1$, N n'est pas forcément entier !

Divisibilité entière : comment définir les n_j pour avoir $N \in \mathbb{N}$?

En reprenant l'équation de N précédente, on voit qu'il suffit que :

$$\frac{2^{n_3} + 1}{3^{n_2}} = k \rightarrow 2^{n_3} + 1 = 3^{n_2} k$$

Sachant que :

$$2^{2q+1} + 1 = 3k \rightarrow n_3 \text{ est impair}$$

Et selon le tableau suivant, on en déduit que :

$$2^{2q+1} + 1 = 3^1 k \quad \forall q \geq 0 \text{ et } k > 0$$

$$2^{6q+3} + 1 = 3^2 k \quad \forall q \geq 0 \text{ et } k > 0$$

$$2^{18q+9} + 1 = 3^3 k \quad \forall q \geq 0 \text{ et } k > 0$$

...

$$2^{3^{n-1}(2q+1)} + 1 = 3^n k \quad \forall n > 0, q \geq 0 \text{ et } k > 0$$

q	1+2^q	modulo 3	modulo 9	modulo 27
0	2			
1	3	OUI		
2	5			
3	9	OUI	OUI	
4	17			
5	33	OUI		
6	65			
7	129	OUI		
8	257			
9	513	OUI	OUI	OUI
10	1 025			
11	2 049	OUI		
12	4 097			
13	8 193	OUI		
14	16 385			
15	32 769	OUI	OUI	
16	65 537			
17	131 073	OUI		
18	262 145			
19	524 289	OUI		
20	1 048 577			
21	2 097 153	OUI	OUI	
22	4 194 305			
23	8 388 609	OUI		
24	16 777 217			
25	33 554 433	OUI		
26	67 108 865			
27	134 217 729	OUI	OUI	OUI

Ce qui entraine dans notre cas :

$$n_3 = 2^{3^{n_2-1}(2q+1)} \text{ et } N = 2^{n_1} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n_2} (2^{3^{n_2-1}(2q+1)} + 1) - 1 \right)$$

On peut l'obtenir d'une autre façon :

- (1) $\forall n_1 \geq 0$, si $n_2 = 1$ alors $n_3 = 2k + 1$ (impair) avec $k \geq 1$
 (2) $\forall n_1 \geq 0$, si $n_2 = 2$ alors $n_3 = 3(2k + 1)$ (impair) avec $k \geq 1$

- $\forall n_1 \geq 0$, si $n_2 = 3$ alors $n_3 = (3^2)(2k - 1)$ (impair) avec $k \geq 1$
 $\forall n_1 \geq 0$, si $n_2 = 4$ alors $n_3 = (3^3)(2k - 1)$ (impair) avec $k \geq 1$

- (3) $\forall n_1 \geq 0$ et $n_2 > 2$ alors $n_3 = (3^{\dots^{n_2-1}})(2k - 1)$ (impair) avec $k \geq 1$

On a donc :

$$(1) n_2 = 1 : N = 2^{n_1} \left(-1 + \frac{2}{3} (1 + 2^{2k+1}) \right) = \frac{2^{n_1} (4^{k+1} - 1)}{3}$$

Ce résultat est juste (donne un N entier) car on sait que toute forme $a^n - 1$ est divisible par $(a-1)$ quel que soit n (pair ou impair). La divisibilité euclidienne entière par 3 (4-1 avec a=4) est donc vérifiée ci-dessus dans (1).

$$(2) \ n_2 = 2 : N = 2^{n_1} \left(-1 + \frac{2^2}{3^2} (1 + 2^{3(2k+1)}) \right) = \frac{2^{n_1} (2^{6k+5} - 5)}{9}$$

$$= \frac{2^{n_1} (2^{6k+5} - 9 + 4)}{9} = \frac{2^{n_1+2} (2^{3(2k+1)} + 1)}{9} - 2^{n_1} = \frac{2^{n_1+2} (8^{2k+1} + 1)}{9} - 2^{n_1}$$

La division est toujours entière car on sait que toute forme $a^n + 1$ est divisible par $(a+1)$ si n est impair, soit ici a=8 et n=2k+1, et ainsi bien divisible par 9 (8+1) dans tous les cas.

Enfin, plus généralement, on a :

$$(3) \ n_2 > 2 : N = 2^{n_1} \left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n_2} (1 + 2^{(2k-1)3^{n_2-1}}) \right) = \frac{2^{n_1} (2^{n_2+(2k-1)3^{n_2-1}} - (3^{n_2} - 2^{n_2}))}{3^{n_2}}$$

$$= \frac{2^{n_1} (2^{n_2+(2k-1)3^{n_2-1}} + 2^{n_2})}{3^{n_2}} - 2^{n_1} = \frac{2^{n_1+n_2} (2^{3^{n_2-1}(2k-1)} + 1)}{3^{n_2}} - 2^{n_1}$$

La division est entière ssi :

$$3^{n_2} q - 1 = 2^{(2k-1)3^{n_2-1}}, \forall q > 0$$

On vérifie numériquement (pas de preuve formelle ici) que la relation ci-dessus est toujours vraie et correspond au résultat déjà déduit plus haut du tableau des modulus.

A noter également que si $n_1=0$ (N impair), pour que :

$$-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n_2} (1 + 2^{n_3}) > 0$$

Il faut que :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n_2} < 1 + 2^{n_3}$$

$$n_2 \ln\left(\frac{3}{2}\right) < \ln(1 + 2^{n_3})$$

$$n_2 < \frac{\ln(1 + 2^{n_3})}{\ln(3) - \ln(2)}$$

$$\text{Comme ici } n_3 = n_p \geq 3 \rightarrow n_{2\text{mini}} < \frac{\ln(1 + 2^3)}{\ln(3) - \ln(2)} = \frac{2 \ln(3)}{\ln(3) - \ln(2)} \approx 5,419$$

$$\rightarrow 1 \leq n_{2\text{mini}} \leq 5 \text{ et } n_3 = 2^{\frac{\ln(2)}{3\ln(3)-\ln(2)}(2p+1)} = 2^{\frac{\ln(3)}{2\ln(3)-\ln(2)}(2p+1)}$$

Ainsi, selon la valeur de n_3 , on a la fourchette de valeur de n_2 comme suit pour par exemple $n_3 < 13$:

$n_3 = n_p$	3	5	7	9	11
$n_{2\text{mini}} = n_{p-1}$	1-5	1-8	1-11	1-15	1-18

Si $n_2 > 0$ (N pair) alors, pour que :

$$-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n_2} (1 + 2^{n_3}) \geq \frac{1}{2^{n_1}}$$

Il faut que :

$$2^{n_3} \geq \frac{1 + 2^{n_1}}{2^{n_1}} \left(\frac{3}{2}\right)^{n_2} - 1$$

$$2^{n_3} \geq \frac{3^{n_2}(1 + 2^{n_1}) - 2^{n_1+n_2}}{2^{n_1+n_2}}$$

$$n_3 \ln(2) \geq \ln(3^{n_2}(1 + 2^{n_1}) - 2^{n_1+n_2}) - (n_1 + n_2) \ln(2)$$

$$n_3 \geq \frac{\ln(3^{n_2}(1 + 2^{n_1}) - 2^{n_1+n_2})}{\ln(2)} - n_1 - n_2$$

Avec $n_1 = 1$, on a :

$$n_3 \geq \frac{\ln(3^{n_2+1} - 2^{n_2+1})}{\ln(2)} - n_2 - 1$$

Ainsi, selon la valeur de n_2 , on a la valeur minimale de n_3 comme suit pour par exemple $n_2 < 13$:

$n_3 = n_p$	3	3	3	3	4	5	5	6	6	7	8	8
$n_{2mini} = n_{p-1}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Pour $p=5$ on a :

$$N = 2^{n_1} \left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n_2} \left(1 + 2^{n_3} \left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n_4} (1 + 2^{n_5}) \right) \right) \right)$$

$$\text{Ou bien : } N = \frac{2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}}{3^{n_2+n_4}} - \frac{2^{n_1}}{3^{n_2}} (3^{n_2} - 2^{n_2}) - \frac{2^{n_1+n_2+n_3}}{3^{n_2+n_4}} (3^{n_4} - 2^{n_4})$$

$$\text{Soit : } N = 2^{n_1} \left(\frac{2^{n_2+n_3+n_4}(2^{n_5} + 1)}{3^{n_2+n_4}} - \frac{2^{n_2}(2^{n_3} - 1)}{3^{n_2}} - 1 \right)$$

Par exemple avec $N=13$, la conjecture donne : 20, 10, 5, 8, 4, 2 et 1, soit :

- $n_1 = 0$ car N impair,
- $n_2 = 1$ car 1 itération impaire,
- $n_3 = 2$ suivi de 2 itérations paires,
- $n_4 = 1$ puis 1 itération impaire,
- $n_5 = 3$ enfin 3 itérations paires.

En reprenant l'équation précédente, on a bien :

$$N = 2^0 \left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(1 + 2^2 \left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 (1 + 2^3) \right) \right) \right) = -1 + \frac{2}{3} \left(1 + 4 \left(-1 + \frac{2}{3} (1 + 8) \right) \right) = 13$$

Et :

$$i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 7$$

Divisibilité par 3 :

Comme vu précédemment pour $p=3$, et sachant que :

$$2^{3^{n-1}(2q+1)} + 1 = 3^nk \quad \forall n > 0, q \geq 0 \text{ et } k > 0$$

De plus à l'aide du tableau suivant :

q	-1+2^q	modulo 3	modulo 9	modulo 27
0	0	OUI	OUI	OUI
1	1			
2	3	OUI		
3	7			
4	15	OUI		
5	31			
6	63	OUI	OUI	
7	127			
8	255	OUI		
9	511			
10	1 023	OUI		
11	2 047			
12	4 095	OUI	OUI	
13	8 191			
14	16 383	OUI		
15	32 767			
16	65 535	OUI		
17	131 071			
18	262 143	OUI	OUI	OUI
19	524 287			
20	1 048 575	OUI		
21	2 097 151			
22	4 194 303	OUI		
23	8 388 607			
24	16 777 215	OUI	OUI	
25	33 554 431			
26	67 108 863	OUI		
27	134 217 727			
28	268 435 455	OUI		
29	536 870 911			
30	1 073 741 823	OUI	OUI	
31	2 147 483 647			
32	4 294 967 295	OUI		
33	8 589 934 591			
34	17 179 869 183	OUI		
35	34 359 738 367			
36	68 719 476 735	OUI	OUI	OUI

On en déduit que :

$$2^{3^{n-1}2q} - 1 = 4^{3^{n-1}q} - 1 = 3^nk \quad \forall n > 0, q \geq 0 \text{ et } k > 0$$

On a donc ici pour garantir les deux divisions entières :

$$\begin{cases} n_5 = 3^{n_2+n_4-1}(2q+1) \quad \forall q \geq 0 \\ n_3 = 3^{n_2-1}2q' \quad \forall q' \geq 0 \end{cases}$$

Pour p=7 on a :

$$N = 2^{n_1} \left(-1 + \left(\frac{2}{3} \right)^{n_2} \left(1 + 2^{n_3} \left(-1 + \left(\frac{2}{3} \right)^{n_4} \left(1 + 2^{n_5} \left(-1 + \left(\frac{2}{3} \right)^{n_6} (1 + 2^{n_7}) \right) \right) \right) \right) \right)$$

$$\text{Ou bien : } N = \frac{2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7}}{3^{n_2+n_4+n_6}} - \frac{2^{n_1}}{3^{n_2}} (3^{n_2} - 2^{n_2}) - \frac{2^{n_1+n_2+n_3}}{3^{n_2+n_4}} (3^{n_4} - 2^{n_4}) - \frac{2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}}{3^{n_2+n_4+n_6}} (3^{n_6} - 2^{n_6})$$

$$\text{Soit : } N = 2^{n_1} \left(\frac{2^{n_2+n_3+n_4+n_5+n_6}(2^{n_7}+1)}{3^{n_2+n_4+n_6}} + \frac{2^{n_2+n_3+n_4}(1-2^{n_5})}{3^{n_2+n_4}} + \frac{2^{n_2}(1-2^{n_3})}{3^{n_2}} - 1 \right)$$

Par exemple avec N=7 qui donne avec la conjecture : 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2 et 1

On en déduit : $n_1 = 0, n_2 = 3, n_3 = 1, n_4 = 1, n_5 = 2, n_6 = 1, n_7 = 3$

En reprenant l'équation précédente, on a bien :

$$N = 2^0 \left(-1 + \left(\frac{2}{3} \right)^3 \left(1 + 2^1 \left(-1 + \left(\frac{2}{3} \right)^1 \left(1 + 2^2 \left(-1 + \left(\frac{2}{3} \right)^1 (1 + 2^3) \right) \right) \right) \right) \right) = 7$$

Et :

$$i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = 11$$

Divisibilité par 3 :

Comme vu précédemment pour p<7, et sachant que :

$$\begin{aligned} 2^{3^{n-1}(2q+1)} + 1 &= 3^n k \quad \forall n > 0, q \geq 0 \text{ et } k > 0 \\ 2^{3^{n-1}2q} - 1 &= 4^{3^{n-1}q} - 1 = 3^n k \quad \forall n > 0, q \geq 0 \text{ et } k > 0 \end{aligned}$$

On a ici pour garantir les trois divisions entières :

$$\begin{cases} n_7 = 3^{n_2+n_4+n_6-1}(2q+1) \quad \forall q \geq 0 \\ n_5 = 3^{n_2+n_4-1}2q' \quad \forall q' \geq 0 \\ n_3 = 3^{n_2-1}2q'' \quad \forall q'' \geq 0 \end{cases}$$

Cas général, pour p quelconque :

A partir des résultats précédents pour p<9 et de l'équation générale de N, on en déduit :

$$\begin{cases} n_p = 3^{\left(\sum_{k=1}^{p-1} n_{2k} \right) - 1} (2q_p + 1) \quad \forall q_p \geq 0 \\ n_{2j+1} = 3^{\left(\sum_{k=1}^j n_{2k} \right) - 1} 2q_{2j+1} \quad \forall q_{2j+1} \geq 0 \text{ et } 1 \leq j < \frac{p-1}{2} \end{cases}$$

Ce résultat permet de choisir N avec le nombre de changements d'itération (p) et pour chacune des itérations impaires leur durée (n_{2k}). Ensuite les durées des itérations paires (n_{2k+1}) sont déduites en choisissant leurs multiples (q_{2k+1}) correspondant à des divisions entières et ainsi garantissant une valeur de N entière. Tout cela simplifie le choix des durées d'une parité (n_k) dans un vol.

1. Trajectoires $4m+3$

Dans un chapitre suivant sur les trajectoires de la suite on observe que dans 3 cas sur 4 la suite décroît. Dans le cas où $U_n(N) = 4m + 3$ il n'est pas résolu que la suite décroît dans tous les cas. On va donc s'intéresser ici à ce cas en posant :

$$\begin{aligned} 4m + 3 = N &= \frac{2^{\sum_{j=1}^p n_{p-j+1}}}{3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{p-2j+1}}} + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{2^{\sum_{j=2k+1}^p n_{p-j+1}}}{3^{\sum_{j=k+1}^{\frac{p-1}{2}} n_{p-2j+1}}} \left(-1 + \left(\frac{2}{3} \right)^{n_{p-2k+1}} \right) \right) \\ &= \frac{2^{\sum_{j=1}^p n_j}}{3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}}} - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{2^{\sum_{j=1}^{2k-1} n_j}}{3^{\sum_{j=1}^k n_{2j}}} (3^{n_{2k}} - 2^{n_{2k}}) \right) \end{aligned}$$

De plus, $n_1 = 0$ car N est impair et $n_p \geq 3$.

Pour $p=1$: ce cas n'existe pas.

Pour $p=3$: on a :

$$\begin{aligned} 4m + 3 = N &= -1 + \left(\frac{2}{3} \right)^{n_2} (1 + 2^{n_3}) \\ \rightarrow 4m + 4 &= 4(m + 1) = 4m' = \left(\frac{2}{3} \right)^{n_2} (1 + 2^{n_3}) \end{aligned}$$

On a déjà vu que pour avoir une division entière, il faut que :

$$n_3 = 3^{n_2-1}(2k + 1) \quad \forall k \geq 0$$

De plus on observe les cas suivants :

$$\begin{aligned} (1) \quad n_2 = 1 : 4m' &= \frac{2}{3}(1 + 2^{2k+1}) = \frac{4^{k+1} + 2}{3} = \frac{4^{k+1} - 1}{3} + 1 \rightarrow 2m' = \frac{2^{2k+1} + 1}{3} \rightarrow m' = \frac{4^k + \frac{1}{2}}{3} \\ \rightarrow m &= m' - 1 = \frac{4^k - \frac{5}{2}}{3} = \frac{4^k - 1}{3} - \frac{1}{2} : \text{impossible d'avoir } m \text{ entier.} \end{aligned}$$

$$(2) \quad n_2 = 2 : 4m' = \frac{2^2}{3^2}(1 + 2^{3(2k+1)}) \rightarrow m' = \frac{2^{3(2k+1)} + 1}{9} \rightarrow m = \frac{8(4^{3k} - 1)}{9} : m \text{ entier si } k \text{ pair.}$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} k = 2 &\rightarrow m = 456 \rightarrow N = 1827 \\ k = 4 &\rightarrow m = 1864135 \rightarrow N = 7456543 \end{aligned}$$

Et plus généralement, on a :

$$\begin{aligned} (3) \quad n_2 > 2 : 4m' &= \left(\frac{2}{3} \right)^{n_2} (1 + 2^{(2k+1)3^{n_2-1}}) \\ \rightarrow m' &= \frac{2^{n_2-2}(2^{(2k+1)3^{n_2-1}} + 1)}{3^{n_2}} \rightarrow m = \frac{2^{n_2}(2^{(2k+1)3^{n_2-1}} + 1)}{4 \cdot 3^{n_2}} - 1 \end{aligned}$$

La divisibilité par 3^{n_2} est déjà traité, reste la divisibilité entière par 4, soit :

$$2^{n_2} = 4q \quad \forall q > 0 \rightarrow n_2 \geq 2$$

En définitif, il suffit donc que :

$$\begin{aligned} n_1 &= 0 \\ n_2 &\geq 2 \\ n_3 &= 3^{n_2-1}(2k+1) \quad \forall k \geq 0 \end{aligned}$$

Pour $p=5$ on a :

$$\begin{aligned} 4m+3 = N &= -1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n_2} \left(1 + 2^{n_3} \left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n_4} (1 + 2^{n_5})\right)\right) \\ &= \frac{2^{n_2+n_3+n_4}(2^{n_5}+1)}{3^{n_2+n_4}} - \frac{2^{n_2}(2^{n_3}-1)}{3^{n_2}} - 1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow 4(m+1) = 4m' = \left(\frac{2}{3}\right)^{n_2} \left(1 + 2^{n_3} \left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n_4} (1 + 2^{n_5})\right)\right) = \frac{2^{n_2+n_3+n_4}(2^{n_5}+1)}{3^{n_2+n_4}} - \frac{2^{n_2}(2^{n_3}-1)}{3^{n_2}}$$

Pour garantir les divisibilités par 3 et 4, il suffit que :

$$\begin{aligned} n_1 &= 0 \\ n_2 &\geq 2 \\ n_3 &= 3^{n_2-1}2k \quad \forall k \geq 0 \\ n_5 &= 3^{n_2+n_4-1}(2k'+1) \quad \forall k' \geq 0 \end{aligned}$$

Pour $p=7$ on a :

$$\begin{aligned} 4m+3 = N &= -1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n_2} \left(1 + 2^{n_3} \left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n_4} \left(1 + 2^{n_5} \left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n_6} (1 + 2^{n_7})\right)\right)\right)\right) \\ &= \frac{2^{n_2+n_3+n_4+n_5+n_6}(2^{n_7}+1)}{3^{n_2+n_4+n_6}} + \frac{2^{n_2+n_3+n_4}(1-2^{n_5})}{3^{n_2+n_4}} + \frac{2^{n_2}(1-2^{n_3})}{3^{n_2}} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow 4(m+1) = 4m' &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n_2} \left(1 + 2^{n_3} \left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n_4} \left(1 + 2^{n_5} \left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n_6} (1 + 2^{n_7})\right)\right)\right)\right) \\ &= \frac{2^{n_2+n_3+n_4+n_5+n_6}(2^{n_7}+1)}{3^{n_2+n_4+n_6}} + \frac{2^{n_2+n_3+n_4}(1-2^{n_5})}{3^{n_2+n_4}} + \frac{2^{n_2}(1-2^{n_3})}{3^{n_2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow m &= -1 + \frac{2^{n_2-2}}{3^{n_2}} \left(1 + 2^{n_3} \left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n_4} \left(1 + 2^{n_5} \left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n_6} (1 + 2^{n_7})\right)\right)\right)\right) \\ &= \frac{2^{n_2+n_3+n_4+n_5+n_6}(2^{n_7}+1)}{4 \cdot 3^{n_2+n_4+n_6}} + \frac{2^{n_2+n_3+n_4}(1-2^{n_5})}{4 \cdot 3^{n_2+n_4}} + \frac{2^{n_2}(1-2^{n_3})}{4 \cdot 3^{n_2}} - 1 \end{aligned}$$

On a ici pour garantir les trois divisions entières :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 = 0 \\ n_2 \geq 2 \\ n_3 = 3^{n_2-1} 2q'' \quad \forall q'' \geq 0 \\ n_5 = 3^{n_2+n_4-1} 2q' \quad \forall q' \geq 0 \\ n_7 = 3^{n_2+n_4+n_6-1} (2q + 1) \quad \forall q \geq 0 \end{array} \right.$$

Cas général, pour p quelconque :

A partir des résultats précédents pour $p < 9$ et de l'équation générale de N, on en déduit :

$$N = 4m + 3 = \frac{2^{\sum_{j=1}^p n_j}}{3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}}} - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{2^{\sum_{j=1}^{2k-1} n_j}}{3^{\sum_{j=1}^k n_{2j}}} (3^{n_{2k}} - 2^{n_{2k}}) \right) \text{ssi :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 = 0 \\ n_2 \geq 2 \\ n_{2j+1} = 3^{(\sum_{k=1}^j n_{2k})-1} 2q_{2j+1} \quad \forall q_{2j+1} \geq 0 \text{ et } 1 \leq j < \frac{p-1}{2} \\ n_p = 3^{(\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2k})-1} (2q_p + 1) \quad \forall q_p \geq 0 \end{array} \right.$$

On a donc rajouté que les deux premières conditions au cas général pour avoir une forme $N=4m+3$.

2. Autre cycle possible ?

A partir de l'équation généralisée, on cherche par l'absurde au moins un cas où :

$$U_n(N) = N \text{ avec } \forall n > 0$$

C'est-à-dire un autre cycle que {1, 2} partant d'un N quelconque et retournant à N quel que soit le nombre d'itérations entre les deux rangs. Si on prouve que cela est impossible quel que soit N, alors l'existence d'un cycle unique de longueur deux sera démontrée.

$$U_n(N) = N = \dots \frac{3^{n_2+n_4}}{2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}} N + \frac{3^{n_2+n_4}}{2^{n_2+n_3+n_4+n_5}} - \frac{3^{n_4}}{2^{n_3+n_4+n_5}} + \frac{3^{n_4}}{2^{n_4+n_5}} - \frac{1}{2^{n_5}} \dots$$

$$\frac{2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5} - 3^{n_2+n_4}}{2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}} N = \dots \frac{3^{n_2+n_4}}{3^{n_2+n_4}} - \frac{3^{n_4}}{3^{n_4}} + \frac{3^{n_4}}{3^{n_4}} - \frac{1}{2^{n_5}} \dots$$

$$N = \frac{\dots 2^{n_1} 3^{n_2+n_4} - 2^{n_1+n_2} 3^{n_4} + 2^{n_1+n_2+n_3} 3^{n_4} - 2^{n_1+n_2+n_3+n_4} \dots}{2^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5} - 3^{n_2+n_4}}$$

Soit :

$$N = \frac{2^{\sum_{j=1}^p n_j}}{2^{\sum_{j=1}^p n_j} - 3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}}} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3^{\sum_{j=1}^k n_{p-2j+1}}}{2^{\sum_{j=1}^{2k} n_{p-j+1}}} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n_{p-2k+1}} \right) \right) \text{ avec } \begin{cases} n_1 = 0 \text{ si } N \text{ impair} \\ n_1 > 0 \text{ si } N \text{ pair} \\ p \text{ impair} \\ n_p \geq 3 \end{cases}$$

Ou bien :

$$N = \frac{2^{\sum_{j=1}^p n_j}}{2^{\sum_{j=1}^p n_j} - 3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}}} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3^{\sum_{j=k+1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}}}{2^{\sum_{j=2k}^p n_j}} (3^{n_{2k}} - 2^{n_{2k}}) \right)$$

D'où :

$$N = \frac{1}{2^{\sum_{j=1}^p n_j} - 3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}}} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(2^{\sum_{j=1}^{2k-1} n_j} 3^{\sum_{j=k+1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}} (3^{n_{2k}} - 2^{n_{2k}}) \right) \text{ avec } \begin{cases} n_1 = 0 \text{ si } N \text{ impair} \\ n_1 > 0 \text{ si } N \text{ pair} \\ p \text{ impair} \\ n_p \geq 3 \end{cases}$$

L'étude de la divisibilité de cette équation est complexe. On va déjà vérifier que $N > 0$, soit :

$$2^{\sum_{j=1}^p n_j} - 3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}} > 0 \rightarrow 2^{\sum_{j=1}^p n_j} > 3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}} \rightarrow \left(\sum_{j=1}^p n_j \right) \ln(2) > \left(\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j} \right) \ln(3)$$

On pose :

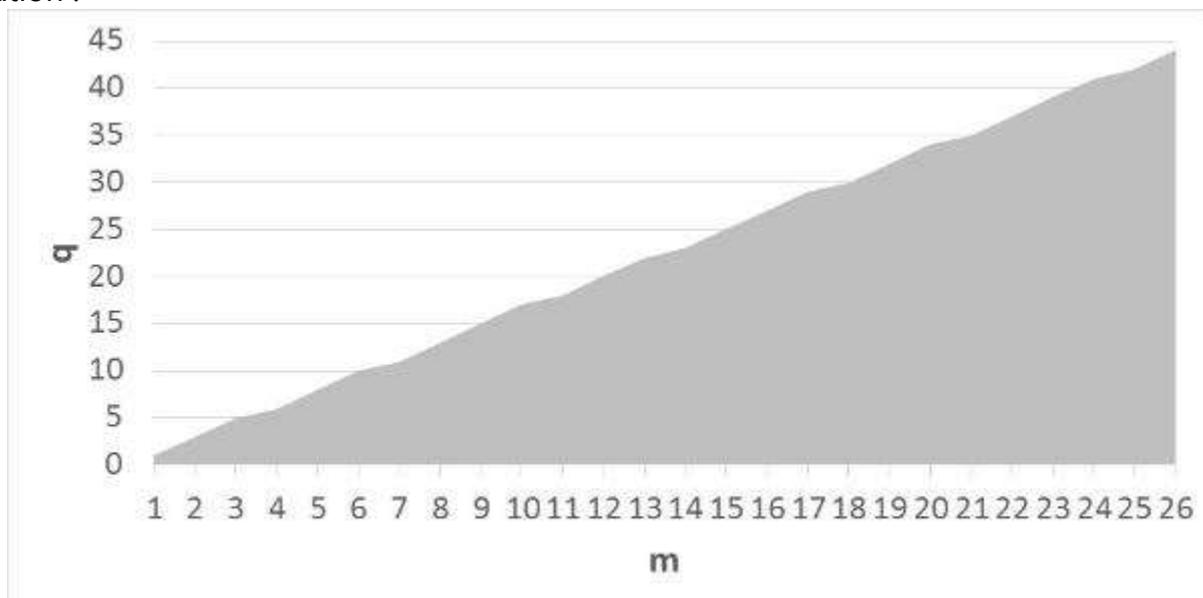
$$m = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j} : \text{somme des itérations impaires}$$

$$i = m + q = \sum_{j=1}^p n_j : \text{sommées de toutes les itérations d'un vol}$$

On a donc :

$$i \ln(2) = (m + q) \ln(2) > m \ln(3) \rightarrow m < \frac{\ln(2)}{\ln(3) - \ln(2)} q \approx 1,709q$$

Toutes les valeurs entières dans la partie grisée du graphe ci-dessous est solution de cette inéquation :



On a donc bien des solutions pour qu'un N de ce type ne soit pas négatif.

On est face à une difficulté de taille, puisque vérifier la divisibilité n'est pas possible simplement. Cela peut se trouver par décomposition en prenant des cas simples dans un premier temps. On ne peut donc pas ici en l'état conclure s'il existe bien un seul cycle.

3. Calcul indiciel de la suite de Syracuse

On se propose de calculer une forme générale. Cela permettra de connaître toutes les valeurs de la suite à partir d'un nombre de départ N en une seule fois.

Pour cela, on reprend la notation d'indices modulaires déjà utilisée en début de ce document pour la suite modulo 4. Ainsi, on pose les indices de nombres suivants :

$$\begin{aligned} k_m &= k \text{ si } U_n(N) = 2p + 1, \text{ sinon } = 0 \\ k_p &= k \text{ si } U_n(N) = 2p, \text{ sinon } = 0 \end{aligned}$$

Par exemple :

$$3_m = 3 \text{ si } U_n(N) = 2p + 1, \text{ sinon } 3_m = 0$$

A noter que les indices m et p sont complémentaires, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} k_{pm} &= k_{mp} = k \quad \forall U_n(N) \\ k_p + k_m &= k \quad \forall U_n(N) \\ k_p k_m &= 0 \quad \forall U_n(N) \end{aligned}$$

Cette notation d'indices modulaires, simple à manipuler de par ses propriétés arithmétiques, permettra ci-dessous de factoriser les 2 cas (pair et impair) de la suite. Ensuite, on pose, en une seule équation, la valeur de la suite au rang n+1 :

$$\begin{aligned} U_{n+1}(N) &= \frac{(2_m + 1)U_n(N) + 1_m}{2} = 1_m U_n(N) + \frac{U_n(N) + 1_m}{2} = 1_m \left(U_n(N) + \frac{1}{2} \right) + \frac{U_n(N)}{2} \\ U_{n+1}(N) &= \frac{(3 - 2_p)U_n(N) + 1 - 1_p}{2} = \frac{3U_n(N) + 1}{2} - 1_p \left(U_n(N) + \frac{1}{2} \right) \\ &= (1 - 1_p) \left(\frac{1}{2} - U_n(N) \right) + \frac{U_n(N)}{2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} U_{n+1}(N) &= \left(\frac{1}{2} + 1_m \right) U_n(N) + \frac{1_m}{2} \\ \text{Ou bien : } U_{n+1}(N) &= \left(\frac{3}{2} - 1_p \right) U_n(N) + \frac{1 - 1_p}{2} \end{aligned}$$

A noter que cette équation ne dépend que d'une seule parité : l'impair ou la paire, car la parité est toujours complémentaire. C'est-à-dire soit l'une soit l'autre.

Ensuite on itère cette équation, pour obtenir :

$$\begin{aligned} U_{n+2}(N) &= \left(1_m + \frac{1}{2} \right)^2 U_n(N) + \left(1_m + \frac{1}{2} \right) \frac{1_m}{2} + \frac{1_m}{2} \\ U_{n+3}(N) &= \left(1_m + \frac{1}{2} \right)^3 U_n(N) + \left(1_m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{1_m}{2} + \left(1_m + \frac{1}{2} \right) \frac{1_m}{2} + \frac{1_m}{2} \\ &\dots \\ U_j(N) &= \left(1_m + \frac{1}{2} \right)^j N + \frac{1_m}{2} \sum_{q=1}^j \left(1_m + \frac{1}{2} \right)^{q-1} \end{aligned}$$

$$U_n(N) = \left(\frac{2m+1}{2}\right)^n N + 1_m \sum_{q=1}^n \frac{(2m+1)^{q-1}}{2^q}$$

Or :

$$1_m(2m+1) = 2m + 1_m = 3_m$$

D'où :

$$U_n(N) = \left(\frac{2m+1}{2}\right)^n N + \frac{1}{3} \sum_{q=1}^n \left(\frac{3_m}{2}\right)^q = \frac{3^m}{2^n} N + \frac{1}{3} \sum_{q=1}^n \left(\frac{3_m}{2}\right)^q$$

De même pour l'équation exprimée avec la parité paire, on a :

$$U_{n+2}(N) = \left(\frac{3}{2} - 1_p\right)^2 U_n(N) + \left(\frac{3}{2} - 1_p\right) \frac{1-1_p}{2} + \frac{1-1_p}{2}$$

$$U_{n+3}(N) = \left(\frac{3}{2} - 1_p\right)^3 U_n(N) + \left(\frac{3}{2} - 1_p\right)^2 \frac{1-1_p}{2} + \left(\frac{3}{2} - 1_p\right) \frac{1-1_p}{2} + \frac{1-1_p}{2}$$

...

$$U_j(N) = \left(\frac{3}{2} - 1_p\right)^j N + \left(\frac{1-1_p}{2}\right) \sum_{q=1}^j \left(\frac{3}{2} - 1_p\right)^{q-1}$$

$$U_n(N) = \left(\frac{3-2_p}{2}\right)^n N + \left(\frac{1-1_p}{2}\right) \sum_{q=1}^n \left(\frac{3-2_p}{2}\right)^{q-1}$$

Or le facteur $(1 - 1_p)$ est nul si la parité au rang n est paire et vaut 1 si la parité est impaire. C'est-à-dire que :

$$k_m = k - k_p = k(1 - 1_p) \quad \forall k > 0$$

Cela simplifie l'équation comme suit :

$$U_n(N) = \left(\frac{3-2_p}{2}\right)^n N + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^{q-1} (1-1_p) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{N}{3^p} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^{q-1} (1-1_p)$$

On identifie une suite géométrique mais attention on ne peut pas la calculer avec les formules usuelles car chaque rang n n'est pas forcément toujours impair. Ainsi, la suite géométrique ne contient pas tous les membres impairs de la somme géométrique.

Dit autrement, à chaque rang n, on se trouve dans 1 des 2 cas : m ou p. Ainsi, la somme de 1 à n ne peut pas être simplifiée car m et p dépendent du rang (n ou q). Et donc la formule de calcul d'une somme géométrique ne s'applique pas.

Lorsque n=i, on obtient :

$$U_i(N) = 1 = \left(\frac{2m+1}{2}\right)^i N + \frac{1}{3} \sum_{q=1}^i \left(\frac{3_m}{2}\right)^q$$

Ou bien :

$$U_i(N) = 1 = \left(\frac{3-2_p}{2}\right)^i N + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^i \left(\frac{3}{2}\right)^{q-1} (1-1_p)$$

Car au rang i on a toujours la valeur 1 si on considère la conjecture vraie. Et donc dans ce cas :

$$N = \left(\frac{2}{2_m + 1}\right)^i - \frac{1}{3} \sum_{q=1}^i \left(\frac{2_m}{3}\right)^{i-q} = \frac{2^i}{3^m} - \frac{1}{3} \sum_{q=1}^i \left(\frac{2_m}{3}\right)^{i-q}$$

Ou bien :

$$N = \left(\frac{2}{3 - 2_p}\right)^i - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^i \left(\frac{2}{3}\right)^{i-q+1} (1 - 1_p) = 3^p \left(\frac{2}{3}\right)^i - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^i \left(\frac{2}{3}\right)^{i-q+1} (1 - 1_p)$$

Cette dernière équation est complexe à manipuler car, de nouveau, chaque indices m ou p sont fonctions du rang n ou q jusqu'au rang i .

Prenons un exemple :

- $U_0=N=3$: impair, soit indice m valide et p non valide ;
- $U_1=5$: impair, soit indice m valide et p non valide ;
- $U_4=8$: pair, soit indice m non valide et p valide ;
- $U_3=4$: pair, soit indice m non valide et p valide ;
- $U_5=2$: pair, soit indice m non valide et p valide ;
- $U_6=1$ d'où : $i=5$ et :

$$N = \frac{2^5}{3^2} - \frac{1}{3} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \right) = \frac{2^5}{3^2} - \frac{2^4 + 2^3 \cdot 3}{3^5} = 3$$

Ou bien :

$$N = 3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^5 - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 \right) = \frac{2^5}{3^2} - \frac{2^4 + 2^3 \cdot 3}{3^5} = 3$$

Ce résultat donne quelques informations utiles pour la suite sur la structure et la décomposition de la suite de Syracuse.

Mais il n'est pas facile de choisir un nombre de départ N arbitraire pour ensuite, en déduire tous les indices jusqu'au rang i sans utiliser la suite elle-même. De ce fait, on ne peut pas, à ce stade, remonter, à partir de N , la suite et en connaître toutes ses valeurs. On verra plus loin dans ce document comment lever ce point bloquant et essentiel.

~

Maintenant, si on reprend le même raisonnement, avec toujours :

$$k_p = \begin{cases} k & \text{si } U_n(N) \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ; k_m = \begin{cases} k & \text{si } U_n(N) \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ avec } k > 0$$

Ainsi :

$$U_{n+1}(N) = \frac{U_n(N)}{2} \mathbf{1}_p + \frac{3U_n(N) + 1}{2} \mathbf{1}_m = \frac{U_n(N)(\mathbf{1}_p + 3\mathbf{1}_m) + \mathbf{1}_m}{2}$$

A dominant pair :

$$U_{n+1}(N) = \frac{U_n(N)(3 - 2_p) + (1 - 1_p)}{2}$$

A dominant impair :

$$U_{n+1}(N) = \frac{U_n(N)(1 + 2_m) + 1_m}{2}$$

Par itération on obtient :

$$U_{n+4}(N) = \left(\left(\left(U_n(N) \frac{(3 - 2_p)}{2} + \frac{1 - 1_p}{2} \right) \frac{(3 - 2_p)}{2} + \frac{1 - 1_p}{2} \right) \frac{(3 - 2_p)}{2} + \frac{1 - 1_p}{2} \right) \frac{(3 - 2_p)}{2} + \frac{1 - 1_p}{2}$$

$$\begin{aligned} U_i(N) &= N \prod_{j=1}^i \left(\frac{3 - 2_p}{2} \right) + \sum_{j=1}^i \left(\left(\frac{1 - 1_p}{2} \right) \prod_{k=1}^{i-j} \left(\frac{3 - 2_p(i-k)}{2} \right) \right) \\ &= \frac{N}{2^i} 3^{i-p} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \left(\left(\frac{1 - 1_p}{2^{i-j}} \right) \prod_{k=1}^{i-j} (3 - 2_p(i-k)) \right) \\ &= \frac{N}{2^i} 3^{i-p} + \frac{1}{2^{i+1}} \sum_{j=1}^i \left(2^j (1 - 1_p) \prod_{k=1}^{i-j} (3 - 2_p(i-k)) \right) \end{aligned}$$

D'où à dominant pair :

$$U_i(N) = \frac{1}{2^i} \left(3^{i-p} N + \sum_{j=1}^i \left(2^{j-1} (1 - 1_p) \prod_{k=1}^{i-j} (3 - 2_p(i-k)) \right) \right)$$

Attention l'indice p (itérations paires) dans le produit k fois est en itération inverse. C'est-à-dire qu'il faut partir du dernier rang vers le 1^{er}, soit du rang i-k jusqu'au rang j.

De même à dominant impair :

$$\begin{aligned} U_i(N) &= N \prod_{j=1}^i \left(\frac{1 + 2_m}{2} \right) + \sum_{j=1}^i \left(\left(\frac{1_m}{2} \right) \prod_{k=1}^{i-j} \left(\frac{1 + 2_m(i-k)}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2^i} \left(3^m N + \sum_{j=1}^i \left(2^{j-1} 1_m \prod_{k=1}^{i-j} (1 + 2_m(i-k)) \right) \right) \end{aligned}$$

$$U_i(N) = \frac{1}{2^i} \left(3^m N + \sum_{j=1}^i \left(2^{j-1} 1_m \prod_{k=1}^{i-j} (1 + 2_m(i-k)) \right) \right)$$

Et sous la forme indicielle générale :

$$\begin{aligned}
 U_i(N) &= N \prod_{j=1}^i \left(\frac{1_p + 3_m}{2} \right) + \sum_{j=1}^i \left(\left(\frac{1_m}{2} \right) \prod_{k=1}^{i-j} \left(\frac{1_{p(i-k)} + 3_{m(i-k)}}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2^i} \left(3^m N + \sum_{j=1}^i \left(2^{j-1} 1_m \prod_{k=1}^{i-j} (1_{p(i-k)} + 3_{m(i-k)}) \right) \right) \\
 U_i(N) &= \frac{1}{2^i} \left(3^m N + \sum_{j=1}^i \left(2^{j-1} 1_m \prod_{k=1}^{i-j} (1_{p(i-k)} + 3_{m(i-k)}) \right) \right)
 \end{aligned}$$

Le second membre est une suite géométrique dont le résultat est connu. Mais dans notre cas, on ne peut pas le calculer car la suite n'est pas continue sur 0 à i-1. C'est-à-dire que pour certains indices j (les itérations pairs) il n'y a pas de valeur à sommer. Et ces indices de valeur nulle ne sont pas connus à l'avance.

La forme indicielle générale est identique à celle à dominant impair. Ce n'est pas une surprise car la suite de Syracuse est régulière pour les valeurs paires (divisées par deux) et non régulière pour les valeurs impaires (multipliées par $\frac{3}{4}$ ET ajoutées d' $\frac{1}{2}$). Ce $\frac{1}{2}$ ajoute une variation indépendante de la valeur initiale N. ce sont donc bien les valeurs impaires qui tout au long de la suite rythme les durées de vols de manière générale.

Pour vérifier nos équations ci-dessus, prenons un exemple :

N = 12 > 6 > 3 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1, d'où i=7 :

$$U_7(12) = \frac{3^{7-5}}{2^7} 12 + \frac{1}{2^8} (0 + 0 + 2^3(1.1.1.3) + 2^4(1.1.1) + 0 + 0 + 0) = \frac{3^2}{2^7} 12 + \frac{3}{2^5} + \frac{1}{2^4} = \frac{3^3 + 3 + 2}{2^5} = 1$$

De même avec N = 3 > 5 > 8 > 4 > 2 > 1, d'où i=5 :

$$U_5(3) = \frac{3^{5-3}}{2^5} 3 + \frac{1}{2^6} (2^1(1.1.1.3) + 2^2(1.1.1) + 0 + 0 + 0) = \frac{3^3}{2^5} + \frac{3^1}{2^5} + \frac{3^0}{2^4} = \frac{3^3 + 3 + 2}{2^5} = 1$$

4. Descente rapide vers 1 possible ?

La montée la plus rapide et durable implique une parité impaire à chaque itération. Mais peut-on intercepter cette montée fulgurante par une puissance de 2 qui ferait inlassablement chuter la suite vers 1 ? Pour vérifier si cela se produit, on pose :

$$U_i(N) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n (U_k(N) + 1) - 1}{2^{i-k-n}} = 1 \rightarrow U_k(N) = \frac{2^{i-k} + 2^n}{3^n} - 1 \text{ avec } i > n > 0 \text{ et } k \geq 0$$

Sachant que :

$$2^{3^{n-1}(2q+1)} + 1 = 3^n k \quad \forall n > 0, q \geq 0 \text{ et } k > 0$$

On vérifie la divisibilité entière ici comme suit :

$$\frac{2^{i-k} + 2^n}{3^n} = 2^n \left(\frac{2^{i-k-n} + 1}{3^n} \right) \rightarrow i - k - n = 3^{n-1}(2q + 1)$$

$$\rightarrow i = k + n + 3^{n-1}(2q + 1) \quad \forall q \geq 0$$

Par exemple avec $k=1$, $n=3$ et $q=1$, on a :

$$i = 1 + 3 + 3^2 \cdot 3 = 31$$

$$U_1(N) = \frac{2^{31-1} + 2^3}{3^3} - 1 = \frac{2^{30} + 8}{27} - 1 = 39\,768\,215$$

$$\rightarrow N = U_0(N) = \begin{cases} \frac{2U_1(N) - 1}{3} = 26\,512\,143 \text{ si } N \text{ impair} \\ 2U_1(N) = 79\,536\,430 \text{ si } N \text{ pair} \end{cases}$$

Et on a bien :

$$U_{31}(N) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3 (U_1(N) + 1) - 1}{2^{31-1-3}} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3 (39\,768\,215 + 1) - 1}{2^{27}} = \frac{27 \cdot 39\,768\,216}{2^{30}} - \frac{1}{2^{27}} = 1$$

Ainsi une descente rapide existe dans la suite de Syracuse. Mais s'il y a une longue montée successive (plusieurs rangs impairs qui se suivent), alors il s'agira d'un nombre N ou à un rang k donné, très grand. Ce qui revient à dire que ce type de nombre, ou de cas, est rare dans la suite de Syracuse.

On s'attendait à ce résultat puisque par observation, les vols fluctuent de pairs à impairs souvent. Il est rare qu'il y ait un grand nombre d'itérations impaires successives. On a déjà étudié cela dans l'arbre inverse ou rétrograde de la suite de Syracuse.

5. Analyse rétrograde

On se propose ici de trouver l'équation qui régit, à chaque niveau ou rang, la valeur de la suite de Syracuse rétrograde modulo 2. On a déjà précédemment dans cet ouvrage étudié le nombre de valeurs (exponentielles) présentes par niveau. Ici, on s'attache à connaître leur valeur.

Tout d'abord et à l'évidence on a :

$$\text{(niveau 0) Si } U_n(N) = 2^m \text{ alors } U_{n+m}(N) = 1 \text{ et } i = n + m \text{ avec } m \geq 0$$

La conjecture est donc vérifiée dès lors qu'un impair atteint une puissance de 2, soit :

$$\text{(niveau 1) Si } U_n(N) = \frac{3U_{n-1}(N) + 1}{2} = 2^m \text{ alors } U_{n+m}(N) = 1 \text{ et } i = n + m \text{ avec } m \geq 1$$

Pour connaître la forme des prédécesseurs de l'équation précédente, il suffit de poser :

$$U_{n-1}(N) = \frac{2U_n(N) - 1}{3} = \frac{2^{m+1} - 1}{3}$$

Et pour que cette division soit entière, il suffit que :

$$m + 1 = 2k$$

D'où :

$$\text{(niveau 2) } U_{n-1}(N) = \frac{2^{2k} - 1}{3} = \{1; 5; 21; 85; 341; \dots\} \text{ avec } k \geq 1$$

A ce niveau, on a également tous les doubles, c'est-à-dire :

$$U_{n-1}(N) = 2^p \left(\frac{2^{2k} - 1}{3} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 21 & 85 & 341 & \dots \\ 2 & 10 & 42 & 170 & 682 & \dots \\ 4 & 20 & 84 & 340 & 1364 & \dots \\ 8 & 40 & 168 & 680 & 2728 & \dots \\ 16 & 80 & 336 & 1360 & 5456 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Mais comme il ne s'agit qu'exclusivement de nombres pairs, il est inutile de les traiter puisque qu'à un rang supérieur ils retomberont tous sur un nombre impair inférieur que l'on aura donc déjà traité par cette analyse par niveau rétrograde de la suite de Syracuse.

Ainsi, si on continue pour connaître de nouveau les prédécesseurs au rang suivant, on obtient :

$$U_{n-2}(N) = \frac{2U_{n-1}(N) - 1}{3} = \frac{2}{3} \left(\frac{2^{2k} - 1}{3} \right) - \frac{1}{3} = \frac{2^{2k+1} - 5}{9} = \{3; 227; 14\,563; 932\,067; 59\,652\,323; \dots\}$$

Et pour que cette division soit entière, il suffit que :

$$k = 3p + 2 \text{ avec } p \geq 0$$

D'où :

$$\text{(niveau 3) } U_{n-2}(N) = \frac{2^{6p+5} - 5}{9} = \{3; 227; 14\,563; 932\,067; 59\,652\,323; \dots\} \text{ avec } p \geq 0$$

En poursuivant sur le même principe, on obtient pour les niveaux suivants :

$$\text{(niveau 4) } U_{n-3}(N) = \frac{2^{6(p+1)} - 19}{27} = \{151; 39\,768\,215; 10\,424\,999\,137\,431; \dots\} \\ \text{avec } p \in [1; 4; 7[$$

$$(niveau\ 5) U_{n-4}(N) = \frac{2^{6p+7} - 65}{81} = \{26\ 512\ 143; 444\ 799\ 963\ 197\ 085; \dots\} \text{ avec } p \in [4; 8[$$

$$(niveau\ 6) U_{n-5}(N) = \frac{2^{6p+8} - 211}{243} = \{296\ 533\ 308\ 798\ 056; \dots\} \text{ avec } p \geq 8$$

...

On en déduit le cas général suivant :

$$U_{n-q}(N) = \frac{2^{6p+3+q} - A}{3^q} = \frac{2^{3(2p+1)+q} - A}{3^q}$$

Avec :

$$A = \dots 2(2(2(2.1 + 3) + 3^2) + 3^3) + 3^4 \dots = 2^q + \sum_{j=1}^q 2^{q-j} 3^j$$

$$A = 2^q + 2^q \sum_{j=1}^q \left(\frac{3}{2}\right)^j = 2^q \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^q}{1 - \frac{3}{2}}\right) = 2^q \left(1 + 3 \left(\frac{3}{2}\right)^q - 3\right) = 2^q \left(3 \left(\frac{3}{2}\right)^q - 2\right)$$

$$\rightarrow A = 3^{q+1} - 2^{q+1}$$

D'où :

$$(niveau\ q + 1) U_{n-q}(N) = \frac{2^{3(2p+1)+q} - 3^q + 2^q}{3^q} = \left(\frac{2}{3}\right)^q (2^{3(2p+1)} + 1) - 1 \text{ avec } q \geq 1 \text{ et } p \geq 0$$

Et dans ce cas :

$$U_{n+m}(N) = 1 = U_{n+3(2p+1)}(N) \text{ et } i = n + 3(2p + 1)$$

$$\text{car } m = 2k - 1 = 2(3p + 2) - 1 = 6p + 3 = 3(2p + 1)$$

Et dans le cas où :

$$n = q$$

On obtient :

$$(niveau\ n + 1) U_0(N) = N = \left(\frac{2}{3}\right)^n (2^{3(2p+1)} + 1) - 1 \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } p \geq 0$$

$$\rightarrow U_{n+3(2p+1)}(N) = 1 \text{ et } i = n + 3(2p + 1)$$

On a donc calculé la valeur N de départ pour un vol n fois toujours impairs puis 3(2p+1) toujours pairs pour atteindre 1.

Pour illustrer ce résultat, voici un tableau descriptif pour quelques valeurs de p et n :

n	p	N	i
1	0	5	4
1	1	341	10
1	2	21 845	16
1	3	1 398 101	22
1	4	89 478 485	28
2	0	3	5
2	1	227	11
2	2	14 563	17

n	p	N	i
2	3	932 067	23
2	4	59 652 323	29
3	1	151	12
3	4	39 768 215	30
3	7	10 424 999 137 431	48
3	10	2 732 850 973 882 900 000	66
3	13	716 400 485 697 558 000 000 000	84
4	4	26 512 143	31
4	8	444 799 963 197 085	55
4	9	28 467 197 644 613 500	61
4	10	1 821 900 649 255 260 000	67
4	11	116 601 641 552 337 000 000	73
5	8	296 533 308 798 056	56
5	9	18 978 131 763 075 700	62
5	10	1 214 600 432 836 840 000	68
5	11	77 734 427 701 557 900 000	74
5	12	4 975 003 372 899 710 000 000	80

~

Mais ce grand ensemble d'entiers n'est qu'une partie de \mathbb{N} . Il ne contient pas tous les impairs et ainsi tous leurs doubles pairs. Pour les avoir tous, il faut reprendre nos calculs en ajoutant à chaque niveau des puissances de deux. Cela engendrera des branches supplémentaires correspondantes à des vols chaotiques qui permutent souvent d'une parité à une autre. Ces vols sont les plus nombreux et les plus complexes à analyser. Essayons une représentation avec le modèle précédent auquel on a ajouté des puissances de deux entre chaque niveau. On obtient :

$$(niveau 0) \text{ Si } U_n(N) = 2^{p_0} \text{ alors } U_{n+p_0}(N) = 1 \text{ et } i = n + p_0 \text{ avec } p_0 \geq 0$$

Ce niveau est inchangé puisqu'il représente notre point de départ des puissances de deux.

$$(niveau 1) \text{ Si } U_n(N) = \frac{3U_{n-1}(N) + 1}{2} = 2^{p_1} \text{ alors } U_{n+p_1}(N) = 1 \text{ et } i = n + p_1 \text{ avec } p_1 \geq 1$$

Ce niveau est également inchangé puisqu'il représente notre point de départ des impairs.

$$(niveau 2) U_{n-1}(N) = 2^{p_2} \left(\frac{2^{2k} - 1}{3} \right) \text{ avec } k \geq 1 \text{ et } p_2 \geq 0$$

A ce niveau, on a cette fois ajouté tous les doubles.

On poursuit pour connaître les prédécesseurs :

$$U_{n-2}(N) = \frac{2U_{n-1}(N) - 1}{3} = \frac{2^{p_2+1} \left(\frac{2^{2k} - 1}{3} \right) - 1}{3} = \frac{2^{2k+p_2+1} - 2^{p_2+1} - 3}{9} = \frac{2^{p_2+1}(2^{2k} - 1) - 3}{9}$$

Et pour que la division soit entière, il faut que :

$$k = \begin{cases} 3r + 2 & \text{si } p_2 \text{ pair} \\ 3r + 1 & \text{si } p_2 \text{ impair} \end{cases} \text{ avec } r \geq 0 \text{ et } p_2 \geq 0$$

Que l'on peut aussi écrire comme suit :

$$k = 3r + 1 + \frac{1 + (-1)^{p_2}}{2} = 3r + \frac{3 + (-1)^{p_2}}{2} \text{ avec } r \geq 0 \text{ et } p_2 \geq 0$$

D'où :

$$U_{n-2}(N) = \frac{2^{p_2+1} \left(2^{2 \left(3r + \frac{3 + (-1)^{p_2}}{2} \right)} - 1 \right) - 3}{9} = \frac{2^{p_2+1} \left(2^{3(2r+1) + (-1)^{p_2}} - 1 \right) - 3}{9}$$

Or :

$$2^{(-1)^{p_2}} = \left\{ 2; \frac{1}{2} \right\} = 2 \left(\frac{1 + (-1)^{p_2}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - (-1)^{p_2}}{2} \right) = \frac{5 + 3(-1)^{p_2}}{4}$$

Et donc :

$$\text{(niveau 3) } U_{n-2}(N) = 2^{p_3} \left(\frac{2^{p_2+1} (2^{6r+1} (5 + 3(-1)^{p_2}) - 1) - 3}{9} \right) \text{ avec } p_3 \geq 0$$

En poursuivant sur le même principe, on obtient pour le niveau suivant :

$$\begin{aligned} U_{n-3}(N) &= \frac{2^{p_3+1}}{3} \left(\frac{2^{p_2+1} (2^{6r+1} (5 + 3(-1)^{p_2}) - 1) - 3}{9} \right) - \frac{1}{3} \\ &= \frac{2^{p_3+1} (2^{p_2+1} (2^{6r+1} (5 + 3(-1)^{p_2}) - 1) - 3) - 9}{27} \end{aligned}$$

D'où :

$$\text{(niveau 4) } U_{n-3}(N) = 2^{p_4} \left(\frac{2^{p_3+1} (2^{p_2+1} (2^{6r+1} (5 + 3(-1)^{p_2}) - 1) - 3) - 9}{27} \right) \text{ avec } p_4 \geq 0$$

...

On en déduit le cas général suivant :

$$U_{n-q}(N) = 2^{p_{q+1}} \left(\frac{2^{p_q+1} (2^{p_{q-1}+1} (\dots (2^{p_2+1} (2^{6r+1} (5 + 3(-1)^{p_2}) - 3^0) - 3^1) \dots) - 3^{q-2}) - 3^{q-1}}{3^q} \right) \text{ avec } p_q \geq 0 \text{ et } q \geq 2$$

Soit :

$$\begin{aligned} U_{n-q}(N) &= \frac{2^{p_{q+1}}}{3^q} \left(2^{\sum_{j=2}^q (p_j+1)} 2^{6r+1} (5 + 3(-1)^{p_2}) - \sum_{k=0}^{q-1} 2^{\sum_{j=k+2}^q (p_j+1)} 3^k \right) \\ U_{n-q}(N) &= \frac{2^{p_{q+1}}}{3^q} \left(2^{6r+q+\sum_{j=2}^q p_j} (5 + 3(-1)^{p_2}) - \sum_{k=0}^{q-1} 2^{q+k+1+\sum_{j=k+2}^q p_j} 3^k \right) \\ U_{n-q}(N) &= 2^{p_{q+1}} \left(\frac{2}{3} \right)^q \left(2^{6r+\sum_{j=2}^q p_j} (5 + 3(-1)^{p_2}) - 2 \sum_{k=0}^{q-1} 3^k 2^{k+\sum_{j=k+2}^q p_j} \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\text{(niveau } q+1) U_{n-q}(N) = 2^{p_{q+1}} \left(\frac{2}{3} \right)^q \left(2^{6r+\sum_{j=2}^q p_j} (5 + 3(-1)^{p_2}) - 2 \sum_{k=0}^{q-1} 3^k 2^{k+\sum_{j=k+2}^q p_j} \right) \text{ avec } p_q \geq 0 \text{ et } q \geq 2$$

Et dans ce cas :

$$U_{n+p_1}(N) = 1 = U_{n+2(3r+1)+(-1)^{p_2}}(N) \text{ et } i = n + 2(3r + 1) + (-1)^{p_2}$$

$$\text{car } p_1 = 2k - 1 = 2 \left(3r + \frac{3 + (-1)^{p_2}}{2} \right) - 1 = 2(3r + 1) + (-1)^{p_2}$$

Et dans le cas où :

$$n = q$$

On obtient :

$$(\text{niveau } n + 1) U_0(N) = N = 2^{p_{n+1}} \left(\frac{2}{3} \right)^n \left(2^{6r + \sum_{j=2}^n p_j} (5 + 3(-1)^{p_2}) - 2 \sum_{k=0}^{n-1} 3^k 2^{k + \sum_{j=k+2}^n p_j} \right)$$

avec $p_n \geq 0$ et $n \geq 2$

$$\rightarrow U_{n+2(3r+1)+(-1)^{p_2}}(N) = 1 \text{ et } i = n + 2(3r + 1) + (-1)^{p_2}$$

Ce résultat est comparable au résultat relatif à la forme de N déjà trouvée par itérations successives et multiples des formes itérées paires et impaires.

Tout cela vient compléter et confirmer le graphe du filet avec les maillages des valeurs selon leur parcours rang après rang en remontant l'arbre de la suite de Syracuse à partir de la valeur 1.

6. Forme globale

La suite de Syracuse peut s'écrire de manière le plus compact comme suit :

$$U_n(N) = \frac{3N + 1}{2^a} \text{ avec } a \geq 1, N > 0 \text{ et impair}$$

N est, sous cette forme, forcément impair, car débutant par une itération impaire. a correspond aux nombres d'itérations successives d'une fois impaire puis zéro à n-1 itérations paires. a est donc variable d'un rang à l'autre et n'est pas connu à l'avance.

Cette forme peut être itérée pour avoir une forme globale de la suite de Syracuse. On obtient :

$$U_n(N) = \frac{3}{2^{a_k}} \left(\dots \left(\frac{3}{2^{a_3}} \left(\frac{3}{2^{a_2}} \left(\frac{3N + 1}{2^{a_1}} \right) + \frac{1}{2^{a_2}} \right) + \frac{1}{2^{a_3}} \right) + \dots \right) + \frac{1}{2^{a_k}} \text{ avec } a_k \geq 1 \text{ et } k \geq n$$

Soit :

$$U_n(N) = \frac{3^m}{2^n} N + \sum_{q=1}^m \frac{3^{m-q}}{2^{\sum_{j=q}^m a_j}} = \frac{1}{2^n} \left(3^m N + \sum_{q=1}^m 3^{m-q} \cdot 2^{\sum_{j=1}^{q-1} a_j} \right) \text{ avec } n = p + m = \sum_{j=1}^m a_j \text{ et } m \geq 1$$

n est le nombre d'itérations totale.

m est le nombre d'itérations impaires compris jusqu'au rang n.

p est le nombre d'itérations paires compris jusqu'au rang n.

Et si la conjecture est vérifiée, on a :

$$U_n(N) = 1 \text{ et } n = i \rightarrow N = \frac{1}{3^m} \left(2^i - \sum_{q=1}^m 3^{m-q} \cdot 2^{\sum_{j=1}^{q-1} a_j} \right)$$

Prenons l'exemple le plus simple :

$$m = 1 \rightarrow N = \frac{2^i - 2^0}{3} = \frac{2^i - 1}{3}$$

Et pour que cette division soit entière il suffit que :

$$i = 2k \rightarrow N = \frac{4^k - 1}{3} = \{1; 5; 21; 85; 341; \dots\} \text{ avec } k > 0$$

On a donc toutes les valeurs de N impairs une première fois puis toujours pairs jusqu'à 1.

Prenons l'exemple suivant avec :

$$m = 2 \rightarrow N = \frac{2^i - 3^1 \cdot 2^0 - 3^0 \cdot 2^{a_1}}{9} = \frac{2^i - 2^{a_1} - 3}{9}$$

$$\text{Or : } i = a_1 + a_2 \rightarrow N = \frac{2^{a_1} 2^{a_2} - 2^{a_1} - 3}{9} \rightarrow (2^{a_2} - 1) \cdot 2^{a_1} = 3 \cdot (3N + 1)$$

On voit selon les parités des produits ci-dessus le groupe de solutions suivant :

$$2^{a_2} - 1 = 3 \text{ et } 2^{a_1} = 3N + 1 \rightarrow a_2 = 2 \text{ et } N = \frac{2^{a_1} - 1}{3} \text{ si } a_1 = 2k \rightarrow \{a_1; a_2\} = \{2k; 2\} \text{ avec } k > 0$$

Plus globalement, on observe que :

$$\text{Si } a_1 = \{1; 3; 5; \dots\} \text{ alors } a_2 = \{4; 10; 16; 22; \dots\} \rightarrow \{a_1; a_2\} = \{2k + 1; 6k + 4\} \text{ avec } k \geq 0$$

$$\text{Si } a_1 = \{2; 4; 6; \dots\} \text{ alors } a_2 = \{2; 8; 14; 20; \dots\} \rightarrow \{a_1; a_2\} = \{2k; 6k - 4\} \text{ avec } k > 0$$

On a donc les deux familles de solutions suivantes pour N :

$$N = \frac{2^{2k+1}2^{6k+4} - 2^{2k+1} - 3}{9} = \frac{2 \cdot 4^k(16 \cdot 64^k - 1) - 3}{9}$$

$$N = \frac{2^{2k}2^{6k-4} - 2^{2k} - 3}{9} = \frac{4^k \left(\frac{64^k}{16} - 1 \right) - 3}{9}$$

Cela génère très vite de grande valeur pour N qui correspondent toutes à la même séquence de parités, à savoir :

*Une itération impaire,
suivie de $(a_1 - 1)$ itérations paires (si $a_1 > 1$),
suivie d'une itération impaire,
suivie de $(a_2 - 1)$ itérations paires (si $a_2 > 1$) jusqu'à atteindre 1.*

Prenons l'exemple suivant avec :

$$m = 3 \rightarrow N = \frac{2^i - 3^2 \cdot 2^0 - 3^1 \cdot 2^{a_1} - 3^0 \cdot 2^{a_1+a_2}}{27} = \frac{2^i - 9 - 3 \cdot 2^{a_1} - 2^{a_1+a_2}}{27}$$

$$Or : i = a_1 + a_2 + a_3 \rightarrow N = \frac{2^{a_1}2^{a_2}2^{a_3} - 2^{a_1}2^{a_2} - 3 \cdot 2^{a_1} - 9}{27} \rightarrow (2^{a_2}(2^{a_3} - 1) - 3) \cdot 2^{a_1} = 9 \cdot (3N + 1)$$

On voit selon les parités des produits ci-dessus le groupe de solutions suivant :

$$\begin{aligned} 2^{a_2}(2^{a_3} - 1) - 3 &= 9 \text{ et } 2^{a_1} = 3N + 1 \\ \rightarrow 2^{a_2} \cdot (2^{a_3} - 1) &= 12 = 4 \cdot 3 \rightarrow a_2 = 2 \text{ et } a_3 = 2 \\ \rightarrow N &= \frac{2^{a_1} - 1}{3} \text{ si } a_1 = 2k \rightarrow \{a_1; a_2; a_3\} = \{2k; 2; 2\} \text{ avec } k > 0 \end{aligned}$$

Plus globalement, on observe qu'il existe une multitude d'autres solutions. En effet, les valeurs de N correspondent toutes à la même séquence de parités, à savoir :

*Une itération impaire, suivie de $(a_1 - 1)$ itérations paires (si $a_1 > 1$),
suivie d'une itération impaire, suivie de $(a_2 - 1)$ itérations paires (si $a_2 > 1$),
suivie d'une itération impaire, suivie de $(a_3 - 1)$ itérations paires*

Cela représente une infinité de possibilités.

Pour **m quelconque**, on aura la séquence de parités globale suivante :

*$m = 1$:
1 itération impaire, suivie de $(a_m - 1)$ itérations paires (si $a_m > 1$),
et ainsi de suite en incrémentant m de 1 jusqu'à atteindre 1 au bout de m rangs.*

Cette formulation décrit fidèlement les séquences de vols. Mais cela ne permet pas à ce stade de conclure.

6. Itération indicielle modulo 4

On se propose de calculer une forme générale modulo 4. Cela permettra de connaître toutes les valeurs de la suite à partir d'un nombre de départ N en une seule fois.

On rappelle tout d'abord notre résultat précédent de la conjecture de Syracuse simplifiée modulo 4 :

$$U_0 = N \text{ et } \forall p > 0 : \\ U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{4} & \text{si } U_n = 4p \text{ (2 fois pair)} \\ \frac{3U_n + 1}{4} & \text{si } U_n = 4p + 1 \text{ (impair puis pair)} \\ \frac{3U_n + 2}{4} & \text{si } U_n = 4p + 2 \text{ (pair puis impair)} \\ \frac{9U_n + 5}{4} & \text{si } U_n = 4p + 3 \text{ (2 fois impair)} \end{cases}$$

Pour cela, on pose préalablement les indices de nombres suivants :

$$\begin{aligned} k_a &= k \text{ si } U_n(N) = 4p + 1, \text{ sinon } = 0 \\ k_b &= k \text{ si } U_n(N) = 4p + 2, \text{ sinon } = 0 \\ k_c &= k \text{ si } U_n(N) = 4p + 3, \text{ sinon } = 0 \\ k_d &= k \text{ si } U_n(N) = 4p, \text{ sinon } = 0 \end{aligned}$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} 3_d &= 3 \text{ si } U_n(N) = 4p, \text{ sinon } 3_d = 0 \\ 6_{bd} &= 6 \text{ si } U_n(N) = 4p \text{ ou } 4p + 2, \text{ sinon } 6_{bd} = 0 \end{aligned}$$

Cette notation d'indices modulaires, simple à manipuler de par ses propriétés arithmétiques, permettra ci-dessous de factoriser les 4 cas de la suite modulo 4 décrite précédemment. Ensuite, on pose, en une seule équation, la valeur de la suite au rang suivant n+1, soit :

$$U_{n+1}(N) = \frac{3^{1_{abc}+1_c} U_n(N) + 1_{abc} + 1_{bc} + 3_c}{4}$$

Lorsque les indices sont combinés, il faut comprendre dans cette notation un OU logique. Par exemple, abc = cas a ou b ou c, sachant qu'il n'y a qu'un seul cas par itération.

On itère cette dernière :

$$U_{n+1}(N) = \frac{3^{1_{abc}+1_c} \left(\frac{3^{1_{abc}+1_c} U_{n-1}(N) + 1_{abc} + 1_{bc} + 3_c}{4} \right) + 1_{abc} + 1_{bc} + 3_c}{4}$$

A noter que :

$$\text{et } 1_{abc} = 1_{abc} + 1_d - 1_d = 1_{abcd} - 1_d = 1 - 1_d$$

On continue l'itération pour en déduire :

$$U_n(N) = \left(\frac{3}{4}\right)^n 3^{\sum_{j=1}^n (1_c - 1_d)} N + \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{3}{4}\right)^j 3^{-1 + \sum_{q=n}^j (1_c - 1_d)} (1 + 1_{bc} + 3_c - 1_d) \right)$$

A chaque rang n, on se trouve dans 1 des 4 cas : a, b, c ou d. ainsi, la somme de 1 à n ne peut pas être simplifiée car a, b, c et d dépendent du rang (j ou n).

Lorsque n=i-1, on obtient :

$$U_{i-1}(N) = 2 + 2_e = \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} 3^{\sum_{j=1}^{i-1}(1_c-1_d)N} + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^j 3^{-1+\sum_{q=i-1}^j(1_c-1_d)} (1 + 1_{bc} + 3_c - 1_d) \right)$$

Car au rang i-1 on a toujours la valeur 2 (e=0) ou 4 (e=1) si on considère qu'on obtient toujours 1 au rang i. On ne se positionne pas au rang i car il n'est pas modulo 4 (avec p>0).

Et donc dans ce cas :

$$N = 3^{\sum_{j=1}^{i-1}(1_d-1_c)} \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{i-1} (2 + 2_e) - \sum_{j=1}^{i-1} \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{i-j-1} 3^{-1+\sum_{q=i-1}^j(1_c-1_d)} (1 + 1_{bc} + 3_c - 1_d) \right) \right)$$

Cette dernière équation est complexe à manipuler car, de nouveau, chaque indice a, b, c, et d sont fonction du rang n.

Prenons un exemple :

U0=N=7 =4p+3 avec p=1, soit indice c valide ; on prend e=0 arbitrairement ;

U1=17 =4p+1 avec p=4, soit indice a valide ;

U2=13 =4p+1 avec p=3, soit indice a valide ;

U3=10 =4p+2 avec p=2, soit indice b valide ;

U4=8 =4p avec p=2, soit indice d valide ;

U5=2

U6=1 d'où : i=6

Ce qui donne :

$$N = 3^{-1+0+0+0+1} \left(2 \left(\frac{4}{3}\right)^5 - \sum_{j=1}^5 \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{5-j} 3^{-1+\sum_{q=5}^j(1_c-1_d)} (1 + 1_{bc} + 3_c - 1_d) \right) \right)$$

$$N = 2 \left(\frac{4}{3}\right)^5 - \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^4}{3^{-1-1.5}} 3^{-1-1+0+0+0+1.0} - \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3}{3^{-1-1+0+0+0.2}} 3^{-1-1+0+0+0.2} - \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{3^{-1-1+0+0.1}} 3^{-1-1+0+0.1} - \frac{4}{3} \cdot 3^{-1-1+0.1}$$

$$N = \frac{2 \cdot 4^5 - 2 \cdot 4^3 - 3^1 \cdot 4^2 - 3^2 \cdot 4 - 3^3 \cdot 5}{3^5} = 7$$

A noter qu'il faut partir du dernier indice vers le premier pour calculer la somme à retrancher ci-dessus.

Si on choisit arbitrairement e=1 on arrête l'opération par itération dès qu'on obtient un nombres pas entier (rationnel à virgule), et on recommence du départ avec e=0. En effet, on ne connaît pas à l'avance si la fin du vol sera 4 puis 1 ou 2 puis 1.

Ce résultat donne quelques informations utiles pour la suite sur la structure et la décomposition de la suite de Syracuse.

Mais il n'est pas facile de choisir un nombre de départ N arbitraire pour ensuite, en déduire tous les indices jusqu'au rang i sans utiliser la suite simplifiée modulo 4 décrite précédemment. De ce fait, on ne peut pas, à ce stade, remonter, à partir de N , la suite et en connaître toutes ses valeurs. On verra plus loin dans ce document comment lever ce point bloquant et essentiel.

7. Trajectoires, $U_n(N) = 4k + 3$ et $U_n(N) < N$

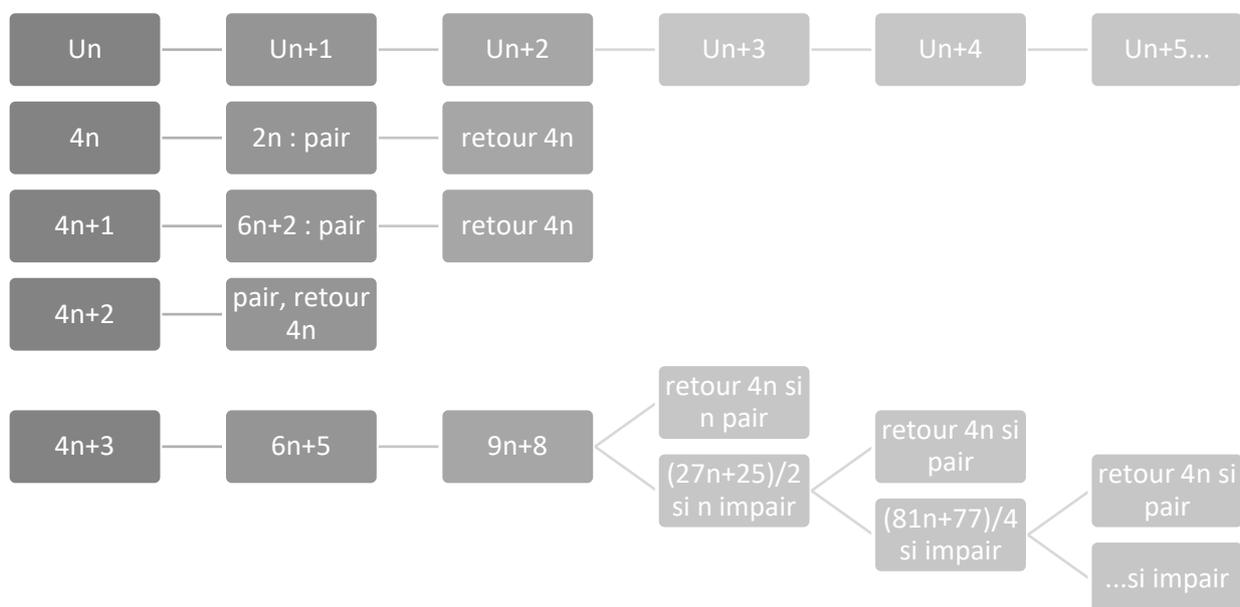
On appelle trajectoire de la suite toutes les directions possibles à partir du nombre de départ N en lui appliquant la suite au rang suivant, qu'elles soient croissantes ou décroissantes. Cela afin d'analyser les cas de convergences et de divergences.

On a vu précédemment que la division entière par 3 implique une puissance paire :

$$\frac{2^{2^r} - 1}{3} = \frac{4^r - 1}{3}$$

Ainsi, on va étudier plus particulièrement les trajectoires à partir d'un $U_n(N)$ modulo 4.

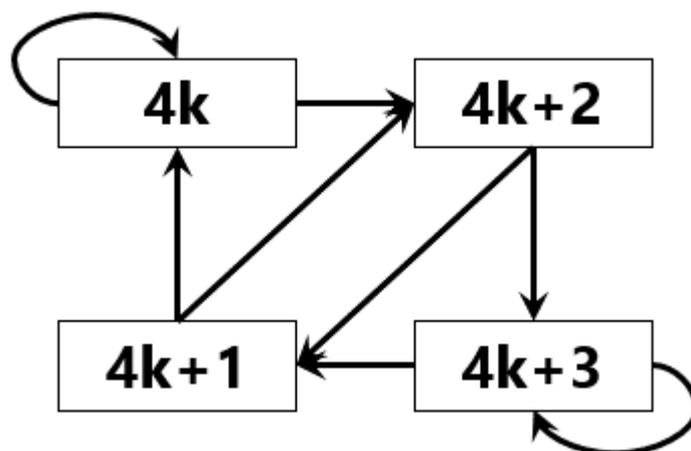
Les trajectoires possibles sont :



/!\ Attention l'indice n utilisé dans les modulus 4 est indépendant du rang n des $U_n(N)$.

On observe que les possibilités sont infinies.

Les trajectoires à partir d'un N ou d'un $U_n(N)$ modulo 4 peuvent également se représenter comme suit :



A partir d'une valeur de la suite de Syracuse, et selon sa forme modulo 4, on en déduit la ou les formes modulo 4 de la valeur suivante de la suite.

On choisit la méthode suivante. On va parcourir la majorité des possibilités de la suite de Syracuse modulo 4 pour $n < 51$ en notant les parcours et les proportions de possibilités, que l'on additionnera pour connaître le taux global de décroissance de la suite.

En effet, on va parcourir les trajectoires jusqu'à ce qu' $U_n(N) < U_0(N) = N$. Sachant que tous les N inférieur aient été déjà traité par le même procédé. Dès lors qu'on arrive à un $U_n(N) < N$ alors non seulement la suite décroît mais elle converge vers 1 puisque c'est vérifié pour tous les autres N inférieur.

Prouver la conjecture de Syracuse revient à prouver que :
Pour tout N il existe un rang n ou $U_n(N) < N$.

Vous trouverez dans les pages suivantes le tableau 4 en partie correspondant aux trajectoires modulo 4 de la suite de Syracuse.

Un	$4n$	$4n+1$	$4n+2$	$4n+3$		
$Un+1$	2n : pair et $< Un$	6n+2 : pair 3n+1 : impair et $< Un$	2n+1 : impair et $< Un$	6n+5 : impair		
$Un+2$				9n+8		
$Un+3$				Si n pair ou 0 = 9n/2+4		
$Un+4$				Si Un+3 pair = 9n/4+2 $< Un$	Si Un+3 impair = (27n+26)/4	
$Un+5$					Si Un+4 pair = (27n+26)/8 $< Un$	Si Un+4 impair = (81n+82)/8
$Un+6$						Si Un+5 pair = (81n+82)/16
$Un+7$						Si Un+6 pair = (81n+82)/32 $< Un$
$Un+8$						
$Un+9$						
...						
Décroissance ...	Au rang n+1	Au rang n+2	Au rang n+1	Au rang n+4	Au rang n+5	Au rang n+7
Avec ...	$n \geq 1$	$n \geq 0$	$n \geq 0$	$n \geq 0$ et pair	$n \geq 2$ et pair	$n \geq 14$ et pair
Proportion	1/4	1/4	1/4	1/16	1/32	1/128
Taux de décroissance	25,00%	25,00%	25,00%	6,25%	3,13%	0,78%
92,68%						
n=0	-	1	2	3		
n=1	4	5	6			
n=2	8	9	10		11	
n=3	12	13	14			
n=4	16	17	18	19		
n=5	20	21	22			
n=6	24	25	26			
n=7	28	29	30			
n=8	32	33	34	35		
n=9	36	37	38			
n=10	40	41	42		43	
n=11	44	45	46			
n=12	48	49	50	51		
n=13	52	53	54			
n=14	56	57	58			59
n=15	60	61	62			
n=16	64	65	66	67		
n=17	68	69	70			
n=18	72	73	74		75	
n=19	76	77	78			
n=20	80	81	82	83		
n=21	84	85	86			
n=22	88	89	90			
n=23	92	93	94			
n=24	96	97	98	99		
n=25	100	101	102			
n=26	104	105	106		107	
n=27	108	109	110			
n=28	112	113	114	115		
n=29	116	117	118			
n=30	120	121	122			
n=31	124	125	126			
n=32	128	129	130	131		
n=33	132	133	134			
n=34	136	137	138		139	
n=35	140	141	142			
n=36	144	145	146	147		
n=37	148	149	150			
n=38	152	153	154			
n=39	156	157	158			
n=40	160	161	162	163		
n=41	164	165	166			
n=42	168	169	170		171	
n=43	172	173	174			
n=44	176	177	178	179		
n=45	180	181	182			
n=46	184	185	186			187
n=47	188	189	190			
n=48	192	193	194	195		
n=49	196	197	198			
n=50	200	201	202		203	

Un		4n+3 (suite)		
Un+1				
Un+2				
Un+3				
Un+4				
Un+5	Si Un+4 impair = $(81n+82)/8$			
Un+6	Si Un+5 pair = $(81n+82)/16$			
Un+7	Si Un+6 pair = $(81n+82)/32 < \mathbf{Un}$	Si Un+6 impair = $(243n+262)/32$	Si Un+5 impair = $(243n+254)/16$	Si Un+6 impair = ...
Un+8		Si Un+7 pair = $(243n+262)/64 < \mathbf{Un}$	Si Un+7 impair = ...	Si Un+7 pair = $(243n+254)/64 < \mathbf{Un}$
Un+9				
...				
Décroissance ...				
Avec ...	Au rang n+7	Au rang n+8	Au rang n+8	
Proportion	n ≥ 14 et pair 1/128	n ≥ 30 et pair 1/256	n ≥ 54 et pair 1/256	
Taux de décroissance	0,78%	0,39%	0,39%	
92,68%				
n=0				
n=1				
n=2				
n=3				
n=4				
n=5				
n=6				27
n=7				
n=8				
n=9				
n=10				
n=11				
n=12				
n=13				
n=14	59			
n=15				
n=16				
n=17				
n=18				
n=19				
n=20				
n=21				
n=22				91
n=23				
n=24				
n=25				
n=26				
n=27				
n=28				
n=29				
n=30		123		
n=31				
n=32				
n=33				
n=34				
n=35				
n=36				
n=37				
n=38				155
n=39				
n=40				
n=41				
n=42				
n=43				
n=44				
n=45				
n=46	187			
n=47				
n=48				
n=49				
n=50				

4n+3 (suite)				
Un				
Un+1				
Un+2				
Un+3	Si n impair = (27n+25)/2			
Un+4	si Un+3 pair = (27n+25)/4			
Un+5	si Un+4 pair = (27n+25)/8 < Un			
Un+6	si Un+4 impair = (81n+79)/8			
Un+7	Si Un+5 pair = (81n+79)/16			
Un+8	Si Un+5 impair = (243n+245)/16			
Un+9	Si Un+6 pair = (243n+245)/32			
...	Si Un+6 impair = ...			
Un+7	si Un+6 pair = (81n+79)/32 < Un			
Un+8	si Un+6 impair = (243n+253)/32			
Un+9	si Un+7 pair = (243n+253)/64 < Un			
Un+7	si Un+7 impair = ...			
Un+8	Si Un+7 pair = (243n+245)/64 < Un			
Un+9				
...				
Décroissance ...	Au rang n+5	Au rang n+7	Au rang n+8	Au rang n+8
Avec ...	n ≥ 5 et impair	n ≥ 1 et impair	n ≥ 49 et impair	n ≥ 9 et impair
Proportion	1/32	1/128	1/256	1/256
Taux de décroissance	3,13%	0,78%	0,39%	0,39%
92,68%				
n=0				
n=1		7		
n=2				
n=3				
n=4				
n=5		23		
n=6	27			
n=7				
n=8				
n=9				39
n=10				
n=11			47	
n=12				
n=13		55		
n=14				
n=15				
n=16				
n=17			71	
n=18				
n=19				
n=20				
n=21		87		
n=22				
n=23				
n=24				
n=25				
n=26				
n=27				
n=28				
n=29		119		
n=30				
n=31				
n=32			135	
n=33				
n=34				
n=35				
n=36				
n=37		151		
n=38	155			
n=39				
n=40				
n=41				
n=42				
n=43				
n=44				
n=45		183		
n=46				
n=47				
n=48				
n=49			199	
n=50				

Un		4n+3 (suite 2)		
Un+1				
Un+2				
Un+3				
Un+4			si Un+3 impair = (81n+77)/4	
Un+5			Si Un+4 pair = (81n+77)/8	
Un+6	Si Un+5 impair = (243n+245)/16		Si Un+5 pair = (81n+77)/16	
Un+7	Si Un+6 pair = (243n+245)/32	si Un+6 impair = ...	Si Un+6 pair = (81n+77)/32 < Un	si Un+6 impair = (243n+247)/32
Un+8	Si Un+7 pair = (243n+245)/64 < Un	si Un+7 impair = ...		si Un+7 pair = (243n+247)/64 < Un si Un+7 impair = ...
Un+9				
...				
Décroissance ...	Au rang n+8		Au rang n+7	Au rang n+8
Avec ...	n ≥ 9 et impair		n ≥ 3 et impair	n ≥ 19 et impair
Proportion	1/256		1/128	1/256
Taux de décroissance	0,39%		0,78%	0,39%
92,68%				
n=0				
n=1				
n=2				
n=3			15	
n=4				
n=5				
n=6				
n=7				
n=8				
n=9	39			
n=10				
n=11				
n=12				
n=13				
n=14				
n=15				
n=16				
n=17				
n=18				
n=19				79
n=20				
n=21				
n=22				
n=23				
n=24				
n=25		103		
n=26				
n=27				
n=28				
n=29				
n=30				
n=31				
n=32				
n=33				
n=34				
n=35			143	
n=36				
n=37				
n=38				
n=39				
n=40				
n=41	167			
n=42				
n=43				
n=44				
n=45				
n=46				
n=47				
n=48				
n=49				
n=50				

Un		4n+3 (suite 2)	
Un+1			
Un+2			
Un+3			
Un+4			
Un+5			Si Un+4 impair = (243n+235)/8
Un+6	Si Un+5 impair = (243n+239)/16		Si Un+5 pair = (243n+235)/16
Un+7	Si Un+6 pair = (243n+239)/32	Si Un+6 impair = ...	Si Un+6 pair = (243n+235)/32
Un+8	si Un+7 impair = ...	Si Un+7 pair = (243n+239)/64 < Un	Si Un+7 impair = ...
Un+9			Si Un+7 pair = (243n+235)/64 < Un
...			
Décroissance ...		Au rang n+8	Au rang n+8
Avec ...		n ≥ 43 et impair	n ≥ 23 et impair
Proportion		1/256	1/256
Taux de décroissance		0,39%	0,39%
92,68%			
n=0			
n=1			
n=2			
n=3			
n=4			
n=5			
n=6			
n=7			
n=8			
n=9			
n=10			
n=11			
n=12			
n=13			
n=14			
n=15			
n=16			
n=17			
n=18			
n=19			
n=20			
n=21			
n=22			
n=23			95
n=24			
n=25			
n=26			
n=27		111	
n=28			
n=29			
n=30			
n=31			
n=32			
n=33			
n=34			
n=35			
n=36			
n=37			
n=38			
n=39			
n=40			
n=41			
n=42			
n=43	175		
n=44			
n=45			
n=46			
n=47			
n=48			
n=49			
n=50			

Un	4n+3 (suite 2)
Un+1	
Un+2	
Un+3	
Un+4	
Un+5	
Un+6	Si Un+5 impair = $(729n+713)/16$
Un+7	Si Un+6 impair = ... Si Un+6 pair = $(729n+713)/32$ Si Un+6 impair = ...
Un+8	Si Un+7 impair = ... Si Un+7 pair = $(729n+713)/64$ Si Un+7 impair = ...
Un+9	Si Un+8 pair = $(729n+713)/128$ Si Un+8 impair = ... Si Un+8 impair = ...
...	Si Un+9 pair = $(729n+713)/256 < \mathbf{Un}$ Si Un+9 impair = ...
Décroissance ...	Au rang n+10
Avec ...	n ≥ 143 et impair
Proportion	1/1024
Taux de décroissance	0,10%
92,68%	
n=0	
n=1	
n=2	
n=3	
n=4	
n=5	
n=6	
n=7	31
n=8	
n=9	
n=10	
n=11	
n=12	
n=13	
n=14	
n=15	63
n=16	
n=17	
n=18	
n=19	
n=20	
n=21	
n=22	
n=23	
n=24	
n=25	
n=26	
n=27	
n=28	
n=29	
n=30	
n=31	
n=32	127
n=33	
n=34	
n=35	
n=36	
n=37	
n=38	
n=39	159
n=40	
n=41	
n=42	
n=43	
n=44	
n=45	
n=46	
n=47	191
n=48	
n=49	
n=50	

On dénombre dans ce tableau que **plus de 92,66% de tous les cas possibles** de la suite de Syracuse **décroissent** au bout d'un certain rang défini, plus ou moins lointain.

Mais cela ne prouve en rien que ces >92,66% convergent vers 1 car dès que la suite passe par les moins de 8% non dénombrés, cela peut croître et encore diverger. Pour s'en assurer il faudrait poursuivre ce dénombrement jusqu'à couvrir les 100% de la suite, soit sa totalité. Or, plus les cas sont rares, plus ils sont long à parcourir (pour devenir inférieur à l' $U_n(N)$ de départ) et plus ils sont nombreux à dénombrer, car ils se subdivisent en 2 à chaque nouvelle itération. Ce travail est infini et ne peut donc pas être reporté dans un simple tableau.

A la lecture du tableau précédent, on peut de nouveau limiter nos recherches à moins de 7,33% de l'ensemble des entiers. C'est-à-dire 1 cas sur 4 moins les 17,66% déjà traités dans le tableau précédent. De ce fait, on a :

Prouver la conjecture de Syracuse revient à prouver que :
 $\forall N=4k+3$ avec $k \geq 0$, il existe un rang n tel que $U_n(N) < N$.

Le tableau transcrit également toutes les valeurs de $N < 204$ avec leurs positions et probabilité de décroissance à un rang défini également. Cela permet, comme expliqué ci-dessus, de repérer visuellement la fréquence par type de nombre.

Si on reprend notre tableau des 100 premiers entiers, **on a résolu 91%**. Il en reste 6 (cases blanches) + leurs 3 doubles inférieurs à 100 (cases grisées).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Sur les 1000 premiers entiers, on sait maintenant résoudre 927 cas, soit 92,7%.

1. A-t-on $U_k(N) < N$ dans tous les cas ?

Dans le cas des $U_n(N)$ non résolus, c'est-à-dire non décroissants à 100%, du type $4m+3$, on note une forme remarquable, des $U_n(N)$ suivants, comme cela :

$$U_{n+j}(N) = \frac{3^p m + b}{2^q} \text{ avec } \begin{cases} b \text{ impair et } b < 3^p \text{ si } m \text{ impair} \\ b \text{ pair et } b \geq 3^p + 1 \text{ si } m \text{ pair} \\ \text{et } U_n(N) = 4m + 3 \text{ avec } m > 0 \end{cases}$$

Pour avoir :

$$U_{n+j}(N) < U_n(N) \text{ ce qui revient à } U_k(N) < N$$

Il faut que :

$$\frac{3^p m + b}{2^q} < 4m + 3$$

Soit membre à membre :

$$\begin{aligned} 3^p &< 2^{q+2} \\ b &< 3 \cdot 2^q \end{aligned}$$

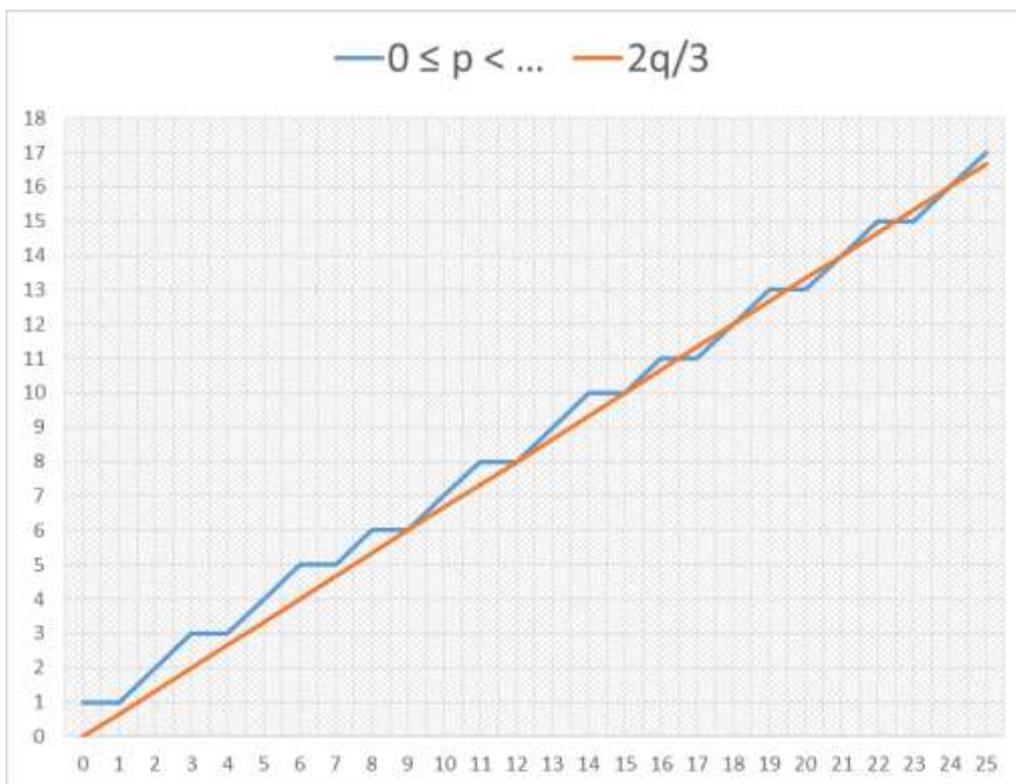
Par addition membre à membre :

$$3^p + b < 7 \cdot 2^q$$

En passant en logarithme, on obtient :

$$\begin{aligned} p \cdot \ln(3) &< (q + 2) \ln(2) \\ \frac{p}{q + 2} &< \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \end{aligned}$$

En voici une représentation graphique de p en fonction de q :



Les valeurs de p possibles se trouvent en dessous de la courbe bleue. On remarque que la droite $\frac{2q}{3}$ (en orange ci-dessus) est une bonne approximation de p max. (à moins de 6% près) soit :

$$p \leq \frac{2}{3}q \text{ car } \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = 0,6309 \dots \approx \frac{2}{3} = 0,6666 \dots$$

De même :

$$\ln(b) < \ln(3) + q \cdot \ln(2)$$

Avec :

$$q > p \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 2$$

On a :

$$\ln(b) < \ln(3) + \left(p \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 2 + 1 \right) \ln(2)$$

Nota bene : le +1 ci-dessus est lié au respect strict de l'inégalité.

D'où :

$$\ln(b) < (p + 1)\ln(3) - \ln(2)$$

Soit :

$$b < \frac{3^{p+1}}{2}$$

Sachant que :

$$b < 3 \cdot 2^q$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 2^{q+1} &< 3^p \\ (q + 1)\ln(2) &< p \cdot \ln(3) \\ \frac{p}{q + 1} &> \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{p}{q + 2} < \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \text{ et } \frac{p}{q + 1} > \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$$

Où :

$$\begin{aligned} \frac{q + 2}{p} &> \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \text{ et } \frac{q + 1}{p} < \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \\ \frac{\ln(2)}{\ln(3)}(q + 1) &< p < \frac{\ln(2)}{\ln(3)}(q + 2) \\ q &< p \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 1 < q + 1 \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} p \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 2 &< q < p \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 1 < q + 1 \\ p - \frac{\ln(2)}{\ln(3)} &< \frac{\ln(2)}{\ln(3)}(q + 1) < p < \frac{\ln(2)}{\ln(3)}(q + 2) \end{aligned}$$

Voici quelques valeurs de q pour $p \leq 20$:

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
q	-1	0	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	18	19	21	22	24	25	27	29	30

On voit que $p > 0$ pour que q soit entier, et qu'en revanche $q \geq 0$.

On a donc des solutions entières qui vérifient qu'une décroissance vers 1 est rendue possible dans le cas de la suite de Syracuse le moins favorable $4m+3$. La question en suspens est cela est-il vrai pour tous les nombres entiers positifs de la forme $4m+3$? Cette question n'a à ce jour pas trouvé de réponse.

Regardons maintenant les deux cas de parité de m :

Si m est pair

$$b > 3^p$$

On pose :

$$b = 3^p + k \text{ avec } k > 0 \text{ et pair}$$

On a ainsi :

$$\frac{3^p(m+k)}{2^q} < 4m+3$$

Soit membre à membre :

$$3^p < 2^{q+2} \rightarrow p \cdot \ln(3) < (q+2) \ln(2)$$

$$\rightarrow p < (q+2) \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \text{ ou } q > p \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 2$$

$$k < \frac{2^q}{3^{p-1}} \rightarrow \ln(k) < q \cdot \ln(2) - (p-1) \ln(3)$$

$$\rightarrow p < 1 + \frac{q \cdot \ln(2) - \ln(k)}{\ln(3)} \text{ ou } q > \frac{(p-1) \ln(3) + \ln(k)}{\ln(2)}$$

Or la relation précédente est plus restrictive que celle-ci, en effet :

$$q > \frac{(p-1) \ln(3) + \ln(k)}{\ln(2)} > p \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 2 \text{ si } k > \frac{3}{4} \text{ or } k \geq 2$$

Par addition membre à membre :

$$3^{p-1}(3+k) < 5 \cdot 2^q \rightarrow (p-1) \ln(3) + \ln(k+3) < \ln(5) + q \cdot \ln(2)$$

$$\rightarrow p < 1 + \frac{q \cdot \ln(2) + \ln(5) - \ln(3+k)}{\ln(3)} \text{ ou } q > \frac{(p-1) \ln(3) - \ln(5) + \ln(3+k)}{\ln(2)}$$

Et par multiplication membre à membre :

$$k < \frac{4^{q+1}}{3^{2p-1}} \rightarrow (2p-1) \ln(3) + \ln(k) < (q+1) \ln(4)$$

$$\rightarrow p < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2(q+1) \ln(2) - \ln(k)}{\ln(3)} \right) \text{ ou } q > \frac{(2p-1) \ln(3) + \ln(k)}{2 \ln(2)} - 1$$

On a donc ici 4 bornes supérieures de p en fonction de q et k , ou 4 bornes inférieures de q en fonction de p et k .

Si m est impair

$$b < 3^p$$

On pose :

$$b = 3^p - k \text{ avec } (3^p - 1) > k > 0 \text{ et } k \text{ impair}$$

On a ainsi :

$$\frac{3^p(m-k)}{2^q} < 4m+3$$

Soit membre à membre :

$$3^p < 2^{q+2} \rightarrow p < (q+2) \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \text{ ou } q > p \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 2$$

$$k > 0 > -\frac{2^q}{3^{p-1}} \geq -1$$

Pour que la borne inférieure -1 ci-dessus soit vraie, il faut que :

$$2^q \leq 3^{p-1} \rightarrow 3^p < 2^2 3^{p-1} \rightarrow 3 < 4 \rightarrow q \leq (p-1) \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \text{ ou } p \geq 1 + q \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$$

Soit en définitif :

$$(q+2) \frac{\ln(2)}{\ln(3)} > p \geq 1 + q \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$$

$$(p-1) \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \geq q > p \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 2$$

On a donc ici 2 bornes supérieures et 2 inférieures de p (ou q) en fonction de q (ou p) indépendamment de k.

Par exemple, on choisit le cas des k impairs et donc m impairs et b pairs, on a :

$$2^{q+2} = 3 \cdot 2^q + k$$

Soit :

$$k = 2^q$$

$$b = 3^p - k \rightarrow b = 3^p - 2^q$$

D'où :

$$\frac{3^p m + b}{2^q} = \frac{3^p(m+1)}{2^q} - 1 < 4m+3 = 4(m+1) - 1 \rightarrow \frac{3^p}{2^q} < 4 \rightarrow 3^p < 2^{q+2}$$

Et en passant en logarithme, on obtient bien de nouveau :

$$p < (q+2) \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \text{ ou } q > p \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 2$$

2. Quelle est la forme d'un entier qui croîtrait sans fin ?

Première approche

On choisit un entier de la forme $4m+3$ et on considère qu'il croît sans fin. Soit par récurrence l'équation suivante :

$$\begin{aligned} N = 4m + 3 \rightarrow U_n(N) &= \dots \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} (4m + 3) + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \dots = \left(\frac{3}{2} \right)^n (4m + 3) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2} \right)^j \\ &= \left(\frac{3}{2} \right)^n (4m + 3) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{2} \right)^n}{1 - \frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2} \right)^n (4m + 3) + \left(\frac{3}{2} \right)^n - 1 \end{aligned}$$

Soit :

$$U_n(N) = \frac{3^n(m+1)}{2^{n-2}} - 1$$

Pour que la division soit entière il faut que :

$$m \text{ est impair et } m + 1 = 2^{n-2}k \rightarrow m = 2^{n-2}k - 1 \quad \forall k > 0 \rightarrow U_n(N) = 3^n k - 1$$

Ainsi, si k est impair : $U_n(N)$ est pair et donc $U_{n+1}(N)$ décroissant,

Et si k est pair : $U_n(N)$ est impair et donc $U_{n+1}(N)$ croissant.

Pour une croissance sans fin, il faut que n soit infini car le cas où k est pair ne crée pas forcément une croissance sans fin. Etudions une autre approche.

Seconde approche

Il suffit de trouver l'ensemble des entiers sous la forme $4k+3$ à chaque itération. C'est-à-dire :

$$N = 4k + 3 = 4(4k' + 3) + 3 = 4(4(4k'' + 3) + 3) + 3 = \dots = 4^j p + 3 \sum_{m=0}^{j-1} 4^m = 4^j p + 3 \frac{1 - 4^j}{1 - 4}$$

$$N = 4^j p + 4^j - 1 = 4^j (p + 1) - 1$$

$$\rightarrow N = 4^j p' - 1 \text{ avec } j > 0, p' > 0 \text{ et pair, car } p \text{ impair}$$

Soit :

$$\begin{aligned} j = 1 : N &= \{7, 15, 23, 31, 39 \dots\} \\ j = 2 : N &= \{31, 63, 95, 127, 159 \dots\} \\ j = 3 : N &= \{127, 255, 383, 511, 639 \dots\} \end{aligned}$$

Or tous ces entiers sont contenus dans $j=1$, on peut donc simplifier par :

$$N = 4^j p' - 1 = 4p' - 1 = 4k + 3 \text{ avec } k > 0 \text{ et impair, car } p' > 0 \text{ et pair}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} U_1(N) &= \frac{3(4^j p' - 1) + 1}{2} = 3 \cdot 2^{2j-1} p' - 1 \\ U_2(N) &= \frac{3(3 \cdot 2^{2j-1} p' - 1) + 1}{2} = 3^2 2^{2j-2} p' - 1 \end{aligned}$$

$$U_n(N) = \frac{3(3^{n-1}2^{2^{j+1-n}}p' - 1) + 1}{2} = 3^n 2^{2^j-n} p' - 1$$

Lorsque $n=j$:

$$U_j(N) = \frac{3(3^{j-1}2^{2^{j+1-j}}p' - 1) + 1}{2} = 3^j 2^j p' - 1$$

Lorsque $n=2j$:

$$U_{2j}(N) = \frac{3(3^{2j-1}2^{2^{j+1-2j}}p' - 1) + 1}{2} = 3^{2j} p' - 1 = 9^j p' - 1$$

$$U_{2j+1}(N) = \frac{3(3^{2j} p' - 1) + 1}{2} = 3^{2j+1} \frac{p'}{2} - 1$$

Ainsi on a au minimum $i=2j+2$ itérations (avec p' pair)

Et si on pose :

$$p' = 2 \cdot 4^d p'' \text{ avec } p'' \text{ impair}$$

Alors :

$$U_{2j+2}(N) = \frac{3(3^{2j+1} 4^d p'' - 1) + 1}{2} = 3^{2j+2} 2^{2d-1} p'' - 1$$

$$U_{2j+3}(N) = \frac{3(3^{2j+2} 2^{2d-1} p'' - 1) + 1}{2} = 3^{2j+3} 2^{2d-2} p'' - 1$$

$$U_{2j+2d+1}(N) = 3^{2j+2d+1} p'' - 1$$

$$U_{2j+2d+2}(N) = \frac{3(3^{2j+2d+1} p'' - 1) + 1}{2} = 3^{2j+2d+2} \frac{p''}{2} - 1$$

On pose de nouveau :

$$p'' = 2 \cdot 4^s p''' \text{ avec } p''' \text{ impair}$$

Et on réitère de la même manière que précédemment.

En définitif, on obtient une suite croissante si N est de la forme :

$$N = 4^j (2 \cdot 4^d (2 \cdot 4^s p''')) - 1 = 4^{j+d+s+1} p''' - 1 \text{ avec } p''' > 0 \text{ et pair, et } i \geq 2(j+d+s) + 4$$

Soit la forme infiniment croissante suivante :

$$N = 2^{p-1} 2^{\sum_{j=1}^p 2^{n_j}} k' - 1 = 2^{(p-1)+2\sum_{j=1}^p n_j} k' - 1 \text{ avec } k' > 0 \text{ et pair, et } i > p + 2 \sum_{j=1}^p n_j$$

$$U_{p+2\sum_{j=1}^p n_j}(N) = 3^{p+2\sum_{j=1}^p n_j} \frac{k'}{2} - 1$$

n_j représente le nombre d'itérations impaires intermédiaires ;

p représente le nombre de fois qu'il y a des itérations impaires intermédiaires n_j ;

Et la somme des n_j de 1 à p représente le nombre total des itérations impaires.

Enfin en posant :

$$k' = 2k \text{ avec } k > 0$$

On obtient :

$$\text{Si } N = 2^{p+2 \sum_{j=1}^p n_j} k - 1 \text{ avec } k > 0 \text{ alors } \begin{cases} U_{p+2 \sum_{j=1}^p n_j}(N) = 3^{p+2 \sum_{j=1}^p n_j} k - 1 \\ i > p + 2 \sum_{j=1}^p n_j \end{cases}$$

Cette forme peut donc croître longtemps, un bon nombre de rangs, et atteindre des valeurs très grande mais pas à l'infini. Cette forme peut temporairement, quelques rangs, décroître et rentrer de nouveau sous une même forme initiale pour de nouveau croître longtemps et très haut. Si ce cycle se répète sans fin, alors il existerait au moins un cas d'un vol d'une durée infinie.

Pour que cela soit possible, il faut relier les deux expressions suivantes par des itérations temporaires :

$$3^r k - 1 \rightarrow \text{quelques rangs suivants} \rightarrow 2^p k - 1$$

Pour boucler la boucle, puisqu'on a déjà prouvé précédemment que :

$$2^p k - 1 \rightarrow \text{quelques rangs suivants} \rightarrow 3^m k - 1$$

Or :

$$\text{Si } N = 3^r k - 1 \text{ alors } U_1(N) = \begin{cases} \frac{3^r k - 1}{2} \text{ si } k \text{ impair (1)} \\ \frac{3(3^r k - 1) + 1}{2} = 3^{r+1} \frac{k}{2} - 1 \text{ si } k \text{ pair (2)} \end{cases}$$

En égalisant, il vient dans les 2 cas :

$$\begin{cases} (1) \frac{3^r k - 1}{2} = 2^p k - 1 \rightarrow k = \frac{1}{2^{p+1} - 3^r} \rightarrow 0 < 2^{p+1} - 3^r \leq 1 \\ \rightarrow \frac{\ln(3)}{\ln(2)} r + \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(1 + \frac{1}{3^r}\right) - 1 \geq p > \frac{\ln(3)}{\ln(2)} r - 1 \text{ si } k \text{ impair} \\ (2) 3^{r+1} \frac{k}{2} - 1 = 2^p k - 1 \rightarrow 3^{r+1} = 2^{p+1} \rightarrow p = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} (r + 1) - 1 \text{ si } k \text{ pair} \end{cases}$$

**Ainsi, si on trouve un seul exemple de valeur de p en fonction de r qui vérifie ces inégalités alors :
la conjecture de Syracuse est fautive ! Bon courage.**

Pour que cette boucle d'itérations soit possible, il faut également essayer au rang suivant $U_2(N)$ qui entraîne de tester 4 cas. Au rang suivant il faudrait tester 8 cas, et ainsi de suite. Il est donc à la fois pas possible de généraliser cette méthode et impossible de tester les rangs un par un puisqu'il en existe une quasi-infinité. On ne sait donc toujours pas si un vol peut être infini, sans atteindre ni infini ni le cycle {1,2}.

3. Conditions pour une forme $4k+3$ et taux d'attraction

Première approche

On s'intéresse ici au cas divergent le plus difficile à borner. Il s'agit de la forme :

$$U_n = 4k + 3$$

Pour cette étude, on va reprendre les 4 cas de la suite de Syracuse modulo 4, soit :

$$(1) \frac{U_n}{4} = 4k + 3 \text{ avec } U_n = 4p$$

il faut que : $p = 4k + 3 \forall k \geq 0$: soit 1 cas sur 4

$$(2) \frac{3U_n + 1}{4} = 4k + 3 \text{ avec } U_n = 4p + 1$$

$$3p + 1 = 4k + 3, \text{ soit : } p = \frac{2}{3}(2k + 1) = \frac{2 \cdot 3q}{3}$$

il faut que : $p = 12k + 6 = 6(2k + 1) \forall k \geq 0$: soit 1 cas sur 12 (4x3)

$$(3) \frac{3U_n + 2}{4} = 4k + 3 \text{ avec } U_n = 4p + 2$$

$$3p + 2 = 4k + 3, \text{ soit : } p = \frac{4k + 1}{3} = \frac{4(q - 1) + 1}{3} = \frac{4q}{3} - 1 = \frac{4 \cdot 3q'}{3} - 1$$

il faut que : $p = 12k + 9 = 3(4k + 3) \forall k \geq 0$: soit 1 cas sur 12 (4x3)

$$(4) \frac{9U_n + 5}{4} = 4k + 3 \text{ avec } U_n = 4p + 3$$

$$9p + 8 = 4k + 3, \text{ soit : } p = \frac{4k - 5}{9} = \frac{4(q - 1) - 5}{9} = \frac{4q}{9} - 1 = \frac{4 \cdot 9q'}{9} - 1$$

il faut que : $p = 36k + 3 \forall k \geq 0$: soit 1 cas sur 36 (9x4)

Soit de manière générale et en moyenne :

$$\frac{\frac{1}{4} + \frac{2}{12} + \frac{1}{36}}{4} = \frac{1}{9} = 11,11 \dots \% \rightarrow 1 \text{ chances sur } 9$$

On a donc en moyenne plus d'une chance sur dix de tomber sur un cas $4k+3$. C'est loin d'être négligeable. Etudions une autre approche.

Seconde approche

On pose :

$$4n + 3 > \frac{3^a n + A}{2^{a+b}} \text{ avec } a \geq 2 \text{ et } b > 0$$

a correspond aux itérations impaires et b aux paires.

D'où :

$$\begin{aligned} 4 &> \frac{3^a}{2^{a+b}} \\ 2^{a+b+2} &> 3^a \\ 2 \ln(2) + (a+b) \ln(2) &> a \cdot \ln(3) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} 3 &> \frac{A}{2^{a+b}} \\ 3 \cdot 2^{a+b} &> A \\ \ln(3) + (a+b) \ln(2) &> \ln(A) \end{aligned}$$

En faisant le rapport de $\frac{a+b}{a+b}$ il vient :

$$\text{Nombre d'itérations impaires : } a < (b+2) \frac{\ln(2)}{\ln(3) - \ln(2)} \text{ et } a < \frac{\ln(A) + 2 \ln(2)}{\ln(3)} - 1$$

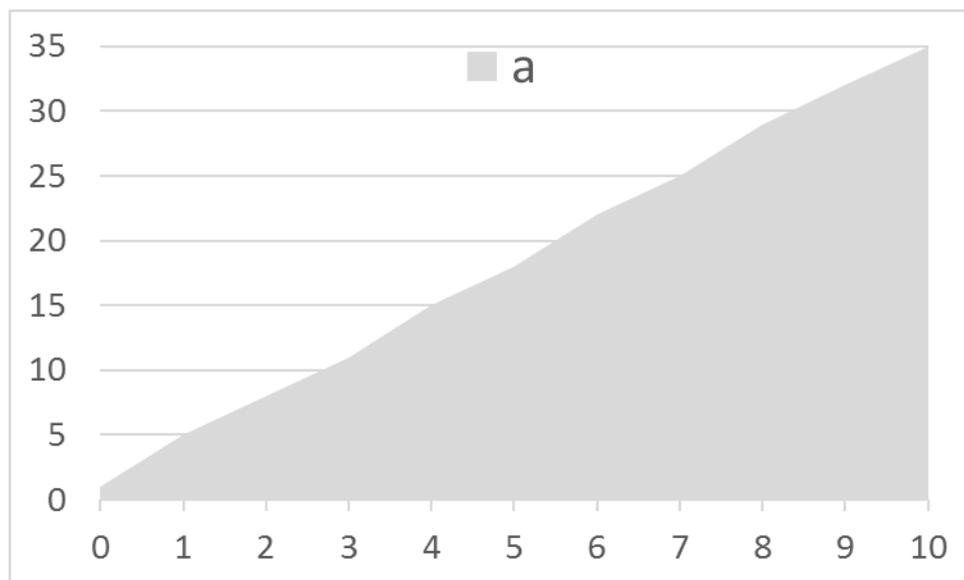
$$A > \frac{3^{a+1}}{4}$$

$$\text{Nombre d'itérations paires : } b > a \left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 1 \right) - 2 \text{ et } b > \frac{\ln(A) - \ln(3)}{\ln(2)} - a$$

A noter que dans ce cas :

$$\frac{\text{nombre de pairs} + 2}{\text{nombre d'impairs}} = \frac{b+2}{a} > \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 1 \approx 58,5\% \approx \frac{31}{53}$$

On a donc un taux de proportion du nombre d'itérations paires par rapport aux impaires. Pour illustrer ce résultat, voici le graphique correspondant :



La zone grisée représente toutes les valeurs entières possible pour a. l'abscisse représente b. A noter que a, le nombre d'itérations impaires, est bien inférieur au b correspondant, le nombre d'itérations paires. En effet, cela coïncide bien au fait que plus il y a d'itérations paires par rapport aux impaires, plus la suite décroît, puisque divisée davantage par 2 que multipliée par $3/2$.

~

De plus, on peut reprendre les inéquations précédentes pour évaluer et borner les durées de vol i :

$$i = a + b$$

$$i < \frac{b \cdot \ln(3) + 2\ln(2)}{\ln(3) - \ln(2)} \text{ et } i < b - 1 + \frac{\ln(A) + 2\ln(2)}{\ln(3)}$$

$$i > a \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 2 \text{ et } i > \frac{\ln(A) - \ln(3)}{\ln(2)}$$

On peut relier ces inéquations pour connaître le cas où l'un est supérieur à l'autre en procédant comme suit :

$$\frac{b \cdot \ln(3) + 2\ln(2)}{\ln(3) - \ln(2)} > b - 1 + \frac{\ln(A) + 2\ln(2)}{\ln(3)} \text{ si}$$

$$\ln(A) < b \frac{\ln(2) \ln(3)}{\ln(3) - \ln(2)} + \frac{2\ln(2) \ln(3)}{\ln(3) - \ln(2)} + \ln(3) - 2\ln(2) \rightarrow A < 3^{(b+2)\frac{\ln(2)}{\ln(\frac{3}{2})}} = 2^{(b+2)\frac{\ln(3)}{\ln(\frac{3}{2})}}$$

D'où :

$$i < \frac{b \cdot \ln(3) + 2\ln(2)}{\ln(3) - \ln(2)} \text{ si } A < 3^{(b+2)\frac{\ln(2)}{\ln(\frac{3}{2})}} \text{ et } i < b - 1 + \frac{\ln(A) + 2\ln(2)}{\ln(3)} \text{ si } A \geq 3^{(b+2)\frac{\ln(2)}{\ln(\frac{3}{2})}}$$

De même :

$$a \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 2 > \frac{\ln(A) - \ln(3)}{\ln(2)} \text{ si } \ln(A) < (a + 1)\ln(3) - 2\ln(2) \rightarrow A < \frac{3^{a+1}}{4}$$

D'où :

$$i > a \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 2 \text{ si } A < \frac{3^{a+1}}{4} \text{ et } i > \frac{\ln(A) - \ln(3)}{\ln(2)} \text{ si } A \geq \frac{3^{a+1}}{4}$$

~

Mais comment connaître A ?

Pour cela on écrit préalablement l'arbre des trajectoires de la façon suivante pour faire ressortir A :

$$\begin{array}{l}
 N = 4n + 3 \rightarrow 6n + 5 \rightarrow 9n + 8 \rightarrow \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 P: \frac{3^2n + 2^3}{2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 P: \frac{3^2n + 2^3}{2^2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 P: \frac{3^2n + 2^3}{2^3} \\
 I: \frac{3^3n + 3 \cdot 2^3 + 2^2}{2^3}
 \end{array} \right. \\
 I: \frac{3^3n + 3 \cdot 2^3 + 2}{2^2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 P: \frac{3^3n + 3 \cdot 2^3 + 2}{2^3} \\
 I: \frac{3^4n + 3^2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2 + 2^2}{2^3}
 \end{array} \right. \\
 \\
 I: \frac{3^3n + 3 \cdot 2^3 + 1}{2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 P: \frac{3^3n + 3 \cdot 2^3 + 1}{2^2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 P: \frac{3^3n + 3 \cdot 2^3 + 1}{2^3} \\
 I: \frac{3^4n + 3^2 \cdot 2^3 + 3 + 2^2}{2^3}
 \end{array} \right. \\
 I: \frac{3^4n + 3^2 \cdot 2^3 + 3 + 2}{2^2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 P: \frac{3^4n + 3^2 \cdot 2^3 + 3 + 2}{2^3} \\
 I: \frac{3^5n + 3^3 \cdot 2^3 + 3^2 + 3 \cdot 2 + 2^2}{2^3}
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \end{array}$$

P: indique une itération paire,
I: indique une itération impaire.

On a ci-dessus effectué les 5 premières itérations de la suite de Syracuse en partant de $N=4n+3$.
On obtient 8 cas et deux fois plus au rang suivant, etc.

A noter qu'on peut ci-dessus reprendre ces itérations avec $6n + 5 = \frac{3 \cdot 4n + 3^2 + 1}{2}$, etc. Cela correspond à ne pas simplifier dès la première itération. Dans ce cas les itérations ci-dessus se complexifient et la valeur de A proposée ci-dessous change avec ces nouvelles conditions.

On imagine assez bien avec ces quelques itérations la forme de A. Ainsi, on pose :

$$A = 3^{1 \dots a-2} \cdot 2^3 + 3^{1 \dots a-3} \cdot 2^{0 \dots b-1} + 3^{1 \dots a-4} \cdot 2^{0 \dots b-1} + \dots + 3^0 \cdot 2^{b-1}$$

Avec un membre en plus si impair, donc (a+1) fois.

Les exposants correspondent à une tranche : par exemple de 1 à (a-2) pour le premier 3.

Ainsi, on a donc :

$$A = \sum_{j=0}^a (3^{x_j} \cdot 2^{y_j}) \text{ avec } \begin{cases} 0 \leq y_j \leq b-1 \text{ et } y_0 = 3 \\ 0 < x_j \leq a-2 \text{ et } x_a = 0 \end{cases}$$

Si on reprend l'inéquation précédente, on a :

$$3 > \frac{A}{2^{a+b}} = \frac{1}{2^{a+b}} \sum_{j=0}^a (3^{x_j} \cdot 2^{y_j})$$

D'où :

$$2^{a+b} > \sum_{j=0}^a (3^{x_j-1} \cdot 2^{y_j})$$

De plus, sachant que :

$$4n + 3 > \frac{3^a n + A}{2^{a+b}} = \frac{3^a n + \sum_{j=0}^a (3^{x_j} \cdot 2^{y_j})}{2^{a+b}}$$

$$\rightarrow 4n + 3 > \left(\frac{3}{2}\right)^a \frac{n}{2^b} + \sum_{j=0}^a \left(\frac{3^{x_j}}{2^{a+b-y_j}}\right) \text{ avec } \begin{cases} a \geq 2 \text{ et } b > 0 \\ 0 \leq y_j \leq b - 1 \text{ et } y_0 = 3 \\ 0 < x_j \leq a - 2 \text{ et } x_a = 0 \end{cases}$$

On a donc une nouvelle relation pour analyser les fluctuations de la forme $N=4n+3$.

Troisième approche

On cherche les vols théoriquement les plus long de leur catégorie car restant sous la forme $4n+3$ le plus longtemps. On représente cela dans le tableau suivant :

p	4p+3	8p+7	16p+15	32p+31	64p+63
0	3	7	15	31	63
1	7	15	31	63	127
2	11	23	47	95	191
3	15	31	63	127	255
4	19	39	79	159	319
5	23	47	95	191	383
6	27	55	111	223	447
7	31	63	127	255	511
8	35	71	143	287	575
9	39	79	159	319	639
10	43	87	175	351	703
11	47	95	191	383	767
12	51	103	207	415	831
13	55	111	223	447	895
14	59	119	239	479	959
15	63	127	255	511	1 023

On remarque que plus le facteur est grand et plus le cas de formes $4p+3$ l'une après l'autre est rare et représente une valeur élevée. Ce qui signifie que plus on avance dans la suite moins on aura de cas $4n+3$ qui se répètent en croissants sans retomber à 1.

La probabilité (ou fréquence) d'avoir :

$$U_n(N) = 2^k p + (2^k - 1)$$

est d'autant plus faible si k est grand, car :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k} = 0$$

Donc l'itération infinie croissante en $4p+3$ n'existe pas.

Ainsi la suite de Syracuse ne croît pas rang après rang indéfiniment mais décroît forcément de temps en temps, même après de longs vols croissants, vers un autre état ($4p$, $4p+1$ ou $4p+2$) qui tous tombent inlassablement vers 1.

~

En complément, on sait qu'il existe une chance sur quatre que la suite de Syracuse suit la trajectoire suivante :

$$U_n(N) = 4n + 3 \rightarrow 6n + 5 \rightarrow 9n + 8 \rightarrow \dots$$

Si on recherche le cas où cette itération croissante se poursuit sans fin, on pose :

$$9n + 8 = 4p + 3$$

$$\rightarrow p = \frac{9n + 5}{4} = \frac{8n + n + 4 + 1}{4} = 2n + 1 + \frac{n + 1}{4}$$

$$\text{Pour que } n + 1 = 4q \rightarrow n = 4q - 1 = 4(k + 1) - 1 = 4k + 3 \rightarrow p = 9k + 8$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Si } U_n(N) &= 4n + 3 = 16k + 15 \text{ avec } n = 4k + 3 \\ \text{alors } U_{n+2}(N) &= 9n + 3 = 4p + 3 = 36k + 35 \text{ avec } p = 9k + 8 \end{aligned}$$

Quatrième approche : chemins toujours impairs

Selon la suite de Syracuse rétrograde ou inverse, on suit un chemin de valeurs impaires (et non d'empilements pairs qui double à chaque rang) selon la condition suivante.

Cas impair :

$$U_{n+1}(N) = \frac{3U_n(N) + 1}{2}$$

Formule inverse qui provient d'un impair :

$$U_n(N) = \frac{2U_{n+1}(N) - 1}{3} = 2k + 1 \text{ ssi } U_{n+1}(N) = 3k + 2$$

Formule inverse qui provient d'un pair :

$$U_n(N) = \frac{2U_{n+1}(N) - 1}{3} = 2k \text{ ssi } U_{n+1}(N) = 3k + \frac{1}{2}$$

On a donc :

$$U_{n+1}(N) = 3k + 2 = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 \dots\} : \text{ impair 1 fois sur 2}$$

Et :

$$U_n(N) = \frac{2U_{n+1}(N) - 1}{3} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25 \dots\} \\ : \text{ impair issu d'un impair 1 fois sur 3}$$

Si on poursuit cette trajectoire des impairs, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Si } U_{n+1}(N) = 3k + 2 \text{ alors } U_n(N) = 2k + 1 : \text{ double impair} \\ \text{Et si } U_n(N) = 3k + 2 \text{ alors } U_{n-1}(N) = 2k + 1 : \text{ triple impair} \\ \text{Et si } U_{n-1}(N) = 3k + 2 \text{ alors } U_{n-2}(N) = 2k + 1 : \text{ quadruple impair} \\ \text{Et si } U_{n-2}(N) = 3k + 2 \text{ alors } U_{n-3}(N) = 2k + 1 : \text{ quintuple impair} \\ \dots \end{aligned}$$

Dans quel cas a-t-on :

$$3k + 2 = 2p + 1 \text{ ssi } p = \frac{3k + 1}{2} = \frac{3(k' + 1) + 1}{2} = \frac{3}{2}k' + 2 = \frac{3(2k'')}{2} + 2 = 3k'' + 2 \\ \text{avec } k = 2k'' + 1 : \text{ soit toujours impair}$$

Ainsi :

$$\text{Si } U_n(N) = 3k_n + 2 = 3(2k'_n + 1) + 2 = 6k'_n + 5 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(N) = \infty \text{ avec } n \geq 0$$

Mais ce cas de divergence certaine existe-t-il vraiment ? Pour y répondre, regardons parmi ces valeurs de la forme $6k+5$ lesquels proviennent de deux impairs, puis de n impairs :

$$\frac{2(6k + 5) - 1}{3} = 6p + 5 \rightarrow k = \frac{3p + 1}{2} = \frac{3(2k' + 1) + 1}{2} = 3k' + 2 \text{ avec } p = 2k' + 1$$

Ainsi :

$$N = 3k' + 2 \text{ et } k' \text{ impair} \rightarrow \text{ impair qui vient d'un impair} \\ \text{Soit } N = 3(2k + 1) + 2 = 6k + 5$$

Ce qui donne les itérations rétrogrades successives impaires suivantes :

$$3k' + 2 (I)(k \text{ impair}) = 6k + 5 = \frac{3(4k + 3) + 1}{2} (I) \leftarrow 4k + 3 (I)$$

Et :

$$N = 3k' + 2 \text{ et } k \text{ pair} \rightarrow \text{ pair qui vient d'un impair}$$

$$\text{Soit } N = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$$

Ce qui donne les itérations rétrogrades successives suivantes :

$$3k' + 2 \text{ (P)} (k \text{ pair}) = 6k + 2 = \frac{3(4k + 1) + 1}{2} \text{ (P)} \leftarrow 4k + 1 \text{ (I)}$$

On remarque d'ailleurs les égalités utiles suivantes :

$$\begin{aligned} 3k + 2 &= 3(2k' + 1) + 2 = 6k' + 5 \text{ avec } k = 2k' + 1 \\ 2k + 1 &= 2(3k' + 2) + 1 = 6k' + 5 \text{ avec } k = 3k' + 2 \end{aligned}$$

Enfin au rang n, on a :

$$N = 6k + 5 = \begin{cases} 3k' + 2 \text{ avec } k' = 2k + 1 \text{ (impair)} \\ 2k' + 1 \text{ avec } k' = 3k + 2 \end{cases}$$

$$\text{Si } k = 2k'' \text{ (pair)} \rightarrow 6k + 5 = 12k'' + 5 \text{ avec } k' = \begin{cases} 4k'' + 1 \text{ (impair) si } k' = 2k + 1 \\ k' = 6k'' + 2 \text{ (pair) si } k' = 3k + 2 \end{cases}$$

$$\text{Si } k = 2k'' + 1 \text{ (impair)} \rightarrow 6k + 5 = 12k'' + 11 \text{ avec } k' = \begin{cases} 4k'' + 3 \text{ (impair) si } k' = 2k + 1 \\ k' = 6k'' + 5 \text{ (impair) si } k' = 3k + 2 \end{cases}$$

Ainsi, la seule possibilité pour qu'il existe une divergence certaine de la suite de Syracuse est la suivante :

$$N = \{2k + 1; 4k + 3; 8k + 7; 16k + 15; 32k + 31; 64k + 63; \dots\}$$

Pour cela il suffit d'itérer un nombre toujours impair, soit :

$$N = \dots 2(2(2(2k + 1) + 1) + 1) + 1 \dots = 2^p k + \sum_{j=0}^{p-1} 2^j = 2^p k + \frac{1 - 2^p}{1 - 2} = 2^p k + 2^p - 1$$

Soit en définitif toutes les formes :

$$N = 2^p k + (2^p - 1) = 2^p k' - 1 \forall p > 0 \text{ et } k > 0 \text{ avec } k' = k + 1$$

Or pour avoir une divergence infinie il faut une valeur de p et/ou de k' infinie. Ainsi, aussi grand soit p ou k', la suite de Syracuse croît et tend vers l'infini mais ne l'atteint pas. Ensuite, une fois la valeur la plus haute atteinte, la suite peut diminuer ou croître de nouveau, mais on n'a pas prouvé que la suite diverge à l'infini. D'ailleurs personne n'a à ce jour trouvé de valeur, aussi grande soit-elle, qui diverge vers l'infini. Les vols observés sont parfois si hauts et si longs, mais, force est de constater qu'ils retombent tous, encore et toujours, à 1 !

Cinquième approche

On itère la suite de Syracuse rétrograde ou inverse en considérant qu'elle est toujours impaire, soit :

$$N = \dots \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} (2k+1) - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} \dots = \frac{2^n(2k+1)}{3^n} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{2}{3} \right)^j = \frac{2^{n+1}k + 2^n}{3^n} - \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \right)$$

$$\rightarrow N = 2^n \frac{6k+5}{3^{n+1}} - 1$$

Si cette divisibilité entière est possible alors la conjecture est prouvée fausse !

Soit si :

$$2^n(6k+5) = 3^{n+1}p$$

On pose : $p = 2^n p'$ alors $6k+5 = 3^{n+1} p'$

Or $6k+5 = \{5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47 \dots\} \neq 3^{n+1} p' \forall p' > 0 \text{ et } n \geq 0$

Sans surprise, la conjecture n'est donc pas ici prouvée fausse, mais une autre exception peut exister et prouver que la conjecture est fausse. Elle n'est donc pas non plus prouvée vraie par cette non fausse preuve. On suit ?

Sixième approche : existence d'une limite finie avec un vol quasi-infini

A partir de l'itération générale déjà décrite :

$$U_n(N) = \frac{3^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j}}}{2^{\sum_{j=1}^p n_j}} N + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3^{\sum_{j=1}^k n_{p-2j+1}}}{2^{\sum_{j=1}^{2k} n_{p-j+1}}} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n_{p-2k+1}} \right) \right) \text{ avec } n = \sum_{j=1}^p n_j \text{ et } \begin{cases} n_1 = 0 \text{ si } N \text{ impair} \\ n_1 > 0 \text{ si } N \text{ pair} \\ p \text{ impair} \\ n_p \geq 3 \end{cases}$$

On cherche s'il existe une limite finie à l'infini. C'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(N) = \lim_{p \rightarrow \infty} U_n(N) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{\sum_{j=1}^{\infty} n_{2j}}}{2^{\sum_{j=1}^{\infty} n_j}} N + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3^{\sum_{j=1}^k n_{p-2j+1}}}{2^{\sum_{j=1}^{2k} n_{p-j+1}}} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n_{p-2k+1}} \right) \right) \right)$$

Sachant qu'on a déjà démontré qu'en moyenne :

$$\text{Pour les itérations paires : } \frac{I}{I_{max}} = \begin{cases} 0 \text{ sinon} \\ 1 - e^{-\frac{p}{i} + \frac{2}{5}} = 1 - e^{\frac{m}{i} - \frac{3}{5}} \text{ si } \frac{p}{i} > \frac{2}{5} \end{cases}$$

Et :

$$\text{Pour les itérations impaires : } \frac{I}{I_{max}} = \begin{cases} 0 \text{ sinon} \\ e^{\frac{m}{i} - \frac{3}{5}} = e^{-\frac{p}{i} + \frac{2}{5}} \text{ si } \frac{m}{i} < \frac{3}{5} \end{cases}$$

Ainsi, on pose :

$$n = \sum_{j=1}^p n_j = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j} + \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} n_{2j+1} = \frac{2+w}{5} n + \frac{3-w}{5} n \text{ avec } 3 \geq w > 0$$

Ce qui donne pour la limite :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(N) &= \lim_{n, p \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{\frac{2+w}{5}n}}{2^n} N + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{3^{\sum_{j=1}^k n_{p-2j-1}}}{2^{\sum_{j=1}^{2k} n_{p-j+1}}} \right) \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n_{p-2k+1}} \right) \right) \right) \\ &= \lim_{n, p \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3^{\frac{2+w}{5}n}}{2} \right) \cdot N + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3^{\sum_{j=1}^k n_{p-1-2j}} (3^{n_{p-2k+1}} - 2^{n_{p-2k+1}})}{2^{\sum_{j=1}^{2k-1} n_{p+2-2j}} \cdot 2^{\sum_{j=1}^{2k-1} n_{p+1-2j}} \cdot 3^{n_{p-2k+1}}} \right) \right) \\ &= \lim_{n, p \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3^{\frac{2+w}{5}n}}{2} \right) \cdot N + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3^{\frac{3-w}{5}S_k} \left(3^{\frac{2+w}{5}S_k} - 2^{\frac{2+w}{5}S_k} \right)}{2^{\frac{2+w}{5}S_k} \cdot 2^{\frac{3-w}{5}S_k} \cdot 3^{\frac{2+w}{5}S_k}} \right) \right) \\ &= \lim_{n, p \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3^{\frac{2+w}{5}n}}{2} \right) \cdot N + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3^{\frac{1-2w}{5}S_k} \left(3^{\frac{2+w}{5}S_k} - 2^{\frac{2+w}{5}S_k} \right)}{2^{S_k}} \right) \right) \\ &= \lim_{n, p \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3^{\frac{2+w}{5}n}}{2} \right) \cdot N + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{3^{\frac{1-2w}{5}}}{2} \right)^{S_k} \cdot \left(3^{\frac{2+w}{5}S_k} - 2^{\frac{2+w}{5}S_k} \right) \right) \right) \\ &= \lim_{n, p \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3^{\frac{2+w}{5}n}}{2} \right) \cdot N + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3^{\frac{3-w}{5}}}{2} \right)^{S_k} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3^{\frac{1-2w}{5}}}{2^{\frac{3-w}{5}}} \right)^{S_k} \right) \end{aligned}$$

Pour avoir une convergence, il faut que :

$$3^{\frac{2+w}{5}n} \leq 2^n \rightarrow \frac{2+w}{5} \ln(3) \leq \ln(2) \rightarrow w \leq 5 \frac{\ln(2)}{\ln(3)} - 2 \approx 1,155$$

$$\text{Et } 3^{\frac{3-w}{5}S_k} \leq 2^{S_k} \rightarrow \frac{3-w}{5} \ln(3) \leq \ln(2) \rightarrow w \geq 3 - 5 \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx -0,155$$

$$\text{Et } 3^{\frac{1-2w}{5}S_k} \leq 2^{\frac{3-w}{5}S_k} \rightarrow \frac{1-2w}{5} \ln(3) \leq \frac{3-w}{5} \ln(2) \rightarrow w \geq \frac{\ln(3) - 3 \ln(2)}{2 \ln(3) - \ln(2)} \approx -0,652$$

Comme on a posé préalablement :

$$n = \frac{2+w}{5}n + \frac{3-w}{5}n \text{ avec } 3 \geq w > 0$$

La seule contrainte est donc :

$$\text{Si } 3 \geq w > 5 \frac{\ln(2)}{\ln(3)} - 2 \approx 1,155 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(N) = 0$$

Soit pour cette borne inférieure de w :

$$n = \frac{2+w}{5}n + \frac{3-w}{5}n = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}n + \left(1 - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}\right)n \approx 0,63n + 0,37n$$

Et pour la borne supérieure de w :

$$n = \frac{2+w}{5}n + \frac{3-w}{5}n = 1n + 0n$$

Ainsi, en moyenne la suite, même avec des vols de durées quasi-infinies, converge de manière certaine si pour un même vol on a bien :

$$\begin{aligned} & \mathbf{100\% \geq \text{nombre d'itérations paires} \geq 63\%} \\ & \mathbf{\text{Et } 37\% > \text{nombre d'itérations impaires} \geq 0\%} \end{aligned}$$

A noter qu'il existe des convergences de vols la suite de Syracuse pour :

$$\begin{aligned} & \text{nombre d'itérations paires} < 63\% \\ & \text{nombre d'itérations impaires} \geq 37\% \end{aligned}$$

Mais pour ces cas-là, on n'a pas prouvé de convergence certaine de la suite.

8. Forme allégorique : Divinité

S'il existe un Dieu, il est unique. S'il existe un Dieu, il est hégémonique et absolu. S'il existe un Dieu, on est ses créatures et on lui doit notre existence entière. S'il existe un Dieu, absolument tout lui est relié. C'est-à-dire que l'infini (tout) est relié à l'unité (Dieu). De même, tous les nombres sont reliés à 1.

9. Forme allégorique : Vie et mort

L'apprentissage de la vie jusqu'à la mort peut être vue, pour chacun de nous, comme une expérience unique, plus ou moins longue, dure, heureuse et enrichissante. En définitif, chacun rejoint inexorablement toujours la mort. Cette mort inéluctable est l'unité finale pour tous. C'est le seul lieu où se rejoint la fin de l'humanité et la vie dès son commencement, indépendamment l'une de l'autre. Tous les entiers sont représentés par nos vies et l'humanité en générale.

9. Conclusion et perspectives

Il est clair que la conjecture de Syracuse, de par son aspect mystique lié à sa simplicité de compréhension par un enfant, a encore de bonnes et de longues années à susciter l'émerveillement de tous ceux et celles qui s'y sont intéressés quelques minutes ou toute leur vie.

Paul Erdos disait « les mathématiques ne sont pas prêtes ». Il avait raison puisqu'à ce jour personne n'a prouvé cette conjecture fascinante. Alors à quoi bon chercher ? Quel que soit le domaine, l'humanité a avancé par petits pas puis par rupture. Je pense qu'aussi infinitésimale soit l'avancée, le résultat ou la direction nouvelle, elle doit être élaborée, partagée et utilisée au regard des autres. Chacun, à son niveau, à sa mesure, peut et doit apporter sa pierre à l'édifice de l'évolution de l'humanité. On n'est à la fois rien et tout. Ou plutôt, on n'est presque rien dans un tout infini. Il serait alors absurde de ne pas chercher et de ne pas partager. Le monde ne s'est pas fait en un jour mais évolue, change et progresse chaque seconde : au travail.

A titre personnel, je suis convaincu que cette conjecture est vraie et sera prouvée prochainement. Cela hante parfois mes nuits.

J'espère que ce livre contribuera à l'exploration et à la preuve de cette captivante conjecture de Syracuse.

Je vous remercie de vous être procurer cet ouvrage qui, je l'espère, a répondu à vos attentes sous différents angles. Je sollicite votre indulgence relative aux éventuelles erreurs et autres fautes d'orthographe qui n'auraient pas été corrigées. J'ai ouvert un blog pour, à la fois, faire vivre une communauté autour du sujet de ce livre et corriger les éventuelles coquilles dans ma prochaine version.

J'ai étonnamment encore beaucoup d'idées originales en préparation pour attaquer cette conjecture de Syracuse. Le blog est également un bon lien entre cette version et la prochaine. Je vous invite à vous y connecter régulièrement et y participer pour ensemble développer de nouveaux outils mathématiques et pourquoi pas trouver de nouveaux éléments de preuve.

Merci.

Retrouvez-moi sur www.mathSyracuse.wordpress.com

1. Et après

A partir de cette suite on peut imaginer d'autres conjectures tout à fait insolubles à ce jour. Cet ouvrage est une porte à un innombrable nombres de questions restées en suspens. En voici quelques-unes :

- Existe-t-il d'autres valeurs que 6 et 73 tel que $N=i$?
 - Combien de valeurs existe-t-il tel que $N=i/2$? etc.
- Existe-t-il d'autres valeurs que les 12 suivantes tel que $N \leq i$?
 - 3, 6, 7, 9, 27, 31, 47, 54, 55, 62, 63, 73
- Existe-t-il en observant à très grande échelle (pour $N > 10^{10}$) des tendances moyennes de décroissance ? Si oui, peut-on en déduire une pente moyenne pour tout N et/ou une borne supérieure/inférieure ?
- Le chapitre dédié aux trajectoires conclut à plus de 90% de convergence de la suite, quel est l'effort de calcul pour atteindre 99% sachant que les cas de divergence possibles sont de plus en plus rares et grands ?
- Concernant les formes de N en fonction de leurs vols i , comment (pré)déterminer les indices de transitions de parités n_j ?
- En traçant les vols de N , le calcul des aires ou surfaces peut-il aider ? c'est-à-dire peut-on prouver que toutes ces surfaces sont finies une fois arrivé à 1 ?
- Le calcul itératif de moyennes peut-il nous faire avancer ?
- Le calcul de probabilités peut-il renseigner notre problème ?
- Existe-t-il un champ d'attraction vers 1 ? comment le représenter ?
 - Existe-t-il un ou des schémas cachés de séquences dénombrables ?
 - Existe-t-il un code secret ? Une quelconque grille de conversion ?
 - Peut-on considérer ce problème comme un asservissement ou une autorégulation ?
 - Existe-t-il un espace de passage d'une parité à l'autre ?
 - La suite de Syracuse n'a-t-elle pas été créée pour s'affranchir des nombres premiers en les éliminant rang après rang pour atteindre systématiquement 1 ?
- Inter-vols : existe-t-il d'autres relations d'un vol à l'autre ? par exemple :
 - *Soit $U_n(N_a)$ et $U_m(N_b)$ deux vols distincts, existe-t-il $U_{j+p}(N_a) = U_{k+p}(N_b) \forall p \geq 0$? Si oui trouver les relations entre N_a et N_b*
- La moyenne entre un vol toujours impair et un toujours pair vaut-elle $3/2$?
- Comment exploiter la forme booléenne de la suite de Syracuse ?
- Comment exploiter la suite pseudo complémentaire ?
- Programmation
 - Quelles sont les formules Excel pour représenter la suite de Syracuse ?
 - Quel est l'algorithme informatique le plus optimisé pour calculer au plus vite le plus de vols possibles et ainsi quasi-prouver numériquement la conjecture ?
- Etc.

2. Forme allégorique : Temps

Le temps est une valeur commune qui passe sans jamais s'arrêter, ni même s'accélérer. Le temps est inconditionnellement linéaire. Or, la perception humaine l'est beaucoup moins. En effet, n'avez-vous jamais considéré perdre du temps en faisant une tâche qui ne vous passionnait pas. A cet instant, le temps vous a paru très très long. A l'inverse, vous avez un dossier à boucler et votre patron vous presse. Vous pensez que vous n'aurez jamais assez de temps pour tout finir correctement. Or, dans ces deux circonstances, le temps s'écoule régulièrement et pourtant paraît passer soit vite soit lentement. Ainsi, la perception humaine de l'échelle de temps (de chaque millième de nanosecondes à chaque millénaire) est l'ensemble des entiers, distincts un à un, et le temps lui-même est l'unité qui varie linéairement et invariablement.

3. Forme allégorique : Recette

On peut encore trouver des images à l'infini. La suite de Syracuse est un puit d'imagination et de créativité sans fin. Il y a quelque chose de magique dans cette simple itération insoluble. Comme si on démarrait une même recette de cuisine avec des ingrédients différents en quantité et en variété, mais qu'en définitif, on obtenait toujours et toujours l'unique même plat sans aucun arrière-goût. Cette loi existe mais est inconnue.

10. Références

1. Sur le web

La conjecture de Syracuse attise beaucoup de curiosité et de travaux depuis bien des années. On retrouve sur la toile un grand nombre de réflexions variées et riches en enseignement. Il est à la fois impossible de les lister toutes, ni même de garder une liste à jour. Les uns disparaissent tandis que d'autres sont nouvellement publiés. C'est pourquoi on a listé ci-dessous de manière non exhaustive les écrits qui semblent à la fois pertinents, durables sur la toile et en français ou en anglais exclusivement. On s'excuse auprès de ceux et celles qui ne figurent pas dans cette liste.

Néanmoins cette liste vous permettra d'à la fois vous donner une idée de l'étendue du sujet, des travaux réalisés, des différentes pistes envisagées et du niveau d'atteinte actuelle de « résolution » ou d'insolubilité, d'indécidabilité. On a volontairement omis les vidéos qui foisonnent également sur le sujet. On espère que ces lectures vous éclaireront sur parfois des aspects surprenants de la conjecture de Syracuse.

En Français

fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Syracuse
images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-elementaire-mais.html
images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-y-a-t-il-des.html
villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/literation/Syracuse.htm
villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/literation/Syracus1.htm
www.probleme-syracuse.fr/math.html
jean-paul.davalan.pagesperso-orange.fr/liens/liens_syracuse.html

En Anglais

en.wikipedia.org/wiki/Collatz_problem
oldweb.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/html/paper.html
www.ams.org/bookstore/pspdf/mbk-78-prev.pdf
www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Lagarias3-23.pdf
www.eric.nl/wondrous
mathworld.wolfram.com/CollatzProblem.html
home.graysoncable.com/dkcox
preprint.math.uni-hamburg.de/public/papers/hbam/hbam2011-09.pdf
www.jasondavies.com/collatz-graph
www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/html/superLagarias.html
www.academia.edu/1595051/COLLATZ_CONJECTURE_PROOF
www.researchgate.net
collatz.freehostia.com/index.html
www-personal.ksu.edu/~kconrow

2. Articles et publications

On trouvera ci-dessous les références des articles et publications relatives à la conjecture de Syracuse. Beaucoup de ces références sont en anglais et disponibles gratuitement sur le web. Bien sûr il en existe bien d'autres et de bonne qualité. L'objectif ici étant de partager à date l'existant sur le sujet et de manière large. En gras est indiqué les références qui selon moi sont les plus utiles et avancées. Cette liste est triée par ordre chronologique par tranche de 10 ans.

En français

- [1] Yves Huerta : Démonstration de la conjecture de Syracuse, Utilisation de l'algèbre de Boole (2016)
- [2] Wilfrid Poulain : L'arbre des suites de Syracuse et sa structure détaillée (2015)
- [3] Wilfrid Poulain : Une nouvelle approche de la conjecture de Collatz selon laquelle toute suite d'entiers produite par l'algorithme éponyme finit par atteindre 1 (2015)
- [4] Nik Lygeros, Olivier Rozier: Dynamique du problème $3x+1$ sur la droite réelle, arXiv:1402.1979v1, math.DS (2014)
- [5] **Jean-Paul Delahaye : J'aimerais tant prouver Syracuse, dossier pour la science n°74 page 98, www.pourlascience.fr/dossiers (2012)**
- [6] Shalom Eliahou: La conjecture de Syracuse, Stage de mathématiques pour lycéens, 18 juin 2012, Calais, LMPA-ULCO (2012)
- [7] Ludovic Patey : La conjecture de Syracuse (2008)
- [8] Jules Rennucci : Quelques observations sur la conjecture de Syracuse (2008)
- [9] **Jean-Paul Delahaye, Christian Lasou** : La conjecture de Syracuse, Université des Sciences et Technologies de Lille (2007)
- [10] **Jean-Paul Delahaye : La conjecture de Syracuse, dossier pour la science n°247 page 100, www.pourlascience.fr/dossiers (1998)**
- [11] Arzac Jacques : Algorithmes pour vérifier la conjecture de Syracuse. Informatique théorique et applications, tome 21 no.1, p. 3-9, www.numdam.org/item?id=ITA_1987__21_1_3_0 (1987)

En anglais

Depuis 2010

- [12] Peter Hellekalek: On the $3x+1$ conjecture, arxiv.org/abs/1605.02634v1 (2016)
- [13] Jeffrey R. Goodwins: The $3x+1$ Problem and Integer Representations, [de.arxiv.org/abs/1504.03040v1](https://arxiv.org/abs/1504.03040v1) (2015)
- [14] Marcus Elia, Amanda Tucker: Consecutive integers and the Collatz conjecture, arXiv:1511.09141v1, math.NT (2015)
- [15] Michael Albert, Bjarki Gudmundsson and Henning Ulfarsson: Collatz meets Fibonacci, arxiv.org/abs/1404.3054v2 (2015)
- [16] Maya Mohsin Ahmed: A window to the convergence of a Collatz sequence, Math.NT, arxiv.org/abs/1510.01274v1 (2015)

- [17] Jose Capco: Odd Collatz Sequence and Binary Representations (2015)
- [18] Aristides V. Doulas, Vassilis G. Papanicolaou: A Randomized Version of the Collatz $3x+1$ Problem, National Technical University of Athens, arxiv.org/abs/1503.03658v1 (2015)
- [19] Antoine Gautiera, Matthias Heina: Tensor norm and maximal singular vectors of non-negative tensors - a Perron-Frobenius theorem, a Collatz-Wielandt characterization and a generalized power method, Saarland University, Saarbrücken, Germany, arXiv:1503.01273v1, math.SP (2015)
- [20] Steffen Lionke: A geometric approach to divergent points of higher dimensional Collatz mappings, arxiv.org/abs/1511.05893v1 (2015)
- [21] Qiuyun Xu, Xizhu Peng, Thomas Ortlepp, Yuki Yamanashi, Nobuyuki Yoshikawa: Demonstration of Bit-Serial SFQ-Based Computing for Integer Iteration Algorithms, IEEE volume 25 number 3 (2015)
- [22] Mike Winkler: New results on the stopping time behavior of the Collatz $3x+1$ function, arXiv:1504.00212v1, math.GM (2015)
- [23] Blake Thornton: Mathematical Black Holes (2015)
- [24] Denis Martinez Tàpanes, Jose E. Martinez Serra: Some elements for the demonstration of Collatz conjecture, Universidad Central de Las Villas (Marta Abreu University), Cuba, arxiv.org/abs/1512.05438v1 (2015)
- [25] Shukai Qin, Zhenyu Wang, Yonghong Wang, Kaijie Xu: A Method of JavaScript path obfuscation based on Collatz conjecture, Zhengzhou Information Science and Technology Institute, Zhengzhou, China (2015)
- [26] Gogi Pantsulaia: Under Collatz conjecture the Collatz mapping has no an asymptotic mixing property (mod 3), Georgian Republic, arxiv.org/abs/1502.05602v4 (2015)
- [27] Olivier Rozier: The $3x+1$ problem: a lower bound hypothesis, arxiv.org/abs/1510.01610v3 (2015)
- [28] Peter Schorer: A Solution to the $3x+1$ Problem, Hewlett-Packard Laboratories, Palo Alto, USA (2015)
- [29] Mallet Nicolas: Trial for a proof of the Syracuse Conjecture, arXiv:1507.05039v2, math.GM (2015)
- [30] **Jason P. Bell and Jeffrey C. Lagarias:** $3x+1$ inverse orbit generating functions almost always have natural boundaries, arxiv.org/abs/1408.6884v1 (2014)
- [31] Martiros Khurshudyan: Collatz problem and conjecture. A generalization of the problem, Max Planck Institute of Colloids and Interfaces, Potsdam (2014)
- [32] Mark A. Durham: On the Uniqueness of the (1,2) Cycle of the Collatz Function For Positive Integers, Spartanburg, South Carolina, United States (2014)
- [33] Mike Winkler: On the structure and the behaviour of Collatz $3n+1$ sequences - Finite subsequences and the role of the Fibonacci sequence, arXiv:1412.0519v1, math.GM (2014)
- [34] Felix Goldberg: Spectral radius minus average degree: a better bound, arXiv:1407.4285v1, math.CO (2014)
- [35] Kerstin Andersson: On the Boundedness of Collatz Sequences, Department of Mathematics and Computer Science, Karlstad University, Karlstad, Sweden, [arXiv.org/abs/1403.7425v3](https://arxiv.org/abs/1403.7425v3), math.NT (2014)
- [36] Michael Albert, Bjarki Gudmundsson and Henning Ulfarsson: Collatz permutations, de.arxiv.org/abs/1404.3054v1, math.CO (2014)

- [37] Yao-ban Chan and Andrew Rechnitzer: Upper bounds on the growth rates of hard squares and related models via corner transfer matrices, arXiv:1411.7442v1, math.CO (2014)
- [38] Wolfdieter Lang: On Collatz' Words, Sequences and Trees, Karlsruhe, Germany, arxiv.org/abs/1404.2710v1 (2014)
- [39] Bernd C. Kellner: Sparse matrices describing iterations of integer-valued functions, arXiv:1411.0590v1, math.CO (2014)
- [40] Horst R. Thieme: Comparison of spectral radii and Collatz-Wielandt numbers for homogeneous maps, and other applications of the monotone companion norm on ordered normed vector spaces, School of Mathematical and Statistical Sciences, Arizona State University, USA, arxiv.org/abs/1406.6657v1 (2014)
- [41] Pascal Michel: Simulation of the Collatz $3x+1$ function by Turing machines, Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris, France, arxiv.org/abs/1409.7322v1 (2014)
- [42] Patrick Wiltrout, Eric Landquist: The Collatz conjecture and integers of the form $(2^k)^b - m$ and $(3^k)^b - 1$, Furman University, Electronic Journal of Undergraduate Mathematics Volume 17, 1-5 (2013)
- [43] Yukihiro Hashimoto: The van der Corput Embedding of $ax+b$ and its Interval Exchange Map Approximation, Aichi University of Education, Japan (2013)
- [44] I. K. Rystsov: Some remarks about the Collatz problem, Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 49, No. 3 (2013)
- [45] Deborah Marie Schuda Stout: Graphing Beyond Collatz, The Ohio State University (2013)
- [46] Carolin Zöbelein: About the proof of the Collatz conjecture, arxiv.org/abs/1303.2073v2 (2013)
- [47] **Lothar Berg and Gerhard Opfer:** An analytic approach to the Collatz $3n+1$ problem for negative start values with an appendix of tables (2012)
- [48] **J. C. Lagarias:** The $3x+1$ Problem: An Annotated Bibliography, II (2000-2009), University of Michigan, arxiv.org/abs/math/0608208v6 (2012)
- [49] **Keenan Monks, Kenneth G. Monks, Kenneth M. Monks, Maria Monks:** Strongly sufficient sets and the distribution of arithmetic sequences in the $3x+1$ graph, arXiv:submit/0459612, math.DS (2012)
- [50] Thomas W. Allen II: Characteristics of counter example loops in the Collatz conjecture, Department of Mathematics and Computer Science University of Central Missouri (2012)
- [51] Yagub N. Aliyev, Vugar A. Suleymanov: Construction of periods for $3x+1$ problem, Qafqaz University, Azerbaijan (2012)
- [52] A. M. Grubiy: Automation implementations of the process of generating a Collatz sequence, Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 48, No. 1 (2012)
- [53] Alec Edgington: The autoconjugacy of a generalized Collatz map, arxiv.org/abs/1206.0553v1 (2012)
- [54] Dengguo Feng, Xiubin Fan, Liping Ding, Zhangyi Wang: On the nonexistence of nontrivial small cycles of the μ function in $3x+1$ conjecture, The Editorial Office of JSSC & Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2012)
- [55] Nabarun Mondal and Partha P. Ghosh: A general class of Collatz sequence and ruin problem, arxiv.org/abs/1203.2229v1 (2012)
- [56] **Gerhard Opfer:** An analytic approach to the Collatz $3n+1$ Problem (2011)

- [57] **Jeffrey C. Lagarias: The Ultimate Challenge: the $3x+1$ problem, ISBN-10 0821849409 (2011)**
- [58] Thomas W. Lynch: More Jabber about the Collatz Conjecture and a Closed form for Detecting Cycles on Special Subsequences (2011)
- [59] **Jeffrey C. Lagarias:** The $3x+1$ Problem: An Annotated Bibliography (1963–1999) (Sorted by Author), University of Michigan, arxiv.org/abs/math/0309224v13 (2011)
- [60] Craig Alan Feinstein: The Collatz $3n+1$ Conjecture is Unprovable, arxiv.org/abs/math/0312309v19 (2011)
- [61] Mike Winkler: On a stopping time algorithm of the $3n+1$ function (2011)
- [62] **Jeffrey C. Lagarias:** The $3x+1$ Problem: An Overview (2010)
- [63] **Keenan Monks, Ken G. Monks, Ken M. Monks, Maria Monks:** On the distribution of arithmetic sequences in the Collatz graph (2010)
- [64] **Marc Chamberland:** Averaging Structure in the $3x+1$ Problem, Department of Mathematics and Statistics, Grinnell College, Grinnell, IA, U.S.A. (2010)
- [65] Kenneth Conrow: The Structure of the Collatz Graph; A Recursive Production of the Predecessor Tree; Proof of the Collatz $3x+1$ Conjecture (2010)
- [66] Michael A. Idowu: On the Foundations of the Theory of a new Collatz Based Number System, arxiv.org/abs/1503.04661v2 (2010)
- [67] Sk. Sarif Hassan, Pabitra Pal Choudhury, Rajneesh Singh, Snigdha Das, Birendra Kumar Nayak: Collatz Function like Integral Value Transformations, Alexandria Journal of Mathematics, Volume 1 number 2 (2010)
- [68] Joseph Sinyor: The $3x+1$ Problem as a String Rewriting System, Hindawi Publishing Corporation, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences Volume 2010, Article ID 458563, 6 pages (2010)
- [69] Keith Matthews: Generalizations of the $3x+1$ problem and connections with Markov matrices and chains, University of Queensland (2010)
- [70] Antoine Mhanna: The Collatz Conjecture, Lebanese University, Beirut, Lebanon (2010)
- [71] Yasuaki Ito, Koji Nakano: Efficient exhaustive verification of the Collatz conjecture using DSP48E blocks of Xilinx Virtex-5 FPGAs, Hiroshima University, Japan (2010)

Avant 2010

- [72] **Alex V. Kontorovich, Jeffrey C. Lagarias:** Stochastic Models for the $3x+1$ and $5x+1$ Problems, arXiv:0910.1944v1, math.NT (2009)
- [73] Doron Zeilberger: Teaching the Computer how to Discover(!) and then Prove(!!) (all by Itself(!!!)) Analogs of Collatz's Notorious $3x+1$ Conjecture, arxiv.org/abs/0903.4050v1 (2009)
- [74] Nils Svensson: Theme and variations on the $3n+1$ problem (2009)
- [75] Yasuaki Ito, Koji Nakano: A hardware-software cooperative approach for the exhaustive verification of the Collatz conjecture, Hiroshima University, Japan, IEEE (2009)
- [76] Kenneth Hicks, Gary L. Mullen, Joseph L. Yucas and Ryan Zavislak: A Polynomial Analogue of the $3n+1$ Problem, The American Mathematical Monthly, Vol. 115, No. 7 (Aug. - Sep., 2008), pp. 615-622, www.jstor.org/stable/27642557 (2008)
- [77] Steven J Miller: Benford's Law: Why the IRS might care about the $3x+1$ problem and $S(s)$, Williams College, www.williams.edu/go/math/sjmilller (2008)

- [78] Liesbeth De Mol: Tag systems and Collatz-like functions, Theoretical Computer Science 390 (2008) 92–101, Gent University, Belgium (2007)
- [79] Gottfried Helms: Cycles in the Collatz-problem, University Kassel (2007)
- [80] Xianghua Li, Zhengxuan Wang, Xiangjiu Che, Tianyang Lu: Artistic Fractal Images for Complex Mapping $F(z)$ and $T(z)$, JiLin University, ChangChun, China (2007)
- [81] Keira Gunn: Collatz-type Problems with Multiple Divisors, McMaster University, University of British Columbia, Vancouver (2007)
- [82] **Jeffrey C. Lagarias, K. Soundararajan**: Benford's Law for the $3x + 1$ Function, University of Michigan, arxiv.org/abs/math/0509175v2 (2006)
- [83] José María Amigó: Representing the integers with powers of 2 and 3, Acta Informatica (2006) 43:293–306, Springer-Verlag (2006)
- [84] K.R. Matthews: Generalized $3x + 1$ Mappings: Markov Chains and Ergodic Theory (2006)
- [85] Matthew Palmacci: Escher's Problem and Numerical Sequences, Faculty of the Worcester Polytechnic institute (2006)
- [86] David Alan Stroup: Collatz's problem and encoding vectors, thesis (2006)
- [87] Pavlos B. Konstadinidis: The real $3x+1$ problem, Acta Arithmetica 122.1, Sao Paulo (2006)
- [88] **David Applegate and Jeffrey C. Lagarias**: The $3x+1$ semigroup, arxiv.org/abs/math/0411140v2 (2005)
- [89] Michał Misiurewicz and Ana Rodrigues: Real $3x+1$, AMS Vol. 133, No. 4 (Apr., 2005), pp. 1109-1118, www.jstor.org/stable/4097670 (2005)
- [90] Dhananjay Mehendale: Some Observations on the $3x+1$ Problem (2005)
- [91] **J. C. Lagarias**: The $3x+1$ Problem: An annotated bibliography, AT&T Labs-Research, USA (2004)
- [92] **Kenneth G. Monks, Jonathan Yazinski**: The autoconjugacy of the $3x + 1$ function, University of Scranton, USA, Discrete Mathematics 275 (2004) 219 – 236 (2004)
- [93] J.F. Alves, M.M. Graça, M.E. Sousa Dias, J. Sousa Ramos: A linear algebra approach to the conjecture of Collatz, Dep. Matemática, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, www.elsevier.com/locate/laa (2004)
- [94] Dan Levy: Injectivity and surjectivity of Collatz functions, Discrete Mathematics 285 (2004) 191-199, The Academic College of Tel-Aviv-Yaffo, Israel (2004)
- [95] Shuichi Ichikawa, Naohiro Kobayashi: Preliminary study of custom computing hardware for the $3x+1$ problem, Toyohashi University of Technology, Japan (2004)
- [96] **Monks**: The $3x+1$ Problem (or how to assign intractable open questions to undergraduates) (2003)
- [97] **J. C. Lagarias and N. J. A. Sloane**: Approximate Squaring, AT&T Shannon Lab, arxiv.org/abs/math/0309389v2 (2003)
- [98] **David Applegate and Jeffrey C. Lagarias**: Lower Bounds for the Total Stopping Time of $3x+1$ Iterates, Mathematics of Computation, Vol. 72, No. 242 (Apr., 2003), pp. 1035-1049, www.jstor.org/stable/4099947 (2003)
- [99] **Ilija Krasikov, Jeffrey C. Lagarias**: Bounds for the $3x + 1$ Problem using Difference Inequalities, arxiv.org/abs/math/0205002v1 (2002)
- [100] **Kenneth G. Monks**: $3x+1$ Minus the +, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 5, 2002, 47–54, University of Scranton, USA (2002)

- [101] **Marc Chamberland:** An Update on the $3x+1$ Problem, Department of Mathematics and Computer Science, Grinnell College, Grinnell, IA, U.S.A. (2002)
- [102] A. V. Kontorovich, Ya. G. Sinai: Structure Theorem for (d, g, h) -Maps, Bull Braz Math Soc, New Series 33(2), 213-224, Sociedade Brasileira de Matemática (2002)
- [103] **David Applegate and Jeffrey C. Lagarias:** Lower Bounds for the Total Stopping Time of $3x+1$ Iterates, arxiv.org/abs/math/0103054v1 (2001)
- [104] **G. J. Wirsching:** On positive predecessor density in $3n+1$ dynamics (preliminary version), Mathematisch-Geographische Fakultät, Katholische Universität Eichstätt, Germany (2001)
- [105] Stefan Andrei, Manfred Kudlek, Radu Stefan Niculescu: Some results on the Collatz problem, Acta Informatica 37: 145–160 (2000)
- [106] Arun Lakhotia: A reformulation of the $3x+1$ function revealing some structural regularity, University of Louisiana at Lafayette, USA (2000)

Avant 2000

- [107] **Tomás Oliveira E Silva:** Maximum Excursion and Stopping Time Record-Holders for the $3x+1$ Problem: Computational Results, Mathematics of Computation, Vol. 68, No. 225 (Jan., 1999), pp. 371-384, AMS, www.jstor.org/stable/2585117 (1999)
- [108] **Ken Monks:** A Category of Topological Spaces Encoding Acyclic, Set-Theoretic Dynamics (and other Collatz fun), University of Scranton (1999)
- [109] Edward G. Belaga: Reflecting on the $3x + 1$ Mystery. Outline of a Scenario, hal.archives-ouvertes.fr/hal-00129576 (1998)
- [110] Allen H. Brady, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 63, No.1 (Mar., 1998), pp. 331-332, www.jstor.org/stable/2586607 (1998)
- [111] **Günther J. Wirsching: The dynamical system generated by the $3n+1$ function, ISBN 3-540-63970-5 (1998)**
- [112] **Jeffrey C. Lagarias:** Wild and Wooley Numbers (1997)
- [113] **Daniel J. Bernstein, Jeffrey C. Lagarias:** The $3x+1$ conjugacy map (1996)
- [114] **Günther Wirsching:** On the combinatorial structure of $3n+1$ predecessor sets, Discrete Mathematics 148 (1996) 265-286, Katholische Universität Eichstätt, Mathematisch-Geographische Fakultät, Germany (1996)
- [115] **Francis Charles Motta, Henrique Roscoe de Oliveira, Thiago Aparecido Catalan:** An Analysis of the Collatz Conjecture, IMECC/UNICAMP. Campinas-SP (1996)
- [116] Carlolyn Farruggia, Michael Lawrence, Brian Waterhouse: The elimination of a family of periodic parity vectors in the $3x+1$ problem, Pi Mu Epsilon Journal volume 10 number 4 page 275 (1996)
- [117] **Marc Chamberland:** A continuous extension of the $3x+1$ problem to the real line, McMaster University, Ontario, Canada (1994)
- [118] **Kenneth G. Monks and Jonathan Yazinski:** The autoconjugacy of the $3x+1$ function (1994)
- [119] James R. Kuttler: On the $3x+1$ problem, Advances in applied mathematics 15, 183-185 (1994)
- [120] **J. C. Lagarias and A. Weiss:** The $3x+1$ Problem: Two Stochastic Models, The Annals of Applied Probability, Vol. 2, No. 1 (Feb., 1992), pp. 229-261, www.jstor.org/stable/2959662 (1992)

- [121] S. Burckel: Functional equations associated with congruential functions, Theoretical Computer Science 123 (1994) 397406, Université de Caen, France (1992)
- [122] Gary T. Leavens, Mike Vermeulen: $3x+1$ search programs, Computers Math. Applic. Vol. 24, No. 11, pp. 79-99 (1992)
- [123] Daniel J. Bernstein: A non-iterative 2-adic statement of the $3n+1$ conjecture, AMS 121 (1994), 405-408 (1992)
- [124] K. A. Borovkov, D. Pfeifer: Estimates for the Syracuse problem via a probabilistic model (1992)
- [125] **Shalom Eliahou**: The $3x+1$ problem: new lower bounds on nontrivial cycle lengths, Discrete Mathematics 118 (1993) 45-56, North-Holland, Université de Genève, Switzerland (1991)

Avant 1990

- [126] Benedict G. Seifert: On the arithmetic of cycles for the Collatz-Hasse ("Syracuse") conjectures, Discrete Mathematics 68 (1988) 293-298, North-Holland (1988)
- [127] Thoma. Cloney, Eric Gole, Gerard Y. Vichniac: The $30x+1$ Problem: A Quasi Cellular Automaton, Complex Systems 1 (1987) 349-360 (1987)
- [128] J. M. Dolan, A. F. Gilman and S. Manickam: A Generalization of Everett's Result on the Collatz $3x+1$ Problem, Advances in applied mathematics 8, 405-409 (1987), Western Carolina University, Cullowhee, North Carolina, USA (1987)
- [129] K. R. Matthews and G. M. Leigh: A Generalization of the Syracuse Algorithm in $F_q[x]$, Journal of number theory 25, 274278 (1987), University of Queensland, Australia (1987)
- [130] **Jeffrey C. Lagarias**: The $3x+1$ Problem and Its Generalizations, The American Mathematical Monthly, Vol. 92, No. 1 (Jan., 1985), pp. 3-23, www.jstor.org/stable/2322189 (1985)
- [131] Lynn E. Garner: On heights in the Collatz $3n+1$ problem, Discrete Mathematics 55 (1985) 57-64, Department of Mathematics, Brigham Young University, UT, U.S.A. (1984)
- [132] Lynn E. Garner: On the Collatz $3n+1$ algorithm, AMS Volume 82, Number 1, May 1981 (1981)
- [133] **R. E. Crandall**: On the " $3x+1$ " Problem, Mathematics of computation, volume 32, number 144, October 1978, pages 1281-1292 (1978)
- [134] **C. J. Everett**: Iteration of the Number-Theoretic Function $f(2n)=n$, $f(2n+1)=3n+2$, Advances in mathematics 25, 42-45 (1977), Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico (1977)

3. Forme allégorique : Vécu

En termes de dénombrement, pour se donner une image avec le vol et la durée de vol, fermer les yeux, et imaginer votre naissance. Vous êtes terriblement seul et dénué d'un bon nombre de capacités. Ensuite en grandissant, vous rencontrez votre famille et des amis. Votre entourage augmente. Puis vous vous mariez et avez des enfants. Vous rencontrez la famille, les collègues et les amis de votre conjoint(e). Vous connaissez des amis de vos enfants et leurs parents. Puis, un déclin s'installe lentement. Vos enfants quittent le cocon familial. Votre entourage vieillit et commence pour certain à disparaître ou à déménager dans des maisons spécialisées. Votre conjoint(e) décède. Vous vous retrouver pratiquement seul comme au début de votre vie. L'unité est le début et la fin de tout homme, les autres qui vous ont entourés durant votre existence représentent les hauteurs de votre vol. Et votre durée de vol est votre âge de décès.

4. Forme allégorique : Interférences électriques

Sur un autre registre, les signaux électriques recèlent de bruit. Ce bruit correspond à un ensemble de perturbations du signal plus ou moins mesurable. Ce bruit peut aller jusqu'à brouiller ou masquer le signal lui-même. Des filtres du signal existent pour éliminer une partie importante de ce bruit. Néanmoins, il existe toujours, aussi infinitésimal soit-il, ce bruit dans tous les signaux électriques. Les signaux représentent tous les entiers, de par leurs variétés de forme, puissance et amplitude. Le bruit représente les « sauts » des vols précisément chaotiques et imprévisibles.

11. Remerciements et à propos de l'auteur

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement mon ami François pour ses nombreuses et régulières idées innovantes, sa ténacité, son amitié et son enthousiasme. Sans eux, ce livre n'aurait jamais vu le jour.

~

Je vis en France. Cet ouvrage a été en totalité rédigé par moi-même uniquement. J'ai débuté cet ouvrage en février 2015. Ce travail personnel est le fruit d'une année d'effort. Vous comprendrez que cela a rempli bon nombre de mes soirées.

Je ne suis pas mathématicien, ni chercheur dans le domaine mais ingénieur de formation.

L'envie de chercher à partir d'un terrain vide, sans contraintes, sans règles préétablies, sans notion de temps ou de durée limite, m'a envahi peu à peu. Ce besoin inlassable de produire dans toutes les directions sur ce problème addictif est un pur plaisir de création et de liberté d'esprit.

Toute en gardant un objectif clair en tête, trouver des éléments de preuve de cette conjecture de Syracuse, il m'est aujourd'hui impossible de me défaire de cette idée qui tourne, par période, à l'obsession. En effet, comment s'imaginer qu'avec autant de stratagèmes, d'outils issus des mathématiques modernes, de rigueur et de patience, peut-on encore être si loin du moindre résultat relatif à ce problème si simple à comprendre ?

J'ai fait quelques nuits blanches, j'ai ressassé plusieurs fois avant de m'endormir quelques idées nouvelles. Mon cerveau semble parfois en ébullition tant il est à la fois stimulé, motivé et excité. Je dois trouver autre chose, encore une autre méthode, une autre façon de regarder ce calcul, me projeter sur un autre axe de vision, voir plus large ou plus en détail, peut être mixer plusieurs résultats déjà trouvés, ou tout revoir à l'envers, s'inspirer d'autres auteurs chercheurs sur le web... Ça y est, vous êtes dans ma tête !

Les réflexions sur un simple problème introuvable, sont comme un ciel la nuit auquel on illumine une à une chaque étoile. L'esprit se réveille, et cherche en lui des illuminations et des recoins de l'esprit qu'il n'a encore jamais exploré. C'est un travail de titan, mais agréable.

Qu'est-ce qui peut à ce point me motiver ou m'attirer ? Vous l'aurez compris, pas ce problème en lui-même, malgré sa fascination évidente, mais l'envie et le besoin de se connaître encore et encore davantage.

Mon énergie se focalise sur l'humanité et son rôle sur terre. Si un Dieu existe, on a les moyens de s'en rapprocher. Par quels moyens ? Nul ne le sait vraiment. Mais il est en chacun de nous. Ainsi, je cherche dans mon esprit le côté divin qui y réside, s'il y réside, pour en exploiter le meilleur auprès de mes semblables humains. Ces propos doivent vous sembler lointain du sujet de cet ouvrage.

Sachez que pour ma part, il n'en est rien. Au contraire, des éléments constitutifs de ce livre sont issus de cette recherche mentale au-delà d'une simple réflexion sur un bout de papier. Aller toujours plus loin dans l'analyse, les idées créatrices et surtout les manières d'appréhender les situations, demande une concentration et une volonté particulière.

1. Forme allégorique : cellule

Une simple cellule, source unique et simple de la vie, se développe. Elle double à chaque instant pour former par exemple un fœtus, un enfant, un adolescent, un adulte, un vieillard. Imaginez une société pharmaceutique plus innovante et avancée que les autres à l'origine d'une invention extraordinaire. Cette entreprise met au point un antidote ou un virus selon les avis qui permet d'inverser le vieillissement. C'est-à-dire une simple injection ponctuelle qui jour après jour vous rajeunit. Cela vous intéresserait-il ? Si oui à quel âge souhaiteriez-vous avoir cette injection ? Combien seriez-vous prêt à payer pour cela ? Cela double à la fois votre longévité mais aussi votre qualité de vie. Rendez-vous compte, plus jeune jour après jour. C'est incroyable mais il y a un revers. Un prix à payer. Il est très simple.

Ce processus de cure de jeunesse est irréversible. C'est-à-dire que votre rajeunissement ne s'arrêtera pas. Vous êtes né cellule, vous redeviendrez cellule. Si bien que si vous décidez une injection à 80 ans en apprenant que vous êtes atteint du cancer. Votre vie durera deux fois plus, 160 ans en ayant eu deux fois 40 ans, deux fois 30 ans, etc. Vous pourriez vous marier à 30 ans avec une rétrograde. C'est-à-dire une personne qui a déjà vécu plus âgé et qui rajeunit chaque jour. Si bien que lorsque vous aurez 50 ans, votre femme n'aura plus que 10 ans. Puis elle deviendra un bébé, un fœtus, une cellule unique.

Mais alors quel rapport avec la conjecture de Syracuse ? Et bien cet antidote irréversible de jeunisme ou virus vers la mort programmée inversée ou rétrograde s'appelle Syracuse. Une cellule à sa naissance double à chaque instant pour atteindre son état final : un homme, une plante, un animal, etc. cet état final de toute chose vivante qui nous entoure représente un nombre entier positif unique. C'est notre point de départ N. Son état est stable. Lorsque le virus Syracuse est appliqué en une seule et unique injection, l'état des cellules est bousculé. Si les cellules sont un nombre pair, le virus les casse en deux, si elles sont un impair le virus les laisse se proliférer et s'accroître, et ainsi de suite. Jour après jour ce processus continue créant le rajeunissement du vivant. Une fois l'état de cellule unique atteint, le virus ne peut plus agir puisqu'il s'agit d'un nombre impair de cellule, en l'occurrence une seule. Alors, la cellule, inlassablement, recherche sa survie et son développement. Elle double. Le virus identifie un nombre pair de cellule et les casse en deux. Si bien que la cellule ne peut plus se développer et oscille à l'infini entre une et deux cellules.

Ce procédé est un hymne à la vie. Toute cellule vivante a pour objectif et est programmée intrinsèquement pour se démultiplier, se développer et s'accroître pour sa survie. Le virus Syracuse est, quant à lui, un faux antidote à la longévité mais une imposture puisqu'en fait il détruit la vie jusqu'à la rendre insignifiante à l'état de cellule.

La vie est naturellement faite pour grandir, s'adapter et progresser génération après génération. Le virus Syracuse, avec une seule impulsion, détruit cette énergie en l'inversant coûte que coûte. Ce virus qui ramène toute vie terrienne à son origine est un hymne à la mort et la destruction.

Et pourtant, après avoir lu tout cela, prendriez-vous cette injection ? Sûrement oui malgré sa contre nature évidente. Seriez-vous un rétrograde ? seriez-vous prêt à en payer le prix quel qu'il soit ? Seriez-vous favorable à une modification du virus Syracuse pour ralentir le jeunisme et ainsi vivre encore plus longtemps ? Une fois, enfant qui s'occuperait de vous ? Vos enfants qui vous verront mourir bébé ?

Tout cela amène un grand nombre de question tout comme la conjecture de Syracuse. Cela montre que nous ne sommes pas prêts et assez mûre pour comprendre toutes les implications d'un tel processus inverse. Par exemple en entreprise, accepteriez-vous d'avoir un PDG à l'aspect de 20 ans qui en a en réalité 140 (80 an en vieillissement naturel + 60 an rajeunissement (rétrograde)).

2. Forme allégorique : vagues

Les océans sont immenses et emplis d'eaux de toutes sortes. Ces eaux sont en permanence en mouvement. Elles progressent vers les rivages et s'y retirent sans cesse. Ces mouvements autant variés qu'indénombrables s'observent le plus généralement par des vagues, vaguelettes ou simple houle. Parfois, les mers grondent et font apparaître de gigantesques vagues, sur de longues distances, avant de s'écraser lourdement sur la surface de la mer ou plus dangereusement sur une côte habitée. Les raz de marée ou les tsunamis sont les pires dangers que l'océan puisse créer. Les tourbillons créés par autres ouragans, tornades, typhons ou cyclones en pleine mer sont pas mal non plus.

Mais, il faut le reconnaître, tous ces effets causés par les océans, aussi hauts soient-ils et aussi longtemps durent-ils, retombent tous sans exceptions au niveau de la surface de l'eau.

Maintenant, suivez au hasard le parcours d'une seule goutte d'un océan. En eau calme, elle va malgré tout toujours osciller légèrement au grès des vaguelettes pour avancer. Si la tempête se réveille, la goutte va suivre des vagues de plus en plus hautes, et de plus en plus longtemps avant de retomber inlassablement à la surface de l'eau.

La surface est l'unité de toutes les eaux. Là où elles se retrouvent toutes, le niveau zéro de la mer. Les vagues donnent les hauteurs de vols et leurs durées par rang ou groupe de rangs. Le cycle final {1, 2} est l'état par défaut de toutes les gouttes des océans, en oscillation légère et perpétuelle.

Par exemple, la goutte n°27 passe par un tsunami avant de retrouver les eaux calmes. Essayez d'imaginer la suite.

12. Annexes

Vous trouverez dans les pages suivantes les annexes de ce document détaillant des parties des chapitres précédents. Cela vous aidera à mieux comprendre la suite et explorer plus en détail certains aspects de la suite.

Certaines de ces annexes sont fondamentales à la compréhension du cheminement de la suite, de sa construction, de sa structure ainsi que de sa complexité. En effet, par exemple, il est difficile d'en limiter le périmètre.

2. Autres formes allégoriques

Parce qu'elles ne sont pas dénombrables, les formes allégoriques se rapportant à la conjecture de Syracuse, s'enchaînent ci-dessous sans limites. Vous en aurez sûrement trouvé d'autres également. Laisser libre court à votre imagination pour entrer dans l'infini à partir de l'unité. Inlassablement votre parcours d'esprit vous mènera vers une unicité tangible. Tout mène-t-il à 1 ? Peut-être, à vous de juger.

Partagez à la communauté via le blog mathsyracuse.wordpress.com.

1. Réseau ferroviaire

Le réseau ferroviaire en France ou ailleurs est composé d'une multitude de stations, destinations et trains voyageurs ou de fret. Ces trains ont des terminus qui varient d'un jour ou parfois même d'une heure à l'autre. Mais alors où est l'unicité ? La convergence absolue ? C'est pourtant simple, l'ensemble des terminus de tous les trains constituent une finalité en soi. Cette finalité est unique et s'appelle toujours « terminus ». Que le train soit long, de voyageurs ou de fret, qu'il soit loin ou prêt de son terminus, qu'il ait peu d'arrêt en stations ou gares ou un nombre incommensurable, ce train, ainsi que tous les autres, ira inlassablement finir sa route à son terminus.

2. Rues

Les habitations, les magasins et les entreprises d'une rue sont tous numérotés pairs d'un côté et impairs de l'autre. Une petite rue aura peu de numéro et une longue et large rue en aura bien davantage.

Imaginez maintenant des rues avec numérotations qui ne se suivent pas, avec davantage de nombres pairs que d'impairs ou inversement. C'est-à-dire par exemple avec des champs sans numéro d'un côté de la rue et plusieurs numéros le long en face. Ces rues il en existent partout dans le monde. Il suffit de les sélectionner pour ne garder que celles qui correspondent à la suite de Syracuse. Cet ensemble quasi infini de rues constitue les vols des nombres entiers N et convergent tous vers la première maison, la maison mère à l'adresse n°1. Cette maison donne sur la plus petite rue et la seule qui ne comporte qu'un rond-point. Et oui, cette rue tourne en rond pour nous retrouver à notre point de départ. C'est la représentation du cycle infini final. Du n°1 on tourne en rond pour se retrouver en face au n°2 et ainsi de suite.

3. Conjecture de Syracuse

LA CONJECTURE DE SYRACUSE

1. Choisissez un nombre entier positif,
2. S'il est impair :
multipliez-le par 3 et ajoutez 1,
3. Divisez-le par 2,
4. Recommencez à l'étape 2
jusqu'à obtenir toujours 1 !

