HAL
open science

ENCCRE - annotations et dossier critique de l'article COURBE

Thierry Joffredo

▶ **To cite this version:**

Thierry Joffredo. ENCCRE - annotations et dossier critique de l'article COURBE. Édition Numérique Collaborative et CRitique de l'Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers (1751-1772) http://enccre.academie-sciences.fr/encyclopedie/, 2020. hal-02937028

HAL Id: hal-02937028

https://hal.science/hal-02937028v1

Submitted on 12 Sep 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Article COURBE, (*Ordre encycl. Entend. Raison, Science, Science de la Nat. Science des quantités abstr. Science de l'étendue, Géométrie, Géométrie des lignes courbes.*), vol. **IV** (**1754**), p. 377b–387a

Transcription

p. 377b COURBE, adj. pris subst. (*Ordre encycl. Entend. Raison, Science, Science de la Nat. Science des quantités abstr. Science de l'étendue, Géométrie, Géométrie des lignes courbes.*)(2) est, dit-on, une ligne dont les différens points sont dans différentes directions, ou sont différemment situés les uns par rapport aux autres. C'est du moins la définition que donne Chambers(3) après une foule d'auteurs *Voyez* LIGNE.

2 *Courbe,* ajoûte-t-on, pris en ce sens, est opposé à *ligne droite,* dont les points sont tous situés de la même maniere les uns par rapport aux autres.

3 On trouvera peut-être chacune de ces deux définitions peu précise(4) ; & on n'aura pas tort. Cependant elles paroissent s'accorder assez avec l'idée que tout le monde a de la ligne droite & de la ligne *courbe :* d'ailleurs il est très-
p. 378 difficile de donner de / ces lignes une notion qui soit plus claire à l'esprit que la notion simple qu'excite en nous le seul mot de *droit* & de *courbe.* La définition la plus exacte qu'on puisse donner de l'une & de l'autre, est peut-être celle-ci : La ligne droite est le chemin le plus court d'un point à un autre, & la ligne *courbe* est une ligne menée d'un point à un autre, & qui n'est pas la plus courte. Mais la premiere de ces définitions renferme plûtôt une propriété secondaire que l'essence de la ligne droite ; & la seconde, outre qu'elle ne renferme qu'une propriété négative, convient aussi-bien à un assemblage de lignes droites qui font angle, qu'à ce qu'on appelle proprement *courbe,* & qu'on peut regarder comme l'assemblage d'une infinité de petites lignes droites contigues entr'elles à angles infiniment obtus. *Voyez plus bas* COURBE POLYGONE ; *voyez aussi* CONVEXE. Peut-être feroit-on mieux de ne point définir la ligne *courbe* ni la ligne droite, par la difficulté & peut-être l'impossibilité de réduire ces mots à une idée plus élémentaire que celle qu'ils présentent d'eux-mêmes. *Voyez* DÉFINITION.

4 Les figures terminées par des lignes *courbes* sont appellées *figures curvilignes,* pour les distinguer des figures qui sont terminées par des lignes droites, & qu'on appelle *figures rectilignes.* *Voyez* RECTILIGNE & FIGURE.

5 La théorie générale des *courbes,* des figures qu'elles terminent, & de leurs propriétés, constitue proprement ce qu'on appelle la *haute géométrie* ou la *géométrie transcendante.* *Voyez* GEOMETRIE.

6 On donne sur-tout le nom de *géométrie transcendante* à celle qui, dans l'examen des propriétés des *courbes,* employe le calcul différentiel & intégral. *Voyez ces mots ; voyez aussi la suite de cet article.*

7 Il ne s'agit poin tici, comme on peut bien le croire, des lignes *courbes* que l'on peut tracer au hasard & irrégulierement sur un papier. Ces lignes n'ayant d'autre loi que la main qui les forme, ne peuvent être l'objet de la Géométrie ; elles peuvent l'être seulement de l'art d'écrire. Un géometre moderne(5) a pourtant crû que l'on pouvoit toûjours déterminer la nature

Typesetting math: 100%

d'une *courbe* tracée sur le papier ; mais il s'est trompé en cela. Nous en donnerons plus bas la preuve.

Nous ne parlerons d'abord ici que des *courbes* tracées sur un plan, & qu'on appelle *courbes à simple courbure*[6]. On verra dans la suite la raison de cette dénomination. Pour déterminer la nature d'une *courbe,* on imagine une ligne droite tirée dans son plan à volonté. Par tous les points de cette ligne droite, on imagine des lignes tirées parallelement & terminées à la *courbe.* La relation qu'il y a entre chacune de ces lignes paralleles, & la ligne correspondante de l'extrémité de laquelle elle part, étant exprimée par une équation, cette équation s'appelle l'*équation de la courbe.* *Voyez* EQUATION.

Dans une *courbe,* la ligne *AD* (*Pl. de Géométr. fig. 51.*) qui divise en deux également les lignes paralleles *MM*, est ordinairement appellée *diametre.* Si le diametre coupe ces lignes à angles droits, il est appellé *axe ;* & le point *A* par où l'axe passe est appellé le *sommet de la courbe.* *Voy.* DIAMETRE, AXE,& SOMMET.

Les lignes paralleles *MM* sont appellées *ordonnées* ou *appliquées ;* & leurs moitiés *PM, demi-ordonnées* ou *ordonnées.* *Voyez* ORDONNÉE.

La portion du diametre *AP,* comprise entre le sommet ou un autre point fixe, & l'ordonnée est appellée *abscisse.* *Voyez* ABSCISSE. Le point de concours des diametres se nomme *centre.* *V.* CENTRE ; *voyez aussi les remarques* que fait sur ce sujet M. l'abbé de Gua dans la premiere section de son ouvrage intitulé, *Usages de l'analyse de Descartes*[7]. Il appelle plus proprement *centre d'une courbe* un point de son plan, tel que si on mene par ce point une ligne droite quelconque terminée à la *courbe* par ses deux extrémités, ce point divise la ligne droite en deux parties égales.

Au reste, on donne aujourd'hui en général le nom d'*axe* à toute ligne tracée dans le plan de la *courbe* & à laquelle se rapporte l'équation ; on appelle *l'axe des x,* ou simplement *axe,* la ligne sur laquelle se prennent les abscisses ; *axe des y,* la ligne parallele aux ordonnées, & passant par le point où x est = 0. Ce point est nommé l'*origine des coordonnées* ou l'*origine de la courbe.* *Voyez* COORDONNÉES.

Descartes[8] est le premier qui ait pensé à exprimer les lignes *courbes* par des équations. Cette idée sur laquelle est fondée l'application de l'Algebre à la Géométrie (*voyez* APPLICATION & DÉCOUVERTE) est très-heureuse & très-féconde.

Il est visible que l'équation d'une *courbe* étant résolue, donne une ou plusieurs valeurs de l'ordonnée y pour une même abscisse x, & que par conséquent une *courbe* tracée n'est autre chose que la solution géométrique d'un problème indéterminé, c'est-à-dire qui a une infinité de solutions : c'est ce que les anciens appelloient *lieu géométrique.* Car quoiqu'ils n'eussent pas l'idée d'exprimer les *courbes* par des équations, ils avoient vû pourtant que les *courbes* géométriques n'étoient autre chose que le lieu, c'est-à-dire la suite d'une infinité de points qui satisfaisoient à la même question ; par exemple, que le cercle étoit le lieu de tous les points qui désignent les sommets des angles droits qu'on peut former sur une même base donnée, laquelle base est le diametre du cercle ; & ainsi des autres.

Les *courbes* se divisent en algébriques, qu'on appelle souvent avec Descartes *courbes géométriques ;* & en transcendantes, que le même Descartes nomme *méchaniques*[9].

Les *courbes* algébriques ou géométriques sont celles où la relation des abscisses *AP* aux ordonnées *PM* (*fig. 52.*) est ou peut être exprimée par une équation algébrique. *Voyez* EQUATION & ALGEBRIQUE.

Supposons, par exemple, que dans un cercle on ait $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$; on aura $PB = a - x$: par conséquent, puisque $PM^2 = AP \times PB$, on aura yy

Typesetting math: 100%

$= ax - xx$; ou bien si on suppose $PC = x$, $AC = a$, $PM = y$, on aura $MC^2 - PC^2 = PM^2$, c'est-à-dire $a^2 - x^2 = y^2$.

Il est visible par cet exemple, qu'une même *courbe* peut être représentée par différentes équations. Ainsi sans changer les axes dans l'équation précédente, si on prend l'origine des x au sommet du cercle, au lieu de les prendre au centre, on trouve, comme on vient de le voir, $yy = ax - xx$ pour l'équation.

Plusieurs auteurs, après Descartes, n'admettent que les *courbes* géométriques dans la construction des problèmes, & par conséquent dans la Géométrie ; mais M. Newton[10], & après lui, MM. Leibnitz & Wolf sont d'un autre sentiment, & prétendent avec raison que dans la construction d'un problème, ce n'est point la simplicité de l'équation d'une *courbe* qui doit la faire préférer à un[11] autre, mais la simplicité & la facilité de la construction de cette *courbe*. *Voyez* CONSTRUCTION, PROBLÈME, & GEOMETRIQUE.

Courbe transcendante ou méchanique est celle qui ne peut être déterminée par une équation algébrique. *Voyez* TRANSCENDANT.

Descartes exclud ces *courbes* de la Géométrie ; mais Newton & Leibnitz sont d'un avis contraire pour la raison que nous venons de dire. En effet une spirale, par exemple, quoique *courbe* méchanique, est plus aisée à décrire qu'une parabole cubique.

L'équation d'une *courbe* méchanique ne peut être exprimée que par une équation différentielle entre les dy & les dx[12]. *Voyez* DIFFERENTIEL. Entre ces deux genres de *courbes*, on peut placer, 1° les *courbes* / exponentielles dans l'équation desquelles une des inconnues, ou toutes les deux entrent en exposant, comme une *courbe* dont l'équation seroit $y = a^x$, ou $y^x = a^y$ &c. *Voyez* EXPONENTIEL. 2° les *courbes* interscendantes[13] dans l'équation desquelles les exposans sont des radicaux, comme $x = y^{\sqrt{2}}$. Ces deux especes de *courbes* ne sont proprement ni géométriques ni méchaniques, parce que leur équation est finie sans être algébrique.

Une *courbe* algébrique est infinie, lorsqu'elle s'étend à l'infini, comme la parabole & l'hyperbole ; finie, quand elle fait des retours sur elle-même comme l'ellipse ; & mixte, quand une de ses parties est infinie, & que d'autres retournent sur elles-mêmes.

Pour se former l'idée d'une *courbe* par le moyen de son équation, il faut imaginer que l'équation de la *courbe* soit résolue, c'est-à-dire qu'on ait la valeur de y en x. Cela posé, on prend toutes les valeurs positives de x depuis 0 jusqu'à l'infini, & toutes les valeurs négatives depuis 0 jusqu'à $-$ l'infini. Les ordonnées correspondantes donneront tous les points de la *courbe*, les ordonnées positives étant prises toutes du même sens, & les négatives du côté opposé. Voilà ce qu'on trouve dans tous les Algébristes & géometres modernes. Mais aucun n'a donné la raison de cette regle. Nous la donnerons dans la suite de cet article[14], après avoir parlé auparavant de la transformation des axes d'une *courbe*.

Il est certain qu'après avoir rapporté l'équation d'une *courbe* à deux axes quelconques d'abscisses & d'ordonnées, on peut la rapporter à deux autres axes quelconques tirés, comme on voudra, dans le plan de la *courbe*. De ces deux axes, l'un peut être parallele ou coïncident à l'axe des x, & l'autre parallele ou coïncident à l'axe des y ; ils peuvent aussi n'être point paralleles ni l'un ni l'autre aux deux premiers axes, mais faire avec eux des angles quelconques. Supposons, par exemple, que AP (x) & PM (y) soient (*Pl. d'Algeb. fig. 17.*) les abscisses & les ordonnées d'une *courbe*, & qu'on veuille rapporter la *courbe* aux nouvelles coordonnées quelconques Ap & pM ; on tirera AB & Bq paralleles à y & à x, & on nommera les coordonnées nouvelles Ap (z) & pM (u). Cela posé, il est visible que l'angle apM est donné, comme on le suppose, ainsi que l'angle pBq, & l'angle Bqm ou son égal

Typesetting math: 100%

AmM, & que aB & AB sont aussi donnés de grandeur & de position. Donc si on nomme aB, a, & AB, b, on aura $Bp = z - a$, Bq ou $Am = (z - a)\ m$, m exprimant le rapport connu de Bq à Bp ; $Pm = yn$, n étant de même un coefficient donné, & par conséquent AP ou $x=(z - a)m + yn$: de plus $Mm = pM - pm = pM - AB - pq = u - b - zq + aq$, q étant de même un coefficient donné, & MP ou $y = (u - b - zq + aq) \times k$: donc on aura $y = (u - b - zq + aq)\ k$ & $x = (z - a)\ m + nk\ (u - b - zq + aq)$; donc si on met à la place de x & de y leurs valeurs qu'on vient de trouver en z & en u, on aura une nouvelle équation par rapport aux coordonnées z & u. Voyez *à l'art.* TRANSFORMATION DES AXES *un plus grand détail*.

Il est visible qu'on peut placer non-seulement l'axe des z & l'axe des u, mais aussi l'axe des x & celui des y, par-tout où l'on voudra, sans que la *courbe* change pour cela de place, & que la position de la *courbe* est totalement indépendante de la position des axes ; de sorte que les ordonnées u partant de l'axe des z, doivent aboutir aux mêmes points que les ordonnées y, partant de l'axe des x. Cela est évident par les opérations même que l'on fait pour la transformation des axes. D'ailleurs on doit considérer qu'une *courbe* n'est autre chose que le lieu d'une infinité de points qui servent à résoudre un problème indéterminé, c'est-à-dire un problème qui a une infinité de solutions. Or la situation de ces points est totalement indépendante de la position des axes auxquels on les rapporte, ces axes pouvant être placés partout où l'on voudra. De ces principes, on peut tirer les conséquentes suivantes sur la position des ordonnées.

1°. Les ordonnées positives doivent être prises d'un même côté ; car soit (*fig. 36. n°. 3. analys.*) AP l'axe des x, & qu'on trouve deux valeurs positives pour y ; soit Pm la plus grande de ces valeurs, je dis que la plus petite PM doit être prise du même côté. Car soit transposé l'axe AP en ap, en sorte que $Pp = a$, & soit $ap = x$, & $pm = z$; on aura l'équation rapportée aux axes x & z, en mettant $z - a$ pour y dans l'équation de la *courbe* ; & on aura chaque valeur de z égale aux valeurs correspondantes de y, augmentées chacune de a ; donc au point p, on aura deux valeurs positives de z, savoir $a + PM$ & $a + Pm$. Or si on ne prenoit pas PM du même côté que Pm, mais de l'autre côté, l'ordonnée pM, au lieu d'être $a + PM$, seroit $a - PM$; la *courbe* changeroit donc ou d'équation ou de figure, en changeant d'axe ; & tandis qu'une de ses parties resteroit à la même place, l'autre se promeneroit, pour ainsi dire, suivant que l'on changeroit l'axe de place. Or ni l'un ni l'autre ne se peut. Donc il faut que PM & Pm soient pris du même côté, quand ils sont tous deux positifs.

2°. Si on a deux valeurs, l'une positive PM, l'autre négative Pm (*fig. 36. n°. 2.*), il faudra les prendre de différens côtés. Car soit, par exemple, $PM = \sqrt{x}$, & $Pm = -\sqrt{x}$: transposant l'axe AP en ap, ensorte que $pP = a$, & mettant $z - a$ pour y, dans l'équation de la *courbe*, on aura $z = a + \sqrt{x}$ & $z = a - \sqrt{x}$. Si on suppose $\sqrt{x} < a$, ce qui se peut toûjours, puisque a est arbitraire, on trouvera z ou $pM = a + PM$ & z ou $pm = a - PM$. Donc Pm doit être égale à PM, & prise dans un sens contraire. Tout cela est aisé à voir avec un peu d'attention.

Lorsque les ordonnées sont positives, elles appartiennent toutes également à la *courbe*, ce qui est évident, puisqu'il n'y a pas de raison pour préférer l'une à l'autre. Mais lorsqu'elles sont négatives, elles n'appartiennent pas moins à la *courbe* ; car, pour s'en convaincre, il n'y a qu'à reculer l'axe de façon que toutes les ordonnées deviennent positives. Dans cette derniere position de l'axe, toutes les ordonnées appartiendront également à la *courbe*. Donc il en sera de même dans la premiere position que l'axe avoit.

Donc supposant x positive, toutes les valeurs de y tant positives que négatives, appartiennent à la *courbe* ; mais au lieu de prendre la ligne des x pour l'axe, on peut prendre la ligne des y, & alors on aura des valeurs tant

Typesetting math: 100%

positives que négatives de x, lesquelles par la même raison appartiendront aussi à la *courbe.* Donc la *courbe* renferme toutes les valeurs des y répondantes à une même x, & toutes les valeurs de x répondantes à une même y ; ou ce qui revient au même, elle renferme toutes les valeurs positives & négatives de y répondantes, soit aux x positives, soit aux x négatives. En effet, si dans la valeur de y qui répond aux x positives, on change les signes des termes où x se trouve avec une dimension impaire, on aura la valeur de y correspondante aux x négatives ; & cette équation sera évidemment la même qu'on auroit, en résolvant l'équation en x & en y, après avoir changé d'abord dans cette équation les signes des termes où x se trouve avec une dimension impaire. Or je dis que cette derniere équation appartient également à la *courbe ;* car ordonnons l'équation primitive par rapport à x, avant d'avoir changé aucun signe, & cherchons les va-/leurs de x en y ; nous venons de voir que les valeurs, tant positives que négatives de x, appartiennent à la *courbe*. Or les valeurs négatives sont les mêmes que l'on auroit avec un signe positif, en changeant dans l'équation primitive les signes des termes où x se trouve avec une dimension impaire ; car on sait que dans une équation ordonnée en x, si on change les signes des termes où x se trouve avec une dimension impaire, toutes les racines changent de signe sans changer d'ailleurs de valeur. *Voyez* EQUATION. Donc l'équation en x, avec le changement des signes indiqué appartient aussi-bien à la *courbe* que l'équation en x, sans changer aucun signe. Donc, *&c.* Il est donc important de changer les signes de x, s'il est nécessaire, pour avoir la partie de la *courbe* qui s'étend du côté des x négatives. En effet soit, par exemple, $yy = aa - xx$ l'équation du cercle, on aura, en prenant x positive, $y = \pm\sqrt{aa - xx}$; & en faisant x négative, on aura de même $y = \pm\sqrt{aa - xx}$ ce qui donne le cercle entier. Si on prenoit seulement x positive, on n'auroit que le demi-cercle ; & si on ne prenoit y que positive, on n'auroit que le quart du cercle.

Voilà donc une démonstration générale de ce que tous les Géometres n'ont supposé jusqu'à présent que par induction. En effet ils ont vû, par exemple, que si $y = a - x$, c'est l'équation d'une ligne droite qui coupe son axe au point où $x = a$, & qui ensuite passe de l'autre côté. Or quand $x > a$, on a y négative ; ainsi, ont-ils dit, l'ordonnée négative doit être prise du côté opposé à la positive. Ils ont vû encore que $y = \pm\sqrt{px}$ est l'équation de la parabole, & que cette *courbe* a en effet deux parties égales & semblables, l'une à droite & l'autre à gauche de son axe, ce qui prouve que $-\sqrt{px}$ doit être prise du côté opposé à $\sqrt{px}$. Plusieurs autres exemples pris du cercle, des sections coniques rapportées à tel axe qu'on jugera à propos, ont prouvé la regle de la position des ordonnées & la nécessité de prendre x négative, après l'avoir pris positive. On s'en est tenu là : mais ce n'étoit pas une démonstration rigoureuse.

Les différentes valeurs de y répondantes à x positive & à x négative, donnent les différentes branches de la *courbe*. *Voyez* BRANCHE.

Lorsqu'on a ordonné l'équation d'une *courbe* par rapport à y ou à x, s'il ne se trouve point dans l'équation de terme constant, la *courbe* passe par l'origine ; car en faisant $x = 0$, & $y = 0$ dans l'équation, tout s'évanoüit. Donc la supposition de $y = 0$ quand $x = 0$, est légitime. Donc la *courbe* passe par le point où 15 $x = 0$.

En général, si on ordonne l'équation d'une *courbe* par rapport à y, ensorte que le dernier terme ne contienne que x avec des constantes, & qu'on cherche les valeurs de x propres à rendre ce dernier terme égal à zéro, ces valeurs de x donneront les points où la *courbe* coupera son axe ; car puisque ces valeurs de x substituées dans le dernier terme le rendront =0, on prouvera par le même raisonnement que ci-dessus, que dans les points qui répondent à ces valeurs de x, on a $y = 0$.

Typesetting math: 100%

Lorsque la valeur de l'ordonnée y est imaginaire, la *courbe* manque dans ces endroits-là ; par exemple, lorsque $x > a$ dans l'équation $y = \pm\sqrt{aa - xx}$ la valeur d'y est imaginaire : aussi le cercle n'existe point dans les endroits où $x > a$; de même si dans l'équation $y = \pm\sqrt{px}$ on fait x négative, on trouvera y imaginaire, ce qui prouve que la parabole ne passe point du côté des x négatives.

On verra aux articles EQUATION & IMAGINAIRE que toute quantité imaginaire ou racine imaginaire d'une équation peut se réduire à $A + B\sqrt{-1}$, A & B étant des quantités réelles[16], & que toute équation qui a pour racine $A + B\sqrt{-1}$ a pour racine aussi $A - B\sqrt{-1}$. Or quand une ordonnée passe du réel à l'imaginaire, cela vient de ce qu'une quantité comme C, qui étoit sous un signe radical $\sqrt{C}$, devient négative, en sorte que $C = B\sqrt{-1}$, B étant une quantité réelle. Or pour que C devienne négative, de positive qu'elle étoit, il faut qu'elle passe par le zero, ou par l'infini. *Voyez* MAXIMUM. Donc au point où l'ordonnée passe à l'imaginaire, on a B nul ou infini ; donc les racines $A + B\sqrt{-1}$ & $A - B\sqrt{-1}$ deviennent égales en ce point-là. Donc la limite qui sépare les ordonnées réelles des ordonnées imaginaires, renferme deux ou plusieurs ordonnées égales, lesquelles seront $= 0$, ou finies ou infinies ; égales à zero, si $A = 0$, & si B est zero ; finies, si A est finie, & B zero ; infinies si A est infinie & B zero, ou si A est finie & B infinie, ou si A & B sont infinies l'une & l'autre.

Par exemple, si $x = a$, & que l'équation soit $y = a - x \pm \sqrt{a - x}$, on a $y = 0$; si l'équation est $y = a \pm \sqrt{a - x}$, y sera $= a$; si l'équation est $y = a \pm \frac{1}{\sqrt{a-x}}$, ou $y = \frac{1}{a-x} \pm \sqrt{a - x}$, y sera infinie ; & si dans tous ces cas on prend $x > a$, la valeur de y sera imaginaire.

Quand on a l'équation d'une *courbe*, il faut examiner d'abord si cette équation ne peut pas se diviser en plusieurs équations rationnelles ; car si cela est, l'équation se rapporte, non à une seule & même *courbe*, mais à des *courbes* différentes[17]. On en peut voir un exemple *à l'article* HYPERBOLES CONJUGUÉES *au mot* CONJUGUÉ. Nous ajoûterons ici, 1°. qu'il faut, pour ne point se tromper là-dessus, mettre d'abord tous les termes de l'équation d'un côté, & zero de l'autre, & voir ensuite si l'équation est réductible en d'autres équations rationnelles ; car soit, par exemple, $yy = aa - xx$, on seroit tenté de croire d'abord que l'équation peut se changer en ces deux-ci $y = a - x$ & $y = a + x$, dont le produit donne $yy = aa - xx$; ainsi on pourroit croire que l'équation $yy = aa - xx$ qui appartient réellement au cercle, appartiendroit au système de deux lignes droites, $y = a + x$ & $y = a - x$. Or on se tromperoit en cela ; mais pour connoître son erreur, il n'y a qu'à faire $yy - aa + xx = 0$, & l'on verra alors facilement que cette équation n'est pas le produit des deux équations $y - a + x = 0$ & $y - a - x = 0$; en effet, on sent assez que $yy = aa - xx$ ne donne ni $y = a - x$, ni $y = a + x$; mais si on avoit l'équation $yy - 2ay + aa - xx = 0$, on trouveroit que cette équation viendroit des deux $y - a - x = 0$ & $y - a + x = 0$, & qu'ainsi elle représenteroit non une *courbe*, mais un système de deux lignes droites.

2°. Les équations dans lesquelles l'équation apparente d'une *courbe* se divise, n'en seroient pas moins rationnelles quand elles renfermeroient des radicaux, pourvû que la variable x ne se trouvât pas sous ces radicaux ; par exemple, une équation qui seroit formée de ces deux-ci, $y - \sqrt{aa + bb} - x = 0$ & $y - \sqrt{aa + bb} + x = 0$, représenteroit toûjours le système de deux lignes droites. Il faut seulement remarquer que l'équation $yy - 2y\sqrt{aa + bb} + aa + bb - xx = 0$ qui résulte de ces deux-là, se change, en faisant évanoüir tout-à-fait le signe radical, en celle-ci

Typesetting math: 100%

$(yy + aa + bb - xx)^2 - 4yy(aa + bb) = 0$, qui est du quatrieme degré, & qui renferme le système de 4 lignes droites $y - \sqrt{aa - bb} - x = 0$, / $y - \sqrt{aa - bb} + x = 0$, $y + \sqrt{aa + bb} - x = 0$, $y + \sqrt{aa + bb} + x = 0$.

3°. Les équations sont encore rationnelles quand même x se trouveroit sous le signe radical, pourvû qu'on puisse l'en dégager : par exemple, $y - \sqrt{aaxx + bbxx} = 0$ & $y - \sqrt{ddx^2 + x^2} = 0$ se changent en $y = \pm x\sqrt{aa + bb}$, & $y = \pm x\sqrt{dd + dd}$ qui est le système des quatre lignes droites, où l'on voit que les deux équations radicales en ont fourni chacune deux autres, parce que la racine de xx est également $+x$ & $-x$. Je m'étends sur ces différens objets, parce qu'ils ne sont point traités ailleurs, ou qu'ils le sont trop succinctement, ou qu'ils le sont mal.

Ceci nous conduit à parler d'une autre maniere d'envisager l'équation des *courbes*, c'est de déterminer une *courbe* par l'équation, non entre x & y, mais entre les y qui répondent à une même abscisse[18].

Exemple. On demande une *courbe*, dans laquelle la somme de deux ordonnées correspondantes à une même x soit toûjours égale à une quantité constante $2a$; je dis que l'équation de cette *courbe* sera $y = a + \sqrt{X}$, X désignant une quantité *radicale* quelconque, composée de x & de constantes. En effet, les deux ordonnées $y = a + \sqrt{X}$ & $y = a - \sqrt{X}$ ajoûtées ensemble, donnent une somme $= 2a$; mais il faut bien remarquer que $\sqrt{X}$ doit être une quantité irrationnelle ; car, par exemple, $y = a + \frac{x^3}{b^2}$ & $y = a - \frac{x^3}{b^2}$ ne satisferoient pas au problème, parce que ces deux équations ne désigneroient pas le système d'une seule & même *courbe*. De même si on demande une *courbe*, dans laquelle le produit des deux ordonnées correspondantes à x soit une quantité Q, qui contienne x avec des constantes, ou qui soit une constante, on fera $y = P \mp \sqrt{PP - Q}$, P étant une quantité quelconque qui contienne x avec des constantes, ou qui soit constante ; car le produit des deux valeurs $P + \sqrt{PP - Q}$ & $P + \sqrt{PP - Q}$ donnera Q. Voyez sur tout cela les journaux de Leipsic de 1697[19], les mémoires de l'acad. des Sciences de 1734[20], & l'*introductio ad analysim infinitorum*, par M. Euler, *c. xjv*[21].

Cours d'une courbe. Pour déterminer le cours d'une *courbe*, on doit d'abord résoudre l'équation de cette *courbe*, & trouver la valeur de y en x ; ensuite on prend différentes valeurs de x, & on cherche les valeurs de y correspondantes ; on voit par-là les endroits où la *courbe* coupe son axe, savoir les points où la valeur de $y = o$; les endroits où la *courbe* a une asymptote, c'est à-dire, les points où y est infinie, x restant finie, ou bien où y est infinie, & a un rapport fini avec x supposée aussi infinie ; les points où y est imaginaire, & où par conséquent la *courbe* ne passe pas, &*c*. Ensuite on fait les mêmes opérations, en prenant x négative. Par exemple, soit $(y - \frac{aa}{a-x})^2 = xx + aa$ l'équation d'une *courbe*, on aura donc $y = \frac{aa}{a-x} \pm \sqrt{xx + aa}$ Ce qui fait voir, 1°. que chaque valeur de x donne deux valeurs de y, à cause du double signe $\pm$; 2°. que si $x = o$, on a $y = a \pm a$, c'est-à-dire $y = o$ & $y = 2a$; 3°. que si $x = a$, $y =$ à l'infini, & que par conséquent la *courbe* a une asymptote au point où $x = a$, 4°. que si $x =$ à l'infini, on a $y = \pm x$; ce qui prouve que la *courbe* a des asymptotes qui font avec son axe un angle de 45 degrés ; en faisant x négative, on trouve $y = \frac{aa}{x-x} \pm \sqrt{xx + aa}$ équation sur laquelle on fera des raisonnemens semblables. Il en est de même des autres cas. Si l'équation avoit $\sqrt{xx - aa}$ on trouveroit qu'au point où $x =$ o, l'ordonnée devient imaginaire, &*c*.

On peut tracer à peu-près une *courbe* par plusieurs points, en prenant

Typesetting math: 100%

plusieurs valeurs de x assez près l'une de l'autre, & cherchant les valeurs de y. Ces méthodes de décrire une *courbe* par plusieurs points sont plus commodes & en un sens plus exactes que celles de les décrire par un mouvement continu. *Voyez* COMPAS ELLIPTIQUE.

Les anciens n'ont guere connu d'autres *courbes* que le cercle, les sections coniques, la conchoïde, & la cissoïde. *Voyez ces mots*. La raison en est toute simple, c'est qu'on ne peut guere traiter des *courbes* sans le secours de l'Algebre, & que l'Algebre paroit avoir été peu connue des anciens[22]. Depuis ce tems on y a ajoûté les paraboles & hyperboles cubiques, & le trident ou parabole de Descartes ; voilà où on en est resté, jusqu'au Traité des lignes du troisieme ordre de M. Newton[23], dont nous parlerons plus bas. *Voyez* PARABOLE, HYPERBOLE, TRIDENT, *&c.*

Nous avons dit ci-dessus que les *courbes* méchaniques sont celles dont l'équation entre les coordonnées n'est & *ne peut-être* algébrique, c'est-à-dire finie. Nous disons *ne peut-être ;* car si l'équation différentielle d'une *courbe* avoit une intégrale finie, cette *courbe* qui paroîtroit d'abord méchanique, seroit réellement géométrique. Par exemple, si $dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$, la *courbe* est géométrique, parce que l'intégrale est $y = \sqrt{2ax} + A$ ce qui représente une parabole. Mais l'équation $dy = \frac{adx}{\pm 2ax - xx}$ est l'équation d'une *courbe* méchanique, parce que l'on ne sçauroit trouver l'intégrale de cette équation différentielle[24]. *Voyez* DIFFÉRENTIEL, INTEGRAL & QUADRATURE.

Les anciens ont fait très-peu d'usage des *courbes* méchaniques ; nous ne leur en connoissons guere que deux, la spirale d'Archimede & la quadratrice de Dinostrate. *Voyez ces mots*. Ils se servoient de ces *courbes* pour parvenir d'une maniere plus aisée à la quadrature du cercle. Les modernes ont multiplié à l'infini le nombre des *courbes* méchaniques ; le calcul différentiel a facilité extrêmement cette multiplication, & les avantages qu'on pouvoit en tirer. *V.* MECHANIQUE. Revenons aux *courbes* algébriques ou géométriques, qui sont celles dont il sera principalement mention dans cet article, parce que le caractere de leurs équations qui consiste à être exprimées en termes finis, nous met à portée d'établir sur ces *courbes* des propositions générales, qui n'ont pas lieu dans les *courbes* méchaniques. C'est principalement la Géométrie des *courbes* méchaniques, qu'on appelle *Géométrie transcendante*, parce qu'elle employe nécessairement le calcul infinitésimal ; au lieu que la Géométrie des *courbes* algébriques n'employe point, du moins nécessairement, ce calcul pour la découverte des propriétés de ces *courbes*, si on en excepte leurs rectifications & leurs quadratures ; car on peut déterminer, par exemple, leurs tangentes, leurs asymptotes, leurs branches, *&c.* & toutes les autres propriétés de cette espece par le secours du seul calcul algébrique ordinaire[25]. *Voyez* les ouvrages de MM. Euler[26] & de Gua[27], déja cités, & l'ouvrage de M. Cramer, qui a pour titre *introduction à l'analyse des lignes courbes, Genev. 1750*[28]. in-4°.

Nous avons vû ci-dessus comment on transforme les axes x & y d'une *courbe* par les équations $x = Az + Bu + C$, $y = Dz + Eu + F$; c'est-là la transformation la plus générale, & si on veut faire des transformations plus simples, on n'a qu'à supposer un des coefficiens A, B, C, D, &c. ou plusieurs égaux à zero, pourvû qu'on ne suppose pas, par exemple, A & B ensemble égaux à zero, ni D & E / ensemble égaux à zero, car on auroit $x = C$, & $y = F$; ce qui ne se peut, puisque x & y qui sont des indéterminées, ne peuvent être égales à des constantes. On ne doit point non plus supposer en même tems B & $E = 0$, ni A & $D = 0$; car substituant les valeurs de x & de y, on n'auroit plus dans l'équation de la *courbe* qu'une seule indéterminée u. Or il faut qu'il y en ait toûjours deux.

Typesetting math: 100%

Il est visible que si on substitue à la place de x & de y les valeurs ci-dessus dans l'équation de la *courbe*, l'équation n'augmentera pas de dimension ; car on détermine la dimension & le degré de l'équation d'une *courbe* par la plus haute dimension à laquelle se trouve l'une ou l'autre des inconnues x, y, ou le produit des inconnues ; par exemple, l'équation d'une *courbe* est du troisieme degré, lorsqu'elle contient le cube y^3, ou le cube x^3, ou le produit xyy ou xxy, ou toutes ces quantités à la fois, ou quelques-unes seulement. Or comme dans les équations $x = Az + Bu + C$, $y = Dz + Eu + F$ z & u ne montent qu'au premier degré, il est évident que si on substitue ces valeurs dans l'équation en x & en y, la dimension de l'équation & son degré n'augmentera pas. Il est évident, par la même raison, qu'elle ne diminuera pas ; car si elle diminuoit, c'est-à-dire, si l'équation en z & en u étoient de moindre dimension que l'équation en x & en y, alors substituant pour z & pour u leurs valeurs en x & en y, lesquelles sont d'une seule dimension, comme il est aisé de le voir, on retrouveroit l'équation en x & en y, & par conséquent on parviendroit à une équation d'une dimension plus élevée que l'équation en z & en u ; ce qui est contre la premiere proposition.

Donc en général, quelque transformation d'axe que l'on fasse, l'équation de la *courbe* ne change point de dimension[29]. On peut voir dans l'ouvrage de M. l'abbé de Gua[30], & dans l'introduction à l'analyse des lignes *courbes* par M. Cramer[31], les manieres abrégées de faire le calcul pour la transformation des axes. Mais ce n'est pas de quoi il s'agit ici, cette abréviation de calcul étant indifférente en elle-même aux propriétés de la *courbe*. *Voyez aussi* TRANSFORMATION *des axes*.

Courbes algébriques du même genre ou du même ordre, ou du même degré, sont celles dont l'équation monte à la même dimension[32]. *V.* ORDRE & DEGRÉ.

Les *courbes* géométriques étant une fois déterminées par la relation des ordonnées aux abscisses, on les distingue en différens genres ou ordres[33] ; ainsi les lignes droites sont les lignes du premier ordre ; les lignes du second ordre sont les sections coniques.

Il faut observer qu'une *courbe* du premier genre est la même qu'une ligne du second ordre, parce que les lignes droites ne sont point comptées parmi les *courbes*, & qu'une ligne du troisieme ordre est la même chose qu'une *courbe* du second genre. Les *courbes* du premier genre sont donc celles dont l'équation monte à deux dimensions ; dans celles du second genre, l'équation monte à trois dimensions ; à quatre, dans celles du troisieme genre, *&c.*

Par exemple, l'équation d'un cercle[34] est $y^2 = 2ax - xx$ ou $y^2 = a^2 - x^2$; le cercle est donc une *courbe* du premier genre & une ligne du second ordre.

De même la *courbe*, dont l'équation est $ax = y^2$, est une *courbe* du premier genre ; & celle qui a pour équation $a^2x = y^3$, est *courbe* du second genre & ligne du troisieme ordre.

Sur les différentes *courbes* du premier genre & leurs propriétés, *voyez* SECTIONS CONIQUES *au mot* CONIQUE.

On a vû à cet article CONIQUE, quelle est l'équation la plus générale des lignes du second ordre, & on trouve que cette équation a $3 + 2 + 1$ termes ; on trouvera de même que l'équation la plus générale des lignes du troisieme ordre est $y^3 + axy^2 + bxxy + cx^3 + ey^2 + fxy + gxx + hx + iy + l = 0$, & qu'elle a $4 + 3 + 2 + 1$ termes, c'est-à-dire 10 ; en général, l'équation la plus composée de l'ordre n, aura un nombre de termes $= (n + 2) \times (\frac{n+1}{2})$, c'est-à-dire, à la somme d'une progression arithmétique, dont $n + 1$ est le premier terme & 1 le dernier. *Voyez* PROGRESSION ARITHMÉTIQUE.

Il est clair qu'une droite ne peut jamais rencontrer une ligne du n^e ordre

Typesetting math: 100%

qu'en n points tout au plus ; car quelque transformation qu'on donne aux axes, l'ordonnée n'aura jamais que n valeurs réelles tout au plus, puisque l'équation ne peut être que du degré n. On peut voir dans l'ouvrage de M. Cramer[35], déja cité, plusieurs autres propositions, auxquelles nous renvoyons, sur le nombre des points, où les lignes de différens ordres ou du même ordre peuvent se couper[36]. Nous dirons seulement que l'équation d'une *courbe* du degré n étant ordonnée, par exemple, par rapport à y, en sorte que y^n n'ait pour coefficient que l'unité, cette équation aura autant de coefficiens qu'il y a de termes, moins un, c'est-à-dire, $\frac{nn+3n}{2}$. Donc si on donne un pareil nombre de points, la *courbe* du n^e^ ordre qui doit passer par ces points sera facilement déterminable ; car en prenant un axe quelconque à volonté, & menant des points donnés des ordonnées à cet axe, on aura $\frac{nn+3n}{2}$ ordonnées connues, ainsi que les abscisses correspondantes, & par conséquent on pourra former autant d'équations, dont les inconnues seront les coefficiens de l'équation générale. Ces équations ne donneront jamais que des valeurs linéaires pour les coefficiens, qu'on pourra par conséquent trouver toûjours facilement[37].

Au reste il peut arriver que quelques-uns des coefficiens soient indéterminés, auquel cas on pourra faire passer plusieurs lignes du même ordre par les points donnes ; ou que les points donnés soient tels que la *courbe* n'y puisse passer, pour lors l'équation sera réductible en plusieurs autres rationnelles. Par exemple, qu'on propose de faire passer une section conique par cinq points donnés (car n étant = 2, $\frac{nn+3n}{2}$ est = 5) : il est visible que si trois de ces points sont en ligne droite, la section n'y pourra passer ; car une section conique ne peut jamais être coupée qu'en deux points par une ligne droite, puisque son équation n'est jamais que de deux dimensions. Qu'arrivera-t-il donc ? l'équation sera réductible en deux du premier degré, qui représenteront non une section conique, mais le système de deux lignes droites, & ainsi des autres.

On peut remarquer aussi que si quelques coefficiens se trouvent infinis, l'équation se simplifie ; car les autres coefficiens sont nuls par rapport à ceux-là, & on doit par conséquent effacer les termes où se trouvent ces coefficiens nuls.

M. Newton[38] a fait sur les *courbes* du second genre un traité intitulé, *enumeratio linearum tertii ordinis*. Les démonstrations des différentes propositions de ce traité se trouvent pour la plûpart dans les ouvrages de MM. Stirling[39] & Maclaurin[40] sur les *courbes*, & dans les autres ouvrages dont nous avons déjà parlé. Nous allons rapporter sommairement quelques-uns des principaux articles de l'ouvrage de M. Newton[41]. Cet auteur remarque que les *courbes* du second genre & des genres plus élevés, ont des propriétés analogues à celles des *courbes* du premier genre : par exemple, les sections coniques ont des diametres & des axes ; les lignes que ces diametres coupent en deux parties / égales sont appellées *ordonnées ;* & le point de la *courbe* où passe le diametre est nommé *sommet ;* de même si dans une *courbe* du second genre on tire deux lignes droites paralleles qui rencontrent la *courbe* en trois points, une ligne droite qui coupera ces paralleles, de maniere que la somme des deux parties comprises entre la sécante & la *courbe* d'un même côté, soit égale à l'autre partie comprise entre la sécante & la *courbe,* coupera, suivant la même loi, toutes les autres lignes qu'on pourra mener parallelement aux deux premieres, & qui seront terminées à la *courbe*, c'est-à-dire les coupera de maniere que la somme des deux parties d'un même côté sera égale à l'autre partie.

En effet, ayant ordonné l'équation de maniere que y^3 sans coefficient soit au premier terme, le second terme sera $y^2(a+bx)$, & ce second terme

Typesetting math: 100%

contiendra la somme des racines, c'est-à-dire des valeurs de y. *Voyez* EQUATION . Or par l'hypothese, il y a deux valeurs de x qui rendent ce second terme = 0, puisqu'il y a deux valeurs de x (*hyp.*) qui donnent la somme des ordonnées positives égale à la somme des négatives. Donc il y a deux valeurs de x, sçavoir A & B, qui donnent $a + bA = 0$, $a + Bb = 0$. Or cela ne peut-être, à moins qu'en général on n'ait $a = 0$, $b = 0$. Donc $a + bx$ =0, quelque valeur qu'on suppose à x. Donc le second terme manque dans l'équation. Donc la somme des ordonnées positives est par-tout égale à la somme des ordonnées négatives.

On peut étendre ce théoreme aux degrés plus élevés. Par exemple, dans le quatrieme ordre, le 2d terme étant $y^3(a + bx)$, c'est encore la même chose, & si deux valeurs de x donnent la somme des ordonnées nulle, toutes les autres valeurs la donneront.

Outre cela, comme dans les sections coniques non paraboliques, le quarré d'une ordonnée, c'est-à-dire le rectangle des ordonnées situées de deux différens côtés du diametre, est au rectangle des parties du diametre terminées aux sommets de l'ellipse ou de l'hyperbole, comme une ligne donnée appellée *latus rectum* ou *parametre*, est à la partie du diametre comprise entre les sommets, & appellée *latus transversum ;* de même dans les *courbes* du second genre non paraboliques, le parallelépipede sous trois ordonnées est au parallelépipede sous les trois parties du diametre terminées par les sommets & par la rencontre des ordonnées, dans un rapport constant.

Cela est fondé sur ce que le dernier terme de l'équation, savoir $hx^3 + lx^2 + mx + n$, est le produit de toutes les racines ; que ce dernier terme est outre cela le produit de $Ax + B$ par $Dx + E$, & par $Fx + G$, & que aux points où $y = 0$, c'est-à-dire où le diametre coupe la *courbe*, points que l'on appelle ici *sommets*[42], on a $x = -\frac{A}{B}$, $x = -\frac{E}{D}$, $x = -\frac{G}{F}$: avec ces propositions on trouvera facilement la démonstration dont il s'agit, ainsi que celle des théorèmes suivans, qui sont aussi tirés de M. Newton.

Comme dans la parabole conique qui n'a qu'un sommet sur un seul & même diametre, le rectangle des ordonnées est égal au produit de la partie du diametre comprise entre le sommet & l'ordonnée, par une ligne constante appellée *latus rectum ;* de même dans celles des *courbes* du second genre qui n'ont que deux sommets sur un même & unique diametre, le parallelépipede sous trois ordonnées est égal au parallelépipede sous les deux parties du diametre, comprise entre les sommets & la rencontre de l'ordonnée, & sous une troisieme ligne constante, que l'on peut par conséquent nommer *latus rectum*. *Voyez* PARABOLE .

De plus, dans les sections coniques, si deux lignes paralleles & terminées à la section, sont coupées par deux autres lignes paralleles & terminées à la section, la premiere par la troisieme & la seconde par la quatrieme, le rectangle des parties de la premiere est au rectangle des parties de la troisieme, comme le rectangle des parties de la seconde est au rectangle des parties de la quatrieme ; de même aussi, si on tire dans une *courbe* du second genre deux lignes paralleles, terminées à la *courbe* en trois points, & coupées par deux autres paralleles terminées à la même *courbe*, chacune en trois points, le parallelépipede des trois parties de la premiere ligne sera à celui des trois parties de la troisieme, comme le parallelépipede des trois parties de la seconde est à celui des trois parties de la quatrieme.

Enfin les branches infinies *des courbes* du premier & du second genre & des genres plus élevés, sont ou du genre hyperbolique ou du genre parabolique : une branche hyperbolique est celle qui a une asymptote, c'est-à-dire qui s'approche continuellement de quelque ligne droite ; une branche parabolique est celle qui n'a point d'asymptote. *Voyez* ASYMPTOTE &

Typesetting math: 100%

BRANCHE. Ces branches se peuvent distinguer encore mieux par leurs tangentes. En effet, si le point de contact d'une tangente est supposé infiniment éloigné, la tangente de ce point se confond avec l'asymptote dans une branche hyperbolique ; & dans une branche parabolique, elle s'éloigne à l'infini, & disparoît. On peut donc trouver l'asymptote d'une branche, en cherchant sa tangente à un point infiniment éloigné, & on trouve la direction de cette branche, en cherchant la position d'une ligne droite parallele à la tangente, lorsque le point de contact est infiniment éloigné ; car la direction de la branche infinie à son extrémité est parallele à celle de cette ligne droite.

Les lignes d'un ordre impair, par exemple du troisieme, du cinquieme, ont nécessairement quelques branches infinies[43] ; car on peut toûjours par une transformation d'axes, s'il est nécessaire, préparer l'équation, ensorte que l'une au moins des coordonnées se trouve élevée à une puissance impaire dans l'équation ; elle aura donc toûjours au moins une valeur réelle, quelque valeur qu'on suppose à l'autre coordonnée. Donc, *&c.*

Nous avons dit plus haut que dans une ligne *courbe* d'un genre quelconque, on peut toûjours imaginer l'axe tellement placé, que la somme des ordonnées d'une part soit égale à la somme des ordonnées de l'autre. L'axe en ce cas s'appelle ordinairement *diametre.* Il est évident que toute *courbe* en a une infinité ; car ayant transformé les axes d'une maniere quelconque, on peut toûjours supposer cette transformation telle que le second terme de la transformée manque, & en ce cas l'un des axes sera diametre.

On appelle *diametre absolu* celui qui divise les ordonnées en deux également ; tels sont ceux des sections coniques.

M. de Bragelongne[44] appelle *contre-diametre*[45] un axe des abscisses, tel que les abscisses opposées égales ayent des ordonnées opposées égales ; c'est-à-dire, tel que x négative donne y négative, sans changer d'ailleurs de valeur.

Ceci nous conduit naturellement à parler des *centres*, dont nous avons déja dit un mot plus haut. Pour qu'une *courbe* ait un centre, il faut qu'en supposant l'origine placée dans ce centre, & prenant deux x opposées & égales, les y correspondantes soient aussi opposées & égales ; c'est-à-dire il faut que faisant x négative dans l'équation, on trouve pour y la même valeur, mais négative. L'équation doit donc être telle par rapport à x & à y, qu'en changeant les si-/gnes de x & de y, elle demeure absolument la même ; donc cette équation ne doit contenir que des puissances ou des dimensions impaires de x & de y, sans terme constant, ou des puissances & des dimensions paires de x & de y, avec ou sans terme constant. Car dans le premier cas, tous les signes changeront, en faisant x & y négatives, ce qui est la même chose que si aucun signe ne changeoit ; & dans le second cas aucun signe ne changera. Voulez-vous donc savoir si une *courbe* a un centre ? L'équation étant ordonnée par rapport à x & à y, imaginez que l'origine soit transportée dans ce centre, ensorte que l'on ait $x + a = z, y + b = u$; & déterminez a & b à être telles, qu'il ne reste plus dans la transformée que des dimensions paires, ou des dimensions impaires sans terme constant ; si la *courbe* a un centre possible, vous trouverez pour a & b des valeurs réelles. Dans l'extrait du livre de M. l'abbé de Gua[46], *journal des Savans, Mai 1740*, extrait dont je suis l'auteur, on a remarqué que l'énoncé de la méthode de cet habile géometre pour déterminer les centres, étoit un peu trop générale.

Nous ne nous étendrons pas ici sur les manieres de déterminer les différentes branches des *courbes ;* nous renvoyerons sur ce sujet au livre de M. Cramer, qui a pour titre, *introduction a l'analyse des lignes courbes*[47]. Nous dirons seulement ici que ce problème dépend de la connoissance des séries & de la regle du parallélogramme, dont nous parlerons en leur lieu[48].

Typesetting math: 100%

Voyez PARALLELOGRAMME, SÉRIE, *&c.*

Division des courbes en differens ordres[49]. Nous avons vû à l'*article* CONIQUE, comment l'équation générale des sections coniques ou lignes du second ordre donne trois *courbes* differentes. *Voyez le troisieme vol. p. 878, col.* 1re ; nous remarquerons seulement ici, 1° qu'il faut $-Duu$ au lieu de Duu ; c'est une faute d'impression : 2° que lorsque D est négatif, & par conséquent $-Duu$ positif, alors l'équation primitive & générale $yy + pxy + bxx + qy + cx + a = 0$ est telle que la portion $yy + pxy + bxx$ a ses deux facteurs imaginaires, c'est-à-dire que cette portion $yy + pxy + bxx$ supposée égale à zéro, ne donneroit aucune racine réelle. On peut aisément s'en assûrer par le calcul ; car en ce cas on trouvera $\frac{pp}{4} < b$ & la quantité A dans la transformée $zz + Axx + Bx + C = 0$ sera positive, & par consequent $-D$ positive : 3° dans l'équation $zz - Duu + Fu + G = 0$, on peut réduire les trois termes $-Duu + Fu + G$ à deux + $Ktt + H$, lorsque D n'est pas = 0, par la même méthode qu'on employe pour faire évanouir le second terme d'une équation du second degré ; c'est-à-dire en faisant $u - \frac{F}{2D} = t$, & alors l'équation sera $zz + Ktt + H = 0$; équation à l'ellipse, si K est positif ; & à l'hyperbole, si K est négatif : 4° si $D = 0$, en ce cas on fera $Fu + G = kt$, & l'équation sera $zz + kt = 0$, qui est à la parabole : 5° dans le cas où $D = o, yy + pxy + bxx$ a les deux facteurs égaux ; & dans le cas où D est positif, c'est-à-dire où $-Duu$ est négatif, $yy + pxy + bxx$ a ses deux facteurs réels & inégaux, & l'équation appartient à l'hyperbole, car en ce cas $\frac{pp}{4} > b$, & A est négative. *Voyez* sur cela, si vous le jugez à propos, le septieme livre des sections coniques de M. de l'Hopital[50], qui traite des lieux géométriques ; vous y verrez comment l'équation générale des sections coniques se transforme en équation à la parabole, à l'ellipse ou à l'hyperbole, suivant que $yy + pxy + bxx$ est un quarré, ou une quantité composée de facteurs imaginaires, ou de facteurs réels inégaux. Passons maintenant aux lignes du troisieme ordre ou *courbes* du second genre.

Réduction des courbes du second genre. M. Newton[51] réduit toutes les *courbes* du second genre à quatre especes principales représentées par quatre équations. Dans la premiere, le rapport des ordonnées y aux abscisses x, est représenté par l'équation $xyy + ey = ax^3 + bxx + cx + d$; dans la seconde, l'équation a cette forme $xy = ax^3 + bxx + cx + d$; dans la troisieme, l'équation est $yy = ax^3 + bx^2 + cx + d$: enfin la quatrieme a pour équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Pour arriver à ces quatre équations[52], il faut d'abord prendre l'équation générale la plus composée des lignes du troisieme ordre, & l'écrire ainsi :

$$\left.\begin{array}{r} z^3 + bz^2u + czu^2 + cu^3 \\ +fzz + gzu + huu \\ +iz + lu \\ +m \end{array}\right\} = 0$$

On remarquera que le plus haut rang $z^3 + bzu^2 + cuz^2 + cu^3$ étant du troisieme degré, il aura au moins un facteur réel ; les deux autres étant, ou égaux entr'eux & inégaux au premier facteur, ou reels & inégaux, tant entr'eux qu'avec le premier facteur, ou imaginaires, ou enfin égaux au premier. Soit $z + Au$ ce facteur réel, & faisons d'abord abstraction du cas où les trois facteurs sont égaux ; soit supposé $z + Au = t$, on aura une transformée qui contiendra t^3, t^2, t, t u u, u t t, t u, u u & u, avec un terme constant ; or on fera d'abord disparoître le terme uu, en supposant $t + F = s$; ensuite en faisant $u = Ns + p + Q$ (les grandes lettres désignent ici des coefficiens), on fera disparoître les termes utt & ut, & il ne restera plus que

Typesetting math: 100%

des termes qui représenteront la premiere équation $xyy + ey = ax^3 + bxx + cx + d = 0$.

En second lieu, si les trois facteurs du plus haut rang sont égaux, on n'aura dans l'équation transformée, en faisant $z + Au = t$, que les termes t^3, t^2, t, u, t u, u u, & un terme constant. Or on peut faire disparoitre les termes tu & u, en supposant $u + Rt + K = s$, & l'on aura une équation de la forme $yy = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Troisieme forme de M. Newton. Nous remarquerons même que cette équation pourroit encore se simplifier ; car en supposant $x = R + q$, on feroit évanoüir les termes bxx ou d, & quelquefois le terme cx.

3°. Si les trois facteurs du premier rang sont égaux, & que de plus un de ces facteurs soit aussi facteur du second rang $fzz + gzu + huu$, alors la transformée aura des termes de cette forme t^3, t, t u, t t, u, & un terme constant. Or faisant $t + R = q$, on fera disparoître le terme u, & on aura une équation de cette forme $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Seconde forme de M. Newton. Cependant on pourroit encore simplifier cette équation, & faire disparoître les deux termes $bx^2 + cx$, en supposant $x = Qp$, & $y = Np + Rz + M$.

4°. Enfin si les trois facteurs du premier rang étant égaux, ceux du second sont les mêmes, l'équation alors n'aura que des termes de cette forme t^3, t t, u & t, avec un terme constant, & elle sera de la quatrieme forme de M. Newton, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, de laquelle on peut encore faire disparoître les termes $bx^2 + cx + d$, en supposant $x = p + R$, & $y + Nx + Q = z$. En ce cas l'équation sera de la forme $y = Ax^3$, & représentera la premiere parabole cubique. *Voy. les usages de l'analyse de Descartes*, par M. l'abbé de Gua, *page 437 & suiv.*[53]

On voit par ce détail sur quoi est fondée la division générale des lignes du troisieme ordre qu'a donné M. Newton[54] ; on voit de plus que les équations qu'il a données auroient pû encore recevoir toutes une forme plus simple, à l'exception de la premiere.

Enumération des courbes du second genre[55]. L'auteur subdivise ensuite ces quatre especes principales en / un grand nombre d'autres particulieres, à qui il donne différens noms.

Le premier cas qui est celui de $xyy + ex = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, est celui qui donne le plus grand nombre de subdivisions ; les trois subdivisions principales sont que les deux autres racines du plus haut rang soient ou réelles & inégales, ou imaginaires, ou réelles & égales ; & chacune de ces subdivisions en produit encore d'autres. *Voyez l'ouvrage* de M. l'abbé de Gua, *page 440. & suiv.*[56]

Lorsqu'une hyperbole est toute entiere au-dedans de ses asymptotes comme l'hyperbole conique, M. Newton[57] l'appelle *hyperbole inscrite :* lorsqu'elle coupe chacune de ses asymptotes, pour venir se placer extérieurement par rapport à chacune des parties coupées, il la nomme *hyperbole circonscrite ;* enfin lorsqu'une de ses branches est inscrite à son asymptote, & l'autre circonscrite à la sienne, il l'appelle *hyperbole ambigene :* celle dont les branches tendent du même côté, il la nomme *hyperbole convergente :* celle dont les branches ont des directions contraires, *hyperbole divergente :* celle dont les branches tournent leur convexité de différens côtés, *hyperbole à branches contraires :* celle qui a un sommet concave vers l'asymptote, & des branches divergentes, *hyperbole conchoïdale :* celle qui coupe son asymptote avec des points d'inflexion, & qui s'étend vers deux côtés opposés, *hyperbole anguinée* ou *serpentante :* celle qui coupe la branche conjuguée, *cruciforme :* celle qui retourne sur

Typesetting math: 100%

elle-même & se coupe, *hyperbole à nœud :* celle dont les deux parties concourent en un angle de contact & s'y terminent, *hyperbole à pointe* ou *à rebroussement :* celle dont la conjuguée est une ovale infiniment petite, c'est-à-dire un point, *hyperbole pointée* ou *à point conjugué :* celle qui par l'impossibilité de deux racines n'a ni ovale, ni point conjugué, ni point de rebroussement, *hyperbole pure ;* l'auteur se sert dans le même sens des dénominations de *parabole convergente, divergente, cruciforme,* &c. Lorsque le nombre des branches hyperboliques surpasse celui des branches de l'hyperbole conique, il appelle l'hyperbole *redundante.*

M. Newton[58] compte jusqu'à soixante-douze especes inférieures de *courbe* du second genre : de ces *courbes* il y en a neuf qui sont des hyperboles redundantes sans diametre, dont les trois asymptotes forment un triangle. De ces hyperboles, la premiere en renferme trois, une inscrite, une circonscrite, & une ambigene, avec une ovale ; la seconde est à nœud, la troisieme à pointe, la quatrieme pointée, la cinquieme & la sixieme pures, la septieme & la huitieme cruciformes, la neuvieme anguinée.

Il y a de plus douze hyperboles redundantes qui n'ont qu'un diametre : la premiere a une ovale, la seconde est à nœud, la troisieme à pointe, la quatrieme pointée ; la cinquieme, sixieme, septieme & huitieme, pures ; la neuvieme & la dixieme cruciformes, la onzieme & la douzieme conchoïdales. Il y a deux hyperboles redundantes qui ont trois diametres.

Il y a encore neuf hyperboles redundantes, dont les trois asymptotes convergent en un point commun : la premiere est formée de la cinquieme & de la sixieme hyperbole redundantes, dont les asymptotes renferment un triangle ; la seconde de la septieme & de la huitieme, la troisieme & la quatrieme de la neuvieme ; la cinquieme est formée de la huitieme[59] & de la septieme des hyperboles redundantes, qui n'ont qu'un diametre ; la sixieme de la sixieme & de la septieme, la septieme de la huitieme & de la neuvieme, la huitieme de la dixieme & de la onzieme, la neuvieme de la douzieme & de la treizieme. Tous ces changemens se font en réduisant en un point le triangle compris par les asymptotes.

Il y a encore six hyperboles défectives sans diametre : la premiere a une ovale, la seconde est à nœud, la troisieme à pointe, la quatrieme pointée, la cinquieme pure, *&c.*

Il y a sept hyperboles défectives qui ont des diametres : la premiere & la seconde sont conchoïdales avec une ovale, la troisieme est à nœud, la quatrieme à pointe : c'est la cissoïde des anciens ; la cinquieme & la sixieme sont pointées, la septieme pure.

Il y a sept hyperboles paraboliques qui ont des diametres : la premiere ovale, la seconde à nœud, la troisieme à pointe, la quatrieme pointée, la cinquieme pure, la sixieme cruciforme, la septieme anguinée.

Il y a quatre hyperboles paraboliques, quatre hyperbolismes de l'hyperbole, trois hyperbolismes de l'ellipse, deux hyperbolismes de la parabole.

Outre le trident, il y a encore cinq paraboles divergentes : la premiere a une ovale, la seconde est à nœud, la troisieme pointée ; la quatrieme est à pointe (cette derniere est la parabole de Neil, appellée communément *seconde parabole cubique*[60]) ; la cinquieme est pure. Enfin il y a une derniere *courbe* appellée communément *premiere parabole cubique*[61]. Remarquons ici[62] que M. Stirling[63] a déjà fait voir que M. Newton[64] dans son énumération avoit oublié quatre especes particulieres, ce qui fait monter le nombre des *courbes* du second genre jusqu'à soixante-seize, & que M. l'abbé de Gua[65] y en a encore ajoûté deux autres, observant de plus que la division des lignes du troisieme ordre en especes pourroit être beaucoup plus nombreuse, si on assignoit à ces différentes especes des caracteres

Typesetting math: 100%

distinctifs, autres que ceux que M. Newton leur donne.

On peut voir dans l'ouvrage de M. Newton[66], & dans l'endroit cité du livre de M. l'abbé de Gua[67], ainsi que dans M. Stirling[68], les subdivisions détaillées des *courbes* du troisieme ordre, qu'il seroit trop long & inutile de donner dans un Dictionnaire. Mais nous ne pouvons nous dispenser de remarquer que les principes sur lesquels ces divisions sont fondées, sont assez arbitraires ; & qu'en suivant un autre plan, on pourroit former d'autres divisions des lignes du troisieme ordre. On pourroit, par exemple, comme MM. Euler[69] & Cramer[70], distinguer d'abord quatre cas généraux : celui où le plus haut rang n'a qu'une racine réelle, celui où elles sont toutes trois réelles & inégales, celui où deux sont égales, celui où trois sont égales, & subdiviser ensuite ces cas. Cette division générale paroît d'autant plus juste & plus naturelle, qu'elle seroit parfaitement analogue à celle des lignes du second ordre ou sections coniques, dans laquelle on trouve l'ellipse pour le cas où le plus haut rang a ses deux racines imaginaires ; l'hyperbole, pour le cas où le plus haut rang a ses racines réelles & inégales, & la parabole pour le cas où elles sont égales. Au reste il faut encore remarquer que toutes les subdivisions de ces quatre cas, & même la division générale, auront toûjours de l'arbitraire. Cela se voit même dans la division des lignes du second ordre. Car on pourroit à la rigueur, par exemple, regarder la parabole comme une espece d'ellipse dont l'axe est infini (*voy.* PARABOLE), & ne faire que deux divisions pour les sections coniques ; & on pourroit même n'en faire qu'une, en regardant l'hyperbole comme une ellipse, telle que dans l'équation $yy = aa - xx$, le quarré de l'abscisse xx ait le signe +. Il semble qu'en Géometrie comme en Physique, la division en genres & en especes ait toûjours nécessairement quelque chose d'arbitraire ; c'est que dans l'une & dans l'autre il n'y a réellement que des individus, & que les genres n'existent que par abstraction de l'esprit.

M. Cramer[71] trouve quatorze genres de *courbes* dans / le troisieme ordre, & M. Euler[72] seize, ce qui prouve encore l'arbitraire des subdivisions.

On peut par une méthode semblable faire la division des *courbes* d'un genre supérieur. *Voyez* ce que M. Cramer a fait par rapport aux lignes du quatrieme ordre dans le *chap. jx.* de son ouvrage[73].

Pour rappeller à l'une des quatre formes de M. Newton une ligne quelconque du troisieme ordre, dont l'équation est donnée en z & en u, on transformera d'abord les axes de la maniere la plus générale, en supposant $a = Az + Bu + C$, & $y = Dz + Eu + F$; substituant ensuite ces valeurs, on déterminera les coefficiens A, B, &c. à être tels que l'équation en x & en y ait une des quatre formes susdites.

Points singuliers & multiples des courbes. On appelle *point multiple*[74] d'une *courbe* celui qui est commun à plusieurs branches qui se coupent en ce point, & par opposition *point simple* celui qui n'appartient qu'à une branche. Il est visible qu'au point multiple l'ordonnée y a plusieurs valeurs égales répondantes à un même x. C'est-là une propriété du point multiple ; mais il ne faut pas croire que le point soit multiple, toutes les fois que l'ordonnée a plusieurs valeurs égales. Car, si une ordonnée touche la *courbe*, par exemple, il est aisé de voir que l'ordonnée a dans ce point deux valeurs égales, sans que le point soit double. *Voyez* TANGENTE. La propriété du point multiple, c'est que l'ordonnée y a plusieurs valeurs égales, *quelque situation qu'on lui donne ;* au lieu que dans le point simple l'ordonnée qui peut avoir plusieurs valeurs égales dans une certaine situation, n'en a plus qu'une dès que cette situation change, ce qui est évident par la seule inspection d'un point multiple & d'un point simple. *Voyez* POINT.

De-là il s'ensuit que si on transporte l'origine en un point supposé multiple,

Typesetting math: 100%

en faisant $z + A = x$, $u + B = y$, il faut qu'en supposant z infiniment petit, on ait plusieurs valeurs nulles de u, quelque direction qu'on lui donne. Ainsi pour trouver les points multiples, il n'y a qu'après avoir transporté l'origine dans le point supposé, donner une direction quelconque à l'ordonnée, & voir si dans cette direction quelconque l'ordonnée aura plusieurs valeurs égales à zéro. *Voyez* M. l'abbé de Gua, *p. 88*[75]. & M. Cramer, *page 409*[76].

On prouvera par ces principes, que les sections coniques ne peuvent avoir de points multiples, ce qu'on savoit d'ailleurs. On prouvera aussi que les *courbes* du troisieme ordre ne peuvent avoir de points triples, *&c*. Mais cette proposition se peut encore prouver d'une maniere plus simple en cette sorte. Imaginons que l'ordonnée soit tangente d'une des branches, elle rencontrera cette branche en deux points. Or si le point est un point double, par exemple, l'ordonnée rencontreroit donc la *courbe* en trois points, ce qui ne peut être dans une section conique ; car jamais une droite ne peut la rencontrer qu'en deux points, puisque son équation ne passe jamais le second degré ; & qu'ainsi quelque position qu'on donne à l'ordonnée, elle ne peut avoir jamais plus de deux valeurs. On prouvera de même qu'une *courbe* de second genre, ou ligne du troisieme ordre, ne peut avoir de point triple, parce que la *courbe* ne peut jamais être coupée qu'en trois points par une ligne droite.

A l'égard des points doubles des *courbes*, nous avons déjà remarqué que les *courbes* du second genre peuvent être coupées en trois points par une ligne droite[77]. Or deux de ces points se confondent quelquefois, comme il arrive, par exemple, quand la ligne droite passe par une ovale infiniment petite ; ou par le point de concours de deux parties d'une *courbe* qui se rencontrent, & s'unissent en une pointe. Quelquefois les lignes droites ne coupent la *courbe* qu'en un point, comme il arrive aux ordonnées de la parabole de Descartes, & de la premiere parabole cubique ; en ce cas il faut concevoir que ces lignes droites passent par deux autres points de la *courbe* placés à une distance infinie ou imaginaire. Deux de ces intersections coïncidentes, faites à une distance infinie, ou même imaginaire, constituent une espece de *point double*.

On appelle *points singuliers* les points simples qui ont quelque propriété particuliere[78], comme les points conjugués, les points d'inflexion, les points de serpentement, *&c*. *Voyez* POINT, CONJUGUÉ, INFLEXION, SERPENTEMENT, *&c*. *Voyez aussi* REBROUSSEMENT, NŒUD, *&c*. Sur les tangentes des *courbes* en général, & sur les tangentes des points multiples, *voyez* TANGENTE.

Description organique des courbes[79]. 1°. Si deux angles de grandeur donnée, *P A D, P B D* (*Pl. de Géomet. fig. 53.*) tournent autour de deux poles *A* & *B*, donnés de position, & que le point de concours *P* des côtés *AP, BP*, décrive une ligne droite, le point de concours *D* des deux autres côtés décrira une section conique qui passera par les poles *A* & *B*, à moins que la ligne ne vienne à passer par l'un ou l'autre des poles *A* & *B*, ou que les angles *BAD* & *ABD* ne s'évanoüissent à la fois, auquel cas le point de concours décrira une ligne droite.

2°. Si le point de concours *P* des côtés *AP, BP,* décrit une section conique passant par l'un des poles *A,* le point de concours *D* des deux autres cotés *AD, BD*, décrira une *courbe* du second genre qui passera par l'autre pole *B,* & qui aura un point double dans le premier pole *A*, à moins que les angles *B A D, A B D*, ne s'évanoüissent à la fois, auquel cas le point *D* décrira une autre section conique qui passera par le pole *A*.

3°. Si la section conique décrite par le point *P* ne passe, ni par *A* ni par *B*, le point *D* décrira une *courbe* du second ou du troisieme genre, qui aura un point double ; & ce point double se trouvera dans le concours des côtés décrivans *AD, BD*, quand les deux angles *B A P, A B P*, s'évanoüissent à la fois. La *courbe* décrite sera du second genre, quand les angles *B A D, A B D*,

Typesetting math: 100%

s'évanoüiront à la fois, sinon elle sera du troisieme genre, & aura deux points doubles en A & en B.

Les démonstrations de ces propositions, qu'il seroit trop long de donner ici, se trouveront dans l'ouvrage de M. Maclaurin, qui a pour titre, *Geometria organica*[80], où il donne des méthodes pour tracer des *courbes* géométriques par un mouvement continu. *Voyez aussi le VIII. livre des sections coniques de* M. de l'Hopital[81].

Génération des courbes du second genre par les ombres[82]. Si les ombres des *courbes* de différens genres sont projettées sur un plan infini, éclairé par un point lumineux, les ombres des sections coniques seront des sections coniques ; celles des *courbes* du second genre seront des *courbes* du second genre ; celles des *courbes* du troisieme genre seront des *courbes* du troisieme genre, *&c*.

Et comme la projection du cercle engendre toutes les sections coniques, de même la projection des cinq paraboles divergentes engendre toutes les autres *courbes* du second genre ; & il peut y avoir de même dans chaque autre genre une suite de *courbes* simples, dont la projection sur un plan éclairé par un point lumineux, engendre toutes les autres *courbes* du même genre. MM. Nicole[83] & Clairaut[84], dans les *mémoires de l'acad. de 1731*, ont démontré la propriété des cinq paraboles divergentes dont nous ve-/nons de parler ; propriété que M. Newton[85] n'avoit fait qu'énoncer sans démonstration. *Voyez aussi* sur cette proposition l'*ouvrage cité* de M. l'abbé de Gua, *page 198. & suiv.*[86] Voyez *aussi* OMBRE.

Usage des courbes pour la construction des équations. L'usage principal des *courbes* dans la Géométrie, est de donner par leurs points d'intersection la solution des problèmes[87]. *Voyez* CONSTRUCTION.

Supposons, par exemple, qu'on ait à construire une équation de neuf dimensions, comme $x^9 + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + (m+f)x^3 + gx^2 + hx + k = 0$, dans laquelle b, c, d, &c. signifient des quantités quelconques données, affectées des signes + ou - ; on prendra l'équation à la parabole cubique $x^3 = y$, & mettant y pour x^3 dans la premiere équation, elle se changera en $y^3 + bxy^2 + cy^2 + dx^2y + exy + my + fx^3 + gx^2 + hx + k = 0$, équation à une autre *courbe* du second genre dans laquelle m ou f peuvent être supposés $= 0$. Si on décrit chacune de ces *courbes*, leurs points d'intersection donneront les racines de l'équation proposée. Il suffit de décrire une fois la parabole cubique. Si l'équation à construire se réduit à 7 dimensions par le manquement des termes hx & k, l'autre *courbe* aura, en effaçant m, un point double à l'origine des abscisses, & pourra être décrite par différentes méthodes. Si l'équation est réduite à six dimensions par le manquement des trois termes $gx^2 + hx + k$, l'autre *courbe*, en effaçant f, deviendra une section conique ; & si par le manquement des six derniers termes l'équation est réduite à trois dimensions, on retombera dans la construction que Wallis en a donnée par le moyen d'une parabole cubique & d'une ligne droite. *Voyez* CONSTRUCTION, & l'*ouvrage de* M. Cramer, *chap. jv*[88].

Typesetting math: 100%

Vue(s) Numérisée(s)

Volume IV, p. 377 (Bibliothèque Mazarine, cote 2° 3442)

Si c'est une figure que vous desiriez faire paroître pour porter ce feu, comme, par exemple, un dragon; la figure étant faite de carton ou d'osier très-léger, couvert de papier peint, on lui passe ces deux fusées au-travers du corps, de maniere que l'une sorte par la gueule, & l'autre par le derriere, en observant de les proportionner au poids de la figure. *Voyez les Feux d'artifice* de M. Frezier. (*V*)

COURAP, s. m. (*Medecine.*) espece de herpe ou gale, commune à Java & autres contrées des Indes orientales; elle paroît aux aisselles, à la poitrine, aux aines, & au visage, avec une démangeaison très-vive; les parties déchirées par les ongles rendent une humeur âcre qui les irrite. Elle est si contagieuse, qu'il y a peu de personnes qui n'en soient ou qui n'en ayent été attaquées. *Voyez*, sur la maniere de la guérir, Bontius, *de med. Ind.* & James.

COURBARIL, sub. m. (*Hist. nat. bot.*) genre de plante, dont la fleur est papilionacée. Il s'éleve du fond du calice un pistil qui devient dans la suite un fruit ou une silique dure, composée d'une seule capsule qui renferme des semences dures, arrondies, & environnées de farine & de fibres. Plumier, *nova plant. Amer. gener.* *Voyez* PLANTE. (*I*)

Le *courbaril* autrement *courbary*, est un grand arbre des pays chauds de l'Amérique, dont le bois est rouge, dur, pesant, ayant le fil mêlé, très-propre à faire d'excellens ouvrages de charpente : on l'employe à la construction des arbres & des rôles qui servent aux moulins à sucre; il sert aussi à faire de grandes roulettes d'une seule piece, tant pour les chariots que pour les affuts de canon.

Le *courbaril* porte un fruit de forme à-peu-près ovale, long de 5 à 6 pouces, large de 2 ou 3, épais de 15 à 18 lignes, & attaché à une forte queue.

L'écorce de ce fruit est ligneuse, dure, épaisse de deux lignes, & très-difficile à rompre; elle renferme trois ou quatre semences extrêmement dures, couleur de maron foncé, plus grosses que des fèves de marais, & de figure ovale; entourées d'une substance fibreuse, fort déliée, dont les interstices contiennent une poussiere grise qui remplit tout le vuide du fruit; elle ressemble, tant par la couleur que par le goût, à de la poudre de reglisse un peu vieille. On en fait peu d'usage.

Lorsque l'arbre est vieux, il sort de son tronc de gros morceaux d'une parfaitement belle résine, d'un jaune clair, solide, transparente, & de bonne odeur; elle brûle comme le camphre; elle n'est pas soluble dans les esprits ardens, non plus que dans les huiles essentielles ni dans les grasses. Cette résine ressemble tellement à la gomme copal, qu'il n'est pas aisé de les distinguer : on peut au moyen d'un procédé particulier les employer également dans les vernis transparens. *Article de M.* LE ROMAIN.

COURBATONS, s. m. pl. (*Marine.*) On appelle *courbatons*, des pieces de charpente fourchues ou à deux branches, presque courbées à angle droit. On les employe pour lier les membres, & pour servir d'arboutans. Il y en a au-dessus de chaque berrot, il y en a aussi vers l'arcasse, & ailleurs. Ce sont proprement des courbes petits & minces.

Courbaton de beaupré; c'est une piece de bois qui fait angle aigu avec la tête du mât, au bout duquel est un petit chouquet où l'on passe le perroquet de beaupré.

Le *courbaton* qu'on place sur le perroquet de beaupré, doit avoir en sa branche supérieure un pié de longueur par chaque dix piés de long que l'on donne au mât, & pour sa branche inférieure on la tient aussi longue qu'il est possible; il faut qu'il soit quarré sous le chouquet, & que dans ce même endroit il ait la même épaisseur que le perroquet.

Courbaton de bittes. *Voyez* BITTES.

Courbatons de l'éperon; ce sont ceux qui font la rondeur de l'éperon, depuis la fleche supérieure jusqu'au premier porte-vergue. *Voyez Pl. IV. de Marine, fig. 1.* la position des *courbatons de l'éperon*, qui sont cotés 189, le porte-vergue 188, & la fleche 187; c'est entre ces *courbatons* que dans les grands vaisseaux on fait des aisances pour l'équipage.

Les *courbatons* sont quarrés; & aux endroits où ils posent sur les porte vergues, ils ont autant d'épaisseur que le porte-vergue a de largeur.

Lorsque le plus haut & le plus bas porte-vergues sont posés, on pose les *courbatons de l'éperon*, qui panchent un peu en-avant en suivant la quite de l'étrave, & font une rondeur entre les porte-vergues, & puis après on pose le troisieme porte-vergue par-dessus.

Courbatons ou *Coquets de hune*; ce sont plusieurs pieces de bois, longues & menues, qui sont mises en maniere de rayons autour des hunes, & qui servent à lier ensemble le fond, les cercles, & les garites qui composent la hune. *Voyez Pl. VI. de Marine, fig. 19.*

Le nombre des *courbatons* de hune se regle sur le nombre de piés que le fond a dans son tour où sont les cercles, si bien que lorsqu'il y a douze piés de tour, il faut mettre vingt-quatre *courbatons*. En faisant les trous par où passent les cadenes de haubans, il faut bien prendre garde qu'il se trouve toûjours un trou tout droit devant le *courbaton* du milieu. *Voyez* HUNE. *Dictionn. de Marine.* (*Z*)

COURBATURE, s. f. (*Medecine.*) *Voyez* RHUMATISME.

COURBATURE, (*Maréchallerie.*) On appelle ainsi le battement ou l'agitation du flanc du cheval, & un mouvement tel que celui que la fievre cause aux hommes. La *courbature* peut arriver lorsque le cheval a été surmené, & la respiration n'est alors altérée que par l'excès du travail; à la différence du cheval poussif, dont le poumon est alteré avec de grands redoublemens de flanc. Il devient aussi *courbatu* sans être surmené, & c'est lorsqu'il est trop échauffé ou plein de mauvaises humeurs. La *courbature*, suivant Soleisel, est une chaleur étrangere, causée par les obstructions qui se forment dans les intestins & les poumons, ce qui donne les mêmes signes que pour la pousse, & même avec plus de violence. *Voyez* POUSSE.

Le remede le plus sûr & le plus facile à la *courbature* est le vert : si le cheval est jeune, il se remettra assûrément le prenant dans les premieres herbes, & si on le laisse pendant la nuit à l'herbe; car la rosée d'Avril & de Mai le purgera & lui débouchera les conduits. L'orge vert, donné comme nous venons de dire, est aussi parfaitement bon.

La *courbature* est un des trois cas redhibitoires qui annullent la vente d'un cheval. On en est garant pendant neuf jours, parce que ce défaut peut être caché durant ce tems-là. (*V*)

COURBE, adj. pris subst. (*Ordre encycl. Entend. Raison, Science, Science de la Nat. Science des quantités abstr. Science de l'étendue, Géométrie, Géométrie des lignes courbes.*) est, dit-on, une ligne dont les différens points sont dans différentes directions, ou sont différemment situés les uns par rapport aux autres. C'est du moins la définition que donne Chambers après une foule d'auteurs *Voyez* LIGNE.

Courbe, ajoûte-t-on, pris en ce sens, est opposé à *ligne droite*, dont les points sont tous situés de la même maniere les uns par rapport aux autres.

On trouvera peut-être chacune de ces deux définitions peu précise; & on n'aura pas tort. Cependant elles paroissent s'accorder assez avec l'idée que tout le monde a de la ligne droite & de la ligne *courbe* : d'ailleurs il est très-difficile de donner de

Typesetting math: 100%

Volume IV, p. 378 (Bibliothèque Mazarine, cote 2° 3442)

ces lignes une notion qui soit plus claire à l'esprit que la notion simple qu'excite en nous le seul mot de *droit* & de *courbe*. La définition la plus exacte qu'on puisse donner de l'une & de l'autre, est peut-être celle-ci : La ligne droite est le chemin le plus court d'un point à un autre, & la ligne *courbe* est une ligne menée d'un point à un autre, & qui n'est pas la plus courte. Mais la premiere de ces définitions renferme plûtôt une propriété secondaire que l'essence de la ligne droite; & la seconde, outre qu'elle ne renferme qu'une propriété négative, convient aussi-bien à un assemblage de lignes droites qui font angle, qu'à ce qu'on appelle proprement *courbe*, & qu'on peut regarder comme l'assemblage d'une infinité de petites lignes droites contigues entr'elles à angles infiniment obtus. *Voyez plus bas* COURBE POLYGONE; *voyez aussi* CONVEXE. Peut-être feroit-on mieux de ne point définir la ligne *courbe* ni la ligne droite, par la difficulté & peut-être l'impossibilité de réduire ces mots à une idée plus élémentaire que celle qu'ils présentent d'eux-mêmes. *Voyez* DÉFINITION.

Les figures terminées par des lignes *courbes* sont appellées *figures curvilignes*, pour les distinguer des figures qui sont terminées par des lignes droites, & qu'on appelle *figures rectilignes*. *Voyez* RECTILIGNE & FIGURE.

La théorie générale des *courbes*, des figures qu'elles terminent, & de leurs propriétés, constitue proprement ce qu'on appelle la *haute géométrie* ou la *géométrie transcendante*. *Voyez* GEOMETRIE.

On donne sur-tout le nom de *géométrie transcendante* à celle qui, dans l'examen des propriétés des *courbes*, employe le calcul différentiel & intégral. *Voyez ces mots; voyez aussi la suite de cet article.*

Il ne s'agit point ici, comme on peut bien le croire, des lignes *courbes* que l'on peut tracer au hasard & irrégulierement sur un papier. Ces lignes n'ayant d'autre loi que la main qui les forme, ne peuvent être l'objet de la Géométrie; elles peuvent l'être seulement de l'art d'écrire. Un géometre moderne a pourtant crû que l'on pouvoit toûjours déterminer la nature d'une *courbe* tracée sur le papier; mais il s'est trompé en cela. Nous en donnerons plus bas la preuve.

Nous ne parlerons d'abord ici que des *courbes* tracées sur un plan, & qu'on appelle *courbes à simple courbure*. On verra dans la suite la raison de cette dénomination. Pour déterminer la nature d'une *courbe*, on imagine une ligne droite tirée dans son plan à volonté. Par tous les points de cette ligne droite, on imagine des lignes tirées parallelement & terminées à la *courbe*. La relation qu'il y a entre chacune de ces lignes paralleles, & la ligne correspondante de l'extrémité de laquelle elle part, étant exprimée par une équation, cette équation s'appelle l'*équation de la courbe*. *Voyez* EQUATION.

Dans une *courbe*, la ligne AD (*Pl. de Géométr. fig. 51.*) qui divise en deux également les lignes paralleles MM, est ordinairement appellée *diametre*. Si le diametre coupe ces lignes à angles droits, il est appellé *axe*; & le point A par où l'axe passe est appellé le *sommet de la courbe*. *Voy.* DIAMETRE, AXE, & SOMMET.

Les lignes paralleles MM sont appellées *ordonnées* ou *appliquées*; & leurs moitiés PM, *demi-ordonnées* ou *ordonnées*. *Voyez* ORDONNÉE.

La portion du diametre AP, comprise entre le sommet ou un autre point fixe, & l'ordonnée est appellée *abscisse*. *Voyez* ABSCISSE. Le point de concours des diametres se nomme *centre*. *V.* CENTRE; *voyez aussi les remarques* que fait sur ce sujet M. l'abbé de Gua dans la premiere section de son ouvrage intitulé, *Usages de l'analyse de Descartes*. Il appelle plus proprement *centre d'une courbe* un point de son plan, tel que si on mene par ce point une ligne droite quelconque terminée à la *courbe* par ses deux extrémités, ce point divise la ligne droite en deux parties égales.

Au reste, on donne aujourd'hui en général le nom d'*axe* à toute ligne tracée dans le plan de la *courbe* & à laquelle se rapporte l'équation; on appelle *l'axe des x*, ou simplement *axe*, la ligne sur laquelle se prennent les abscisses; *axe des y*, la ligne parallele aux ordonnées, & passant par le point où x est $= 0$. Ce point est nommé l'*origine des coordonnées* ou l'*origine de la courbe*. *Voyez* COORDONNÉES.

Descartes est le premier qui ait pensé à exprimer les lignes *courbes* par des équations. Cette idée sur laquelle est fondée l'application de l'Algebre à la Géométrie (*voyez* APPLICATION & DECOUVERTE) est très-heureuse & très-féconde.

Il est visible que l'équation d'une *courbe* étant résolue, donne une ou plusieurs valeurs de l'ordonnée y pour une même abscisse x, & que par conséquent une *courbe* tracée n'est autre chose que la solution géométrique d'un problème indéterminé, c'est-à-dire qui a une infinité de solutions: c'est ce que les anciens appelloient *lieu géométrique*. Car quoiqu'ils n'eussent pas l'idée d'exprimer les *courbes* par des équations, ils avoient vû pourtant que les *courbes* géométriques n'étoient autre chose que le lieu, c'est-à-dire la suite d'une infinité de points qui satisfaisoient à la même question; par exemple, que le cercle étoit le lieu de tous les points qui désignent les sommets des angles droits qu'on peut former sur une même base donnée, laquelle base est le diametre du cercle; & ainsi des autres.

Les *courbes* se divisent en algébriques, qu'on appelle souvent avec Descartes *courbes géométriques*; & en transcendantes, que le même Descartes nomme *méchaniques*.

Les *courbes* algébriques ou géométriques sont celles où la relation des abscisses AP aux ordonnées PM (*fig. 52.*) est ou peut être exprimée par une équation algébrique. *Voyez* EQUATION & ALGEBRIQUE.

Supposons, par exemple, que dans un cercle on ait $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$; on aura $PB = a - x$: par conséquent, puisque $PM^2 = AP \times PB$, on aura $yy = ax - xx$; ou bien si on suppose $PC = x$, $AC = a$, $PM = y$, on aura $MC^2 - PC^2 = PM^2$, c'est-à-dire $a^2 - x^2 = y^2$.

Il est visible par cet exemple, qu'une même *courbe* peut être représentée par différentes équations. Ainsi sans changer les axes dans l'équation précédente, si on prend l'origine des x au sommet du cercle, au lieu de les prendre au centre, on trouve, comme on vient de le voir, $yy = ax - xx$ pour l'équation.

Plusieurs auteurs, après Descartes, n'admettent que les *courbes* géométriques dans la construction des problèmes, & par conséquent dans la Géométrie; mais M. Newton, & après lui, MM. Leibnitz & Wolf font d'un autre sentiment, & prétendent avec raison que dans la construction d'un problème, ce n'est point la simplicité de l'équation d'une *courbe* qui doit la faire préférer à un autre, mais la simplicité & la facilité de la construction de cette *courbe*. *Voyez* CONSTRUCTION, PROBLÈME, & GEOMETRIQUE.

Courbe transcendante ou méchanique est celle qui ne peut être déterminée par une équation algébrique. *Voyez* TRANSCENDANT.

Descartes exclud ces *courbes* de la Géométrie; mais Newton & Leibnitz sont d'un avis contraire pour la raison que nous venons de dire. En effet une spirale, par exemple, quoique *courbe* méchanique, est plus aisée à décrire qu'une parabole cubique.

L'équation d'une *courbe* méchanique ne peut être exprimée que par une équation différentielle entre les dy & les dx. *Voyez* DIFFERENTIEL. Entre ces deux genres de *courbes*, on peut placer, 1° les *courbes*

Typesetting math: 100%

Volume IV, p. 379 (Bibliothèque Mazarine, cote 2° 3442)

exponentielles dans l'équation desquelles une des inconnues, ou toutes les deux entrent en exposant, comme une *courbe* dont l'équation seroit $y = a^x$, ou $y^x = a^y$ &c. *Voyez* EXPONENTIEL. 2° les *courbes* interscendantes dans l'équation desquelles les exposans sont des radicaux, comme $x = y\sqrt{2}$. Ces deux especes de *courbes* ne sont proprement ni géométriques ni méchaniques, parce que leur équation est finie sans être algébrique.

Une *courbe* algébrique est infinie, lorsqu'elle s'étend à l'infini, comme la parabole & l'hyperbole; finie, quand elle fait des retours sur elle-même comme l'ellipse; & mixte, quand une de ses parties est infinie, & que d'autres retournent sur elles-mêmes.

Pour se former l'idée d'une *courbe* par le moyen de son équation, il faut imaginer que l'équation de la *courbe* soit résolue, c'est-à-dire qu'on ait la valeur de y en x. Cela posé, on prend toutes les valeurs positives de x depuis o jusqu'à l'infini, & toutes les valeurs négatives depuis o jusqu'à $-$ l'infini. Les ordonnées correspondantes donneront tous les points de la *courbe*, les ordonnées positives étant prises toutes du même sens, & les négatives du côté opposé. Voilà ce qu'on trouve dans tous les Algébristes & géometres modernes. Mais aucun n'a donné la raison de cette regle. Nous la donnerons dans la suite de cet article, après avoir parlé auparavant de la transformation des axes d'une *courbe*.

Il est certain qu'après avoir rapporté l'équation d'une *courbe* à deux axes quelconques d'abscisses & d'ordonnées, on peut la rapporter à deux autres axes quelconques tirés, comme on voudra, dans le plan de la *courbe*. De ces deux axes, l'un peut être parallele ou coïncident à l'axe des x, & l'autre parallele ou coïncident à l'axe des y; ils peuvent aussi n'être point paralleles ni l'un ni l'autre aux deux premiers axes, mais faire avec eux des angles quelconques. Supposons, par exemple, que $A\,P\,(x)$ & $P\,M\,(y)$ soient (*Pl. d'Algeb. fig.* 17.) les abscisses & les ordonnées d'une *courbe*, & qu'on veuille rapporter la *courbe* aux nouvelles coordonnées quelconques $A\,p$ & $p\,M$; on tirera $A\,B$ & $B\,q$ paralleles à y & à x, & on nommera les coordonnées nouvelles $A\,p\,(z)$ & $p\,M\,(u)$. Cela posé, il est visible que l'angle $a\,p\,M$ est donné, comme on le suppose, ainsi que l'angle $p\,B\,q$, & l'angle $B\,q\,m$ ou son égal $A\,m\,M$, & que $a\,B$ & $A\,B$ sont aussi donnés de grandeur & de position. Donc si on nomme $a\,B$, a, & $A\,B$, b, on aura $B\,p = z - a$, $B\,q$ ou $A\,m = (z-a)\,m$, m exprimant le rapport connu de $B\,q$ à $B\,p$; $P\,m = y\,n$, n étant de même un coefficient donné, & par conséquent $A\,P$ ou $x = (z-a)\,m + y\,n$: de plus $M\,m = p\,M - p\,m = p\,M - A\,B - p\,q = u - b - z\,q + a\,q$, q étant de même un coefficient donné, & $M\,P$ ou $y = (u - b - z\,q + a\,q) \times k$: donc on aura $y = (u - b - z\,q + a\,q)\,k$ & $x = (z-a)\,m + n\,k\,(u - b - z\,q + a\,q)$; donc si on met à la place de x & de y leurs valeurs qu'on vient de trouver en z & en u, on aura une nouvelle équation par rapport aux coordonnées z & u. Voyez *à l'art.* TRANSFORMATION DES AXES *un plus grand détail*.

Il est visible qu'on peut placer non-seulement l'axe des z & l'axe des u, mais aussi l'axe des x & celui des y, par-tout où l'on voudra, sans que la *courbe* change pour cela de place, & que la position de la *courbe* est totalement indépendante de la position des axes; de sorte que les ordonnées u partant de l'axe des z, doivent aboutir aux mêmes points que les ordonnées y, partant de l'axe des x. Cela est évident par les opérations même que l'on fait pour la transformation des axes. D'ailleurs on doit considérer qu'une *courbe* n'est autre chose que le lieu d'une infinité de points qui servent à résoudre un problème indéterminé, c'est-à-dire un problème qui a une infinité de solutions. Or la situation de ces points est totalement indépendante de la position des axes auxquels on les rapporte, ces axes pouvant être placés par-tout où l'on voudra. De ces principes, on peut tirer les conséquentes suivantes sur la position des ordonnées.

1°. Les ordonnées positives doivent être prises d'un même côté; car soit (*fig.* 36. *n°.* 3. *analys.*) $A\,P$ l'axe des x, & qu'on trouve deux valeurs positives pour y; soit $P\,m$ la plus grande de ces valeurs, je dis que la plus petite $P\,M$ doit être prise du même côté. Car soit transposé l'axe $A\,P$ en $a\,p$, en sorte que $P\,p = a$, & soit $a\,p = x$, & $p\,m = z$; on aura l'équation rapportée aux axes x & z, en mettant $z - a$ pour y dans l'équation de la *courbe*; & on aura chaque valeur de z égale aux valeurs correspondantes de y, augmentées chacune de a; donc au point p, on aura deux valeurs positives de z, savoir $a + P\,M$ & $a + P\,m$. Or si on ne prenoit pas $P\,M$ du même côté que $P\,m$, mais de l'autre côté, l'ordonnée $p\,M$, au lieu d'être $a + P\,M$, seroit $a - P\,M$; la *courbe* changeroit donc ou d'équation ou de figure, en changeant d'axe; & tandis qu'une de ses parties resteroit à la même place, l'autre se promeneroit, pour ainsi dire, suivant que l'on changeroit l'axe de place. Or ni l'un ni l'autre ne se peut. Donc il faut que $P\,M$ & $P\,m$ soient pris du même côté, quand ils sont tous deux positifs.

2°. Si on a deux valeurs, l'une positive $P\,M$, l'autre négative $P\,m$ (*fig.* 36. *n°.* 2.), il faudra les prendre de différens côtés. Car soit, par exemple, $P\,M = \sqrt{x}$, & $P\,m = -\sqrt{x}$: transposant l'axe $A\,P$ en $a\,p$, en sorte que $p\,P = a$, & mettant $z - a$ pour y, dans l'équation de la *courbe*, on aura $z = a + \sqrt{x}$ & $z = a - \sqrt{x}$. Si on suppose $\sqrt{x} < a$, ce qui se peut toûjours, puisque a est arbitraire, on trouvera z ou $p\,M = a + P\,M$ & z ou $p\,m = a - P\,M$. Donc $P\,m$ doit être égale à $P\,M$, & prise dans un sens contraire. Tout cela est aisé à voir avec un peu d'attention.

Lorsque les ordonnées sont positives, elles appartiennent toutes également à la *courbe*, ce qui est évident, puisqu'il n'y a pas de raison pour préférer l'une à l'autre. Mais lorsqu'elles sont négatives, elles n'appartiennent pas moins à la *courbe*; car, pour s'en convaincre, il n'y a qu'à reculer l'axe de façon que toutes les ordonnées deviennent positives. Dans cette derniere position de l'axe, toutes les ordonnées appartiendront également à la *courbe*. Donc il en sera de même dans la premiere position que l'axe avoit.

Donc supposant x positive, toutes les valeurs de y tant positives que négatives, appartiennent à la *courbe*; mais au lieu de prendre la ligne des x pour l'axe, on peut prendre la ligne des y, & alors on aura des valeurs tant positives que négatives de x, lesquelles par la même raison appartiendront aussi à la *courbe*. Donc la *courbe* renferme toutes les valeurs des y répondantes à une même x, & toutes les valeurs de x répondantes à une même y; ou ce qui revient au même, elle renferme toutes les valeurs positives & négatives de y répondantes, soit aux x positives, soit aux x négatives. En effet, si dans la valeur de y qui répond aux x positives, on change les signes des termes où x se trouve avec une dimension impaire, on aura la valeur de y correspondante aux x négatives; & cette équation sera évidemment la même qu'on auroit, en résolvant l'équation en x & en y, après avoir changé d'abord dans cette équation les signes des termes où x se trouve avec une dimension impaire. Or je dis que cette derniere équation appartient également à la *courbe*; car ordonnons l'équation primitive par rapport à x, avant d'avoir changé aucun signe, & cherchons les va-

Typesetting math: 100%

leurs de x en y; nous venons de voir que les valeurs, tant positives que négatives de x, appartiennent à la *courbe*. Or les valeurs négatives sont les mêmes que l'on auroit avec un signe positif, en changeant dans l'équation primitive les signes des termes où x se trouve avec une dimension impaire; car on sait que dans une équation ordonnée en x, si on change les signes des termes où x se trouve avec une dimension impaire, toutes les racines changent de signe sans changer d'ailleurs de valeur. *Voyez* EQUATION. Donc l'équation en x, avec le changement des signes indiqué, appartient aussi-bien à la *courbe* que l'équation en x, sans changer aucun signe. Donc, &c. Il est donc important de changer les signes de x, s'il est nécessaire, pour avoir la partie de la *courbe* qui s'étend du côté des x négatives. En effet soit, par exemple, $yy = aa - xx$ l'équation du cercle, on aura, en prenant x positive, $y = \pm\sqrt{aa - xx}$; & en faisant x négative, on aura de même $y = \pm\sqrt{aa - xx}$: ce qui donne le cercle entier. Si on prenoit seulement x positive, on n'auroit que le demi-cercle; & si on ne prenoit y que positive, on n'auroit que le quart du cercle.

Voilà donc une démonstration générale de ce que tous les Géometres n'ont supposé jusqu'à présent que par induction. En effet ils ont vû, par exemple, que si $y = a - x$, c'est l'équation d'une ligne droite qui coupe son axe au point où $x = a$, & qui ensuite passe de l'autre côté. Or quand $x > a$, on a y négative; ainsi, ont-ils dit, l'ordonnée négative doit être prise du côté opposé à la positive. Ils ont vû encore que $y = \pm\sqrt{px}$ est l'équation de la parabole, & que cette *courbe* a en effet deux parties égales & semblables, l'une à droite & l'autre à gauche de son axe, ce qui prouve que $-\sqrt{px}$ doit être prise du côté opposé à $\sqrt{px}$. Plusieurs autres exemples pris du cercle, des sections coniques rapportées à tel axe qu'on jugera à propos, ont prouvé la regle de la position des ordonnées & la nécessité de prendre x négative, après l'avoir pris positive. On s'en est tenu là: mais ce n'étoit pas une démonstration rigoureuse.

Les différentes valeurs de y répondantes à x positive & à x négative, donnent les différentes branches de la *courbe*. *Voyez* BRANCHE.

Lorsqu'on a ordonné l'équation d'une *courbe* par rapport à y ou à x, s'il ne se trouve point dans l'équation de terme constant, la *courbe* passe par l'origine; car en faisant $x = o$, & $y = o$ dans l'équation, tout s'évanouit. Donc la supposition de $y = o$ quand $x = o$, est légitime. Donc la *courbe* passe par le point où $x = o$.

En général, si on ordonne l'équation d'une *courbe* par rapport à y, ensorte que le dernier terme ne contienne que x avec des constantes, & qu'on cherche les valeurs de x propres à rendre ce dernier terme égal à zéro, ces valeurs de x donneront les points où la *courbe* coupera son axe; car puisque ces valeurs de x substituées dans le dernier terme le rendront $= o$, on prouvera par le même raisonnement que ci-dessus, que dans les points qui répondent à ces valeurs de x, on a $y = o$.

Lorsque la valeur de l'ordonnée y est imaginaire, la *courbe* manque dans ces endroits-là; par exemple, lorsque $x > a$ dans l'équation $y = \pm\sqrt{aa - xx}$, la valeur d'y est imaginaire: aussi le cercle n'existe point dans les endroits où $x > a$; de même si dans l'équation $y = \pm\sqrt{px}$, on fait x négative, on trouvera y imaginaire, ce qui prouve que la parabole ne passe point du côté des x négatives.

On verra aux articles EQUATION & IMAGINAIRE que toute quantité imaginaire ou racine imaginaire d'une équation peut se réduire à $A + B\sqrt{-1}$, A & B étant des quantités réelles, & que toute équation qui a pour racine $A + B\sqrt{-1}$, a pour racine aussi $A - B\sqrt{-1}$. Or quand une ordonnée passe du réel à l'imaginaire, cela vient de ce qu'une quantité comme C, qui étoit sous un signe radical $\sqrt{C}$, devient négative, en sorte que $C = B\sqrt{-1}$, B étant une quantité réelle. Or pour que C devienne négative, de positive qu'elle étoit, il faut qu'elle passe par le zero, ou par l'infini. *Voyez MAXIMUM*. Donc au point où l'ordonnée passe à l'imaginaire, on a B nul ou infini; donc les racines $A + B\sqrt{-1}$ & $A - B\sqrt{-1}$ deviennent égales en ce point-là. Donc la limite qui sépare les ordonnées réelles des ordonnées imaginaires, renferme deux ou plusieurs ordonnées égales, lesquelles seront $= o$, ou finies ou infinies; égales à zero, si $A = o$, & si B est zero; finies, si A est finie, & B zero; infinies si A est infinie & B zero, ou si A est finie & B infinie, ou si A & B sont infinies l'une & l'autre.

Par exemple, si $x = a$, & que l'équation soit $y = a - x \pm \sqrt{a - x}$, on a $y = o$; si l'équation est $y = a \pm \sqrt{a - x}$, y sera $= a$; si l'équation est $y = a \pm \frac{1}{\sqrt{a-x}}$, ou $y = \frac{1}{a-x} \pm \sqrt{a - x}$, y sera infinie; & si dans tous ces cas on prend $x > a$, la valeur de y sera imaginaire.

Quand on a l'équation d'une *courbe*, il faut examiner d'abord si cette équation ne peut pas se diviser en plusieurs équations rationnelles; car si cela est, l'équation se rapporte, non à une seule & même *courbe*, mais à des *courbes* différentes. On en peut voir un exemple *à l'article* HYPERBOLES CONJUGUÉES *au mot* CONJUGUÉ. Nous ajoûterons ici, 1°. qu'il faut, pour ne point se tromper là-dessus, mettre d'abord tous les termes de l'équation d'un côté, & zero de l'autre, & voir ensuite si l'équation est réductible en d'autres équations rationnelles; car soit, par exemple, $yy = aa - xx$, on seroit tenté de croire d'abord que l'équation peut se changer en ces deux-ci $y = a - x$ & $y = a + x$, dont le produit donne $yy = aa - xx$; ainsi on pourroit croire que l'équation $yy = aa - xx$ qui appartient réellement au cercle, appartiendroit au systême de deux lignes droites, $y = a + x$ & $y = a - x$. Or on se tromperoit en cela; mais pour connoître son erreur, il n'y a qu'à faire $yy - aa + xx = o$, & l'on verra alors facilement que cette équation n'est pas le produit des deux équations $y - a + x = o$ & $y - a - x = o$; en effet, on sent assez que $yy = aa - xx$ ne donne ni $y = a - x$, ni $y = a + x$; mais si on avoit l'équation $yy - 2ay + aa - xx = o$, on trouveroit que cette équation viendroit des deux $y - a - x = o$ & $y - a + x = o$, & qu'ainsi elle représenteroit non une *courbe*, mais un systême de deux lignes droites.

2°. Les équations dans lesquelles l'équation apparente d'une *courbe* se divise, n'en seroient pas moins rationnelles quand elles renfermeroient des radicaux, pourvû que la variable x ne se trouvât pas sous ces radicaux; par exemple, une équation qui seroit formée de ces deux-ci, $y - \sqrt{aa + bb} - x = o$ & $y - \sqrt{aa + bb} + x = o$, représenteroit toûjours le systême de deux lignes droites. Il faut seulement remarquer que l'équation $yy - 2y\sqrt{aa + bb} + aa + bb - xx = o$ qui résulte de ces deux-là, se change, en faisant évanouir tout-à-fait le signe radical, en celle-ci $(yy + aa + bb - xx)^2 - 4yy(aa + bb) = o$, qui est du quatrieme degré, & qui renferme le systême de 4 lignes droites $y - \sqrt{aa - bb} - x = o$,

Typesetting math: 100%

$y-\sqrt{aa-bb}+x=0$, $y+\sqrt{aa+bb}-x=0$, $y+\sqrt{aa+bb}+x=0$.

1°. Les équations sont encore rationnelles quand même x se trouveroit sous le signe radical, pourvû qu'on puisse l'en dégager : par exemple, $y-\sqrt{aaxx+bbxx}=0$ & $y-\sqrt{ddx^2+x^2}=0$ se changeront en $y=\pm x\sqrt{aa+bb}$, & $y=\pm x\sqrt{dd+ee}$, qui est le systême des quatre lignes droites, où l'on voit que les deux équations radicales en ont fourni chacune deux autres, parce que la racine de xx est également $+x$ & $-x$. Je m'étends sur ces différens objets, parce qu'ils ne sont point traités ailleurs, ou qu'ils le sont trop succinctement, ou qu'ils le sont mal.

Ceci nous conduit à parler d'une autre maniere d'envisager l'équation des *courbes*, c'est de déterminer une *courbe* par l'équation, non entre x & y, mais entre les y qui répondent à une même abscisse.

Exemple. On demande une *courbe*, dans laquelle la somme de deux ordonnées correspondantes à une même x soit toûjours égale à une quantité constante $2a$; je dis que l'équation de cette *courbe* sera $y=a+\sqrt{X}$, X désignant une quantité *radicale* quelconque, composée de x & de constantes. En effet, les deux ordonnées $y=a+\sqrt{X}$ & $y=a-\sqrt{X}$ ajoûtées ensemble, donnent une somme $=2a$; mais il faut bien remarquer que $\sqrt{X}$ doit être une quantité irrationnelle ; car, par exemple, $y=a+\frac{x^2}{b^2}$ & $y=a-\frac{x^2}{b^2}$ ne satisferoient pas au problême, parce que ces deux équations ne désigneroient pas le systême d'une seule & même *courbe*. De même si on demande une *courbe*, dans laquelle le produit des deux ordonnées correspondantes à x soit une quantité Q, qui contienne x avec des constantes, ou qui soit une constante, on fera $y=P\pm\sqrt{PP-Q}$, P étant une quantité quelconque qui contienne x avec des constantes, ou qui soit constante ; car le produit des deux valeurs $P+\sqrt{PP-Q}$ & $P-\sqrt{PP-Q}$ donnera Q. Voyez sur tout cela les journaux de Leipsic de 1697, les mémoires de l'acad. des Sciences de 1734, & l'*introductio ad analysim infinitorum*, par M. Euler, *c. xjv.*

Cours d'une courbe. Pour déterminer le cours d'une *courbe*, on doit d'abord résoudre l'équation de cette *courbe*, & trouver la valeur de y en x ; ensuite on prend différentes valeurs de x, & on cherche les valeurs de y correspondantes ; on voit par-là les endroits où la *courbe* coupe son axe, savoir les points où la valeur de $y=0$; les endroits où la *courbe* a une asymptote, c'est-à-dire, les points où y est infinie, x restant finie, ou bien où y est infinie, & a un rapport fini avec x supposée aussi infinie ; les points où y est imaginaire, & où par conséquent la *courbe* ne passe pas, *&c.* Ensuite on fait les mêmes opérations, en prenant x négative. Par exemple, soit $\left(y-\frac{aa}{a+x}\right)^2=xx+aa$ l'équation d'une *courbe*, on aura donc $y=\frac{aa}{a+x}\pm\sqrt{xx+aa}$. Ce qui fait voir, 1°. que chaque valeur de x donne deux valeurs de y, à cause du double signe $\pm$; 2°. que si $x=0$, on a $y=a+a$, c'est-à-dire $y=0$ & $y=2a$; 3°. que si $x=a$, $y=$ à l'infini, & que par conséquent la *courbe* a une asymptote au point où $x=a$, 4°. que si $x=$ à l'infini, on a $y=\pm x$; ce qui prouve que la *courbe* a des asymptotes qui font avec son axe un angle de 45 degrés ; en faisant x négative, on trouve $y=\frac{aa}{a-x}\pm\sqrt{xx+aa}$, équation sur laquelle on fera des raisonnemens semblables. Il en est de même des autres cas. Si l'équation avoit $\sqrt{xx-aa}$, on trouveroit qu'au point où $x=0$, l'ordonnée devient imaginaire, *&c.*

On peut tracer à peu-près une *courbe* par plusieurs points, en prenant plusieurs valeurs de x assez près l'une de l'autre, & cherchant les valeurs de y. Ces méthodes de décrire une *courbe* par plusieurs points sont plus commodes & en un sens plus exactes que celles de les décrire par un mouvement continu. *Voyez* COMPAS ELLIPTIQUE.

Les anciens n'ont guere connu d'autres *courbes* que le cercle, les sections coniques, la conchoïde, & la cissoïde. *Voyez ces mots.* La raison en est toute simple, c'est qu'on ne peut guere traiter des *courbes* sans le secours de l'Algebre, & que l'Algebre paroit avoir été peu connue des anciens. Depuis ce tems on y a ajoûté les paraboles & hyperboles cubiques, & le trident ou parabole de Descartes ; voilà où on en est resté, jusqu'au Traité des lignes du troisieme ordre de M. Newton, dont nous parlerons plus bas. *Voyez* PARABOLE, HYPERBOLE, TRIDENT, *&c.*

Nous avons dit ci-dessus que les *courbes* méchaniques sont celles dont l'équation entre les coordonnées n'est & *ne peut-être* algébrique, c'est-à-dire finie. Nous disons *ne peut-être* ; car si l'équation différentielle d'une *courbe* avoit une intégrale finie, cette *courbe* qui paroîtroit d'abord méchanique, seroit réellement géométrique. Par exemple, si $dy=\frac{adx}{2\sqrt{ax}}$, la *courbe* est géométrique, parce que l'intégrale est $y=\sqrt{2ax}+A$; ce qui représente une parabole. Mais l'équation $dy=\frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$ est l'équation d'une *courbe* méchanique, parce que l'on ne sçauroit trouver l'intégrale de cette équation différentielle. *Voyez* DIFFERENTIEL, INTEGRAL & QUADRATURE.

Les anciens ont fait très-peu d'usage des *courbes* méchaniques ; nous ne leur en connoissons guere que deux, la spirale d'Archimede & la quadratrice de Dinostrate. *Voyez ces mots.* Ils se servoient de ces *courbes* pour parvenir d'une maniere plus aisée à la quadrature du cercle. Les modernes ont multiplié à l'infini le nombre des *courbes* méchaniques ; le calcul différentiel a facilité extrêmement cette multiplication, & les avantages qu'on pouvoit en tirer. *V.* MECHANIQUE. Revenons aux *courbes* algébriques ou géométriques, qui sont celles dont il sera principalement mention dans cet article, parce que le caractere de leurs équations qui consiste à être exprimées en termes finis, nous met à portée d'établir sur ces *courbes* des propositions générales, qui n'ont pas lieu dans les *courbes* méchaniques. C'est principalement la Géométrie des *courbes* méchaniques, qu'on appelle *Géométrie transcendante*, parce qu'elle employe nécessairement le calcul infinitésimal ; au lieu que la Géométrie des *courbes* algébriques n'employe point, du moins nécessairement, ce calcul pour la découverte des propriétés de ces *courbes*, si on en excepte leurs rectifications & leurs quadratures ; car on peut déterminer, par exemple, leurs tangentes, leurs asymptotes, leurs branches, *&c.* & toutes les autres propriétés de cette espece par le secours du seul calcul algébrique ordinaire. *Voyez* les ouvrages de MM. Euler & de Gua, déja cités, & l'ouvrage de M. Cramer, qui a pour titre *introduction à l'analyse des lignes courbes*, *Genev.* 1750. in-4°.

Nous avons vû ci-dessus comment on transforme les axes x & y d'une *courbe* par les équations $x=At+Bu+C$, $y=Dt+Eu+F$; c'est-là la transformation la plus générale, & si on veut faire des transformations plus simples, on n'a qu'à supposer un des coefficiens A, B, C, D, &c. ou plusieurs égaux à zero, pourvû qu'on ne suppose pas, par exemple, A & B ensemble égaux à zero, ni D & E

Typesetting math: 100%

ensemble égaux à zero, car on auroit $x = C$, & $y = F$; ce qui ne se peut, puisque x & y qui sont des indéterminées, ne peuvent être égales à des constantes. On ne doit point non plus supposer en même tems B & $E = 0$, ni A & $D = 0$; car substituant les valeurs de x & de y, on n'auroit plus dans l'équation de la *courbe* qu'une seule indéterminée u. Or il faut qu'il y en ait toûjours deux.

Il est visible que si on substitue à la place de x & de y les valeurs ci-dessus dans l'équation de la *courbe*, l'équation n'augmentera pas de dimension; car on détermine la dimension & le degré de l'équation d'une *courbe* par la plus haute dimension à laquelle se trouve l'une ou l'autre des inconnues x, y, ou le produit des inconnues; par exemple, l'équation d'une *courbe* est du troisieme degré, lorsqu'elle contient le cube y^3, ou le cube x^3, ou le produit xyy ou xxy, ou toutes ces quantités à la fois, ou quelques-unes seulement. Or comme dans les équations $x = Az + Bu + C$, $y = Dz + Eu + F$, z & u ne montent qu'au premier degré, il est évident que si on substitue ces valeurs dans l'équation en x & en y, la dimension de l'équation & son degré n'augmentera pas. Il est évident, par la même raison, qu'elle ne diminuera pas; car si elle diminuoit, c'est-à-dire, si l'équation en z & en u étoient de moindre dimension que l'équation en x & en y, alors substituant pour z & pour u leurs valeurs en x & en y, lesquelles sont d'une seule dimension, comme il est aisé de le voir, on retrouveroit l'équation en x & en y, & par conséquent on parviendroit à une équation d'une dimension plus élevée que l'équation en z & en u; ce qui est contre la premiere proposition.

Donc en général, quelque transformation d'axe que l'on fasse, l'équation de la *courbe* ne change point de dimension. On peut voir dans l'ouvrage de M. l'abbé de Gua, & dans l'introduction à l'analyse des lignes *courbes* par M. Cramer, les manieres abrégées de faire le calcul pour la transformation des axes. Mais ce n'est pas de quoi il s'agit ici, cette abréviation de calcul étant indifférente en elle-même aux propriétés de la *courbe*. *Voyez aussi* TRANSFORMATION *des axes*.

Courbes algébriques du même genre ou du même ordre, ou du même degré, sont celles dont l'équation monte à la même dimension. *V.* ORDRE & DEGRÉ.

Les *courbes* géométriques étant une fois déterminées par la relation des ordonnées aux abscisses, on les distingue en différens genres ou ordres; ainsi les lignes droites sont les lignes du premier ordre; les lignes du second ordre sont les sections coniques.

Il faut observer qu'une *courbe* du premier genre est la même qu'une ligne du second ordre, parce que les lignes droites ne sont point comptées parmi les *courbes*, & qu'une ligne du troisieme ordre est la même chose qu'une *courbe* du second genre. Les *courbes* du premier genre sont donc celles dont l'équation monte à deux dimensions; dans celles du second genre, l'équation monte à trois dimensions; à quatre, dans celles du troisieme genre, *&c.*

Par exemple, l'équation d'un cercle est $y^2 = 2ax - xx$ ou $y^2 = a^2 - x^2$; le cercle est donc une *courbe* du premier genre & une ligne du second ordre.

De même la *courbe*, dont l'équation est $ax = y^2$, est une *courbe* du premier genre; & celle qui a pour équation $a^2x = y^3$, est *courbe* du second genre & ligne du troisieme ordre.

Sur les différentes *courbes* du premier genre & leurs propriétés, *voyez* SECTIONS CONIQUES *au mot* CONIQUE.

On a vû à cet article CONIQUE, quelle est l'équation la plus générale des lignes du second ordre, & on trouve que cette équation a $3 + 2 + 1$ termes; on trouvera de même que l'équation la plus générale des lignes du troisieme ordre est $y^3 + axy^2 + bxxy + cx^3 + ey^2 + fxy + gxx + hx + iy + l = 0$, & qu'elle a $4 + 3 + 2 + 1$ termes, c'est-à-dire 10; en général, l'équation la plus composée de l'ordre n, aura un nombre de termes $= (n + 2) \times (\frac{n+1}{2})$, c'est-à-dire, à la somme d'une progression arithmétique, dont $n + 1$ est le premier terme & 1 le dernier. *Voyez* PROGRESSION ARITHMETIQUE.

Il est clair qu'une droite ne peut jamais rencontrer une ligne du n° ordre qu'en n points tout au plus; car quelque transformation qu'on donne aux axes, l'ordonnée n'aura jamais que n valeurs réelles tout au plus, puisque l'équation ne peut être que du degré n. On peut voir dans l'ouvrage de M. Cramer, déja cité, plusieurs autres propositions, auxquelles nous renvoyons, sur le nombre des points, où les lignes de différens ordres ou du même ordre peuvent se couper. Nous dirons seulement que l'équation d'une *courbe* du degré n étant ordonnée, par exemple, par rapport à y, en sorte que y^n n'ait pour coefficient que l'unité, cette équation aura autant de coefficiens qu'il y a de termes, moins un, c'est-à-dire, $\frac{nn+3n}{2}$. Donc si on donne un pareil nombre de points, la *courbe* du n° ordre qui doit passer par ces points sera facilement déterminable; car en prenant un axe quelconque à volonté, & menant des points donnés des ordonnées à cet axe, on aura $\frac{nn+3n}{2}$ ordonnées connues, ainsi que les abscisses correspondantes, & par conséquent on pourra former autant d'équations, dont les inconnues seront les coefficiens de l'équation générale. Ces équations ne donneront jamais que des valeurs linéaires pour les coefficiens, qu'on pourra par conséquent trouver toûjours facilement.

Au reste il peut arriver que quelques-uns des coefficiens soient indéterminés, auquel cas on pourra faire passer plusieurs lignes du même ordre par les points donnés; ou que les points donnés soient tels que la *courbe* n'y puisse passer, pour lors l'équation sera réductible en plusieurs autres rationnelles. Par exemple, qu'on propose de faire passer une section conique par cinq points donnés (car n étant $= 2$, $\frac{nn+3n}{2}$ est $= 5$): il est visible que si trois de ces points sont en ligne droite, la section n'y pourra passer; car une section conique ne peut jamais être coupée qu'en deux points par une ligne droite, puisque son équation n'est jamais que de deux dimensions. Qu'arrivera-t-il donc? l'équation sera réductible en deux du premier degré, qui représenteront non une section conique, mais le systême de deux lignes droites, & ainsi des autres.

On peut remarquer aussi que si quelques coefficiens se trouvent infinis, l'équation se simplifie; car les autres coefficiens sont nuls par rapport à ceux-là, & on doit par conséquent effacer les termes où se trouvent ces coefficiens nuls.

M. Newton a fait sur les *courbes* du second genre un traité intitulé, *enumeratio linearum tertii ordinis*. Les démonstrations des différentes propositions de ce traité se trouvent pour la plûpart dans les ouvrages de MM. Stirling & Maclaurin sur les *courbes*, & dans les autres ouvrages dont nous avons déja parlé. Nous allons rapporter sommairement quelques-uns des principaux articles de l'ouvrage de M. Newton. Cet auteur remarque que les *courbes* du second genre & des genres plus élevés, ont des propriétés analogues à celles des *courbes* du premier genre: par exemple, les sections coniques ont des diametres & des axes; les lignes que ces diametres coupent en deux parties

Typesetting math: 100%

égales sont appellées *ordonnées*; & le point de la *courbe* où passe le diametre est nommé *sommet*; de même si dans une *courbe* du second genre on tire deux lignes droites paralleles qui rencontrent la *courbe* en trois points, une ligne droite qui coupera ces paralleles, de maniere que la somme des deux parties comprises entre la sécante & la *courbe* d'un même côté, soit égale à l'autre partie comprise entre la sécante & la *courbe*, coupera, suivant la même loi, toutes les autres lignes qu'on pourra mener parallelement aux deux premieres, & qui seront terminées à la *courbe*, c'est-à-dire les coupera de maniere que la somme des deux parties d'un même côté sera égale à l'autre partie.

En effet, ayant ordonné l'équation de maniere que y^1 sans coefficient soit au premier terme, le second terme sera $y^2 (a + b x)$, & ce second terme contiendra la somme des racines, c'est-à-dire des valeurs de y. *Voyez* EQUATION. Or par l'hypothese, il y a deux valeurs de x qui rendent ce second terme $= 0$, puisqu'il y a deux valeurs de x (*hyp.*) qui donnent la somme des ordonnées positives égale à la somme des négatives. Donc il y a deux valeurs de x, sçavoir A & B, qui donnent $a + b A = 0$, $a + B b = 0$. Or cela ne peut-être, à moins qu'en général on n'ait $a = 0$, $b = 0$. Donc $a + b x = 0$, quelque valeur qu'on suppose à x. Donc le second terme manque dans l'équation. Donc la somme des ordonnées positives est par-tout égale à la somme des ordonnées négatives.

On peut étendre ce théoreme aux degrés plus élevés. Par exemple, dans le quatrieme ordre, le 2^d terme étant $y^3 (a + b x)$, c'est encore la même chose; & si deux valeurs de x donnent la somme des ordonnées nulle, toutes les autres valeurs la donneront.

Outre cela, comme dans les sections coniques non paraboliques, le quarré d'une ordonnée, c'est-à-dire le rectangle des ordonnées situées de deux différens côtés du diametre, est au rectangle des parties du diametre terminées aux sommets de l'ellipse ou de l'hyperbole, comme une ligne donnée appellée *latus rectum* ou *parametre*, est à la partie du diametre comprise entre les sommets, & appellée *latus transversum*; de même dans les *courbes* du second genre non paraboliques, le parallelépipede sous trois ordonnées est au parallelépipede sous les trois parties du diametre terminées par les sommets & par la rencontre des ordonnées, dans un rapport constant.

Cela est fondé sur ce que le dernier terme de l'équation, savoir $h x^3 + l x^2 + m x + n$, est le produit de toutes les racines; que ce dernier terme est outre cela le produit de $A x + B$ par $D x + E$, & par $F x + G$, & que aux points où $y = 0$, c'est-à-dire où le diametre coupe la *courbe*, points que l'on appelle ici *sommets*, on a $x = -\frac{A}{B}$, $x = -\frac{E}{D}$, $x = -\frac{G}{F}$: avec ces propositions on trouvera facilement la démonstration dont il s'agit, ainsi que celle des théorèmes suivans, qui sont aussi tirés de M. Newton.

Comme dans la parabole conique qui n'a qu'un sommet sur un seul & même diametre, le rectangle des ordonnées est égal au produit de la partie du diametre comprise entre le sommet & l'ordonnée, par une ligne constante appellée *latus rectum*; de même dans celles des *courbes* du second genre qui n'ont que deux sommets sur un même & unique diametre, le parallelépipede sous trois ordonnées est égal au parallelépipede sous les deux parties du diametre, comprise entre les sommets & la rencontre de l'ordonnée, & sous une troisieme ligne constante, que l'on peut par conséquent nommer *latus rectum*. *Voyez* PARABOLE.

De plus, dans les sections coniques, si deux lignes paralleles & terminées à la section, sont coupées par deux autres lignes paralleles & terminées à la section, la premiere par la troisieme & la seconde par la quatrieme, le rectangle des parties de la premiere est au rectangle des parties de la troisieme, comme le rectangle des parties de la seconde est au rectangle des parties de la quatrieme; de même aussi, si on tire dans une *courbe* du second genre deux lignes paralleles, terminées à la *courbe* en trois points, & coupées par deux autres paralleles terminées à la même *courbe*, chacune en trois points, le parallelépipede des trois parties de la premiere ligne sera à celui des trois parties de la troisieme, comme le parallelépipede des trois parties de la seconde est à celui des trois parties de la quatrieme.

Enfin les branches infinies *des courbes* du premier & du second genre & des genres plus élevés, sont ou du genre hyperbolique ou du genre parabolique: une branche hyperbolique est celle qui a une asymptote, c'est-à-dire qui s'approche continuellement de quelque ligne droite; une branche parabolique est celle qui n'a point d'asymptote. *Voyez* ASYMPTOTE & BRANCHE.

Ces branches se peuvent distinguer encore mieux par leurs tangentes. En effet, si le point de contact d'une tangente est supposé infiniment éloigné, la tangente de ce point se confond avec l'asymptote dans une branche hyperbolique; & dans une branche parabolique, elle s'éloigne à l'infini, & disparoit. On peut donc trouver l'asymptote d'une branche, en cherchant sa tangente à un point infiniment éloigné, & on trouve la direction de cette branche, en cherchant la position d'une ligne droite parallele à la tangente, lorsque le point de contact est infiniment éloigné; car la direction de la branche infinie à son extrémité est parallele à celle de cette ligne droite.

Les lignes d'un ordre impair, par exemple du troisieme, du cinquieme, ont nécessairement quelques branches infinies; car on peut toûjours par une transformation d'axes, s'il est nécessaire, préparer l'équation, ensorte que l'une au moins des coordonnées se trouve élevée à une puissance impaire dans l'équation; elle aura donc toûjours au moins une valeur réelle, quelque valeur qu'on suppose à l'autre coordonnée. Donc, *&c.*

Nous avons dit plus haut que dans une ligne *courbe* d'un genre quelconque, on peut toûjours imaginer l'axe tellement placé, que la somme des ordonnées d'une part soit égale à la somme des ordonnées de l'autre. L'axe en ce cas s'appelle ordinairement *diametre*. Il est évident que toute *courbe* en a une infinité; car ayant transformé les axes d'une maniere quelconque, on peut toûjours supposer cette transformation telle que le second terme de la transformée manque, & en ce cas l'un des axes sera diametre.

On appelle *diametre absolu* celui qui divise les ordonnées en deux également; tels sont ceux des sections coniques.

M. de Bragelongne appelle *contre-diametre* un axe des abscisses, tel que les abscisses opposées égales ayent des ordonnées opposées égales; c'est-à-dire, tel que x négative donne y négative, sans changer d'ailleurs de valeur.

Ceci nous conduit naturellement à parler des *centres*, dont nous avons déja dit un mot plus haut. Pour qu'une *courbe* ait un centre, il faut qu'en supposant l'origine placée dans ce centre, & prenant deux x opposées & égales, les y correspondantes soient aussi opposées & égales; c'est-à-dire il faut que faisant x négative dans l'équation, on trouve pour y la même valeur, mais négative. L'équation doit donc être telle par rapport à x & à y, qu'en changeant les si-

Typesetting math: 100%

gnes de x & de y, elle demeure absolument la même; donc cette équation ne doit contenir que des puissances ou des dimensions impaires de x & de y, sans terme constant, ou des puissances & des dimensions paires de x & de y, avec ou sans terme constant. Car dans le premier cas, tous les signes changeront, en faisant x & y négatives, ce qui est la même chose que si aucun signe ne changeoit; & dans le second cas aucun signe ne changera. Voulez-vous donc savoir si une *courbe* a un centre? L'équation étant ordonnée par rapport à x & à y, imaginez que l'origine soit transportée dans ce centre, ensorte que l'on ait $x + a = z$, $y + b = u$; & déterminez a & b à être telles, qu'il ne reste plus dans la transformée que des dimensions paires, ou des dimensions impaires sans terme constant; si la *courbe* a un centre possible, vous trouverez pour a & b des valeurs réelles. Dans l'extrait du livre de M. l'abbé de Gua, *journal des Savans, Mai 1740*, extrait dont je suis l'auteur, on a remarqué que l'énoncé de la méthode de cet habile géometre pour déterminer les centres, étoit un peu trop générale.

Nous ne nous étendrons pas ici sur les manieres de déterminer les différentes branches des *courbes*; nous renvoyerons sur ce sujet au livre de M. Cramer, qui a pour titre, *introduction à l'analyse des lignes courbes*. Nous dirons seulement ici que ce probleme dépend de la connoissance des séries & de la regle du parallélogramme, dont nous parlerons en leur lieu. *Voyez* PARALLELOGRAMME, SERIE, *&c.*

Division des courbes en différens ordres. Nous avons vû à l'*article* CONIQUE, comment l'équation générale des sections coniques ou lignes du second ordre donne trois *courbes* différentes. *Voyez le troisieme vol. p. 878, col. 1re*; nous remarquerons seulement ici, 1° qu'il faut $-Duu$ au lieu de Duu; c'est une faute d'impression: 2° que lorsque D est négatif, & par conséquent $-Duu$ positif, alors l'équation primitive & générale $yy + pxy + bxx + qy + cx + a = 0$ est telle que la portion $yy + pxy + bxx$ a ses deux facteurs imaginaires, c'est-à-dire que cette portion $yy + pxy + bxx$ supposée égale à zéro, ne donneroit aucune racine réelle. On peut aisément s'en assurer par le calcul; car en ce cas on trouvera $\frac{pp}{4} < b$, & la quantité A dans la transformée $zz + Axx + Bx + C = 0$ sera positive, & par conséquent $-D$ positive: 3° dans l'équation $zz - Duu + Fu + G = 0$, on peut réduire les trois termes $-Duu + Fu + G$ à deux $+Ktt + H$, lorsque D n'est pas $= 0$, par la même méthode qu'on employe pour faire évanouir le second terme d'une équation du second degré; c'est-à-dire en faisant $u - \frac{F}{2D} = t$, & alors l'équation sera $zz + Ktt + H = 0$; équation à l'ellipse, si K est positif; & à l'hyperbole, si K est négatif: 4° si $D = 0$, en ce cas on sera $Fu + G = kt$, & l'équation sera $zz + kt = 0$, qui est à la parabole: 5° dans le cas où $D = 0$, $yy + pxy + bxx$ a ses deux facteurs égaux; & dans le cas où D est positif, c'est-à-dire où $-Duu$ est négatif, $yy + pxy + bxx$ a ses deux facteurs réels & inégaux, & l'équation appartient à l'hyperbole, car en ce cas $\frac{pp}{4} > b$, & A est négative. *Voyez* sur cela, si vous le jugez à propos, le septieme livre des sections coniques de M. de l'Hopital, qui traite des lieux géométriques; vous y verrez comment l'équation générale des sections coniques se transforme en équation à la parabole, à l'ellipse ou à l'hyperbole, suivant que $yy + pxy + bxx$ est un quarré, ou une quantité composée de facteurs imaginaires, ou de facteurs réels inégaux. Passons maintenant aux lignes du troisieme ordre ou *courbes* du second genre.

Réduction des courbes du second genre. M. Newton réduit toutes les *courbes* du second genre à quatre especes principales représentées par quatre équations. Dans la premiere, le rapport des ordonnées y aux abscisses x, est représenté par l'équation $xyy + ey = ax^3 + bxx + cx + d$; dans la seconde, l'équation a cette forme $xy = ax^3 + bxx + cx + d$; dans la troisieme, l'équation est $yy = ax^3 + bx^2 + cx + d$: enfin la quatrieme a pour équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Pour arriver à ces quatre équations, il faut d'abord prendre l'équation générale la plus composée des lignes du troisieme ordre, & l'écrire ainsi:

$$\left.\begin{array}{r} z^3 + bz^2u + czu^2 + eu^3 \\ + fzz + gzu + huu \\ + iz + lu \\ + m \end{array}\right\} = 0.$$

On remarquera que le plus haut rang $z^3 + bzu^2 + cuz^2 + cu^3$ étant du troisieme degré, il aura au moins un facteur réel; les deux autres étant, ou égaux entr'eux & inégaux au premier facteur, ou réels & inégaux, tant entr'eux qu'avec le premier facteur, ou imaginaires, ou enfin égaux au premier. Soit $z + Au$ ce facteur réel, & faisons d'abord abstraction du cas où les trois facteurs sont égaux; soit supposé $z + Au = t$, on aura une transformée qui contiendra t^3, t^2, t, tuu, utt, tu, uu & u, avec un terme constant; or on fera d'abord disparoître le terme uu, en supposant $t + F = f$; ensuite en faisant $u = Nf + p + Q$ (les grandes lettres désignent ici des coefficiens), on fera disparoître les termes utt & ut, & il ne restera plus que des termes qui représenteront la premiere équation $xyy + ey = ax^3 + bxx + cx + d = 0$.

En second lieu, si les trois facteurs du plus haut rang sont égaux, on n'aura dans l'équation transformée, en faisant $z + Au = t$, que les termes t^3, t^2, t, u, tu, uu, & un terme constant. Or on peut faire disparoître les termes tu & u, en supposant $u + Rt + K = f$, & l'on aura une équation de la forme $yy = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Troisieme forme de M. Newton. Nous remarquerons même que cette équation pourroit encore se simplifier; car en supposant $x = R + q$, on feroit évanouir les termes bxx ou d, & quelquefois le terme cx.

3°. Si les trois facteurs du premier rang sont égaux, & que de plus un de ces facteurs soit aussi facteur du second rang $fzz + gzu + huu$, alors la transformée aura des termes de cette forme t^3, t, tu, tt, u, & un terme constant. Or faisant $t + R = q$, on fera disparoître le terme u, & on aura une équation de cette forme $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Seconde forme de M. Newton. Cependant on pourroit encore simplifier cette équation, & faire disparoître les deux termes $bx^2 + cx$, en supposant $x = Qp$, & $y = Np + Rz + M$.

4°. Enfin si les trois facteurs du premier rang étant égaux, ceux du second sont les mêmes, l'équation alors n'aura que des termes de cette forme t^3, tt, u & t, avec un terme constant, & elle sera de la quatrieme forme de M. Newton, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, de laquelle on peut encore faire disparoître les termes $bx^2 + cx + d$, en supposant $x = p + R$, & $y + Nx + Q = z$. En ce cas l'équation sera de la forme $y = Ax^3$, & représentera la premiere parabole cubique. *Voy. les usages de l'analyse de Descartes*, par M. l'abbé de Gua, *page 437 & suiv.*

On voit par ce détail sur quoi est fondée la division générale des lignes du troisieme ordre qu'a donné M. Newton; on voit de plus que les équations qu'il a données auroient pû encore recevoir toutes une forme plus simple, à l'exception de la premiere.

Enumération des courbes du second genre. L'auteur subdivise ensuite ces quatre especes principales en un

Typesetting math: 100%

Volume IV, p. 385 (Bibliothèque Mazarine, cote 2° 3442)

un grand nombre d'autres particulieres, à qui il donne différens noms.

Le premier cas qui est celui de $xyy + ex = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, est celui qui donne le plus grand nombre de subdivisions ; les trois subdivisions principales sont que les deux autres racines du plus haut rang soient ou réelles & inégales, ou imaginaires, ou réelles & égales ; & chacune de ces subdivisions en produit encore d'autres. *Voyez l'ouvrage* de M. l'abbé de Gua, *page 440. & suiv.*

Lorsqu'une hyperbole est toute entiere au-dedans de ses asymptotes comme l'hyperbole conique, M. Newton l'appelle *hyperbole inscrite* : lorsqu'elle coupe chacune de ses asymptotes, pour venir se placer extérieurement par rapport à chacune des parties coupées, il la nomme *hyperbole circonscrite* ; enfin lorsqu'une de ses branches est inscrite à son asymptote, & l'autre circonscrite à la sienne, il l'appelle *hyperbole ambigene* : celle dont les branches tendent du même côté, il la nomme *hyperbole convergente* : celle dont les branches ont des directions contraires, *hyperbole divergente* : celle dont les branches tournent leur convexité de différens côtés, *hyperbole à branches contraires* : celle qui a un sommet concave vers l'asymptote, & des branches divergentes, *hyperbole conchoïdale* : celle qui coupe son asymptote avec des points d'inflexion, & qui s'étend vers deux côtés opposés, *hyperbole anguinée* ou *serpentante* : celle qui coupe la branche conjuguée, *cruciforme* : celle qui retourne sur elle-même & se coupe, *hyperbole à nœud* : celle dont les deux parties concourent en un angle de contact & s'y terminent, *hyperbole à pointe* ou *à rebroussement* : celle dont la conjuguée est une ovale infiniment petite, c'est-à-dire un point, *hyperbole pointée* ou *à point conjugué* : celle qui par l'impossibilité de deux racines n'a ni ovale, ni point conjugué, ni point de rebroussement, *hyperbole pure* ; l'auteur se sert dans le même sens des dénominations de *parabole convergente*, *divergente*, *cruciforme*, &c. Lorsque le nombre des branches hyperboliques surpasse celui des branches de l'hyperbole conique, il appelle l'hyperbole *redundante*.

M. Newton compte jusqu'à soixante-douze especes inférieures de *courbe* du second genre : de ces *courbes* il y en a neuf qui sont des hyperboles redundantes sans diametre, dont les trois asymptotes forment un triangle. De ces hyperboles, la premiere en renferme trois, une inscrite, une circonscrite, & une ambigene, avec une ovale ; la seconde est à nœud, la troisieme à pointe, la quatrieme pointée, la cinquieme & la sixieme pures, la septieme & la huitieme cruciformes, la neuvieme anguinée.

Il y a de plus douze hyperboles redundantes qui n'ont qu'un diametre : la premiere a une ovale, la seconde est à nœud, la troisieme à pointe, la quatrieme pointée ; la cinquieme, sixieme, septieme & huitieme, pures ; la neuvieme & la dixieme cruciformes, la onzieme & la douzieme conchoïdales. Il y a deux hyperboles redundantes qui ont trois diametres.

Il y a encore neuf hyperboles redundantes, dont les trois asymptotes convergent en un point commun : la premiere est formée de la cinquieme & de la sixieme hyperbole redundantes, dont les asymptotes renferment un triangle ; la seconde de la septieme & de la huitieme, la troisieme & la quatrieme de la neuvieme ; la cinquieme est formée de la huitieme & de la septieme des hyperboles redundantes, qui n'ont qu'un diametre ; la sixieme de la sixieme & de la septieme, la septieme de la huitieme & de la neuvieme, la huitieme de la dixieme & de la onzieme, la neuvieme de la douzieme & de la treizieme. Tous ces changemens se font en réduisant en un point le triangle compris par les asymptotes.

Il y a encore six hyperboles défectives sans diametre : la premiere a une ovale, la seconde est à nœud, la troisieme à pointe, la quatrieme pointée, la cinquieme pure, *&c.*

Il y a sept hyperboles défectives qui ont des diametres : la premiere & la seconde sont conchoïdales avec une ovale, la troisieme est à nœud, la quatrieme à pointe : c'est la cissoïde des anciens ; la cinquieme & la sixieme sont pointées, la septieme pure.

Il y a sept hyperboles paraboliques qui ont des diametres : la premiere ovale, la seconde à nœud, la troisieme à pointe, la quatrieme pointée, la cinquieme pure, la sixieme cruciforme, la septieme anguinée.

Il y a quatre hyperboles paraboliques, quatre hyperbolismes de l'hyperbole, trois hyperbolismes de l'ellipse, deux hyperbolismes de la parabole.

Outre le trident, il y a encore cinq paraboles divergentes : la premiere a une ovale, la seconde est à nœud, la troisieme pointée ; la quatrieme est à pointe (cette derniere est la parabole de Neil, appellée communément *seconde parabole cubique*) ; la cinquieme est pure. Enfin il y a une derniere *courbe* appellée communément *premiere parabole cubique*. Remarquons ici que M. Stirling a déjà fait voir que M. Newton dans son énumération avoit oublié quatre especes particulieres, ce qui fait monter le nombre des *courbes* du second genre jusqu'à soixante-seize, & que M. l'abbé de Gua y en a encore ajoûté deux autres, observant de plus que la division des lignes du troisieme ordre en especes pourroit être beaucoup plus nombreuse, si on assignoit à ces différentes especes des caracteres distinctifs, autres que ceux que M. Newton leur donne.

On peut voir dans l'ouvrage de M. Newton, & dans l'endroit cité du livre de M. l'abbé de Gua, ainsi que dans M. Stirling, les subdivisions détaillées des *courbes* du troisieme ordre, qu'il seroit trop long & inutile de donner dans un Dictionnaire. Mais nous ne pouvons nous dispenser de remarquer que les principes sur lesquels ces divisions sont fondées, sont assez arbitraires ; & qu'en suivant un autre plan, on pourroit former d'autres divisions des lignes du troisieme ordre. On pourroit, par exemple, comme MM. Euler & Cramer, distinguer d'abord quatre cas généraux : celui où le plus haut rang n'a qu'une racine réelle, celui où elles sont toutes trois réelles & inégales, celui où deux sont égales, celui où trois sont égales, & subdiviser ensuite ces cas. Cette division générale paroît d'autant plus juste & plus naturelle, qu'elle seroit parfaitement analogue à celle des lignes du second ordre ou sections coniques, dans laquelle on trouve l'ellipse pour le cas où le plus haut rang a ses deux racines imaginaires ; l'hyperbole, pour le cas où le plus haut rang a ses racines réelles & inégales, & la parabole pour le cas où elles sont égales. Au reste il faut encore remarquer que toutes les subdivisions de ces quatre cas, & même la division générale, auront toûjours de l'arbitraire. Cela se voit même dans la division des lignes du second ordre. Car on pourroit à la rigueur, par exemple, regarder la parabole comme une espece d'ellipse dont l'axe est infini (*voy.* PARABOLE), & ne faire que deux divisions pour les sections coniques ; & on pourroit même n'en faire qu'une, en regardant l'hyperbole comme une ellipse, telle que dans l'équation $yy = aa - xx$, le quarré de l'abscisse xx ait le signe $+$. Il semble qu'en Géometrie comme en Physique, la division en genres & en especes ait toûjours nécessairement quelque chose d'arbitraire ; c'est que dans l'une & dans l'autre il n'y a réellement que des individus, & que les genres n'existent que par abstraction de l'esprit.

M. Cramer trouve quatorze genres de *courbes* dans

Typesetting math: 100%

le troisieme ordre, & M. Euler seize, ce qui prouve encore l'arbitraire des subdivisions.

On peut par une méthode semblable faire la division des *courbes* d'un genre supérieur. *Voyez* ce que M. Cramer a fait par rapport aux lignes du quatrieme ordre dans le *chap. ix.* de son ouvrage.

Pour rappeller à l'une des quatre formes de M. Newton une ligne quelconque du troisieme ordre, dont l'équation est donnée en z & en u, on transformera d'abord les axes de la maniere la plus générale, en supposant $u = Az + Bu + C$, & $y = Dz + Eu + F$; substituant ensuite ces valeurs, on déterminera les coefficiens A, B, &c. à être tels que l'équation en x & en y ait une des quatre formes susdites.

Points singuliers & multiples des courbes. On appelle *point multiple* d'une *courbe* celui qui est commun à plusieurs branches qui se coupent en ce point, & par opposition *point simple* celui qui n'appartient qu'à une branche. Il est visible qu'au point multiple l'ordonnée y a plusieurs valeurs égales répondantes à un même x. C'est-là une propriété du point multiple; mais il ne faut pas croire que le point soit multiple, toutes les fois que l'ordonnée a plusieurs valeurs égales. Car, si une ordonnée touche la *courbe*, par exemple, il est aisé de voir que l'ordonnée a dans ce point deux valeurs égales, sans que le point soit double. *Voyez* TANGENTE. La propriété du point multiple, c'est que l'ordonnée y a plusieurs valeurs égales, *quelque situation qu'on lui donne*; au lieu que dans le point simple l'ordonnée qui peut avoir plusieurs valeurs égales dans une certaine situation, n'en a plus qu'une dès que cette situation change, ce qui est évident par la seule inspection d'un point multiple & d'un point simple. *Voyez* POINT.

De-là il s'ensuit que si on transporte l'origine en un point supposé multiple, en faisant $z + A = x$, $u + B = y$, il faut qu'en supposant z infiniment petit, on ait plusieurs valeurs nulles de u, quelque direction qu'on lui donne. Ainsi pour trouver les points multiples, il n'y a qu'après avoir transporté l'origine dans le point supposé, donner une direction quelconque à l'ordonnée, & voir si dans cette direction quelconque l'ordonnée aura plusieurs valeurs égales à zéro. *Voyez* M. l'abbé de Gua, *p. 88.* & M. Cramer, *page 409.*

On prouvera par ces principes, que les sections coniques ne peuvent avoir de points multiples, ce qu'on savoit d'ailleurs. On prouvera aussi que les *courbes* du troisieme ordre ne peuvent avoir de points triples, *&c.* Mais cette proposition se peut encore prouver d'une maniere plus simple en cette sorte. Imaginons que l'ordonnée soit tangente d'une des branches, elle rencontrera cette branche en deux points. Or si le point est un point double, par exemple, l'ordonnée rencontreroit donc la *courbe* en trois points, ce qui ne peut être dans une section conique; car jamais une droite ne peut la rencontrer qu'en deux points, puisque son équation ne passe jamais le second degré; & qu'ainsi quelque position qu'on donne à l'ordonnée, elle ne peut avoir jamais plus de deux valeurs. On prouvera de même qu'une *courbe* du second genre, ou ligne du troisieme ordre, ne peut avoir de point triple, parce que la *courbe* ne peut jamais être coupée qu'en trois points par une ligne droite.

A l'égard des points doubles des *courbes*, nous avons déjà remarqué que les *courbes* du second genre peuvent être coupées en trois points par une ligne droite. Or deux de ces points se confondent quelquefois, comme il arrive, par exemple, quand la ligne droite passe par une ovale infiniment petite; ou par le point de concours de deux parties d'une *courbe* qui se rencontrent, & s'unissent en une pointe. Quelquefois les lignes droites ne coupent la *courbe* qu'en un point, comme il arrive aux ordonnées de la parabole de Descartes, & de la premiere parabole cubique; en ce cas il faut concevoir que ces lignes droites passent par deux autres points de la *courbe* placés à une distance infinie ou imaginaire. Deux de ces intersections coincidentes, faites à une distance infinie, ou même imaginaire, constituent une espece de *point double*.

On appelle *points singuliers* les points simples qui ont quelque propriété particuliere, comme les points conjugués, les points d'inflexion, les points de serpentement, *&c. Voyez* POINT, CONJUGUÉ, INFLEXION, SERPENTEMENT, *&c. Voyez aussi* REBROUSSEMENT, NŒUD, *&c.* Sur les tangentes des *courbes* en général, & sur les tangentes des points multiples, *voyez* TANGENTE.

Description organique des courbes. 1°. Si deux angles de grandeur donnée, PAD, PBD (*Pl. de Géomet. fig. 53.*) tournent autour de deux poles A & B, donnés de position, & que le point de concours P des côtés AP, BP, décrive une ligne droite, le point de concours D des deux autres côtés décrira une section conique qui passera par les poles A & B, à moins que la ligne ne vienne à passer par l'un ou l'autre des poles A & B, ou que les angles BAD & ABD ne s'évanouissent à la fois, auquel cas le point de concours décrira une ligne droite.

2°. Si le point de concours P des côtés AP, BP, décrit une section conique passant par l'un des poles A, le point de concours D des deux autres côtés AD, BD, décrira une *courbe* du second genre qui passera par l'autre pole B, & qui aura un point double dans le premier pole A, à moins que les angles BAD, ABD, ne s'évanouissent à la fois, auquel cas le point D décrira une autre section conique qui passera par le pole A.

3°. Si la section conique décrite par le point P ne passe, ni par A ni par B, le point D décrira une *courbe* du second ou du troisieme genre, qui aura un point double; & ce point double se trouvera dans le concours des côtés décrivans AD, BD, quand les deux angles BAP, ABP, s'évanouissent à la fois. La *courbe* décrite sera du second genre, quand les angles BAD, ABD, s'évanouiront à la fois, sinon elle sera du troisieme genre, & aura deux points doubles en A & en B.

Les démonstrations de ces propositions, qu'il seroit trop long de donner ici, se trouveront dans l'ouvrage de M. Maclaurin, qui a pour titre, *Geometria organica*, où il donne des méthodes pour tracer des *courbes* géométriques par un mouvement continu. *Voyez aussi le VIII. livre des sections coniques de* M. de l'Hopital.

Génération des courbes du second genre par leurs ombres. Si les ombres des *courbes* de différens genres sont projettées sur un plan infini, éclairé par un point lumineux, les ombres des sections coniques seront des sections coniques; celles des *courbes* du second genre seront des *courbes* du second genre; celles des *courbes* du troisieme genre seront des *courbes* du troisieme genre, *&c.*

Et comme la projection du cercle engendre toutes les sections coniques, de même la projection des cinq paraboles divergentes engendre toutes les autres *courbes* du second genre; & il peut y avoir de même dans chaque autre genre une suite de *courbes* simples, dont la projection sur un plan éclairé par un point lumineux, engendre toutes les autres *courbes* du même genre. MM. Nicole & Clairaut, dans les *mémoires de l'acad. de 1731*, ont démontré la propriété des cinq paraboles divergentes dont nous ve-

Typesetting math: 100%

Volume IV, p. 387 (Bibliothèque Mazarine, cote 2° 3442)

nons de parler; propriété que M. Newton n'avoit fait qu'énoncer sans démonstration. *Voyez aussi* sur cette proposition l'*ouvrage cité* de M. l'abbé de Gua, *page 198. & suiv.* Voyez *aussi* OMBRE.

Usage des courbes pour la construction des équations. L'usage principal des *courbes* dans la Géométrie, est de donner par leurs points d'intersection la solution des problèmes. *Voyez* CONSTRUCTION.

Supposons, par exemple, qu'on ait à construire une équation de neuf dimensions, comme $x^9 + bx^7 cx^6 + dx^5 + ex^4 + (m+f)x^3 + gx^2 + hx + k = o$, dans laquelle b, c, d, &c. signifient des quantités quelconques données, affectées des signes + ou −; on prendra l'équation à la parabole cubique $x^3 = y$, & mettant y pour x^3 dans la premiere équation, elle se changera en $y^3 + bxy^2 + cy^2 + dx^2y + exy + my + fx^3 + gx^2 + hx + k = o$, équation à une autre *courbe* du second genre dans laquelle m ou f peuvent être supposés $= o$. Si on décrit chacune de ces *courbes*, leurs points d'intersection donneront les racines de l'équation proposée. Il suffit de décrire une fois la parabole cubique. Si l'équation à construire se réduit à 7 dimensions par le manquement des termes hx & k, l'autre *courbe* aura, en effaçant m, un point double à l'origine des abscisses, & pourra être décrite par différentes méthodes. Si l'équation est réduite à six dimensions par le manquement des trois termes $gx^2 + hx + k$, l'autre *courbe*, en effaçant f, deviendra une section conique; & si par le manquement des six derniers termes l'équation est réduite à trois dimensions, on retombera dans la construction que Wallis en a donnée par le moyen d'une parabole cubique & d'une ligne droite. *Voyez* CONSTRUCTION, & l'*ouvrage de* M. Cramer, *chap. jv.*

COURBE POLYGONE. On appelle ainsi une *courbe* considérée non comme rigoureusement *courbe*, mais comme un polygone d'une infinité de côtés. C'est ainsi que dans la géométrie de l'infini on considere les *courbes*; ce qui ne signifie autre chose, rigoureusement parlant, sinon qu'une *courbe* est la limite des polygones, tant inscrits que circonscrits. *Voyez* LIMITE, EXHAUSTION, INFINI, DIFFÉRENTIEL, *&c.* & POLYGONE.

Il faut distinguer, quand on traite une *courbe* comme polygone ou comme rigoureuse; cette attention est sur-tout nécessaire dans la théorie des forces centrales & centrifuges; car quand on traite la *courbe* comme polygone, l'effet de la force centrale, c'est-à-dire la petite ligne qu'elle fait parcourir, est égale à la base de l'angle extérieur de la *courbe*; & quand on traite la *courbe* comme rigoureuse, l'effet de la force centrale est égale à la petite ligne, qui est la base de l'angle curviligne formé par la *courbe* & par sa tangente. Or il est aisé de voir que cette petite ligne n'est que la moitié de la premiere, parce que la tangente rigoureuse de la *courbe* divise en deux également l'angle extérieur que le petit côté prolongé fait avec le côté suivant. La premiere de ces lignes est égale au quarré du petit côté divisé par le rayon du cercle osculateur, *voyez* OSCULATEUR & DEVELOPPÉE; la seconde au quarré du petit côté divisé par le diametre du même cercle. La premiere est censée parcourue d'un mouvement uniforme, la seconde d'un mouvement uniformément accéléré: dans la premiere, la force centrale est supposée n'agir que par une impulsion unique, mais grande; dans la seconde, elle est supposée agir, comme la pesanteur, par une somme de petits corps égaux; & ces deux suppositions reviennent à une même; car l'on sait qu'un corps mû d'un mouvement accéléré parcourroit uniformément avec sa vitesse finale le double de l'espace qu'il a parcouru d'un mouvement uniformément accéléré, pour acquérir cette vitesse. *Voyez les articles* ACCELERATION, CENTRAL, & DESCENTE. *Voyez aussi l'hist. de l'acad. 1722.* & *mon traité de Dynamique, page 20. article 20.* & *page 30. article 26.*

Rectification d'une courbe, est une opération qui consiste à trouver une ligne droite égale en longueur à cette *courbe*. *Voyez* RECTIFICATION.

Inflexion d'une courbe. Voyez INFLEXION.

Quadrature d'une courbe, est une opération qui consiste à trouver l'aire ou l'espace renfermé par cette *courbe*, c'est-à-dire à assigner un quarré dont la surface soit égale à un espace curviligne. *Voyez* QUADRATURE.

Famille de courbes, est un assemblage de plusieurs *courbes* de différens genres, représentées toutes par la même équation d'un degré indéterminé, mais différent, selon la diversité du genre des *courbes*. *Voyez* FAMILLE.

Par exemple, supposons qu'on ait l'équation d'un degré indéterminé $a^{m-1}x = y^m$: si $m = 2$, on aura $ax = y^2$; si $m = 3$, on aura $a^2x = y^3$; si $m = 4$, $a^3x = y^4$. Toutes les *courbes* auxquelles ces équations appartiennent sont dites de la même famille par quelques géometres.

Les équations qui représentent des familles de *courbes*, ne doivent pas être confondues avec les équations exponentielles; car quoique l'exposant soit indéterminé, par rapport à toute une famille de *courbes*, il est déterminé & constant par rapport à chacune des *courbes* qui la composent; au lieu que dans les équations exponentielles l'exposant est variable & indéterminé pour une seule & même *courbe*. *Voyez* EXPONENTIEL.

Toutes les *courbes* algébriques composent, pour ainsi dire, une certaine famille, qui se subdivise en une infinité d'autres, dont chacune contient une infinité de genres. En effet dans les équations par lesquelles les *courbes* sont déterminées, il n'entre que des produits, soit des puissances des abscisses & des ordonnées par des coefficiens constans, soit des puissances des abscisses par des puissances des ordonnées, soit de quantités constantes pures & simples, les unes par les autres. De plus chaque équation d'une *courbe* peut toûjours avoir zéro pour un de ses membres, par exemple, $ax = y^2$ se change en $ax - y^2 = o$. Donc l'équation générale qui représentera toutes les *courbes* algébriques sera

$$\left.\begin{array}{l} ay^m + bxy^{m-1} + nx^2y^{m-2} \ldots + fy^m \\ \quad + fy^{m-1} + kxy^{m-2} \\ \qquad\qquad = q\ y^{m-2} \end{array}\right\} = o.$$

Nous devons remarquer ici que le P. Reyneau s'est trompé dans le second volume de son *analyse démontrée*, lorsque voulant déterminer les tangentes de toutes les *courbes* géométriques en général, il prend pour l'équation générale de toutes ces *courbes* $y^m + bx^n y^q + cx^p = o$, équation qui n'a que trois termes. Il est visible que cette équation est insuffisante, & qu'on doit lui substituer celle que nous venons de donner.

Courbe caustique. Voyez CAUSTIQUE.

Courbe diacaustique. Voyez DIACAUSTIQUE.

Les meilleurs ouvrages dans lesquels on puisse s'instruire de la théorie des *courbes*, sont, 1° l'*enumeratio linearum tertii ordinis* de M. Newton, d'où une partie de cet article COURBE est tirée: 2° l'ouvrage de M. Stirling sur le même sujet, & *Geometria organica* de M. Maclaurin, dont nous avons parlé: 3° les *usages de l'analyse* de Descartes par M. l'abbé de Gua, déjà cités; ouvrage original & plein d'excellentes choses, mais qu'il faut lire avec précaution (*Voyez* BRANCHE & REBROUSSEMENT.): 4° l'*introduction*

Typesetting math: 100%

Notes

(1) :
Note attribution

L'attribution à D'Alembert d'articles non signés repose sur la présence simultanée de plusieurs critères (voir notre fiche sur D'Alembert, « Les articles de l'*Encyclopédie* attribuables à D'Alembert »). Ici : 1° Il s'agit d'un article traitant de mathématique ou de physique (critère non suffisant à lui seul) ; 2° Il est suivi d'un article de la même matière qui porte la marque (*O*) de D'Alembert (*Enc.*, I, p. xlvi) ; 3° D'Alembert s'attribue la paternité de cet article dans un mémoire sur lui-même très probablement rédigé à la fin de sa vie : voir (Passeron, 2005) ; 4° Voir aussi la rubrique « Auteur et rédaction » du dossier critique de l'article. John Lough (Lough, 1968, p. 237) et Richard N. Schwab (Schwab *et al.*, 1971-1972, vol. VI, p. 17) l'ont également attribué à D'Alembert.

par Alexandre Guilbaud, le 14 août 2020

(2) :
Note sur le désignant « (Ordre encycl. Entend. Raison, Science, Science de la Nat. Science des quantités abstr. Science de l'étendue, Géométrie, Géométrie des lignes courbes.) »

Forme explicitée : Géométrie des lignes courbes
Domaine : Géométrie

par Collectif projet ENCCRE, le 16 mai 2016

(3) :
Notes sur la mention bibliographique « Chambers »

Œuvre mentionnée : Ephraïm Chambers, *Cyclopædia, or, an universal dictionary of arts and sciences*, 1ère éd., 1728 ; 5e éd., 1741-1743.
La *Cyclopædia* de Chambers est publiée pour la première fois à Londres en 1728 en deux volumes in-folio et connaît plusieurs rééditions (1738, 1740, 1741, 1741-1743, 1742, 1750, 1751-1752) complétées par un supplément paru en 1753. L'*Encyclopédie*, qui ne devait initialement en être qu'une traduction, lui emprunte de nombreux matériaux – de même que la *Cyclopædia* a elle-même beaucoup emprunté au *Dictionnaire de Trévoux* de 1721, dont les encyclopédistes utiliseront à leur tour les éditions de 1743 et 1752 : voir notre dossier sur La place de la compilation. Il est difficile de déterminer précisément quelle édition (ou éditions) de la *Cyclopædia* a été traduite : à l'heure actuelle, le plus probable est qu'il se soit agi de la cinquième édition publiée à Londres en 1741 pour le premier tome et en 1743 pour le second. Voir, à ce sujet : Yoichi SUMI, « De la *Cyclopaedia* à l'*Encyclopédie* : traduire et réécrire », dans *Sciences, musiques, Lumières, Mélanges offerts à Anne-Marie Chouillet*, Ferney-Voltaire, Centre international d'étude du XVIIIe siècle, 2002, p. 409-419 ; Irène PASSERON, « Quelle(s) édition(s) de la *Cyclopædia* les encyclopédistes ont-ils utilisée(s) ? », *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie* 40-41 (2006), p. 287-292 [consulter] (http://rde.revues.org/4342).

par Collectif projet ENCCRE, le 28 févr. 2018

Dans la 5e édition, non paginée, l'article CURVE se trouve dans le tome I (1741).

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(4) Note ponctuelle sur « On trouvera ... précise »

Cette opposition du droit et du courbe, qui s'effacera au fil du temps en géométrie (les droites seront bientôt simplement considérées comme des courbes du premier ordre), est encore prégnante au milieu du XVIIIe siècle, comme le montre également la définition de COURBE retenue par le *Dictionnaire de Trévoux* (t. II, 1743, p. 642) qui énonce : « Ce qui n'est pas en droite ligne, ni en surface bien unie ». Cela conduira D'Alembert, plus loin dans l'article, à distinguer comme on le fait alors, depuis Newton, les notions d'*ordre* d'une *ligne* algébrique et de *genre* d'une *courbe* algébrique, pourtant très proches - les lignes du premier ordre étant les droites, celles du second ordre étant les sections coniques, aussi désignées comme courbes du premier genre, car « les lignes droites ne sont point comptées parmi les courbes » (voir § 53).

Typesetting math: 100%

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(5) Note ponctuelle sur « géometre moderne »

Le auquel D'Alembert fait ici allusion est très certainement Leonhard Euler, et la phrase qui suit est une référence à la dispute qui oppose les deux savants, depuis la fin des années 1740, au sujet du problème des cordes vibrantes. Ce dernier considère qu'il n'y a aucune restriction à donner à l'allure initiale de la corde, incluant le cas où celle-ci est représentée par une courbe tracée à la main et au hasard, alors que D'Alembert affirme que la courbe initiale (qu'il appelle courbe génératrice) doit nécessairement répondre à certaines contraintes, notamment pouvoir être définie par une expression analytique (Le Rond D'Alembert, 2015, p. cxx-cxxv).

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(6) Note ponctuelle sur « courbes … courbure »

Les « courbes à simple courbure » sont ce que l'on appellerait aujourd'hui les courbes planes ; le terme est utilisé en opposition aux « courbes à double courbure » qui désignent des courbes tracées dans l'espace, que l'on appelle également aujourd'hui courbes gauches. Voir les paragraphes consacrés aux courbes à double courbure dans l'article COURBE POLYGONE (t. IV, 1754, p. 387a–389b).

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(7) :
Note sur la mention bibliographique « Usages de l'analyse de Descartes »

Œuvre mentionnée : Jean-Paul de Gua de Malves, *Usages de l'Analyse de Descartes Pour découvrir, sans le secours du Calcul Differentiel, les Proprietés, ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres*, 1ère éd., 1740.

par Collectif projet ENCCRE, le 22 janv. 2018

(8) :
Note sur la mention bibliographique « Descartes »

Œuvre mentionnée : René Descartes, *La Géométrie*, 1ère éd., 1637.

par Collectif projet ENCCRE, le 5 mai 2019

(9) Note ponctuelle sur « méchaniques »

Dans *La Géométrie*, Descartes définit les courbes mécaniques comme étant celles « décrites par deux mouvements séparés, & qui n'ont entre eux aucun rapport qu'on puisse mesurer exactement » (p. 317) alors que « tous les points, de celles qu'on nomme Geometriques, c'est à dire qui tombent sous quelque mesure precise & exacte, ont necessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimé par quelque Equation, en tous par une même. » (p. 319).

L'identification des courbes géométriques à des lieux de points dont les coordonnées sont solutions d'une équation polynomiale mènera les géomètres à les désigner plutôt comme *courbes algébriques*, alors que l'usage sinon nécessaire (certaines courbes mécaniques ayant été étudiées dès l'Antiquité), du moins extrêmement efficace du calcul différentiel pour l'étude des courbes mécaniques conduira à privilégier l'usage de l'expression *courbes transcendantes*.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(10) :
Notes sur la mention bibliographique « M. Newton »

Œuvre mentionnée : Isaac Newton, *Arithmetica Universalis: Sive de Compositione Et Resolutione Arithmetica Liber. Cui Accessit Halleiana Æquationum Radices Arithmetice Inveniendi Methodus*, 1ère éd., 1707.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

Typesetting math: 100%

Cette référence, empruntée à l'article de Chambers comme toutes celles de ce paragraphe, renvoie très probablement à l'*Arithmetica universalis* de Newton, dans lequel on trouve le passage suivant : « Æquationis simplicitas non est, sed descriptionis facilitas, quæ lineam ad constructiones Problematum prius admittendam esse indicat » (p. 280), qui peut être traduit par : « Le motif qui doit faire préférer une courbe à une autre, pour la construction d'un problème, n'est pas la simplicité de son équation, mais la facilité avec laquelle on peut la décrire », selon la traduction en français donnée par Noël Beaudeux en 1802 (Arithmétique universelle de Newton (https://books.google.fr/books?id=wZI2UXWO_SEC&hl=fr&pg=PR53), tome premier, p. 53).

Gabriel Cramer, qui n'est pas cité à cet endroit par D'Alembert, ne dit pas autre chose dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* : « Il semble que c'est moins la simplicité de l'équation que la facilité de la description, qu'il faut chercher dans le choix des Lignes propres à construire un Problème » (p. 91).

Il est en revanche difficile, en l'absence d'informations supplémentaires, de donner des références précises pour les travaux de Leibnitz et de Wolf qui sont mentionnés ensuite.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(11) Note ponctuelle sur « un »

Lire « à **une** autre ».

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(12) Note ponctuelle sur « L'équation … dx »

Alors que jusqu'ici D'Alembert traduisait pour l'essentiel l'article CURVE de la *Cyclopædia* de Chambers, proposant quelques ajouts de sa main (dans les paragraphes 6-8 et 11-14), commence ici une longue incise de D'Alembert dans cette traduction, se terminant au paragraphe 50, lui permettant d'exposer de manière plus précise quelques aspects analytiques de l'étude des courbes algébriques, et de développer quelques idées sur les courbes transcendantes.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(13) Note ponctuelle sur « interscendantes »

Le terme *interscendant*, repris ici par D'Alembert pour désigner une courbe dont l'équation contient des exposants irrationnels, est également mentionné en passant par Gabriel Cramer dans son chapitre sur la nature des lignes courbes, dans lequel il en attribue la paternité à Leibniz en expliquant qu'elles sont nommées ainsi car elles se rapportent à « un genre intermédiaire entre les Courbes exponentielles & les algébriques » (*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, p. 8).

Leonhard Euler, en revanche, écarte rapidement ce terme du vocabulaire des courbes en indiquant que les courbes dites interscendantes doivent être rangées dans la classe des courbes transcendantes, car non algébriques : «Quæcunque Functio non est algebraïca, ea est transcendens » (*Introductio in analysin infinitorum*, t. 2, p. 285-286). C'est la conception qui prévaudra.

Pour davantage d'informations sur cette notion d'interscendance, voir (Turrière, 1914).

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(14) Note ponctuelle sur « dans la … article »

La démonstration ici annoncée par D'Alembert occupe en effet une large partie de l'article, entre les paragraphes 27 et 30. L'enjeu principal de cette explicitation sur le signe positif ou négatif des coordonnées des points de la courbe, qui peut nous sembler aujourd'hui triviale, est sans doute à relier aux précautions d'usage sur les quantités négatives en algèbre et en géométrie qui ont cours au milieu du XVIIIe siècle, et qui sont largement exposées par D'Alembert dans l'article NÉGATIF, (*Algeb.*) (t. XI, 1765, p. 72b–74a).

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(15) Note ponctuelle sur « le point où »

Typesetting math: 100%

D'Alembert a ici sans doute voulu écrire « le point où $x = 0$ et $y = 0$ », soit l'origine des coordonnées.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(16) Note ponctuelle sur « réelles »

Ce résultat sur les nombres imaginaires a été énoncé par D'Alembert dès 1746 dans ses *Recherches sur le calcul intégral*, mémoire paru en 1748 dans l'Histoire de l'académie de Berlin (Jean Le Rond D'Alembert, 1748, édition critique dans D'Alembert, 2007, p. 95-170), comme corollaire à ce qui est aujourd'hui connu comme le théorème fondamental de l'algèbre, ou encore théorème de D'Alembert-Gauss, ce qui est rappelé dans les articles EQUATION, *en Algebre* Géométrie Méchanique (t. V, 1755, p. 842a–855a) (au § 80) et IMAGINAIRE, *Algebre* (t. VIII, 1765, p. 560a–b). Néanmoins, à l'époque où cet article a été écrit, l'énoncé « toute racine imaginaire d'une équation peut se réduire à $A + B\sqrt{-1}$ » n'est pas encore démontré de manière suffisamment simple et directe aux yeux de D'Alembert ; fin septembre 1750, il écrit à Cramer « qu'il doit y avoir quelque principe simple pour demontrer que les racines imaginaires sont toutes de la forme $x + y\sqrt{-1}$ ou $x - y\sqrt{-1}$. Mais jusqu'icy je me suis fatigué vainement à le chercher. Mr Euler dans son livre l'a fort mal démontré » (Le Rond D'Alembert, 2015, p. 274).

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(17) Note ponctuelle sur « différentes »

D'Alembert affirme ici qu'une courbe algébrique doit être définie par une équation irréductible, c'est-à-dire qui ne peut pas se factoriser en plusieurs équations rationnelles. Il est ici en accord avec la conception d'Euler (qui parle alors de courbe « continue », terme non repris par D'Alembert) mais diffère assez nettement de celle de Cramer. Voir le dossier critique pour plus d'informations.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(18) Note ponctuelle sur « entre les … abscisse »

La question de déterminer les équations des courbes pour lesquelles la somme ou le produit des ordonnées correspondant à une même abscisse est constante (ou toute autre relation donnée devant être vérifiée par ces ordonnées) a été traitée par Clairaut dans un mémoire de l'Académie royale des sciences de Paris pour 1734 (Alexis-Claude Clairaut, 1736), indirectement cité dans le paragraphe suivant, qui répondait à un problème posé par Jean Bernoulli à la fin du siècle précédent.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(19) : Note sur la mention bibliographique « les journaux de Leipsic de 1697 »

Œuvre mentionnée : Jean I Bernoulli, « Supplementum Defectus Geometriæ Cartesianæ Inventionem Locorum », *Acta Eruditorum*, 1696 (1696) , p. 264-269 [consulter (https://books.google.fr/books?id=SquGzY4NtPoC&hl=fr&pg=PA264)]

par Collectif projet ENCCRE, le 6 août 2018

(20) : Note sur la mention bibliographique « mémoires de l'acad. des Sciences de 1734 »

Œuvre mentionnée : Alexis-Claude Clairaut, « Solution de plusieurs Problèmes où il s'agit de trouver des Courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une Equation donnée. », *Histoire de l'Académie royale des sciences avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, tirés des registres de cette Académie. Partie Mémoires*, Année 1734 (1736) , p. 196-215 [consulter (http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3531x/f344.item)]

par Collectif projet ENCCRE, le 21 janv. 2018

(21) : Notes sur la mention bibliographique « introductio ad analysim infinitorum, par

Typesetting math: 100%

M. Euler, c. xjv »

Œuvre mentionnée : Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 1ère éd., 1748.

par Collectif projet ENCCRE, le 21 janv. 2018

Il s'agit en fait du chapitre xvi du second tome de l'ouvrage d'Euler (et non du chapitre xiv comme écrit ici), intitulé *De inventione Curvarum ex datis Applicatarum proprietatibus* (De la manière de trouver les courbes par la connaissance des propriétés des appliquées).

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(22) Note ponctuelle sur « l'Algebre … anciens »

Dans l'article ALGEBRE, (*Ordre Encyclopédique : Entendement, Raison, Science de la Nature, Science des êtres réels, des êtres abstraits, de la quantité ou Mathématiques, Mathématiques pures, Arithmétique, Arithmétique numérique & Algebre.*) (t. I, 1751, p. 259a–262b), D'Alembert écrit : « Quant à l'origine de cet art, nous n'avons rien de fort clair là-dessus : on en attribue ordinairement l'invention à Diophante », et ajoute que « l'Algebre n'a pas été totalement inconnue aux anciens Mathématiciens, qui existoient bien avant le siecle de Diophante » comme Théon, Pappus, Archimède et Apollonius, tout en concédant que « l'Analyse dont ces Auteurs ont fait usage, est plûtôt géométrique qu'algébrique ». L'algèbre, telle qu'elle est ici entendue par D'Alembert, ne trouve son origine qu'au IXe siècle dans le monde arabo-musulman.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(23) :
Note sur la mention bibliographique « Traité des lignes du troisieme ordre de M. Newton »

Œuvre mentionnée : Isaac Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, 1ère éd., 1704.

par Collectif projet ENCCRE, le 5 mai 2019

(24) Note ponctuelle sur « l'intégrale … différentielle »

La construction d'une courbe mécanique solution d'une équation différentielle sera traitée dans la dernière section de l'entrée COURBE POLYGONE (t. IV, 1754, p. 387a–389b).

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(25) Note ponctuelle sur « par le … ordinaire »

Cette opinion selon laquelle seule l'algèbre ordinaire est nécessaire à l'étude des courbes algébriques (pour déterminer leurs tangentes, extrema, courbure, etc.) est largement partagée au moment de l'écriture de l'article ; l'usage presque systématique du calcul différentiel pour cette étude, que nous constatons aujourd'hui dans l'enseignement, ne date que de la première partie du XIXe siècle, notamment sous l'influence des traités de Lacroix. Voir le dossier critique pour plus d'informations à ce sujet.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(26) :
Note sur la mention bibliographique « Euler »

Œuvre mentionnée : Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 1ère éd., 1748.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(27) :
Note sur la mention bibliographique « de Gua »

Œuvre mentionnée : Jean-Paul de Gua de Malves, *Usages de l'Analyse de Descartes Pour découvrir, sans le secours du Calcul Differentiel, les Proprietés, ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres*, 1ère éd., 1740.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

Typesetting math: 100%

(28) :
Notes sur la mention bibliographique « l'ouvrage de M. Cramer, qui a pour titre introduction à l'analyse des lignes courbes, Genev. 1750 »

Œuvre mentionnée : Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 1ère éd., 1750.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

Les ouvrages de Cramer, d'Euler et de De Gua de Malves seront cités comme étant parmi « les meilleurs ouvrages dans lesquels on puisse s'instruire de la théorie des courbes » dans l'entrée COURBE POLYGONE (t. IV, 1754, p. 387a–389b) qui suit cet article.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(29) Note ponctuelle sur « équation … dimension »

Gabriel Cramer, dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, donne un énoncé équivalent dans l'article 34, p. 54: « Je veux dire, qu'encore qu'on puisse exprimer la nature d'une Ligne algébrique par une infinité d'équations différentes, selon le choix qu'on fait de l'Origine, & la position qu'on donne aux Axes ; cependant toutes ces équations sont d'un même Ordre, auquel par conséquent la Ligne proposée doit se raporter ».

Cet énoncé semble néanmoins avoir posé question pour D'Alembert. Dans sa lettre à Cramer de fin septembre 1750, il écrit, en réponse à une lettre perdue du Genevois : « Votre reponse sur l'art. 34 m'a fait d'autant plus de plaisir, que n'ayant pas beaucoup reflechi sur cette matière, je m'imaginois qu'il pouvoit etre difficile de prouver qu'en changeant les coordonnées, l'Equation d'une courbe ne s'abaissoit pas. La demonstration que vous en donnés en un mot dans votre lettre, est très juste, & me rend presque honteux » (Le Rond D'Alembert, 2015, p. 274).

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(30) :
Note sur la mention bibliographique « l'ouvrage de M. l'abbé de Gua »

Œuvre mentionnée : Jean-Paul de Gua de Malves, *Usages de l'Analyse de Descartes Pour découvrir, sans le secours du Calcul Differentiel, les Proprietés, ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres*, 1ère éd., 1740.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(31) :
Note sur la mention bibliographique « l'introduction à l'analyse des lignes courbes par M. Cramer »

Œuvre mentionnée : Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 1ère éd., 1750.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(32) Note ponctuelle sur « Courbes … dimension »

Ce paragraphe, ainsi que les cinq courts paragraphes suivants, est la reprise de la traduction de l'article de Chambers par D'Alembert.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(33) Note ponctuelle sur « genres ou ordres »

La distinction entre *genre* et *ordre* d'une courbe algébrique ne tient alors qu'au fait qu'on ne classe pas encore les lignes droites (dont l'équation algébrique générale associée est de degré 1) dans les courbes algébriques, sûrement en raison de la définition qui est donnée du *courbe* au XVIIIe siècle, en opposition au *droit*, et que l'on retrouve en tête de cet article.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

Typesetting math: 100%

(34) Note ponctuelle sur « équation … cercle »

Dans l'article CURVE de la *Cyclopædia* de Chambers, l'équation du cercle s'écrit $y^2 = ax - x^2$; D'Alembert ajoute ici un coefficient 2 qui a pour unique mérite de faire en sorte que le centre de ce cercle ait pour abscisse *a*.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(35) :
Note sur la mention bibliographique « l'ouvrage de M. Cramer »

Œuvre mentionnée : Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 1ère éd., 1750.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(36) Note ponctuelle sur « sur le … couper »

La question du nombre de points d'intersection de deux courbes algébriques, qui se pose depuis déjà plusieurs années au moment de l'écriture de l'article, est une question importante que D'Alembert tente ici de faire passer pour plus anodine qu'elle ne l'est réellement (à tel point qu'il ne semble pas considérer comme nécessaire d'énoncer le théorème). Aux XVIIe et XVIIIe siècles, plusieurs auteurs tiennent pour acquis que deux courbes algébriques d'ordres *m* et *n* ne peuvent se couper qu'en au plus $m \times n$ points, mais la démonstration de ce théorème qui s'énonce très simplement se révèle très difficile.

Le mathématicien écossais Maclaurin en annonce une démonstration au début des années 1730 dans une lettre publiée dans les *Philosophical Transactions* de la Royal Society (Colin Maclaurin, 1738), indiquant qu'elle se trouvera dans un supplément à sa *Geometria organica*, supplément qui ne sera jamais publié. Gabriel Cramer fait état de cette première tentative dans son *Introduction* : « Mr. MAC-LAURIN a démontré la même chose, mais je ne crois pas que sa Démonstration ait été rendue publique », écrit-il (*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, p. 76). Il renvoie le lecteur vers sa propre démonstration, proposée en appendice de son ouvrage (p. 660-676) : l'idée générale est de démontrer que l'équation *C* issue de l'élimination de la variable *x* entre les deux équations *A* (de degré *n*) et *B* (de degré *m*), appelée la *résultante* des équations *A* et *B*, est de degré au plus égal à *mn*. Ce résultat ne sera rigoureusement démontré qu'au milieu des années 1760 par Étienne Bézout, ce qui fera que ce résultat est d'ailleurs aujourd'hui connu sous le nom de *théorème de Bézout*. On pourra retrouver tout l'historique des tentatives de démonstration de ce théorème, de Newton à Euler, dans l'ouvrage que Liliane Alfonsi a consacré à Étienne Bézout (Alfonsi, 2011).

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(37) Note ponctuelle sur « Ces équations … facilement »

Gabriel Cramer, toujours dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, écrit p. 58 : « Ainsi une Ligne du premier Ordre est déterminée par deux points donnés ; une du second par 5 ; une du troisième par 9 ; une du quatrième par 14 ; une du cinquième par 20 ; &c. » mais il concède qu'en pratique, le calcul menant à la résolution simultanée des $\frac{n^2+3n}{2}$ équations permettant de déterminer les coefficients de l'équation de la courbe « véritablement en seroit assez long », ce à quoi il ajoute en note infrapaginale renvoyant vers l'appendice n°1 de son ouvrage : « C'est à l'*Algèbre* à donner les moyens d'abréger ce Calcul. Je crois avoir trouvé pour cela une Règle assez commode & générale, lorsqu'on a un nombre quelconque d'équations et d'inconnües dont aucune ne passe le prémier degré » (p. 59-60).

Cet appendice contient ce que l'on appelle aujourd'hui les *formules de Cramer*, ou règle des déterminants, pour la résolution des systèmes d'équations linéaires ; c'est d'ailleurs essentiellement pour le contenu de cet appendice que le nom du Genevois, associé à cette règle (règle de Cramer en français, Cramer's rule en anglais, Cramersche regel en allemand), et son traité des courbes, sont aujourd'hui connus. L'intérêt des appendices algébriques du traité des courbes de Cramer semble avoir échappé à D'Alembert, qui n'en parle ni dans cet article, ni ailleurs dans l'Encyclopédie, ni dans la correspondance entre les deux hommes qui a suivi sa parution.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

Typesetting math: 100%

(38) :
Note sur la mention bibliographique « M. Newton »

Œuvre mentionnée : Isaac Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, 1ère éd., 1704.

par Collectif projet ENCCRE, le 9 déc. 2018

(39) :
Note sur la mention bibliographique « Stirling »

Œuvre mentionnée : James Stirling, *Lineae tertii ordinis Neutonianae, sive, Illustratio tractatus D. Neutoni De enumeratione linearum tertii ordinis: cui subjungitur, solutio trium problematum*, 1ère éd., 1717.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(40) :
Note sur la mention bibliographique « Maclaurin »

Œuvre mentionnée : Colin Maclaurin, *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis*, 1ère éd., 1720.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(41) Note ponctuelle sur « Nous allons … Newton »

Le contenu des paragraphes 61 à 68 est pour l'essentiel une traduction de l'article CURVE de Chambers, avec quelques ajouts et explications de D'Alembert (§ 61-63 et 65) qui visent à donner des justifications algébriques aux affirmations géométriques de Chambers.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(42) Note ponctuelle sur « sommets »

Juste après, lire « on a $x = -\frac{B}{A}$ ».

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(43) Note ponctuelle sur « Les lignes … infinies »

D'Alembert ouvre, entre les paragraphe 69 et 75, une nouvelle incise dans sa traduction de l'article CURVE de la *Cyclopædia*, d'abord pour indiquer qu'une courbe d'ordre impair admet toujours au moins une branche infinie, puis, en s'appuyant sur De Gua, Bragelongne et Cramer, pour définir les notions de diamètre absolu et de contre-diamètre (voir note *infra*), puis de donner une méthode analytique de détermination du centre d'une courbe.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(44) :
Notes sur la mention bibliographique « M. de Bragelongne »

Œuvre mentionnée : [Fontenelle], « Sur les lignes du IVme ordre », *Histoire de l'Académie royale des sciences avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, tirés des registres de cette Académie. Partie Histoire*, 1732 (1735) , p. 63-70 [consulter (http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k35294/f71.item)]

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

Cette présentation de Fontenelle annonce la publication prochaine d'un mémoire de l'abbé Christophe Bernard de Bragelongne (1688-1744) sur les lignes du quatrième ordre, qui viendrait prolonger les trois premières parties de la section I d'un long mémoire intitulés « Examen des lignes du quatrieme ordre », et déjà publiées par l'Académie royale des sciences en 1730 et 1731. La notion de contre-diamètre d'une courbe algébrique est définie à la toute fin du texte de Fontenelle. Il faut noter ici que la suite annoncée ne sera jamais publiée.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

Typesetting math: 100%

(45) Note ponctuelle sur « contre-diametre »

Cette notion de contre-diamètre, introduite par Bragelongne, avant d'être reprise par Gabriel Cramer (*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, p. 141-147) ne connaîtra pas de réelle postérité, trop proche de celle de centre de symétrie d'une courbe.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(46) :
Note sur la mention bibliographique « Dans l'extrait du livre de M. l'abbé de Gua »

Œuvre mentionnée : Jean Le Rond D'Alembert, « Usage de l'Analyse de Descartes, pour decouvrir sans le secours du Calcul differentiel les proprietés ou affections principales des lignes Géométriques de tous les Ordres, par M. l'Abbé de Gua de Malves », *Journal des Sçavans*, Mai 1740 (1740) , p. 854-885 [consulter (https://books.google.fr/books?id=h6kUloGkDKUC&vq=usages&hl=fr&pg=PA854)]

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(47) :
Note sur la mention bibliographique « livre de M. Cramer, qui a pour titre, introduction a l'analyse des lignes courbes »

Œuvre mentionnée : Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 1ère éd., 1750.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(48) Note ponctuelle sur « Nous dirons ... lieu »

Effectivement, la méthode de recherche des branches infinies des courbes algébriques, telle qu'elle a été explicitée des travaux de Newton par Stirling dans son *Lineae tertii ordinis Neutonianae*, puis reprise par De Gua et surtout Cramer dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, est basée sur des développements en séries calculés à partir de l'équation de la courbe. Pour cela est utilisé un dispositif appelé *parallélogramme analytique*, décliné en *triangle analytique* par De Gua et Cramer, dont D'Alembert fait finalement peu de cas, même si cette méthode (nommée règle du parallélogramme) se trouve rapidement décrite dans l'article PARALLÉLOGRAMME, *en Géométrie* (t. XI, 1765, p. 911a–912b) auquel il renvoie.

On peut noter que dans l'article COURBE de l'*Encyclopédie d'Yverdon* (t. X, p. 107-130), qui est pour l'essentiel une reprise *verbatim* de l'article de D'Alembert, on trouve page 125 une insertion de la main de Mathieu-Bernard Goudin, qui signe (G.C.), et qui expose sur près de deux pages les détails de cette méthode du parallélogramme (ou du triangle) analytique pour l'étude des branches infinies et des points singuliers des courbes.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(49) Note ponctuelle sur « Division ... ordres »

Au XVIIIe siècle, l'objectif - parfois implicite - de l'étude des courbes algébriques est leur classification (ou division). Newton, dans son *Enumeratio* publié en 1704, avait donné l'exemple en énumérant et classant 72 espèces de courbes du troisième ordre. L'abbé De Gua (*Usages de l'analyse de Descartes*, p. 436-452), puis Euler (*Introductio in analysin infinitorum*, t. 2, ch. IX et XI) et Cramer (*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, ch. IX), ont souhaité reprendre et même poursuivre cette œuvre classificatoire dans leurs ouvrages respectifs en traitant aussi des courbes d'ordre supérieur. Cette ambition classificatoire connaît certaines limites, en étant notamment soumise à un arbitraire qui fait dire à D'Alembert qu'« il n'y a réellement que des individus, & que les genres n'existent que par abstraction de l'esprit » : se reporter au dossier critique pour plus de détails.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(50) :
Note sur la mention bibliographique « le septieme livre des sections coniques de M. de l'Hopital »

Typesetting math: 100%

Œuvre mentionnée : Guillaume François Antoine marquis de L'Hôpital, *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des equations dans les problêmes tant déterminez qu'indéterminez*, 1ère éd., 1707.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(51) :
Note sur la mention bibliographique « Newton »

Œuvre mentionnée : Isaac Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, 1ère éd., 1704.

par Collectif projet ENCCRE, le 17 mai 2020

(52) Note ponctuelle sur « Pour arriver ... équations »

Le paragraphe 76, traduit de Chambers, expose les quatre équations canoniques auxquelles Newton a réduit l'équation générale des lignes du troisième ordre. Dans les paragraphes 77 à 83 qui suivent, dont le contenu est absent de l'article de la *Cyclopædia* , D'Alembert explicite les calculs algébriques qui permettent de déduire ces quatre équations canoniques de l'équation générale selon la nature des racines du polynôme homogène de degré 3 formé par son terme de plus haut degré, en proposant même de simplifier encore davantage les expressions de trois d'entre elles.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(53) :
Note sur la mention bibliographique « usages de l'analyse de Descartes, par M. l'abbé de Gua, page 437 & suiv. »

Œuvre mentionnée : Jean-Paul de Gua de Malves, *Usages de l'Analyse de Descartes Pour découvrir, sans le secours du Calcul Differentiel, les Proprietés, ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres*, 1ère éd., 1740.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(54) :
Note sur la mention bibliographique « Newton »

Œuvre mentionnée : Isaac Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, 1ère éd., 1704.

par Collectif projet ENCCRE, le 23 mai 2020

(55) Note ponctuelle sur « Enumération ... second genre »

Les paragraphes 84 à 94, à l'exception du paragraphe 85 et d'une courte remarque dans le paragraphe 94, sont la traduction du passage de l'article CURVE de la *Cyclopædia* dans lequel Chambers reprend l'énumération des lignes du troisième ordre donnée par Newton.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(56) :
Note sur la mention bibliographique « l'ouvrage de M. l'abbé de Gua, page 440. & suiv. »

Œuvre mentionnée : Jean-Paul de Gua de Malves, *Usages de l'Analyse de Descartes Pour découvrir, sans le secours du Calcul Differentiel, les Proprietés, ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres*, 1ère éd., 1740.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

Typesetting math: 100%

(57) :
Note sur la mention bibliographique « Newton »

Œuvre mentionnée : Isaac Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, 1ère éd., 1704.

par Collectif projet ENCCRE, le 23 mai 2020

(58) :
Note sur la mention bibliographique « Newton »

Œuvre mentionnée : Isaac Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, 1ère éd., 1704.

par Collectif projet ENCCRE, le 23 mai 2020

(59) Note ponctuelle sur « huitieme »

Il s'agit d'une erreur dans la traduction de l'article CURVE de Chambers, qui dit : « the fifth is formed of the fifth and seventh of the redundant hyperbolas, with one diameter ». On doit donc lire ici : « la cinquieme est formée de la cinquieme & de la septieme des hyperboles redundantes, qui n'ont qu'un diametre ».

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(60) Note ponctuelle sur « seconde … cubique »

D'Alembert s'écarte légèrement de la traduction de l'article de Chambers en utilisant l'expression « seconde parabole cubique » pour désigner cette courbe également appelée parabole de Neil, d'équation $y^2 = ax^3$. Chambers utilise l'expression *parabole semi-cubique* (« *semicubic parabola* »). Les deux expressions sont en fait équivalentes, comme cela est rappelé par La Chapelle dans l'article SEMI-CUBIQUE, *en Géométrie* (t. XIV, 1765, p. 943b) : très communément utilisée dans les textes français sur les courbes, on la retrouve, par exemple, dans l'*Analyse démontrée* de Charles Reyneau en 1708, qui a une importance particulière dans la formation mathématique du jeune D'Alembert (voir Lubet, 2005).

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(61) Note ponctuelle sur « premiere … cubique »

Chambers, à cet endroit de l'article, utilise l'expression *parabole cubique* (« cubic parabola ») pour désigner cette courbe d'équation $y^3 = a^2x$. D'Alembert lui préfère « première parabole cubique », pour la distinguer de la *seconde parabole cubique* qui fait l'objet de la note précédente. Voir également le paragraphe 16 de l'article PARABOLE, *en Géométrie* (t. XI, 1765, p. 883a–884b).

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(62) Note ponctuelle sur « Remarquons ici »

Newton a nommé et décrit soixante-douze espèces différentes de cubiques, énumérées dans les paragraphes précédents. Cette énumération était incomplète : James Stirling en a ajouté quatre dans son *Lineae tertii ordinis Neutonianae* en 1717, suivi par François Nicole et Nicolas Bernoulli dans les années 1730, qui en ont ajouté une chacun, ce qui monte le total des espèces énumérées à 78. Les différentes éditions de la *Cyclopædia* (de la 1re en 1728 à la 5e en 1741-43) ignorent ces additions ; D'Alembert, suivant De Gua (en lui attribuant de manière erronée la découverte des deux dernières au passage), corrige ici Chambers, sans pour autant donner le détail des six espèces ajoutées à la liste de Newton (quatre parmi les hyperboles redondantes, données par Stirling, les deux dernières parmi les hyperboles paraboliques).

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(63) :
Notes sur la mention bibliographique « Stirling »

Œuvre mentionnée : James Stirling, *Lineae tertii ordinis Neutonianae, sive, Illustratio tractatus D. Neutoni De enumeratione linearum tertii ordinis: cui subjungitur, solutio trium problematum*, 1ère éd., 1717.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

Typesetting math: 100%

Stirling, dans son ouvrage, ajoute en effet deux espèces d'hyperboles redondantes à un diamètre (espèces XI et XV, p. 99-101), et deux espèces d'hyperboles redondantes à trois diamètres (espèces XXIV et XXV, p. 101-103), à la liste des soixante-douze espèces donnée par Newton.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(64) :

Note sur la mention bibliographique « Newton »

Œuvre mentionnée : Isaac Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, 1ère éd., 1704.

par Collectif projet ENCCRE, le 23 mai 2020

(65) :

Notes sur la mention bibliographique « l'abbé de Gua »

Œuvre mentionnée : Jean-Paul de Gua de Malves, *Usages de l'Analyse de Descartes Pour découvrir, sans le secours du Calcul Differentiel, les Proprietés, ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres*, 1ère éd., 1740.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

De Gua signale qu'« il en est encore échapé à l'un & à l'autre de ces Géométres deux Especes qui doivent avoir leur place entre la 53me et la 54me de M. Newton, & qui ne sont autre chose que la Figure 57 accompagnée ou d'une Ovale, ou d'un Point Conjugué placé au-delà de l'Assymptote » (p. 367-368).

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(66) :

Notes sur la mention bibliographique « Newton »

Œuvre mentionnée : Isaac Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, 1ère éd., 1704.

par Collectif projet ENCCRE, le 23 mai 2020

L'énumération des 72 espèces de lignes du troisième ordre - avec les six planches de courbes correspondantes - se trouve entre les pages 146 et 157 du texte de Newton.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(67) :

Notes sur la mention bibliographique « l'abbé de Gua »

Œuvre mentionnée : Jean-Paul de Gua de Malves, *Usages de l'Analyse de Descartes Pour découvrir, sans le secours du Calcul Differentiel, les Proprietés, ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres*, 1ère éd., 1740.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

L'abbé De Gua de de Malves ne donne qu'un résumé de la classification de Newton et de ses principes entre les pages 440 et 451 de son ouvrage, renvoyant le lecteur à l'*Enumeratio* pour en avoir le détail.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(68) :

Notes sur la mention bibliographique « Stirling »

Œuvre mentionnée : James Stirling, *Lineae tertii ordinis Neutonianae, sive, Illustratio tractatus D. Neutoni De enumeratione linearum tertii ordinis: cui subjungitur, solutio trium problematum*, 1ère éd., 1717.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

Stirling énumère les 76 espèces de courbes du troisième ordre entre les pages 93 et 120 de son ouvrage.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

Typesetting math: 100%

(69) :

Notes sur la mention bibliographique « Euler »

Œuvre mentionnée : Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 1ère éd., 1748.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

Voir tome 2, p. 116.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(70) :

Notes sur la mention bibliographique « Cramer »

Œuvre mentionnée : Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 1ère éd., 1750.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

Voir p. 359-369.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(71) :

Note sur la mention bibliographique « Cramer »

Œuvre mentionnée : Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 1ère éd., 1750.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(72) :

Note sur la mention bibliographique « Euler »

Œuvre mentionnée : Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 1ère éd., 1748.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(73) :

Note sur la mention bibliographique « dans le chap. jx. de son ouvrage »

Œuvre mentionnée : Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 1ère éd., 1750.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(74) Note ponctuelle sur « point multiple »

Ce passage sur les points multiples des courbes (§ 99-101), définis par D'Alembert dans toute leur généralité, ne se retrouve pas dans la *Cyclopædia* de Chambers, ni dans l'article Curve, ni ailleurs. Le sujet a néanmoins une certaine importance dans les ouvrages de De Gua et de Cramer (qui y consacre plus de cinquante pages), ce qui explique que D'Alembert ait choisi d'ajouter quelques paragraphes à ce sujet dans cet article Courbe. Remarquons qu'il y a plus loin dans l'Encyclopédie une entrée Point double, triple, quadruple, &c. ou en général point multiple (t. XII, 1765, p. 871b–872a), également signée D'Alembert, qui adopte une caractérisation différentielle des points multiples des courbes, équivalente à celle - essentiellement algébrique - qui est donnée ici dans le paragraphe 100.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(75) :

Note sur la mention bibliographique « l'abbé de Gua, p. 88 »

Œuvre mentionnée : Jean-Paul de Gua de Malves, *Usages de l'Analyse de Descartes Pour découvrir, sans le secours du Calcul Differentiel, les Proprietés, ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres*, 1ère éd., 1740.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(76) :

Typesetting math: 100%

Note sur la mention bibliographique « M. Cramer, page 409 »

Œuvre mentionnée : Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 1ère éd., 1750.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(77) Note ponctuelle sur « A l'égard … droite »

Ce paragraphe, traduit de l'article CURVE de Chambers (avec l'ajout en deux endroits de la locution « ou imaginaire » complétant l'expression « à une distance infinie »), a été déplacé par D'Alembert par rapport au contenu de l'article original. Dans la *Cyclopædia*, ce paragraphe venait conclure la section sur la description organique des courbes, que l'on trouve un peu plus bas dans l'article de D'Alembert (§ 104 et suiv.).

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(78) Note ponctuelle sur « On appelle … particuliere »

Cette définition des points singuliers d'une courbe peut sembler quelque peu imprécise, presque triviale. Elle diffère un peu de celle de Cramer qui, dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (p. 400), les définissait comme se « distingu[ant] des autres Points de la même Courbe par quelque chose de particulier », mais y incluait *a priori* les points multiples, alors que D'Alembert n'y admet que les points simples. L'article POINT *simple d'une courbe* (t. XII, 1765, p. 871b) présente une sous-entrée *Point singulier*, qui propose une définition plus précise : « point où l'ordonnée étant supposée touchante, peut avoir plus de deux valeurs ».

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(79) Note ponctuelle sur « Description … courbes »

Les paragraphes 104-106 sur la « description organique des courbes », qui est « l'art de décrire les courbes par le moyen d'instrumens, & en général par un mouvement continu » d'après l'article ORGANIQUE, (*Gramm.*) (t. XI, 1765, p. 629b), sont la traduction de l'article CURVE de la *Cyclopædia*, qui lui-même traduit le texte écrit par Newton dans l'*Enumeratio* (p. 158-159). D'alembert ajoute à cette section un court paragraphe pour donner les références de la *Geometria organica* de Maclaurin et du *Traité analytique des sections coniques* de L'Hôpital.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(80) : Note sur la mention bibliographique « l'ouvrage de M. Maclaurin, qui a pour titre, Geometria organica »

Œuvre mentionnée : Colin Maclaurin, *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis*, 1ère éd., 1720.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(81) : Note sur la mention bibliographique « le VIII. livre des sections coniques de M. de l'Hopital »

Œuvre mentionnée : Guillaume François Antoine marquis de L'Hôpital, *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des equations dans les problêmes tant determinez qu'indéterminez*, 1ère éd., 1707.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(82) Note ponctuelle sur « Génération … ombres »

Cette section sur la génération des courbes par les ombres (par projection, dirait-on aujourd'hui) est là encore la traduction de l'article de Chambers, qui reprend à nouveau le texte de l'*Enumeratio* de Newton (p. 157) à laquelle D'Alembert ne fait qu'ajouter les références des travaux de Nicole, Clairaut et de De Gua. Dans la *Cyclopædia*, cette section est suivie d'une autre intitulée « Description of Curves of the second order, having double points », également reprise et traduite de l'*Enumeratio* (p. 159-160), mais qui n'est pas

Typesetting math: 100%

reprise par D'Alembert dans cet article.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(83) :
Note sur la mention bibliographique « Nicole »

Œuvre mentionnée : François Nicole, « Manière d'engendrer dans un corps solide toutes les lignes du troisième ordre », *Histoire de l'Académie royale des sciences avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, tirés des registres de cette Académie. Partie Mémoires*, 1731 (1733) , p. 494-510 [consulter (https://books.google.fr/books?id=B_2HDygAfYMC&hl=fr&pg=PA494#v=onepage&f=false)]

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(84) :
Note sur la mention bibliographique « Clairaut »

Œuvre mentionnée : Alexis-Claude Clairaut, « Sur les courbes que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque, par un plan donné de position », *Histoire de l'Académie royale des sciences avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, tirés des registres de cette Académie. Partie Mémoires*, 1731 (1733) , p. 483-493 [consulter (https://books.google.fr/books?id=B_2HDygAfYMC&hl=fr&pg=PA483#v=onepage&f=false)]

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(85) :
Note sur la mention bibliographique « Newton »

Œuvre mentionnée : Isaac Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, 1ère éd., 1704.

par Collectif projet ENCCRE, le 23 mai 2020

(86) :
Note sur la mention bibliographique « l'ouvrage cité de M. l'abbé de Gua, page 198. & suiv. »

Œuvre mentionnée : Jean-Paul de Gua de Malves, *Usages de l'Analyse de Descartes Pour découvrir, sans le secours du Calcul Differentiel, les Proprietés, ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres*, 1ère éd., 1740.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

(87) Note ponctuelle sur « la solution ... problèmes »

La construction des équations, qui est la recherche des racines par construction de points d'intersection de courbes bien choisies, s'inscrit dans la tradition cartésienne de l'étude des courbes géométriques. D'Alembert traduit ici encore l'article de Chambers, qui lui-même traduisait une partie du texte de Newton (*Enumeratio*, p. 161).

Ce sujet de recherche mathématique connaîtra un fort déclin après 1750, comme l'explique (Bos, 1984).

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

(88) :
Note sur la mention bibliographique « l'ouvrage de M. Cramer, chap. jv »

Œuvre mentionnée : Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 1ère éd., 1750.

par Collectif projet ENCCRE, le 1er mars 2018

Typesetting math: 100%

Dossier critique

En rédigeant ce long article COURBE, D'Alembert va bien plus loin qu'une simple traduction de l'article CURVE de la *Cyclopædia* de Chambers. Il en augmente considérablement le contenu en y intégrant les récents progrès des géomètres d'Europe continentale sur la question de l'étude des courbes algébriques de tous ordres, en lecteur et connaisseur des œuvres de Jean-Paul De Gua de Malves, Leonhard Euler et Gabriel Cramer. En proposant une synthèse de ces récents travaux dans un article actualisé, il permet ainsi de situer l'état de l'art sur les courbes algébriques au milieu du XVIIIe siècle, entre ambitions classificatoires déclinantes et résistance des méthodes algébriques face à l'efficacité des méthodes différentielles.

Auteur et rédaction

Cet article peut être attribué à D'Alembert pour deux raisons. Tout d'abord, celui-ci signe l'entrée suivante, Courbe polygone (t. IV, 1754, p. 387a–389b), qui est la seconde d'une série de neuf entrées associées à l'adresse COURBE. Conformément à ce qui est indiqué dans le nota bene de l'*Avertissement* du premier volume, la signature n'est apposée qu'à la fin du second article.

> Lorsque plusieurs articles appartenant à la même matiere, & par conséquent faits ou revûs par la même personne, sont immédiatement consécutifs, on s'est contenté quelquefois de mettre la lettre distinctive à la fin du dernier de ces articles.

De plus∫, dans le cours du paragraphe 73, l'auteur écrit : « Dans l'extrait du livre de M. l'abbé de Gua, journal des Savans, Mai 1740, extrait dont je suis l'auteur, on a remarqué que l'énoncé de la méthode de cet habile géometre pour déterminer les centres, étoit un peu trop générale. » Or la correspondance de D'Alembert avec le savant genevois Gabriel Cramer montre que D'Alembert est bien l'auteur de cette recension publiée anonymement dans le Journal des Sçavans (Jean Le Rond D'Alembert, 1740) quelques semaines après la parution des *Usages de l'analyse de Descartes* de Jean-Paul De Gua de Malves : « Au surplus je dois vous dire que j'ay été en quelque façon complice de l'erreur de l'A. de Gua. Car c'est moy qui fis en 1740 l'extrait de son livre pour le journal des savans », écrit-il dans une lettre à Cramer datée de fin septembre 1750, numérotée 50.10a dans l'édition de la Correspondance générale 1741-1752 (Le Rond D'Alembert, 2015).

Datation

Enfin, une information utile pour la datation de l'écriture de cet article est fournie par la lettre 51.02 de D'Alembert à Cramer datée du 5 janvier 1751, qui conclut un échange entamé quelques mois auparavant faisant suite à la parution de l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de Cramer à l'été 1750. On peut y lire : « A l'egard de votre ouvrage sur les courbes je persiste toujours dans l'idée que j'en ay, et je viens d'ajouter à l'article courbe de l'Encyclopedie le jugement que j'en porte ». Cette dernière information permet de donner l'année 1750 comme borne supérieure de l'écriture de cet article COURBE, modifié en fin d'année suite à la lecture de l'ouvrage du Genevois.

Place de l'article dans l'ensemble d'entrées

L'article COURBE est la vedette d'adresse d'une série de dix entrées, dont seules les quatre premières concernent les mathématiques, plus précisément la géométrie :

1. COURBE [Ordre encycl. Entend. Raison, Science, Science de la Nat. Science des quantités abstr. Science de l'étendue, Géométrie, Géométrie des lignes courbes], écrit par D'Alembert ;
2. COURBE POLYGONE, signé par D'Alembert ;
3. COURBE DES ARCS, simple renvoi vers TROCHOIDE, *en Géométrie* (t. XVI, 1765, p. 683a–b) signé D'Alembert ;
4. COURBE DES SINUS, simple renvoi vers SINUS *ou* SINUS DROIT, *en Trigonometrie* (t. XV, 1765, p. 219b–220b) signé D'Alembert ;
5. COURBES [Marine], signé Bellin ;
6. COURBE [Charpenterie et Menuiserie] ;
7. COURBE D'ESCALIER [Charpenterie], ces deux dernières entrées n'étant pas signées ;
8. COURBE [Maréchallerie], signé Eidous ;

Typesetting math: 100%

9. COURBE [écriture] ;
10. COURBE [terme de rivière], ces deux dernières entrées n'étant pas signées.

Plan de l'article

Le simple repérage des sous-titres de cet article particulièrement long (il occupe vingt colonnes) ne permet pas de se former une idée complète des contenus qui y sont abordés. Voici une proposition de plan découpé selon les numéros de paragraphes (en souligné, les intitulés des sous-titres donnés par D'Alembert) :

- § 1-22, **nature et équation d'une courbe** : définitions de base (abscisse, ordonnée, origine et axes de coordonnées), courbes algébriques (ou géométriques), courbes transcendantes (ou mécaniques) ;
- § 23-44, **tracé d'une courbe** : transformation des axes, branches, intersection avec l'axe des abscisses, courbes et équations irréductibles, cours d'une courbe ;
- § 45-47, **historique sur les courbes** : courbes des anciens, apports récents du calcul différentiel (courbes tanscendantes) et de l'algèbre (courbes algébriques) ;
- § 48-60, **ordre et genre d'une courbe** : effet de la transformation des axes sur le degré de l'équation, lignes du premier ordre (droites), lignes du second ordre ou courbes du premier genre (coniques), équation générale d'une courbe, nombre de points d'intersection de deux courbes, nombre de points définissant une courbe ;
- § 61-74, **propriétés et éléments caractéristiques d'une courbe** : généralisation des propriétés des coniques, branche, asymptote, diamètre, centre ;
- § 75-98, **division des courbes en differens ordres** (classification) : cas des coniques, réduction des courbes du second genre (réduction à quatre cas des équations des lignes du troisième ordre), énumération des courbes du second genre (par Newton, Stirling et De Gua), lignes d'ordres supérieurs ;
- § 99-103, **points singuliers & multiples des courbes** ;
- § 104-107, **description organique des courbes** ;
- § 108-109, **génération des courbes du second genre par les ombres** (par projection) ;
- § 110-111, **usage des courbes pour la construction des équations**.

Sources et références bibliographiques

D'Alembert traduit mais enrichit considérablement l'article CURVE de la *Cyclopædia* de Chambers (1741) : soixante-huit paragraphes (en vert sur la figure ci-dessous) sur les cent onze que compte l'article de l'Encyclopédie sont des ajouts de D'Alembert à la traduction du texte anglais, ce qui multiplie la longueur de l'article par à peu près quatre. Quatre paragraphes (signalés en jaune sur la figure) sont des reprises de l'article de Chambers incluant des modifications ou des précisions, et donc seuls trente-neuf paragraphes (restés en blanc) sont le résultat de la stricte traduction de l'article anglais.

Typesetting math: 100%

1	24	47	70	93
2	25	48	71	94
3	26	49	72	95
4	27	50	73	96
5	28	51	74	97
6	29	52	75	98
7	30	53	76	99
8	31	54	77	100
9	32	55	78	101
10	33	56	79	102
11	34	57	80	103
12	35	58	81	104
13	36	59	82	105
14	37	60	83	106
15	38	61	84	107
16	39	62	85	108
17	40	63	86	109
18	41	64	87	110
19	42	65	88	111
20	43	66	89	
21	44	67	90	
22	45	68	91	
23	46	69	92	

Ajouts (en vert) et modifications (en jaune) apportés par D'Alembert au texte de l'article CURVE de Chambers

Ajoutons que deux paragraphes de l'article CURVE de Chambers n'ont pas été conservés par D'Alembert : le premier traitait des hyperboles de différents ordres et de leurs asymptotes, le second de la description des courbes du second ordre ayant des points doubles. Remarquons enfin que la toute fin de l'article de Chambers est reprise dans l'entrée COURBE POLYGONE (t. IV, 1754, p. 387a–389b).

La géométrie des courbes est un domaine de recherche qui n'est pas du tout étranger à l'auteur, qui y a consacré quelques-uns de ses travaux et a été un lecteur attentif des différents auteurs qui y ont contribué au cours des années qui ont précédé. Les sources principales auxquelles il a puisé la matière de l'article transparaissent au travers des différentes références bibliographiques qui émaillent le texte. Si certaines de ces références (essentiellement Newton) étaient déjà présentes dans l'article de Chambers, on peut voir que les ajouts de D'Alembert se basent sur la lecture des ouvrages de l'abbé de Gua, Euler et Cramer, tous parus durant la décennie 1740-1750.

Les *Usages de l'analyse de Descartes* de l'abbé De Gua

Au premier rang des sources mobilisées par D'Alembert pour enrichir la traduction de l'article de Chambers se trouve l'ouvrage de Jean-Paul De Gua de Malves intitulé *Usages de l'analyse de Descartes* (de son titre complet : *Usages de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du Calcul Differentiel, les Proprietés, ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres*), que celui qui devait être le premier et éphémère directeur de l'entreprise encyclopédique avait fait paraître en 1740. L'ouvrage de l'abbé De Gua est cité pas moins de dix fois dans le corps de l'article, souvent à l'appui des énoncés des généralités les plus importantes : diamètres et centre d'une courbe, transformation des axes, division des lignes du troisième ordre, points multiples. Comme on l'a vu, D'Alembert est l'auteur anonyme de la recension de cet ouvrage parue dans les colonnes du Journal des Savants en mai 1740 (Jean Le Rond D'Alembert, 1740), dans laquelle il lui trouvait toutes les qualités : « Les bons Livres sont aussi rares en matiere de Science qu'en tout autre genre, mais les Ouvrages véritablement nouveaux le sont encore davantage. Dans la Géométrie en particulier, il seroit facile de compter combien il a paru depuis Descartes de ces Livres originaux qu'on peut regarder comme la source & le modèle de tous les autres. [...] Tel est, le caractère de l'excellent Livre dont nous allons rendre compte », écrit-il alors.

On peut considérer que la lecture de cet ouvrage a profondément marqué le jeune D'Alembert, mais dans la préparation, en 1746, de sa nouvelle démonstration du théorème fondamental de l'algèbre pour son mémoire sur le calcul intégral (Jean Le Rond D'Alembert, 1748) il prend conscience d'une erreur de De Gua : pour étudier les points singuliers des courbes, on ne peut pas se contenter d'un seul terme du développement de l'ordonnée en puissances de l'abscisse. « Au reste il est tres important d'obersver à

Typesetting math: 100%

l'occasion de cette démonstration, que quand z est infiniment petite, il n'est pas toujours permis de supposer que y = à une seule puissance de z, pour déterminer la figure de la courbe a son orgine » écrit-il (p. 186). Il peut donner alors un exemple de courbe algébrique ayant un point de rebroussement de seconde espèce (voir l'article REBROUSSEMENT, (Géometrie.) (t. XIII, 1765, p. 842a–b)) ce qui avait été annoncé impossible par De Gua (*Usages de l'analyse de Descartes*, p. 82). D'Alembert aborde cet épisode dans une lettre à Cramer de fin septembre 1750 (numérotée 50.10a dans Le Rond D'Alembert, 2015, p. 273-274). Ceci l'a conduit à nuancer les remarques élogieuses du Journal des Savants et introduire dans l'article COURBE POLYGONE (t. IV, 1754, p. 387a–389b) de l'*Encyclopédie* - entrée qui suit immédiatement l'article COURBE - cet avertissement au lecteur pour l'alerter sur certaines erreurs commises par l'abbé, notamment dans son usage des séries infinies pour l'étude des branches et des points singuliers : « ouvrage original & plein d'excellentes choses, mais qu'il faut lire avec précaution (Voyez Branche & Rebroussement.) ».

L'*Introductio* d'Euler et l'*Introduction* de Cramer

D'Alembert a également attentivement lu deux ouvrages parus à la fin des années 1740 portant sur le sujet des courbes algébriques : le second volume de l'*Introductio in analysin infinitorum* de Leonhard Euler, paru à Lausanne en 1748, et l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de Gabriel Cramer, paru à Genève en 1750. La correspondance de D'Alembert nous donne des informations importantes sur sa lecture de ces deux ouvrages : si les échanges avec Euler mettent plutôt en lumière les tensions bien connues entre les deux hommes - en ce qui concerne les courbes, D'Alembert revendique sur son correspondant la priorité de la découverte des points de rebroussements de la seconde espèce -, les lettres envoyées à Gabriel Cramer suite à la publication de son traité des courbes donnent à voir un échange de points de vue et des questionnements réciproques intéressants et fructueux, notamment sur des questions d'algèbre, l'usage des séries, la nature des points singuliers et la courbure des courbes. Cette partie de leur correspondance se conclut, dans la lettre du 5 janvier 1751 adressée par D'Alembert à Cramer, sur un bel accord de vues entre les deux hommes, et la déclaration de D'Alembert sur l'insertion dans l'article COURBE de références à l'Introduction de Cramer citée plus haut.

En effet, l'ouvrage du Genevois est cité à neuf reprises et apparaît à chaque fois comme le texte de référence auquel D'Alembert renvoie le lecteur à propos des grandes questions abordées dans l'article : transformation des axes, nombre de points d'intersection de deux courbes et nombre de points nécessaires à la définition d'une courbe, détermination des branches infinies par l'usage des séries et la règle du parallélogramme de Newton, classification des courbes algébriques d'ordre 3 et 4, points multiples et construction des équations. S'il n'y a a priori pas de raison de penser que ces questions n'étaient pas traitées lors de la rédaction des premières versions de l'article, l'apport de l'ouvrage de Cramer est manifeste, et on peut supposer que plusieurs paragraphes ont été remaniés voire ajoutés à l'article à la fin de l'année 1750, comme D'Alembert l'a affirmé à Cramer dans sa lettre du 5 janvier 1751.

Ainsi l'un des enrichissements les plus importants que D'Alembert a apportés à l'article de Chambers se trouve dans les paragraphes 22 à 50, dans lesquels sont traités les questions relatives à la nature (géométrique, mécanique, exponentielle, interscendante, finie, infinie, mixte, composée) et au cours (branches, tracé point par point) des courbes. Ce passage peut être considéré comme un résumé commenté et enrichi du premier chapitre du traité des courbes de Cramer, intitulé *De la Nature des Lignes Courbes en général & de leurs Equations*, et une référence explicite au second chapitre intitulé *Des transformations que subit l'Equation d'une Courbe, quand on la raporte à d'autres coordonnées* (question également traitée chez De Gua). On y trouve par ailleurs les échos de quelques points abordés dans la correspondance entre les deux hommes, notamment sur les racines imaginaires des équations et l'effet des transformations des axes sur le degré de l'équation de la courbe, et donc sur son ordre. Le paragraphe 38 revêt néanmoins une importance toute particulière, car il marque une différence avec la conception d'une courbe algébrique proposée par le Genevois. D'Alembert y définit clairement une courbe algébrique par une équation irréductible ; si une équation algébrique se factorise, elle correspond donc, pour lui, à plusieurs courbes différentes. En revanche, une courbe peut être composée de plusieurs branches (comme l'hyperbole). Le renvoi à l'article CONJUGUÉES, (*Hyperboles*) (t. III, 1753, p. 884b) permet à D'Alembert de préciser sa conception au lecteur de l'article COURBE. Il est intéressant de remarquer que cette conception correspond précisément à la définition d'Euler d'une courbe « continue » (*Introductio in analysin infinitorum*, t. 2, chap. III, p. 29-31) en opposition à des courbes « complexes » produites par des équations factorisables, cas de figure que D'Alembert illustre ici par l'exemple d'un système de deux droites. On retrouve des considérations sur les courbes représentées par des équations factorisables en plusieurs équations rationnelles dans l'ouvrage de Cramer (*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, chap. I, p.

Typesetting math: 100%

28-30), mais elles indiquent une conception qui diffère nettement de celle d'Euler et D'Alembert : « Donc, puisque chaque racine d'une équation indéterminée exprime une branche de la Ligne que cette équation représente [§11], le produit de plusieurs équations désigne la Courbe qui a toutes les branches des Lignes particulières dont les équations ont concouru à former ce produit. Elle représente donc le système de toutes ces Lignes » écrit-il (p. 28). Sur ce thème, voir aussi D'Alembert, 2007, p. 338, note 47.

De même, les résultats exposés dans les paragraphes 57 à 60 sur le nombre de points nécessaires pour correctement définir une courbe algébrique, et sur le nombre de points d'intersection de deux courbes, sont des références claires à l'ouvrage de Cramer, qui les développe dans son troisième chapitre intitulé *Des différents Ordres des Lignes algébriques*. Dans le paragraphe 74, D'Alembert signale que l'étude des branches infinies s'opère au moyen de la méthode des séries et de la règle du parallélogramme dit de Newton, mais choisit de ne pas développer ce sujet - traité un peu légèrement par De Gua, rigoureusement et en détail par Cramer, dont l'ouvrage est ici cité comme référence unique - et renvoie le lecteur aux articles PARALLÉLOGRAMME, *en Géométrie* (t. XI, 1765, p. 911a–912b) et SERIE *ou* SUITE, *en Algebre* (t. XV, 1765, p. 93b–96a). Enfin, les paragraphes 99 à 103 sur les points multiples et singuliers des courbes, également ajoutés par D'Alembert à la traduction de l'article original de Chambers, peuvent être vus comme un apport de la lecture du traité de Cramer et des échanges qui ont suivi dans leur correspondance.

La consécration encyclopédique de l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* intervient finalement dans l'article COURBE POLYGONE (t. IV, 1754, p. 387a–389b) dans lequel D'Alembert liste « les meilleurs ouvrages dans lesquels on puisse s'instruire de la théorie des courbes » : entre les livres de De Gua et d'Euler, on y trouve « l'introduction à l'analyse des lignes courbes, par M. Cramer ; ouvrage très-complet, très-clair & très-instructif, & dans lequel on trouve d'ailleurs plusieurs méthodes nouvelles ».

Les travaux des académiciens de Paris

Pour être complet, il faut souligner les quelques références ajoutées par D'Alembert aux travaux des académiciens parisiens, notamment ceux publiés dans les Mémoires de l'académie des sciences de Paris à la fin des années 1720 et au début des années 1730, qui sont déjà pour la plupart évoqués, discutés ou repris par De Gua et Cramer. Si les travaux de François Nicole sur la classification des lignes du troisième ordre ne sont pas cités, ceux de l'abbé de Bragelongne sur les lignes du quatrième ordre sont évoqués à travers l'évocation de la notion de contre-diamètre d'une courbe dans le paragraphe 72, qui ne connaîtra pas de réelle postérité au-delà de sa reprise par Cramer en 1750 (*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, p. 141-147). Dans la partie sur l'obtention des courbes du troisième ordre par projection (« génération par les ombres »), qui n'est pas spécialement développée dans l'article, le lecteur est renvoyé à deux mémoires signés Nicole et Clairaut et publiés en 1733. Enfin, on trouve deux mentions au *Traité analytique des sections coniques* du marquis de l'Hôpital, paru en 1707 : la première, dans un passage sur les coniques (paragraphe 75) et la seconde, pour conclure la section sur la description organisue des courbes (paragraphe 107).

Correspondances internes

Cet article contient pas moins d'une soixantaine de renvois vers d'autres entrées de l'*Encyclopédie*, certains répétés à plusieurs reprises comme EQUATION, *en Algebre* Géométrie Méchanique (t. V, 1755, p. 842a–855a) (5 fois), CONIQUE, (*Géom.*) (t. III, 1753, p. 875a) et SECTIONS CONIQUES (t. XIV, 1765, p. 881a) (5 fois à elles deux), CONSTRUCTION, (*Géométrie.*) (t. IV, 1754, p. 92b–94a) et PARABOLE, en Géométrie (t. XI, 1765, p. 883a–884b) (3 fois chacune).

La moitié de ces renvois, soit une trentaine, concerne simplement le lexique des courbes algébriques. Cela permet à D'Alembert de développer dans d'autres articles des termes rapidement introduits dans l'article COURBE, notamment sur des notions sur lesquelles il souhaite apporter un éclairage particulier ; c'est le cas, par exemple, dans le paragraphe 38 avec le renvoi vers CONJUGUÉES, (*Hyperboles*) (t. III, 1753, p. 884b) , comme cela a été dit plus haut à propos des courbes définies par des équations irréductibles, ou dans le paragraphe 103 qui contient des renvois vers REBROUSSEMENT, (*Géometrie.*) (t. XIII, 1765, p. 842a–b) et SERPENTEMENT, (Géom.) (t. XV, 1765, p. 112a–b) , articles dans lesquels il exprime un point de vue sur les points singuliers des courbes qui prolonge ses échanges épistolaires avec Leonhard Euler et Gabriel Cramer de 1748-1750 (Le Rond D'Alembert, 2015, p. lxxxix-xcii).

Plusieurs de ces renvois permettent de diriger le lecteur vers des articles décrivant des courbes particulières ; il en est ainsi ainsi des entrées CISSOIDE, (*Géom.*) (t. III, 1753, p. 480b–481a) , CONCHOIDE, (*Géom.*) (t. III, 1753, p. 805a), SPIRALE, (*Géom.*) (t. XV, 1765, p. 474a–b) , TRIDENT,

Typesetting math: 100%

(*Géom.*) (t. XVI, 1765, p. 637b) par exemple. Enfin, quelques-uns de ces renvois concernent des articles concernant des méthodes algébriques dont les développements ne peuvent pas prendre place dans le corps de l'article COURBE, comme TRANSFORMATION, *en Géométrie* (t. XVI, 1765, p. 546b) , SERIE *ou* SUITE, *en Algebre* (t. XV, 1765, p. 93b–96a) et PARALLÉLOGRAMME, *en Géométrie* (t. XI, 1765, p. 911a–912b) .

Enjeux de l'article

Calcul algébrique versus calcul infinitésimal pour l'étude des courbes algébriques

L'article COURBE est l'un des dix-neuf articles de l'Encyclopédie écrits par D'Alembert à être introduit par un désignant chaîné, parmi les cinquante-six articles munis d'un tel désignant. Celui-ci (Ordre encycl. Entend. Raison, Science, Science de la Nat. Science des quantités abstr. Science de l'étendue, Géométrie, Géométrie des lignes courbes) ne correspond pas tout à fait à la présentation adoptée dans le Système figuré des connaissances, où la *théorie des courbes* - et non la *Géométrie des lignes courbes*, désignant choisi par D'Alembert pour cet article - est rangée sous le titre Entendement / Raison / Philosophie / Science de la nature / Mathématiques pures / Géométrie / Géométrie transcendante.

Nous constatons ici quelques variations dans l'emploi par D'Alembert de l'adjectif *transcendante* appliqué à la géométrie. Dans l'article GÉOMÉTRIE, (*Ordre encycl. Entend. Rais. Philosoph. ou Science, Science de la Nat. Mathémath. Mathémath. pures, Géométrie.*) (t. VII, 1757, p. 629a–638a), D'Alembert définit la *géométrie transcendante* comme étant « proprement celle qui a pour objet toutes les courbes différentes du cercle, comme les sections coniques & les courbes d'un genre plus élevé », en opposition à la géométrie élémentaire qui, elle, « ne considere que les propriétés des lignes droites, des lignes circulaires ». Il ajoute quelques lignes plus loin que « Cette Géométrie s'occupe aussi de la solution des problèmes du troisieme & du quatrieme degré & des degrés supérieurs » - ce qui justifie pleinement la position de la théorie des courbes dans le *Système figuré*, mais questionne le choix du désignant utilisé pour cet article COURBE, dont c'est le principal objet : pourquoi ne pas avoir choisi *Géométrie transcendante* ?

Un peu plus loin dans ce même article GÉOMÉTRIE, D'Alembert précise :

> « La partie de la Géométrie transcendante qui applique le calcul différentiel & intégral à la recherche des propriétés des courbes, est celle qu'on appelle plus proprement Géométrie transcendante, & qu'on pourroit nommer avec quelques auteurs modernes, Géométrie sublime, pour la distinguer non-seulement de la Géométrie élémentaire, mais de la Géométrie des courbes qui n'employe pas les calculs différentiel & intégral, & qui se borne ou à la synthèse des anciens, ou à la simple application de l'analyse ordinaire. Par-là on auroit trois divisions de la Géométrie ; Géométrie élémentaire ou des lignes droites & du cercle ; Géométrie transcendante ou des courbes ; & Géométrie sublime ou des nouveaux calculs. »

Ainsi dans cette division des géométries, la géométrie sublime, qui mobilise le nouveau calcul différentiel et intégral, apparaît comme une partie de la géométrie transcendante, mais est finalement « celle qu'on appelle plus proprement Géométrie transcendante ». En choisissant le désignant *Géométrie des lignes courbes* pour l'article COURBE, D'Alembert entérine ce glissement sémantique et réserve l'adjectif *transcendante* à la géométrie des courbes mécaniques, dont l'étude nécessite l'usage du calcul différentiel, par une métonymie qui vient le substituer à l'adjectif *sublime*, comme il le confirme au cœur du paragraphe 47 : « C'est principalement la Géométrie des courbes méchaniques, qu'on appelle Géométrie transcendante, parce qu'elle employe nécessairement le calcul infinitésimal [...] ».

Nous sommes donc bien ici dans le domaine de la *Géométrie des lignes courbes*, entendue comme intermédiaire entre la géométrie élémentaire (qui ne s'occupe que des lignes droites et circulaires) et la géométrie transcendante (ou sublime) qui a pour objet les courbes mécaniques et utilise le nouveau calcul. Cette géométrie des lignes courbes s'étudie avec les outils du calcul algébrique, sans recours nécessaire au calcul différentiel et intégral, comme le rappelle D'Alembert dans ce paragraphe 47 :

Typesetting math: 100%

> « Revenons aux courbes algébriques ou géométriques, qui sont celles dont il sera principalement mention dans cet article, parce que le caractere de leurs équations qui consiste à être exprimées en termes finis, nous met à portée d'établir sur ces courbes des propositions générales, qui n'ont pas lieu dans les courbes méchaniques. C'est principalement la Géométrie des courbes méchaniques, qu'on appelle Géométrie transcendante, parce qu'elle employe nécessairement le calcul infinitésimal ; au lieu que la Géométrie des courbes algébriques n'employe point, du moins nécessairement, ce calcul pour la découverte des propriétés de ces courbes, si on en excepte leurs rectifications & leurs quadratures ; car on peut déterminer, par exemple, leurs tangentes, leurs asymptotes, leurs branches, &c. & toutes les autres propriétés de cette espece par le secours du seul calcul algébrique ordinaire ».

Cette dernière phrase fait clairement écho aux ouvrages de l'abbé De Gua de Malves d'une part, dont le titre complet (*Usages de l'analyse de Descartes Pour découvrir, sans le secours du Calcul Differentiel, les Proprietés, ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres*) est particulièrement explicite à ce propos, et de Gabriel Cramer d'autre part, qui ne met en œuvre que des méthodes algébriques pour son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*. Le premier écrit, en préface de son ouvrage : « Si d'ailleurs les Lignes Géométriques sont nommées Géométriques, si on les distingue en des Ordres differens, c'est en tant qu'elles sont défines par des Equations. Il paroît donc suivre de-là que c'est l'Analyse de Descartes, & non celle des Infiniment Petits qui devroit fournir les moyens principaux, & les plus naturels de découvrir les proprietés de ces Lignes » (p. viii-ix). Le second indique dans le premier chapitre de son traité, que « c'est surtout pour les Courbes transcendantes [ou méchaniques] qu'on a besoin du Calcul des infiniment petits, qui fournit des équations propres à exprimer la nature de ces Courbes » (p. 7). D'Alembert était déjà de cet avis dix ans auparavant, au moment de l'écriture de sa recension des *Usages* de l'abbé De Gua :

> « M. l'Abbé de Gua se propose de montrer dans cet Ouvrage, que l'Analyse de Descartes peut être employée avec plus de succès que le Calcul differentiel à la plupart des recherches que l'on peut faire sur les courbes géométriques : il reserve ce Calcul pour la solution des Problêmes de Calcul integral, & de ceux qui concernent les courbes méchaniques. Ce sont en effet les seuls pour lesquels il paroît impossible de s'en passer, & ce sont même les seuls que M. Newton ait résolus par cette voye ». (Jean Le Rond D'Alembert, 1740, p. 855-856)

C'est dans cette tradition analytique, héritée des travaux de Newton et de ses commentateurs sur les courbes algébriques, que s'inscrivent dans l'espace francophone les travaux des académiciens des sciences de Paris Nicole et Bragelongne (fugitivement mentionnés), ainsi que les ouvrages de Jean-Paul De Gua de Malves et du Genevois Gabriel Cramer (cités une dizaine de fois chacun dans cet article), dans lesquels D'Alembert puise la matière des contributions qu'il apporte à cet article, au-delà de la traduction de l'article Curve de la Cyclopædia (voir paragraphe suivant). La généralisation de l'usage du calcul différentiel pour l'étude des courbes algébriques, que l'on constate aujourd'hui dans l'enseignement mathématique au lycée par exemple, ne viendra que dans la première partie du XIX siècle, notamment sous l'influence des traités de calcul différentiel et intégral de Sylvestre François Lacroix.

Actualisation et explicitation des méthodes

Certains des enrichissements apportés par D'Alembert à la traduction de l'article CURVE de Chambers contribuent à rendre compte et expliciter les méthodes mises en œuvre par les géomètres pour l'étude des courbes algébriques au moment de la rédaction de l'article. Principale référence de l'article de Chambers, l'énumération des lignes du troisième ordre produite par Newton, achevée en 1695 mais seulement publiée en 1704 en annexe de son *Opticks*, souffre d'un défaut majeur pour ceux qui souhaitent se pencher sur cette question ardue : le texte, remarquablement court et efficace - une trentaine de pages, dont six planches de figures - délivre au lecteur une classification des soixante-douze courbes du troisième ordre identifiées par Newton, mais sans aucun calcul ou indication sur la méthode suivie.

Plusieurs auteurs se sont alors consacrés à l'explicitation des méthodes newtoniennes pour l'étude des courbes, mettant en évidence le rôle prépondérant des approches algébriques. Les premiers d'entre eux furent James Stirling en 1717 avec son *Lineae tertii ordinis Neutonianae*, puis Colin Maclaurin en 1720 avec sa *Geometria organica*, tous deux se basant très probablement sur les lettres et manuscrits de Newton qui circulaient alors parmi les géomètres britanniques. Vers 1730, plusieurs géomètres français se saisirent de la question à leur tour, produisant des tentatives hélas inachevées pour faire toute la lumière sur la

Typesetting math: 100%

classification des lignes du troisième ordre (François Nicole, 1731) voire du quatrième ordre (Christophe Bernard de Bragelongne, 1732), entreprise très (trop) ambitieuse qui restera sans suite pendant quelques années. En 1740, l'abbé Jean-Paul De Gua de Malves dans ses *Usages de l'analyse de Descartes* met en œuvre le triangle algébrique, variante du parallélogramme analytique de Newton, afin de déterminer les caractéristiques (points multiples ou singuliers, tangentes...) et la direction des branches infinies des courbes, avant de donner les principes d'une classification des courbes d'ordres 2 et 3 qui rejoint celles de Newton. Cette démarche sera reprise et approfondie par le Genevois Gabriel Cramer dans les années 1740 pendant la rédaction de son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* qui paraît en 1750 et, d'une certaine manière, vient clore ce mouvement initié par Newton près d'un demi-siècle plus tôt en explicitant de manière exhaustive et détaillée les méthodes algébriques pour l'étude des courbes. Avec l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler, publié deux ans plus tôt et dont le second volume traite également du sujet des courbes algébriques, le traité des courbes de Cramer constitue, au moment où D'Alembert rédige ou reprend l'article COURBE, la référence incontournable sur le sujet.

C'est pour rendre compte de ces progrès récents réalisés en Europe continentale dans la dernière décennie, que D'Alembert ajoute à l'article original de la *Cyclopædia* de Chambers les références bibliographiques que nous avons identifiées et rappelées ci-dessus, et qu'il introduit lui-même des renvois vers des entrées correspondant à des méthodes algébriques - PARALLÉLOGRAMME, *en Géométrie* (t. XI, 1765, p. 911a–912b), SERIE *ou* SUITE, *en Algebre* (t. XV, 1765, p. 93b–96a) - voire directement des calculs dans certains paragraphes de son article (par exemple, les paragraphes 75 et 77- 82), par ailleurs totalement absents de l'article de Chambers.

Ambitions classificatoires

L'ambition affichée par les différents géomètres qui se sont attaqués à la question des courbes algébriques dans la première moitié du XVIIIe siècle était de mettre de l'ordre dans l'immense variété des courbes algébriques, en suivant l'exemple de l'énumération proposée par Newton pour les courbes d'ordre 3. À l'instar d'un naturaliste qui classifie des êtres vivants qu'il rencontre, le géomètre se propose de nommer, ordonner et représenter les courbes algébriques des premiers ordres en étudiant leurs caractéristiques (branches infinies, asymptotes, points singuliers) à partir de leur équation. C'est ainsi, par exemple, que Gabriel Cramer écrit dans la préface de son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (p. viii) : « Ajoutez que l'algèbre seule fournit le moyen de distribuer les Courbes en Ordres, Classes, Genres et Espèces : ce qui, comme dans un Arsenal où les armes sont bien rangées, met en état de choisir, sans hésiter, celles qui peuvent servir dans la Résolution d'un Problème proposé ». Au mitan du XVIIIe siècle cette ambition classificatoire reste en effet au service d'un but affiché qui s'inscrit pleinement dans le programme cartésien fixé plus d'un siècle auparavant : la construction des égalités (CONSTRUCTION, (*Géométrie.*) (t. IV, 1754, p. 92b–94a)). Les deux derniers paragraphes de l'article COURBE montre que cet objectif est toujours d'actualité au moment de sa rédaction : « L'usage principal des courbes dans la Géométrie, est de donner par leurs points d'intersection la solution des problèmes », écrit-il. Ce domaine de recherche connaîtra néanmoins une profonde désaffection dans la seconde moitiè du siècle (voir Bos, 1984).

Revenons aux objectifs de classification : si la tâche apparaît accessible pour l'ordre 3, elle devient impossible en pratique dès l'ordre 4, sans même parler des ordres supérieurs. La tentative de Bragelongne n'a pas dépassé l'énumération des types de points multiples qui peuvent apparaître dans les courbes d'ordre 4, et est restée très éloignée d'en proposer une classification opératoire. Cramer envisage une division selon neuf classes pour les courbes du quatrième ordre, et onze classes pour celles du cinquième ordre, mais il ne fait qu'en poser les principes sans entrer dans un trop grand détail ; l'énumération complète semble inatteignable, comme le reconnaît le Genevois : « Il paroit que ce seroit une chose infinie, que l'énumération de tous les Genres des Courbes du quatrième Ordre poussée au même détail où nous sommes entrés pour les Courbes du troisième Ordre » (*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, p. 395). De plus, ces classifications comportent une part d'arbitraire, comme le fait remarquer D'Alembert dans les paragraphes 95 et 96 : il déplore ainsi, en s'appuyant sur les différences constatées entre les classifications proposées par Cramer et Euler dans leurs ouvrages respectifs : « Il semble qu'en Géometrie comme en Physique, la division en genres & en especes ait toûjours nécessairement quelque chose d'arbitraire ; c'est que dans l'une & dans l'autre il n'y a réellement que des individus, & que les genres n'existent que par abstraction de l'esprit ». L'article COURBE marque ainsi la fin des ambitions classificatoires des géomètres de la première moitié du siècle.

Métamorphoses de l'article

Typesetting math: 100%

On trouve dans les rééditions de Lucques (*Encyclopédie, édition de Lucques*, t. IV, 1759, p. 314-321) et de Livourne (*Encyclopédie, édition de Livourne*, t. IV, 1772, p. 345-354), dans l'*Encyclopédie d'Yverdon* (t. XII, 1772, p. 107-124) comme dans l'*Encyclopédie méthodique. Mathématiques* (t. 1, 1784, p. 449-462), des reprises verbatim de l'article COURBE de D'Alembert.

Il est néanmoins intéressant de signaler ici que dans l'édition d'Yverdon l'entrée COURBE POLYGONE, qui, rappelons-le, suit immédiatement l'article COURBE et en constitue le prolongement naturel, est augmentée de deux pages entières (p. 125-127) sur l'usage du *triangle analytique*, simple adaptation de la méthode du parallélogramme analytique de Newton - rapidement exposée dans l'article PARALLÉLOGRAMME, *en Géométrie* (t. XI, 1765, p. 911a–912b) par D'Alembert - qui fut proposée par De Gua dans ses *Usages de l'analyse de Descartes* et très largement exploitée par Cramer dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*. Voir le dossier critique de l'article COURBE POLYGONE (t. IV, 1754, p. 387a–389b).

Bibliographie

Jean Le Rond D'Alembert, Irène Passeron (éd.), *Correspondance générale 1741-1752 [Œuvres complètes, Série V, volume 2]*, CNRS Éditions, Paris, 2015, notamment l'Introduction générale, p. lxxxix-xcii.

Thierry Joffredo, Approches biographiques de l'Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques de Gabriel Cramer, Université de Lorraine, Nancy, 2017 [consulter (https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01852029)] p. 284-309.

Carl B. Boyer, *History of analytic geometry*, Dover, New York, 2004, p.138-196, pour un aperçu de l'histoire des courbes dans la première moitié du XVIIIe siècle, de Newton à Cramer.

Hendrik Bos, « Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory; the "Construction of Equations", 1637 - ca. 1750 », *Archive for History of Exact Sciences*, 30/ (1984), p. 331-380 [consulter (https://link.springer.com/article/10.1007/BF00328124)] pour la question de la construction des équations.

par Thierry Joffredo, le 20 août 2020

Typesetting math: 100%