



HAL
open science

**GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE ET CRÉATION
ARTISTIQUE SONORE ET VISUELLE 3ICAR
/ICAREDITIONS - INTERNATIONAL INSTITUTE
FOR INNOVATION, ARTISTIC CREATION AND
RESEARCH**

Stéphane de Gérando, Athanase Papadopoulos

► **To cite this version:**

Stéphane de Gérando, Athanase Papadopoulos. GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE ET CRÉATION ARTISTIQUE SONORE ET VISUELLE 3ICAR /ICAREDITIONS - INTERNATIONAL INSTITUTE FOR INNOVATION, ARTISTIC CREATION AND RESEARCH. 2015. hal-02929406

HAL Id: hal-02929406

<https://hal.science/hal-02929406>

Submitted on 3 Sep 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE ET CRÉATION ARTISTIQUE SONORE ET
VISUELLE**
**3ICAR /ICAREDITIONS - INTERNATIONAL INSTITUTE FOR INNOVATION,
ARTISTIC CREATION AND RESEARCH**

ATHANASE PAPADOPOULOS, STÉPHANE DE GÉRANDO

RÉSUMÉ. Nous envisageons des liens entre la géométrie euclidienne et la création sonore et visuelle. Après un bref rappel des notions fondamentales liées à cette géométrie, nous introduisons un commentaire critique avant de problématiser une utilisation des transformations euclidiennes dans le cadre de la création contemporaine.

MOTS CLÉS. Géométrie euclidienne, transformations euclidiennes, composition, création contemporaine, rapport son-image, objets, analogies sciences /arts.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|----|
| 1. Introduction générale : Euclide et sa géométrie | 2 |
| 1.1. Les postulats d'Euclide | 2 |
| 1.2. Notions fondamentales | 2 |
| 2. Transformations euclidiennes et règles algébriques | 5 |
| 2.1. Translation | 5 |
| 2.2. Symétrie centrale | 5 |
| 2.3. Symétrie axiale | 6 |
| 2.4. Symétrie par rapport à un plan | 6 |
| 2.5. Rotations | 6 |
| 2.6. Homothéties | 6 |
| 3. Problématique de l'analogie entre géométrie et musique | 7 |
| 3.1. Remarques critiques de Jean-Etienne Marie | 7 |
| 3.2. Multiplicité d'interprétation : de la physique à l'esthétique | 8 |
| 3.3. Perception | 9 |
| 3.4. Notation et réalisation | 9 |
| 4. Expérimentation | 9 |
| 4.1. Mapping 1 - mouvement horizontal des objets | 10 |
| 4.2. Mapping 2 - rotations des objets | 10 |
| 4.3. Mapping 3 - taille des objets | 10 |
| 4.4. Mapping 4 - rapport entre forme et timbre | 11 |
| 4.5. Bilan | 11 |
| 5. Pour conclure provisoirement | 11 |
| Références | 11 |

Athanase Papadopoulos, Directeur de recherche au CNRS, Institut de Recherche Mathématique Avancée (IRMA), Université de Strasbourg /UMR 7501 CNRS, Stéphane de Gérando, compositeur, professeur de composition et nouvelles technologies (CMXIX Paris), docteur HDR, ancien directeur de département universitaire et directeur pédagogique musique du Centre de formation supérieure des enseignants. Pour citer cet article : Papadopoulos Athanase, de Gérando Stéphane, *Géométrie euclidienne et création artistique sonore et visuelle*, 3icar /icarEditions, 2015. Distribution électronique © 3icar /icarEditions (3icar.com). Tous droits réservés pour tous pays.

1. INTRODUCTION GÉNÉRALE : EUCLIDE ET SA GÉOMÉTRIE

1.1. **Les postulats d'Euclide.** Euclide d'Alexandrie¹ est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de l'Antiquité, particulièrement connu pour une œuvre phénoménale, les *Eléments*² (stoikheia), traité de mathématiques et de géométrie écrit vers 300 av. J.-C et qui représente une compilation du savoir de l'époque, en géométrie plane, en géométrie de l'espace et en arithmétique, l'organisation et l'exposé du contenu étant dûs à Euclide. Ce livre constitue le premier traité complet de mathématiques comme science abstraite et déductive, comme on la conçoit aujourd'hui. Les *Eléments* sont divisés en 13 livres : les livres 1 à 6 concernent la géométrie plane, les livres 7 à 9 concernent la théorie des rapports, le livre 10 traite la théorie de nombres irrationnels (attribuée à Eudoxe), et les livres 11 à 13 concernent la géométrie dans l'espace. Le livre se termine par l'étude des propriétés des cinq polyèdres réguliers dont l'existence et la classification remonte aux pythagoriciens du sixième siècle avant J.-C.

Dans les *Eléments*, on trouve les définitions, les axiomes et les postulats qui fondent ce que l'on appelle aujourd'hui la géométrie euclidienne. À titre d'exemple, nous résumons les cinq postulats :

- (1) Postulat : Par deux points distincts, il passe une droite en une seule.
- (2) Postulat : Tout segment peut être prolongé par droite.
- (3) Postulat : Deux points distincts étant donnés, il passe un cercle et un seul de centre le premier point et passant par le second.
- (4) Postulat : Tous les angles droits sont égaux entre eux (c'est-à-dire qu'il existe une transformation euclidienne du plan qui envoie l'un sur l'autre).
- (5) Postulat : Par un point extérieur à une droite, il passe une droite et une seule parallèle à la droite donnée.

Dans ces postulats certains termes utilisés (point, droite, "passer par", etc.) sont considérés comme des "termes indéfinis", même si Euclide en a donné une définition intuitive qui fait que l'espace que nous percevons par nos sens se rapproche de la géométrie euclidienne. Il est important d'insister sur ce point.

Le dernier postulat est considéré comme le fondement de la géométrie euclidienne, par rapport aux deux autres géométries classiques que l'on appelle sphérique et de Lobachevsky, dans lesquelles il n'est pas satisfait (tandis que les quatre premiers postulats le sont).³

La géométrie euclidienne telle qu'elle est présentée dans les *Éléments* qui est le premier traité axiomatique et systématique de la géométrie, est intimement liée à une interprétation de l'espace physique macroscopique.

1.2. **Notions fondamentales.** En simplifiant la présentation des notions euclidiennes fondamentales, nous favorisons pour le compositeur l'imagination possible d'analogies en relation

1. (c. 320-260 av. J.-C.). On connaît peu d'éléments biographiques à son sujet. Il aurait été formé à l'école d'Athènes fondée par Platon : il y apprend la géométrie d'Eudoxe de Cnide (408-355 av. J.-C.) et de Théétète d'Athènes (415-369 av. J.-C.). Il vit notamment à Alexandrie en Egypte et dans la prestigieuse École de cette ville, il enseigne et dirige des mathématiciens qui participent à l'écriture de son œuvre.

2. Les *Eléments* furent l'un des premiers livres imprimés (Venise, 1482), probablement historiquement un des ouvrages les plus publiés après la bible (plus d'un millier d'éditions manuscrites des *Eléments* ont été publiées avant cette première version imprimée en 1482). Son influence a été considérable sur le développement de la logique et de la science occidentale, enseignée pendant plus de 2000 ans, encore aujourd'hui dès les premiers cours de géométrie élémentaire.

3. Pendant deux millénaires, ce postulat, dont l'énoncé est plus compliqué que les autres, a été considéré comme une proposition et non pas un postulat, c'est-à-dire que les mathématiciens avaient la conviction qu'il découlait des autres axiomes et postulats de la géométrie euclidienne, et ils ont cherché à le démontrer. Tous les essais en ce sens ont été voués à l'échec, et ce n'est qu'au dix-neuvième siècle que Nicolaï Ivanovitch Lobatchevski (1793-1856), János Bolyai (1802-1860) Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ont construit une nouvelle géométrie complète et aussi cohérente que la géométrie euclidienne, dans laquelle tous les axiomes et postulats, sauf le cinquième, sont valables, et où la négation de ce dernier est valable.

avec la description d'objets sonores et visuels. A la lecture de ces notions scientifiques, il suffirait en effet de créer des équivalences de vocabulaire pour entrevoir une forme de nouveau solfège artistique, de la particule sonore ou visuelle (point) à l'invention d'espaces à n dimensions. Outre cette potentialité qui se dessine, nous retiendrons la différenciation entre objets abstraits et concrets qui présage de la définition d'un même espace singulier.

Objets abstraits Rappelons tout d'abord que les objets fondamentaux de cette géométrie (point, droite, alignement, etc.) sont des objets abstraits *indéfinis*. Ils trouvent leur réalisation dans des "modèles", mais en soi ils n'ont pas de signification physique ou autre. Considérer les objets de la géométrie euclidienne comme des objets sensibles (par exemple dans le monde physique qui nous entoure) en constitue une approximation, et l'intuition que cela nous en donne est là pour aider à comprendre les motivations et le développement de cette géométrie, mais il ne faut pas penser que ces objets abstraits désignent des objets du monde sensible. Les constructions géométriques sont des constructions de l'esprit et il n'y a pas de modèle privilégié de cette géométrie. Les mathématiciens connaissent la fameuse phrase de Hilbert disant que l'on pourrait, en géométrie, remplacer les mots "point, ligne, plan" par "table, chaise, gobelet", et on peut parfaitement avoir un modèle de cette géométrie de cette manière, en pensant que les relations entre ces objets (au sens axiomatique d'Euclide : par exemple, entre deux points il passe une et une seule droite, etc.) sont satisfaites pour ce modèle.

Point, droite, volume, surface, segment, angle Euclide définit un point comme un objet qui n'a ni longueur ni épaisseur et une droite comme un objet qui a une longueur mais pas de largeur, etc., définitions qui sont faites pour aider le lecteur dans son intuition, mais elles ne sont pas essentielles ; elles ne sont d'ailleurs pas utilisées dans le livre des *Éléments* (puisque'il s'agit d'une géométrie axiomatique). Les points et les droites doivent satisfaire à des relations d'appartenance (un point appartient à une droite, etc...), et une droite peut être aussi conçue comme la ligne de plus court chemin joignant deux points du plan. Un segment AB désigne une ligne limitée par les points A et B. Un angle est une portion de plan limitée par deux demi-droites (il y a deux portions en général, et il faut faire le choix d'une). De même, il est utile d'imaginer que le volume d'un corps occupe une place dans un espace à trois dimensions, qu'il est limité par une surface, une surface peut être limitée par une ligne, etc., mais cela n'intervient pas dans la théorie abstraite des surfaces et des volumes. Concernant la notion d'espace, il est habituel d'en distinguer trois sortes, l'*espace intuitif*, tel que notre esprit le conçoit, l'*espace physique*, dont les propriétés sont données par l'expérience, et l'*espace abstrait*, défini par des propriétés mathématiques, qui est de nature très différente des deux autres, et les modes de pensée qui sont attachés aux trois espaces sont distincts. Les sensations (visuelles, sonores, etc.) concernent les deux premiers. Il est possible et important de souligner les analogies entre les trois espaces, et c'est ce que nous essayons de faire à un niveau modeste dans cet article, mais il est vain de penser que les espaces intuitif et physique reflètent d'une manière rigoureuse l'espace abstrait mathématique.

Dimension La notion de dimension est une notion fondamentale en mathématiques, et c'est l'une des notions les plus fascinantes. En fait, il existe plusieurs définitions possibles, adaptées à des situations diverses, et du point de vue purement mathématique, il existe plusieurs notions de dimension (dimension algébrique, dimension topologique, dimension de Hausdorff, dimension fractale, etc.) ; elles sont toutes utiles, chacune dans son contexte, et leur utilisation tient compte de la nature de l'objet en question, de la catégorie à laquelle il appartient, de son degré de régularité et d'autres facteurs. Là aussi, il n'est pas question de présenter une définition mathématique rigoureuse, qui nous entraînerait loin dans les détails techniques qui n'aurait aucune utilité dans ce contexte. Nous nous contenterons de la définition intuitive suivante : un objet est dimension n (où n est un nombre entier positif) si pour décrire les mouvements ou les variations de cet objet, avons besoin d'un système de n nombres réels (on peut penser aux coordonnées cartésiennes). Nous parlerons de la

dimension d'un espace euclidien, et cela désignera le nombre de coordonnées que l'on utilisera pour en représenter les points.

Espace euclidien La notion d'espace euclidien peut être définie algébriquement. Une telle description fournit un modèle de cet espace, en ramenant la question de son existence à celle des nombres. Parler d'un espace euclidien du point de vue algébrique permet également de traiter de manière simple les dimensions supérieures.

Formellement, un espace euclidien algébrique est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des réels, muni d'un produit scalaire. Pour un lecteur non averti en mathématiques, il peut retenir qu'à l'aide d'un produit scalaire, on peut mesurer les distances et les angles. Du point de vue purement mathématique, la distance entre les points est définie grâce à une norme associée à ce produit scalaire, et les angles sont définies à l'aide d'une formule qui en donne le cosinus. Le produit scalaire permet aussi d'autres manipulations, par exemple la définition de la notion de base orthonormale, qui correspond à notre intuition de système de coordonnées dans lequel les axes sont perpendiculaires deux à deux, et sont munies d'une graduation, où l'on peut y lire la "distance unité". Le produit scalaire permet aussi de d'établir une relation canonique entre l'espace vectoriel et son dual, dont les éléments sont des fonctions (applications linéaires dont les images dans les réels). La notion de distance entre les points induit une topologie sur l'espace, qui permet en particulier de définir la notion de voisinage d'un point.

La notion de coordonnées cartésiennes (c'est-à-dire le système de coordonnées que tout le monde sait utiliser pour situer des points sur un papier quadrillé) combine en même temps la géométrie et les nombres, qui historiquement (du temps des Grecs) sont les deux branches des mathématiques. La position d'un objet (un "point") sur une droite est repérée par un nombre, celle d'un objet dans un plan par deux nombres, celle d'un objet dans un espace de dimension trois par trois nombres, etc.

Nous avons déjà mentionné que la géométrie euclidienne est une géométrie axiomatique et qu'elle n'a pas d'autre modèle privilégié que l'espace qui nous entoure qui d'ailleurs n'est pas à proprement parler un modèle car il n'est pas défini de manière rigoureuse (il n'a pas de définition mathématique) et d'autre part, il n'en est qu'un modèle approximatif (que ce soit au niveau microscopique, ou à grande échelle). Il n'est jamais superflu d'insister sur cela. Ainsi, dire que telle ou telle propriété de l'espace sensible qui nous entoure est ou n'est pas satisfaite par la géométrie euclidienne est en un certain sens une tautologie, puisque quand nous considérons les objets de cet espace et ceux de notre géométrie, nous parlons de choses différentes. Nous pouvons cependant parler d'approximations et de modèle intuitif de la géométrie, et c'est le cadre de l'approche sensorielle qui nous intéresse.

Isométries et similitudes Une isométrie est une transformation qui préserve les distances entre paires de points.

Une similitude est une transformation qui multiplie toutes les distances par une constante fixe, appelée rapport de la similitude. L'image de toute figure par une telle transformation est considérée comme une figure semblable, c'est-à-dire de même forme, et où les distances entre les points est multipliée par une constante uniforme (qui ne dépend pas des points), qui est ce rapport de similitude. À proprement parler, les similitudes ne font pas partie des transformations euclidiennes, parce qu'elles ne préservent les distances (sauf dans le cas où la constante est 1), mais la géométrie de similitude est reliée à la géométrie euclidienne en ce sens que cette dernière est la seule géométrie pour laquelle on peut appliquer des similitudes à toutes les figures. Dans les géométries non-euclidiennes, il n'existe pas de triangles similaires, sauf pour un facteur de similitude égal à 1.

Les isométries sont des cas particuliers de similitudes ; elles transforment des figures en des figures de même forme et de même taille.

Certaines similitudes et isométries préservent l'orientation. Elles sont appelées similitudes directes et les autres sont appelées similitudes indirectes. Dans le plan, les transformations euclidiennes que nous décriront ultérieurement (les translations, rotations, symétries

orthogonales par rapport à un axe, homothéties) sont des cas particuliers de similitudes. On démontre qu'une similitude plane est toujours décomposable en au plus deux transformations de ce type. Une homothétie est une similitude qui fixe un point (elle l'envoie sur lui-même); c'est une transformation qui s'écrit de manière simple dans un système de coordonnées cartésien où l'on a pris ce point comme centre des coordonnées. Une homothétie agrandit ou réduit la taille des figures, suivant que son facteur de similitude est < 1 ou > 1 . Elle correspond en quelque sens à un changement d'échelle. Une figure et sa transformée par homothétie sont les mêmes, à changement d'échelle près. En géométrie non-Euclidienne un tel changement d'échelle n'existe pas, sauf dans des cas particuliers (essentiellement pour les cercles).

Ayant choisi des coordonnées, les transformations de l'espace euclidien se décrivent à l'aide de matrices inversibles, dont on ne rappellera pas la théorie ici. Les transformations qui préservent (respectivement, renversent) l'orientation sont représentées par des matrices à déterminant positif (respectivement négatif).

Une transformation euclidienne qui préserve l'orientation peut être obtenue comme le résultat d'une déformation continue de tout l'espace, c'est à dire d'une famille continue de transformations, alors qu'une transformation qui renverse l'orientation ne peut pas être le résultat d'une déformation continue, à moins de la réaliser dans un espace de dimension supérieure.

Toutes les transformations que l'on vient de mentionner, à part l'homothétie, sont des cas particuliers d'isométries. L'homothétie est une similitude qui n'est pas une isométrie, sauf si son facteur de similitude est égal à 1.

2. TRANSFORMATIONS EUCLIDIENNES ET RÈGLES ALGÈBRIQUES

Résumons successivement les différentes transformations euclidiennes : symétrie par translation (1), symétrie centrale (2), symétrie axiale (3), symétrie par rotation (4) en ajoutant les homothéties (5). Nous précisons des règles algébriques, souhaitant qu'elles puissent être utilisées dans un cadre compositionnel instrumental ou algorithmique.

2.1. Translation.

(1) Définition

Intuitivement, cette transformation est un déplacement du plan correspond à un glissement où les points sont déplacés dans une même direction et en conservant une distance uniforme. Remarquons que les points du plan sont déplacés, et en même temps toutes les autres figures : segments, triangles, cercles etc.

(2) Règle algébrique

– En dimension une : $(x) \mapsto (x + A)$, où A est un nombre réel, appelé vecteur de translation.

– En dimension deux : $(x, y) \mapsto (x + A, y + B)$, où A et B sont des nombres réels. Le couple (A, B) est le vecteur de translation.

– En dimension trois : $(x, y, z) \mapsto (x + A, y + B, z + C)$ où A, B, C sont des nombres réels. Le triplet (A, B, C) est le vecteur de translation.

– Existe en toutes les dimensions supérieures, avec des formules analogues.

2.2. Symétrie centrale.

(1) Définition :

Chaque point est envoyé sur son symétrique par rapport à un point fixe. On dit de deux points A et A' qu'ils sont symétriques par rapport à O , lorsque O est le milieu du segment $[AA']$.

(2) Règle algébrique : En se ramenant au cas où le point fixe est l'origine des coordonnées (le point de coordonnées zéro), la symétrie centrale s'écrit, en coordonnées :

- En dimension une : $x \mapsto -x$.
- En dimension deux : $(x, y) \mapsto (-x, -y)$.
- En dimension trois : $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$
- Existe en toutes les dimensions supérieures, avec des formules analogues.

2.3. Symétrie axiale.

(1) Définition : symétrie axiale ou réflexion

- Une figure possède un axe de symétrie (d) si et seulement si elle est invariante par la réflexion d'axe (d)
- Réflexion : L'origine du terme se conçoit bien en liaison avec les miroirs qui réfléchissent une image. La réflexion conserve les distances et les angles. C'est donc une isométrie. Mais elle ne conserve pas l'orientation (chiralité). On dit que c'est un antidéplacement.

(2) Règle algébrique :

Symétrie axiale par rapport à l'axe des x convenablement choisi :

- En dimension deux (pas de possibilité d'appliquer cette règle en dimension 1) : $(x, y) \mapsto (x, -y)$ Seul le y change de signe.
- En dimension trois : $(x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$
- Existe en toutes les dimensions supérieures, avec des formules analogues.

Symétrie axiale par rapport à l'axe des y convenablement choisi :

- En dimension deux : $(x, y) \mapsto (-x, y)$ Seul x change de signe.
- En dimension trois : $(x, y, z) \mapsto (-x, y, -z)$
- Existe en toutes les dimensions supérieures, avec des formules analogues.

2.4. Symétrie par rapport à un plan.

La symétrie par rapport à un plan existe en dimension trois et n'intervient pas en dimension deux.

(1) Règle algébrique :

- En dimension trois : En coordonnées, on se ramène au cas où on a une symétrie par rapport au plan des xy , et dans ce cas, on a, $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$.
- Existe en toutes les dimensions supérieures, avec des formules analogues.

2.5. Rotations.

(1) Définition : Rotation de centre C (dans le plan) ou d'axe (D) dans l'espace.

Définir une rotation dans le plan, c'est définir le centre et l'angle de la rotation. Pour un point O et un angle θ donnés, la rotation de centre O et d'angle θ envoie un point M sur un point M' situé sur le cercle de centre O et de rayon OM de telle sorte que l'angle MOM' soit égal à l'angle θ .

(2) Règle algébrique :

- En dimension deux uniquement : En coordonnées, la rotation de centre O et d'angle θ est donnée par les formules $(x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$.

2.6. Homothéties.

- (1) L'homothétie correspond à un changement d'échelle. Comme on l'a dit, c'est une similitude, elle ne conserve généralement pas les distances entre les points. Cette transformation permet d'agrandir ou de réduire une figure. On réalise l'homothétie à partir d'un centre d'homothétie (O), qui est un point fixe de la transformation, et d'un rapport d'homothétie (ou de similitude) (k). Le système de coordonnées adéquat (qui permet de la représenter cette transformation de manière simple) est celui où le centre du repère est choisi comme le point fixe par l'homothétie.

(2) Règle algébrique :

- En dimension une : $(x) \mapsto (kx)$ Homothétie de rapport k . C'est une transformation qui implique des coefficients de multiplication différents de 1.
- En dimension deux : $(x, y) \mapsto (kx, ky)$
- En dimension trois : $(x, y, z) \mapsto (kx, ky, kz)$
- Existe en toutes les dimensions supérieures, avec des formules analogues.

3. PROBLÉMATIQUE DE L'ANALOGIE ENTRE GÉOMÉTRIE ET MUSIQUE

Que voudrait-dire composer un art euclidien ? Notre rapide introduction permet d'entrevoir la richesse et les enjeux d'une telle problématique à travers nombre de questions : analogies de vocabulaire, prise en compte des contextes historiques et esthétiques, interprétations des postulats..., la richesse du travail d'Euclide ne pouvant en définitive se résumer à quelques constatations. Nous limiterons notre appréhension de la problématique à un premier éclairage critique. Le modèle "visuel" auquel nous sommes habitués pourrait-il en définitive être remplacé par un modèle sonore ou un modèle combinant le visuel et le sonore ?

3.1. Remarques critiques de Jean-Etienne Marie.

« Les principe même de l'écriture, le fait de la nécessaire synchronisation de deux ou plusieurs lignes mélodiques dans la polyphonie naissante induisent un espace de représentation des deux paramètres hauteur et durée. Les musiciens du XIII^e siècle sont familiers des coordonnées cartésiennes et très vite les opérations sur le son sont ressenties comme homologues à des opérations sur cet espace : translation, symétrie, homothéties. »

Jean Etienne Marie poursuit son commentaire dans *Trois discours sur le musical*⁴ en précisant :

- (1) la transposition comme la répétition d'un motif est une translation (canon...),
- (2) les quatre symboles $a, -a, a^{-1}, -a^{-1}$ illustrent parfaitement les symétries spatiales de l'écriture musicale : mouvement droit ou original, récurrence (à l'envers, procédés de l'écriveuse), renversement, récurrence du renversement,
- (3) les homothéties correspondent à des contractions ou des dilatations de durées (diminution augmentation), d'échelle de hauteur...

Il rappelle aussi que l'on peut associer les trois axes de symétrie du cube aux différentes formes de renversement du cube (comme Xenakis l'a réalisé dans *Nomos Alpha*).

Mais Jean-Etienne Marie semble d'une autre manière tout aussi critique au sujet d'analogies qui seraient trop rapides entre symétrie spatiale et symétrie musicale. Dissemblance entre formes musicale et spatiale, la musique se réfère à des axes de nature différente, l'un concerne des grandeurs physiques (hauteurs, intensités ...), l'autre le temps, avec la nécessité de dissocier des fonctions d'ordre et de grandeur.

Il souligne par ailleurs la nécessité de prendre en compte la question perceptive : « la sensation additionne là où le physicien multiplie⁵ ». Dans le cadre des applications des homothéties temporelles (multiplication ou division de durées par un même valeur, dilatation - contraction), Jean Etienne Marie précise que la généralisation de l'utilisation de la série n'a pas été systématique et totale [...]⁶.

4. Edisud, 1983, p. 18

5. op. cit. p. 18.

6. "Notre remarque sur la difficulté d'appliquer sans discernement la notion de groupe à la musique, pourrait être illustrée par l'abstention, que l'on remarque, de l'usage du renversement en matière rythmique, sauf chez Boulez qui propose une solution non rigoureuse" (op. cit. p. 21). Moreno Andreatta écrit quant à lui que « dans la musique occidentale, on estime qu'il existe cinq types de transformations d'accords qui peuvent être décrites de façon géométrique : le déplacement à l'octave, la permutation, la transposition, l'inversion et le changement de cardinalité ». Pour les théoriciens de la musique, l'idée est donc de trouver des représentations visuelles, géométriques permettant de révéler des relations entre les accords, « d'établir les nerfs topologiques, c'est-à-dire

Les critiques de Jean-Etienne Marie permettent d'introduire une remarque plus générale en rapport avec notre premier chapitre : ce qui pourrait être cohérent en mathématique et en géométrie pourrait ne pas l'être en musique, et ce pour plusieurs raisons que nous tentons d'appréhender schématiquement.

3.2. Multiplicité d'interprétation : de la physique à l'esthétique. Nous avons rappelé une des caractéristiques des transformations euclidiennes : la préservation des notions de distance. Mais que signifie en musique cette notion de distance et comment la traduire ? Si l'on se réfère à l'idée intuitive de distance, c'est-à-dire la longueur qui sépare deux points ou plus précisément deux objets abstraits pouvant prendre tout type de formes comme nous l'avons rappelé en première partie, les questions se complexifient immédiatement, à l'image de la réalité protéiforme de l'œuvre d'art qu'il serait difficile de réduire à un formalisme unique.

Que voudrait dire comparer une distance égale à 1 appliquée à l'intensité, la fréquence, le timbre, la durée⁷ ?

Mais plus encore, la composition ne se limite pas à des opérations sur les quatre paramètres du son. Prenons le cas de compositeurs comme Cage, Zimmermann ou même Berio qui introduisent dans leurs stratégies compositionnelles des références historiques équivalentes à une datation du matériau (technologie utilisée comme un vieux Victrola, citations thématiques d'œuvres de références, hybridations de techniques d'écritures) : on pourrait très bien concevoir une œuvre qui rationalise et systématise la perception d'espaces-temps historiques en utilisant cette même notion de distance et de transformation euclidienne. De quelle manière alors faudrait-il concevoir le passage de cette géométrie euclidienne à une conception esthétique de cette géométrie ? Quelle signification faudrait-il donner à cette valeur 1 ?

Du microcosme au macrocosme de la composition, la perception de la distance est bien omni-présente ; évaluation d'une couleur orchestrale trop distante d'une autre, perception de l'espace sonore et des effets de distance, transposition (translation) de hauteurs équivalent à une accélération rythmique..., mais aussi tout sentiment esthétique qui traduit la distance entre une œuvre majeur ou mineur, la réception d'une œuvre trop distante d'un public, notre connaissance de l'histoire des arts qui conditionne plus ou moins notre capacité à mesurer la distance existante entre une composition originale et une composition ou création auto-proclamée... On a compris qu'il serait naïf de faire abstraction de l'ensemble de ces réalités pour espérer envisager une œuvre qui relèverait systématiquement et entièrement de transformations isométriques. Cela répond probablement à l'imperfection inhérente à toute création, comme écho de la critique de Boulez au sujet de l'œuvre de Schoenberg, que l'on pourrait traduire ici comme étant hétérométrique dans ses processus d'invention, et ce malgré la puissance d'invention et d'imagination quasi unique à l'échelle de l'histoire qu'elle représente.

Outre cette notion de distance difficile à appréhender dans toute sa complexité artistique et qui ne suffit naturellement pas pour décrire la géométrie euclidienne, que deviendraient dans un cadre compositionnel les notions d'angle, de dimension, d'aire, d'axe, de centre, de plan ou plus encore la description des axiomes d'Euclide ou d'un espace métrique homogène, isotope et infini ?

de savoir quelles transformations permettent de passer d'un accord majeur à un accord mineur, d'un septième à un diminué, etc » (<http://www.universcience.fr/> : Une musique qui swingue de façon géométrique/).

7. La géométrie euclidienne n'apporte pas de réponse immédiate à cette question, puisqu'elle travaille d'une certaine manière sur des objets abstraits qui trouvent une cohérence dans une représentation spatiale à X dimensions, le point pouvant par exemple être intuitivement interprété comme un simple emplacement commun à la description de tous ces objets (en dehors de l'ensemble vide). Mais dès lors que l'on évoque des grandeurs physiques associées au son aussi différentes que l'intensité, la durée etc..., la disparition d'un référentiel commun entraîne une perte de cohérence, la grandeur 1 n'ayant plus de signification commune immédiate.

3.3. Perception. Il serait nécessaire de pas amalgamer une approche purement abstraite (mathématique, géométrique....) d'une approche liée à la perception sonore ou visuelle des transformations euclidiennes. Plus encore d'un point de vue physiologique, nos organes sensoriels sont très spécifiques et pas directement comparables, même si les sciences cognitives tentent de décrire des lieux communs ou interactions par exemple entre l'audition, la vision, le toucher (sensibilité), la kinesthésie, la proprioception, le goût ou l'odorat (intermodalité). Dans son livre traitant des relations entre son et lumière, Bernard Valeur rappelle par exemple que "l'oreille est bien supérieure à l'œil pour la perception des fréquences, mais c'est l'œil qui l'emporte pour l'aspect spatial⁸". Si l'on reste dans le cadre d'une simple analogie entre géométrie et perception sonore, il s'agit par exemple de respecter les seuils différentiels de perception, sous peine de réaliser des transformations euclidiennes qui ne se perçoivent pas à cause d'un manque de sensibilité de l'oreille, comme il serait tout aussi nécessaire d'adapter les notions d'intervalles égaux en fonction de la sensibilité de l'oreille comme nous avons pu le souligner.

D'une autre manière, en utilisant un modèle euclidien, nous devrions supposer que les paramètres du son sont continus alors que nous obtenons habituellement une sensation de continuité perceptive (glissando....) via des échelles discontinues de perception : le modèle euclidien continu ne peut être qu'une approximation très discutable de la réalité sensorielle (fini /infini)...

En conséquence pour passer de l'abstraction à la prise en compte de la perception, il sera très souvent nécessaire d'ajouter des contraintes compositionnelles qui n'appartiennent pas directement aux problématiques euclidiennes (échelles et graduation⁹, limites liées aux ambitus des échelles choisies¹⁰), faussant inévitablement une stricte tentative d'application entre géométrie et composition.

3.4. Notation et réalisation. Par ailleurs ce qui sera manifestement possible de réaliser dans le domaine de la création numérique (musique électronique - synthèse ou plus globalement électroacoustique, image de synthèse...) ne sera pas toujours possible dans le cadre de la composition instrumentale, à cause notamment de problèmes de notation et de réalisation instrumentale. Comment noter sur une partition et interpréter au piano par exemple un intervalle de 12 cents, sachant de toute façon que ce n'est pas possible d'envoyer cette hauteur avec un piano traditionnel en demi-ton ? Comment traduire 20 db sur une échelle musicale de nuances (pp, p, mp, mf....) et un écart de 7 db ?.... De la simulation d'une traduction continue des paramètres d'écriture en électronique, à des échelles discrètes cohérentes pour la notation instrumentale, le vecteur de translation de notre règle algébrique ne peut plus dans ce cadre être considéré comme un nombre réel quelconque comme nous l'avons précisé.

4. EXPÉRIMENTATION

Une recherche ayant pour objectif de définir un art euclidien ne pourrait se développer que par étapes successives et sur le long terme. Il serait notamment question d'expérimentations liées à une tentative d'application abstraite, physique et perceptive des notions de transformations euclidiennes (règles algébriques).

8. Bernard Valeur, *Sons et lumière*, Paris, Pour la science, Belin, 2008, p. 45

9. La graduation des échelles choisies devraient idéalement tenir compte du seuil différentiel de perception (notre capacité limite à entendre des différences), sachant par ailleurs que notre oreille répond très grossièrement à une perception logarithmique. Plusieurs notations seraient possibles, plus en lien avec une description physique des stimuli qu'il s'agirait par la suite de traduire logarithmiquement ou avec l'utilisation d'échelles directement perceptives.

10. Par exemple, la hauteur utile d'un son, c'est-à-dire celle à laquelle notre oreille est sensible, est limitée entre 20 et 20000 Hz. L'axe des abscisses (qui est ici l'axe des x) sera gradué en conséquence, comme l'axe des y qui pourrait traduire un ambitus de variation maximum de la perception des nuances (entre 0 et 120 dB par exemple). L'origine des axes pourrait se situer au milieu des échelles choisies...

Dans cet exemple simple intitulé *Etude aux solides platoniciens* et réalisé par Stéphane de Gérando dans l'environnement informatique MAX-MSP-JITTER, l'objectif est de réaliser un mapping (couplage) identifiable entre son et image via des "attracteurs euclidiens". Suivant nos remarques critiques introductives, le terme attracteur symbolise l'impossibilité de réaliser un art euclidien, tout en ayant la possibilité de tendre vers cet art ou technique d'écriture.

Nous expérimenterons les transformations euclidiennes suivantes : les translations, les rotations et les homothéties, et ce en utilisant un module intitulé «jit.gl.plato» qui génère en 3D les différents solides platoniciens, le tétraèdre (1), le cube (2), l'octaèdre (3), le dodécaèdre (4) et l'icosaèdre (5).

Le module «jit.gl.handle » est choisi pour contrôler manuellement grâce à la souris de l'ordinateur les trois transformations des solides platoniciens (touches du clavier à utiliser) :

- (1) translation (mouvement des objets droite gauche) : pomme (cmd) + clique sur l'objet
- (2) rotation : cliquer sur l'objet et bouger la souris
- (3) homothétie (taille) : alt + clique

Suivant les transformations opérées par l'utilisateur, nous sommes en temps réel à tout moment informé :

- (1) de la position des objets (translation) : l'origine 3D est sous la forme xyz (par défaut = 0. 0. 0.)
- (2) de leur rotation : l'angle de rotation et les trois axes autour desquels la rotation est effectuée sous la forme d'angle de rotation xyz (par défaut = 0. 0 1. 0.)
- (3) de leur échelle (taille) (homothétie) : le facteur d'échelle 3D sous la forme xyz (par défaut = 1. 1. 1.)

C'est à partir de ces données de position, de rotation et d'échelle des solides que nous couplons des transformations sonores euclidiennes (mapping). Le choix des échelles graphiques et sonores dépend notamment des programmes utilisés. Mathématiquement, on conserve systématiquement un rapport de proportionnalité cohérent entre les transformations visuelles et sonores.

4.1. Mapping 1 - mouvement horizontal des objets.

- (1) Translation - forme géométrique : la translation est ici symbolisée par le mouvement continu horizontal des formes géométriques.
- (2) Couplée à une translation du rapport d'intensité droite - gauche (sortie en stéréo) : Le mouvement horizontal équivaut à un contrôle continu du panoramique : intensité de la sortie du haut-parleur droit inversement proportionnelle à celui de gauche.

4.2. Mapping 2 - rotations des objets.

- (1) Rotation - forme géométrique : rotation continue de l'objet de 0 à 360 degrés. Lorsque la forme exécute un tour complet cela passe de 360 à 0 puis de nouveau 0 à 360 ...
- (2) Couplée à une translation de fréquence du son : la rotation de l'objet est ici couplée avec un glissando de fréquence calqué sur les degrés (de 0 à 360 HTZ), suivant les ambitus de variations en degré indiquées précédemment.

4.3. Mapping 3 - taille des objets.

- (1) Homothétie - forme géométrique : modification continue de la taille de l'objet.
- (2) Couplée à une translation de l'intensité du son : modification proportionnelle à la taille de l'objet et continue de l'intensité sonore (nuance)

4.4. **Mapping 4 - rapport entre forme et timbre.** Les cinq solides ont des timbres harmoniques. Le spectre associé à chaque solide est déterminé par le nombre de sommets de chaque solide définissant le nombre d'harmoniques (synthèse additive) : le tétraèdre(4), le cube (8), l'octaèdre (6), le dodécaèdre (20) et l'icosaèdre (12).

4.5. **Bilan.** Le naturel du couplage son/image via ces "transformations euclidiennes" est particulièrement frappant. Il serait intéressant de comprendre la raison de cette efficacité, si elle tient davantage de la relation entre les paramètres sonores et visuels choisis ou des procédés de transformation euclidienne. Cette étude pourrait à terme servir la réalisation interactive d'une installation temps réel poly-sensorielle¹¹ ou d'un outil pédagogique pour de jeunes élèves abordant les premières notions géométriques euclidiennes.

5. POUR CONCLURE PROVISoireMENT

Comme un écho à la pensée axiomatique d'Euclide et en l'état de nos connaissances actuelles, il semble impossible d'envisager la modélisation d'un art visuel et sonore euclidien, la transposition de notions spatiales (axiomes d'Euclide) à des notions musicales ou plus globalement artistiques étant particulièrement délicate à cause notamment de la perte d'un référentiel commun.

Dans le cadre de transformations perçues comme étant continues, une fois les analogies choisies entre échelle spatiale et échelle musicale, la notion essentielle que l'on conserve est un rapport mathématique de proportionnalité et donc de distance entre les transformations spatiales et sonores.

Si l'on énonce aujourd'hui qu'il n'y a pas de création euclidienne, on affirme au même moment que l'on peut tendre vers cette notion (attracteurs euclidiens), grâce à une prise en compte plus détaillée de cette géométrie, de la perception et des aspects culturels. Suivant les travaux d'Euclide, c'est aussi la notion d'un nouveau solfège qui se dessine, encore différent du solfège schaefferien, les notions d'objets concrets et abstraits s'ouvrant vers des analogies multidimensionnelles et infinies.

RÉFÉRENCES

- [1] Euclide, la traduction française de référence pour les *Éléments* (à partir de l'édition de Heiberg), Bibliothèque d'histoire des sciences, Paris, Presses universitaires de France, 1990-2001.
- [2] Valeur Bernard, *Sons et lumière*, Paris, Pour la science, Belin, 2008.
- [3] Marie Jean-Etienne, *Trois discours sur le musical*, Paris, Edisud, 1993.
- [4] Andreatta Moreno *Une musique qui swingue de façon géométrique*, <http://www.universcience.fr/>, 2008
- [5] Andreatta Moreno *Quelques aspects théoriques d'une approche algébrique en musique*, <http://repmus.ircam.fr/moreno>, 2005

11. Deux types de réalisation de cette *Etude aux objets platoniciens* sont possibles : l'une entièrement automatisée, comme un tableau virtuel qui s'auto-modifie en temps réel, l'autre interactive, le public pouvant agir sur ces objets en dirigeant les transformations euclidiennes.