



HAL
open science

Désingularisation de métriques d'Einstein. II

Olivier Biquard

► **To cite this version:**

Olivier Biquard. Désingularisation de métriques d'Einstein. II. *Inventiones Mathematicae*, 2016, 204 (2), pp.473-504. 10.1007/s00222-015-0619-3 . hal-02928845

HAL Id: hal-02928845

<https://hal.science/hal-02928845>

Submitted on 21 Sep 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DÉSINGULARISATION DE MÉTRIQUES D'EINSTEIN. II.

OLIVIER BIQUARD

ABSTRACT. We calculate a wall crossing formula for 4-dimensional Poincaré-Einstein metrics, through a wall made of orbifold Poincaré-Einstein metrics with A_1 singularities. This is based on a formalism which enables to deal with higher order terms of the Einstein equation in this setting. Some other consequences are deduced.

INTRODUCTION

Cet article est le second d'une série commencée dans [4], qui vise à analyser les désingularisations de métriques d'Einstein singulières en dimension 4. Si, dans le premier article, les outils d'analyse étaient primordiaux, ici on se concentre sur les aspects algébro-géométriques de l'équation d'Einstein, pour répondre à certaines questions soulevées dans [4]. Mais rappelons d'abord le contexte.

Soit (M_0^4, g_0) une variété d'Einstein asymptotiquement hyperbolique, c'est-à-dire que M_0 a un bord $\partial M_0 = \{x = 0\}$, où x est une équation du bord, et près de ∂M_0 on a

$$g_0 \sim \frac{dx^2 + \gamma_0}{x^2},$$

où γ_0 est une métrique sur ∂M_0 appelée l'infini conforme de g_0 (en fait seule la classe conforme $[\gamma_0]$ est bien définie).

Le problème de Dirichlet à l'infini, consistant à essayer de construire g_0 à partir de la donnée de γ_0 , a fait l'objet de nombreux travaux, notamment d'Anderson [1] qui a proposé la construction d'un degré comptant le nombre de solutions g_0 d'infini conforme donné. Dans [4], on a montré que, si (M_0, g_0) a une singularité orbifold isolée de type $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$ en un point p_0 , et est non dégénérée, alors, sur la désingularisation topologique M (obtenue en éclatant p_0 en une 2-sphère d'auto-intersection -2), une famille de désingularisations d'Einstein de $(g_t)_{t \in (0, \varepsilon)}$ existe pourvu que g_0 satisfasse la condition

$$(1) \quad \det \mathbf{R}_+(g_0)(p_0) = 0.$$

Ici $\mathbf{R}_+(g_0)$ est la partie autoduale de l'opérateur de courbure sur le fibré Ω^+ des formes autoduales : c'est donc un endomorphisme symétrique de Ω^+ .

L'auteur bénéficie du soutien du projet ANR-10-BLAN 0105.

L'évaluation au point singulier p_0 signifie qu'on relève localement g_0 en une métrique lisse sur une boule, \mathbb{Z}_2 -invariante, et qu'on évalue $\mathbf{R}_+(g_0)$ au point fixe de l'action.

Si l'on varie un peu la métrique conforme $[\gamma_0]$ en $[\gamma]$, et si la métrique g_0 est non dégénérée, alors on peut déformer g_0 en une métrique d'Einstein $g_0(\gamma)$ sur M_0 , d'infini conforme γ , ayant toujours la même singularité orbifold en p_0 (le théorème classique de déformation dans le cas lisse [7, 3, 10], s'étend immédiatement au cas orbifold). Notons \mathcal{C} l'espace de toutes les métriques conformes sur ∂M_0 et considérons, au moins dans un voisinage de γ_0 ,

$$(2) \quad \mathcal{C}_0 = \{[\gamma] \in \mathcal{C}, g_0(\gamma) \text{ satisfait (1)}\}.$$

On montre dans [4] que, si $\mathbf{R}_+(g_0)(p_0)$ est de rang égal à 2 — la régularité maximale possible compte tenu de (1) —, alors \mathcal{C}_0 est une hypersurface lisse de \mathcal{C} près de γ_0 , et que les métriques d'Einstein désingularisées g_t ont leur infini conforme d'un seul côté de \mathcal{C}_0 .

Cela montre qu'une potentielle théorie du degré pour le problème AH Einstein ne peut s'étendre au cas de variétés qui, comme M , ont des sphères d'auto-intersection -2 . Au contraire, on a un phénomène de « mur » quand l'infini conforme traverse l'hypersurface \mathcal{C}_0 , puisqu'une métrique d'Einstein disparaît, ou au contraire apparaît. Si l'on pouvait construire la théorie adéquate de degré dans cette situation (précisons qu'il demeure des obstacles techniques sérieux pour une telle construction), le degré varierait de $+1$ ou -1 en traversant le mur. Pour le calculer, il est donc important de déterminer de quel côté du mur \mathcal{C}_0 une métrique apparaît, et tel est l'objet de cet article :

Théorème 1. *Si g_0 est non dégénérée, et $\mathbf{R}_+(g_0)(p_0)$ est de rang 2, alors les métriques d'Einstein construites à partir de \mathcal{C}_0 sont du côté de \mathcal{C}_0 déterminé par la condition*

$$\det \mathbf{R}_+(g_0(\gamma))(p_0) > 0.$$

Cela apporte la réponse à une question posée dans [4, § 14] au vu du cas de la métrique AdS-Taub-Bolt, qui est topologiquement le quotient de la boule unité de \mathbb{R}^4 par \mathbb{Z}_2 ; la métrique ronde sur le bord, infini conforme de la métrique hyperbolique, est du côté $\det \mathbf{R}_+(g_0(\gamma))(p_0) < 0$.

La démonstration du théorème 1 peut être schématisée grossièrement de la manière suivante. À partir d'un infini conforme γ proche de γ_0 , il est montré dans [4] qu'on peut résoudre l'équation d'Einstein pour une famille $(g_{t,\gamma})_{t>0}$ de désingularisations de $g_0(\gamma)$, à un terme d'obstruction o_1 près :

$$\text{Ric}(g_{t,\gamma}) - \Lambda g_{t,\gamma} = \lambda_1(t, \gamma) o_1,$$

où $\lambda_1(t, \gamma) \in \mathbb{R}$. (En fait il faut prendre o_1 dépendant de t aussi, mais nous simplifions ici). En outre il existe un développement :

$$\lambda_1(t, \gamma) = \lambda_1(\gamma)t + \mu_1(\gamma)t^2 + o(t^2).$$

La métrique $g_0(\gamma)$ peut être désingularisée par une famille d'Einstein s'il existe une famille continue (γ_t) d'infini conforme pour laquelle $\lambda_1(t, \gamma_t) \equiv 0$. L'analyse des équations impose alors la condition $\lambda_1(\gamma) = 0$ qui implique (1), c'est-à-dire $[\gamma] \in \mathcal{C}_0$, mais l'annulation des autres coefficients du développement peut être obtenue en variant γ , c'est-à-dire qu'on peut produire une famille (γ_t) pour laquelle $\text{Ric}(g_{t, \gamma_t}) - \Lambda g_{t, \gamma_t} = 0$ avec

$$\gamma_t = \gamma - \mu_1(\gamma)t\dot{\gamma}_1 + o(t),$$

où $\dot{\gamma}_1 \in T_{[\gamma]}\mathcal{C}$ est un certain vecteur tangent, transverse à \mathcal{C}_0 . Toute la démonstration du théorème 1 consiste donc à expliciter le signe de μ_1 pour déterminer de quel côté de l'hypersurface \mathcal{C}_0 se trouvent les infinis conformes γ_t des désingularisations d'Einstein g_{t, γ_t} .

Or, si le calcul du terme $\lambda_1(\gamma)$ fait dans [4] s'appuie sur les formules de linéarisation de l'équation d'Einstein, le calcul du terme $\mu_1(\gamma)$ exige un calcul explicite des termes d'ordre 2 de l'équation d'Einstein quand on recolle un instanton gravitationnel à M_0 , ce qui est considérablement plus compliqué. Le calcul proposé dans cet article est basé sur la géométrie hyperkählérienne des instantons, qui s'étend à d'autres singularités que $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Nous menons donc ces calculs dans le cadre plus général d'instantons gravitationnels, en général orbifolds, de rang 1 (c'est-à-dire vérifiant $b_2^{orb} = 1$), et le théorème final (théorème 15) est démontré dans un cadre plus général que le théorème 1. La propriété importante de cette famille d'instantons, que nous analysons grâce à la construction de Kronheimer [9], est d'admettre une action hamiltonienne de cercle, dont l'application moment est un potentiel pour les deux autres structures complexes.

Ce formalisme plus général a également l'avantage d'amorcer un procédé de désingularisation de toutes les singularités kleiniennes : en effet, dans le cas général, l'instanton recollé est certes encore singulier, mais avec des singularités orbifolds de rang strictement inférieur au rang initial, ce qui permet de commencer une induction sur le rang. En particulier, on détermine dans la section 5 la seconde obstruction à la désingularisation d'une singularité de type A_k (c'est-à-dire $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{k+1}$), qui est une fonction du 4-jet de la métrique g_0 au point p_0 , et qui permet d'assurer que la métrique g_t construite satisfasse encore l'obstruction (1) aux points singuliers résiduels. Malheureusement, nous ne pouvons pas ici conclure en appliquant directement les résultats de [4], car les métriques g_t n'ont aucune raison d'être non dégénérées (même si on peut s'y attendre génériquement). Une

analyse plus sophistiquée, basée sur la seule non dégénérescence de g_0 , est nécessaire, et sera bâtie dans le III de cette série d'articles. Disons juste ici que, dans le cas de la singularité A_k , on peut s'attendre à ce que la désingularisation soit possible pourvu que s'annulent k obstructions portant respectivement sur les 2-jet, 4-jet, \dots , $2k$ -jet de la métrique g_0 en p_0 .

L'article est organisé de la manière suivante. Dans la première section, nous utilisons les liens entre tenseur de Ricci et connexion sur le fibré des 2-formes autoduales pour calculer les termes d'ordre 2 de l'équation d'Einstein. Après en avoir donné quelques propriétés dans la deuxième section, nous appliquons aux instantons gravitationnels de rang 1 ce formalisme dans la troisième section pour obtenir les expressions voulues de λ_1 et μ_1 . Nous obtenons ainsi les développements à raccrocher au germe de g_0 en p_0 pour résoudre le problème d'Einstein de manière précise dans la quatrième section et pour montrer le théorème 1, non seulement pour la singularité A_1 , mais aussi pour les singularités D_k et E_k . Pour les singularités A_k , d'autres termes apparaissent dans le développement, qui demandent une étude plus précise effectuée dans la dernière section, où on détermine notamment l'obstruction à la désingularisation provenant des termes d'ordre 4 de la métrique au point singulier (cette obstruction est tuée par l'invariance sous le groupe de la singularité dans les autres cas).

Convention. Par commodité, on distingue dans cet article la courbure R du fibré Ω^+ muni de la connexion de Levi-Civita, et l'opérateur de courbure riemannien \mathbf{R} , vu comme endomorphisme symétrique de Ω^2 , de sorte que $R = -\mathbf{R}|_{\Omega^+}$.

Remerciements. L'auteur remercie le referee pour ses commentaires qui ont permis de clarifier certains points de l'article.

1. ÉQUATION D'EINSTEIN ET 2-FORMES

Dans cette section, nous installons un formalisme qui permet le calcul, sous forme exploitable, des termes d'ordre 2 de l'équation d'Einstein. Ce type de formalisme est présent dans la littérature pour l'équation des métriques autoduales et d'Einstein, mais ne semble pas utilisé pour la seule condition d'Einstein. Dans notre cadre, son intérêt est de faire apparaître naturellement le terme crucial qui permet le calcul.

Soit M^4 une variété et $V \rightarrow M$ un SO_3 -fibré vectoriel sur M , auquel on pense comme le fibré $\Omega_g^+ \subset \Omega^2$ des 2-formes autoduales pour une métrique initiale g sur M . Pour une autre métrique g sur M , on peut trouver un morphisme de fibrés $\Phi : V \rightarrow \Omega^2$, tel que l'image de Φ soit Ω_g^+ , et Φ soit une isométrie.

Étant donné (V, Φ) , une connexion ∇ sur V est dite sans torsion si pour toute section v de V , on a $d(\Phi(v)) = \Phi \wedge \nabla v$. (Ici, $\nabla v \in \Omega^1 \otimes V$ et $\Phi \in V^* \otimes \Omega^2$,

donc le produit extérieur $(V^* \otimes \Omega^2) \otimes (\Omega^1 \otimes V) \rightarrow \Omega^3$ est la contraction du facteur $V^* \otimes V$, suivie du produit extérieur des formes). Le lemme suivant est classique [6, Proposition 2.3] :

Lemme 2. *La connexion de Levi-Civita de g , tirée en arrière par Φ sur V , est l'unique connexion métrique et sans torsion sur V .*

Ce lemme permet le calcul effectif de la connexion à partir de Φ de la manière suivante. Soit (v_1, v_2, v_3) une base orthonormale orientée de V , au sens où $\langle v_i, v_j \rangle = 2\delta_{ij}$ (convention choisie pour coïncider avec la base naturelle de $\Omega^+(\mathbb{R}^4)$ donnée par $dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4$, $dx^1 \wedge dx^3 - dx^2 \wedge dx^4$ et $dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3$), alors une SO_3 -connexion sur V est donnée par une 1-forme de connexion

$$a = \sum_1^3 a_i \otimes v_i,$$

où $a_i \in \Omega^1$ et $v_i \in V \simeq \mathfrak{so}(V)$; ici, un élément $v \in V$ est identifié à un élément de $\mathfrak{so}(V)$ par produit vectoriel par v .

Par le lemme, notant $\Phi_i = \Phi(v_i)$, la connexion de Levi-Civita a pour (V, Φ) est caractérisée par les équations :

$$d\Phi_1 = a_3 \wedge \Phi_2 - a_2 \wedge \Phi_3, \text{ etc.}$$

où « etc. » signifie que la même formule reste vraie par permutation circulaire des indices. Notons J_i la structure presque-complexe associée à Φ_i par $\Phi_i(\cdot, \cdot) = g(J_i \cdot, \cdot)$, de sorte que $J_1 J_2 = J_3$, etc. Alors, utilisant la formule $*\Phi_i \wedge \cdot = J_i \cdot$ sur les 1-formes, on déduit

$$J_1 * d\Phi_1 = J_2 a_2 + J_3 a_3, \text{ etc.}$$

qui se résout en

$$(3) \quad J_1 a_1 = \frac{1}{2} \left(-J_1 * d\Phi_1 + J_2 * d\Phi_2 + J_3 * d\Phi_3 \right), \text{ etc.}$$

qu'on peut écrire aussi

$$(4) \quad a_1 = \frac{1}{2} \left(d^* \Phi_1 + J_3 d^* \Phi_2 - J_2 d^* \Phi_3 \right), \text{ etc.}$$

La courbure de (V, Φ) , à savoir $R = da + \frac{1}{2}[a, a] \in \Omega^2 \otimes V$, se décompose en parties autoduale et anti-autoduale, $R = R_+ + R_-$. Ici notre convention est que R est bien la courbure, au sens usuel, du fibré Ω^+ , alors que l'opérateur de courbure riemannien, que nous notons \mathbf{R} pour distinguer, est l'opposé : $R = -\mathbf{R}|_{\Omega^+}$. En particulier, on a les formules usuelles [2, 1.128] liant R à la partie sans trace Ric_0 du tenseur de Ricci et au tenseur de Weyl W :

$$(5) \quad R_+ = -\left(\frac{\text{Scal}}{12} + W_+ \right), \quad R_- = \text{Ric}_0.$$

Dans cette équation, l'identification de R_- avec Ric_0 se fait en considérant R_- comme élément de $\text{Hom}(\Omega^-, \Omega^+) \simeq \Omega^- \otimes \Omega^+$ et Ric_0 comme élément de $\text{Sym}_0^2 TM$, et en identifiant $\Omega^- \otimes \Omega^+ \simeq \text{Sym}_0^2 TM$ par

$$(6) \quad u_- \otimes u_+ \mapsto u_- \circ u_+ = u_+ \circ u_-,$$

où u_\pm sont considérés comme des endomorphismes anti-symétriques de TM . (La référence [2] donne la formule $R_- = -\frac{1}{2}g \mathbin{\text{\textcircled{\small \wedge}}} \text{Ric}_0$, où $\mathbin{\text{\textcircled{\small \wedge}}}$ est le produit de Kulkarni-Nomizu, et on vérifie aisément l'identification avec Ric_0 par l'isomorphisme (6)).

Appliquons cette technique de calcul aux petites déformations d'une métrique hyperkählérienne \mathfrak{g} . Le fibré $V = \Omega_{\mathfrak{g}}^+$, plat, est trivialisé par les trois formes de Kähler $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ de \mathfrak{g} . Une autre métrique g est donnée par un morphisme $\Phi : V \rightarrow \Omega^2 = \Omega_{\mathfrak{g}}^+ \oplus \Omega_{\mathfrak{g}}^-$, que l'on peut choisir du type

$$(7) \quad \Phi(v_i) = \exp \begin{pmatrix} \lambda \text{Id}_{\Omega_{\mathfrak{g}}^+} & -\phi^t \\ -\phi & \lambda \text{Id}_{\Omega_{\mathfrak{g}}^-} \end{pmatrix} \omega_i$$

pour un morphisme $\phi : \Omega_{\mathfrak{g}}^+ \rightarrow \Omega_{\mathfrak{g}}^-$ et un réel λ . La déformation se décompose en une déformation conforme de \mathfrak{g} en $e^\lambda \mathfrak{g}$, et une déformation de la structure conforme par $\exp \begin{pmatrix} 0 & -\phi^t \\ -\phi & 0 \end{pmatrix}$.

Notant $\phi_i = \phi(\omega_i) \in \Omega_{\mathfrak{g}}^-$, on a le terme de premier ordre

$$\Phi_i^{(1)} = \lambda \omega_i - \phi_i,$$

lié au premier ordre de déformation de la métrique par

$$g^{(1)} = \lambda \mathfrak{g} + \sum_1^3 \omega_i \circ \phi_i,$$

où l'on a utilisé l'identification $\Omega^- \otimes \Omega^+ \simeq \text{Sym}_0^2 TM$ explicitée dans (6). Le calcul suivant jouera un rôle important :

Lemme 3. *Supposons (M, \mathfrak{g}) hyperkählérienne. Soit Φ donné par (7), satisfaisant la condition de jauge $\sum_1^3 J_i * d\phi_i + d\lambda = 0$. Alors, au premier ordre,*

$$a_i^{(1)} = *d\phi_i, \quad R_i^{(1)} = d * d\phi_i.$$

Si en outre la déformation Φ est infinitésimalement d'Einstein, alors $R_i^{(1)} \in \Omega_{\mathfrak{g}}^+$ est combinaison linéaire des ω_j ,

$$R_i^{(1)} = \sum_1^3 R_{ij} \omega_j;$$

les coefficients R_{ij} sont des fonctions harmoniques réelles, et les termes d'ordre 2 de Ric_0 sont donnés par

$$\text{Ric}_0^{(2)} = d_- a^{(2)} + \frac{1}{2} [a^{(1)}, a^{(1)}]_- - \phi(R_+^{(1)}).$$

Remarque. 1° La condition de jauge est exactement la jauge de Bianchi $B_{\mathbf{g}}g^{(1)} = \delta_{\mathbf{g}}g^{(1)} + \frac{1}{2}d \operatorname{Tr} g^{(1)} = 0$. Pour le voir, on écrit

$$B_{\mathbf{g}}g^{(1)} = d\lambda + \delta_{\mathbf{g}} \sum_1^3 \omega_i \circ \phi_i = d\lambda - \sum_1^3 \operatorname{Tr}(\nabla(\omega_i \circ \phi_i)).$$

Or on a l'identité algébrique $\operatorname{Tr}(\alpha \otimes (u_+ \circ u_-)) = - * (u_+ \wedge *(\alpha \wedge u_-))$ si $\alpha \in \Omega^1$ et $u_{\pm} \in \Omega^{\pm}$ (la théorie des représentations de SO_4 permet de dire que les deux membres sont égaux à une constante près, à expliciter sur un exemple). Donc $\operatorname{Tr}(\nabla(\omega_i \circ \phi_i)) = -J_i * d\phi_i$, ce qui finit de montrer ce qu'on voulait.

On retrouve ainsi que la linéarisation de l'équation d'Einstein en jauge de Bianchi, $\operatorname{Ric}(g) + \delta_g^* B_{\mathbf{g}}g$, pour une métrique hyperkählérienne \mathbf{g} , s'écrit

$$(8) \quad P_{\mathbf{g}} = d_- d_-^*$$

sur la partie sans trace de la métrique (et $\frac{1}{2}\Delta$ sur la partie à trace).

2° Puisque $R_i^{(1)} = da_i^{(1)}$, cette formule implique que la classe de cohomologie de $R_i^{(1)}$ soit triviale. Sur une variété compacte, c'est impossible, sauf si $R_i^{(1)} = 0$: on retrouve ainsi que, sur une variété compacte, une déformation d'Einstein d'une métrique hyperkählérienne reste hyperkählérienne.

3° La paramétrisation précise des termes d'ordre supérieur de la métrique, à partir de (λ, ϕ) , par (7), n'a pas d'importance particulière. Une paramétrisation différente modifierait les termes d'ordre 2 de la métrique, et donc le terme $d_- a^{(2)}$ dans les termes d'ordre 2 de Ric_0 , qui ne jouera pas de rôle dans le calcul des obstructions. Plus loin, on utilisera aussi une paramétrisation de la métrique plus classique, par des 2-tenseurs symétriques : $g = \mathbf{g} + g^{(1)} + g^{(2)} + \dots$. En faisant de la connexion induite sur Ω^+ l'objet géométrique central, le formalisme introduit dans cette section sert à écrire facilement les termes quadratiques induits par les déformations d'ordre 1.

Démonstration. La formule sur $a_i^{(1)}$ (et donc sur $R_i^{(1)}$) se calcule par linéarisation à partir de la formule (3). Par exemple, on obtient

$$\begin{aligned} 2J_1 a_1^{(1)} &= -J_1 * d(\lambda\omega_1 - \phi_1) + J_2 * d(\lambda\omega_2 - \phi_2) + J_3 * d(\lambda\omega_3 - \phi_3) \\ &= -d\lambda + J_1 * d\phi_1 - J_2 * d\phi_2 - J_3 * d\phi_3 \\ &= 2J_1 * d\phi_1 \end{aligned}$$

où la condition de jauge est utilisée à la dernière ligne. Si la déformation infinitésimale est d'Einstein, alors $R_-^{(1)} = d_- a^{(1)} = 0$, donc $R^{(1)} = R_+^{(1)} = d_+ a^{(1)}$ satisfait $dR^{(1)} = 0$. Écrivons $R^{(1)} = \sum R_i^{(1)} v_i = \sum R_{ij} \omega_j \otimes v_i$, alors $dR_i^{(1)} = 0$, donc, puisque $R_i^{(1)}$ est autoduale, $\Delta R_i^{(1)} = 0$, ce qui force $\Delta R_{ij} = 0$ pour chaque (i, j) .

Enfin, $\text{Ric}_0 = \pi_{\Omega^-}(R)$, d'où la dernière formule, où le terme $\phi(R_+^{(1)})$ tient compte de la variation de Ω^- . \square

2. LES ESPACES ALE DE RANG 1

2.1. La construction de Kronheimer. Soit (Y^4, g) un orbifold ALE hyperkählérien, donc issu de la construction de Kronheimer [9], que nous utilisons intensivement dans cette section. À l'infini, (Y, g) est asymptote à \mathbb{C}^2/Γ , avec $\Gamma \subset SU_2$ fini. Nous disons que Y est de rang 1 si

$$b_2^{orb}(Y) = 1.$$

L'exemple de base est la métrique de Eguchi-Hanson sur $T^*P_{\mathbb{C}}^1$, désingularisation de $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, mais de tels exemples existent parmi les déformations de n'importe quelle singularité fuchsienne \mathbb{C}^2/Γ , comme on va le voir maintenant.

Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie associée au groupe Γ par la correspondance de McKay : c'est donc une algèbre de Lie simple de type A, D ou E. Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan, et $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{h}^*$ un système de racines. Pour $\theta \in \mathfrak{R}_+$ soit l'hyperplan $D_\theta = \ker \theta$ de \mathfrak{h} . Alors les instantons gravitationnels asymptotes à \mathbb{C}^2/Γ sont paramétrés par les triplets $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in \mathfrak{h} \otimes \mathbb{R}^3$, et on notera Y_ζ l'espace correspondant. Il est lisse si $\zeta \notin D_\theta \otimes \mathbb{R}^3$ pour tout $\theta \in \mathfrak{R}_+$, et dans ce cas $H^2(Y_\zeta, \mathbb{R})$ s'identifie à \mathfrak{h} . Dans le cas où $\zeta_2 = \zeta_3 = 0$, alors Y_ζ est la désingularisation de \mathbb{C}^2/Γ , dont le diviseur exceptionnel consiste en une configuration de k courbes holomorphes, formant une base de $H_2(Y_\zeta, \mathbb{Z})$, et correspondant aux k racines simples $\theta_1, \dots, \theta_k$ de \mathfrak{h} . (La configuration des courbes donne le diagramme de Dynkin de \mathfrak{g}).

Le cas de rang 1 est au contraire celui d'une plus petite désingularisation partielle, contenant une seule courbe holomorphe. On en construit de la manière suivante : soit $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ et $L \subset \mathfrak{h}$ la droite définie par $L = \bigcap_{i=1, \dots, k, i \neq i_0} D_{\theta_i}$; alors si $\zeta \in L \otimes \mathbb{R}^3$, l'instanton Y_ζ est un orbifold, dont le H_{orb}^2 s'identifie à L . L'indice i_0 correspond à un nœud du diagramme de Dynkin, et Y_ζ a alors un nombre de points singuliers égal au nombre de composantes connexes du diagramme de Dynkin privé du nœud correspondant à i_0 . Chacune de ces composantes est encore un diagramme de Dynkin, correspondant au sous-groupe fini $\Gamma' \subset SU_2$ tel que le point singulier soit de type \mathbb{C}^2/Γ' .

En particulier, si on choisit i_0 de sorte que le nœud correspondant soit à une extrémité du diagramme de Dynkin, alors Y_ζ admet un seul point orbifold, de type \mathbb{C}^2/Γ' où Γ' est un sous-groupe fini de SU_2 dont le diagramme de Dynkin correspondant est de rang $k - 1$. Ainsi obtient-on à partir de A_k une singularité A_{k-1} , à partir de D_k une singularité A_{k-1} ou D_{k-1} , et à partir de E_k ($k = 6, 7, 8$) une singularité A_{k-1} , D_{k-1} ou E_{k-1} ($k \neq 6$).

Fixons à présent un instanton gravitationnel, $Y = (Y_\zeta, \mathfrak{g})$, de rang 1. Compte tenu de l'action de SO_3 sur les $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ et de l'appartenance des ζ_i à une droite $L \subset \mathfrak{h}$, on peut se ramener au cas où $\zeta_2 = \zeta_3 = 0$, c'est-à-dire choisir la structure complexe I_1 de sorte qu'elle soit la structure complexe correspondant à la désingularisation partielle de \mathbb{C}^2/Γ , obtenue en ajoutant une seule courbe holomorphe Σ .

Décrivons brièvement la construction d'un tel instanton : si \mathfrak{M} est la représentation régulière du groupe fini Γ , alors Y est un quotient hyperkählérien $(\text{End } \mathfrak{M} \otimes \mathbb{C}^2)^\Gamma // \text{PSU}(\mathfrak{M})^\Gamma$, où Γ agit sur \mathbb{C}^2 par l'inclusion naturelle $\Gamma \subset SU_2$. Les points du quotient sont les solutions, modulo l'action de $\text{PSU}(\mathfrak{M})^\Gamma$, des équations, pour $(\alpha, \beta) \in (\text{End } \mathfrak{M} \times \text{End } \mathfrak{M})^\Gamma$:

$$\begin{cases} [\alpha, \alpha^*] + [\beta, \beta^*] = \zeta_1, \\ [\alpha, \beta] = \zeta_2 + i\zeta_3 = 0. \end{cases}$$

La résolution partielle des singularités

$$p : Y_{\zeta_1, 0, 0} \rightarrow Y_{0, 0, 0} = \mathbb{C}^2/\Gamma$$

s'obtient en considérant (α, β) dans le quotient symplectique complexe $(\text{End } \mathfrak{M} \otimes \mathbb{C}^2)^\Gamma // \text{PSL}(\mathfrak{M})^\Gamma$.

2.2. L'action de cercle. L'instanton gravitationnel admet une action holomorphe de \mathbb{C}^* pour la structure complexe J_1 , donnée par $(\alpha, \beta) \mapsto (z\alpha, z\beta)$ (cela commute bien à l'action de Γ). Comme le seul point fixe sur $(\text{End } \mathfrak{M} \otimes \mathbb{C}^2)^\Gamma$ est l'origine, et comme l'action de \mathbb{C}^* commute à la résolution partielle p , les points fixes de l'action de \mathbb{C}^* sur Y doivent être sur la courbe rationnelle $p^{-1}(0) = \Sigma$. Dans le cas A_1 , on a $Y = T^*\mathbb{C}P^1$ et tous les points de Σ sont fixes ; dans les autres cas, l'action est généralement non triviale sur Σ et fixe les points singuliers restant sur Σ .

Restreignant l'action de \mathbb{C}^* au cercle, on obtient une action isométrique de S^1 sur Y , holomorphe pour J_1 , agissant sur le couple (J_2, J_3) par rotation. Notons ξ le champ de vecteurs sur Y induit par l'action infinitésimale de S^1 . On a alors l'observation suivante :

Lemme 4 ([8, proposition 5.1]). *Soit m une application moment pour l'action de cercle sur (Y, ω_1) , c'est-à-dire satisfaisant $dm = -\xi \lrcorner \omega_1$, alors m est un potentiel pour (ω_2, J_2) et (ω_3, J_3) , c'est-à-dire $\omega_i = \frac{1}{2}dJ_i dm$ pour $i = 2, 3$.*

Démonstration. Pour fixer correctement les constantes, nous rappelons la preuve. La forme symplectique complexe $\omega_2 + i\omega_3$ sur \mathbb{C}^2 est $dz^1 \wedge dz^2$, donc l'action de cercle est de poids 2, d'où $\mathcal{L}_\xi(\omega_2 + i\omega_3) = 2i(\omega_2 + i\omega_3)$. Il en résulte $\mathcal{L}_\xi \omega_3 = 2\omega_2$. Or $J_2 dm = -J_2(\xi \lrcorner \omega_1) = \xi \lrcorner \omega_3$, donc

$$dJ_2 dm = \mathcal{L}_\xi \omega_3 = 2\omega_2.$$

□

Il est facile de voir que

$$(9) \quad m(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2).$$

On peut aussi montrer directement que le potentiel de ω_2 et ω_3 donne le potentiel sur Y parce que $\zeta_2 = \zeta_3 = 0$, voir [5, théorème 7].

Dans la suite nous choisirons (9) pour le potentiel de Y pour J_2 et J_3 , ce qui permet de lever l'ambiguïté sur la constante additive. Ce choix se décrit de la manière suivante : les instantons gravitationnels coïncident à l'ordre 4 avec la métrique euclidienne [9, proposition 3.14] :

$$(10) \quad \mathbf{g} - \mathbf{e} = O\left(\frac{1}{r^4}\right).$$

(Il est facile de le vérifier via la description ci-avant par quotient). Alors le choix (9) pour le potentiel est caractérisé par le développement à l'infini :

$$(11) \quad m = \frac{r^2}{2} + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

2.3. La cohomologie L^2 . Dans un espace ALE, la cohomologie L^2 en degré 2 est égale à la cohomologie à support compact. Il en résulte immédiatement que Y , de rang 1, admet une unique forme harmonique L^2 , duale de Poincaré de $2\pi\Sigma$, que nous noterons Ω : donc $\Omega \in \Gamma(\Omega^-)$ et $d\Omega = 0$.

Lemme 5. *La forme Ω admet un potentiel global ψ , singulier sur Σ : $\Omega = dd^C\psi$ avec :*

- près de Σ , $\psi \sim -\frac{1}{2} \ln |\sigma|^2$, où $\sigma \in H^0(\mathcal{O}(\Sigma))$ est une équation de Σ ;
- à l'infini, dans le cas d'un groupe Γ correspondant aux singularités A_1 , D_k ou E_k ,

$$\psi = \frac{\pi \text{Vol } \Sigma}{\text{Vol}(S^3/\Gamma)} \frac{1}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^6}\right),$$

et dans le cas de la singularité A_k ($k \geq 1$),

$$\psi = (k+1) \frac{\text{Vol } \Sigma}{2\pi} \frac{1}{r^2} - (k^2 - 1) \left(\frac{\text{Vol } \Sigma}{2\pi} \right)^2 \frac{|z^1|^2 - |z^2|^2}{r^6} + O\left(\frac{1}{r^6}\right),$$

où (z^1, z^2) sont des coordonnées à l'infini diagonalisant l'action de $\Gamma = \mathbb{Z}_{k+1}$.

Remarque 6. Le facteur $|z^1|^2 - |z^2|^2$ est intrinsèque au sens suivant : les deux coordonnées à l'infini z^1 et z^2 sont les directions propres de l'action de \mathbb{Z}_{k+1} . En revanche, le signe résulte d'un choix arbitraire d'écriture de l'instanton gravitationnel ; il sera cohérent avec les autres calculs effectués.

Démonstration. Soit χ une fonction à support compact, égale à 1 dans un voisinage de Σ . Par la formule de Lelong-Poincaré, la classe de cohomologie de $\Omega + \frac{1}{2} dd^C(\chi \ln |\sigma|^2)$ est nulle, donc il existe une fonction $g \in L^2$ telle que

$\Omega = dd^C(g - \frac{1}{2}\chi \ln |\sigma|^2)$. Posons $\psi = g - \frac{1}{2}\chi \ln |\sigma|^2$: puisque Ω est anti-autoduale, ψ est harmonique.

Compte tenu du comportement asymptotique (10), les premiers termes de ψ à l'infini coïncident avec ceux d'une fonction harmonique sur \mathbb{R}^4 :

$$\psi = \frac{a}{r^2} + \frac{q(x)}{r^6} + O\left(\frac{1}{r^6}\right),$$

où q est une forme quadratique sans trace sur \mathbb{R}^4 . La valeur du coefficient a provient de l'intégration par parties suivante :

$$0 = \int \Delta\psi \cdot 1 = -2\pi \text{Vol } \Sigma - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \frac{\partial\psi}{\partial r} = -2\pi \text{Vol } \Sigma + 2a \text{Vol}(S^3/\Gamma).$$

La forme quadratique sans trace $q(x)$ doit être invariante sous l'action du groupe Γ :

- pour les groupes Γ correspondant à D_k et E_k il n'existe pas de telle forme invariante, donc $q = 0$;
- dans le cas A_1 ($\Gamma = \mathbb{Z}_2$), la métrique g est la métrique de Eguchi-Hanson, de groupe d'isométries U_2 , donc le potentiel doit être invariant sous l'action de U_2 , ce qui impose aussi $q = 0$. (On peut calculer explicitement ce potentiel).

Dans le cas d'une singularité A_k , il y a 3 formes quadratiques invariantes sous A_k : $q_1 = |z^1|^2 - |z^2|^2$ et les parties réelle et imaginaire de $z^1 z^2 = q_2 + iq_3$, donc

$$q = a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3.$$

Pour calculer les coefficients a_i , soit φ_i la fonction harmonique sur Y , quadratique à l'infini :

$$\varphi_i(x) = q_i(x) + O(r^{-2}).$$

Alors la même intégration par parties que précédemment donne

$$\begin{aligned} 0 &= \int \Delta\psi \cdot \varphi_i \\ &= -2\pi \int_{\Sigma} \varphi_i + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \psi \partial_r \varphi_i - \partial_r \psi \varphi_i \\ &= -2\pi \int_{\Sigma} \varphi_i + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \frac{6q_i \varphi_i}{r^7}, \end{aligned}$$

d'où résulte

$$a_i = \frac{\pi \int_{\Sigma} \varphi_i}{3 \int_{S^3/\Gamma} q_i^2}.$$

À présent, rappelons que Y est une résolution partielle de $\mathbb{C}^2/\Gamma = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{k+1}$, donc $z^1 z^2$ est une fonction holomorphe globale sur Y , nulle sur Σ . Ainsi $\varphi_2 + i\varphi_3 = z^1 z^2$ et donc $a_2 = a_3 = 0$. La valeur de a_1 résulte en revanche

d'un calcul explicite avec l'ansatz de Gibbons-Hawking, laissé en annexe A. \square

On déduit le terme principal à l'infini de Ω : écrivant $\psi = \frac{c_T}{r^2} + \dots$, on calcule

$$(12) \quad \Omega = \frac{4c_T}{r^4} (dr \wedge J_1 dr - J_2 dr \wedge J_3 dr) + \begin{cases} O(r^{-8}) & \text{pour } A_1, D_k, E_k, \\ O(r^{-6}) & \text{pour } A_k, k \geq 2. \end{cases}$$

On trouve un premier terme asymptotique indépendant de l'espace ALE choisi (à constante près), et en particulier égal à celui de la métrique de Eguchi-Hanson utilisée dans [4].

Enfin, il y a un lien important entre la forme harmonique Ω et l'application moment m . En effet, ζ étant un vecteur de Killing, dual (au sens de la métrique) de la 1-forme $J_1 dm$, on déduit que

$$\alpha = \nabla J_1 dm$$

est en réalité une 2-forme, donc $\alpha = -\frac{1}{2} dd^C m$. De $dJ_i dm = 2\omega_i$ pour $i = 2, 3$, on déduit immédiatement la partie autoduale :

$$\alpha^+ = -\omega_1.$$

Par conséquent, la partie anti-autoduale est fermée : $d\alpha^- = 0$, c'est donc une 2-forme harmonique, nécessairement un multiple de Ω , déterminé par la contrainte $\int_{\Sigma} \alpha = 0$, donc :

$$\alpha^- = s\Omega, \quad s = \frac{\int_{\Sigma} \omega_1}{\int_{\Sigma} \Omega}.$$

Par la théorie générale dans les espaces à poids, on sait qu'existe une 2-forme autoduale $\phi = O(r^2)$, telle que $d_- d_-^* \phi = \Omega$. (La forme ϕ est unique à l'addition près d'un multiple de Ω). La condition $(d_- \oplus d^*)(d_-^* \phi) = \Omega \oplus 0$ force l'égalité $d^* \phi = -\frac{2}{s} d^C m$, c'est-à-dire

$$J_1 d^* \phi - \frac{2}{s} dm = 0,$$

ce qu'on interprète en disant que $-\frac{2}{s} mg + \omega_1 \circ \phi$ est en jauge de Bianchi.

3. DÉVELOPPEMENTS EXPLICITES SUR L'INSTANTON GRAVITATIONNEL

La résolution du problème d'Einstein sur le recollement de (M_0, g_0) et d'un instanton gravitationnel Y se fait en modifiant la métrique g de Y par des termes, explosant à l'infini, et permettant de la faire coïncider à un ordre élevé avec g_0 après homothétie. Dans [4], il est montré que le théorème 1 peut être déduit des formules explicites du développement jusqu'à l'ordre 2 ($g + th_1 + t^2 h_2$). Le but de cette section est ce calcul explicite, ainsi que la généralisation de la méthode à tous les orbifolds ALE de rang 1.

3.1. Termes d'ordre 2 du recollement. Les résultats de [4], obtenus en recollant une métrique de Eguchi-Hanson, s'étendent au recollement d'un espace ALE de rang 1. En effet, la théorie de déformation d'un tel espace est similaire à celle de la métrique de Eguchi-Hanson : l'espace des déformations d'Einstein, isomorphe à $H^2(M, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$, a la même dimension que celui pour les métriques de Eguchi-Hanson, et l'asymptotique de la forme harmonique L^2 est la même que pour la métrique de Eguchi-Hanson.

Rappelons que la linéarisation en jauge de Bianchi de l'équation d'Einstein est $P_g = d_- d_-^*$ sur la partie sans trace de la métrique, et $\frac{1}{2}\Delta$ sur la partie à trace, voir (8). Le noyau L^2 de P_g , qui est aussi son conoyau, est donc constitué des trois tenseurs

$$(13) \quad o_i = \Omega \otimes \omega_i,$$

où Ω est la forme harmonique L^2 étudiée à la section précédente. Un point important dans la résolution est l'existence de 2-tenseurs symétriques k_i , en jauge de Bianchi, tels que $P_g k_i = o_i$: la démonstration de [4, proposition 2.1] s'étend en utilisant le lien entre Ω et m établi section 2.3.

La méthode utilisée dans [4] consiste à modifier la métrique ALE g par les termes d'ordre 2 de g_0 au point orbifold. On choisit donc un 2-tenseur symétrique homogène dans \mathbb{R}^4 , de type

$$H = H_{ijkl} x^i x^j dx^k dx^l,$$

décrivant le terme d'ordre 2 de g_0 en p_0 : $g_0 = e + H + O(x^4)$. Le tenseur de courbure de g_0 au point p_0 ne dépend que de H et sera noté $R(H)$. Quitte à faire agir un difféomorphisme ψ tel que $\psi - \text{Id} = O(x^3)$, on peut supposer que H est en jauge de Bianchi :

$$(14) \quad B_e H = 0.$$

Le problème à résoudre sur l'espace ALE Y est, pour un 2-tenseur symétrique $h_1 = \lambda - \sum_1^3 \omega_i \circ \phi_i$:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_g \text{Ric}(h_1) = \Lambda g, \\ B_g h_1 = 0, \\ h_1 = H + O(r^{-2+\epsilon}) \text{ pour tout } \epsilon > 0, \\ \int_{\Sigma} \phi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{array} \right.$$

La dernière équation vise à écarter l'ambiguïté provenant du noyau (13). Pour la métrique de Eguchi-Hanson, il s'agit exactement de la condition $\int_{\Sigma} \langle h_1, o_i \rangle = 0$ qui apparaît dans [4].

En général, on ne peut pas résoudre le problème (15), et on résout à la place, pour des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_g \text{Ric}(h_1) = \Lambda g + \sum_1^3 \lambda_i o_i, \\ B_g h_1 = 0, \\ h_1 = H + O(r^{-2+\epsilon}) \text{ pour tout } \epsilon > 0, \\ \int_{\Sigma} \phi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{array} \right.$$

Comme montré dans [4, § 3], si H satisfait (14), alors le problème (16) est équivalent au problème

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_g h_1 = \Lambda g + \sum_1^3 \lambda_i o_i, \\ h_1 = H + O(r^{-2+\epsilon}) \text{ pour tout } \epsilon > 0, \\ \int_{\Sigma} \phi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{array} \right.$$

Le premier lemme suivant généralise au cas d'un instanton de rang 1 les résultats [4, § 3-4] sur l'existence d'une solution au système (la démonstration est la même). Le second donne le calcul explicite, crucial dans la suite, des termes d'ordre 2 de la courbure de $g + th_1$.

Lemme 7. *Le problème (16) a toujours une solution, avec les λ_i donnés par*

$$\lambda_i = \frac{\pi \text{Vol } \Sigma}{\|\Omega\|^2} \langle R_+(H)(I_1), I_i \rangle.$$

En particulier, le système (15) a une solution si et seulement si

$$R_+(H)(I_1) = 0.$$

□

La formule donnée ici coïncide avec celle obtenue pour la singularité A_1 dans [4]. Nous redonnons ici une preuve, différente, car nous avons besoin de la valeur précise de la constante, qui dépend de la singularité.

Le facteur $\|\Omega\|^2$, la valeur exacte duquel nous n'avons pas besoin dans la suite, se calcule néanmoins facilement comme nombre d'intersection orbifold : par exemple, si la singularité résiduelle est A_{k-1} , alors

$$(18) \quad \|\Omega\|^2 = \int_Y -\Omega \wedge \Omega = -4\pi^2 [\Sigma]^2 = 4\pi^2 \frac{k+1}{k}.$$

Démonstration. Clairement,

$$\lambda_i = \frac{1}{\|o_i\|^2} \langle o_i, P_g h_1 \rangle = \frac{1}{\|\Omega\|^2} \langle \Omega, d_- d_-^* \phi_i \rangle,$$

et

$$\begin{aligned}
\langle \Omega, d_- d_-^* \phi_i \rangle &= - \int_Y \Omega \wedge d_- d_-^* \phi_i \\
&= - \int_Y \Omega \wedge d d^* \phi_i \\
&= - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \Omega \wedge d^* \phi_i \\
&= - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} d^C \psi \wedge d d^* \phi_i \\
&= - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} d^C \psi \wedge R_i^{(1)} \\
&= - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \langle dr \wedge d^C \psi, R_i^{(1)} \rangle
\end{aligned}$$

puisque $R_i^{(1)}$ est autoduale. Or $dr \wedge d^C(\frac{1}{r^2}) = -\frac{2}{r^3} dr \wedge J dr$, donc, vu l'asymptotique de ψ donnée par le lemme 5,

$$\langle \Omega, d_- d_-^* \phi_i \rangle = \pi(\text{Vol } \Sigma) \langle R(H)(I_i), I_1 \rangle.$$

□

Lemme 8. *Supposons $R_+(H)(I_1) = 0$, de sorte que*

$$(19) \quad R_+(H) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & R_{22} & R_{23} & \\ & R_{32} & R_{33} & \end{pmatrix}.$$

Alors, au premier ordre sur Y , dans la direction de la déformation $h_1 = (\phi, \lambda)$ satisfaisant (15) :

- la courbure $R_+^{(1)}$ est constante, donnée par (19) ;
- quitte à modifier H par l'action d'un difféomorphisme ψ de M_0 tel que $\psi - \text{Id} = O(x^3)$, la forme de connexion sur V est

$$(20) \quad a^{(1)} = R_{22} \alpha_2 \otimes v_2 + R_{23} (\alpha_2 \otimes v_3 + \alpha_3 \otimes v_2) + R_{33} \alpha_3 \otimes v_3,$$

où $\alpha_i = \frac{1}{2} J_i dm$ satisfait $d\alpha_i = \omega_i$ pour $i = 2, 3$ (lemme 4).

Enfin, les termes d'ordre 2 de la courbure de Ricci sont donnés par

$$\begin{aligned}
\text{Ric}_0^{(2)} &= d_- a^{(2)} + 2(R_{22} R_{33} - R_{23}^2) (\alpha_2 \wedge \alpha_3)_- \otimes v_1 \\
&\quad - (R_{22} \phi_2 + R_{23} \phi_3) \otimes v_2 - (R_{23} \phi_2 + R_{33} \phi_3) \otimes v_3.
\end{aligned}$$

Démonstration. Puisque la déformation infinitésimale est d'Einstein, par le lemme 3, les coefficients de $R_+^{(1)}$ sont harmoniques ; comme ils sont asymptotes à ceux du tenseur constant $R_+(H)$, ils sont nécessairement constants, d'où la première assertion.

La forme de connexion $a^{(1)} = \sum a_i^{(1)} \otimes v_i$ satisfait

$$(21) \quad \begin{cases} da_i^{(1)} = R_i^{(1)}, \\ d^* a_i^{(1)} = 0, \\ a_i^{(1)} \sim a_{i,\infty}^{(1)}, \end{cases}$$

où la 1-forme $a_{i,\infty}^{(1)}$, à coefficients linéaires en les coordonnées x_i , est donnée par les termes d'ordre 1 en p_0 de la connexion de Levi-Civita de g_0 .

Il en résulte que $a_i^{(1)}$ est déterminée à une 1-forme harmonique près, et est donc déterminée par son comportement asymptotique à l'infini. Pour fixer celui-ci, choisissons autour de p_0 des coordonnées (x^i) géodésiques pour la métrique g_0 (ce qui revient à l'action du difféomorphisme indiqué dans l'énoncé du lemme). On obtient

$$(22) \quad \partial_r \lrcorner a_{i,\infty}^{(1)} = 0,$$

au risque d'avoir perdu la deuxième condition dans (21). Néanmoins, il s'avère que ce n'est pas le cas : en effet, la condition (22), avec $da_i^{(1)} = R_i^{(1)}$, détermine évidemment $a_{i,\infty}^{(1)}$. Or, on va voir que la forme (20) satisfait à la fois le système (21) et l'équation (22) : c'est donc la solution unique cherchée.

Vérifions maintenant que la formule proposée (20) satisfait à la fois (21) et (22) : compte tenu que $d\alpha_i = \omega_i$ et $d^* \alpha_i = 0$ pour $i = 2, 3$, l'équation (21) est claire ; en outre, près de l'infini, d'après (11),

$$\partial_r \lrcorner \alpha_i = -\frac{1}{2} dm(J_i \partial_r) = O(r^{-3}),$$

d'où résulte (22).

Enfin, la formule sur $\text{Ric}_0^{(2)}$ se calcule immédiatement à partir de (20) et du lemme 3. \square

3.2. Termes d'ordre 4 du recollement. Cas A_1 , D_k et E_k . L'étape suivante de la résolution du problème d'Einstein consiste à faire coïncider les termes de la modification de g avec ceux du développement de g_0 à l'ordre 4, donnés par un tenseur

$$H^{(2)} = H_{ijklmn} x^i x^j x^k x^l dx^m dx^n,$$

qu'à nouveau on peut supposer mis en jauge de Bianchi :

$$B_e H^{(2)} = 0.$$

On pose le système, pour des réels μ_1, μ_2, μ_3 :

$$(23) \quad \begin{cases} d_g \text{Ric}(h_2) = \Lambda h_1 - \text{Ric}^{(2)}(\mathbf{g} + h_1) + \sum_1^3 \mu_i o_i, \\ B_g h_2 = 0, \\ h_2 = H^{(2)} + O(r^\epsilon) \text{ pour tout } \epsilon > 0. \end{cases}$$

L'existence d'une solution provient de [4, lemme 14.1]¹, et nous sommes intéressés par le calcul de l'obstruction :

Lemme 9. *Supposons $\det R_+(p_0) = 0$ (de sorte que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$). Si Γ est le groupe correspondant à la singularité A_1, D_k ou E_k , alors*

$$\mu_1 = \frac{4\pi}{\|\Omega\|^2} (R_{22}R_{33} - R_{23}^2) \int_{\Sigma} m \omega_1.$$

Démonstration. D'après (10), puisque g_0 est d'Einstein, on a

$$(24) \quad P_g H^{(2)} + \text{Ric}^{(2)}(\mathbf{g} + h_1) - \Lambda h_1 = O(r^{-2+\epsilon})$$

pour tout $\epsilon > 0$. On cherche alors la solution sous la forme

$$h_2 = \chi H^{(2)} + \eta,$$

où χ est une fonction sur Y qui vaut 1 dans un voisinage de l'infini, et 0 dans une large partie compacte, et η satisfait l'équation

$$(25) \quad P_g \eta - \sum_1^3 \mu_i o_i = -P_g(\chi H^{(2)}) - \text{Ric}^{(2)}(\mathbf{g} + h_1) + \Lambda h_1.$$

Par (24), le membre de droite est $O(r^{-2+\epsilon})$, d'où il résulte qu'on peut effectivement trouver une solution h_2 du système (23), avec

$$\mu_1 = \frac{1}{2\|\Omega\|^2} \int_Y \langle o_1, P_g(\chi H^{(2)}) + \text{Ric}^{(2)}(\mathbf{g} + h_1) - \Lambda h_1 \rangle.$$

Appliquant le lemme 8, on obtient donc

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{\|\Omega\|^2} \int_Y \langle \Omega, d_- d^*(\chi H^{(2)}) + d_- a_1^{(2)} + 2(R_{22}R_{33} - R_{23}^2)(\alpha_2 \wedge \alpha_3)_- - \Lambda \phi_1 \rangle \\ &= -\frac{1}{\|\Omega\|^2} \int_Y \Omega \wedge (d(d^*(\chi H^{(2)}) + a_1^{(2)}) + 2(R_{22}R_{33} - R_{23}^2)\alpha_2 \wedge \alpha_3 - \Lambda \phi_1) \\ &= -\frac{1}{\|\Omega\|^2} \left(\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \Omega \wedge (d^* H^{(2)} + a_1^{(2)}) \right. \\ &\quad \left. + 2(R_{22}R_{33} - R_{23}^2) \int_Y \Omega \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 - \Lambda \int_Y \Omega \wedge \phi_1 \right). \end{aligned}$$

1. Il y a une faute de frappe dans le système analogue (103) de [4], où le terme d'erreur est seulement en $O(r^2)$, ce qui laisse subsister une ambiguïté sur les coefficients μ ; le contrôle $O(r^\epsilon)$ est nécessaire pour obtenir un recollement suffisamment bon de la métrique $\mathbf{g} + th + t^2 h_2$ sur Y avec g_0 .

Attention, dans cette équation, $a_1^{(2)}$ contient exclusivement les termes d'ordre 2 de la forme de connexion de $\mathfrak{g} + \mathfrak{h}_1$, ceux provenant de \mathfrak{h}_2 interviennent via $d^*H^{(2)}$.

Examinons séparément les trois termes de la formule. Compte tenu de (15) et de (12), nous avons, dans les cas A_1 , D_k et E_k ,

$$(26) \quad \Omega \wedge (d^*H^{(2)} + a_1^{(2)}) = \text{terme en } r^{-1} + O(r^{-5+\epsilon}),$$

donc, intégré contre le volume qui croît en r^3 , on n'obtient aucun terme constant quand $r \rightarrow \infty$. Le premier terme ne contribue donc pas à μ_1 .

Évaluons maintenant la deuxième intégrale, en utilisant le fait que $\Omega = dd^C\psi$, où ψ est le potentiel fourni par le lemme 5. On obtient immédiatement, en notant Σ_r un voisinage tubulaire de Σ de taille r ,

$$(27) \quad \int_Y dd^C\psi \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 = \int_Y d^C\psi \wedge d(\alpha_2 \wedge \alpha_3) \\ + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} d^C\psi \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 - \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial\Sigma_r} d^C\psi \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3.$$

Examinons le premier terme de (27). Pour $i = 2, 3$, on a $d\alpha_i = \omega_i$ et $\alpha_i = \frac{1}{2}J_i dm$; avec l'identité $\omega_i \wedge \beta = - * J_i \beta$ sur les 1-formes, on obtient

$$d^C\psi \wedge d(\alpha_2 \wedge \alpha_3) = -d^C\psi \wedge * J_1 dm = -dm \wedge * d\psi,$$

d'où résulte, puisque ψ est harmonique,

$$\int_Y d^C\psi \wedge d(\alpha_2 \wedge \alpha_3) = - \int_Y dm \wedge * d\psi \\ = - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} m * d\psi + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial\Sigma_r} m * d\psi.$$

Vu l'asymptotique (11) pour m , le terme constant dans l'intégrale

$$\int_{S_r} d^C\psi \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 - m * d\psi$$

est nul, donc il n'y a pas de contribution venant de l'infini. Il reste ainsi

$$\int_Y dd^C\psi \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial\Sigma_r} -d^C\psi \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + m * d\psi \\ = 2\pi \int_{\Sigma} \alpha_2 \wedge \alpha_3 - m\omega_1.$$

Comme $\alpha_i = \frac{1}{2}J_i dm$ avec $dm = -\xi \lrcorner \omega_1$, et comme Σ est globalement préservée par l'action de cercle, le vecteur ξ est tangent à Σ et il en résulte $i_{\Sigma}^* \alpha_2 = i_{\Sigma}^* \alpha_3 = 0$. Finalement,

$$\int_Y dd^C\psi \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 = -2\pi \int_{\Sigma} m\omega_1.$$

La formule annoncée sur μ_1 se déduit alors du fait que la troisième intégrale n'apporte aucune contribution : en effet, vu la formule (20) pour la connexion, on a $d\phi_1 = 0$ et donc

$$\begin{aligned}
 \int_Y \Omega \wedge \phi_1 &= - \int_Y dd^C \psi \wedge \phi_1 \\
 (28) \quad &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} d^C \psi \wedge \phi_1 - \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Sigma_r} d^C \psi \wedge \phi_1 \\
 &= -2\pi \int_{\Sigma} \phi_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Vu les développements de ψ et h_1 à l'infini, il n'y a en effet pas de contribution quand $r \rightarrow \infty$. \square

3.3. Termes d'ordre 4 du recollement. Cas A_k . Pour traiter le cas A_k , nous avons besoin de quelques préliminaires sur la structure des termes d'ordre 2 de la courbure d'une métrique d'Einstein. Toujours déformant la métrique hyperkählérienne \mathbf{g} , écrivons le développement de la courbure de Ω^+ comme $R = R^{(1)} + R^{(2)} + \dots$. L'identité de Bianchi $dR + [a \wedge R] = 0$ donne les identités :

$$(29) \quad dR^{(1)} = 0$$

$$(30) \quad dR^{(2)} + [a^{(1)} \wedge R^{(1)}] = 0.$$

Par le lemme 8, et sous ses hypothèses, on calcule

$$\begin{aligned}
 [a^{(1)} \wedge R^{(1)}]_1 &= 2(R_{22}R_{33} - R_{23}^2)(\alpha_2 \wedge \omega_3 - \omega_2 \wedge \alpha_3) \\
 &= -2(R_{22}R_{33} - R_{23}^2)d(m\omega_1)
 \end{aligned}$$

car $*(\alpha_2 \wedge \omega_3 - \omega_2 \wedge \alpha_3) = J_3\alpha_2 - J_2\alpha_3 = -J_1dm = -*d(m\omega_1)$. Donc, à partir de (30),

$$(31) \quad R_1^{(2)} = \varrho + 2(R_{22}R_{33} - R_{23}^2)m\omega_1, \quad d\varrho = 0.$$

On notera que, puisque $R_1^{(1)} = 0$, les parties autoduales et antiautoduales de $R_1^{(2)}$ pour la métrique \mathbf{g} ou sa déformation coïncident. Par la condition d'Einstein, on a donc $R_1^{(2)} \in \Omega^+$ (pour la métrique \mathbf{g}) et ainsi $\varrho \in \Omega^+$ est harmonique.

Le calcul ci-avant s'applique aussi au développement formel de la métrique g_0 au point p_0 : dans ce cas, on se trouve sur \mathbb{R}^4 et m prend la valeur $\frac{r^2}{2}$, donc

$$(32) \quad R_1^{(2)} = \varpi + (R_{22}R_{33} - R_{23}^2)r^2\omega_1,$$

où les coefficients de $\varpi \in \Omega^+(\mathbb{R}^4)$ sont des formes quadratiques, et $d\varpi = 0$.

Nous aurons besoin du calcul suivant.

Lemme 10. Soit $\varpi = \sum_1^3 z_i \omega_i \in \Omega^+(\mathbb{R}^4)$ une forme autoduale fermée, dont les coefficients z_i sont des formes quadratiques. Soit $F = \frac{r_1^2 - r_2^2}{r^6}$. Alors

$$(33) \quad \int_{S^3} d^C F \wedge \varpi = \frac{\pi^2}{2} (-\partial_{11}^2 - \partial_{22}^2 + \partial_{33}^2 + \partial_{44}^2) z_1.$$

On remarquera que le membre de gauche de (33) est homogène de degré 0, ce qui donne un sens à la formule.

Démonstration. Par un calcul direct,

$$(d(r^2) \wedge d^C F)_+ = \frac{4}{r^6} \left((r_2^2 - r_1^2) \omega_1 + (x^1 x^4 + x^2 x^3) \omega_2 - (x^1 x^3 - x^2 x^4) \omega_3 \right).$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \int_{S^3} d^C F \wedge \varpi &= \int_{S^3} \langle dr \wedge d^C F, \varpi \rangle \\ &= \int_{S^3} \langle (dr \wedge d^C F)_+, \varpi \rangle \\ &= 4 \int_{S^3} \frac{1}{8} \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{r^7} (-\partial_{11}^2 - \partial_{22}^2 + \partial_{33}^2 + \partial_{44}^2) z_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{(x^1 x^4 + x^2 x^3)^2}{r^7} (\partial_{14}^2 + \partial_{23}^2) z_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{(x^1 x^3 - x^2 x^4)^2}{r^7} (\partial_{13}^2 - \partial_{24}^2) z_3 \end{aligned}$$

Si l'on suppose en outre $d\varpi = 0$, alors on voit aisément que

$$(\partial_{14}^2 + \partial_{23}^2) z_2 - (\partial_{13}^2 - \partial_{24}^2) z_3 = \frac{1}{2} (-\partial_{11}^2 - \partial_{22}^2 + \partial_{33}^2 + \partial_{44}^2) z_1.$$

Comme par ailleurs

$$\int_{S^3} (x^1 x^4 + x^2 x^3)^2 = \frac{1}{4} \int_{S^3} (r_1^2 - r_2^2)^2 = \frac{\pi^2}{6},$$

la formule devient

$$\int_{S^3} d^C F \wedge \varpi = \frac{\pi^2}{2} (-\partial_{11}^2 - \partial_{22}^2 + \partial_{33}^2 + \partial_{44}^2) z_1.$$

□

Remarque 11. Si on fait le même calcul avec $\varpi \in \Omega^-(\mathbb{R}^4)$, avec les autres hypothèses inchangées, on trouve $\int_{S^3} d^C F \wedge \varpi = 0$. (Ce fait peut s'expliquer aussi en voyant que $d^C F$ et ϖ vivent dans des représentations irréductibles distinctes de SO_4).

Nous pouvons maintenant passer au calcul de μ_1 dans les cas restants :

Lemme 12. *Dans le cas A_k , on a*

$$\mu_1 = \frac{(\text{Vol } \Sigma)^2}{\|\Omega\|^2} \left\{ (k+1)(R_{22}R_{33} - R_{23}^2) - \frac{1}{16}(k-1) \langle (\nabla_{11}^2 + \nabla_{22}^2 - \nabla_{33}^2 - \nabla_{44}^2)R(p_0)(I_1), I_1 \rangle \right\}.$$

Démonstration. Le calcul effectué dans le lemme 9 reste valable, à l'exception de termes supplémentaires dans les équations (26) et (28), qui apportent une autre contribution à μ_1 . En fait, par la remarque 11, la contribution apportée par (28) est nulle, et il ne reste à analyser que celle provenant de (26) : écrivant $\Omega = dd^C\psi$, on obtient

$$\int_{S_r} \Omega \wedge (d^*H^{(2)} + a_1^{(2)}) = \int_{S_r} d^C\psi \wedge d(d^*H^{(2)} + a_1^{(2)}) = \int_{S_r} d^C\psi \wedge R_1^{(2)}.$$

Les termes de $R_1^{(2)}$ donnant une contribution à la limite se réduisent à ceux de g_0 en p_0 , donnés par (32). Vu la forme explicite de $d^C\psi$, il est clair que le terme en $r^2\omega_1$ de $R_1^{(2)}$ ne contribue pas. Vu l'asymptotique de ψ donnée par le lemme 5, la formule (33) fournit une contribution à μ_1 donnée par

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\|\Omega\|^2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \Omega \wedge (d^*H^{(2)} + a_1^{(2)}) \\ & = - \frac{(k-1)(\text{Vol } \Sigma)^2}{16\|\Omega\|^2} \langle (\nabla_{11}^2 + \nabla_{22}^2 - \nabla_{33}^2 - \nabla_{44}^2)R(I_1), I_1 \rangle. \end{aligned}$$

(On obtient les dérivées covariantes car, au point p_0 , on a $R(I_1) = 0$). En ajoutant la contribution déjà calculée dans le lemme 9, et compte tenu de (voir annexe A)

$$\int_{\Sigma} m\omega_1 = \pi(k+1) \left(\frac{\text{Vol } \Sigma}{2\pi} \right)^2,$$

on trouve la valeur indiquée dans l'énoncé. \square

4. RÉOLUTION DU PROBLÈME D'EINSTEIN

Dans cette section, nous commençons par rappeler les techniques de [4] pour résoudre l'équation d'Einstein. Nous appliquerons ensuite les calculs explicites vus dans la section précédente pour obtenir les résultats souhaités.

Les deux résultats suivants étendent les résultats de [4] au cas du recollement d'un instanton gravitationnel orbifold de rang 1 (au lieu de la métrique de Eguchi-Hanson). La démonstration est identique.

Théorème 13 ([4, § 14]). *Soit (M_0, g_0) asymptotiquement hyperbolique, Einstein, non dégénéré, avec un point orbifold p_0 de type \mathbb{C}^2/Γ , et Y un instanton gravitationnel orbifold de rang 1, asymptotique à \mathbb{C}^2/Γ . Soit M le recollement (topologique) de M_0 et Y . Alors pour t assez petit, on peut résoudre*

l'équation

$$\text{Ric}(g_t) - \Lambda g_t = \sum_1^3 \lambda_i(t) o_{i,t},$$

où g_t est une métrique asymptotiquement hyperbolique sur M , et on a le développement

$$\lambda_i(t) = t\lambda_i + t^2\mu_i + O(t^{\frac{5}{2}}),$$

où les μ_i sont les constantes obtenues dans la résolution du problème (23).

Toute la construction dépend d'une manière lisse :

- de la métrique g_0 , et en particulier de son infini conforme γ ;
- d'un paramètre de recollement en p_0 , $\varphi \in Sp_1$.

□

Quand varie le paramètre φ ou l'infini conforme γ , notons explicitement la dépendance en $\gamma : g_0(\varphi, \gamma)$, $\lambda_i(t, \varphi, \gamma)$, $\lambda_i(\varphi, \gamma), \dots$ On a :

Lemme 14 ([4, § 12]). 1° Il existe sur ∂M_0 des 2-tenseurs symétriques sans trace, $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$, tels que

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \gamma}(\dot{\gamma}_j) = \delta_{ij}.$$

2° Si $R_+(p_0)$ est de rang 2 ($R_{22}R_{33} - R_{23}^2 \neq 0$), alors pour $i = 2, 3$, on a

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \varphi} \neq 0.$$

□

Des deux résultats précédents, on déduit :

Théorème 15. On se place sous les hypothèses du théorème 13, en supposant $\det R_+(p_0) = 0$. Quitte à faire agir un élément de Sp_1 , on peut supposer que $R_+(p_0)(I_1) = 0$. Supposons de surcroît l'annulation non dégénérée ($R_{22}R_{33} - R_{23}^2 \neq 0$). Alors :

1° Pour t petit, il existe $\varphi(t) \in SO_4$ et une fonction $z(t)$ tels que

$$(\text{Ric} - \Lambda)(g_t(\varphi(t), \gamma_0 + z(t)\dot{\gamma}_1)) = 0,$$

et en outre, $z(t) = -\mu_1 t + O(t^{\frac{3}{2}})$.

2° Dans l'espace \mathcal{C} des métriques conformes sur ∂M , l'hypersurface

$$\mathcal{C}_0 = \{\gamma, \det R_+(g_0(\gamma))(p_0) = 0\}$$

est lisse. Pour les singularités de type A_1, D_k et E_k , les infinis conformes des métriques d'Einstein désingularisées sont du côté de $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$ déterminé par

$$(34) \quad \det R_+(g_0(\gamma))(p_0) > 0.$$

Remarque 16. Si l'annulation est dégénérée, on peut toujours désingulariser g_0 , mais en utilisant, au lieu d'un élément de Sp_1 , les déformations de l'infini conforme dans les directions $\dot{\gamma}_2$ et $\dot{\gamma}_3$ pour compenser $\lambda_2(t)$ et $\lambda_3(t)$.

Démonstration. La première partie découle de [4, § 14], la lissité de \mathcal{C}_0 de $\frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma} \neq 0$. Reste à déterminer de quel côté de \mathcal{C}_0 sont obtenues les désingularisations : l'infini conforme de g_t est

$$\gamma_t = \gamma_0 - \mu_1 t \dot{\gamma}_1 + o(t),$$

d'où il résulte

$$\frac{d}{dt} \lambda_1(\gamma_t) \Big|_{t=0} = -\mu_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial t}(\dot{\gamma}_1) = -a(R_{22}R_{33} - R_{23}^2)$$

avec $a > 0$ d'après le lemme 9. Finalement,

$$\frac{d}{dt} \det R_+(g_0(\gamma_t))(p_0) \Big|_{t=0} = -a(R_{22}R_{33} - R_{23}^2)^2 < 0.$$

Pour $R_+ = -R_+$, on obtient le signe opposé. \square

Remarque 17. Dans le cas A_k pour $k > 1$, vu la forme de μ_1 , on ne peut pas dire a priori de quel côté de l'hypersurface se trouveront les métriques (partiellement) désingularisées. Néanmoins, d'autres obstructions doivent s'annuler pour désingulariser complètement M_0 : l'obstruction suivante, calculée au lemme 18, donne la valeur $\langle (\nabla_{11}^2 + \dots - \nabla_{44}^2)R(p_0)I_1, I_1 \rangle = 16 \frac{k-1}{k+1} (R_{22}R_{33} - R_{23}^2)$, qui conduit à

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{4k(\text{Vol } \Sigma)^2}{(k+1)\|\Omega\|^2} (R_{22}R_{33} - R_{23}^2) \\ &= a(R_{22}R_{33} - R_{23}^2) \end{aligned}$$

avec $a > 0$, si bien que les désingularisations restent bien du côté déterminé par (34).

5. DÉSINGULARISATION DES SINGULARITÉS DE RANG PLUS ÉLEVÉ

Dans cette section, nous amorçons l'étude de la désingularisation des singularités de rang $k > 1$. Nous envisageons les aspects formels, qui fournissent l'obstruction venant après la première obstruction $\det R_+(p_0) = 0$, et expliquent pourquoi le théorème 15 s'étend d'une certaine manière aux singularités A_k .

5.1. Cas A_k . Limitons-nous pour le moment à une singularité initiale A_k . Replaçons-nous sous les hypothèses du théorème 15 : (M_0, g_0) est asymptotiquement hyperbolique, Einstein, non dégénérée, avec un point orbifold p_0 de rang k , et on recolle un instanton gravitationnel Y , de rang 1. Ici nous prenons Y avec un seul point orbifold p_1 (donc singularité de type A_{k-1}).

Par le théorème 15, il existe une métrique d'Einstein g_t sur le recollement topologique M , d'infini conforme

$$\gamma_t = -t\mu_1\dot{\gamma}_1 + O(t^{\frac{3}{2}}).$$

Il est naturel de poursuivre la désingularisation au point p_1 . Réappliquant le théorème 4, on est mené à examiner le comportement de $\det R_+(g_t)(p_1)$. Pour cela, observons que la variation au premier ordre de R_+ sur Y a été calculée dans le lemme 8, de sorte que

$$(35) \quad R_+(p_1) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & tR_{22} & tR_{23} & \\ & tR_{32} & tR_{33} & \\ & & & \end{pmatrix} + O(t^2).$$

Notons le coefficient en haut à gauche

$$(36) \quad R_{11}(p_1) = At^2 + O(t^3).$$

Alors, clairement,

$$(37) \quad \det R_+(g_t)(p_1) = (R_{22}R_{33} - R_{23}^2)At^4 + O(t^5).$$

Lemme 18. *Sous les hypothèses précédentes (singularité de type A_k , et Y a un seul point singulier), le coefficient A est donné par :*

$$A = \frac{\text{Vol } \Sigma}{2\pi} \left(-(k-1)(R_{22}R_{33} - R_{23}^2) + \frac{1}{16}(k+1)\langle (\nabla_{11}^2 + \nabla_{22}^2 - \nabla_{33}^2 - \nabla_{44}^2)R(p_0)I_1, I_1 \rangle \right).$$

Remarque 19. Comme vu dans la remarque 6, on peut utiliser la transformation $(z^1, z^2) \mapsto (-z^2, z^1)$ pour modifier le signe du second terme, donc il y a deux valeurs de $\langle (\nabla_{11}^2 + \nabla_{22}^2 - \nabla_{33}^2 - \nabla_{44}^2)R(p_0)I_1, I_1 \rangle$ qui annulent A .

Démonstration. Les termes d'ordre 2 de R_{11} proviennent, d'une part des termes d'ordre 2 de la courbure calculés dans (31), d'autre part de la correction γ_t à l'ordre 1 de l'infini conforme, qui provoque une modification à l'ordre 2 de la métrique, et donc de la courbure, sur Y .

D'après (31), les termes d'ordre 2 de la courbure dans R_{11} sont

$$\frac{1}{2}\langle \varrho, \omega_1 \rangle(p_1) + 2(R_{22}R_{33} - R_{23}^2)m(p_1).$$

À ces termes il convient d'ajouter la contribution provenant de la modification de l'infini conforme : λ_1 est modifiée de sorte que $\frac{d\lambda_1}{dt} = -\mu_1$. Notons $\lambda_1 = \frac{1}{2}\langle R_+(H)(I_1), I_1 \rangle \lambda_1'$ d'après le lemme 7, alors R_{11} est modifié (à l'ordre 2) par un terme global constant $-\frac{\mu_1}{\lambda_1'}$. Finalement, on obtient la formule

$$(38) \quad A = \frac{1}{2}\langle \varrho, \omega_1 \rangle(p_1) + 2(R_{22}R_{33} - R_{23}^2)m(p_1) - \frac{\mu_1}{\lambda_1'}.$$

Calculons le premier terme. Ici la forme $\varrho \in \Omega^+$ est harmonique et ses coefficients à l'infini sont des formes quadratiques invariantes sous \mathbb{Z}_{k+1} . (Pour D_k et E_k il n'y a pas de telle forme et donc pas de contribution). Comme vu dans la démonstration du lemme 5, il y a trois formes quadratiques invariantes à l'infini, $q_1 = |z^1|^2 - |z^2|^2$, $q_2 + iq_3 = z^1 z^2$, qui se prolongent en des fonctions harmoniques φ_i sur Y . On a vu que $\varphi_2 + i\varphi_3$ est la fonction holomorphe globale $z^1 z^2$, donc s'annule en p_1 ; il ne reste donc que φ_1 et on a $\varphi_1(p_1) = 2 \frac{\text{Vol} \Sigma}{2\pi}$ par (41). Par conséquent, si, à l'infini,

$$\langle \varrho, I_1 \rangle \sim \sum_1^3 a_i q_i,$$

alors

$$\langle \varrho, I_1 \rangle(p_1) = 2a_1 \frac{\text{Vol} \Sigma}{2\pi}.$$

Comme $a_1 = \frac{1}{8} \langle (\nabla_{11}^2 + \nabla_{22}^2 - \nabla_{33}^2 - \nabla_{44}^2) R(p_0) I_1, I_1 \rangle$, on obtient une contribution

$$(39) \quad \frac{1}{2} \langle \varrho, \omega_1 \rangle(p_1) = \frac{1}{8} \frac{\text{Vol} \Sigma}{2\pi} \langle (\nabla_{11}^2 + \nabla_{22}^2 - \nabla_{33}^2 - \nabla_{44}^2) R(p_0) I_1, I_1 \rangle.$$

Rappelons la formule

$$\begin{aligned} \mu_1 = \frac{1}{\|\Omega\|^2} \left\{ 4\pi (R_{22}R_{33} - R_{23}^2) \int_{\Sigma} m \omega_1 \right. \\ \left. - \frac{1}{16} (k-1) (\text{Vol} \Sigma)^2 \langle (\nabla_{11}^2 + \nabla_{22}^2 - \nabla_{33}^2 - \nabla_{44}^2) R(p_0) I_1, I_1 \rangle \right\}, \end{aligned}$$

où le second terme n'existe que pour la singularité A_k . Il en résulte

$$(40) \quad \begin{aligned} A = 2(R_{22}R_{33} - R_{23}^2) \left(m(p_1) - \frac{1}{\text{Vol} \Sigma} \int_{\Sigma} m \omega_1 \right) \\ + \frac{1}{16} (k+1) \frac{\text{Vol} \Sigma}{2\pi} \langle (\nabla_{11}^2 + \nabla_{22}^2 - \nabla_{33}^2 - \nabla_{44}^2) R(p_0) I_1, I_1 \rangle. \end{aligned}$$

Les calculs explicites faits à l'annexe A donnent $m(p_1) = \frac{\text{Vol} \Sigma}{2\pi}$, d'où vient le résultat annoncé. \square

Poursuivons avec quelques spéculations sur la désingularisation de M_0 . On peut montrer qu'existe sur ∂M_0 une direction de déformation de la métrique conforme, δ_1 , qui modifie la métrique d'Einstein $g_0(\gamma_1, \delta_1)$ au point p_0 en gardant inchangés les termes d'ordre 2, mais en modifiant les termes d'ordre 4 de sorte que $\frac{\partial}{\partial \delta_1} \langle (\nabla_{11}^2 + \nabla_{22}^2 - \nabla_{33}^2 - \nabla_{44}^2) R(p_0) I_1, I_1 \rangle \neq 0$. Après homothétie par un facteur t , une variation $t\delta_1$ de γ modifie la métrique h_2 par des termes d'ordre t^3 , et en particulier modifie le terme $R_{11}(p_1)$ dans (35) par un terme at^3 avec $a \neq 0$, et donc $\det R_+(g_t)(p_1)$ par un terme

$$a(R_{22}R_{33} - R_{23}^2)t^5, \quad a \neq 0.$$

Comparant avec (37), on voit ainsi que si $A = 0$, les termes suivants dans $\det R_+(g_t)(p_1)$ peuvent être compensés par une variation de l'infini conforme dans la direction δ_1 .

Synthétisons cette discussion :

- $A = 0$ (et donc la quantité calculée dans le lemme 18) apparaît comme obstruction d'ordre supérieur à poursuivre la désingularisation au point p_1 ;
- quitte à modifier l'infini conforme dans les directions γ_1 et δ_1 , on peut résoudre le problème d'Einstein et la condition de déterminant nul au point singulier :

$$(\text{Ric} - \Lambda)(g_t) = 0, \quad \det R_+(g_t)(p_1) = 0.$$

Malheureusement, à ce stade, on ne peut pas conclure en appliquant directement le théorème de désingularisation au point p_1 , car il n'y a aucune raison que la métrique g_t satisfasse l'hypothèse de non dégénérescence (même si on peut s'attendre à ce qu'elle soit vérifiée génériquement). Il est donc nécessaire de n'utiliser que la non dégénérescence de M_0 , ce qui requiert une analyse plus subtile qui sera abordée dans un autre article.

5.2. Cas D_k et E_k . Tout le calcul fait dans la démonstration du lemme 18 s'étend au cas D_k et E_k , à la différence que les termes impliquant $\nabla^2 R(p_0)$ disparaissent. La formule (40) a une signification géométrique claire : si l'action de \mathbb{C}^* sur Σ est triviale, alors m est constante sur Σ (puisque $dm = -\xi \lrcorner \omega_1$) et donc $A = 0$. C'est le cas pour D_k et E_k si on choisit correctement l'instanton gravitationnel Y : la désingularisation contient une configuration de courbes correspondant au diagramme de Dynkin ; si on contracte toutes les courbes sauf l'unique courbe qui en coupe trois autres, on obtient un instanton Y avec trois points singuliers de type orbifold sur Σ . L'action de \mathbb{C}^* , fixant ces trois points, doit être triviale, d'où résulte :

Lemme 20. *Dans les cas D_k et E_k , si la courbe Σ de Y correspond au nœud du diagramme de Dynkin duquel partent trois arêtes, alors $A = 0$. \square*

Ce lemme donne l'espoir d'un procédé de désingularisation des singularités D_k et E_k en désingularisant alors les trois points singuliers résiduels, tous de type A_ℓ . Comme on pouvait s'y attendre au vu des termes possibles invariants sous D_k ou E_k , aucune obstruction ne provient des termes d'ordre 4 de la métrique en p_0 , mais l'obstruction suivante apparaît probablement sur les termes d'ordre 6, contenant donc des termes en $\nabla^4 R(p_0)$.

ANNEXE A. LES INSTANTONS A_k

Dans cette annexe, nous donnons rapidement les formules explicites utilisées sur les instantons gravitationnels de type A_k . Commençons par rappeler l'ansatz de Gibbons-Hawking.

Soit V une fonction harmonique sur \mathbb{R}^3 , telle que $*dV = d\eta$, où η est la 1-forme de connexion d'un fibré en cercles (ce qui exige que la classe de cohomologie de la forme fermée $\frac{*dV}{2\pi}$ soit entière). Alors, sur l'espace total du fibré, la formule

$$g = V((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2) + V^{-1}\eta^2$$

définit une métrique hyperkälérienne, pour laquelle $J_1 dx^1 = V^{-1}\eta$ et $J_1 dx^2 = dx^3$, et J_2 et J_3 sont définies de manière similaire par permutation circulaire sur (x^1, x^2, x^3) .

Les instantons gravitationnels de type A_k sont obtenus en prenant

$$V = \frac{1}{2} \sum_0^k \frac{1}{|x - p_i|}$$

sur $\mathbb{R}^3 - \{p_i\}$, où les p_i sont des points distincts de \mathbb{R}^3 . Compte tenu de l'invariance par translation, on peut supposer

$$\sum_0^k p_i = 0.$$

En ajoutant un point au-dessus de chaque p_i , on peut montrer que la métrique s'étend en une métrique lisse. Quand certains p_i sont confondus, on obtient une singularité orbifold. Le cas de rang 1 avec une seule singularité orbifold restante correspond à k points confondus, $p_1 = \dots = p_k$. Vu l'action de SO_3 sur la situation, on peut supposer ces points situés sur l'axe des x^1 , et donc

$$p_0 = (-k\lambda, 0, 0), \quad p_1 = \dots = p_k = (\lambda, 0, 0).$$

Alors on a une singularité A_{k-1} au point p_1 , et la courbe J_1 -holomorphe Σ se trouve au-dessus du segment $[p_0, p_1]$. En particulier,

$$\text{Vol } \Sigma = \int_{\Sigma} dx^1 \wedge \eta = 2\pi(k+1)\lambda.$$

Notons ρ le rayon dans \mathbb{R}^3 et r le rayon dans \mathbb{R}^4 . Vu que $V \sim \frac{k+1}{2\rho}$, on obtient à l'infini, en prenant $r^2 = 2(k+1)\rho$,

$$\begin{aligned} g &\sim \frac{k+1}{2\rho} (d\rho^2 + \rho^2 g_{S^2}) + \frac{2r}{k+1} \eta^2 \\ &\sim dr^2 + \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{(k+1)^2} \eta^2, \end{aligned}$$

qui est la métrique standard de $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_{k+1}$.

La situation est invariante par les rotations en les coordonnées (x^2, x^3) , qui donne l'action de cercle cherchée (il faut prendre une action de poids 2, par $e^{2i\theta}(x^2 + ix^3)$, car les x^i sont quadratiques en les coordonnées de \mathbb{R}^4). L'application moment m est

$$m = k|x - p_1| + |x - p_0|,$$

et $\frac{m}{2}$ est un potentiel pour ω_2 et ω_3 . On observera que, comme il se doit, $m \sim (k+1)\rho \sim \frac{r^2}{2}$. En particulier, on déduit la formule utilisée dans la démonstration du lemme ,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} m\omega_1 &= 2\pi \int_{-k\lambda}^{\lambda} ((x^1 + k\lambda) + k(\lambda - x^1)) dx^1 \\ &= \pi(k+1)^3 \lambda^2 = \pi(k+1) \left(\frac{\text{Vol } \Sigma}{2\pi} \right)^2. \end{aligned}$$

Enfin, une des vertus de l'ansatz de Gibbons-Hawking est de fournir les fonctions harmoniques x^i . On calcule facilement le développement

$$x^1 \sim \frac{|z^1|^2 - |z^2|^2}{2(k+1)}.$$

Il en résulte que la fonction harmonique φ_1 dans la démonstration du lemme 5 n'est autre que

$$(41) \quad \varphi_1 = 2(k+1)x^1.$$

En particulier, le calcul fait dans ce lemme est justifié par la formule

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \varphi_1 &= 2(k+1)2\pi \int_{-k\lambda}^{\lambda} x^1 dx^1 \\ &= -2\pi(k+1)^2(k-1)\lambda^2 = -2\pi(k-1) \left(\frac{\text{Vol } \Sigma}{2\pi} \right)^2. \end{aligned}$$

RÉFÉRENCES

- [1] M. T. ANDERSON – « Einstein metrics with prescribed conformal infinity on 4-manifolds », *Geom. Funct. Anal.* **18** (2008), no. 2, p. 305–366.
- [2] A. L. BESSE – *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [3] O. BIQUARD – « Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques », *Astérisque* **265** (2000), p. vi+109, English translation: SMF/AMS Texts and Monographs 13 (2006).
- [4] ———, « Désingularisation de métriques d'Einstein. I », *Inventiones Math.* **192** (2013), no. 1, p. 197–252.
- [5] O. BIQUARD & P. GAUDUCHON – « Hyper-Kähler metrics on cotangent bundles of Hermitian symmetric spaces », in *Geometry and physics (Aarhus, 1995)*, Dekker, New York, 1997, p. 287–298.

- [6] J. FINE – « A gauge theoretic approach to the anti-self-dual Einstein equations », arXiv:1111.5005, 2011.
- [7] C. R. GRAHAM & J. M. LEE – « Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball », *Adv. Math.* **87** (1991), no. 2, p. 186–225.
- [8] N. HITCHIN – « Integrable systems in Riemannian geometry », in *Surveys in differential geometry: integrable systems*, Surv. Differ. Geom., vol. 4, Int. Press, Boston, MA, 1998, p. 21–81.
- [9] P. B. KRONHEIMER – « The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients. », *J. Differential Geom.* **29** (1989), no. 3, p. 665–683.
- [10] J. M. LEE – « Fredholm operators and Einstein metrics on conformally compact manifolds », *Mem. Amer. Math. Soc.* **183** (2006), no. 864, p. vi+83.