



HAL
open science

Commande Prédicative Linéaire

Khansa Bdirina, Kamel Guesmi

► **To cite this version:**

Khansa Bdirina, Kamel Guesmi. Commande Prédicative Linéaire. Master. Algérie. 2018. hal-02927679

HAL Id: hal-02927679

<https://hal.science/hal-02927679v1>

Submitted on 1 Sep 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Ziane Achour de Djelfa
Faculté des Sciences et de la Technologie



Commande Prédictive Linéaire

Support de cours pour les classes Licence/Master en Automatique

Dr. Khansa BDIRINA

Dr. de l'École Nationale Polytechnique d'Alger (ENP)
Maître de conférences à l'Université Ziane Achour de Djelfa

Pr. Kamel GUESMI

Dr. de l'Université de Reims Champagne-Ardenne
Professeur à l'Université Ziane Achour de Djelfa

Sommaire

Chapitre I : Généralités

I.1. Commande prédictive	4
I.2. Principe de la commande prédictive	4
I.3. Étapes chronologiques de la commande prédictive	5
I.4. Éléments d'une commande prédictive	6

Chapitre II : Commande prédictive généralisée algorithmique

II.1. Introduction	7
II.2. Modèle de prédiction	8
II.3. Optimisation	10
II.4. Exemples	11
II.5. Exercices	16
II.6. Simulation des concepts étudiés	17

Chapitre III : Commande prédictive généralisée polynomiale

III.1. Introduction	18
III.2. Prédicteur optimal	18
III.3. Critère d'optimisation et loi de commande	20
III.4. Régulateur polynomial RST équivalent	21
III.4.1. Régulateur RST	21
III.4.2. Régulateur RST dans le cas GPC polynomiale	21
III.5. Exemples	22
III.6. Exercices	26
II.7. Simulation des concepts étudiés	28

Chapitre IV : La commande prédictive sous espace d'état

IV.1. Introduction	29
IV.2. Bases de la commande prédictive sous espace d'état	29
IV.2.1. Modèle de prédiction avec intégrateur	29
IV.2.2. Prédiction de la sortie	31
IV.2.3. Optimisation	33
IV.3. Exemples	34
IV.4. Exercices	37
II.5. Simulation des concepts étudiés	38
ELEMENTS POUR LA CORRECTION DES EXCERCICES	40
ELEMENTS POUR LA SIMULATION	43
REFERENCES	48

Chapitre I :

Généralités

I.1. Commande prédictive

La commande prédictive consiste à prendre en compte, à l'instant présent, le comportement futur du système. Ceci en utilisant un modèle numérique du système pour prédire sa sortie dans le futur sur un horizon fini.

Le but de la stratégie prédictive est de faire coïncider la sortie du processus avec la consigne dans le futur sur un horizon fini.

I.2. Principe de la commande prédictive

La technique prédictive permet de reproduire de façon théorique le comportement intuitif naturellement prédictif ou anticipatif de l'être humain [Sto, 08]. Ce genre d'intuition se manifeste en conduisant une voiture, en marchant, en faisant du ski, en respectant le budget alloué à certaines activités sur une période limitée, en traversant une rue...etc.

Les skieurs, par exemple, font une prédiction de la trajectoire à suivre sur un horizon fini, et élaborent les actions qui vont leur permettre de la suivre, et puis à chaque étape l'horizon de prédiction glisse avec eux.

La différence entre la commande prédictive et les autres techniques réside dans le fait que les actions de ces dernières sont fonction des erreurs passées entre la sortie et la consigne, alors que la commande prédictive est une fonction des erreurs prédites à des instants futurs Figure I.1.

Il apparaît clairement dans le cas du ski que la structure prédictive, faisant intervenir des erreurs futures, est fortement nécessaire. Autrement est équivalent à skier en regardant à l'arrière pour réduire l'erreur entre la trajectoire désirée et la position réelle.

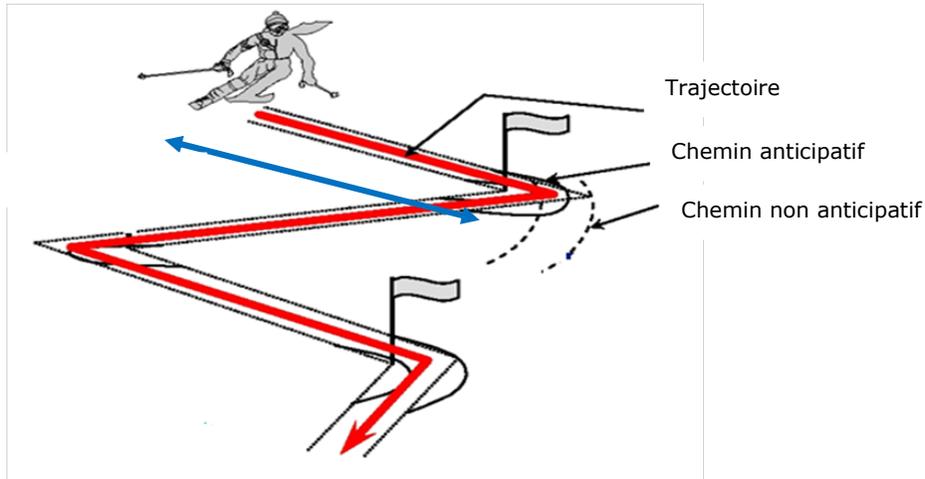


Fig. (I.1) : Application quotidienne de la commande prédictive

I.2. Étapes chronologiques de la commande prédictive

Chronologiquement, les étapes spécifiques d'une commande de nature prédictive peuvent être comme suit [Bom, 08] :

1. A l'instant présent, les sorties futures du système sont prédites (sur un horizon de taille N_p , dénommé horizon de prédiction sur la sortie) à l'aide d'un modèle de comportement du processus à commander. Ces prédictions sont notées $y_p(k + j/k)$, avec $j = 1, \dots, N_p$ pour indiquer la valeur de la sortie à l'instant $k + j$, calculée à l'instant k . Elles dépendent des valeurs connues jusqu'au temps k (entrées et sorties passées) et des commandes futures $u(k + j/k), j = 0, \dots, N_c - 1, N_c$ étant l'horizon de commande.
2. Les futurs signaux de commande $u(k + j/k), j = 0, \dots, N_c - 1$ sont calculés en optimisant un critère J (fonction coût) pour que la sortie du procédé $y(k + j)$ soit la plus proche que possible de la trajectoire de référence $y_{ref}(k + j/k)$, tout en réduisant les efforts de la commande. Des contraintes sur la sortie et/ou sur la commande peuvent être également imposées à ce stade.
3. Finalement, seul le premier élément $u(k/k)$, du vecteur du signal de commande optimale $u(k + j/k), j = 0, 1, \dots, N_c - 1$ est appliqué au système pendant le prochain instant car et la procédure recommence de l'étape 1 en prenant en compte les mesures actualisées $y(k + 1)$ du procédé. Ceci est donc le caractère « boucle fermée » Figure I. 2 de l'approche. La commande

$u(k + 1 / k + 1)$ est en principe différente de $u(k + 1 / k)$ puisque de nouvelles informations sur l'état du système ont pu être prises en compte. Ceci est connu comme le concept de l'**horizon fuyant** (ou glissant).

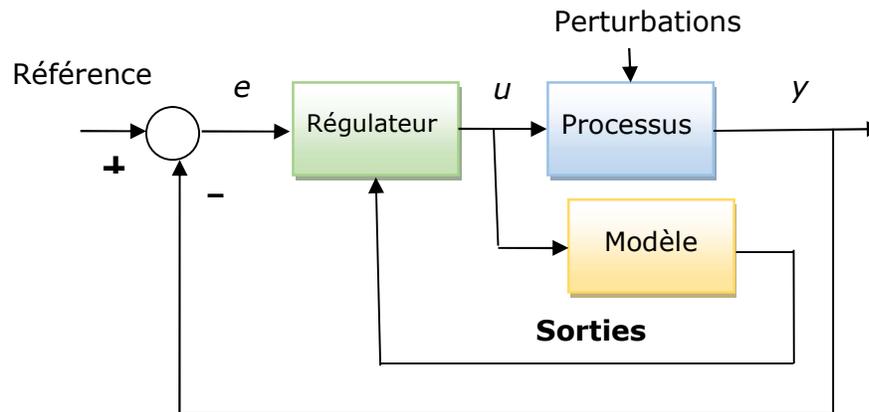


Fig. (I.2) : Régulateur prédictif à base de modèle

I.3. Éléments d'une commande prédictive

Tous les algorithmes de la commande prédictive possèdent les mêmes éléments et différentes options peuvent être considérées pour chaque élément, ce qui donne une multitude d'algorithmes. Les éléments d'une commande prédictive sont :

- Le modèle du système.
- Le critère de performance
- L'algorithme d'optimisation

Chapitre II :

Commande prédictive généralisée algorithmique

II.1. Introduction

Le principe de la commande prédictive généralisée (GPC) peut être donné par le schéma suivant [Bou, 96] :

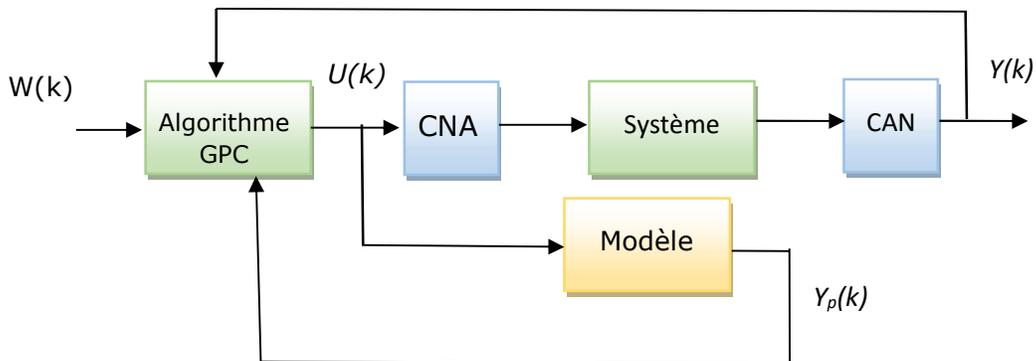


Fig. (II.1) : Principe de la GPC

Où :

W : Référence ; Y : Sortie ; Y_p : Sortie prédite ; U : Commande, CAN : Convertisseur Analogique/Numérique, CNA : Convertisseur Numérique/Analogique.

A noter ici que le principe de commande reste toujours le même pour toutes les techniques de la commande prédictive, la différence principale réside dans le modèle utilisé pour la prédiction. [Ric, 14]. Dans le cas de la commande prédictive généralisée, il est nécessaire d'avoir un modèle numérique car la sortie prédite du système est calculée sur un horizon fini.

II.2. Modèle de prédiction

Généralement, le modèle utilisé pour la prédiction est donné par :

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k - 1) + C(q^{-1})\xi(k) \quad (\text{II.1})$$

Avec :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_{na}q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{nb}q^{-nb}$$

q^{-1} : Opérateur retard

$C(q^{-1})\xi(k)$: Terme lié aux perturbations

Le modèle ARMA de ce système, nous donne la relation suivante :

$$\frac{Y(z)}{z^{-1}U(z)} = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{z^{-1} \sum_{j=0}^{nb} b_j z^{-j}}{1 + \sum_{j=1}^{na} a_j z^{-j}} \quad (\text{II.2})$$

L'un des points fondamentaux de la méthodologie prédictive est la recherche d'une équation de prédiction afin de prévoir le comportement du processus dans le futur.

Posons $\hat{y}(k + j)$ la sortie prédite du système (II.2) à l'instant $k + j$, qui peut être décomposé de la façon suivante [Bou, 96] :

$$\hat{y}(k + j) = \underbrace{\sum_{i=1}^j g_i \Delta u(k + j - i)}_{\text{réponse forcée}} + \underbrace{\sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(k + j - i)}_{\text{réponse libre}} \quad (\text{II.3})$$

La réponse forcée correspond aux incréments futurs et présents de la commande et la réponse libre représente la réponse due aux incréments de commande dans le passé.

Ou bien :

$$\hat{y}(k + j) = \sum_{i=1}^j g_i \Delta u(k + j - i) + \rho_j \quad (\text{II.4})$$

Avec :

$$\rho_j = \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(k + j - i)$$

Démonstration :

Soit f_i les coefficients de la réponse impulsionnelle qui peut être donnée par :

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i u(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i u(k-i)$$

Avec :

h : Fonction de transfert, $\Delta_1 = 1 - z^{-1}$; $\Delta = 1 - q^{-1}$, $Y(z) = F(z) * U(z)$ et $F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i}$

Donc :

$$Y(z) = \frac{F(z)}{(1-z^{-1})} \Delta_1 U(z) = G(z) \Delta_1 U(z) \quad \text{Et } y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \Delta u(k-i)$$

Ce qui donne :

$$F(z) = \Delta_1 G(z) = (1 - z^{-1})G(z) \quad \text{Car } f(k) = g(k) - g(k-1)$$

$$\text{Donc : } \hat{y}(k+j) = \underbrace{\sum_{i=1}^j g_i \Delta u(k+j-i)}_{\text{réponse forcée}} + \underbrace{\sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(k+j-i)}_{\text{réponse libre}}$$

Si on note $y^*(k+j)$ la réponse libre (pour une entrée nulle) à partir des conditions initiales à l'instant k , on peut écrire en fonction des incréments de commande passés :

$$\rho_j = y^*(k+j) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \Delta u^*(k+j-i) \quad (\text{II.5})$$

$$\text{Avec } \Delta u^*(k+j-i) \equiv 0; \text{ pour } i \leq j$$

Ou encore :

$$\rho_j = y^*(k+j) = y^*(k) + \sum_{i=1}^j \Delta y^*(k+i) \quad (\text{II.6})$$

$$\text{Et } \rho_j = \rho_{j-1} + \Delta y^*(k+j) \quad (\text{II.7})$$

Donc la réponse libre pour chaque itération est donnée par l'algorithme récursif suivant [Bou, 96] :

$$\Delta y^*(k+j) = \sum_{i=j}^{nb} b_i \Delta u(k+j-i) - \sum_{i=1}^{na} a_i y^*(k+j-i)$$

$$\rho_j = \rho_{j-1} + \Delta y^*(k+j) \quad \text{Avec } \rho_0 = y(k)$$

En cas adapté $y^*(k) = y(k)$

Le modèle de prédiction (II.4), peut être mis sous forme matricielle sur un horizon de prédiction N , posons :

- $\hat{Y} = [\hat{y}(k+1) \ \hat{y}(k+2) \ \dots \ \hat{y}(k+N)]^T$: Sortie futures estimées ;

- $\tilde{U} = [\Delta u(k) \ \Delta u(k+1) \ \dots \ \dots \ \dots \ \Delta u(k+N-1)]^T$: Incrément de commande présents et futures ;
- $\rho = [\rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \dots \ \dots \ \rho_N]^T$: Réponses libres.

Donc la sortie prédite peut être donnée sous la forme matricielle :

$$\hat{Y} = G\tilde{U} + \rho \tag{II.8}$$

Où :

G est une matrice contenant les coefficients de la réponse indicielle [Bou, 96] :

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_N & g_{N-1} & \dots & \dots & g_1 \end{bmatrix}$$

II.3. Optimisation

Une fois définie l'équation de prédiction, la méthode GPC suppose la minimisation d'un critère quadratique de la forme [Bou, 96] :

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [w(k+j) - \hat{y}(k+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} [\Delta u(k+j-1)]^2 \tag{II.9}$$

$$\Delta u(k+j) = 0 \text{ pour } j \geq N_u$$

Avec :

\hat{y} : Sortie prédite, Δu : Incrément de commande, w Consigne, N_1, N_2 : Horizons de prédiction sur la sortie, N_u : Horizon de prédiction sur la commande, λ : Facteur de pondération.

L'équation (9) peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$J = (G\tilde{U} + \rho - W)^T (G\tilde{U} + \rho - W) + \lambda \tilde{U}^T \tilde{U} \tag{II.10}$$

Avec :

$$\hat{Y} = [\hat{y}(k+N_1) \ \dots \ \dots \ \dots \ \hat{y}(k+N_2)]^T ;$$

$$W = [w(k+N_1) \ \dots \ \dots \ \dots \ w(k+N_2)]^T ;$$

$$\rho = [\rho_{N_1} \ \dots \ \dots \ \dots \ \rho_{N_2}]^T ;$$

$$\tilde{U} = [\Delta u(k) \ \Delta u(k+1) \ \dots \ \dots \ \dots \ \Delta u(k+N_u-1)]^T .$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{N_1} & g_{N_1-1} & g_{N_1-2} & \dots & \dots \\ g_{N_1+1} & g_{N_1} & g_{N_1-1} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N_2} & g_{N_2-1} & \dots & \dots & g_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix}$$

La loi de commande est obtenue en minimisant le critère (II. 10) par rapport à \tilde{U}

En remplaçant (8) dans (10) et en posant $\frac{\partial J}{\partial \tilde{U}} = 0$, l'expression de la commande est :

$$\tilde{U}_{opt} = [G^T G + \lambda I_{N_u}]^{-1} G^T (W - \rho) \quad (\text{II. 11})$$

Seule la première valeur de cette séquence est appliquée sur le système, c'est le principe d'horizon voyant [Cla, 87].

II.4. Exemples

Exemple1 :

Un exemple numérique d'application de l'approche algorithmique pour représenter graphiquement la sortie et la commande à l'aide d'un programme MATLAB, est donné par :

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{1.344z^{-1} + 3.024z^{-2}}{1 - 0.98z^{-1} - 0.02z^{-2}}$$

Pour le jeu de paramètres $N_1=1, N_2=8, N_u=1, \lambda=200$ on obtient les résultats de la figure II. 2. D'après les graphes de cette dernière, l'efficacité de la commande prédictive algorithmique est bien clair en terme de poursuite, où la sortie suit bien la référence cela est due à l'effet anticipatif de la commande prédictive.

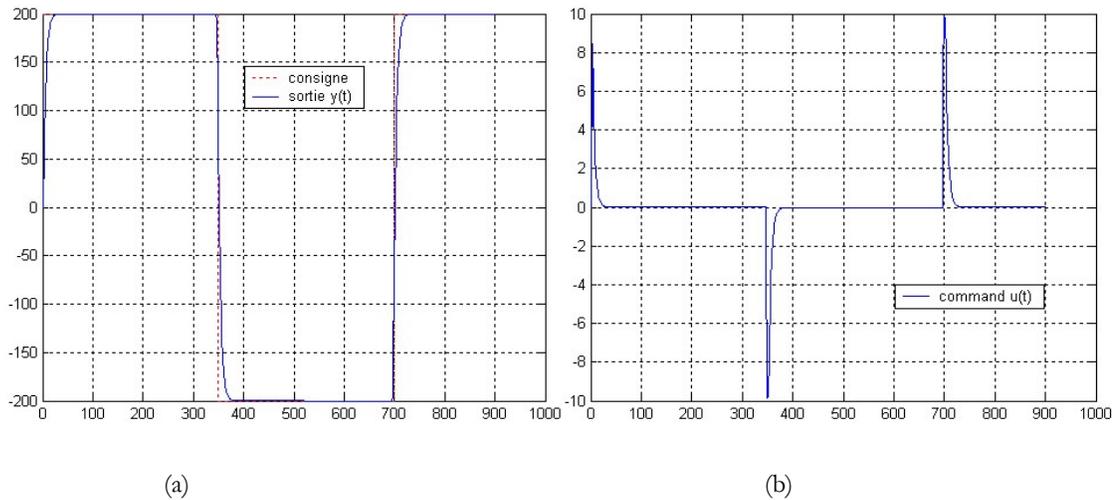
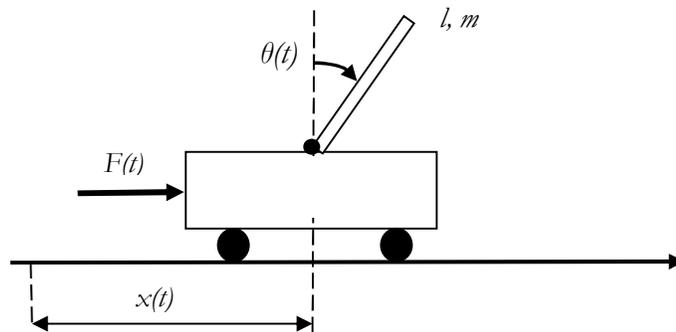


Fig (II.2) : GPC algorithmique de l'exemple1. a) Réponse du système, b) Commande

Exemple 2 : Commande GPC du système chariot avec pendule inversé

L'algorithme GPC algorithmique a été appliqué sur le système mécanique chariot avec pendule inversé dans [Bdi, 16], [Tou, 09]. Le chariot avec pendule inversé [Gaw, 06] est donné par la figure II.3. Le pendule du système est de longueur l et de masse m dont l'axe de suspension est lié au chariot de masse M peut se déplacer sur un axe horizontal. Initialement, le système est au repos. En négligeant les frottements situés au niveau de l'axe de rotation et ceux dus au déplacement du chariot. Ce système à une entrée $F(t)$ et une sortie $Y(t)$, cette dernière est considérée comme la position du chariot $x(t)$



Fig(II.3) : Système chariot avec pendule inversé

La fonction de transfert de ce système, après une discrétisation à la période d'échantillonnage de 0.005s, est donnée par :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{x(z)}{F(z)} = \frac{-0.01429z + 0.01429}{z^2 - 2.001z + 1}$$

L'algorithme GPC a été appliqué sous environnement Matlab, dont l'objectif est de commander la position du chariot selon une trajectoire de référence prédéfinie.

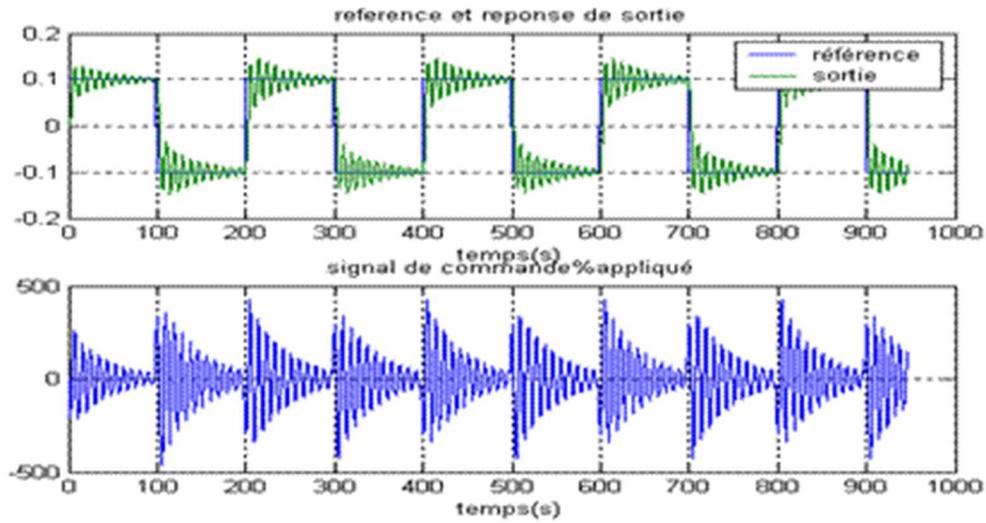


Fig (II.4) : Commande GPC algorithmique de la position du système chariot avec pendule inversé

$$N1 = 1; N_u = 1; N2 = 4; \lambda = 2 \times 10^{-7}; T_e = 0.005$$

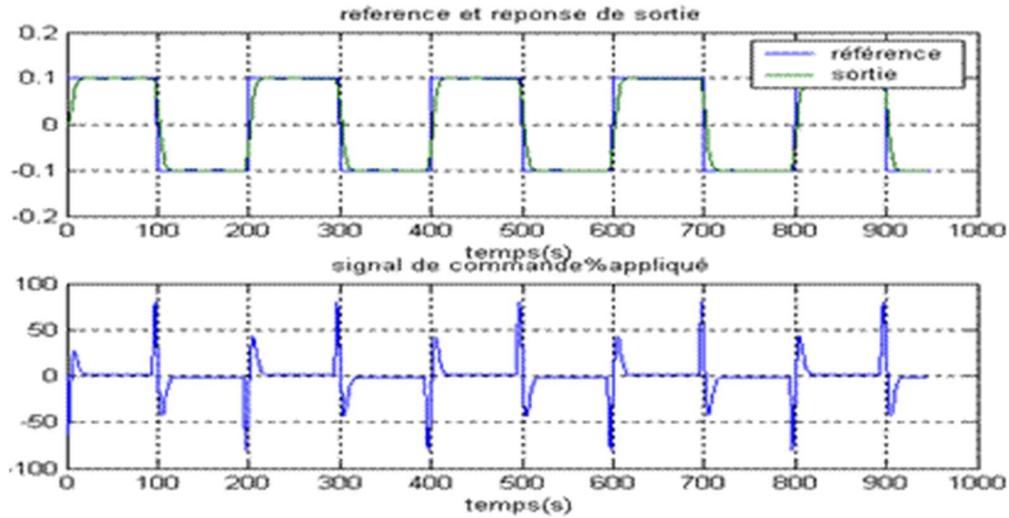


Fig (II.5) : GPC algorithmique de position du système chariot avec pendule inversé

$$N1 = 1; N_u = 1; N2 = 8; \lambda = 2 \times 10^{-7}; T_e = 0.005$$

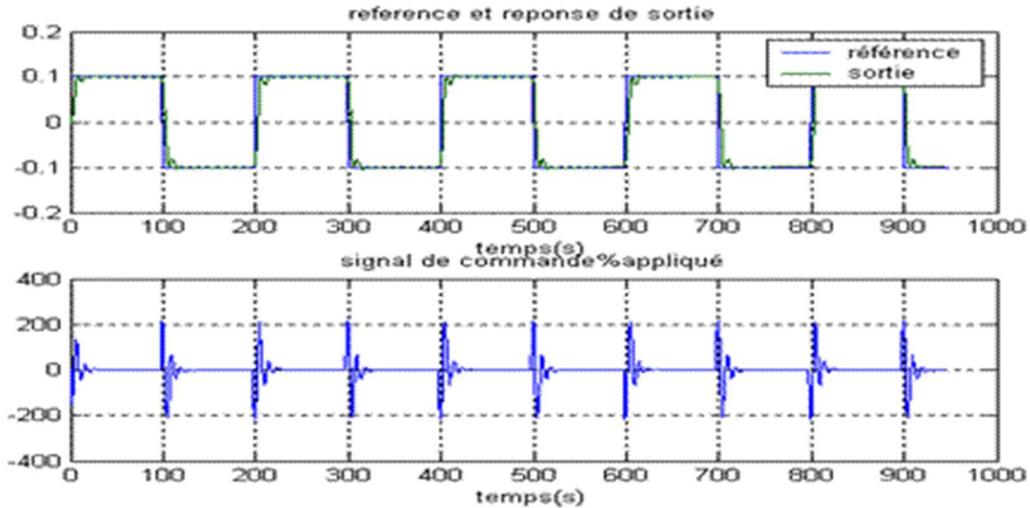


Fig (II.6) : GPC algorithmique de position du système chariot avec pendule inversé

$$N1 = 1; N_u = 1; N2 = 5; \lambda = 2 \times 10^{-7}; T_e = 0.005$$

Les courbes des figures Figure II.4, Figure II.5 et Figure II.6 obtenues en simulation montrent la réponse du système, celle de la position du chariot. L'aspect anticipatif de la commande prédictive est clairement mis en évidence en comparant le signal de consigne et l'allure de la réponse en position. On notant ici l'importance du choix de l'horizon de prédiction pour l'amélioration des résultats.

Exemple 3 : Commande GPC algorithmique d'un bras manipulateur

Considérons le bras manipulateur de la figure II.7; le manipulateur est constitué de deux corps rigides de masses m_1 et m_2 et de longueurs L_1 et L_2 . Les angles des articulations sont respectivement q_1 et q_2 et une masse d'inertie m_L de diamètre l_L .

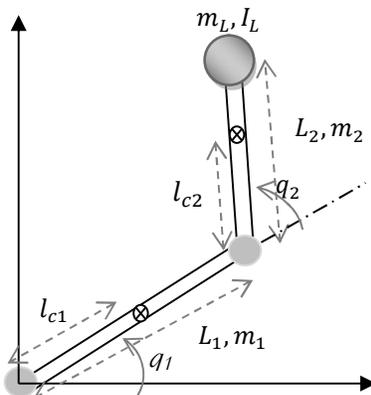


Fig (II.7) : Bras manipulateur à deux degrés de liberté

La fonction de transfert de ce système, après linéarisation, peut être donnée par :

$$\frac{q_2}{\mu} = \frac{0.005z^{-1} + 0.005z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

Où :

q_2 est la position angulaire du deuxième bras et μ le couple

Pour les paramètres de réglage $N1 = 1$, $N2 = 6$, $Nu = 1$, $\lambda = 0,00001$, les résultats de simulation pour l'application de la GPC sont représentés dans les figures suivantes :

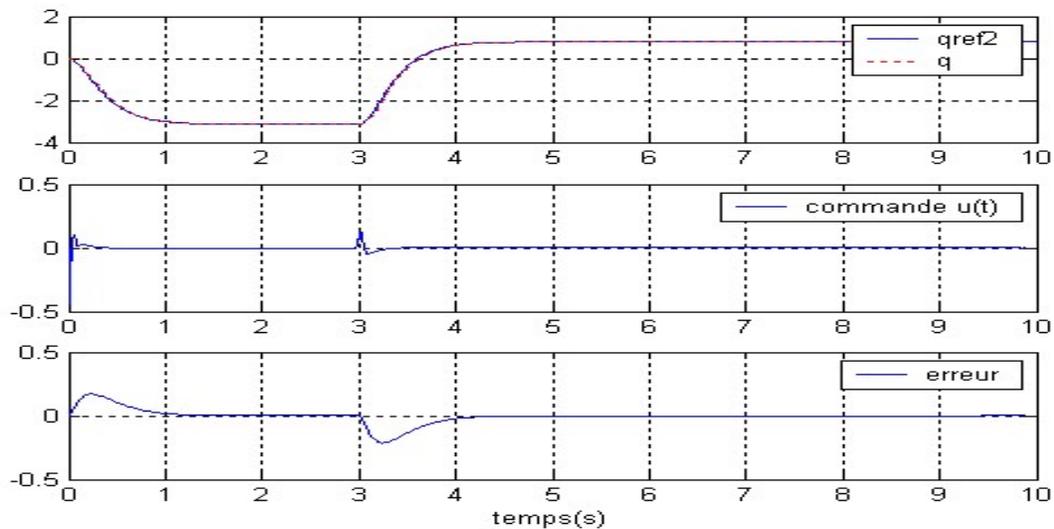


Fig (II.8) : GPC algorithmique d'un bras manipulateur

La Figure II.8 représente les résultats de simulation obtenus de l'application de la commande GPC au bras manipulateur à deux degrés de liberté : la position angulaire $q_2(t)$ et sa référence $q_{ref2}(t)$, le signal d'erreur de poursuite ainsi que le couple appliqué. A partir de ces graphes, il est bien remarquable que la commande prédictive algorithmique a donné de bonnes performances : On constate que la position articulaire est très proche du signal de référence, où l'erreur tend vers zéro, ce qui est l'objectif de la commande.

II.5. Exercices

Ex. 1 : Soit un système du premier ordre :

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{0.1z^{-1}}{1 - 0.1z^{-1}}$$

Avec la réponse indicielle

$$g(0:11)=[0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1.1]$$

On désire appliquer la commande prédictive afin de contrôler la sortie y dont :

- ✓ L'horizon de prédiction vaut 10
- ✓ L'horizon de prédiction de commande vaut 1
- ✓ La pondération sur les incréments de commande est de 0.0001
- ✓ La consigne est supposée égale à 1
- ✓ Les conditions initiales égales à 0

1. Donner le schéma bloc de commande
2. Donner la forme générale du critère à minimiser.
3. Trouver l'expression du signal de commande qui minimise le critère précédent
4. Donner la matrice G

Ex. 2 :

Calculer la réponse libre pour t =0 de l'exercice 3.

Ex. 3 :

Calculer le signal de commande // du système présenté dans l'exercice 3, en utilisant les résultats de l'exercice 4 à l'instant t=0

Ex.4 :

Même question que l'exercice 5 pour la deuxième itération

Ex. 5 :

Donner la matrice G du système présenté par la réponse indicielle suivante :

$$g(0:8)=(0, 1, 8, 5, 5, 1, 2, 4, 5, 8), \text{ pour } N1=1, N2=3, Nu=1.$$

Ex. 6 :

Refaire l'exercice 7 pour N1=1, N2=4, Nu=2 et pour N1=2, N2=4, Nu=2

II.6. Simulation des concepts étudiés

Soit le système donné par la fonction de transfert suivante $H(z^{-1}) = \frac{-0.5 z^{-1}}{1+0.9z^{-1}}$

1. Tracez le signal de commande obtenu par la loi de commande prédictive si on donne :
 $T_e=0.1 ; N_1=1 ; N_2=4 ; N_u=1$ pour une consigne égale à 10

2. Etudiez l'effet des paramètres suivants pour les deux cas, de poursuite et de régulation :
 - a. Horizon de commande,
 - b. Horizon de prédiction,
 - c. Modèle de référence,
 - d. Facteur de pondération.

Faire le même travail pour le système : $H(s) = \frac{1}{s^2}$

Chapitre III :

Commande prédictive généralisée polynomiale

III.1. Introduction

Dans cette technique, on suit les mêmes étapes de la commande prédictive, mentionnés dans le premier chapitre à la différence que le modèle de prédiction sera donné en fonction des polynômes et la commande sera synthétisée à l'aide de trois polynômes: R, S, T. [Bou, 96], [Cla, 87].

III.2. Prédicteur optimal

Le principe reste toujours le même que celui présenté dans la GPC algorithmique et le modèle CARIMA du système est donné par l'équation aux différences suivante :

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k - 1) + C(q^{-1})\frac{\xi(k)}{\Delta(q^{-1})} \quad (\text{III.1})$$

Avec :

q^{-1} : Opérateur retard ;

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_{na}q^{-na};$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{nb}q^{-nb};$$

$C(q^{-1})\xi(k)$: Terme lié aux perturbations ;

$$\Delta(q^{-1}) = 1 - q^{-1}.$$

Une modélisation où les réponses libre et forcée inconnues s'expriment par les polynômes : $F_j(q^{-1}), G_j(q^{-1}), H_j(q^{-1})$ et $J_j(q^{-1})$ est donnée par la forme [Bou, 96], [Cla, 87] :

$$y(k+j) = \underbrace{F_j(q^{-1})y(k) + H_j(q^{-1})\Delta u(k-1)}_{\text{Réponse libr}} + \underbrace{G_j(q^{-1})\Delta u(k+j-1) + J_j(q^{-1})\xi(k+j)}_{\text{éponse forcée}} \quad (\text{III.2})$$

Avec :

G_j : Terme représentant le futur ;

F_j, H_j : Termes correspondant respectivement au présent et au passé ;

J_j : Terme lie aux perturbations.

A partir de (III. 1) on a :

$$\begin{aligned} \Delta(q^{-1})A(q^{-1})y(k+j) &= B(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(k+j-1) + \xi(k+j) \\ &= B(q^{-1})\Delta u(k+j-1) + \xi(k+j) \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Et il résulte de (III.2) :

$$y(k+j) \left(1 - q^{-j}F_j(q^{-1})\right) = \Delta u(k+j-1) \left[q^{-j}H_j(q^{-1}) + G_j(q^{-1})\right] + J_j(q^{-1})\xi(k+j) \quad (\text{III.4})$$

L'équivalence (III.3) \equiv (III.4) donne :

$$\begin{cases} q^{-j}H_j(q^{-1}) + G_j(q^{-1}) = B(q^{-1})J_j(q^{-1}) \\ 1 - q^{-j}F_j(q^{-1}) = \Delta(q^{-1})A(q^{-1})J_j(q^{-1}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$q^{-j}H_j(q^{-1}) + G_j(q^{-1}) = B(q^{-1})J_j(q^{-1}) \quad (\text{III.5})$$

$$q^{-j}F_j(q^{-1}) + \Delta(q^{-1})A(q^{-1})J_j(q^{-1}) = 1 \quad (\text{III.6})$$

L'équation (III.6) est dite équation de diophantienne, et sa résolution se fait d'une façon récursive pour avoir des solutions explicites et uniques car les polynômes $\Delta(q^{-1})$ et $A(q^{-1})$ et q^{-j} sont premiers entre eux

[\[Nic, 05\]](#)

On suppose que la meilleure prédiction du terme lie aux perturbations soit nulle donc l'équation (III.2) devient :

$$\hat{y}(k+j) = F_j(q^{-1})y(k) + H_j(q^{-1})\Delta u(k-1) + G_j(q^{-1})\Delta u(k+j-1) \quad (\text{III.7})$$

Où :

$$\deg[J_j(q^{-1})] = j - 1; \deg[F_j(q^{-1})] = \deg[A(q^{-1})]; \deg[G_j(q^{-1})] = j - 1; \text{ et } \deg[H_j(q^{-1})] = \deg[B(q^{-1})] - 1.$$

III.3. Critère d'optimisation et loi de commande

Le critère d'optimisation est [Bou, 96] :

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [w(k+j) - \hat{y}(k+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} [\Delta u(k+j-1)]^2 \quad (\text{III.8})$$

$$\Delta u(k+j) = 0 \text{ pour } j \geq N_u$$

Si on suppose que :

$$\hat{Y} = [\hat{y}(k+N_1) \dots \dots \dots \hat{y}(k+N_2)]^T ;$$

$$W = [w(k+N_1) \dots \dots \dots w(k+N_2)]^T ;$$

$$if = [F_{N_1}(q^{-1}) \dots \dots \dots F_{N_2}(q^{-1})]^T ;$$

$$ih = [H_{N_1}(q^{-1}) \dots \dots \dots H_{N_2}(q^{-1})]^T ;$$

$$\tilde{U} = [\Delta u(k) \Delta u(k+1) \dots \dots \dots \Delta u(k+N-1)]^T .$$

La sortie prédite (III.7) peut être ré-exprimée sous la forme matricielle suivante :

$$\hat{Y} = G\tilde{U} + if y(k) + ih \Delta u(k-1) \quad (\text{III.9})$$

Où G est la matrice formée des coefficients $\{g_i^j\}$ des polynômes G_j [Bou, 96] :

$$G = \begin{bmatrix} g_{N_1} & g_{N_1-1} & \dots & \dots & g_{N_1-N_u+1} \\ g_{N_1+1} & g_{N_1} & \dots & \dots & g_{N_1-N_u} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ g_{N_2} & g_{N_2-1} & \dots & \dots & g_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix}$$

Il a été prouvé dans [Cla, 87] que les coefficients $\{g_i^j\}$ correspondent aux valeurs des coefficients $\{g_i\}$ de la réponse indicielle du modèle.

On remplaçant (III.9) dans (III.8) le critère sera, sous forme matricielle, :

$$J = [G\tilde{U} + if y(k) + ih \Delta u(k-1) - W]^T [G\tilde{U} + if y(k) + ih \Delta u(k-1) - W] + \lambda \tilde{U}^T \tilde{U} \quad (\text{III.10})$$

La loi de commande obtenue à partir de $\frac{\partial J}{\partial \tilde{U}} = \mathbf{0}$ est exprimée comme suit :

$$\tilde{U}_o = -[G^T G + \lambda I_{N_u}]^{-1} G^T [if y(k) + ih \Delta u(k-1) - W] \quad (\text{III.11})$$

Et du principe de l'horizon fuyant la première valeur de cette séquence est appliquée au système :

$$\tilde{u}_{opt}(k) = \tilde{u}_{opt}(k-1) - m_1 [if y(k) + ih \Delta u(k-1) - W] \quad (\text{III.12})$$

Où :

$m1$ est la première ligne de la matrice M .

$$M = [G^T G + \lambda + I_{Nu}]^{-1} G^T$$

III.4. Régulateur polynomial RST équivalent

III.4.1. Régulateur RST

Un régulateur de type RST est polynomial [Lon, 10], composé de trois polynômes R, S, T, Figure III.1, permet d'assurer la régulation en boucle fermée du système. L'utilisation de ce type de régulateurs assure un meilleur compromis entre rapidité et performance. Les éléments R, S, T, intervenant dans ce type de régulation sont des polynômes dont le degré est fixé suivant les fonctions de transfert : de poursuite et de régulateur en boucle ouverte.

Ces polynômes sont déterminés à l'aide d'une stratégie de placement de pôles robuste [Ro1, 10]

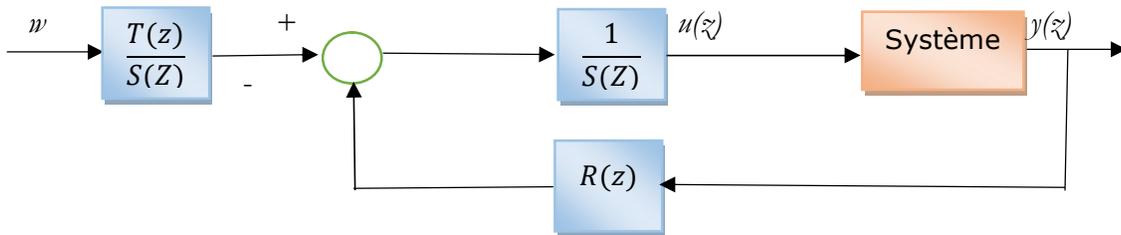


Fig (III.1) : Régulateur RST

III.4.2. Régulateur RST dans le cas GPC polynomiale

Pour avoir une relation entre la sortie $y(k)$, la commande $u(k)$ et la consigne $w(k)$, on utilise la structure RST représentée par la figure suivante [Bou,96] :

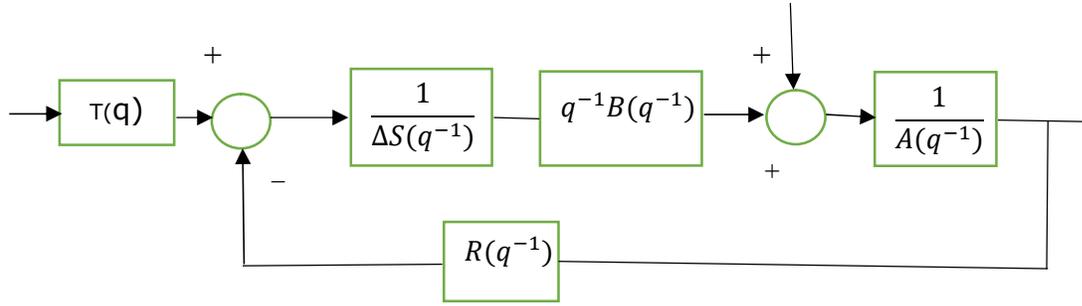


Fig (III.2) : Structure d'un régulateur RST pour une CPG

On a :

$$\Delta u_{opt}(k) = -m_1 i f y(k) - m_1 i h \Delta u(k-1) + m_1 W \quad (\text{III. 13})$$

Donc :

$$\Delta u_{opt}(k)[1 + m_1 i h q^{-1}] = -m_1 i f y(k) + m_1 [q^{N_1} \dots \dots q^{N_2}]^T w(k) \quad (\text{III. 14})$$

D'après la Figure III.2 :

$$s(q^{-1})\Delta(q^{-1})u(k) = T(q) - R(q^{-1})y(k) \quad (\text{III. 15})$$

Par identification entre (III.14) et (III.15) on obtient :

$$s(q^{-1}) = (1 + m_1 i h q^{-1})$$

$$R(q^{-1}) = m_1 i f$$

$$T(q) = m_1 [q^{N_1} \dots \dots q^{N_2}]^T$$

III.5. Exemples

Exemple 1 :

On va traiter le même système que l'exemple 1 de la section (II.4), le régulateur RST résultant de l'application de la commande prédictive polynomiale est donné par :

$$S(z^{-1}) = 1 + 0.734 z^{-1}$$

$$R(z^{-1}) = 0.284 - 0.237 z^{-1} - 0.0048 z^{-2}$$

$$T(z) = 0.0004 z + 0.0018 z^2 + 0.0031 z^3 + 0.0045 z^4 + 0.0059 z^5 + 0.0073 z^6 + 0.0086 z^7 + 0.01 z^8$$

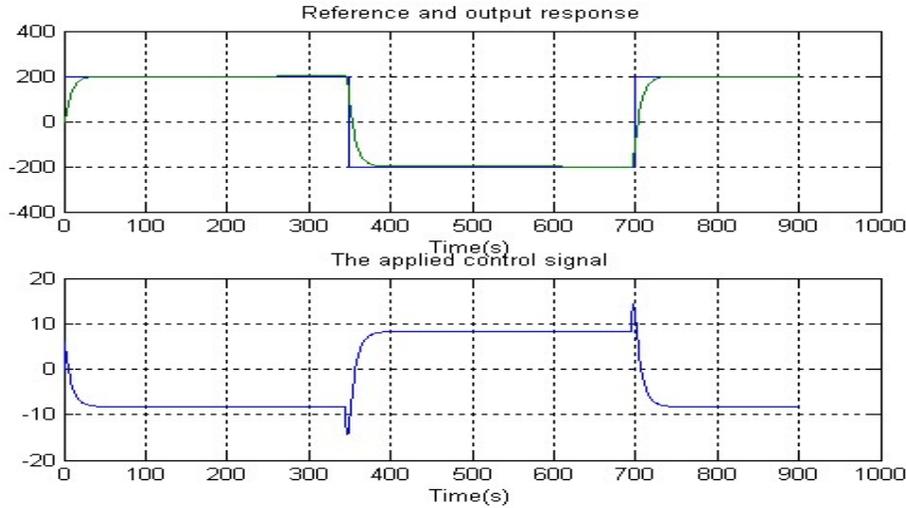


Fig (III.3) : GPC polynomiale de l'exemple1

Les résultats de l'application de la commande prédictive polynomiale à l'exemple 1 sont presque les mêmes obtenus par l'application de la commande prédictive algorithmique. La Figure III.3 montre que la sortie est très proche de référence. La seule différence réside dans le signal de commande, où ce dernier prend des valeurs plus grandes pour la commande polynomiale que celui de la commande prédictive algorithmique

Exemple 2 :

La commande CPG polynomiale a été appliquée sur le même système présenté dans le chapitre passé (paragraphe (II.4)), celui d'un chariot avec pendule inversé. L'objectif est le contrôle de la position $x(t)$ du chariot selon une trajectoire prédéfinie.

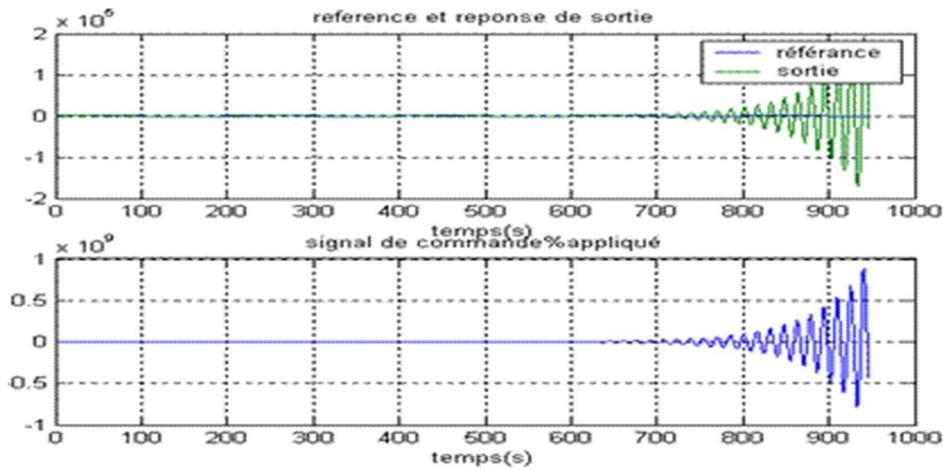


Fig (III.4) : GPC polynomiale de position du système chariot avec pendule inversé

$$N1 = 1; N_u = 1; N2 = 4; \lambda = 2 \times 10^{-7}; T_e = 0.005$$

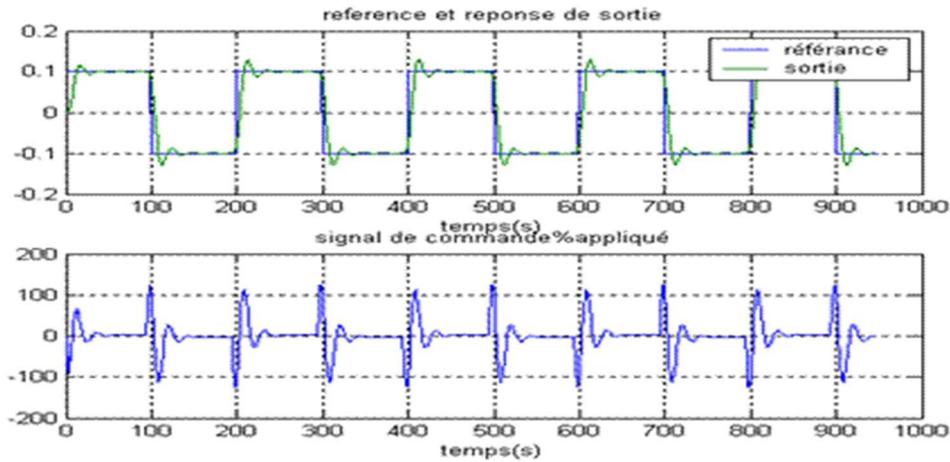


Fig (III.5) : GPC polynomiale de position du système chariot avec pendule inversé

$$N_1 = 1; N_u = 1; N_2 = 8; \lambda = 2 \times 10^{-7}; T_e = 0.005$$

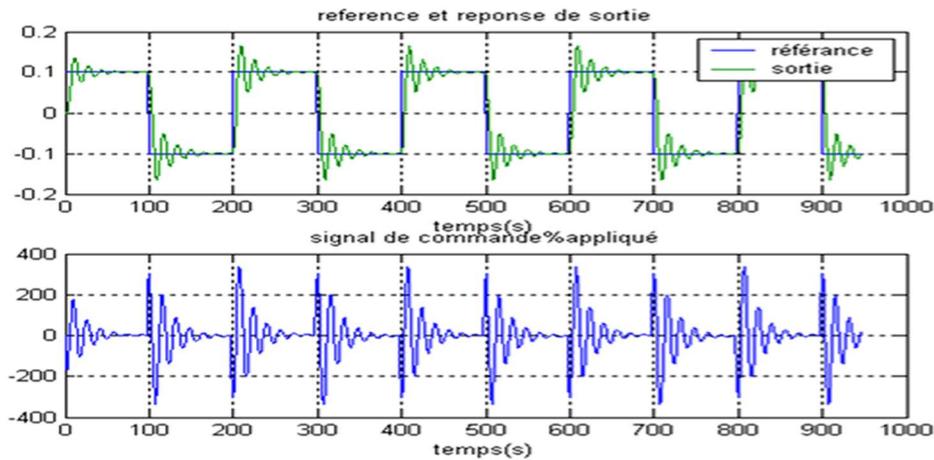


Fig (III.6) : GPC polynomiale de position du système chariot avec pendule inversé

$$N_1 = 1; N_u = 1; N_2 = 5; \lambda = 2 \times 10^{-7}; T_e = 0.005$$

Les figures (III.4), (III.5) et (III.6) donnent les graphes de la position du chariot, référence et le signal de commande pour diverses valeurs de l'horizon de prédiction. Il est bien clair que le choix de ce dernier joue un rôle important pour avoir de bonne performance de la commande GPC et le choix de N_2 doit être judicieux.

Les polynômes du régulateur RST qui conviennent, pour cet exemple sont :

$$R = 1.0e + 004 - 2.7406 q^{-1} + 4.7799 q^{-2} - 2.1201 q^{-3}$$

$$S = 1 + 1.3224 q^{-1}$$

$$T = -5.7600 q^2 - 23.0453 q^3 - 51.8721 q^4 - 92.2670 q^5 - 144.2776 q^6 - 207.9221 q^7 - 283.2898 q^8$$

Exemple 3 :

Dans cet exemple, la commande prédictive généralisée polynomiale est appliquée au système bras manipulateur à deux degrés de liberté présenté dans le chapitre précédent, tout en ajoutant des contraintes sur la loi de commande. En effet, on suppose que les incréments de commande doivent satisfaire la condition suivante :

$$|\Delta u| \leq \Delta u_0$$

Dans ce cas le signal commande est obtenu en résolvant le critère quadratique (III.10) avec contraintes. La loi de commande a pour but de contrôler les positions q_1 et q_2 , par la forme polynomiale RST et dont le bloc Simulink est présenté par la figure suivante :

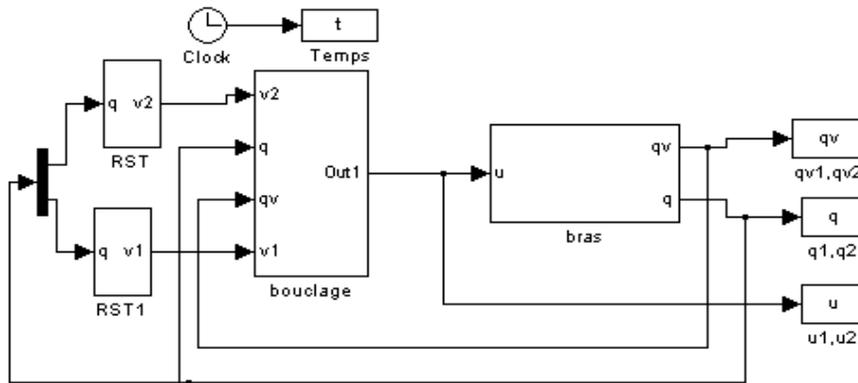


Fig (III.7) : Bloc GPC polynomiale du système bras manipulateur à deux degrés de liberté

Les résultats de simulation sont représentés dans les figures suivantes :

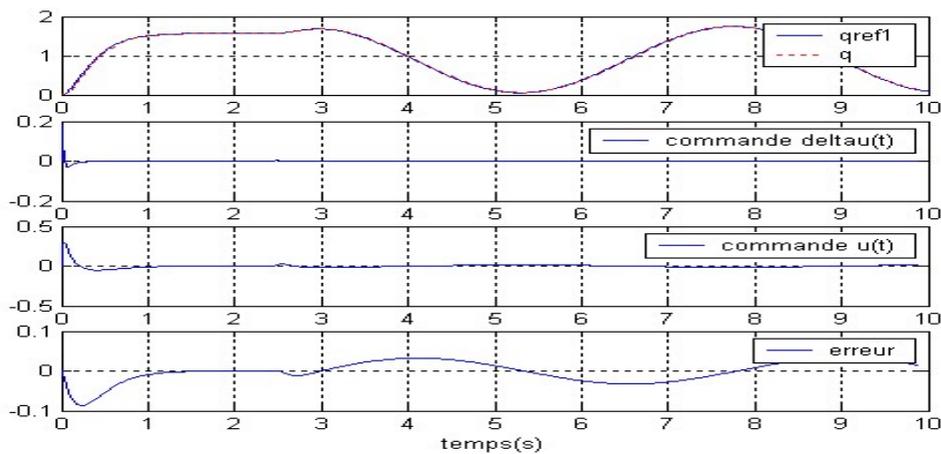


Fig (III.7) : GPC polynomiale pour la poursuite de l'articulation q_1 ;

$$N1 = 1, N2 = 4 \quad Nu = 1, \lambda = 0,002, \Delta u_0 = 0.35$$

Le régulateur RST dans ce cas est donnée par :

$$R(q^{-1}) = 203.3708 - 319.11011q^{-1} + 131.4607q^{-2}$$

$$S(q^{-1}) = 1 + 1.0337q^{-1}$$

$$T(q) = 1.1236q + 4.4944q^2 + 10.1124q^3$$

Pour la deuxième articulation q_2 , les résultats de simulation sont représentés dans les figures suivantes :

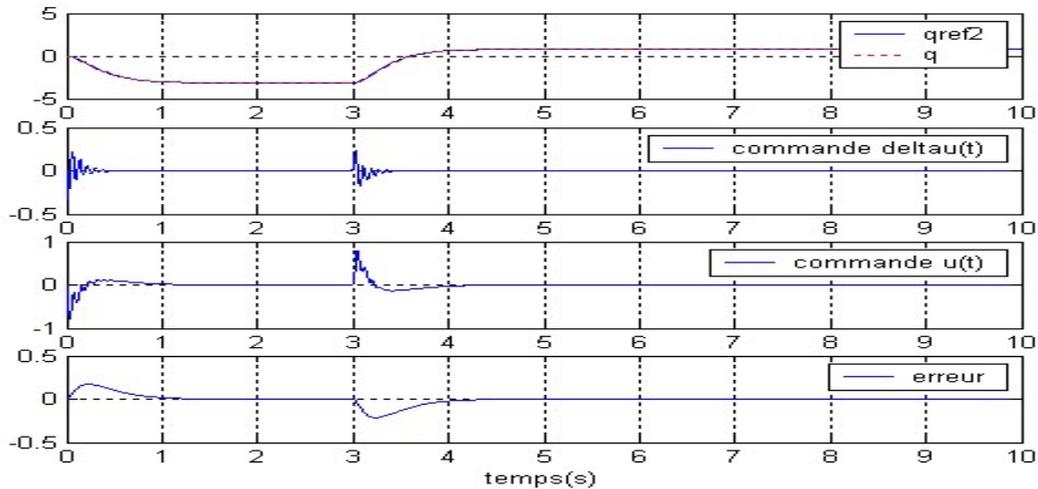


Fig (III.8) : GPC polynomiale pour la poursuite d'articulation q_2

$$N1 = 1, N2 = 4, Nu = 1, \lambda = 0,001, \Delta u_0 = 0.35$$

Les résultats de simulation des figures III.7 et III.8 montrent clairement l'efficacité de la GPC polynomiale en présence des contraintes, sur les incréments de commande, en termes de poursuite des trajectoires de référence (positions angulaire) et le respect des contraintes imposées. En effet, il est très clair à partir des graphes des incréments de commande (deltau) que la valeur de ce dernier, est toujours dans l'intervalle imposé.

III. 6. Exercices

Ex. 1 : Calcul des polynômes G, F, H, J

Rappel : Soit un système physique représenté par le modèle CARIMA :

$$\Delta A(q^{-1})y(t) = B_d(q^{-1})\Delta u(t) + C(q^{-1})\xi(t)$$

Avec $B_d(q^{-1}) = q^d B(q^{-1})$; $\Delta = 1 - q^{-1}$

La sortie prédite peut être donnée par :

$$\hat{y}(t+j) = G_{dj}(q^{-1})\Delta u(t+j) + H_j(q^{-1})\Delta u(t-1) + F_j(q^{-1})y(t) + J_j(q^{-1})e(t+j)$$

Avec :

$\deg J(q^{-1}) : (N_p \times 1)$;

$$\deg F(q^{-1}): (Np \times n - 2);$$

$$\deg H(q^{-1}): (Np \times nb + 2);$$

$$\deg G(q^{-1}): (Np \times 1);$$

na, nb sont les ordres des polynômes $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ respectivement du système.

$$\alpha(q^{-1}) = \Delta A(q^{-1})$$

Calcul récursif des polynômes : $J_j(q^{-1})$, et $F_j(q^{-1})$:

- $j=1$

$$\deg[J_1(q^{-1})] = 0; \deg[F_1(q^{-1})] = n_a$$

$$J_1(q^{-1}) = 1;$$

$$F_1(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{n_a} f_i^1 q^{-i}$$

$$\text{Avec } f_i^1 = -\alpha_{i+1} \text{ pour } 0 \leq i \leq n_a$$

- $j+1$

$$J_{j+1}(q^{-1}) = J_j(q^{-1}) + v_j q^{-j}$$

$$J_{j+1} = \sum_{i=0}^j \gamma_i^{j+1} q^{-i} \text{ Avec}$$

$$\gamma_i^{j+1} = \gamma_i^j \text{ Pour } 0 \leq i \leq j-1$$

$$\gamma_j^{j+1} = f_0^j = v_j$$

$$\text{Et } F_{j+1}(q^{-1}) = q[F_j(q^{-1}) - f_0^j \alpha(q^{-1})]$$

$$F_{j+1}(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{n_a} f_i^{j+1} q^{-i}$$

$$f_i^{j+1} = f_{i+1}^j - f_0^j \alpha_i \text{ } 0 \leq i \leq n_a - 1$$

$$f_{n_a}^{j+1} = -f_0^j \alpha_{n_a+1}$$

$$\text{Si } H(z^{-1}) = \frac{1.344+3.024z^{-1}}{1-0.98z^{-1}-0.2z^{-2}}$$

- Trouver les coefficients des polynômes $F(q^{-1})$ et $J(q^{-1})$ pour un horizon de prédiction égal à 2, une référence en échelon unitaire et un facteur de pondération égale à 0.01

Ex. 2 : Donner la commande et les coefficients du régulateur RST associés au système de l'exercice

1.

EX: 03: En désire appliquer la commande prédictive généralisée à un système H afin de poursuivre une trajectoire de référence donnée avec la fonction objective :

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [(w(t+j) - \hat{y}(t+j))]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} \Delta u^2(t+j)$$

Où :

W représente la référence, et \hat{y} la sortie prédite donnée par :

$$Y = Gu + if y(t) + ih \Delta u$$

Donner le critère à optimiser

Ex. 4 : Donner le signal de commande résultant de la minimisation du critère de l'exercice 3.

III.7. Simulation des concepts étudiés

Il est demandé de :

1. développer un programme sous Matlab qui donne les coefficients des polynômes $G(q^{-1})$, $H(q^{-1})$, $F(q^{-1})$ et $J(q^{-1})$ et le signal de commande .
2. Le tester sur l'exemple de l'exercice 1 pour une référence $w = 10$.

Chapitre IV :

Commande prédictive généralisée sous espace d'état

IV. 1. Introduction

Le choix du modèle du système joue un rôle central pour la synthèse du correcteur adéquat. Il doit être à la fois simple à implémenter, capable de reproduire la dynamique du processus et prédit aussi fidèlement que possible les sorties futures du système.

La représentation d'état contient des informations accessibles à la mesure et directement liées aux grandeurs physiques du système. Elle offre, de ce fait, des nouvelles possibilités en termes d'analyse et de commande des systèmes [Vac, 07].

Une représentation d'état a les caractéristiques suivantes [Sia, 92] :

- N'est pas unique ; un système donné possède une infinité de représentations d'état,
- Les conditions initiales apparaissent explicitement contrairement à la fonction de transfert qu'impose que les conditions initiales sont nulles,
- Les pôles du système sont les valeurs propres de la matrice d'état,
- La possibilité aisée de description des systèmes multivariables,
- Elaboration de la commande en fonction des contraintes imposées.

IV.2. Bases de la commande prédictive sous espace d'état

IV.2.1. Modèle de prédiction avec intégrateur

La représentation d'état d'un modèle discret, caractérisé par m entrées ; q sorties ($q \leq m$) et n états, peut être définie par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}x_m(k+1) &= A_m x_m(k) + B_m u(k) + B_a w(k) \\ y(k) &= C_m x_m(k) + D_m u(k)\end{aligned}\tag{IV.1}$$

Où :

$x_m(k)$, $u(k)$ et $y(k)$ représentent respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie du modèle considéré :

$$x_m(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_n(k)]^T,$$

$$u(k) = [u_1(k) \ u_2(k) \ \dots \ u_m(k)]^T,$$

$$y(k) = [y_1(k) \ y_2(k) \ \dots \ y_q(k)]^T$$

A_m , B_m , C_m et D_m représentent les matrices d'états du modèle considéré et ont respectivement les dimensions: $n \times n$; $n \times m$; $q \times n$ et $D_m = 0$.

$w(k)$ est la perturbation, supposée être une séquence intégrée du bruit blanc et Bd une matrice liée aux perturbations. Cela signifie que l'entrée de perturbation $w(k)$ est liée à une séquence du bruit blanc de moyenne nulle $\varepsilon(k)$, par l'équation de différence :

$$w(k) - w(k - 1) = \varepsilon(k) \quad (\text{IV.2})$$

En partant des principes classiques de la théorie des systèmes linéaires, il est bien connu que pour une erreur stationnaire nulle, la fonction de transfert en boucle ouverte doit contenir un intégrateur. La plus simple façon d'obtenir cette garantie dans le contexte prédictif est de construire un modèle de prédiction en utilisant l'incrément de la commande qui contiendra l'intégrateur dans la chaîne directe [\[Wan, 09\]](#).

Si on voudrait augmenter le modèle (IV.1), pour qu'il inclue dans sa représentation un intégrateur, on prend la récurrence, à partir de (IV.1) et (IV.2) :

$$\Delta x_m(k + 1) = A_m \Delta x_m(k) + B_m \Delta u(k) + B_d \varepsilon(k) \quad (\text{IV.3})$$

Avec :

$$\Delta x_m(k + 1) = x_m(k + 1) - x_m(k),$$

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k - 1).$$

Notons que l'entrée dans ce modèle est $\Delta u(k)$.

La prochaine étape est de mettre la sortie $y(k)$ en fonction de $\Delta x_m(k)$. Pour cela on choisit un nouvel vecteur d'état : $x(k) = [\Delta x_m(k)^T \ y(k)]^T$

L'équation de sortie peut s'écrire donc sous la forme suivante :

$$y(k + 1) - y(k) = C_m A_m \Delta x_m(k) + C_m B_m \Delta u(k) + C_m B_d \varepsilon(k) \quad (\text{IV.4})$$

La représentation d'état obtenue en fusionnant (IV.3) et (IV.4) est :

$$\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} A_m & 0_m^T \\ C_m A_m & I_{q \times q} \end{bmatrix}}^A \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}}^{x(k)} + \overbrace{\begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix}}^B \Delta u(k) + \overbrace{\begin{bmatrix} B_d \\ C_m B_d \end{bmatrix}}^{B_\varepsilon} \varepsilon(k)$$

$$y(k) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0_m & I_{q \times q} \end{bmatrix}}^C \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

Où :

- 0_m est une matrice nulle de dimension $q \times n$
- $I_{q \times q}$: matrice d'identité de dimension $q \times q$

L'équation (IV.5) peut être donnée sous la forme :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A x(k) + B \Delta u(k) + B_\varepsilon \varepsilon(k) \\ y(k) &= C x(k) \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Le triplet (A, B, C) est appelé "matrices du modèle augmenté" d'ordre $n_1 = n + q$ ce qui sera utilisé dans la conception de la commande prédictive.

A noter que l'équation polynomiale caractéristique du modèle augmenté (IV.6) est :

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} \lambda I - A_m & 0_m^T \\ -C_m A_m & (\lambda - 1) I_{q \times q} \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^q \det(\lambda I - A_m) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

A partir de (IV.7) il est bien clair que les valeurs propres du modèle augmenté sont l'union des valeurs propres du modèle du système et les q valeurs propres $\lambda = 1$. Cela signifie qu'il y a q intégrateurs incorporés dans le modèle de la conception augmentée. C'est le moyen que nous utilisons pour obtenir une action intégrale pour la commande prédictive sous espace d'état.

IV.2 .2. Prédiction de la sortie

Supposons qu'à l'instant k , $k_i > 0$ le vecteur d'état $x(k)$ est disponible pour la mesure. La séquence de commande future est représentée par :

$$\Delta u(k), \Delta u(k+1), \Delta u(k+2), \dots, \dots, \Delta u(k+N_c-1)$$

Où N_c est l'horizon de prédiction sur la commande.

$\Delta U = [\Delta u(k) \Delta u(k+1) \Delta u(k+2) \dots \Delta u(k+N_c-1)]^T$, de dimension $(N_c \times m)$.

En utilisant les équations (IV.8) et (IV.9) il est possible d'exprimer le vecteur de prédiction des sorties sous la forme compacte :

$$Y = F_y x(k_i) + \Phi_y \Delta U \quad (IV.10)$$

Avec :

$$F_y = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix}; \quad \Phi_y = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ CA^{N_p-1}B & CA^{N_p-2}B & CA^{N_p-3}B & \dots & CA^{N_p-N_c}B \end{bmatrix}$$

F_y est de dimension $(qN_p) \times n1$ et Φ_y de $(qN_p) \times (mN_c)$

II.2.3. Optimisation

Pour une consigne $y_{ref}(k)$ donnée et dans un horizon de prédiction défini, i.e. :

$$y_{ref}(k) = [y_{ref_1}(k) \ y_{ref_2}(k) \ y_{ref_3}(k) \ \dots \ y_{ref_q}(k)]^T$$

L'objectif de la commande prédictive est d'avoir une sortie du système la plus proche possible de la consigne. Ceci se traduit par la recherche du vecteur ΔU de telle sorte qu'une fonction d'erreur entre la consigne et la sortie prédite soit minimale.

La fonction de coût J est défini par :

$$J = (Y_{ref} - Y)^T (Y_{ref} - Y) + \Delta U^T R_w \Delta U \quad (IV.11)$$

Où R_w est une matrice de m blocs et sa dimension égale à la dimension de $\Phi_y^T \Phi_y$, utilisée comme paramètre de réglage.

Dans cette expression le premier terme a pour objectif de minimiser l'erreur entre la sortie prédite et la consigne tandis que le deuxième correspond aux considérations données pour les dimensions de ΔU afin de minimiser l'énergie de commande [Wan, 09].

En remplaçant (IV.10) dans (IV.11), la solution optimale qui minimise J est :

$$\Delta U = (\Phi_y^T \Phi_y + R_w)^{-1} \Phi_y^T (Y_{ref} - F_y x(k)) \quad (IV.12)$$

Selon le principe de l'horizon fuyant, seul le premier élément du vecteur ΔU est appliqué au système. Il est exprimé par :

$$\begin{aligned} \Delta u &= \overbrace{[1 \ 0 \ \dots \ 0]}^{N_c} (\Phi_y^T \Phi_y + R_w)^{-1} (\Phi_y^T Y_{ref} - \Phi_y^T F_y x(k)) \\ &= K_y y_{ref}(k) - K_{mpc} x(k) \end{aligned} \quad (IV.13)$$

Où :

- K_y est le premier élément de $(\Phi_y^T \Phi_y + R_w)^{-1} \Phi_y^T Y_{ref}$,
- K_{mpc} est la première ligne de $(\Phi_y^T \Phi_y + R_w)^{-1} \Phi_y^T F_y$.

L'équation (IV.13) est la forme standard de la commande par retour d'état avec K_{mpc} le gain. Dans ce cas et d'après les équations (II.6) et (II.13), les valeurs propres en boucle fermée λ_p peuvent être calculées à partir de l'équation caractéristique :

$$[\lambda_p I - (A - BK_{mpc})] = 0 \quad (IV.14)$$

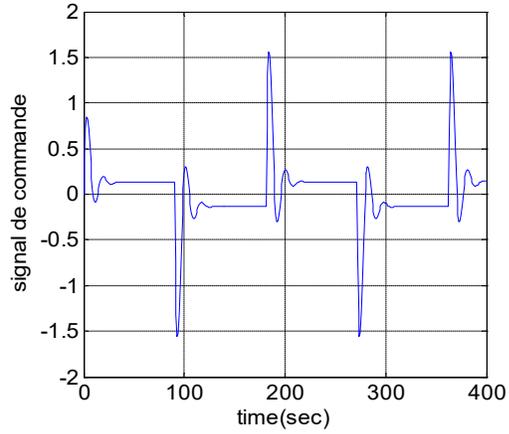
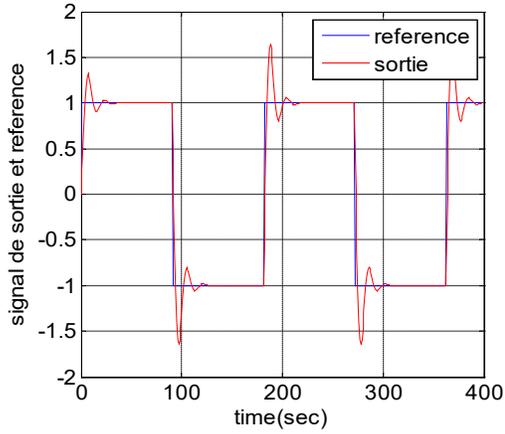
IV. 3.Exemples

Exemple 1 :

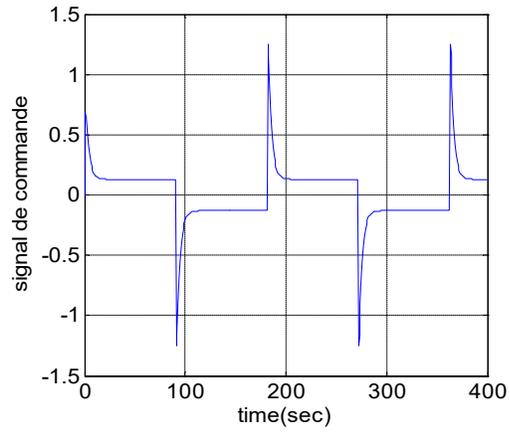
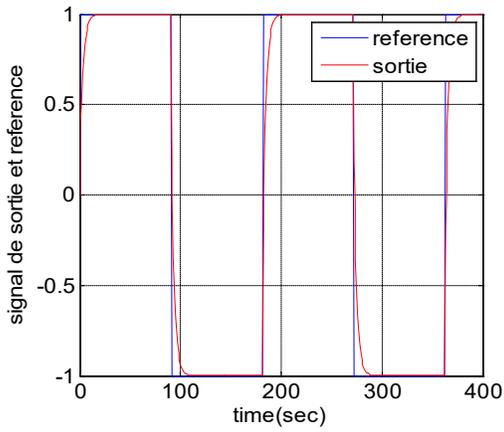
La commande MPC a été appliquée sur le système [\[Mad, 11\]](#) stable suivant :

$$a = \begin{bmatrix} -0.511 & -0.0723 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}, b = [1 \ 0.3]^t, c = [0.742 \ 0.3756], d = 0$$

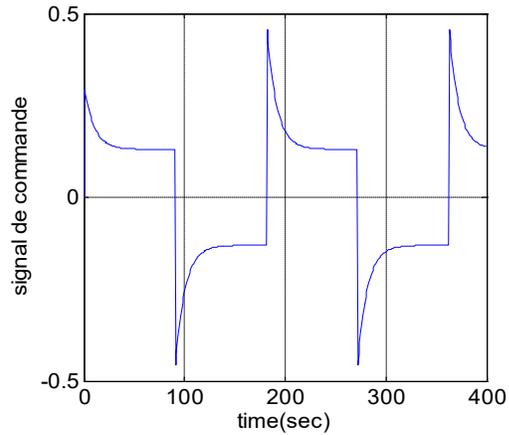
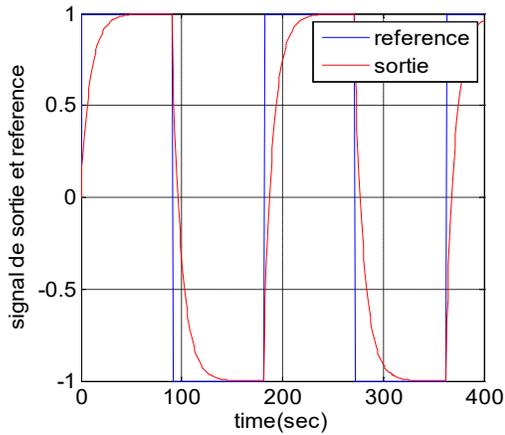
La référence imposée aux systèmes est un signal carré. Afin d'étudier l'effet de l'horizon de prédiction N_p sur la stratégie de commande on va varier ce dernier et voir son effet sur la sortie et sur la commande.



a) $N_p = 1, N_c = 1, R_w = 1$



b) $N_p = 5, N_c = 1, R_w = 1$



c) $N_p = 20, N_c = 1, R_w = 1$

Fig (IV.1) : Évolution de la sortie et de la commande d'un système stable pour différentes valeurs de N_p

D'après les figures on peut remarquer que :

- Le bon choix des paramètres de la commande prédictive sous espace d'état donne des résultats satisfaisants en termes de suivi de la trajectoire de référence.
- La diminution de l'horizon de prédiction Np augmente la valeur de la commande.
- Pour tous les systèmes, une petite valeur de Np donne un système rapide et vice versa.

Exemple 2 :

Soit le système mécanique chariot avec pendule inversé décrit précédemment. En posant le vecteur d'état suivant : $X = [\theta; \dot{\theta}; x; \dot{x}]^T$

Le modèle du système sous espace d'état est [Bdi, 10], [Bdi, 15]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_3 \\ 0 \\ K_4 \end{bmatrix} F(t)$$

$$Y = [0 \ 0 \ 1 \ 0]X$$

Avec :

$$K_1 = \frac{-6g(M+mp)}{l(4M+mp)} ; K_2 = \frac{3mpg}{4M+mp} ; K_3 = \frac{-6}{l(4M+mp)} ; K_4 = \frac{4}{4M+mp}$$

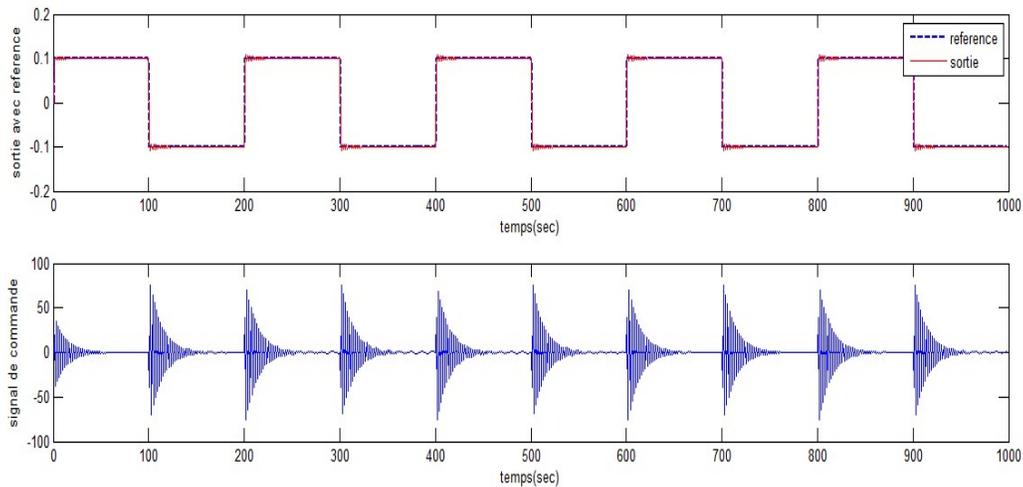


Fig (IV.2) : Commande prédictive sous espace d'état du système chariot avec pendule inversé

$$Np = 15; Nc = 14; R_w = 10^{-3}$$

Les résultats de simulation, de l'application de la commande prédictive sous espace d'état sur le système chariot avec pendule inverse sont donnés par la Figure IV.2 . L'allure du graphe de poursuite montre, comme pour les autres approches citées dans les chapitres passés, une bonne performance de poursuite avec une priorité à la commande prédictive sous espace d'état. De plus et d'après la comparaison entre les graphes de commande obtenus par les trois approches on constate que la commande dans le cas de la commande prédictive sous espace d'état prend les valeurs plus importantes que les autres approches.

IV. 4. Exercices

Ex. 1 : Soit le système linéaire donné par la forme suivante :

$$x_m(k + 1) = A_m x_m(k) + B_m u(k)$$

$$y(k) = C_m x_m(k)$$

Où les matrices d'état sont :

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; B_m = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}; C_m = [1 \ 0]$$

Donner les matrices d'état (A, B, C) du modèle augmenté

Ex. 2 : Calculer les valeurs propres du modèle augmenté de l'exercice 1 et conclure sur sa stabilité.

Ex. 3 : Refaire le même travail des exercices 1 et 2 pour le système suivant :

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; C_m = [1 \ 1 \ 2]$$

Ex. 4 : Soit un système de premier ordre donné par :

$$x_m(k + 1) = ax_m(k) + bu(k)$$

$$y(k) = cx_m(k)$$

Avec $a=0.8$, $b=0.1$ et $c=1$

-Trouver le modèle augmenté.

Ex. 5 : On désire appliquer la commande prédictive (sous espace d'état) au système de l'exercice 4 , donner l'expression du critère à minimiser et l'expression de la loi de commande.

Ex. 6 : Si on suppose que :

- L'horizon de prédiction de la sortie vaut 3
- L'horizon de prédiction de la commande vaut 1

Donner les valeurs des matrices : Φ_y et Fy résultantes par l'application de la loi de commande de l'exercice 5 appliquée au système de l'exercice 4.

Ex. 7 : Donner la solution optimale ΔU à l'instant $k=1$ du système de l'exercice 6, pour une référence égale à 10, $x(k) = [0 \ 0]^T$ et $\lambda = 10$

IV.5. Simulation des concepts étudiés

Soit un système linéaire donné par l'espace d'état suivant :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= 2x(k) - u(k) \\ y(k) &= 0.5x(k) \end{aligned}$$

Travail demandé :

1. Donner le code Matlab qui donne le modèle augmenté.
2. Donner Φ_y et .
3. Tracer dans ce cas la sortie et le signal de commande pour une consigne en échelon.
4. Soit le système chariot avec pendule inversé suivant :

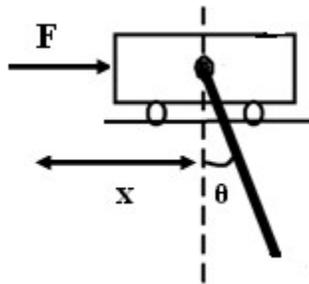


Schéma de l'ensemble chariot et pendule inversé

Avec :

- m : Masse du pendule
- M : Masse du chariot
- l : Demi-longueur du pendule
- $F(t)$: Force exercée sur le chariot
- d : Frottements du pendule
- b : Frottements de déplacement du chariot

$x(t)$: Position du chariot

$\theta(t)$: L'angle du pendule

g : Intensité de pesanteur

Si on pose :

$$M=2.4kg ; m=0.23kg ; l=0.36m ; g=9.81m/s^2 ; b=0.05Ns/m ; d=0.005Nms/rad ;$$

Donner les graphes de poursuite et du signal de commande obtenus par l'application de la commande prédictive sous espace d'état si on désire contrôler la position du chariot et la position angulaire du pendule, où on pose que les frottements sont négligeables et que le chariot doit suivre une trajectoire constante égale à 1 de tel sorte que le pendule reste à la position d'équilibre $\theta = 0$.

ELEMENTS POUR LA CORRECTION DES EXERCICES

CHAPITRE : II

Ex. 1

1. Schéma Bloc : Voir le cours du chapitre II

2. Le critère $J = (G\tilde{U} + \rho - W)^T (G\tilde{U} + \rho - W) + \lambda \tilde{U}^T \tilde{U}$

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{U}} = [2G^T G + \lambda I_{Nu}] \tilde{U} + 2G^T (W - \rho)$$

3. $\frac{\partial J}{\partial \tilde{U}} = 0$, ce qui donne la loi de commande donnée par :

$$\tilde{U}_{opt} = [G^T G + \lambda I_{Nu}]^{-1} G^T (W - \rho)$$

4. N1=1, N2=10 et Nu=1

Donc G à une dimension (2×1)

$$G = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1]^T$$

Ex.2

La réponse libre=0

Ex.3

$$u = 1.4282$$

Ex. 4

$$u = 1.2246.$$

Ex. 5

$$G = [1 \ 8 \ 5]^T$$

Ex. 6

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \\ 5 & 8 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Ex. 7

$$G = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 8 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

CHAPITRE : III

Ex. 1

$$1. F = \begin{bmatrix} 1.9 & -0.9 & -0.02 & 0 \\ 2.9 & -1.9 & -0.03 & 0 \end{bmatrix}; J = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.9 \end{bmatrix};$$

Ex. 2

u=0;

$$R = [0.5710 \quad -0.3577 \quad -0.0074]$$

$$S = 1.1162$$

$$T = [0.0394 \quad 0.1665]$$

Ex. 3

$$J = [G\tilde{U} + ify(k) + ih\Delta u(k-1) - W]^T [G\tilde{U} + ify(k) + ih\Delta u(k-1) - W] + \lambda \tilde{U}^T \tilde{U}$$

Ex. 4

$$\begin{aligned} J = & [G^T \tilde{U}^T G \tilde{U} + G^T \tilde{U}^T ify(k) + G^T \tilde{U}^T ih\Delta u(k-1) - G^T \tilde{U}^T W + y(k)^T if^T G \tilde{U} + y(k)^T if^T ify(k) \\ & + y(k)^T if^T ih\Delta u(k-1) - y(k)^T if^T W + \Delta u(k-1)^T ihhh^T G \tilde{U} + \Delta u(k-1)^T ih^T ify(k) \\ & + \Delta u(k-1)^T ih^T ih\Delta u(k-1) - \Delta u(k-1)^T ih^T W - W^T G \tilde{U} - W^T ify(k) - W^T ih\Delta u(k-1) \\ & + W^T W + \lambda \tilde{U}^T \tilde{U}] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{U}} = 2(G^T G + \lambda I_{Nu})\tilde{U} + 2G^T ify(k) + 2G^T ih\Delta u(k-1) - 2G^T W$$

$$\text{Donc : } \tilde{U}_o = -[G^T G + \lambda I_{Nu}]^{-1} G^T [ify(k) + ih\Delta u(k-1) - W]$$

CHAPITRE : IV

Ex. 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1 \quad 0]$$

Ex. 2

Les valeurs propres = 1, 1, 1

Ex. 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}; c = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1];$$

les valeurs propres : 1, -2.3794, 0.0982, 4.2812

Ex. 4

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, C = [0 \ 1]$$

Ex. 5

$$J = (w - Y)^T (w - Y) + \Delta U^T R_w \Delta U$$

$$J = (w - (F_y x(k_i) + \Phi_y \Delta U))^T (w - (F_y x(k_i) + \Phi_y \Delta U)) + \Delta U^T R_w \Delta U$$

$$J = (w - F_y x(k_i))^T (w - F_y x(k_i)) - 2\Delta U \Phi_y^T (w - F_y x(k_i)) + \Delta U^T (\Phi_y^T \Phi_y + R_w) \Delta U$$

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta U} = -2\Phi_y (w - F_y x(k_i)) + 2(\Phi_y^T \Phi_y + R_w) \Delta U$$

$\frac{\partial J}{\partial \Delta U} = 0$, ce qui donne la loi de commande donnée par :

$$\Delta U = (\Phi_y^T \Phi_y + R_w)^{-1} \Phi^T (R_s y_{ref}(k_i) - F_y x(k_i))$$

Ex. 6

$$F = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 1.4 & 1 \\ 1.9 & 1 \end{bmatrix}; \varphi = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.18 \\ 0.24 \end{bmatrix};$$

Ex. 7

$$\Delta u(1) = 0.51$$

ELEMENTS POUR LA SIMULATION

CHAPITRE II

Programme GPC algorithmique pour un système de fonction de transfert $H(s) = \frac{1}{s}$

```

t=[0:1000];
n=length(t);
N1=1;N2=10; %Horizon de prédiction sur la sortie
Nu=1; %Horizon de prédiction sur la commande
lamda=0.001; %Facteur de pondération sur la commande
AD=[0 0 1];BD=[0 1 0]; %Présentation du système continu
syst1=tf(AD,BD)
sysd=c2d(syst1,0.1);
[numd,dend]=tfdata(sysd,'v');
B=[numd 0];
A=[dend 0];
yref1(1:n)=1 %Signal de référence
%calcul de la réponse indicielle
Fonctiondetransfert=tf(B,A,0.005,'variable','z^-1')
G=step(Fonctiondetransfert);
G=G(N1+1:N2+1);
y(1:1000)=0; deltay(1:1000)=0; deltau(1:1000)=0;
u(1:1000)=0;
for i=3:n-10,
    w=yref1(N1+i-3:N2+i-3)';
    y(i)=-A(2)*y(i-1)-A(3)*y(i-2)+B(2)*u(i-1)+B(3)*u(i-2);
        for j=N1:N2,
            deltay(i+j)=-A(2)*deltay(j+i-1)-A(3)*deltay(j+i-2)+B(2)*deltay(j+i-2)+B(3)*deltay(j+i-3);
            p(1)=y(i);
            p(j+1)=p(j)+deltay(j+i);
        end
    p=p(2:N2+1);
    lamda=eye(Nu)*lamda;

```

```

    deltau(i)=inv((G'*G)+lamda)*(G'*(w'-p)');
    u(i)=u(i-1)+deltau(i);
end

```

CHAPITRE III

Programme GPC polynomiale pour un système de fonction de transfert $H(z^{-1}) = \frac{1+3z^{-1}}{1-0.9z^{-1}-0.2z^{-2}}$

```

t=[0:140];
n=length(t);
%Choix des différent Horizons
Hp=input('Hp=');
Hi=input('Hi=');
Hc=input('Hc=');
lam=input('lamda=');
na=2;nb=1;
A=[1 -0.9 -0.2 0 0];
B=[1 3 0 0];
%signal de référence
tt=[0:length(t)+Hp];
Yref=ones(1, length(t));
% Calcul des Coefficients des polynômes J, F, G et H
J=zeros(Hp,1);
F=zeros(Hp,na+2);
H=zeros(Hp,nb+2);
G=zeros(Hp,1);
Gm=zeros(Hp-Hi+1,Hc);
s=zeros(1,na+2);
r=zeros(1,na+2);

J(1)=1;
for i=1:na+1,
    F(1,i)=-J(1)*(A(i+1)-A(i));
end

```

```

if Hp>1,
    for j=2:Hp,
        J(j)=F(j-1,1);
        for i=1:na+1,
            F(j,i)=F(j-1,i+1)-J(j)*(A(i+1)-A(i));
        end
    end
end
G(1)=J(1)*B(1);
for i=1:na+1,
    H(1,i)=J(1)*B(i+1);
end
for j=2:Hp,
    G(j)=(H(j-1,1)+J(j)*B(1));
    for i=1:nb+1,
        H(j,i)=H(j-1,i+1)+J(j)*B(i+1);
    end
end
if Hi < (Hc),
    Gm(:,1)=G(Hi:Hp);
    for i=2:Hc,
        if i<=(Hi),
            Gm(:,i)=G(Hi-i+1:Hp-i+1);
        else
            Gm(:,i)=[zeros(i-Hi,1);G(1:Hp-i+1)];
        end
    end
else
    for i=1:Hc,
        Gm(:,i)=G(Hi+1-i:Hp+1-i);
    end
end
if Hc==1,

```

```

    SIG=inv(Gm'*Gm+lam)*Gm';
else
    SIG=[1;zeros(Hc-1,1)]'*inv(Gm'*Gm+lam*eye(Hc))*Gm';
end
IF=F(Hi:Hp,1:na+1);
IH=H(Hi:Hp,nb);
u(1)=0;u(2)=0;
y(1)=0;y(2)=0;

for i=3:n+2,
    W=Yref(Hi+i-3:Hp+i-3)';
    y(i)=-A(2)*y(i-1)-A(3)*y(i-2)+B(1)*u(i-1)+B(2)*u(i-2);
    DeltaU=u(i-1)-u(i-2);
    yy=[y(i) y(i-1) y(i-2)]';
    II=IF*yy+IH*DeltaU-W;
    u(i)=u(i-1)-SIG*II;
end

```

CHAPITRE IV

Fonction pour le calcul du modèle augmenté et des matrices F, φ

```

function [phitphi,phitf,phitR,ae,be,ce,F1,phi1,F2,phi2]=newmpc12(am,bm,cm,Nc,Np)
n1=size(bm,1);
om=zeros(1,n1);
ae=[am,om';cm*am,1];
be=[bm;cm*bm];
ce=[om,1];
% CALCUL DE F
n= size(ce,2);
f1= zeros(Np,n);
f1(1,1:n) = ce*ae;
f2= zeros(Np*n1,n1);
f2(1:n1,1:n1) = am;

```

```

for k=1:Np-1;
f1(k+1,:)=f1(k,:)*ae;
f2(k*n1+1:(k+1)*n1,:)=f2((k-1)*n1+1:k*n1,:)*am;
end
F1=f1;
F2=f2;
v= zeros(Np*n1,1);
v(1:n1,1) = be;
v2= zeros(Np*n1,1);
v2(1:n1,1)=bm;
for k=1:Np-1;
    v(k*n1+1:(k+1)*n1,:)=ae*v((k-1)*n1+1:k*n1,:);
    v2(k*n1+1:(k+1)*n1,:)=am*v2((k-1)*n1+1:k*n1,:);
end
v1=zeros(Np,1);
for k=0:Np-1
v1(k+1,:)=ce*v(k*n1+1:(k+1)*n1,:);
end
phi01=zeros(Np,Nc);
phi01(:,1)=v1(:,1);
phi02=zeros(n1*Np,Nc);
phi02(1:n1*Np,1)=v2(1:n1*Np,1);
for i=2:Nc;
    phi01(:,i)=[zeros(i-1,1);v1(1:Np-i+1,1)];%matrice de Toelpitz
    phi02(:,i)=[zeros(i-1,1);v2(1:n1*Np-i+1,1)];
end
phi1=phi01;
phi2=phi02;
BarRs=ones(Np,1);
phitphi=phi1'*phi1;
phitf=phi1'*F1;
phitR=phi1'*BarRs;

```

REFERENCES

- [Bdi1, 15] K. Bdirina, R. Hedjar, M. S. Boucherit, " State Constrained Predictive Control of Cart with Inverted Pendulum", The 3rd Conference on Control, Engineering and Information technology CEIT, Tlemcen, 2015.
- [Bdi, 16] K. Bdirina, " Commande Prédicative avec Contraintes Application aux Systèmes Non Linéaires", Thèse Doctorat, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger (ENP), 2016.
- [Bom, 08] I. Bombard, B. Da Silva, P. Dufour, P. Laurent, J. Lieto, " Contrôle par Commande Prédicative d'un Procédé de Cuisson sous Infrarouge de Peintures en Poudre", Société Française de Thermique SFT, 2008.
- [Bou, 06] P. Boucher, D. Dumur, "La commande prédictive: avancées et perspectives", Traité IC2, Hermes, Paris, 2006.
- [Cla, 87] D.W. Clarke, C. Mohtadi, P. Stuffs, "Generalized Predictive Control Part I "The Basic Algorithm", Part II " Extension and interpretation", Automatica, 1987.
- [Lon, 10] R. Longchamp, " Commande Numérique d systèmes dynamique : Cours d'automatique, Volume 2", PDUR Presses polytechnique, 2010.
- [Mad, 10] Z. Madeni, O. Blkheiri, " Commande prédictive avec contraintes des systèmes linéaires", Thèse d'ingénieur en électronique, Université de Djelfa, 2009.
- [Nic, 05] B. Nicole, " Théorie algorithmique des nombres et équations diophantiennes", Editions Ecole Polytechnique, 2005.
- [Ric, 14] J. Richalet, " Commande Prédicative", Technique de L'ingénieur, 2014, Référence 7425, 2014.
- [Sto, 08] C. Stoica, " Robustification de Lois de Commande Prédicatives Multivariables", Thèse Doctorat, Université Paris Sud - Paris XI, 2008.
- [Tou, 09] M. Touer, F. Rebouh, " Application de la commande prédictive à un chariot avec pendule inversé", Thèse d'ingénieur en électronique, Université de Djelfa, 2009.
- [Sia, 92] P. Siarry, " Automatique de base", Edition Marketing, Paris, 1992.
- [Vac, 07] C. Vachier, " Représentation d'état et commande dans l'espace d'état", UFR Sciences et Technologie, Université Paris XII-VAL de marine, 2007.
- [Wan, 09] L. Wang, " Model predictive control system design and implementation Using Matlab", School of Electrical and Computer Engineering, RMIT University, edition Springer, Australia 2009.