



HAL
open science

Concentration et confinement des fonctions propres dans un ouvert borné - version 2 *

Assia Benabdallah, Matania Ben-Artzi, Yves Dermenjian

► **To cite this version:**

Assia Benabdallah, Matania Ben-Artzi, Yves Dermenjian. Concentration et confinement des fonctions propres dans un ouvert borné - version 2 *. 2020. hal-02926376

HAL Id: hal-02926376

<https://hal.science/hal-02926376>

Preprint submitted on 31 Aug 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Concentration et confinement des fonctions propres dans un ouvert borné *

Assia Benabdallah[†], Matania Ben-Artzi[‡] & Yves Dermenjian[†],

[†] Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, I2M, Marseille, France

[‡] Hebrew University, Jerusalem, Israël

28 août 2020

Résumé

Si ω et $\Omega, \omega \subset \Omega := (0, L) \times (0, H)$, sont deux ouverts bornés de \mathbb{R}^2 , il est bien connu qu'il existe une constante C_ω telle que $0 < C_\omega \leq R_\omega(u) := \frac{\|u\|_{L^2(\omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} < \frac{\text{Vol}(\omega)}{\text{Vol}(\Omega)}$ pour toute fonction propre u du Laplacien-Dirichlet $-\Delta$ sur Ω . Ce résultat n'étant plus exact pour un opérateur autoadjoint elliptique A du deuxième ordre sans coefficients constants, plusieurs travaux l'ont considéré dont récemment [2]. On crée une partition $\mathfrak{F}_{NG} \cup \mathfrak{F}_G$ de l'ensemble des fonctions propres de l'opérateur A :

- les fonctions propres non guidées i.e. $\forall \omega \neq \emptyset, \exists C_\omega > 0$ tel que $R_\omega(u) > C_\omega$, si $u \in \mathfrak{F}_{NG}$,
- les fonctions propres guidées i.e. $\exists \omega \neq \emptyset$, tel que $\inf_{u \in \mathfrak{F}_G} R_\omega(u) = 0$.

Entre autres choses, le papier caractérise spectralement ces deux ensembles pour des modèles très simples de milieux stratifiés, ce qui donne une condition suffisante, et parfois nécessaire. La stratification permet le passage de la représentation habituelle du spectre de l'opérateur A , i.e. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, à une représentation à deux indices d'où une description géométrique des deux familles de fonctions propres. Dans la précédente version, la section 4.1 était incorrecte, elle est donc corrigée, d'autres preuves sont simplifiées et un résultat plus général ajouté.

Abstract

Let $-\Delta$ be the Laplacian in $\Omega := (0, L) \times (0, H)$, subject to Dirichlet boundary conditions and let u be an eigenfunction of $-\Delta$. For any open set $\omega \subset \Omega$ define $R_\omega(u) = \frac{\|u\|_{L^2(\omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}$. It is well known that there exists a constant $C_\omega > 0$ such that $C_\omega \leq R_\omega(u)$ for all eigenfunctions. This is no longer true for certain more general second-order elliptic operators and many authors have considered this subject whose [2] recently. This work is concerned with such operators, occurring in “layered media”. In this more general case the set of eigenfunctions is the disjoint union of two non-empty sets $\mathfrak{F}_{NG} \cup \mathfrak{F}_G$ as follows.

- non-guided eigenfunctions : $\forall \omega \neq \emptyset$, any $u \in \mathfrak{F}_{NG}$ satisfies $R_\omega(u) > C_\omega$,

* fichier : concentration-confinement-reformatage-v2tertio-ter.tex

— guided eigenfunctions : $\exists \omega, \omega \neq \emptyset$, such that $\inf_{u \in \mathfrak{S}_G} R_\omega(u) = 0$.

The paper deals with a spectral characterization of these two sets among others things. The layered structure of the operator permits a representation of its spectrum as a subset of points indexed by $(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. This allows a geometric description of the guided and non-guided eigenfunction categories. Section 4.1 of the previous version was not correct, now it is corrected, many proofs are simplified and a new general result is added.

1 Introduction : objectifs et le modèle principal

Pour un opérateur elliptique autoadjoint agissant dans un ouvert Ω borné ou non, on sait que les variations des coefficients de la partie principale, ainsi que certaines conditions au bord, peuvent créer un phénomène de concentration de l'énergie. La littérature étant abondante, nous ne donnerons que quelques exemples,

1. en 1930, Epstein [6] a mis en évidence, en milieu non borné, des ondes guidées acoustiques pour une famille de vitesses, chacune étant une fonction analytique ne dépendant que de la coordonnée verticale, ce qui a donné naissance à de nombreux travaux. Les applications vont de l'acoustique aux fibres optiques¹, (cf. [10] ainsi que [12] et sa bibliographie).
2. le système de l'élasticité linéaire dans le demi-espace $\Omega = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ avec la condition de surface libre crée un couplage au bord qui donne naissance à l'onde de Rayleigh. Elle est particulièrement destructrice lors d'un tremblement de terre ([11], [4]). Les noms des physiciens Lamb, Love et Stoneley ont aussi été donnés à des phénomènes voisins ([3]).

Dans ces deux items, le milieu était stratifié et les fonctions propres ne l'étaient qu'en un sens généralisé car elles n'appartenaient pas au domaine de l'opérateur mais des sous-familles guidées étaient quand même distinguées. Maintenant notre ouvert $\Omega := (0, L) \times (0, H)$ est borné et notre opérateur elliptique A est $-\nabla \cdot (c\nabla)$ ou $-c\Delta$ avec la condition de Dirichlet au bord. Le coefficient de diffusion c étant une fonction ne dépendant que la seconde coordonnée x_2 , le milieu est stratifié et l'approche par séparation des variables s'impose. Par suite, les valeurs propres sont naturellement indexées par deux indices, à savoir $(\lambda_{k,\ell}), k, \ell \geq 1$. On construit ainsi une base orthonormée \mathcal{B} de fonctions propres $(v_{k,\ell})_{k \geq 1, \ell \geq 1}$ associées aux valeurs propres $\lambda_{k,\ell}$. Elles sont de la forme $v_{k,\ell}(x_1, x_2) = a_{k,\ell} \sin(\frac{k\pi}{L}x_1)u_{k,\ell}(x_2)$ où $u_{k,\ell}(x_2)$ satisfait

$$(cu')' + (\lambda_{k,\ell} - c\frac{k^2\pi^2}{L^2})u = 0, u(0) = u(H) = 0. \quad (1)$$

On trouvera deux exemples explicites en (8) et (32). Le résultat qui suit, la démonstration étant dans l'annexe A, peut être considéré comme un point de départ de notre réflexion car il montre comment certaines fonctions propres peuvent se concentrer dans des régions particulières de Ω .

1. Les fibres optiques sont de très bonnes illustrations. La fibre monophasé correspond au modèle $N = 1$ traité ici : deux vitesses avec un cœur d'indice plus grand (donc avec la vitesse la plus petite). Elle est un bon exemple de la concentration de l'énergie dans le cœur. Cette concentration est d'autant plus grande que le rayon transversal du cœur (l'analogue du h_0 de ce travail) est petit.

Théoreme 1.1. Soit $\Omega := (0, L) \times (0, H)$ et l'opérateur autoadjoint positif $A = -c\Delta$, opérant dans $\mathcal{H} := L^2(\Omega, c^{-1}dx)$ et de domaine $D(A) := H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. On suppose le coefficient de diffusion $c \in L^\infty$ non constant, positif, borné inférieurement mais constant pour $0 < h_0 < x_2 < H$:

$$c(x) = \begin{cases} \gamma_0(x_2), & 0 < x_2 < h_0 \\ c_1, & h_0 < x_2 < H, \end{cases}$$

$$0 < \underline{c} := \text{ess inf } c < c_1.$$

Soit $\omega := (0, L) \times (a, b)$ où l'intervalle (a, b) satisfait $h_0 \leq a < b \leq H$, et ε assez petit. Il existe une constante $K_{\varepsilon, c}$ telle que, pour chaque valeur propre $\lambda_{k, \ell}$ vérifiant $\underline{c} \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda_{k, \ell} < (c_1 - \varepsilon) \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$, on ait

$$\frac{\|v_{k, \ell}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k, \ell}\|_{L^2(\Omega)}^2} \leq K_{\varepsilon, c} e^{-2\sqrt{\frac{k^2 \pi^2}{L^2} - \frac{\lambda_{k, \ell}}{c_1}}(a-h_0)}.$$

Notre principal modèle sera moins général mais, en contrepartie, nous obtiendrons des résultats plus précis. Nous considérons donc

Hypothèse générale (H0)

- Deux ouverts : $\omega \subset \Omega := (0, L) \times (0, H)$, $\omega := \omega_1 \times (a, b)$, $0 \leq a < b \leq H$,
- la fonction scalaire c , constante par morceau, ne dépend que de la seconde coordonnée x_2 ,
- la fonction c est monotone croissante avec $0 < c_{\min} \leq c \leq c_{\max} < +\infty$,
- $\begin{cases} A = -c\Delta \text{ de domaine } D(A) := H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \text{ opérant dans } \mathcal{H} := L^2(\Omega, c^{-1}dx) \\ \text{ou} \\ A = -\nabla \cdot (c\nabla) \text{ de domaine } D(A) := \{u \in H_0^1(\Omega); Au \in L^2(\Omega)\}, \text{ opérant dans } L^2(\Omega, dx). \end{cases}$

Nous complétons l'hypothèse (H0) par la suivante

Hypothèse (H1) : Modèle à N sauts

- l'ouvert $\Omega := (0, L) \times (0, H) \subset \mathbb{R}^2$ est partagé en $N + 1$ parties, $\Omega_0 := (0, L) \times (0, h_0)$, $\Omega_i := (0, L) \times (h_{i-1}, h_i)$, $i = 1, \dots, N$, où $0 = h_{-1} < h_0 < \dots < h_i < h_{i+1} < \dots < h_{N-1} < h_N = H$, qui sont séparées par N interfaces horizontales $S_i := (0, L) \times \{h_i\}$, $i = 0, \dots, N - 1$;
 - une fonction scalaire c prenant $N + 1$ valeurs, à savoir $c(x) = \begin{cases} c_0 \text{ si } 0 < x_2 < h_0, \\ c_1 \text{ si } h_0 < x_2 < h_1, \\ \vdots \\ c_N \text{ si } h_{N-1} < x_2 < H, \end{cases}$
- avec $c_0 < c_1 < \dots < c_{N-1} < c_N$.

Pour l'opérateur elliptique A autoadjoint et positif, nous sommes intéressés par le rapport

$$R_\omega(v) := \frac{\int_\omega |v(x)|^2 dx}{\int_\Omega |v(x)|^2 dx}, \quad (2)$$

qui nous permettra de distinguer deux sous-familles de fonctions propres : les fonctions propres guidées et les autres. L'idée de s'intéresser au rapport (2) n'est pas nouvelle. Pour le Laplacien sur des variétés compactes, analytiques réelles avec une métrique analytique réelle, l'inégalité

$$C e^{-c\lambda_j^{\frac{1}{2}}} \|\varphi_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\varphi_j\|_{L^2(\omega)}^2 \quad (3)$$

est connue, cf. [5]. Elle est devenue un cas particulier de l'inégalité de Lebeau-Robbiano, cf. [7], [9], pour des opérateurs à coefficients variables réguliers dans un ouvert borné. Dans un récent travail de Camille Laurent et Matthieu Léautaud, cf.[8], les auteurs généralisent (3) à des opérateurs hypoelliptiques lorsque Ω est une variété compacte sans bord, disons un tore, toujours sous la condition d'analyticité. Nos encadrements sont plus précis sur certains sous-espaces vectoriels de $L^2(\Omega)$ et ils montrent que l'exposant $\lambda_j^{\frac{1}{2}}$ de (3) ne peut être amélioré (i.e. diminué) que pour certains.

Prenons le modèle à un saut, i.e. $N = 1, 0 < c_0 < c_1$. Pour chaque k , il n'y a qu'un nombre

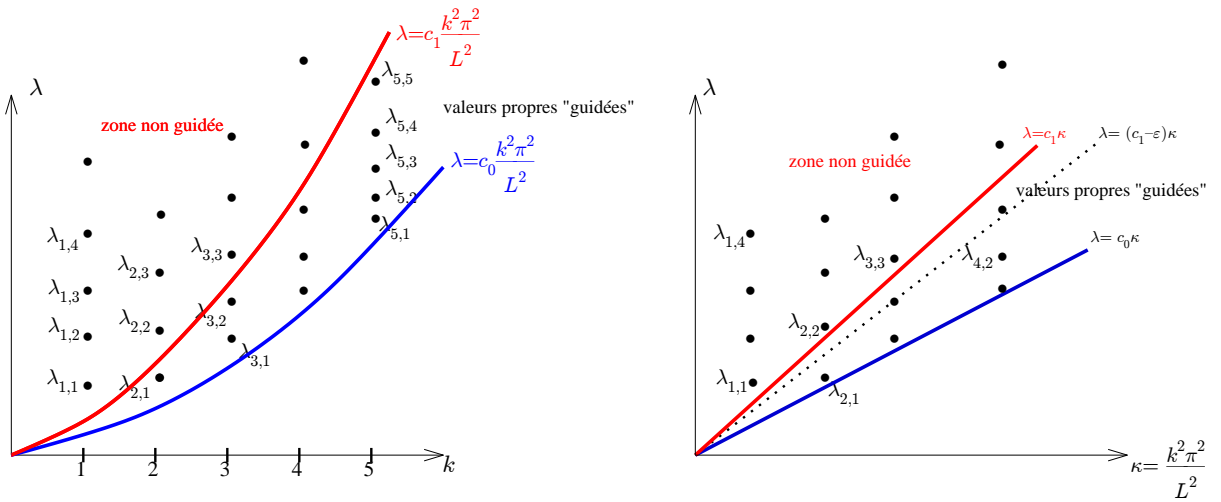


FIGURE 1 – un modèle à un saut : répartition des valeurs propres. Dans ce cas particulier, $\lambda_{3,3} = \lambda_{4,2}$ et ces valeurs propres sont de part et d'autre de la ligne rouge.

fini de valeurs propres entre $c_0 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$ et $c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$, les autres étant supérieures à $\lambda = c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$. Dans notre partition, les fonctions dites guidées, i.e. appartenant à \mathfrak{F}_G , sont associées aux valeurs propres comprises entre $c_0 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$ et $c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$. La partie gauche de la Figure 1 les visualise dans cette zone en forme de corne parabolique. La concentration en norme L^2 des fonctions propres associées aux grandes valeurs propres de cette corne a lieu du côté Ω_0 de l'interface (théorème 2.2, Cas 2) et cette concentration est d'autant plus forte que la valeur propre est grande. Noter que ces paraboles déterminent deux zones qui deviennent coniques par un changement de variables (partie droite de la Figure 1). Par exemple $(k, \lambda) \rightarrow (\kappa, \sqrt{\lambda}) = (k\pi, \sqrt{\lambda})$ permet d'établir une correspondance avec les notions microlocales habituelles en travaillant dans $\Omega \times ((\mathbb{N} \frac{\pi}{L}) \times \mathbb{R})^2$, d'où un autre point de vue pour mesurer la localisation si on utilise la

Définition 1.2. On pose $\tilde{\rho}_{k,\ell} := (\frac{\sqrt{1+c_1^2}}{c_1} \rho_{k,\ell})^{\frac{1}{2}}$ où $\rho_{k,\ell}$ est la distance du point $(\kappa = \frac{k^2 \pi^2}{L^2}, \lambda_{k,\ell})$ à la droite d'équation $\lambda = c_1 \kappa$.

2. L'application $(k, \lambda) \rightarrow (\frac{k^2 \pi^2}{L^2}, \lambda)$ convient aussi (cf. la partie droite de la Figure 1) mais ne donne pas une correspondance immédiate avec les coordonnées microlocales.

Théoreme 1.3. *On suppose (H0) et (H1) avec $N = 1$, $\omega \subset \Omega$, $\omega := \omega_1 \times (a, b)$ où $0 \leq a < b \leq H$.*

1. Cas non-guidé. *Il existe une constante $C_\omega > 0$ telle que*

$$C_\omega \leq \frac{\|v_{k,\ell}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k,\ell}\|_{L^2(\Omega)}^2}, \quad \forall \lambda_{k,\ell} > c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}, \quad (4)$$

sans restriction sur la localisation de l'ouvert ω .

1. Cas guidé. *Soit $0 < \varepsilon < c_1 - c_0$ et une suite de valeurs propres $(\lambda_{k_n, \ell_n})_n$, $k_n \rightarrow \infty$, contenue dans la corne parabolique $c_0 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda < (c_1 - \varepsilon) \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$. Alors, si ω est contenu dans $(0, L) \times (h_0, H)$ (partie où le coefficient de diffusion est le plus grand), on a*

$$\frac{\|v_{k_n, \ell_n}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k_n, \ell_n}\|_{L^2(\Omega)}^2} = O\left(\frac{e^{-2(a-h_0)\tilde{\rho}_{k_n, \ell_n}}}{\tilde{\rho}_{k_n, \ell_n}}\right) \quad (5)$$

Ainsi la masse de ces fonctions propres se concentre de plus en plus dans la « vallée » qui correspond, ici, à la partie inférieure de Ω .

Remarque 1.4. *Trois choses sont importantes à retenir :*

1. *Si λ est une valeur propre multiple (Figure 1, à gauche), il y a plusieurs possibilités : les fonctions propres associées peuvent n'être que des éléments de \mathfrak{F}_G (fonctions propres guidées) ou bien de \mathfrak{F}_{NG} (fonctions propres non guidées) ou certaines de \mathfrak{F}_G et les autres de \mathfrak{F}_{NG} (par exemple $\lambda_{3,3}$ et $\lambda_{4,2}$ de la figure 1).*
2. *Pour mesurer le taux de décroissance, nous avons d'abord utilisé $\sqrt{\frac{k^2 \pi^2}{L^2} - \frac{\lambda_{k,\ell}}{c_1}}$ (théorème 1.1), puis la distance $\tilde{\rho}_{k_n, \ell_n}$ dans (5) mais nous disposons aussi de la valeur propre λ_{k_n, ℓ_n} comme il est fait en (3) et, plus loin, dans la proposition 2.6.*
3. *On verra plus loin que selon la suite de fonctions propres guidées et la localisation « micro-locale » de celle-ci, le taux de convergence de $R_\omega(v_n)$ vers 0 varie de $e^{-b_1 \lambda_n^{\frac{1}{2}}}$ à $c_\omega \lambda_n^{-3/2}$ en passant par $e^{-b_2 \lambda_n^{\frac{1}{4}}}$, λ_n étant la valeur propre associée à la fonction propre guidée v_n .*

Définir la partition \mathfrak{F}_{NG} , \mathfrak{F}_G est une question délicate. Pour le modèle à 1 saut ($N = 1$, $c_0 < c_1$) nous l'avons fait de façon précise. Une autre approche est la suivante :

- Pour la famille \mathfrak{F}_{NG} (fonctions propres non guidées) le rapport $R_\omega(v)$ est uniformément minoré par une constante positive. Autrement dit, on se trouve dans le cas d'un opérateur elliptique du second ordre à coefficients constants (se reporter au théorème 1.5)
- Si (v_n) est une suite de fonctions propres guidées, i.e. contenue dans \mathfrak{F}_G , alors le rapport $R_\omega(v_n) \rightarrow 0$ si $\bar{\omega} \subset \Omega_1$, i.e. est contenu dans la zone où le coefficient de diffusion a sa plus grande valeur. Avec cette définition, la partition \mathfrak{F}_G , \mathfrak{F}_{NG} n'est pas unique : le transfert d'un nombre fini d'éléments de l'une des familles à l'autre ne changera pas les propriétés ci-dessus. Ce n'est pas vraiment gênant puisque ce sont les propriétés asymptotiques des éléments de la partition qui nous intéressent.

Dans le modèle à deux sauts, i.e. $N = 2$, nous conjecturons que les fonctions dites guidées correspondent aux valeurs propres situées entre les deux paraboles $\lambda = c_0 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$ et $\lambda = c_2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$ que nous

divisons en la zone (0) = $\{c_0 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda_{k,\ell} < c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}\}$ et la zone (I) = $\{c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda_{k,\ell} < c_2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}\}$. On distinguera donc trois zones spectrales dont deux correspondant à une famille de fonctions propres guidées (voir la Figure 2). Chaque fonction propre associée à la zone (0) est une onde presque rasante en S_0 car elle arrive sur cette interface avec un angle supérieur à l'angle limite de la réflexion totale³ ce qui explique que son énergie soit essentiellement localisée dans Ω_0 tandis que les fonctions propres associées à la zone (I) peuvent traverser l'interface S_0 sans difficulté mais subissent une réflexion totale sur l'interface S_1 et sont donc essentiellement localisées dans $\Omega_0 \cup \Omega_1$. Pour l'aspect non-guidé,

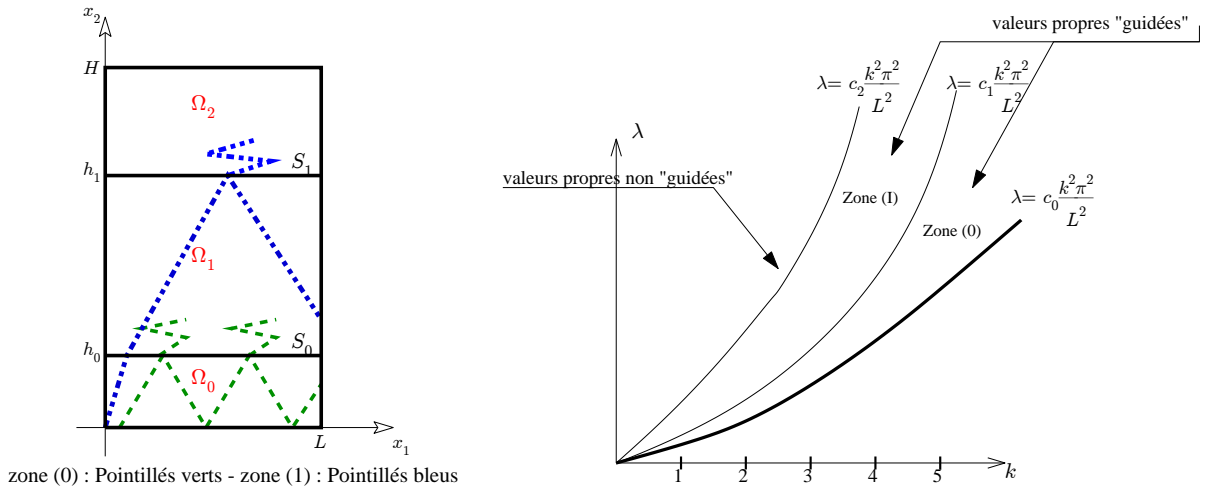


FIGURE 2 – Modèle à deux sauts.

on se reportera à l'annexe B où se trouve la démonstration du

Théoreme 1.5 (cas non guidé). Soient (H0), (H1), $\varepsilon > 0$ et un ouvert $\omega := \omega_1 \times (a, b)$ avec $0 \leq a < b \leq H$ qui sont fixés. Si nous posons $c_H := \sup_{0 < x_2 < H} c(x_2)$, alors il existe une constante C_ω strictement positive, telle que l'on ait pour toute fonction propre $v_{k,\ell}$ associée à la valeur propre $\lambda_{k,\ell}$

$$\lambda_{k,\ell} > (c_H + \varepsilon) \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \implies 0 < C_\omega \leq \frac{\|v_{k,\ell}\|_{L^2(\omega)}}{\|v_{k,\ell}\|_{L^2(\Omega)}} \leq 1. \quad (6)$$

La constante C_ω est invariante par toute translation de ω . Le résultat est aussi valable si on remplace les hypothèses (H0) – (H1) par (H0) – (H2).

Hypothèse (H2) : Modèle C^1
La fonction scalaire c est strictement croissante et appartient à $C^1([0, H])$.

Les résultats des sections 3 et 4 sur la décroissance exponentielle des fonctions propres feront penser à ceux de S. Agmon (cf. [1]) et d'autres travaux où les auteurs agissent principalement dans des ouverts non bornés. L'analogie s'arrête là pour plusieurs raisons :

3. Pour le voir il suffit d'écrire (31)-(32) avec des exponentielles.

- C'est l'influence d'un potentiel q dans l'opérateur $-\nabla \cdot (A\nabla) + q$ qui les motive, la distance d'Agmon permettant d'estimer la concentration de certaines fonctions propres en des zones dépendant de q . Nous n'avons pas de potentiel car nous considérons des opérateurs de la forme $-\nabla \cdot (c\nabla)^4$ ou $-c\Delta$ et ce sont les variations de c qui nous importent.
- Pour les valeurs propres λ inférieures à Σ , l'infimum du spectre essentiel, les fonctions propres associées décroissent exponentiellement à l'infini avec un taux lié à la différence $\sqrt{\Sigma - \lambda}$ (Theorem 4.1 de [1]). Dans notre travail, bien que $\Sigma = +\infty$ ⁵, on ne voit que pour certaines valeurs propres une décroissance d'allure exponentielle dans la partie supérieure de Ω .

Nous parlons donc, comme les physiciens, de solutions guidées et le substitut à Σ sera la barrière spectrale mentionnée dans la Remarque 2.1. Les auteurs de [2] élargissent dans un récent travail des idées de S. Agmon mais l'exigence d'un potentiel $q \geq 0, q \neq 0$, ne permet qu'une comparaison partielle à ce stade avec nos résultats : elle peut cependant être faite avec notre opérateur réduit $A_k u := -(cu')' + c \frac{k^2 \pi^2}{L^2} u$ puisque le potentiel $c \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$ satisfait leur condition.

Le plan de ce papier est le suivant. La section 2 rassemble les propriétés des suites de fonctions propres guidées du modèle à un saut. C'est le modèle le plus simple à comprendre. La section 3 considère aussi les fonctions propres guidées, cette fois-ci pour le modèle à deux sauts, mais elle est incomplète pour le moment. Des extensions sont en devenir : un disque ouvert Ω et un disque intérieur Ω_0 de même centre, Ω_1 étant la couronne $\Omega \setminus \Omega_0$, ou un tore plat avec un coefficient de diffusion discontinu. Nous pensons que les résultats seront analogues. Il faudrait aussi envisager la généralisation à des situations moins simples. La plupart des calculs sont renvoyés aux annexes.

Notations : Si (f_n) et (g_n) sont deux suites de fonctions, la notation $f_n \approx g_n$ signifiera que ces quantités sont comparables, i.e. qu'il existe des nombres réels positifs $M_1, M_2 > 0$ tels que $M_1 g_n \leq f_n \leq M_2 g_n$ dès que n est assez grand. Quand il n'y a aucune possibilité d'ambiguïté, la notation C désigne une constante strictement positive qui peut prendre différentes valeurs.

2 Concentration des ondes guidées du modèle à un saut

Maintenant nous considérons les ondes (ou, suivant le langage adopté, fonctions propres) guidées pour un milieu avec un coefficient de diffusion ayant deux valeurs. De manière intuitive, ces fonctions sont celles dont l'essentiel de la masse est concentrée dans une partie de l'ouvert Ω . Ici, elles correspondent exactement aux ondes ayant une réflexion dite totale sur l'interface.

On pose par commodité, dans cette section, $c_1 > c_0 = 1, L = 1$ et parfois $h_0 = \frac{1}{2}$. Ces restrictions n'ont aucune conséquence sur la généralité des résultats car des transformations unitaires permettent de se ramener au cas général (cf. la remarque D.1). Avant de détailler la formulation des $v_{k,\ell}$, précisons quelques notations dans lesquelles les $\lambda_{k,\ell}$ sont les valeurs propres de l'opérateur $A = -c\Delta$ (la forme divergentielle $-\nabla \cdot c\nabla$ donne des résultats généraux analogues)

$$\xi_0 = \xi_0(k, \ell) := (\lambda_{k,\ell} - k^2 \pi^2)^{1/2}, \quad \xi_1 = \xi_1(k, \ell) := (k^2 \pi^2 - \frac{\lambda_{k,\ell}}{c_1})^{1/2}. \quad (7)$$

4. Si $c \in C^1$, un changement de fonction inconnue permettrait d'introduire un potentiel mais le problème changerait.
5. Cas que [1] n'exclue pas.

Les fonctions propres dites guidées sont de la forme

$$v_{k,\ell}(x) = a_{k,\ell} \sqrt{2} \sin(k\pi x_1) \begin{cases} \sin(\xi_0 x_2) & \text{si } 0 < x_2 < h_0, \\ \frac{\sin(\xi_0 h_0)}{\sinh(\xi'_1(H-h_0))} \sinh(\xi'_1(H-x_2)) & \text{si } h_0 < x_2 < H, \end{cases} \quad (8)$$

où les coefficients $a_{k,\ell}$ servent à la normalisation des fonctions propres et les quantités $\lambda_{k,\ell}$, ξ_0 et ξ'_1 sont liées par la relation de dispersion

$$\frac{\tanh(\xi'_1(H-h_0))}{\xi'_1} = -\frac{\tan(\xi_0 h_0)}{\xi_0}. \quad (9)$$

Cette relation exprime la continuité des traces des fonctions propres et de leurs dérivées normales en $x_2 = h_0$. Noter que les solutions ne vérifient ni $\xi'_1 = 0$ ni $\xi_0 = 0$. Le membre de gauche de (9)

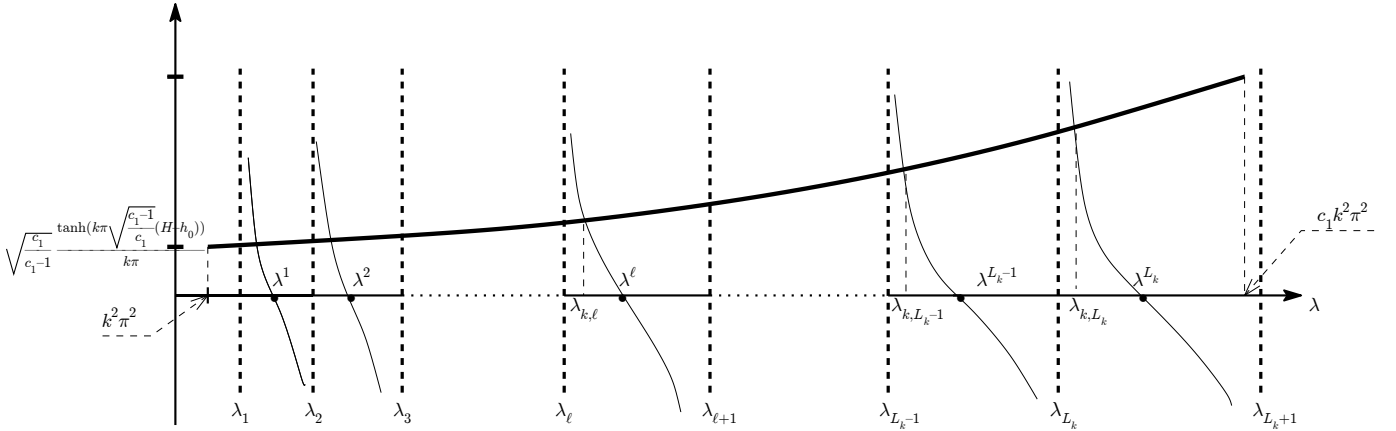


FIGURE 3 – répartition des valeurs propres

correspond à la courbe croissante en gras de la figure 3. Le membre de droite de (9) est une fonction périodique en $\xi_0 h_0$ ayant a priori une infinité de branches. Pour chaque k fixé, on a \mathcal{L}_k valeurs propres guidées $\lambda_{k,\ell}$ classées dans l'ordre croissant $k^2\pi^2 < \lambda_{k,1} < \lambda_{k,2} < \dots < \lambda_{k,\mathcal{L}_k} < c_1 k^2\pi^2$ et seules ces \mathcal{L}_k branches nous intéressent ($k \rightarrow \mathcal{L}_k$ est une fonction croissante). Elles sont représentées par une ligne continue fine et les valeurs propres guidées sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes de la figure 3. Dans la figure 3 on a posé $\lambda_\ell = \lambda_\ell(k) = k^2\pi^2 + (2\ell - 1)^2 \frac{\pi^2}{4h_0^2}$ et $\lambda^\ell = \lambda^\ell(k) := k^2\pi^2 + \ell^2 \frac{\pi^2}{h_0^2}$, $1 \leq \ell \leq \mathcal{L}_k + 1$.

Remarque 2.1. Les quantités ξ_0 et ξ'_1 ont une interprétation spectrale géométrique simple si on pose $\kappa := k^2\pi^2$: dans le nouveau repère (κ, λ) les paraboles deviennent des droites et la quantité $(\xi'_1)^2$ est égale à $\frac{\sqrt{1+c_1^2}}{c_1} \rho_{k,\ell}$ où $\rho_{k,\ell}$ est la distance du point $M_{\lambda_{k,\ell}} = (\kappa, \lambda_{k,\ell})$ à la barrière spectrale d'équation $\lambda = c_1\kappa$. De son côté, $\sqrt{2}\xi_0^2$ est la distance de $M_{\lambda_{k,\ell}}$ à la frontière spectrale d'équation $\lambda = \kappa$.

C'est donc le rapport

$$R_{k,\ell;\omega} := \frac{\int_{\omega} |v_{k,\ell}(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |v_{k,\ell}(x)|^2 dx} \quad (10)$$

qui nous intéresse pour les fonctions propres $v_{k,\ell}$, $1 \leq \ell \leq \mathcal{L}_k$, $k \geq 1$, avec $\omega := \omega_1 \times (a, b)$, $0 \leq a < b \leq H$ et $v_{k,\ell}(x) := a_{k,\ell} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k\pi x_1) u_{k,\ell}(x_2)$, $u_{k,\ell}$ étant définie implicitement par (8). Notons qu'étudier les $v_{k,\ell}$ revient à étudier les $u_{k,\ell}$ car $\frac{\int_{\omega} |v_{k,\ell}(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |v_{k,\ell}(x)|^2 dx} = C_{k;\omega} \frac{\int_{\omega} |u_{k,\ell}(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |u_{k,\ell}(x)|^2 dx}$ et, si $\omega_1 = (\alpha, \beta)$, le coefficient $C_{k;\omega} := \frac{\beta-\alpha}{L} \left(1 - \frac{\sin(k\pi(\beta-\alpha))}{k\pi(\beta-\alpha)} \cos(k\pi(\alpha+\beta)) \right)$ avec $C_{k;\omega} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \frac{\beta-\alpha}{L}$.

2.1 Les énoncés

Les suites de fonctions propres associées à des valeurs propres vérifiant $(k_n\pi)^2 < \lambda_{k_n,\ell_n} < (c_1 - \varepsilon)(k_n\pi)^2$ sont sans répétition et par conséquent $k_n \rightarrow \infty$. Un résumé rapide pour la quantité $\mathcal{R}_n := R_{k_n,\ell_n;\omega}$ est

1. si $\bar{\omega} \subset \Omega_1$ alors \mathcal{R}_n tend exponentiellement vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ (cf.(5)).
2. si $\omega \subset \Omega_0$ alors $C_1 \text{vol}(\omega) < \mathcal{R}_n < C_2 \text{vol}(\omega)$, $C_1, C_2 > 0$.

Ces deux points sont développés dans le théorème 2.2. Le corollaire 2.4 les précise lorsque l'indice ℓ_n est fixé et la proposition 2.6 étudie \mathcal{R}_n pour la suite des valeurs propres la plus proche de $c_1(k\pi)^2$. De plus, le lemme 2.9 permet de convertir les coefficients de décroissance en terme de λ_{k_n,ℓ_n} au lieu de ξ'_1 . Pour le cas où ω est à cheval sur l'interface S_0 on se reportera à la Remarque 2.11.

Théorème 2.2 (cas guidé avec un saut). *Soit l'ouvert $\omega := \omega_1 \times (a, b) \subset \Omega$ et une suite de fonctions propres guidées $(v_{k_n,\ell_n})_{n \geq 1}$. On a*

$$\bullet \text{ si } \omega \subset \Omega_1, \quad \begin{cases} (\xi'_1(k_n, \ell_n) \rightarrow \infty) & \implies \frac{\|v_{k_n,\ell_n}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k_n,\ell_n}\|_{L^2(\Omega)}^2} \sim \frac{\text{vol}(\omega_1)}{h_0} \frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{1 - \frac{\sin(2\xi_0 h_0)}{2\xi_0 h_0}} \frac{e^{-2\xi'_1(a-h_0)}}{\xi'_1}, \\ (\sup_n \xi'_1(k_n, \ell_n) < \infty) & \implies \inf_n \frac{\|v_{k_n,\ell_n}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k_n,\ell_n}\|_{L^2(\Omega)}^2} > 0. \end{cases} \quad (11)$$

$$\bullet \text{ si } \omega \subset \Omega_0, \quad \inf_n \frac{\|v_{k_n,\ell_n}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k_n,\ell_n}\|_{L^2(\Omega)}^2} > 0. \quad (12)$$

Remarque 2.3. *On notera que $\xi'_1(k_n, \ell_n) \rightarrow \infty$ si, asymptotiquement, $\ell_n \leq \mathcal{L}_{k_n} - 1$. En effet, si $\ell_n \leq \mathcal{L}_{k_n} - 1$, on a $c_1(\xi'_1(k_n, \ell_n))^2 \geq c_1(\xi'_1(k_n, \mathcal{L}_{k_n} - 1))^2 = c_1 k_n^2 \pi^2 - \lambda_{k_n, \mathcal{L}_{k_n} - 1} > \lambda_{\mathcal{L}_{k_n}} - \lambda^{\mathcal{L}_{k_n} - 1} = (\frac{\pi}{2h_0})^2 (4\mathcal{L}_{k_n} - 3) \rightarrow \infty$ puisque $\mathcal{L}_{k_n} \rightarrow \infty$. Par suite, si ε est fixé tel que $0 < \varepsilon < c_1 - 1$, l'examen de la figure 3 montre que la condition $\ell_n \leq \mathcal{L}_{k_n} - 1$ est alors vérifiée pour n grand si $(k_n\pi)^2 < \lambda_{k_n,\ell_n} \leq (c_1 - \varepsilon)(k_n\pi)^2$.*

Corollaire 2.4. *Soit $\omega := \omega_1 \times (a, b) \subset \Omega$ et une suite de fonctions propres guidées $(v_{k,\ell})_k$, l'indice ℓ étant fixé. On a alors*

- *Cas 1* : $\omega \subset \Omega_1$, i.e. $h_0 \leq a < b$,

$$a_1 \lambda_{k,\ell}^{-\frac{3}{2}} e^{-a_2 \lambda_{k,\ell}^{\frac{1}{2}}} \|v_{k,\ell}\|_{L^2(\Omega)}^2 \sim_{k \rightarrow \infty} \|v_{k,\ell}\|_{L^2(\omega)}^2, \quad (13)$$

où $a_1 = \frac{\text{vol}(\omega_1)(\ell\pi)^2}{h_0^3} \left(\frac{c_1}{c_1-1}\right)^{\frac{3}{2}}$ et $a_2 = 2(a - h_0) \sqrt{\frac{c_1-1}{c_1}}$.

- *Cas 2* : $\omega \subset \Omega_0$, i.e. $0 \leq a < b < h_0$,

$$\frac{\|v_{k,\ell}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k,\ell}\|_{L^2(\Omega)}^2} \sim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{h_0} \text{vol}(\omega) \left(1 - \frac{\sin(\ell \frac{\pi}{h_0}(b-a))}{2\ell \frac{\pi}{h_0}(b-a)} \cos(2\ell \frac{\pi}{h_0}(a+b)) \right). \quad (14)$$

Remarque 2.5. Il est important de noter que pour une suite vérifiant $\xi_1^l \rightarrow \infty$, (11) et (23) impliquent que la norme L^2 se concentre dans Ω_0 puisque $\frac{\|v_{k_n, \ell_n}\|_{L^2(\Omega_0)}}{\|v_{k_n, \ell_n}\|_{L^2(\Omega)}} = 1 - O\left(\frac{1}{(\xi_1^l)^{\frac{1}{2}}}\right)$. La suite $(v_{k, \ell_k})_k$ constitue une transition entre les fonctions propres guidées et celles qui ne le sont pas. Ce qui suit donne une autre approche du comportement de $(v_{k, \ell_k})_k$ et illustre cette transition.

Proposition 2.6. Supposons $h_0 = \frac{1}{2}^6$, $\bar{\omega} \subset \Omega_1$

1. Il existe des constantes positives C'_1, C'_2 telles que

$$C'_1 e^{-C'_2 \lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}} \|v_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|v_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\omega)}^2 \quad (15)$$

2. Si $\sqrt{c_1 - 1} \in \mathbb{N}$, il existe des constantes positives C_1, C'_1, C_2, C'_2 telles que

$$C'_1 e^{-C'_2 \lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}} \|v_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|v_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C_1 e^{-C_2 \lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}} \|v_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (16)$$

3. Si $\sqrt{c_1 - 1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, il existe des constantes positives C_1, C'_1, C_2, C'_2 et une sous-suite de fonctions propres guidées correspondant à des valeurs propres $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}$ vérifiant l'encadrement

$$C'_1 e^{-C'_2 \lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}} \|v_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|v_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C_1 e^{-C_2 \lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}} \|v_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (17)$$

Remarque 2.7. Si $\sqrt{c_1 - 1} \in \mathbb{N}$, il est certain que la courbe $\lambda = c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$ définit la frontière entre les valeurs propres guidées et celles qui ne le sont pas. C'est moins clair si $\sqrt{c_1 - 1} \notin \mathbb{N}$ car on ne peut exclure que $\sup_n \xi_1^l(k_n, \ell_n) < \infty$.

Corollaire 2.8. Pour la base $(v_{k, \ell})$ de notre modèle, l'inégalité (3) est valable et l'exposant $\lambda_{k, \ell}^{\frac{1}{2}}$ ne peut être modifié sauf pour certaines sous-familles et certains ouverts ω .

Ce corollaire est une conséquence immédiate de la proposition 2.6 : prendre une suite de fonctions propres satisfaisant cette proposition et $\omega \subset \Omega_1$. Le résultat qui suit est à la base du corollaire 2.4.

6. Ce choix ne change pas la nature du résultat puisque l'on ne fixe pas en même temps la valeur numérique de $c_1 > 1$.

Lemme 2.9 (Lemme préparatoire). *On considère une suite de fonctions propres guidées $(v_{k_n, \ell_n})_n$.*

1. *il n'est pas possible que $\xi_0(k_n, \ell_n) \rightarrow 0$.*
2. *$(\xi'_1(k_n, \ell_n) \rightarrow +\infty$ et ξ_0 borné) \implies $(\sin(\xi_0 h_0) \rightarrow 0) \implies (\xi'_1 \rightarrow \infty)$.*
3. *$(\xi'_1$ borné) \implies $\inf |\xi_0 \cos(\xi_0 h_0)| > 0$, $\sup |\xi_0 \cos(\xi_0 h_0)| < \infty$ et $|\sin(\xi_0((k_n, \ell_n)h_0))| \rightarrow 1$.*
4. *Si $\ell_n = \ell$ fixé, on a $\lambda_{k_n, \ell} - \lambda^\ell = o(1)$ où $\lambda^\ell = \lambda^\ell(k_n) := k_n^2 \pi^2 + \ell^2 \frac{\pi^2}{h_0^2}$, ce qui implique que $\xi_0(k_n, \ell) \rightarrow \ell \frac{\pi}{h_0}$ et $\xi'_1(k_n, \ell) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$.
On a plus précisément*

$$\sqrt{\frac{c_1 - 1}{c_1}} \lambda_{k_n, \ell}^{\frac{1}{2}} - \xi'_1(k_n, \ell) = \frac{\pi \ell^2}{2h_0^2} \sqrt{\frac{c_1}{c_1 - 1}} \frac{1}{k_n} + o\left(\frac{1}{k_n}\right), \quad (18)$$

$$\sin(\xi_0 h_0) = -\frac{1}{\pi h_0} \sqrt{\frac{c_1}{c_1 - 1}} \frac{1}{k_n} + o\left(\frac{1}{k_n}\right) \quad (19)$$

5. *Soit un entier $p \geq 2$ fixé. Si $\ell_n = \mathcal{L}_{k_n} - p$ alors $\xi'_1(k_n, \ell_n) \cong \lambda_{k_n, \ell_n}^{\frac{1}{4}}$.*

Démonstration. Les trois premiers résultats sont des conséquences directes de la relation de dispersion (9). D'abord, comme $\xi'_1(k_n, \ell_n) \rightarrow \infty$ si $\xi_0(k_n, \ell_n) \rightarrow 0$, on aurait $0 = -h_0$, ce qui règle le premier point. La première implication du point suivant est claire. Pour la seconde, supposant ξ'_1 borné, il y a une contradiction connaissant le point précédent. Dans le troisième alinéa, ξ'_1 borné ne peut arriver que si $\ell_n = \mathcal{L}_{k_n}$ pour les grandes valeurs de n . Ainsi $\xi_0 \rightarrow \infty$ et, comme la lim inf du côté droit de (9) doit être strictement positive il faut aussi que $\cos(\xi_0 h_0) \rightarrow 0$ et on conclut. Pour l'item 4, voir l'annexe C. Pour la dernière affirmation on remarque que $c_1 k_n^2 \pi^2 - \lambda^{\mathcal{L}_{k_n} - p} < c_1 (\xi'_1)^2 < c_1 k_n^2 \pi^2 - \lambda_{\mathcal{L}_{k_n} - p}$, i.e.

$$\begin{aligned} (\sqrt{c_1 - 1} k_n + 2\mathcal{L}_{k_n} - 2p)(\sqrt{c_1 - 1} k_n - 2\mathcal{L}_{k_n} + 2p)\pi^2 &< c_1 (\xi'_1)^2 \\ &< (\sqrt{c_1 - 1} k_n + 2\mathcal{L}_{k_n} - 2p - 1)(\sqrt{c_1 - 1} k_n - 2\mathcal{L}_{k_n} + 2p + 1)\pi^2. \end{aligned}$$

Pour évaluer $(\sqrt{c_1 - 1} k_n - 2\mathcal{L}_{k_n} + 2p)$ et $(\sqrt{c_1 - 1} k_n - 2\mathcal{L}_{k_n} + 2p + 1)$ on utilise les trois cas de l'annexe D. Dans les cas 1 et 2 de cette annexe, on a $2p \leq \sqrt{c_1 - 1} k_n - 2\mathcal{L}_{k_n} + 2p < 1 + 2p$ et, dans le dernier cas, on a $1 + 2p < \sqrt{c_1 - 1} k_n - 2\mathcal{L}_{k_n} + 2p < 2 + 2p$. Comme k_n^2 est comparable à λ_{k_n, ℓ_n} (cf. la remarque C.1) et \mathcal{L}_{k_n} à k_n on peut conclure. \square

2.2 Les preuves

La preuve de la proposition 2.6 suit de (11) et d'une partie technique développée à l'annexe D.

2.2.1 Décroissance dans $\omega \subset \Omega_1$: (11) et cas 1 du corollaire 2.4

Le terme $a_{k, \ell} \sqrt{2} \sin(k\pi x_1)$ n'a qu'une influence marginale dans les résultats qui nous intéressent. Remplaçant par commodité x_2 par x puis, transformant (8) à l'aide de (9), on obtient

$$u_{k, \ell}(x) = -\frac{\xi_0}{\xi'_1} \cos(\xi_0 h_0) \frac{\sinh(\xi'_1(H - x))}{\cosh(\xi'_1(H - h_0))}, \quad x \in (h_0, H), \quad (20)$$

ce qui permet de régler le cas où ξ'_1 est borné et ne tend pas vers 0 grâce à l'alinéa 3 du lemme 2.9. Si ξ'_1 s'approche vers 0, un calcul direct montre que $R_{k_n, \ell_n; \omega} \cong \text{vol}(\omega)$. Si $\xi'_1 \rightarrow \infty$, on a

$$\int_{h_0}^H |u(x)|^2 dx = \frac{\xi_0^2}{2(\xi'_1)^3} \cos^2(\xi_0 h_0) \tanh(\xi'_1(H - h_0))(1 + o(1)), \quad (21)$$

$$\int_a^b |u(x)|^2 dx = \frac{\xi_0^2}{2(\xi'_1)^3} \frac{\cos^2(\xi_0 h_0)}{\cosh^2(\xi'_1(H - h_0))} \sinh(\xi'_1(b - a)) \cosh(2\xi'_1(H - \frac{a+b}{2}))(1 + o(1)). \quad (22)$$

Comme $\int_0^{h_0} |u(x)|^2 dx = \frac{h_0}{2} (1 - \frac{\sin(2\xi_0 h_0)}{2\xi_0 h_0})$, l'équivalence (11) s'en suit. Avec l'hypothèse $\ell_n = \ell$ fixé, l'équivalence (13) découle du lemme 2.9, point 4, et du théorème 2.2. De plus, (13) est plus précise que l'estimation (11) puisque $\sin(\xi_0 h_0) \rightarrow 0$ (point 4 du lemme 2.9).

Noter que les quantités $1 - \frac{\sin(2\xi_0 h_0)}{2\xi_0 h_0}$ ne tendent pas vers 0 dans (11) et que, si ω touche l'interface, l'exponentielle disparaît dans (13) et (11).

2.2.2 Concentration dans $\omega \subset \Omega_0$: (12) et cas 2 du corollaire 2.4

Les résultats annoncés suivront de la

Proposition 2.10. *Soit l'ouvert $\omega := \omega_1 \times (a, b) \subset \Omega_0$ et une suite de fonctions propres guidées $(v_{k_n, \ell_n})_{n \geq 1}$. On a*

$$1. (\xi'_1 \rightarrow \infty) \implies \left(\forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geq N, \frac{\text{vol}(\omega)}{h_0} (1 - \varepsilon) \leq \frac{\|v_{k_n, \ell_n}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k_n, \ell_n}\|_{L^2(\Omega)}^2} \leq \frac{5}{2} \frac{\text{vol}(\omega)}{h_0} (1 + \varepsilon) \right). \quad (23)$$

2. *Pour la suite de fonctions propres guidées associées aux $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}$, on a*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall k > N \implies \frac{\text{vol}(\omega)}{h_0 + \frac{2}{3}(H - h_0)} (1 - \varepsilon) \leq \frac{\|v_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\Omega)}^2} \leq \frac{\text{vol}(\omega)}{h_0} (1 + \varepsilon). \quad (24)$$

Si, de plus, $\xi'_1 \rightarrow \infty$ pour une suite extraite, celle-ci vérifie

$$\frac{\|v_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k, \mathcal{L}_k}\|_{L^2(\Omega)}^2} \sim \frac{1}{h_0} \text{vol}(\omega). \quad (25)$$

Comme $0 \leq a < b \leq h_0$, on part de

$$R_{k_n, \ell_n, \omega} = \text{vol}(\omega) \frac{(1 + O(\frac{1}{k})) \left(1 - \frac{\sin(\xi_0(b-a))}{\xi_0(b-a)} \cos(\xi_0(a+b))\right)}{h_0 \left(1 - \frac{\sin(2\xi_0 h_0)}{2\xi_0 h_0}\right) + \sin^2(\xi_0 h_0) \left(\frac{1}{\xi'_1 \tanh(\xi'_1(H-h_0))} - \frac{H-h_0}{\sinh^2(\xi'_1(H-h_0))}\right)}. \quad (26)$$

• L'encadrement (23) est une conséquence de $\xi'_1 \rightarrow \infty$ et $h_0(1 - \frac{1}{2\pi}) < h_0(1 - \frac{\sin(2\xi_0 h_0)}{2\xi_0 h_0}) < h_0$ car $\liminf \xi_0 h_0 \geq 2\pi$ puisque $h_0 \xi_0 \geq h_0 \xi_0(k_n, 1) \sim \pi$ d'après l'item 4 du lemme 2.9.

- (25) vient de $\frac{\|v_{k,\mathcal{L}_k}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k,\mathcal{L}_k}\|_{L^2(\Omega)}^2} \sim \frac{1}{h_0} \text{vol}(\omega)$ si $\xi'_1 \rightarrow \infty$, ce qui arrive lorsque $\sqrt{c_1 - 1}$ est un entier. Pour d'autres conditions suffisantes voir aussi les lemmes D.4 et D.5. Pour compléter (24), il faut étudier la possibilité $\xi'_1 \not\rightarrow \infty$: utiliser l'inégalité $0 < \frac{1}{\sinh^2(\xi'_1(H-h_0))} \left(\frac{\sinh(2\xi'_1(H-h_0))}{2\xi'_1(H-h_0)} - 1 \right) \leq \frac{2}{3}$.
- Pour (14), on utilise $\xi_0 \rightarrow \ell \frac{\pi}{h_0}$ (lemme 2.9, item 4) et $\xi'_1 \rightarrow \infty$ qu'il suffit d'appliquer dans (26).

Remarque 2.11. Si ω est une bande ouverte à cheval sur l'interface, i.e. $\omega := (0, L) \times (h_0 - \alpha_-, h_0 + \alpha_+)$, $0 < \alpha_- < h_0$, $0 < \alpha_+ < H - h_0$, et posant $\omega_- := \omega \cap \Omega_0$, $\omega_+ := \omega \cap \Omega_1$, on peut évaluer le rapport $\frac{\|v_{k_n, \ell_n}^2\|_{L^2(\omega_+)}}{\|v_{k_n, \ell_n}^2\|_{L^2(\omega_-)}}$ à partir du théorème 2.2. On peut être plus précis : si $\xi'_1 \rightarrow \infty$ il existe une constante positive $\bar{a} = \bar{a}(\alpha_-) < 1$ telle que, pour tout n , on a

$$\frac{1}{\alpha_-(1 + \bar{a})} \frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{\xi'_1} (1 + o(1)) \leq \frac{\|v_{k_n, \ell_n}^2\|_{L^2(\omega_+)}}{\|v_{k_n, \ell_n}^2\|_{L^2(\omega_-)}} \leq \frac{1}{\alpha_-(1 - \bar{a})} \frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{\xi'_1} (1 + o(1)) \quad (27)$$

et, pour revenir à un $\omega = \omega_1 \times (h_0 - \alpha_-, h_0 + \alpha_+)$ dans (27), il suffit de multiplier aux extrémités gauche et droite par le coefficient $C_{k;\omega} = 2 \int_{\omega_1} \sin^2(k\pi x_1) dx_1$.

Pour cette remarque, on part de $\frac{\int_{\omega_+} u_{k_n, \ell_n}^2(x) dx}{\int_{\omega_-} u_{k_n, \ell_n}^2(x) dx} = \frac{\alpha_+}{\alpha_-} \frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{\sinh^2(\xi'_1(H-h_0))} \frac{\frac{\sinh(\xi'_1 \alpha_+) \cosh(\xi'_1(2H-2h_0-\alpha_+)) - 1}{\xi'_1 \alpha_+}}{1 - \frac{\sin(\xi_0 \alpha_-)}{\xi_0 \alpha_-} \cos(\xi_0(2h_0-\alpha_-))}$ qui devient $\frac{\sin^2(\xi_0 h_0)}{\xi'_1 \alpha_-} \frac{1+o(1)}{1 - \frac{\sin(\xi_0 \alpha_-)}{\xi_0 \alpha_-} \cos(\xi_0(2h_0-\alpha_-))}$ si $\xi'_1 \rightarrow \infty$. Comme $\xi_0(k_n, \ell_n)$ ne s'approche pas de 0 car $\xi_0(k_n, \ell_n) \geq \xi_0(k_n, 1) \rightarrow \frac{\pi}{h}$ d'après le lemme 2.9, il existe une fonction décroissante $\alpha_- \rightarrow \bar{a}(\alpha_-) \in (0, 1)$ telle que $|\frac{\sin(\xi_0 \alpha_-)}{\xi_0 \alpha_-}| \leq \bar{a}(\alpha_-) < 1$, d'où l'encadrement (27). De plus, si $\ell_n = \ell$ fixé, on a $\sin^2(\xi_0 h_0) \sim \frac{c_1}{\pi^2 h_0^2 (c_1 - 1)} \frac{1}{k^2}$ venant de (19). L'épaisseur α_+ est fixée et n'intervient que dans $o(1)$. L'item 2 du lemme 2.9 permet aussi de considérer le cas où la suite $(\ell_n)_n$ est seulement bornée.

3 Concentration des ondes guidées du modèle à deux sauts

Nous continuons à remplacer x_2 par x . L'équation à satisfaire dans $L^2(0, H)$ est $-(cu')' + (c \frac{k^2 \pi^2}{L^2} - \lambda)u$, avec les conditions au bord $u(0) = u(H) = 0$, et les notations suivantes :

$$\begin{aligned} u_0(x) &:= u(x) \text{ si } 0 < x < h_0, u_1(x) := u(x) \text{ si } h_0 < x < h_1, u_2(x) := u(x) \text{ si } h_1 < x < H, \\ \xi_0^2 &:= \frac{\lambda}{c_0} - \frac{k^2 \pi^2}{L^2}, \xi_1^2 := \frac{\lambda}{c_1} - \frac{k^2 \pi^2}{L^2}, (\xi'_1)^2 := \frac{k^2 \pi^2}{L^2} - \frac{\lambda}{c_1}, \xi_2^2 := \frac{\lambda}{c_2} - \frac{k^2 \pi^2}{L^2}, (\xi'_2)^2 := \frac{k^2 \pi^2}{L^2} - \frac{\lambda}{c_2}, \end{aligned} \quad (28)$$

étant entendu que les valeurs ξ_0^2, ξ_1^2, ξ'_1 et ξ'_2 seront toujours des nombres réels positifs quand nous les utiliserons. Notant $u_i := u|_{\Omega_i}$, on vérifie que

$$\begin{aligned} u_0(x) &= a_0 \sin(\xi_0 x) \\ u_1(x) &= \begin{cases} a_1 \sin(\xi_1 x) + b_1 \cos(\xi_1 x) & \text{si } \xi_1^2 > 0, \\ a'_1 \sinh(\xi'_1 x) + b'_1 \cosh(\xi'_1 x) & \text{si } \xi_1^2 < 0, \end{cases} \\ u_2(x) &= \begin{cases} a_2 \sinh(\xi'_2(H-x)) & \text{si } \xi_2^2 < 0, \\ a_2 \sin(\xi_2(H-x)) & \text{si } \xi_2^2 > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

et on obtient trois relations de dispersion suivant la position de la valeur propre λ (cf. figure 2) :

$$\text{Zone(0)} \quad -\frac{\tan(\xi_0 h_0)}{c_0 \xi_0} = \frac{\frac{\tanh(\xi'_1(h_1-h_0))}{c_1 \xi'_1} + \frac{\tanh(\xi'_2(H-h_1))}{c_2 \xi'_2}}{1 + \frac{c_1 \xi'_1}{c_2 \xi'_2} \tanh(\xi'_1(h_1-h_0)) \tanh(\xi'_2(H-h_1))} \text{ si } \xi_1^2 < 0, \quad (29)$$

$$\text{Zone(I)} \quad \frac{\tanh(\xi'_2(H-h_1))}{c_2 \xi'_2} = \frac{\frac{\tan(\xi_0 h_0)}{c_0 \xi_0} + \frac{\tan(\xi_1(h_1-h_0))}{c_1 \xi_1}}{\frac{c_1 \xi_1}{c_0 \xi_0} \tan(\xi_0 h_0) \tan(\xi_1(h_1-h_0)) - 1} \text{ si } \xi_1^2 > 0 \text{ et } (\xi'_2)^2 > 0, \quad (30)$$

$$\text{Zone(II)} \quad \frac{\tan(\xi_2(H-h_1))}{c_2 \xi_2} = \frac{\frac{\tan(\xi_0 h_0)}{c_0 \xi_0} + \frac{\tan(\xi_1(h_1-h_0))}{c_1 \xi_1}}{\frac{c_1 \xi_1}{c_0 \xi_0} \tan(\xi_0 h_0) \tan(\xi_1(h_1-h_0)) - 1} \text{ si } \xi_1^2 > 0 \text{ et } \xi_2^2 > 0.$$

On constate que

- lorsque $c_0 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda_{k,\ell} < c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$, la restriction à Ω_0 de la solution $u_{k,\ell}$ arrive sur l'interface S_0 avec un angle supérieur à l'angle limite de la réflexion totale ;
- lorsque $c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda_{k,\ell} < c_2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$, la restriction à $\Omega_0 \cup \Omega_1$ traverse S_0 et arrive sur l'interface S_1 avec un angle supérieur à l'angle limite de la réflexion totale ;
- lorsque $c_2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda_{k,\ell}$, la solution $u_{k,\ell}$ est, dans chaque région Ω_0, Ω_1 et Ω_2 , une combinaison linéaire de sinus et cosinus sans réflexion totale sur chacune des interfaces S_0 et S_1 . Cette situation est traitée dans l'annexe B.

3.1 Zone (0) : cas de la relation de dispersion (29)

Les valeurs propres λ satisfont donc $c_0 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda < c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$. Cette infinité forme une suite à deux indices $\lambda_{k,\ell}, k = 1, \dots, 1 \leq \ell \leq \mathcal{L}_k$, l'entier \mathcal{L}_k étant une fonction monotone croissante de k . Il existe $m > 0$ minorant ξ_0 , sinon on aurait $h_0/c_0 = 0$ puisque $(\xi_0 \rightarrow 0) \implies (\xi'_1 \rightarrow \infty, \xi'_2 \rightarrow \infty)$.

Proposition 3.1. *Posant $a_0 = 1$, on a, à une constante de normalisation près,*

$$u_0(x) = \sin(\xi_0 x) \quad (31)$$

$$u_1(x) = \cosh(\xi'_1(x-h_0)) \left[\sin(\xi_0 h_0) + \frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi'_1} \cos(\xi_0 h_0) \tanh(\xi'_1(x-h_0)) \right] \quad (32)$$

$$u_2(x) = \frac{\cosh(\xi'_1(h_1-h_0))}{\sinh(\xi'_2(H-h_1))} \left[\sin(\xi_0 h_0) + \frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi'_1} \cos(\xi_0 h_0) \tanh(\xi'_1(h_1-h_0)) \right] \sinh(\xi'_2(H-x)) \quad (33)$$

Lemme 3.2. *Si $c_0 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda < c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$, la fonction propre associée vérifie*

$$|u_1(x)| \begin{cases} \leq 4 |\cos(\xi_0 h_0)| \frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi'_1} e^{-\xi'_1(x-h_0)}, \\ \geq \begin{cases} \frac{1}{8} |\cos(\xi_0 h_0)| \frac{c_0 \xi_0}{c_2 \xi'_2} \tanh(\xi'_2(H-h_1)) e^{-\xi'_1(x-h_0)}, & h_0 < x < h_1, \\ \frac{|\cos(\xi_0 h_0)|}{4(1+\sqrt{\frac{c_1(c_1-c_0)}{c_2(c_2-c_0)}})} \frac{c_0 \xi_0}{c_2 \xi'_2} e^{-\xi'_1(x-h_0)} (1 - e^{-2\xi'_1(h_1-x)}) \end{cases} \end{cases}$$

$$|u_2(x)| \begin{cases} \leq 2 |\cos(\xi_0 h_0)| \frac{c_0 \xi_0}{c_2 \xi_2'} e^{-\xi_1'(h_1-h_0)} \frac{\sinh(\xi_2'(H-x))}{\cosh(\xi_2'(H-h_1))}, \\ \geq \frac{1}{2} |\cos(\xi_0 h_0)| \frac{c_0 \xi_0}{c_2 \xi_2'} e^{-\xi_1'(h_1-h_0)} \frac{\sinh(\xi_2'(H-x))}{\cosh(\xi_2'(H-h_1))}, \end{cases} \quad h_1 < x < H.$$

Démonstration. Pour u_1 on met (32) sous la forme

$$u_1(x) = \cos(\xi_0 h_0) \frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi_1'} \cosh(\xi_1'(x-h_0)) \left[\tanh(\xi_1'(x-h_0)) + c_1 \xi_1' \frac{\tanh(\xi_0 h_0)}{c_0 \xi_0} \right]. \quad (34)$$

Appelant M_1 l'expression à l'intérieur du crochet et utilisant la relation de dispersion (29), on a

$$\begin{aligned} M_1(x) &= \tanh(\xi_1'(x-h_0)) - \frac{\tanh(\xi_1'(h_1-h_0)) + \frac{c_1 \xi_1'}{c_2 \xi_2'} \tanh(\xi_2'(H-h_1))}{1 + \frac{c_1 \xi_1'}{c_2 \xi_2'} \tanh(\xi_1'(h_1-h_0)) \tanh(\xi_2'(H-h_1))} \\ &= \frac{\tanh(\xi_1'(x-h_0)) - \tanh(\xi_1'(h_1-h_0))}{1 + \frac{c_1 \xi_1'}{c_2 \xi_2'} \tanh(\xi_1'(h_1-h_0)) \tanh(\xi_2'(H-h_1))} \left(1 + \frac{c_1 \xi_1'}{c_2 \xi_2'} \frac{\tanh(\xi_2'(H-h_1))}{\tanh(\xi_1'(h_1-x))} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

De $\tanh(\xi_1'(x-h_0)) - \tanh(\xi_1'(h_1-h_0)) = -2e^{-2\xi_1'(x-h_0)} \frac{1-e^{-2\xi_1'(h_1-x)}}{(1+e^{-2\xi_1'(x-h_0)})(1+e^{-2\xi_1'(h_1-h_0)})}$ on déduit $|\tanh(\xi_1'(x-h_0)) - \tanh(\xi_1'(h_1-h_0))| \leq 2e^{-2\xi_1'(x-h_0)}(1-e^{-2\xi_1'(h_1-x)})$. Ce dernier facteur va servir à annihiler l'influence de $\tanh(\xi_1'(h_1-x))$ au second dénominateur de l'expression de M_1 puisque $(1-e^{-2\xi_1'(h_1-x)})(\tanh(\xi_1'(h_1-x)))^{-1} = 1+e^{-2\xi_1'(h_1-x)}$. Pour finir la majoration, tenant compte de $(c_1 \xi_1')/(c_2 \xi_2') < 1$, on obtient $|M_1(x)| \leq 4e^{-2\xi_1'(x-h_0)}$. Ne prenant en compte que $\frac{c_1 \xi_1'}{c_2 \xi_2'} \frac{\tanh(\xi_2'(H-h_1))}{\tanh(\xi_1'(h_1-x))}$ dans la parenthèse de (35), on a la première minoration : $|M_1(x)| \geq \frac{1}{4} \frac{c_1 \xi_1'}{c_2 \xi_2'} \tanh(\xi_2'(H-h_1)) e^{-2\xi_1'(x-h_0)}$ puisque $1-e^{-2y} \geq \tanh y$. Avec le premier terme de cette parenthèse on a $|M_1(x)| > \frac{1}{m} e^{-2\xi_1'(x-h_0)} (1-e^{-2\xi_1'(h_1-x)})$ où $m^{-1} = 2(1 + \sqrt{\frac{c_1(c_1-c_0)}{c_2(c_2-c_0)}})$. Pour u_2 , utilisant encore (29), on met (33) sous la forme

$$u_2(x) = \cos(\xi_0 h_0) \frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi_1'} \frac{\cosh(\xi_1'(h_1-h_0))}{\sinh(\xi_2'(H-h_1))} M_2 \sinh(\xi_2'(H-x))$$

avec $M_2 := -\frac{c_1 \xi_1'}{c_2 \xi_2'} \frac{\tanh(\xi_2'(H-h_1))}{\cosh^2(\xi_1'(h_1-h_0))} \frac{1}{1 + \frac{c_1 \xi_1'}{c_2 \xi_2'} \tanh(\xi_2'(H-h_1)) \tanh(\xi_1'(h_1-h_0))}$. Comme $\frac{c_1 \xi_1'}{c_2 \xi_2'} < 1$, il vient que

$$\frac{1}{2} \frac{c_1 \xi_1'}{c_2 \xi_2'} \frac{\tanh(\xi_2'(H-h_1))}{\cosh(\xi_1'(h_1-h_0))} e^{-\xi_1'(h_1-h_0)} \leq |M_2| \leq 2 \frac{c_1 \xi_1'}{c_2 \xi_2'} \frac{\tanh(\xi_2'(H-h_1))}{\cosh(\xi_1'(h_1-h_0))} e^{-\xi_1'(h_1-h_0)}$$

d'où

$$\begin{aligned} |u_2(x)| &\leq 2 |\cos(\xi_0 h_0)| \frac{c_0 \xi_0}{c_2 \xi_2'} e^{-\xi_1'(h_1-h_0)} \frac{\sinh(\xi_2'(H-x))}{\cosh(\xi_2'(H-h_1))} \\ |u_2(x)| &\geq \frac{1}{2} |\cos(\xi_0 h_0)| \frac{c_0 \xi_0}{c_2 \xi_2'} e^{-\xi_1'(h_1-h_0)} \frac{\sinh(\xi_2'(H-x))}{\cosh(\xi_2'(H-h_1))} \end{aligned}$$

□

Maintenant nous pouvons mesurer la masse des fonctions propres d'une suite (v_{k_n, ℓ_n}) , $n \rightarrow \infty$, dans un ouvert ω et nous avons vu qu'il suffit de considérer un ouvert de la forme $\omega := (0, L) \times (a, b) \subset \Omega$, ce qui revient à négliger la largeur de l'ouvert ω .

Théoreme 3.3. *Soit une suite $(v_{k_n, \ell_n})_n$ de fonctions propres telle que $c_0 \frac{k_n^2 \pi^2}{L^2} < \lambda_{k_n, \ell_n} < c_1 \frac{k_n^2 \pi^2}{L^2}$. On a forcément $\xi'_2 \rightarrow \infty$ et la suite vérifie à un coefficient de normalisation près*

- Sur Ω_0

$$\int_{\Omega_0} v_{k_n, \ell_n}^2(x) dx = \frac{h_0}{2} \left(1 - \frac{\sin(2\xi_0 h_0)}{2\xi_0 h_0} \right) \quad (36)$$

- Sur Ω_1

$$(\xi'_1 \rightarrow \infty) \implies \int_{\Omega_1} v_{k_n, \ell_n}^2(x) dx \begin{cases} \leq C_2 \cos^2(\xi_0 h_0) \left(\frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi'_1} \right)^2 \frac{1}{\xi'_1}, \\ \geq C_1 \cos^2(\xi_0 h_0) \left(\frac{c_0 \xi_0}{c_2 \xi'_2} \right)^2 \frac{1}{\xi'_1}. \end{cases} \quad (37)$$

$$(\sup \xi'_1 < \infty) \implies \left(\exists C_1, C_2 > 0 \text{ telles que } C_1 < \int_{\Omega_1} v_{k_n, \ell_n}^2(x) dx < C_2 \right) \quad (38)$$

- Sur Ω_2

$$\int_{\Omega_2} v_{k_n, \ell_n}^2(x) dx = \cos^2(\xi_0 h_0) \left(\frac{c_0 \xi_0}{c_2 \xi'_2} \right)^2 e^{-2\xi'_1(h_1 - h_0)} O\left(\frac{1}{\xi'_2}\right) \quad (39)$$

Dans le cas particulier où, de plus, $\sup \xi'_1 < \infty$, on a

$$(\sup \xi'_1 < \infty) \implies \int_{\Omega_2} v_{k_n, \ell_n}^2(x) dx = O\left(\frac{1}{(\xi'_2)^3}\right) \quad (40)$$

Remarque 3.4. *Il y a une forte analogie avec la concentration décrite dans la section 2 :*

1. *Les résultats précédents signifient que pour des valeurs propres de la zone $(\mathbf{0})$, se rapprochant de la ligne $\lambda = c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$, la norme des v_{k_n, ℓ_n} se concentre de plus en plus dans $\Omega_0 \cup \Omega_1$.*
2. *On peut prouver que $|\cos(\xi_0 h_0)| \rightarrow 1$ si $1 \leq \ell_n \leq N$ où N est un entier fixé. La représentation de (29) étant similaire à celle de la figure 3 on peut raisonner similairement.*
3. *Si $\frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi'_1}$ est borné dans (37), il vient que la couche Ω_1 contribue de façon négligeable dans $\|u_{k_n, \ell_n}\|_{L^2(\Omega)}$ par rapport à la couche Ω_0 lorsque $n \rightarrow \infty$. C'est le cas si $c_0 \frac{k_n^2 \pi^2}{L^2} < \lambda_{k_n, \ell_n} < (c_1 - \varepsilon) \frac{k_n^2 \pi^2}{L^2}$, $\varepsilon > 0$. En effet, les rapports $\frac{c_0 \xi_0}{c_2 \xi'_2}$ et $\frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi'_1}$ sont alors comparables puisque cette condition implique $\sqrt{\frac{c_1 \varepsilon}{c_2(c_2 - c_1 + \varepsilon)}} \leq \frac{c_1 \xi'_1}{c_2 \xi'_2} \leq \sqrt{\frac{c_1(c_1 - c_0)}{c_2(c_2 - c_0)}}$. Ce sera aussi le cas si $\ell_n < \mathcal{L}_k - 1$. Il en est de même pour la couche Ω_2 par rapport à la couche Ω_1 .*
4. *Les rapports de décroissance précédents seraient beaucoup plus importants, i.e. de type exponentiel, si on considérait des ouverts ω telles que $\bar{\omega} \subset \Omega_1$ ou $\bar{\omega} \subset \Omega_2$.*

Démonstration. Examinons seulement les affirmations ne découlant pas du lemme 3.2. Si $\sup \xi_1' < M < \infty$, on a $\xi_0, \xi_2' \rightarrow \infty$ et $\frac{\tanh(M(h_1-h_0))}{c_1 M} \leq \frac{\tanh(\xi_1'(h_1-h_0))}{c_1 \xi_1'} \sim -\frac{\tan(\xi_0 h_0)}{c_0 \xi_0} \leq \infty$. Comme $\xi_0 \rightarrow \infty$, il faut que $\tan(\xi_0 h_0) \rightarrow \infty$, i.e. $\cos(\xi_0 h_0) \rightarrow 0$ d'où $|\sin(\xi_0 h_0)| \rightarrow 1$ et il existe $C > 0$ telle que $C < |\xi_0 \cos(\xi_0 h_0)| < \frac{1}{C}$ que l'on utilisera dans une nouvelle formulation de (34) :

$$|u_1(x)| = c_0 \xi_0 |\cos(\xi_0 h_0)| \cosh(\xi_1(x-h_0)) \left[\frac{x-h_0}{c_1} \frac{\tanh(\xi_1'(x-h_0))}{\xi_1'(x-h_0)} + \frac{h_0}{c_0} \frac{\tanh(\xi_0 h_0)}{\xi_0 h_0} \right].$$

Ainsi $c_0 \xi_0 |\cos(\xi_0 h_0)| \frac{x-h_0}{c_1} \frac{\tanh(\xi_1'(h_1-h_0))}{\xi_1'(h_1-h_0)} \leq |u_1(x)| \leq c_0 \xi_0 |\cos(\xi_0 h_0)| \cosh(\xi_1(h_1-h_0)) \left[\frac{h_1-h_0}{c_1} + \frac{h_0}{c_0} \right]$, ce qui implique que la norme L^2 sur Ω_1 est encadrée par deux constantes non nulles. Pour (40), il suffit de noter que

$$\int_{h_1}^H \sinh^2(\xi_2'(H-x)) dx = \frac{\sinh(2\xi_2'(H-h_1))}{4\xi_2'} \left[1 - \frac{2\xi_2'(H-h_1)}{\sinh(2\xi_2'(H-h_1))} \right]$$

□

3.2 Zone (I) : cas de la relation de dispersion (30)

Puisque $\xi_1^2 > 0$ on a

$$\begin{aligned} u_0(x) &= a_0 \sin(\xi_0 x) \\ u_1(x) &= a_1 \sin(\xi_1 x) + b_1 \cos(\xi_1 x), \\ u_2(x) &= a_2 \sinh(\xi_2'(H-x)) \end{aligned}$$

Le théorème 3.5 n'est qu'une réponse partielle à nos questions sur la concentration des fonctions propres. Avec une résolution complète de la relation de dispersion (30) nous pourrions utiliser toutes les propriétés des valeurs propres et agir comme dans la section 3.1.

Théorème 3.5. *Soit une suite $(v_{k_n, \ell_n})_n$ de fonctions propres telle que $c_1 \frac{k_n^2 \pi^2}{L^2} < \lambda_{k_n, \ell_n} < c_2 \frac{k_n^2 \pi^2}{L^2}$. La suite vérifie à un coefficient de normalisation près*

1. Si $(c_1 + \varepsilon) \frac{k_n^2 \pi^2}{L^2} < \lambda_{k_n, \ell_n} < (c_2 - \varepsilon) \frac{k_n^2 \pi^2}{L^2}$ avec $0 < \varepsilon < \frac{c_2 - c_1}{2}$, les fonctions propres $(v_{k_n, \ell_n})_n$ concentrent alors leurs normes L^2 dans $\Omega_0 \cup \Omega_1$:

$$h_1 \leq a < b < H \implies \int_{(0,L) \times (a,b)} |v_{k, \ell}(x)|^2 dx \approx \frac{e^{-2\xi_2'(a-h_1)}}{\xi_2'} \quad (41)$$

$$\int_{\Omega_0} |v_{k_n, \ell_n}(x)|^2 dx \approx \int_{\Omega_1} |v_{k_n, \ell_n}(x)|^2 dx \quad (42)$$

2. Soit $(\xi_2')_n$ la suite des quantités correspondant à la suite $(\lambda_{k_n, \ell_n})_n$, alors

$$(\xi_2' \rightarrow 0) \implies \int_{\Omega_0} |v_{k_n, \ell_n}(x)|^2 dx \approx \int_{\Omega_1} |v_{k_n, \ell_n}(x)|^2 dx \approx \int_{\Omega_2} |v_{k_n, \ell_n}(x)|^2 dx. \quad (43)$$

Autrement dit, la norme L^2 des fonctions propres $(v_{k_n, \ell_n})_n$ est répartie de manière comparable sur les $\Omega_i, i = 0, 1, 2$.

3. Soit $(\xi_1)_n$ la suite des quantités correspondant à la suite $(\lambda_{k_n, \ell_n})_n$, alors

$$(\xi_1 \rightarrow 0) \implies \left(h_1 \leq a < b \leq H \implies \int_{(0,L) \times (a,b)} |v_{k_n, \ell_n}(x)|^2 dx \approx \frac{e^{-2\xi_2'(a-h_1)}}{\xi_2'} \right), \quad (44)$$

$$(\xi_1 \rightarrow 0) \implies \left(\frac{h_0}{2} \sim \int_{\Omega_0} |v_{k_n, \ell_n}(x)|^2 dx \gg \int_{\Omega_2} |v_{k_n, \ell_n}(x)|^2 dx \approx \frac{1}{\xi_2'} \right), \quad (45)$$

et la norme L^2 des fonctions propres $(v_{k_n, \ell_n})_n$ se concentre dans Ω_1 .

Démonstration. Utiliser les trois cas particuliers de l'annexe E. □

Toutes les possibilités n'ont pas été examinées. Par exemple, il se pourrait que la suite des valeurs propres vérifie $\alpha_1 > \xi_1 > \alpha_2 > 0$ sans que l'on soit dans la situation 1 du théorème 3.5.

Conclusion Il s'agit d'une amorce et d'autres cas ponctuels ont été obtenus mais beaucoup reste à faire dans cette voie, en particulier la généralisation à un coefficient de diffusion seulement continu. Cependant, les résultats obtenus disent déjà ce qu'il est raisonnable d'espérer. Notons que les études très précises du cas $N = 1$ (Section 2) et de la Section 3.1 résultent d'une utilisation presque explicite de la relation de dispersion, ce ne fut pas possible dans la Section 3.2. D'autre part, nous aurions pu aussi considérer l'énergie $|u_{k, \ell}|^2 + |\nabla u_{k, \ell}|^2$ au lieu de $|u_{k, \ell}|^2$, un rapide coup d'oeil montre que dans la plupart des cas la valeur du rapport $R_\omega(v)$ dans (2) change mais pas sa nature.

Annexes

A Preuve du théorème 1.1

La preuve sera faite en plusieurs étapes.

1/ Mise en place des équations

Soit une valeur propre $\lambda = \lambda_{k, \ell}$ que l'on fixe pour l'instant et la fonction propre $v_{k, \ell}$ associée (normalisée avec un coefficient positif). Après la transformation de Fourier en x_1 , on travaille avec la fonction $u_{k, \ell}$ ne dépendant plus que de x_2 et qui vérifie, posant $\mu_k = \frac{k\pi}{L}$,

$$\begin{cases} u_{k, \ell}'' - \mu_k^2 u_{k, \ell} = -\frac{\lambda}{c} u_{k, \ell}, & (0, H) \setminus \{h_0\}, \\ u_{k, \ell}(0) = u_{k, \ell}(H) = 0, \\ u_{k, \ell}(h_0^+) = u_{k, \ell}(h_0^-), u_{k, \ell}'(h_0^+) = u_{k, \ell}'(h_0^-). \end{cases}$$

On supprime les indices (k, ℓ) dans la suite et, comme $c = c_1$ sur (h_0, H) , on peut écrire

$$\begin{cases} u'' - (\mu^2 - \frac{\lambda}{c_1})u = 0, & x_2 \in (h_0, H), \\ u'' - (\mu^2 - \frac{\lambda}{c_1})u = \lambda(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c})u, & x_2 \in (0, h_0), \\ u(0) = u(H) = 0, \\ u(h_0^+) = u(h_0^-), u'(h_0^+) = u'(h_0^-), \end{cases}$$

puis, notant $f(x) = \begin{cases} 0, x_2 \in (h_0, H), \\ -\lambda(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c})u, x_2 \in]0, h_0[\end{cases}$, on doit résoudre

$$\begin{cases} u'' - \xi_1'^2 u = -f, \\ u(0) = u(H) = 0, \\ u(h_0^+) = u(h_0^-), u'(h_0^+) = u'(h_0^-), \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

avec $\xi_1' := \sqrt{\mu^2 - \frac{\lambda}{c_1}} > 0$. Le calcul de $u(h_0)$ sera une fonction de $u|_{(0, h_0)}$ puisque le second membre de l'équation sur l'intervalle (h_0, H) est nul. L'idée est d'estimer $\|u\|_{L^2(h_0, H)}$ et $\|u\|_{L^2(0, h_0)}$ en fonction de $|u(h_0)|$ d'où l'estimation de $\frac{\|u\|_{L^2(h_0, H)}}{\|u\|_{L^2(0, H)}}$.

2/ Un lemme préparatoire

Lemme A.1. *La solution du système (A.1) vérifie*

$$u(h_0) = \frac{\lambda}{\xi_1'} \frac{\tanh(\xi_1'(H - h_0))}{\tanh(\xi_1'(H - h_0)) + \tanh(\xi_1'h_0)} \int_0^{h_0} \frac{\sinh(\xi_1'\sigma)}{\cosh(\xi_1'h_0)} \frac{c_1 - c(\sigma)}{c_1 c(\sigma)} u(\sigma) d\sigma.$$

Démonstration. Puisque l'équation différentielle est à coefficient constant la solution s'écrit

$$u(x) = u(h_0) \cosh(\xi_1'(x - h_0)) + \frac{u'(h_0)}{\xi_1'} \sinh(\xi_1'(x - h_0)) - \frac{1}{\xi_1'} \int_{h_0}^x \sinh(\xi_1'(x - \sigma)) f(\sigma) d\sigma,$$

Les conditions aux extrémités donnant

$$0 = u(h_0) \cosh(\xi_1'h_0) - \frac{u'(h_0)}{\xi_1'} \sinh(\xi_1'h_0) - \frac{1}{\xi_1'} \int_0^{h_0} \sinh(\xi_1'\sigma) f(\sigma) d\sigma$$

$$0 = u(h_0) \cosh(\xi_1'(H - h_0)) + \frac{u'(h_0)}{\xi_1'} \sinh(\xi_1'(H - h_0)) - \frac{1}{\xi_1'} \int_{h_0}^H \sinh(\xi_1'(H - \sigma)) f(\sigma) d\sigma,$$

on arrive au système matriciel

$$A \begin{pmatrix} u(h_0) \\ u'(h_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi_1'} \int_0^{h_0} \frac{\sinh(\xi_1'\sigma)}{\cosh(\xi_1'h_0)} f(\sigma) d\sigma \\ \frac{1}{\xi_1'} \int_{h_0}^H \frac{\sinh(\xi_1'(H - \sigma))}{\cosh(\xi_1'(H - h_0))} f(\sigma) d\sigma \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\tanh(\xi_1'h_0)}{\xi_1'} \\ 1 & \frac{\tanh(\xi_1'(H - h_0))}{\xi_1'} \end{pmatrix}$$

et $\det(A) = \frac{\tanh(\xi_1'(H - h_0)) + \tanh(\xi_1'h_0)}{\xi_1'}$. Finalement, on obtient

$$\begin{pmatrix} u(h_0) \\ u'(h_0) \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \frac{\tanh(\xi_1'(H - h_0))}{\xi_1'} & \frac{\tanh(\xi_1'h_0)}{\xi_1'} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi_1'} \int_0^{h_0} \frac{\sinh(\xi_1'\sigma)}{\cosh(\xi_1'h_0)} f(\sigma) d\sigma \\ \frac{1}{\xi_1'} \int_{h_0}^H \frac{\sinh(\xi_1'(H - \sigma))}{\cosh(\xi_1'(H - h_0))} f(\sigma) d\sigma \end{pmatrix},$$

ce qui donne pour notre fonction f particulière, puisque $f = 0$ sur l'intervalle (h_0, H) ,

$$u(h_0) = \frac{1}{\tanh(\xi_1'(H - h_0)) + \tanh(\xi_1'h_0)} \frac{\tanh(\xi_1'(H - h_0))}{\xi_1'} \int_0^{h_0} \frac{\sinh(\xi_1'\sigma)}{\cosh(\xi_1'h_0)} f(\sigma) d\sigma \quad (\text{A.2})$$

$$u'(h_0) = -\frac{1}{\tanh(\xi_1'(H - h_0)) + \tanh(\xi_1'h_0)} \int_0^{h_0} \frac{\sinh(\xi_1'\sigma)}{\cosh(\xi_1'h_0)} f(\sigma) d\sigma.$$

□

3/ Majorer $|u(h_0)|$ par $\|u\|_{L^2(0,h_0)}$

On déduit de $\frac{\sinh(\xi'_1 \sigma)}{\cosh(\xi'_1 h_0)} = e^{-\xi'_1(h_0-\sigma)} \frac{1-e^{-2\xi'_1 \sigma}}{1+e^{-2\xi'_1 h_0}} \leq e^{-\xi'_1(h_0-\sigma)}$ les estimations suivantes

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{h_0} \frac{\sinh(\xi'_1 \sigma)}{\cosh(\xi'_1 h_0)} \frac{c_1 - c(\sigma)}{c(\sigma)c_1} u(\sigma) d\sigma \right|^2 &\leq \max\left(\frac{c-c_1}{cc_1}\right)^2 \int_0^{h_0} e^{-2\xi'_1(h_0-\sigma)} d\sigma \int_0^{h_0} |u(\sigma)|^2 d\sigma \\ &\leq \max\left(\frac{c-c_1}{cc_1}\right)^2 \frac{1}{2\xi'_1} \|u\|_{L^2(0,h_0)}^2, \end{aligned}$$

ce qui donne, en injectant cette inégalité dans (A.1),

$$|u(h_0)|^2 \leq \frac{1}{2} \max\left(\frac{c-c_1}{cc_1}\right)^2 \frac{\lambda^2}{(\xi'_1)^3} \|u\|_{L^2(0,h_0)}^2,$$

que l'on peut aussi écrire

$$\|u\|_{L^2(0,h_0)}^2 \geq K \frac{(\xi'_1)^4}{\lambda^2} \frac{1}{\xi'_1} |u(h_0)|^2 \text{ avec } K = 2\left(\max \frac{c_1 - c}{c_1 c}\right)^{-2}.$$

4/ Évaluer $\|u\|_{L^2(h_0,H)}$ et $\|u\|_{L^2(a,b)}$ en fonction de $|u(h_0)|$ pour $h_0 \leq a < b \leq H$.

Comme c est une fonction constante sur l'intervalle (h_0, H) , on voit d'une part que

$$\begin{aligned} \int_{h_0}^H |u|^2 d\sigma &= \frac{H-h_0}{2} \left(\frac{u(h_0)}{\sinh(\xi'_1(H-h_0))} \right)^2 \left(\frac{\sinh(\xi'_1(H-h_0))}{\xi'_1(H-h_0)} \cosh(\xi'_1(H-h_0)) - 1 \right) \\ &= \frac{|u(h_0)|^2 \sinh(2\xi'_1(H-h_0))}{4\xi'_1 \sinh^2(\xi'_1(H-h_0))} \left(1 - \frac{2\xi'_1(H-h_0)}{\sinh(2\xi'_1(H-h_0))} \right) \\ &\sim \frac{|u(h_0)|^2}{2\xi'_1} \text{ si } \xi'_1 \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

et, d'autre part, que

$$\begin{aligned} \int_a^b |u|^2 d\sigma &= \frac{b-a}{2} \left(\frac{u(h_0)}{\sinh(\xi'_1(H-h_0))} \right)^2 \left(\frac{\sinh(\xi'_1(b-a))}{\xi'_1(b-a)} \cosh(2\xi'_1(H - \frac{a+b}{2})) - 1 \right) \\ &= \frac{|u(h_0)|^2 \sinh(\xi'_1(b-a))}{\sinh^2(\xi'_1(H-h_0)) 2\xi'_1} \cosh(2\xi'_1(H - \frac{a+b}{2})) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{\xi'_1(b-a)}{\sinh(\xi'_1(b-a)) \cosh(2\xi'_1(H - \frac{a+b}{2}))} \right) \\ &\sim \frac{|u(h_0)|^2}{\xi'_1} e^{-2\xi'_1(a-h_0)} \text{ si } \xi'_1 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Conclusion

Si $\underline{c} \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda < (c_1 - \varepsilon) \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$, alors on est certain que $\frac{\varepsilon}{c_1(c_1 - \varepsilon)} < \frac{(\xi'_1)^2}{\lambda} < \frac{c_1 - c}{c_1 \varepsilon}$ et, de plus, $\xi'_1 \rightarrow \infty$, ce

qui permet d'en déduire le théorème 1.1 puisque

$$\frac{\|v_{k_n, \ell_n}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k_n, \ell_n}\|_{L^2(\Omega)}^2} \leq \frac{\|v_{k_n, \ell_n}\|_{L^2(\omega)}^2}{\|v_{k_n, \ell_n}\|_{L^2(x_2 < h_0)}^2 + \|v_{k_n, \ell_n}\|_{L^2(x_2 > h_0)}^2} \leq \frac{\frac{|v_{k_n, \ell_n}(h_0)|^2}{\xi_1'} e^{-2\xi_1'(a-h_0)}}{K \frac{(\xi_1')^4}{\lambda^2} \frac{1}{\xi_1'} |v_{k_n, \ell_n}(h_0)|^2 + \frac{|v_{k_n, \ell_n}(h_0)|^2}{2\xi_1'}} (1+o(1))$$

Si $\alpha > 0$ et si on impose que $H - a > \alpha$ alors la constante $K_{\varepsilon, c}$ de l'énoncé est indépendante de a .

B Preuve du théorème 1.5

- Remarque B.1.** 1. Pour le modèle à N sauts, le résultat apparaît plausible à première vue car les solutions sont des combinaisons de sinus et cosinus. La difficulté vient des coefficients de ces combinaisons qu'il convient de comparer entre eux.
2. Lorsque $c \in C^1(0, H)$ mais non à $C^1([0, H])$, les translations doivent respecter $0 < \alpha < a < b < H - \alpha < H$ avec α fixé. Pour le modèle à un saut, on peut poser $\varepsilon = 0$ mais une étude fine de la relation de dispersion est nécessaire.
3. Lorsque $c \in C^1([0, H])$, la transformation de Liouville nous ramène à la résolution de $F'' + QF = 0$ avec $Q \geq 0$. Ensuite, la transformation de Prüfer modifiée donne un système équivalent formé de deux équations différentielles du premier ordre.

Lorsque $\varepsilon > 0$, la preuve ne nécessite pas la connaissance de la relation de dispersion, celle dont les racines sont les valeurs propres de l'opérateur A . Cherchant les fonctions propres v de l'opérateur $A = -\nabla \cdot (c\nabla)$ ayant la forme $v(x) = \sin(\frac{k\pi}{L}x_1)u(x_2)$ et associées à la valeur propre λ , nous introduisons dans $L^2(0, H)$ la famille d'opérateurs réduits autoadjoints (A_k) définis formellement par $A_k u = -(cu')' + c\frac{k^2\pi^2}{L^2}u$, $u(0) = u(H) = 0$, et nous sommes amenés à résoudre l'équation

$$(cu')' + (\lambda - c\frac{k^2\pi^2}{L^2})u = 0, u(0) = u(H) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Pour u dans le domaine de l'opérateur réduit A_k , on a $\int_0^H (cu'^2 + (c\frac{k^2\pi^2}{L^2} - \lambda)u^2)dx = 0$, ce qui implique que le spectre $\sigma(A_k)$ vérifie $\sigma(A_k) \subset ((\inf c)\frac{k^2\pi^2}{L^2}, +\infty)$.

B.1 Modèle à N sauts

Les hypothèses (H0) et (H1) sont satisfaites dans cette sous-section. Nous nous intéressons aux solutions u de (B.1) pour les valeurs propres $\lambda > c_H \frac{k^2\pi^2}{L^2}$ (ici $c_H = c_N$). Si on pose $\xi_i := (\frac{\lambda}{c_i} - \frac{k^2\pi^2}{L^2})^{\frac{1}{2}}$,

la fonction propre u associée à la valeur propre $\lambda = \lambda_{k,\ell}$ (on remplace x_2 par x) s'écrit

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= a_0 \sin(\xi_0 x), 0 < x < h_0, \\
u_1(x) &= a_1 \sin(\xi_1 x) + b_1 \cos(\xi_1 x), h_0 < x < h_1, \\
&\vdots = \vdots \\
u_i(x) &= a_i \sin(\xi_i x) + b_i \cos(\xi_i x), h_{i-1} < x < h_i, \\
&\vdots = \vdots \\
u_{N-1}(x) &= a_{N-1} \sin(\xi_{N-1} x) + b_{N-1} \cos(\xi_{N-1} x), h_{N-2} < x < h_{N-1}, \\
u_N(x) &= a_N \sin(\xi_N x) + b_N \cos(\xi_N x), h_{N-1} < x < h_N = H, \\
&= \alpha \sin(\xi_N (H - x)), h_{N-1} < x < h_N = H.
\end{aligned}$$

Quelque soit la fonction propre considérée, nous choisissons le même a_0 , par exemple 1, mais, par contre, les $(a_i, b_i), i = 1, \dots, N$, dépendent de (k, ℓ) . À l'interface $S_i, i = 0, \dots, N-1$, les conditions de transmission s'écrivent

$$\begin{aligned}
a_i \sin(\xi_i h_i) + b_i \cos(\xi_i h_i) &= a_{i+1} \sin(\xi_{i+1} h_i) + b_{i+1} \cos(\xi_{i+1} h_i) \\
c_i a_i \xi_i \cos(\xi_i h_i) - c_i b_i \xi_i \sin(\xi_i h_i) &= c_{i+1} a_{i+1} \xi_{i+1} \cos(\xi_{i+1} h_i) - c_{i+1} b_{i+1} \xi_{i+1} \sin(\xi_{i+1} h_i)
\end{aligned}$$

d'où l'écriture matricielle $S_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = T_i \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix}$ avec $\det S_i = -c_i \xi_i$, $\det T_i = -c_{i+1} \xi_{i+1}$ et

$$\begin{aligned}
T_i &= \begin{pmatrix} \sin(\xi_{i+1} h_i) & \cos(\xi_{i+1} h_i) \\ c_{i+1} \xi_{i+1} \cos(\xi_{i+1} h_i) & -c_{i+1} \xi_{i+1} \sin(\xi_{i+1} h_i) \end{pmatrix}, T_i^{-1} = \begin{pmatrix} \sin(\xi_{i+1} h_i) & \frac{\cos(\xi_{i+1} h_i)}{c_{i+1} \xi_{i+1}} \\ \cos(\xi_{i+1} h_i) & -\frac{\sin(\xi_{i+1} h_i)}{c_{i+1} \xi_{i+1}} \end{pmatrix}, \\
S_i &= \begin{pmatrix} \sin(\xi_i h_i) & \cos(\xi_i h_i) \\ c_i \xi_i \cos(\xi_i h_i) & -c_i \xi_i \sin(\xi_i h_i) \end{pmatrix}, S_i^{-1} = \begin{pmatrix} \sin(\xi_i h_i) & \frac{\cos(\xi_i h_i)}{c_i \xi_i} \\ \cos(\xi_i h_i) & -\frac{\sin(\xi_i h_i)}{c_i \xi_i} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Pour $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, on vérifie que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{i+1} \\ -b_{i+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin(\xi_{i+1} h_i) & \frac{c_i \xi_i}{c_{i+1} \xi_{i+1}} \cos(\xi_{i+1} h_i) \\ -\cos(\xi_{i+1} h_i) & \frac{c_i \xi_i}{c_{i+1} \xi_{i+1}} \sin(\xi_{i+1} h_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\xi_i h_i) & \cos(\xi_i h_i) \\ \cos(\xi_i h_i) & -\sin(\xi_i h_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_i \\ -b_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin(\xi_i h_i) & \frac{c_{i+1} \xi_{i+1}}{c_i \xi_i} \cos(\xi_i h_i) \\ -\cos(\xi_i h_i) & \frac{c_{i+1} \xi_{i+1}}{c_i \xi_i} \sin(\xi_i h_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\xi_{i+1} h_i) & \cos(\xi_{i+1} h_i) \\ \cos(\xi_{i+1} h_i) & -\sin(\xi_{i+1} h_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lemme B.2. Les normes euclidiennes dans \mathbb{R}^2 des opérateurs linéaires associés aux matrices

$$B_{i+1,i} := \begin{pmatrix} \sin(\xi_i h_i) & \frac{c_{i+1} \xi_{i+1}}{c_i \xi_i} \cos(\xi_i h_i) \\ -\cos(\xi_i h_i) & \frac{c_{i+1} \xi_{i+1}}{c_i \xi_i} \sin(\xi_i h_i) \end{pmatrix}, B_{i,i+1} := \begin{pmatrix} \sin(\xi_{i+1} h_i) & \frac{c_i \xi_i}{c_{i+1} \xi_{i+1}} \cos(\xi_{i+1} h_i) \\ -\cos(\xi_{i+1} h_i) & \frac{c_i \xi_i}{c_{i+1} \xi_{i+1}} \sin(\xi_{i+1} h_i) \end{pmatrix}$$

pour $i = 0, \dots, N-1$, vérifient

$$\|B_{i+1,i}\| = \max \left(1, \frac{c_{i+1} \xi_{i+1}}{c_i \xi_i} \right), \|B_{i,i+1}\| = \max \left(1, \frac{c_i \xi_i}{c_{i+1} \xi_{i+1}} \right). \quad (\text{B.2})$$

Démonstration. Avec $v = (v_1, v_2)$ on a $\|B_{i+1,i}v\|^2 = v_1^2 + (\frac{c_{i+1}\xi_{i+1}}{c_i\xi_i})^2 v_2^2 \leq \max\left(1, (\frac{c_{i+1}\xi_{i+1}}{c_i\xi_i})^2\right) (v_1^2 + v_2^2)$. Pour l'égalité, on prend $v = (1, 0)$ si $\frac{c_{i+1}\xi_{i+1}}{c_i\xi_i} \leq 1$ ou $v = (0, 1)$ si $\frac{c_{i+1}\xi_{i+1}}{c_i\xi_i} \geq 1$. \square

Lemme B.3. Si $\lambda_{k,\ell} > c_N \frac{k^2\pi^2}{L^2}$ ($c_H = c_N$), on a

$$\sqrt{\frac{c_i}{c_{i+1}}} < \frac{c_i\xi_i}{c_{i+1}\xi_{i+1}}, i = 0, \dots, N-1,$$

$$\frac{c_i\xi_i}{c_{i+1}\xi_{i+1}} < \sqrt{\frac{c_i(c_N - c_i)}{c_{i+1}(c_N - c_{i+1})}}, i = 0, \dots, N-2. \quad (\text{B.3})$$

$$\|B_{i+1,i}\| \leq \sqrt{\frac{c_{i+1}}{c_i}}, i = 0, N-1. \quad (\text{B.4})$$

Démonstration. Pour la première inégalité, il suffit de remarquer que $(\frac{c_i\xi_i}{c_{i+1}\xi_{i+1}})^2 = \frac{c_i}{c_{i+1}} \frac{\lambda - c_i \frac{k^2\pi^2}{L^2}}{\lambda - c_{i+1} \frac{k^2\pi^2}{L^2}}$ où le deuxième facteur est toujours plus grand que 1. La seconde inégalité se vérifie par un calcul simple. La dernière inégalité est une conséquence de la première inégalité et de (B.2). \square

Lemme B.4. Si $\lambda_{k,\ell} > c_N \frac{k^2\pi^2}{L^2}$, on a

$$|a_0| \leq \sqrt{\frac{c_i}{c_0}} \left\| \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\|, i = 0, \dots, N,$$

et il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\left\| \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\| \leq M|a_0|, i = 0, \dots, N-1. \quad (\text{B.5})$$

Démonstration. $\begin{pmatrix} \sin(\xi_{i+1}h_i) & \cos(\xi_{i+1}h_i) \\ \cos(\xi_{i+1}h_i) & -\sin(\xi_{i+1}h_i) \end{pmatrix}$ étant unitaire, on a $|a_0| \leq \|B_{1,0}\| \cdots \|B_{i,i-1}\| \left\| \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\|$ d'où $|a_0| \leq \sqrt{\frac{c_i}{c_0}} \left\| \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\|, i = 0, \dots, N$ en utilisant (B.4). La matrice $\begin{pmatrix} \sin(\xi_i h_i) & \cos(\xi_i h_i) \\ \cos(\xi_i h_i) & -\sin(\xi_i h_i) \end{pmatrix}$ étant aussi unitaire, on a $\left\| \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\| \leq \|B_{i-1,i}\| \cdots \|B_{0,1}\| |a_0|$ ce qui permet de dire, utilisant (B.3), que les vecteurs $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ sont bornés, pour $i = 0, \dots, N-1$, par $M|a_0|$ où M est une constante ne dépendant pas de la valeur propre $\lambda_{k,\ell} > c_N \frac{k^2\pi^2}{L^2}$. \square

On voudrait que (B.5) reste vraie pour $i = N$ mais $\|B_{N-1,N}\| = \max(1, \frac{c_{N-1}\xi_{N-1}}{c_N\xi_N})$ tendra vers l'infini s'il existe une suite infinie de valeurs propres $(\lambda_{k_n,\ell_n})_n$, telle que $\lambda_{k_n,\ell_n} - c_N \frac{k_n^2\pi^2}{L^2} \rightarrow 0^+$. Pour cette raison, nous considérerons les valeurs propres satisfaisant $\lambda_{k,\ell} > (c_N + \varepsilon) \frac{k^2\pi^2}{L^2}$. En effet, avec ce choix ⁷, on a $\frac{c_{N-1}\xi_{N-1}}{c_N\xi_N} \leq \sqrt{\frac{c_{N-1}(c_N - c_{N-1} + \varepsilon)}{c_N\varepsilon}}$ ce qui permet d'affirmer que les couples $(a_i, b_i), i = 0, \dots, N$, sont comparables les uns avec les autres ($b_0 = 0$) et nous obtenons la

7. Le choix $\lambda_{k,\ell} > c_N \frac{k^2\pi^2}{L^2} + \varepsilon$ ne conviendrait pas.

Proposition B.5. Si $\varepsilon > 0$, il existe une constante $M_\varepsilon > 0$ telle que

$$\left\| \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\| \leq M_\varepsilon |a_0| \leq M_\varepsilon \sqrt{\frac{c_i}{c_0}} \left\| \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\|, i = 0, \dots, N, \forall \lambda_{k,\ell} > (c_N + \varepsilon) \frac{k^2 \pi^2}{L^2}.$$

qui a pour conséquence (6). En effet, on commence par noter que

1. nous pouvons écrire $a_i \sin(\xi_i x) + b_i \cos(\xi_i x) = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \cos(\xi_i x - \beta_i)$ où $0 \leq \beta_i < 2\pi$ lorsque $h_{i-1} < x < h_i$;
2. il existe au moins un indice $j, 0 \leq j \leq N$, tel que $\omega_j := \omega \cap ((l_1, l_2) \times (h_j, h_{j+1})) = (l_1, l_2) \times (d, d')$ avec $d' - d \geq \frac{b-a}{N+1}$.
3. $\int_d^{d'} u^2(x) dx = \frac{a_j^2 + b_j^2}{2} (d' - d) \left[1 + \frac{\sin(\xi_j (d' - d))}{\xi_j (d' - d)} \cos(\xi_j (d' + d) - 2\beta_j) \right]$.

On pose $\bar{M} = \max_{\xi_i} \left| \frac{\sin(\xi_i (d' - d))}{\xi_i (d' - d)} \right|$ et comme $\xi_j > \sqrt{\frac{\varepsilon}{c_j} \frac{k\pi}{L}} \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{c_N} \frac{k\pi}{L}}$ on a $\bar{M} < 1$ ce qui permet de conclure puisque $\int_d^{d'} u^2(x) dx \geq (1 - \bar{M}) \frac{a_j^2 + b_j^2}{2} (d' - d)$.

B.2 Modèle C^1

Lorsque le coefficient c a un peu de régularité on peut se ramener à la forme $F'' + QF = 0$. Par exemple, si le coefficient c est deux fois dérivable, le changement de fonction $F = \frac{u}{\sqrt{c}}$ donne

$$F'' + \frac{c'^2 - 2cc'' + 4(\lambda - c \frac{k^2 \pi^2}{L^2})c}{4c^2} F = 0,$$

ce qui donne à penser que la solution u aura un comportement sinusoïdal pour $\lambda > \max_x (c \frac{k^2 \pi^2}{L^2} + \frac{cc''}{2})$. Intuitivement, on serait dans la situation non guidée de la Figure 1.

Nous décomposons la preuve en quatre étapes.

• **Étape 1 : Se ramener à $F'' + QF = 0$.**

La transformation de Liouville demande le changement de variable $s = \int_0^x \frac{1}{c(t)} dt$. Cette application, $g : x \rightarrow s$, est positive, croissante et de classe C^1 . Sa réciproque g^{-1} est aussi positive, croissante et de classe C^1 . Posant $F(s) = u(g^{-1}(s))$, on vérifie que

$$\begin{aligned} F'(s) &= u'(g^{-1}(s))c(g^{-1}(s)) \\ F''(s) &= u''(g^{-1}(s))(c(g^{-1}(s)))^2 + u'(g^{-1}(s))c'(g^{-1}(s))c(g^{-1}(s)) \end{aligned}$$

ce qui implique $u''(g^{-1}(s))c(g^{-1}(s)) = \frac{F''(s)}{c(g^{-1}(s))} - u'(g^{-1}(s))c'(g^{-1}(s))$. Comme $cu'' + c'u' + (\lambda - c \frac{k^2 \pi^2}{L^2})u = 0$, on a

$$\begin{aligned} F'' + QF &= 0. \\ Q(s) &= (\lambda - \frac{k^2 \pi^2}{L^2} c \circ g^{-1}(s))c \circ g^{-1}(s) \end{aligned}$$

Pour ces opérations on a supposé que c est dérivable. La fonction Q est positive dès que λ est assez grand.

• **Étape 2 : Utiliser la transformation de Prüfer modifiée**

La résolution de $F'' + QF = 0$ se ramène à la résolution des deux équations différentielles du premier ordre suivantes (cf. [13])

$$\begin{cases} \phi'(s) = -Q^{1/2} - \frac{1}{4} \frac{Q'}{Q} \sin(2\phi) \\ \frac{1}{R} R'(s) = \frac{1}{4} \frac{Q'}{Q} \cos(2\phi). \end{cases} \implies \begin{cases} F(s) = R(s)Q^{-1/4} \cos(\phi(s)), \\ F'(s) = R(s)Q^{1/4} \sin(\phi(s)). \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

• **Étape 3 : Propriétés de l'amplitude R et de la phase ϕ**

Posant $\bar{c}(s) := c(g^{-1}(s))$, $\bar{c}_M := \int_0^H \frac{1}{c(t)} dt$, nous avons $F'' + QF = 0$ sur l'intervalle $(0, \bar{c}_M)$. On note $c_0 := c(0)$ et $c_H := c(H)$.

Lemme B.6. Soit $\varepsilon > 0$ et supposons que $c \in C^1([0, H])$. On a

1.

$$\begin{aligned} (\lambda \geq c_H \frac{k^2 \pi^2}{L^2}) &\implies c_0^2 \left(\frac{\lambda}{c(H)} - \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \right) \leq Q \leq c_H^2 \left(\frac{\lambda}{c_0} - \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \right) \\ (\lambda \geq (c_H + \varepsilon) \frac{k^2 \pi^2}{L^2}) &\implies \left| \frac{Q'}{Q}(t) \right| \leq \frac{\bar{c}'}{\bar{c}} (1 + \frac{\bar{c}}{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

2. Si $\lambda \geq (c_H + \varepsilon) \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$, les solutions ϕ et R des équations différentielles (B.6) vérifient

$$\begin{aligned} \phi(s) &\sim - \int_0^s Q^{1/2}(t) dt \text{ quand } \left(\frac{\lambda}{\bar{c}} - \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \right) \rightarrow \infty \\ R(s) &= C e^{\frac{1}{4} \int_0^s \frac{Q'}{Q} \cos(2\phi) dr}, C \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Démonstration. De $Q'(s) = \bar{c}'(\lambda - 2\bar{c} \frac{k^2 \pi^2}{L^2})$ on voit que $\frac{Q'}{Q} = \frac{\bar{c}'}{\bar{c}} \left(\frac{\lambda - 2\bar{c} \frac{k^2 \pi^2}{L^2}}{\lambda - \bar{c} \frac{k^2 \pi^2}{L^2}} \right) = \frac{\bar{c}'}{\bar{c}} \left(1 - \frac{\bar{c} \frac{k^2 \pi^2}{L^2}}{\lambda - \bar{c} \frac{k^2 \pi^2}{L^2}} \right)$ et

comme, avec l'hypothèse faite, on a $\lambda - \bar{c} \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \geq \varepsilon \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$ on arrive à $\frac{\bar{c} \frac{k^2 \pi^2}{L^2}}{\lambda - \bar{c} \frac{k^2 \pi^2}{L^2}} \leq \frac{\bar{c}}{\varepsilon}$. Si on avait supposé

$\lambda \geq (2c_H + \varepsilon) \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$ on aurait $0 < \frac{Q'}{Q}(s) < \frac{\bar{c}'}{\bar{c}}$. Noter que pour (B.8) la condition $(\frac{\lambda}{\bar{c}} - \frac{k^2 \pi^2}{L^2}) \rightarrow \infty$ est remplie si $k \rightarrow \infty$ mais aussi quand $\lambda = \lambda_{k,\ell}$ avec $\ell \rightarrow \infty$. \square

L'amplitude R n'est jamais nulle sinon elle le serait identiquement. En imposant $\phi(0) = 0$ ou $\phi(0) = \pi/2$ on obtient deux solutions linéairement indépendantes d'où la solution cherchée correspond à $\phi(0) = \frac{\pi}{2}$ (à un multiple près)⁸. On a donc trouvé la forme écrite de la fonction propre correspondant à la valeur propre $\lambda \geq (c_H + \varepsilon) \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$:

$$u(x) = R(g(x))(Q(g(x)))^{-1/4} \cos(\phi(g(x))) \text{ avec } g(x) = \int_0^x \frac{1}{c(t)} dt.$$

• **Étape 4 : Estimation de $\|u\|_{L^2}^2$**

8. Chaque valeur propre de cet opérateur est simple : si u_1 et u_2 sont deux fonctions propres associées à λ , le wronskien $W = cu_1' u_2 - cu_2' u_1$ a une dérivée nulle sur $(0, H)$ ce qui montre que les vecteurs (u_1, cu_1') et (u_2, cu_2') sont colinéaires.

Corollaire B.7. Soient $\varepsilon > 0$ et un ouvert $\omega \subset \Omega$. Il existe une constante $a_{\varepsilon;\omega} > 0$, indépendante par translation de ω dans Ω , telle

$$a_{\varepsilon;\omega} \leq \frac{\int_{\omega} |u(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx} \leq 1$$

pour la famille des fonctions propres associées aux valeurs propres $\lambda > (c_H + \varepsilon) \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$, hormis un ensemble fini.

Démonstration. Il vient du lemme B.6 que le module de la fonction R est encadré par deux constantes strictement positives : $r_1 < |R| < r_2$ puisque $0 < s < \bar{c}_M$. Joignant ce résultat à l'encadrement de Q de (B.7) on peut affirmer que pour $0 < a < b < H$

$$\begin{aligned} r_1^2 c_H^{-1} \left(\frac{\lambda}{c_0} - \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \right)^{-1/2} \int_a^b \cos^2(\phi(g(x))) dx &\leq \int_a^b (R(g(x)))^2 (Q(g(x)))^{-1/2} \cos^2(\phi(g(x))) dx \\ &\leq r_2^2 c_0^{-1} \left(\frac{\lambda}{c_H} - \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \right)^{-1/2} \int_a^b \cos^2(\phi(g(x))) dx. \end{aligned}$$

Grâce à l'encadrement similaire pour $\int_0^H (R(g(x)))^2 (Q(g(x)))^{-1/2} \cos^2(\phi(g(x))) dx$ il suffit de regarder le rapport $\int_a^b \cos^2(\phi(g(x))) dx / \int_0^H \cos^2(\phi(g(x))) dx$. Comme ϕ' est négative pour les valeurs propres considérées, à un nombre fini près, la fonction $x \rightarrow \phi(g(x))$ est strictement décroissante. Avec le nouveau changement de variable $t = \phi(g(x))$, on a $dx = \frac{c(g^{-1}(\phi^{-1}(t)))}{\phi'(\phi^{-1}(t))} dt$ ce qui donne

$$\int_a^b \cos^2(\phi(g(x))) dx = \int_{\phi(g(b))}^{\phi(g(a))} \frac{c(g^{-1}(\phi^{-1}(t)))}{-\phi'(\phi^{-1}(t))} \cos^2 t dt.$$

où on contrôle très bien $c(g^{-1}(\phi^{-1}(t)))$. Combinant $-\phi' = Q^{1/2} + \frac{1}{4} \frac{Q'}{Q} \sin(2\phi)$ et (B.7) on a

$$(1 - \varepsilon_1) Q^{1/2} \leq -\phi' \leq (1 + \varepsilon_1) Q^{1/2} \quad (\text{B.9})$$

sauf, peut-être, un nombre fini de valeurs propres $\lambda \in \Lambda$ (le cardinal de Λ dépend de ε) et, par suite,

$$\begin{aligned} \frac{M}{1 + \varepsilon_1} \int_{\phi(g(b))}^{\phi(g(a))} \frac{\cos^2 t}{Q^{1/2}(t)} dt &\leq \int_a^b \cos^2(\phi(g(x))) dx \leq \frac{M}{1 - \varepsilon_1} \int_{\phi(g(b))}^{\phi(g(a))} \frac{\cos^2 t}{Q^{1/2}(t)} dt \\ \frac{M(1 - \varepsilon_2)}{c_H \left(\frac{\lambda}{c_0} - \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \right)^{1/2}} \int_{\phi(g(b))}^{\phi(g(a))} \cos^2 t dt &\leq \int_a^b \cos^2(\phi(g(x))) dx \leq \frac{M(1 + \varepsilon_2)}{c_0 \left(\frac{\lambda}{c_H} - \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \right)^{1/2}} \int_{\phi(g(b))}^{\phi(g(a))} \cos^2 t dt. \end{aligned}$$

Dans l'intégrale $\int_{\phi(g(b))}^{\phi(g(a))} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} [\phi(g(a)) - \phi(g(b)) + \frac{\cos(2(\phi(g(a)))) - \cos(2(\phi(g(b))))}{2}]$ le dernier terme du crochet est majoré par 1. Pour $\phi(g(a)) - \phi(g(b)) = (g(b) - g(a))(-\phi'(d_1))$ on a vu que l'on contrôle $\phi'(d_1)$ indépendamment de la position de a et b (utiliser (B.7) et (B.9)). Il reste à constater que $(g(b) - g(a)) = (b - a) \frac{1}{d_2}$ pour un réel $\frac{1}{c_H} < d_2 < \frac{1}{c_0}$ ce qui montre que c'est la différence $(b - a)$ qui importe.

On fait de même pour $\int_{\phi(g(H))}^{\phi(g(0))} \cos^2 t dt$ ce qui permet de conclure pour un parallélepède puisque $\int_{l_1}^{l_2} \sin^2(k\pi x_1) dx_1 = \frac{l_2 - l_1}{2} - \left[\frac{\sin(2k\pi x_1)}{4k\pi} \right]_{l_1}^{l_2}$. Il n'y a pas de difficulté à généraliser ceci à n'importe quel ouvert ω puisque ce dernier contient toujours un parallélepède. \square

9. Dès que $2\varepsilon < c_H - c_0$, il existe $0 < d < \frac{c_0}{c_H}$ tel que $d < \left(\frac{\lambda}{c_H} - \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \right) \left(\frac{\lambda}{c_0} - \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \right)^{-1} < 1$

C Lemme 2.9 : indications

Remarque C.1. Comme les valeurs propres guidées $\lambda_{k,\ell}$ vérifient $k^2\pi^2 < \lambda_{k,\ell} < c_1 k^2\pi^2$, elles sont comparables à $k^2\pi^2$.

- Les notations définies en (7) seront parfois étendues au cours du texte en y remplaçant la valeur propre $\lambda_{k,\ell}$ par la variable λ parcourant un intervalle de \mathbb{R} mais aucune confusion ne sera possible.
- L'entier k est provisoirement fixé, la constante c_1 est supposée strictement supérieure à $c_0 = 1$. On a \mathcal{L}_k valeurs propres $\lambda_{k,\ell}$ classées dans l'ordre croissant $k^2\pi^2 < \lambda_{k,1} < \lambda_{k,2} < \dots < \lambda_{k,\mathcal{L}_k} < c_1 k^2\pi^2$. Elles correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe représentant la fonction croissante $\lambda \mapsto \frac{1}{\xi'_1} \tanh(\xi'_1(H - h_0))$ avec la courbe $\lambda \mapsto -\frac{1}{\xi_0} \tan(\frac{\xi_0}{2})$ où, ici, $\xi_0 = (\lambda - k^2\pi^2)^{1/2}$, $\xi'_1 = (k^2\pi^2 - \frac{\lambda}{c_1})^{1/2}$. La figure 3 les représente où on a posé

$$\lambda_\ell = \lambda_\ell(k) = k^2\pi^2 + (2\ell - 1)^2 \frac{\pi^2}{4h_0^2}, \lambda^\ell = \lambda^\ell(k) := k^2\pi^2 + \ell^2 \frac{\pi^2}{h_0^2}, 1 \leq \ell \leq \mathcal{L}_k + 1. \quad (\text{C.1})$$

Maintenant, nous nous intéressons à l'intervalle $I_{k,\ell} := (\lambda_\ell, \lambda_{\ell+1})$ et on voit que les deux courbes sont convexes sur $(\lambda_\ell, \lambda^\ell)$. Avec le changement de variable $I_{k,\ell} \ni \lambda \rightarrow \mu = \lambda - k^2\pi^2 - (2\ell - 1)^2 \frac{\pi^2}{4h_0^2}$, la nouvelle variable μ parcourt l'intervalle $(0, 2\ell \frac{\pi^2}{h_0^2})$, et $\lambda_\ell, \lambda^\ell, \lambda_{k,\ell}, (\lambda_\ell + \lambda_{\ell+1})/2$ correspondent respectivement à $\mu_\ell = 0, \mu^\ell = (4\ell - 1) \frac{\pi^2}{4h_0^2}, \mu_{k,\ell}, (\mu_\ell + \mu_{\ell+1})/2 = \ell \frac{\pi^2}{h_0^2}$. La convexité des deux courbes sur (μ_ℓ, μ^ℓ) permet d'introduire la valeur $\tilde{\mu}$ point d'intersection entre la courbe en \tanh et la droite qui est tangente en μ^ℓ à l'autre courbe. Cette droite définie par $\mu \rightarrow -\frac{h_0^3}{2\ell^2\pi^2}(\mu - \mu^\ell)$ permet de voir que $0 < \mu^\ell - \mu_{k,\ell} < \mu^\ell - \tilde{\mu}$.

1/ La quantité ξ_0 devient $\sqrt{\mu + (2\ell - 1)^2 \frac{\pi^2}{4h_0^2}}$.

2/ La restriction de la courbe $\lambda \mapsto -\frac{1}{\xi_0} \tan(\xi_0 h_0)$ à l'intervalle $I_{k,\ell}$ est indépendante de l'indice k et correspond maintenant à

$$\mu \rightarrow -\frac{\tan(\sqrt{\mu + (2\ell - 1)^2 \frac{\pi^2}{4h_0^2}} h_0)}{\sqrt{\mu + (2\ell - 1)^2 \frac{\pi^2}{4h_0^2}}}.$$

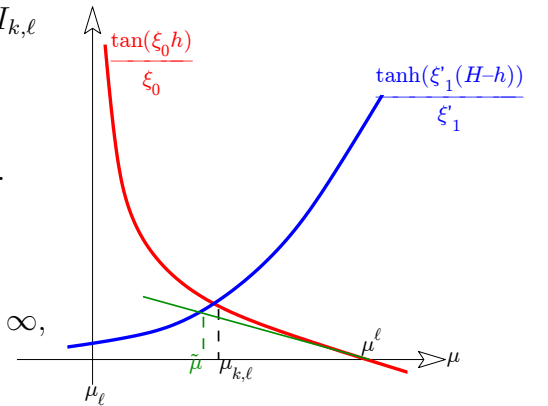
D'autre part, la courbe en tangente hyperbolique dépend de k et s'écrase de plus en plus vers l'axe des abscisses lorsque $k \rightarrow \infty$, ce qui prouve que la suite $(\mu_{k,\ell})_k$ tend vers μ^ℓ quand $k \rightarrow \infty$, l'indice ℓ restant fixe.

Lorsque $k \rightarrow \infty$, on vérifie que

$$\frac{\tanh(\xi'_1(H - h_0))}{\xi'_1} = \sqrt{\frac{c_1}{c_1 - 1}} \frac{1}{k\pi} \left(1 + \frac{1}{2(c_1 - 1)k^2} \left(\frac{\mu - \mu^\ell}{\pi^2} + \frac{\ell^2}{h_0^2} \right) + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right), \quad (\text{C.2})$$

et ainsi la valeur $\tilde{\mu}$ est solution de

$$\sqrt{\frac{c_1}{c_1 - 1}} \frac{1}{k\pi} \left(1 + \frac{1}{2(c_1 - 1)k^2} \left(\frac{\mu - \mu^\ell}{\pi^2} + \frac{\ell^2}{h_0^2} \right) + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) = -\frac{h_0^3}{2\ell^2\pi^2}(\mu - \mu^\ell),$$



ce qui donne

$$\mu^\ell - \tilde{\mu} = 2\sqrt{\frac{c_1}{c_1-1}} \frac{\ell^2 \pi}{h_0^3 k} \left(1 + \frac{\ell^2}{2(c_1-1)k^2 h_0^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) = O\left(\frac{1}{k}\right). \quad (\text{C.3})$$

Toujours lorsque $k \rightarrow \infty$, on vérifie que $-\frac{\tan(\sqrt{\mu+(2\ell-1)^2 \frac{\pi^2}{4h_0^2}} h_0)}{\sqrt{\mu+(2\ell-1)^2 \frac{\pi^2}{4h_0^2}}} = \frac{h_0^3}{2\ell^2 \pi^2} (\mu^\ell - \mu) + o(\mu^\ell - \mu)$. On écrit que cette expression est égale au second membre de (C.2), ce qui est exactement la relation de dispersion (9) et donne

$$\mu^\ell - \mu_{k,\ell} = 2 \frac{\ell^2 \pi}{h_0^3} \sqrt{\frac{c_1}{c_1-1}} \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) + o(\mu^\ell - \mu_{k,\ell}) \quad (\text{C.4})$$

Utilisant (C.3), on peut résoudre la difficulté de la présence simultanée de $o(\frac{1}{k^2})$ et $o(\mu^\ell - \mu_{k,\ell})$ dans (C.4), ce qui donne

$$\mu^\ell - \mu_{k,\ell} = 2 \frac{\ell^2 \pi}{h_0^3} \sqrt{\frac{c_1}{c_1-1}} \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

Il n'y a plus qu'à revenir aux notations en λ d'où $\lambda_{k,\ell}^{\frac{1}{2}} = k\pi(1 + \frac{\ell^2}{2h_0^2} \frac{1}{k^2} + o(\frac{1}{k^2}))$ tandis que la valeur de $\xi'_{1|\lambda_{k,\ell}}$ est donnée par $\xi'_1 = \sqrt{\frac{c_1}{c_1-1}} k\pi \left(1 - \frac{\ell^2}{2h_0^2(c_1-1)k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right)$.

D Proposition 2.6 : indications

Remarque D.1. Choisir $h_0 = \frac{1}{2}$ n'est pas restrictif. En effet, partons des trois éléments : l'ouvert $\Omega = (0, 1) \times (0, H)$ avec une interface en $x_2 = h$, le coefficient de diffusion c et le couple $(A, D(A))$ introduits dans la Section 1 et posons

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= (0, 1) \times (0, \tilde{H}), \Omega = (0, 1) \times (0, H), 2h\tilde{H} = H, \\ \varphi : \tilde{\Omega} &\mapsto \Omega, \varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} (\tilde{x}_1, 2h\tilde{x}_2) & \text{si } 0 < \tilde{x}_2 < \frac{1}{2}, \\ (\tilde{x}_1, 2h(\tilde{x}_2 - \frac{1}{2}) + h) & \text{si } \frac{1}{2} < \tilde{x}_2 < \tilde{H}, \end{cases} \\ c(x) &= (2h)^2 \tilde{c}(\varphi^{-1}(x)), \\ U : L^2(\tilde{\Omega}, \tilde{c}^{-1}d\tilde{x}) &\mapsto L^2(\Omega, \bar{c}^{-1}dx), (U\tilde{f})(x) = \sqrt{2h}\tilde{f}(\varphi^{-1}(x)), \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

on vérifie que

1. U est une application unitaire entre ces deux espaces d'Hilbert ;
2. l'interface de Ω est ramenée de $x_2 = h$ à $\tilde{x}_2 = \frac{1}{2}$;
3. $U^{-1}AU = \tilde{A}$ où le couple $(\tilde{A}, D(\tilde{A}))$ est défini par $\tilde{A} = -\tilde{c}\Delta$ et $D(\tilde{A}) := \{\tilde{u} \in H_0^1(\tilde{\Omega}); \tilde{A}\tilde{u} \in L^2(\tilde{\Omega})\}$.

Comme $c|_{\tilde{\Omega}_0}$ n'est pas égal à 1 mais à $(2h)^2$ il faut corriger les valeurs propres par ce coefficient multiplicatif mais les fonctions propres sont inchangées.

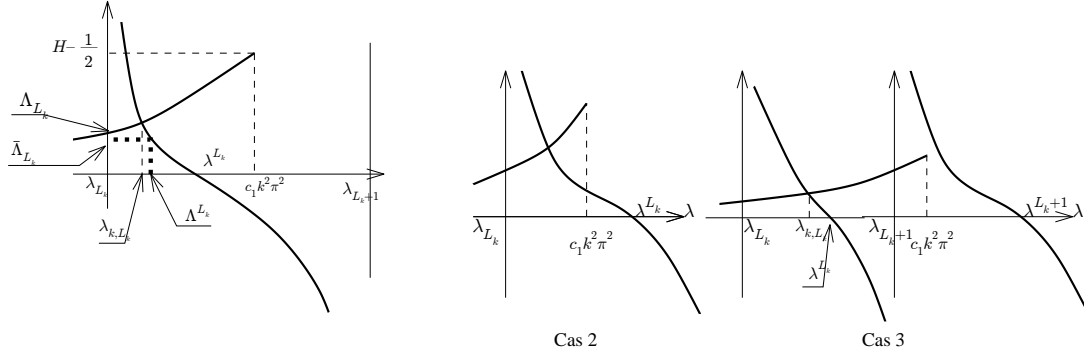


FIGURE 4 – **Cas 1** à gauche, **Cas 2** au milieu, **Cas 3** à droite

Les quantités $\xi'_1(k, \ell)$, $1 \leq \ell \leq \mathcal{L}_k$, sont les indicateurs du taux de décroissance des fonctions propres guidées dans la partie Ω_1 et elles vérifient $\xi'_1(k, 1) > \xi'_1(k, 2) > \dots > \xi'_1(k, \mathcal{L}_k) > 0$.

Remarque D.2. Pour $h = \frac{1}{2}$, $c_1 = 2$, des calculs assez simples aboutissent aux inégalités plus précises suivantes

$$\pi < \xi_0(k, 1) < \xi_0(k, 2) < \dots < \pi(k-2) < \xi_0(k, \mathcal{L}_k) < \pi k$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{k^2 - 1} > \xi'_1(k, 1) > \xi'_1(k, 2) > \dots > \sqrt{2}\pi \sqrt{k-1} > \xi'_1(k, \mathcal{L}_k) > \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{k - \frac{1}{2}}.$$

Dans ce cas particulier, la quantité $\xi'_1(k, \mathcal{L}_k)$ est de l'ordre de \sqrt{k} donc du même ordre que $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}$ mais ce résultat ne semble pas exact dans le cas général, sans l'exclure cependant.

Dans la suite on n'impose plus $c_1 = 2$ mais, comme on suppose $h_0 = \frac{1}{2}$, on a

$$\lambda_\ell = \lambda_\ell(k) = k^2\pi^2 + (2\ell - 1)^2\pi^2, \lambda^\ell = \lambda^\ell(k) := k^2\pi^2 + 4\ell^2\pi^2, 1 \leq \ell \leq \mathcal{L}_k + 1. \quad (\text{D.2})$$

On est confronté à trois possibilités pour situer \mathcal{L}_k (le plus grand entier tel que $\lambda_{k, \mathcal{L}_k} < c_1^2 k^2 \pi^2$), dans les intervalle $I_{k, \ell} = (\lambda_\ell, \lambda_{\ell+1})$:

1. **Cas 1**, $\lambda^{\mathcal{L}_k} \leq c_1 k^2 \pi^2 \leq \lambda_{\mathcal{L}_k+1}$ (représenté à gauche dans la Figure 4) d'où $\mathcal{L}_k \leq \frac{\sqrt{c_1-1}}{2} k \leq \mathcal{L}_k + \frac{1}{2}$;
2. **Cas 2**, i.e. $\lambda_{\mathcal{L}_k} < c_1 k^2 \pi^2 < \lambda^{\mathcal{L}_k}$ et comme les deux courbes ont un point commun dans cet intervalle (centre de la Figure 4) on a $\mathcal{L}_k - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{c_1-1}}{2} k < \mathcal{L}_k$ et $0 < -\frac{\tan(\frac{1}{2}\sqrt{c_1-1}k\pi)}{\sqrt{c_1-1}k\pi} < H - \frac{1}{2}$;
3. **Cas 3**, i.e. $\lambda_{\mathcal{L}_k+1} < c_1 k^2 \pi^2 < \lambda^{\mathcal{L}_k+1}$ et comme ces deux courbes n'ont pas de point commun dans cet intervalle (à droite de la Figure 4) on a $\mathcal{L}_k + \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{c_1-1}}{2} k < \mathcal{L}_k + 1$ et $H - \frac{1}{2} < -\frac{\tan(\frac{1}{2}\sqrt{c_1-1}k\pi)}{\sqrt{c_1-1}k\pi}$.

Remarque D.3. On voit ainsi que les entiers k et \mathcal{L}_k sont comparables ($k \approx \mathcal{L}_k$). De plus, pour le Cas 1 le nombre réel $\frac{\sqrt{c_1-1}}{2} k$ appartient à la première moitié d'un intervalle entre deux entiers, i.e.

$\frac{\sqrt{c_1-1}}{2}k \in [n, n + \frac{1}{2}]$ (intervalle fermé) alors que dans les deux autres cas il est dans la seconde moitié, i.e. $\frac{\sqrt{c_1-1}}{2}k \in (n + \frac{1}{2}, n)$ (intervalle ouvert), les positions relatives de $H - \frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{c_1-1}}{2}k$ distinguant ces deux cas entre eux.

Lemme D.4. On considère la suite des valeurs propres $(\lambda_{k, \mathcal{L}_k})_{k \geq 1}$. Chacun des entiers k et \mathcal{L}_k est comparable à $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{2}}$. De plus,

1. **Cas 1 et 3 :** les quantités $k, \mathcal{L}_k, \lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{2}}$ et $(\xi'_1)^2$ sont comparables entre elles ;
2. **Cas 2 :** les quantités $k, \mathcal{L}_k, \lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{2}}$ sont comparables entre elles et $\frac{(\xi'_1)^2}{\lambda_{k, \mathcal{L}_k}^{\frac{1}{2}}} = O(1)$.

Démonstration. L'encadrement le plus large est $\lambda_{\mathcal{L}_k} < \lambda_{k, \mathcal{L}_k} < \lambda_{\mathcal{L}_k+1}$ et comme k et \mathcal{L}_k sont comparables on en déduit la première phrase de l'énoncé. Nous étudions les trois cas séparément.

Cas 1 $\lambda^{\mathcal{L}_k} \leq c_1 k^2 \pi^2 \leq \lambda_{\mathcal{L}_k+1}$.

Dans cette situation, \mathcal{L}_k est le plus grand entier tel que $\lambda^{\mathcal{L}_k} \leq c_1 k^2 \pi^2$, i.e. $k^2 \pi^2 + 4\mathcal{L}_k^2 \pi^2 \leq c_1 k^2 \pi^2$ d'où $\mathcal{L}_k = E\left(k \frac{\sqrt{c_1-1}}{2}\right)$ ($E(x)$ désigne la partie entière du nombre réel x), i.e. $k \frac{\sqrt{c_1-1}}{2} = \mathcal{L}_k + \alpha$ avec $0 \leq \alpha < 1$. Pour préciser $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}$ nous procédons en deux étapes :

- (a) Commençons par évaluer la valeur $\Lambda_{\mathcal{L}_k}$ de $\lambda \mapsto \frac{1}{\xi'_1} \tanh(\xi'_1(H - \frac{1}{2}))$ en $\lambda = \lambda_{\mathcal{L}_k}$. En ce point on a $(\xi'_1)^2 = \frac{\pi^2}{c_1}((c_1 - 1)k^2 - (2\mathcal{L}_k - 1)^2)$. Comme $(c_1 - 1)k^2 = 4(\mathcal{L}_k + \alpha)^2$, on obtient $\xi'_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{L}_k}{c_1} \left(1 + 2\alpha + \frac{(2\alpha-1)(1+2\alpha)}{4\mathcal{L}_k}\right)}$, d'où

$$\Lambda_{\mathcal{L}_k} = \frac{\tanh\left(2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{L}_k}{c_1} \left(1 + 2\alpha + \frac{(2\alpha-1)(1+2\alpha)}{4\mathcal{L}_k}\right)} \left(H - \frac{1}{2}\right)\right)}{2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{L}_k}{c_1} \left(1 + 2\alpha + \frac{(2\alpha-1)(1+2\alpha)}{4\mathcal{L}_k}\right)}}. \quad (\text{D.3})$$

Pour \mathcal{L}_k grand, donc k grand, la majoration $\Lambda_{\mathcal{L}_k} > \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{c_1}{L}}$ est vraie.

- (b) Nous évaluons la valeur $\bar{\Lambda}$ de la fonction $\lambda \mapsto -\frac{1}{\xi_0} \tan\left(\frac{\xi_0}{2}\right)$ en $\Lambda^{\mathcal{L}_k} = \frac{\lambda_{\mathcal{L}_k} + \lambda^{\mathcal{L}_k}}{2}$, milieu des abscisses $\lambda_{\mathcal{L}_k}$ et $\Lambda^{\mathcal{L}_k}$. On a $\Lambda^{\mathcal{L}_k} = k^2 \pi^2 + (4\mathcal{L}_k^2 - \frac{4\mathcal{L}_k-1}{2})\pi^2$ et la valeur de ξ_0 en ce point est égale à $2\pi \mathcal{L}_k \left(1 - \frac{4\mathcal{L}_k-1}{8\mathcal{L}_k^2}\right)^{1/2}$. Quand $\mathcal{L}_k \rightarrow \infty$, $\frac{\xi_0}{2} \sim \pi \mathcal{L}_k - \frac{\pi}{4}$ et

$$\bar{\Lambda}_{\mathcal{L}_k} = -\frac{\tan\left(\frac{\xi_0}{2}\right)}{\xi_0} \sim \frac{1}{2\pi \mathcal{L}_k} < \Lambda_{\mathcal{L}_k}. \quad (\text{D.4})$$

Cela signifie que la valeur propre $\lambda_{k, \mathcal{L}_k}$ satisfait $\lambda_{\mathcal{L}_k} < \lambda_{k, \mathcal{L}_k} < \Lambda^{\mathcal{L}_k}$ pour k grand, ce qui implique que

$$c_1 (\xi'_1(k, \mathcal{L}_k))^2 > c_1 k^2 \pi^2 - \frac{\lambda_{\mathcal{L}_k} + \lambda^{\mathcal{L}_k}}{2} = c_1 k^2 \pi^2 - \lambda^{\mathcal{L}_k} + \frac{\lambda^{\mathcal{L}_k} - \lambda_{\mathcal{L}_k}}{2} > \frac{\lambda^{\mathcal{L}_k} - \lambda_{\mathcal{L}_k}}{2} = \frac{4\mathcal{L}_k - 1}{2} \pi^2 \rightarrow \infty. \quad (\text{D.5})$$

Comme $\xi'_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{L}_k}{c_1}(1 + 2\alpha + \frac{(2\alpha-1)(1+2\alpha)}{4\mathcal{L}_k})}$, valeur de ξ'_1 en $\lambda_{\mathcal{L}_k}$, est supérieur à la valeur de ξ'_1 en $\lambda_{k,\mathcal{L}_k}$, on déduit de (D.5) que $\xi'_1(k, \mathcal{L}_k)$ est comparable à $\sqrt{\mathcal{L}_k}$ d'où à $\lambda_{k,\mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}$.

Cas 3 $\lambda_{\mathcal{L}_k+1} < c_1 k^2 \pi^2 < \lambda^{\mathcal{L}_k+1}$, sans intersection

Pour ce cas (Figure 4, à droite) il vient

$$(4\mathcal{L}_k+1)\pi^2 = \lambda_{\mathcal{L}_k+1} - \lambda^{\mathcal{L}_k} < c_1(\xi'_1(k, \mathcal{L}_k))^2 = c_1 k^2 \pi^2 - \lambda_{k,\mathcal{L}_k} < \lambda^{\mathcal{L}_k+1} - \lambda_{\mathcal{L}_k} = 3(4\mathcal{L}_k+1)\pi^2. \quad (\text{D.6})$$

ce qui montre que $\xi'_1(k, \mathcal{L}_k)$ est comparable à $\sqrt{\mathcal{L}_k}$ d'où à $\lambda_{k,\mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}$.

Cas 2 $\lambda_{\mathcal{L}_k} < c_1 k^2 \pi^2 < \lambda^{\mathcal{L}_k}$, avec intersection

On peut déjà majorer $\xi'_1(k, \mathcal{L}_k)$. En effet, de $c(\xi'_1)^2 = c_1 k^2 \pi^2 - \lambda_{k,\mathcal{L}_k} < c_1 k^2 \pi^2 - \lambda_{\mathcal{L}_k} = c_1 k^2 \pi^2 - \lambda^{\mathcal{L}_k} + \lambda^{\mathcal{L}_k} - \lambda_{\mathcal{L}_k} < \lambda^{\mathcal{L}_k} - \lambda_{\mathcal{L}_k} = (4\mathcal{L}_k - 1)\pi^2$, on déduit que $\xi'_1 \leq \sqrt{\frac{4\mathcal{L}_k-1}{c_1}}\pi$. Cette dernière quantité est de l'ordre de $\lambda_{k,\mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}$ d'où l'existence d'une constante $C_1 > 0$ telle $0 < \xi'_1(k, \mathcal{L}_k) \leq C_1 \lambda_{k,\mathcal{L}_k}^{\frac{1}{4}}$. \square

Il faudrait améliorer la minoration de ξ'_1 dans le Cas 2. Pour l'instant et pour ce cas, le taux de décroissance dans l'exponentielle de (11) est de l'ordre de $\lambda_{k,\mathcal{L}_k-1}^{\frac{1}{4}}$ pour une suite (k_n) convenable. Les trois situations existent vraiment comme le montre le

Lemme D.5. Si $\frac{\sqrt{c_1-1}}{2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p, q > 0$, les cas 1 et 2 arrivent

- a- Si $\frac{p}{q}$ est un entier alors on est toujours dans le Cas 1.
- b- Si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, la suite $(k_n)_n, k_n = nq$, satisfait le Cas 1.
- c- Si $\frac{p}{q} \leq \frac{1}{2}$, la suite $(k_n)_n$ avec $k_n = nq + 1$ satisfait le Cas 1. De plus, si $\frac{p}{q}$ est assez proche de 0 pour qu'il existe un entier m tel que $\frac{1}{2} < m\frac{p}{q} < 1$, la suite $(k_n)_n$ avec $k_n = nq + m$ satisfait le Cas 2.
- d- Si $\frac{1}{2} < \frac{p}{q} < 1$ la suite $(k_n)_n$ avec $k_n = nq + 1$ satisfait le Cas 2.

Démonstration. La Remarque D.3 rend évidentes les deux premières affirmations. Pour la dernière, il faut en plus remarquer que $-\frac{\tan(\frac{1}{2}\sqrt{c_1-1}k\pi)}{\sqrt{c_1-1}k\pi} = -\frac{q \tan(\frac{p}{q}\pi)}{2pk\pi} \downarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ et donc deviendra inférieure à $H - \frac{1}{2}$. On conclue de même pour la troisième. \square

Prouvons que si $0 < \alpha = \frac{\sqrt{c_1-1}}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il existe une sous-suite d'entiers $(k_n)_n$ pour lesquels on est dans les Cas 2 ou 3. On veut donc montrer que pour tout n il existe un entier $k_n > n$ et un entier L_n tel que $L_n + \frac{1}{2} < k_n \alpha < L_n + 1$. Procédant par contradiction, nous devons montrer que la proposition

$$\text{Il existe } n \text{ tel que, pour tout } k > n, \text{ on n'a pas d'entier } L \text{ vérifiant } L \leq k\alpha \leq L + \frac{1}{2}, \quad (\text{D.7})$$

est fautive. Nous la supposons exacte pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, et prenons $k > n$. Il existe alors un entier $p \geq 1$ pour lequel $L + \frac{1}{2} < (k+p)\alpha < L+1$, ce qui contredit (D.7). Supposons maintenant exact (D.7) pour un $\alpha = \frac{1}{2} + \beta, 0 < \beta < \frac{1}{2}$ et prenons k de la forme $k = 2p, p \in \mathbb{N}$, d'où, pour un certain L , l'inégalité $L \leq p + 2p\beta \leq L + \frac{1}{2}$ qui est impossible si $p \geq \frac{1}{2\beta}$. La généralisation aux autres irrationnels est aisée.

E Détail des calculs pour la zone (I).

Nous considérons une fonction propre associée à une valeur propre λ de la zone (I) : $c_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda < c_2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$. Les conditions de transmission aux interfaces S_0, S_1 s'écrivent

$$\begin{aligned} a_1 \sin(\xi_1 h_0) + b_1 \cos(\xi_1 h_0) &= a_0 \sin(\xi_0 h_0) \\ c_1 a_1 \xi_1 \cos(\xi_1 h_0) - c_1 \xi_1 b_1 \sin(\xi_1 h_0) &= c_0 a_0 \xi_0 \cos(\xi_0 h_0) \\ a_1 \sin(\xi_1 h_1) + b_1 \cos(\xi_1 h_1) &= a_2 \sinh(\xi_2'(H - h_1)) \\ c_1 a_1 \xi_1 \cos(\xi_1 h_1) - c_1 \xi_1 b_1 \sin(\xi_1 h_1) &= -c_2 a_2 \xi_2' \cosh(\xi_2'(H - h_1)), \end{aligned}$$

et la résolution donne pour (a_1, b_1)

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 \frac{c_1 \xi_1 \sin(\xi_0 h_0) \sin(\xi_1 h_0) + c_0 \xi_0 \cos(\xi_0 h_0) \cos(\xi_1 h_0)}{c_1 \xi_1}, \\ b_1 &= -a_0 \frac{c_0 \xi_0 \cos(\xi_0 h_0) \sin(\xi_1 h_0) - c_1 \xi_1 \sin(\xi_0 h_0) \cos(\xi_1 h_0)}{c_1 \xi_1}, \\ a_1^2 + b_1^2 &= a_0^2 \left(\sin^2(\xi_0 h_0) + \left(\frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi_1} \right)^2 \cos^2(\xi_0 h_0) \right), \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

tandis que pour a_2

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_2 \frac{-c_1 \xi_1 \sinh(\xi_2'(H - h_1)) \sin(\xi_1 h_1) + c_2 \xi_2' \cosh(\xi_2'(H - h_1)) \cos(\xi_1 h_1)}{c_1 \xi_1}, \\ b_1 &= a_2 \frac{c_2 \xi_2' \sin(\xi_1 h_1) \cosh(\xi_2'(H - h_1)) + c_1 \xi_1 \sinh(\xi_2'(H - h_1)) \cos(\xi_1 h_1)}{c_1 \xi_1}, \\ a_1^2 + b_1^2 &= a_2^2 \left(\sinh^2(\xi_2'(H - h_1)) + \left(\frac{c_2 \xi_2'}{c_1 \xi_1} \right)^2 \cosh^2(\xi_2'(H - h_1)) \right), \\ a_2^2 &= a_0^2 \frac{\sin^2(\xi_0 h_0) + \left(\frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi_1} \right)^2 \cos^2(\xi_0 h_0)}{\sinh^2(\xi_2'(H - h_1)) + \left(\frac{c_2 \xi_2'}{c_1 \xi_1} \right)^2 \cosh^2(\xi_2'(H - h_1))}. \end{aligned}$$

Cas particulier 1 : $(c_1 + \varepsilon) \frac{k^2 \pi^2}{L^2} < \lambda < (c_2 - \varepsilon) \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$, pour un $\varepsilon > 0$.

On ne considère ainsi que les valeurs propres $\lambda_{k,\ell}$ qui ne s'approchent pas trop près des bords de la zone (I), au sens qui vient d'être précisé, ce qui implique d'ailleurs $\xi_2' \rightarrow \infty$. Avec ce cadre, on a

$$\frac{c_2 \varepsilon}{c_1 (c_2 - c_1 - \varepsilon)} \leq \left(\frac{c_2 \xi_2'}{c_1 \xi_1} \right)^2 \leq \frac{c_2 (c_2 - c_1 - \varepsilon)}{c_1 \varepsilon} \text{ et } \frac{c_0 (c_2 - c_0 - \varepsilon)}{c_1 (c_2 - c_1 - \varepsilon)} \leq \left(\frac{c_0 \xi_0}{c_1 \xi_1} \right)^2 \leq \frac{c_0 (c_1 - c_0 + \varepsilon)}{c_1 \varepsilon}.$$

Ainsi, pour toute suite infinie de valeurs propres distinctes, les quantités $a_1^2 + b_1^2$ et a_0^2 sont comparables d'après (E.1). De plus, il existe deux constantes $M_1, M_2 > 0$, dépendant de ε , telles que

$$M_1 e^{-2\xi_2'(H-h_1)} \leq \left(\frac{a_2}{a_0} \right)^2 \leq M_2 e^{-2\xi_2'(H-h_1)},$$

i.e. $(a_2/a_0)^2 \cong e^{-2\xi'_2(H-h_1)}$ avec la notation introduite à la fin de la section 1, d'où (41) et (42).

Nous considérons maintenant deux autres cas particuliers dont on ne peut pas affirmer pour l'instant qu'ils existent. Pour les étudier, il est utile d'avoir en mémoire les relations suivantes

$$c_2(\xi'_2)^2 + c_1\xi_1^2 = (c_2 - c_1)\frac{k^2\pi^2}{L^2}, \quad c_2(\xi'_2)^2 + c_0\xi_0^2 = (c_2 - c_0)\frac{k^2\pi^2}{L^2}, \quad c_0\xi_0^2 - c_1\xi_1^2 = (c_1 - c_0)\frac{k^2\pi^2}{L^2}, \quad (\text{E.2})$$

et de poser $\text{Num} = \sin^2(\xi_0 h_0) + (\frac{c_0\xi_0}{c_1\xi_1})^2 \cos^2(\xi_0 h_0)$ et $\text{Den} = \sinh^2(\xi'_2(H-h_1)) + (\frac{c_2\xi'_2}{c_1\xi_1})^2 \cosh^2(\xi'_2(H-h_1))$.

Cas particulier 2 : $\xi'_2 \rightarrow 0$.

Alors, (E.2) implique $\xi_1 \rightarrow \infty$ et $(\frac{c_0\xi_0}{c_1\xi_1})^2 \sim \frac{c_0(c_2-c_0)}{c_1(c_2-c_1)}$ d'où $\text{Num} \cong 1$ et $\text{Den} = \sinh^2(\xi'_2(H-h_1)) \left(1 + (\frac{c_2\xi'_2}{c_1\xi_1})^2 \frac{\cosh^2(\xi'_2(H-h_1))}{\sinh^2(\xi'_2(H-h_1))}\right) \sim \sinh^2(\xi'_2(H-h_1))$. Par suite, on a $(\frac{a_2}{a_0})^2 \cong (\xi'_2(H-h_1))^{-2}$ et $a_0^2 \cong a_1^2 + b_1^2$ d'où $\int_{\Omega_2} u^2(x)dx \cong a_0^2(H-h_1)$, $\int_{\Omega_0} u^2(x)dx \cong \frac{a_0^2}{2}h_0$ et $\int_{\Omega_1} u^2(x)dx \cong \frac{a_1^2+b_1^2}{2}h_0$. Sachant que $\frac{c_0\xi_0}{c_1\xi_1} \cong 1$, (E.1) implique $a_1^2 + b_1^2 \cong a_0$, ce qui prouve (43).

Cas particulier 3 : $\xi_1 \rightarrow 0$.

(E.2) implique d'une part $\xi'_2 \rightarrow \infty$ et $(\frac{c_2\xi'_2}{c_1\xi_1})^2 \rightarrow \infty$ et, d'autre part, $\xi_0 \rightarrow \infty$ et $(\frac{c_0\xi_0}{c_2\xi'_2})^2 \sim \frac{c_0(c_1-c_0)}{c_1(c_2-c_1)}$.

Ainsi $\text{Den} \sim (\frac{c_2\xi'_2}{c_1\xi_1})^2 \cosh^2(\xi'_2(H-h_1))$ ce qui donne

$$a_2^2 \sim \frac{a_0^2}{\cosh^2(\xi'_2(H-h_1))} \left((\frac{c_1\xi_1}{c_2\xi'_2})^2 \sin^2(\xi_0 h_0) + (\frac{c_0\xi_0}{c_2\xi'_2})^2 \cos^2(\xi_0 h_0) \right)$$

d'où $a_2^2 \leq a_0^2 \frac{M}{\cosh^2(\xi'_2(H-h_1))}$ pour une constante M .

1. Si $\cos(\xi_0 h_0)$ ne tend pas vers 0 alors $\tan(\xi_0 h_0)$ est bornée. Ainsi, le côté gauche de (30) tendrait vers 0 tandis, que du côté droit, le dénominateur tendrait vers -1 et le numérateur vers $(h_1 - h_0)/c_1$, d'où une contradiction montrant que cette situation ne peut arriver.
2. Si $\cos(\xi_0 h_0) \rightarrow 0$ et $|\frac{\tan(\xi_0 h_0)}{c_0\xi_0}| \rightarrow \infty$, on utilise encore (30) : le membre de gauche tend vers 0 mais le côté droit équivaut à $\frac{1}{c_1\xi_1^2(h_1-h_0) - \frac{c_0\xi_0}{\tan(\xi_0 h_0)}} \rightarrow \infty$ d'où encore une contradiction.
3. Si $\cos(\xi_0 h_0) \rightarrow 0$ et $\frac{\tan(\xi_0 h_0)}{c_0\xi_0} = 0(1)$ on a $\xi_0 \cos(\xi_0 h_0) \rightarrow 0$ et le dénominateur du côté droit de (30) équivaut à -1. Il faut donc que $\frac{\tan(\xi_0 h_0)}{c_0\xi_0} \sim -\frac{h_1-h_0}{c_1}$. Cette éventualité implique $a_1^2 + b_1^2 \sim a_0^2 (\frac{c_0\xi_0}{c_1\xi_1})^2 \cos^2(\xi_0 h_0) \rightarrow \infty$ d'où concentration de la masse dans la zone intermédiaire Ω_1 .

Références

- [1] Agmon S. *Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations*, Mathematical Notes, Princeton University Press & University of Tokyo Press, **29** (1982).
- [2] Arnold D. N., David G., Filoche M., Jerison D. & Mayboroda S. *Localization of eigenfunctions via an effective potential*, CPDE, **44** (2019), n^o11 : 1186-1216. arXiv :1712.02419v4 [math.AP] 3 Oct 2018.

- [3] Cristofol M. *Guided waves in a stratified elastic and locally perturbed space*, Math. Meth. Applied Sciences, **23** (2000), 1257-1286.
- [4] Dermenjian Y.& Guillot J.C. *Scattering of elastic waves in a perturbed isotropic half space with a free boundary. The limiting absorption principle*, Math. Meth. Applied Sciences, **10** (1988), 87-124.
- [5] Donnelly H. & Fefferman C. *Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds*, Inv. Math. **93** (1988), 161-183.
- [6] Epstein P.S. *Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. **16** (1930), 627-637.
- [7] Jerison D. & Lebeau G. *Nodal sets of sums of eigenfunctions in Harmonic analysis and partial differential equations (Chicago, Il. 1996)*, Chicago Lectures in Math., p. 223-239., Univ. Chicago Press, Chicago, Il., 1990.
- [8] Laurent C. & Léautaud M. *Tunneling estimates and approximate controllability for hypoelliptic equations*, accepté par Mem. Amer. Math. Soc., arXiv :1703.10797v1 [math.AP] du 31 mars 2017.
- [9] Lebeau G. & Robbiano L. *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*, CPDE, **20** (1995) :335-356.
- [10] Pedersen M.A. & White De Wayne, *Ray theory of the general Epstein profile*, J. Acoustic Soc. America, **44** (1968), n^o3, 765-786.
- [11] Schulenberger J.R. *Elastic waves in the half space \mathbb{R}_+^2* , J. Differential Equations, **20** (1978), 405-438.
- [12] Wilcox C.H. *Sound propagation in stratified fluids*, Applied Mathematical Sciences, vol. 50, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [13] Zwillinger D. *Handbook of differential equations*, Academic Press, 3rd edition, 1998.