



A posteriori error estimation for the estimation of parameters in a porous media

Ben Ameer, Nizar Karrat, Mohamed Hedi Riahi

► To cite this version:

Ben Ameer, Nizar Karrat, Mohamed Hedi Riahi. A posteriori error estimation for the estimation of parameters in a porous media. CARI 2020 - Colloque Africain sur la Recherche en Informatique et en Mathématiques Appliquées, Oct 2020, Thiès, Sénégal. hal-02926320

HAL Id: hal-02926320

<https://hal.science/hal-02926320>

Submitted on 31 Aug 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Hend Ben Ameer* — Nizar Karrat** — Mohamed Hédi Riahi***

*** ESPRIT-School of Engineering & ENIT-LAMSIN
1, 2 rue André Ampère -
2083 - Pôle Technologique - El Ghazala.
TUNISIE
mohamedhedi.riahi@esprit.tn

ABSTRACT. We identify simultaneously storage and hydraulic transmissivity coefficients in groundwater flow governed by a linear parabolic equation. Both parameters are assumed to be functions piecewise constant in space. The unknowns are the coefficient values as well as the geometry of the zones where these coefficients are constant. This problem is formulated as minimizing a least-square function calculating the difference between measurements and the corresponding quantities computed with the current parameters values. The main point of this work is to construct an adaptive parameterization technique guided by refinement indicators. Using refinement indicators, we build the parameterization iteratively, going from a one zone parametrization to a parametrization with m zones where m is an optimal value to identify. We distinguish the cases where the two parameters have the same parameterization and different parameterizations.

To improve the resolution of the inverse problem, we incorporate a posteriori error estimations defined to refine the computing mesh in an adaptive parametrization algorithm.

MOTS-CLÉS : Problème inverse, estimation de paramètres, coefficient d'emménagement, trans-
missivité hydraulique, indicateur de raffinement, estimation d'erreur a posteriori, adaptation de maillage.

KEYWORDS : Inverse problem, parameter estimation, storage coefficient, hydraulic transmissivity, parameterization, refinement indicators, a posteriori error estimation, mesh adaptation.

1. Introduction

L'hydrogéologie, ou l'étude des nappes phréatiques est une source abondantes de problèmes inverses. En effet il est difficile d'accéder aux couches du sous-sol pour mesurer les propriétés des roches [3]. C'est dans ce but se pose le problème de l'estimation des paramètres hydrogéologiques. Dans ce travail, on s'intéresse à l'estimation du coefficient d'emménagement et de la transmissivité hydraulique dans un écoulement souterrain gouverné par une équation parabolique linéaire. On considère que ces deux paramètres dépendent de la variable espace. De plus en passant d'une zone géologique à une autre, ces deux paramètres présentent des fortes discontinuités à l'interface entre ces zones. Le coefficient d'emménagement et la transmissivité sont alors considérés constants par zones, les frontières de ces zones sont à déterminer aussi bien que les valeurs des paramètres dans les zones. Dans la méthode que nous considérons la zonation est déterminée de manière adaptative: Nous procédons à un raffinement de la zonation au cours des itérations en calculant une quantité qui indique a priori les positions des discontinuités [1, 2]. Le problème inverse étant formulé comme un problème d'optimisation. La procédure d'estimation simultanée du coefficient d'emménagement et de la transmissivité hydraulique fait appel à la résolution des problèmes direct et adjoint dans l'algorithme d'optimisation. Avoir une bonne résolution du problème inverse nécessite avoir moins d'erreurs lors de la résolution des problèmes direct et adjoint. Pour réduire ces erreurs qui sont dues essentiellement à la discrétisation, nous utilisons des indicateurs d'erreur a posteriori. Les estimateurs d'erreur a posteriori, permettent de déterminer explicitement si la solution approchée est une approximation suffisamment précise de la solution exacte [5, 6].

2. Formulation du problème

On considère les équations suivantes qui modélisent un écoulement d'eau dans une nappe captive [3]

$$\begin{aligned} S \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \operatorname{div}(T \nabla \Phi) &= Q && \text{dans } \Omega \times (0, t_f) \\ \Phi &= \Phi_d && \text{dans } \Gamma_D \times (0, t_f) \\ (-T \nabla \Phi) \cdot n &= q_N && \text{dans } \Gamma_N \times (0, t_f) \\ \Phi(0) &= \Phi_0 && \text{dans } \Omega \end{aligned} \quad [1]$$

avec les notations suivantes: Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, la variable de temps t appartient à l'intervalle $(0, t_f)$, S est le coefficient d'emménagement et T est la transmissivité hydraulique, Φ est la hauteur piézométrique et Q un terme source. n est la normale extérieure à Ω , Γ_D et Γ_N sont les parties du bord de Ω où sont vérifiées les conditions de Dirichlet et de Neumann respectivement.

Les équations (1) forment le problème direct où l'inconnue est Φ et les coefficients S et T sont donnés. Nous considérons maintenant le problème inverse où l'on cherche à estimer les paramètres S et T : étant données des mesures de la hauteur piézométriques Φ . Ce problème inverse est posé comme un problème de minimisation d'une fonction objectif de type moindres carrés mesurant l'écart entre les hauteurs piézométriques mesurées et

celles calculées pour un jeu de paramètres S et T .
On introduit donc la fonctionnelle [1, 4],

$$J(S, T) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^m (\Phi(t_i, x_j) - d_{ij}^{obs})^2 \quad [2]$$

où d_{ij}^{obs} dénote les hauteurs piézométriques mesurées à l'instant t_n et au point x_j .
 $\Phi(t_i, x_j)$ hauteurs piézométriques calculer à l'instant t_i et au point x_j .
Estimer S et T revient à résoudre

$$\text{Trouvez } (T^*, S^*) \in U_{ad} \text{ vérifiant } (S^*, T^*) = \arg \min_{(S, T) \in U_{ad}} J(S, T) \quad [3]$$

où $U_{ad} = \{(S, T) : S_{min} \leq S \leq S_{max}, T_{min} \leq T \leq T_{max}\}$ est l'ensemble des paramètres admissibles

3. Paramétrisation adaptative

Pour la résolution numérique du problème direct nous commençons par la discrétisation du domaine spatio-temporelle. Si nous utilisons la même grille de discrétisation pour les paramètres, les paramètres inconnus auront autant de composantes que de mailles de discrétisation. Sachant que le nombre d'observations des hauteurs piézométriques est très réduit, il ne serait pas possible de déterminer le paramètre comme inconnue par maille. Il est essentiel de réduire le nombre d'inconnus. Pour cela on développe une méthode qui minimise le nombre de paramètres à estimer et puisse tenir compte du nombre d'observations disponibles.

Dans le cadre de ce travail nous utilisons la technique de paramétrisation adaptative guidé par des indicateurs de raffinement développée par H. Ben Ameer, G. Chavent et J. Jaffré [1]. L'idée de cette technique est de passer de l'itération i à l'itération $i + 1$ en ajoutant un degré de liberté, sélectionné suivant un indicateur de raffinement de façon que l'optimisation à l'itération $i + 1$ produise une diminution importante de la fonction objectif, relativement à l'itération i [1, 2]. La paramétrisation de l'étape $i + 1$ compte une zone de plus par rapport à la paramétrisation de l'étape i

3.1. Indicateur de raffinement

Pour définir la nouvelle paramétrisation, nous utilisons des indicateurs de raffinements. Ces indicateurs permettent de localiser les discontinuités des paramètres qui n'ont pas encore été pris en considération, une seule, estimée plus importante, est retenue. Nous allons raisonner sur un exemple où le paramètre $p = (S, T)$. La zonation initiale Z_0 est formée par une seule zone rectangulaire $Z_0 = Z_{S_0} = Z_{T_0}$ (voir figure 1) et nous allons procéder à son raffinement en deux nouvelles zonations Z_{S1} , Z_{T1} , une pour chacun des paramètres, en coupant Z_0 en deux sous-zones rectangulaires $Z_{S1,1}$ et $Z_{S1,2}$ pour le coefficient S et deux autres sous-zones rectangulaires éventuellement différentes $Z_{T1,1}$ et $Z_{T1,2}$ pour le coefficient T (voir figure 2).

Au départ le coefficient d'emménagement S et la transmissivité hydraulique T sont supposés constants dans tout le domaine $\Omega = Z_0$.

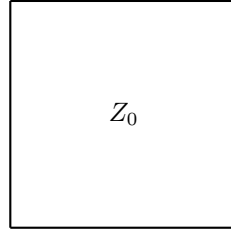


Figure 1. Problème $\mathcal{P}_1$

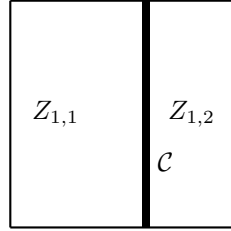


Figure 2. Problème $\mathcal{P}_2$

Le problème d'optimisation (3), avec la paramétrisation correspondant à la zonation $\mathcal{Z}_0$, permet d'estimer le paramètre $m_0 = \begin{pmatrix} S_0 \\ T_0 \end{pmatrix}$. Si on note $J_{\mathcal{Z}_0} = J$ la fonctionnelle à minimiser avec la zonation $\mathcal{Z}_0$ ce problème s'écrit

$$m_0^{opt} = \arg m_0 \in U_{ad} \min J_{\mathcal{Z}_0}(m_0). \quad [4]$$

Supposons maintenant que, pour chacun des coefficients S et T nous subdivisons la zone Z_0 en deux zones rectangulaires $Z_0 = Z_{S1,1} \cup Z_{S1,2} = Z_{T1,1} \cup Z_{T1,2}$ séparées par des coupes C_{S1} et C_{T1} supportées par des arêtes du maillage. On obtient ainsi 2 nouvelles zonations $\mathcal{Z}_{S1} = \{Z_{S1,i}\}_{i=1,2}$ et $\mathcal{Z}_{T1} = \{Z_{T1,i}\}_{i=1,2}$ et on notera $\mathcal{Z}_1 = \{\mathcal{Z}_{S1}, \mathcal{Z}_{T1}\}$. Le nouveau problème d'optimisation (4) a maintenant pour inconnue les valeurs de S dans la zonation $\mathcal{Z}_{S1}$ et les valeurs de T dans la zonation $\mathcal{Z}_{T1}$, soit $m_1 = (S_{1,1}, S_{1,2}, T_{1,1}, T_{1,2})^t$.

Soit $c = \begin{pmatrix} c_S \\ c_T \end{pmatrix}$ le saut des coefficients sur leurs coupes respectives C_{S1} et C_{T1} :

$$c_S = S_{1,1} - S_{1,2}, \quad c_T = T_{1,1} - T_{1,2}.$$

En introduisant $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ces équations s'écrivent sous forme matricielle

$Am_1 = c$. En supposant c connu, estimer le paramètre m_1 revient à résoudre le problème d'optimisation

$$m_1^{opt} = \arg Am_1 = c \min J_{\mathcal{Z}_1}(m_1) \quad [5]$$

où $J_{\mathcal{Z}_1}$ est la nouvelle fonction objectif correspondant à la paramétrisation associée aux nouvelles zonations $\mathcal{Z}_1$.

On remarque maintenant que le problème (4) équivaut au problème (5) avec $c = 0$, et on cherche la variation de la fonction objectif $J_{\mathcal{Z}_1}$ au voisinage de $c = 0$. Pour résoudre le problème (5) on introduit le Lagrangien

$$L_{\mathcal{Z}_1}(m_1, \lambda) = J_{\mathcal{Z}_1}(m_1) + \langle \lambda_{\mathcal{Z}_1}, Am_1 - c \rangle \quad [6]$$

où $\lambda_{\mathcal{Z}_1} = (\lambda)_{S, \mathcal{Z}_1}$

$\lambda_{T, \mathcal{Z}_1}$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $Am_1 = c$. Les conditions d'optimalités pour le problème (5) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{\mathcal{Z}_1}(m_1^{opt}, \lambda_{\mathcal{Z}_1}^{opt})}{\partial m_1} &= \nabla J_{\mathcal{Z}_1}(m_1^{opt}) + A^t \lambda_{\mathcal{Z}_1}^{opt} = 0, \\ \frac{\partial L_{\mathcal{Z}_1}(m_1^{opt}, \lambda_{\mathcal{Z}_1}^{opt})}{\partial \lambda} &= Am_1^{opt} - \lambda_{\mathcal{Z}_1}^{opt} = 0. \end{aligned} \quad [7]$$

Le développement de Taylor de la fonction $J_{\mathcal{Z}_1}$ comme fonction de c au voisinage de $c = 0$ s'écrit,

$$J_{\mathcal{Z}_1}(m_1^{opt})(c) = J_{\mathcal{Z}_1}(m_1^{opt})(0) + \left\langle \nabla_c J_{\mathcal{Z}_1}(m_1^{opt}) \Big|_{c=0}, c \right\rangle + o(\|c\|).$$

Comme $J_{\mathcal{Z}_1}(m_1^{opt}) \Big|_{c=0} = J_0(m_0^{opt})$ on en conclut que

$$\left\langle c, \nabla_c J_{\mathcal{Z}_1}(m_1^{opt}) \Big|_{c=0} \right\rangle = \left\langle c, \lambda_{\mathcal{Z}_1}^{opt} \right\rangle$$

modélise au premier ordre la variation entre $J_{\mathcal{Z}_1}(m_1^{opt})$ et $J_{\mathcal{Z}_0}(m_0^{opt})$ au voisinage de $c = 0$.

$\lambda_{\mathcal{Z}_1}^{opt}$ nous fournit donc deux indicateurs de raffinement $I_S^{\mathcal{Z}_1}, I_T^{\mathcal{Z}_1}$ associés à la zonation $\mathcal{Z}_1$ créée par les coupes C_{S1} et C_{T1} . Sans résoudre le problème d'optimisation à deux zones pour différentes coupes, le calcul de $\lambda_{\mathcal{Z}_1}^{opt}$ nous permet de vérifier si le raffinement proposé par les coupes C_{S1} et C_{T1} va induire une décroissance de la fonction objectif, et d'évaluer cette décroissance au premier ordre.

3.2. Algorithme: APA[2]

On initialise l'algorithme avec la zonation $\mathcal{Z}_0 = \Omega$. Une itération de cet algorithme comprend les étapes suivantes.

1) Etant donnée une zonation $\mathcal{Z}_{k-1} = (\mathcal{Z}_{S,k-1}, \mathcal{Z}_{T,k-1})$ à k zones pour chaque paramètre, minimiser $J_{\mathcal{Z}_{k-1}}$ pour obtenir le paramètre optimal m_k^{opt} .

2) On construit une nouvelle zonation $\tilde{\mathcal{Z}}_k = (\tilde{\mathcal{Z}}_{S,k}, \tilde{\mathcal{Z}}_{T,k})$ à $k + 1$ zones pour chaque paramètre en introduisant une coupe qui divise en deux une zone en effectuant 4 étapes.

a) On considère $\mathcal{C}^{ad}$ l'ensemble des coupes C permettant de construire une zonation candidate $\tilde{\mathcal{Z}}_k^C$ à $k + 1$ zones pour chaque paramètre en divisant par 2 une seule des zones de $\mathcal{Z}_{S,k-1}$ et une seule des zones de $\mathcal{Z}_{T,k-1}$.

b) Pour chaque $C \in \mathcal{C}^{ad}$ on calcule $\lambda_{\tilde{\mathcal{Z}}_k^C}^{opt} = (\lambda_{S, \tilde{\mathcal{Z}}_k^C}^{opt}, \lambda_{T, \tilde{\mathcal{Z}}_k^C}^{opt})$.

c) Pour chaque zonation $\tilde{\mathcal{Z}}_k^C, C \in \mathcal{C}^{ad}$, on calcule un indicateur de raffinement $\tilde{I}_k^C$ à partir des $\lambda_{\tilde{\mathcal{Z}}_k^C}^{opt}$.

d) On sélectionne un ensemble de zonations $\tilde{\mathcal{Z}}_k^C$, $C \in \mathcal{C}_k \subset \mathcal{C}^{ad}$ pour chacune d'entre elles on effectue la minimisation de $J_{\tilde{\mathcal{Z}}_k}$.

3) On met à jour la zonation en choisissant pour $\mathcal{Z}_k$ la zonation $\tilde{\mathcal{Z}}_k^C$ qui produit la plus grande décroissance de la fonction objectif.

4. Indicateur d'erreur a posteriori

Le but de cette section est d'améliorer la résolution du problème inverse d'estimation du coefficient d'emménagement et de la transmissivité hydraulique faite par l'algorithme de paramétrisation adaptative.

Rappelons que le problème inverse d'estimation de S et T est ramené à un problème d'optimisation d'une fonction objectif J . La résolution de ce problème d'optimisation nécessite la résolution du problème direct et de son adjoint. On estime donc qu'une meilleure approximation des solutions de ces deux problèmes permet d'avoir une meilleure estimation des paramètres [5]. Ainsi la combinaison entre l'algorithme de paramétrisation adaptative guidé par les indicateurs de raffinement et l'algorithme d'adaptation de maillage guidé par les estimateurs d'erreur a posteriori [5, 6, 7] permettrait d'avoir plus de précision dans la résolution du problème inverse d'estimation de paramètre et permet d'ajuster les coupes introduites pour raffiner la paramétrisation après le raffinement du maillage de calcul. Nous développons dans ce chapitre des estimateurs d'erreur basés sur la résolution du problème dual et la fonction objectif J pour une meilleure estimation du coefficient d'emménagement et de la transmissivité hydraulique.

4.1. Developpement des estimateur

A une itération donnée de l'algorithme de paramétrisation adaptative on dispose de deux zonations $\mathcal{Z}_S$ et $\mathcal{Z}_T$ associées aux coefficient d'emménagement et la transmissivité hydraulique notées respectivement $S_{\mathcal{Z}_S}$ et $T_{\mathcal{Z}_T}$. on veut établir l'égalité qui mesure l'écart entre la fonction objectif continue et celle discrète:

$$J(S_{\mathcal{Z}}, T_{\mathcal{Z}}) - J(S_{h,\mathcal{Z}}, T_{h,\mathcal{Z}}) = \eta_{h,\mathcal{Z}} + R_h \quad [8]$$

où $\eta_{h,\mathcal{Z}}$ représente l'estimateur d'erreur et R_h est un terme supposé négligeable.

Pour développer (8), nous utilisons une décomposition de l'erreur sous la forme:

$$\begin{aligned} J(S, T, \Phi) - J(S_h, T_h, \Phi_{\tau h}) &= J(S, T, \Phi) - J(S, T, \Phi_{\tau}) + J(S, T, \Phi_{\tau}) - J(S_h^c, T_h^c, \Phi_{\tau h}^c) \\ &+ J(S_h^c, T_h^c, \Phi_{\tau h}^c) - J(S_h, T_h, \Phi_{\tau h}) \end{aligned} \quad [9]$$

avec

$J(S, T, \Phi) - J(S, T, \Phi_{\tau})$ est l'erreur associée à la discretisation en temps.

$J(S, T, \Phi_{\tau}) - J(S_h^c, T_h^c, \Phi_{\tau h}^c)$ est l'erreur associée à la discrétisation en espace.

$J(S_h^c, T_h^c, \Phi_{\tau h}^c) - J(S_h, T_h, \Phi_{\tau h})$ est l'erreur associée à la discretisation en espace et temps.

4.2. Formulation faible du problème direct

Nous allons présenter la formulation faible de notre problème (1). Nous introduisons les notations suivantes:

On note l'espace $H_D^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$ avec son espace dual $H_D^{-1}(\Omega)$ et on définit l'espace

$$\mathcal{X} = \{v \in L^2((0, t_f); H_D^1(\Omega)); \partial_t v \in L^2((0, t_f); H_D^{-1}(\Omega))\}.$$

Les données vérifient les conditions suivantes:

$Q \in L^2((0, t_f), H_D^{-1}(\Omega))$, $\Phi_d \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $q_N \in L^2(\Gamma_N)$ et $\Phi_0 \in H^1(\Omega)$ tels que $\Phi_0 = \Phi_d$ sur Γ_D . De plus Φ_0 satisfait $-T\nabla\Phi_0 \cdot n = \Phi_N$ sur Γ_N .

Pour une fonction donnée $\sigma \in L_+^\infty(\Omega) = \{v \in L^\infty(\Omega); v > 0 \text{ dans } \Omega\}$, on note par $(\cdot, \cdot)_\sigma = (\sigma \cdot, \cdot) = \int_\Omega \sigma uv$ et $\|\cdot\|_\sigma = \|\sqrt{\sigma} \cdot\|_0$ où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire usuel de $L^2(\Omega)$ avec la norme associée $\|\cdot\|_0$, avec $(u, v)_\sigma = (\sigma u, v) = \int_\Omega \sigma uv$.

Ensuite, la formulation faible de Chercher $\Phi \in \mathcal{X} + \Phi_d$

$$\begin{cases} \int_0^{t_f} \{(\partial_t \Phi, v)_S + (\nabla \Phi, \nabla v)_T\} dt = \int_0^{t_f} F(v) dt & \forall v \in \mathcal{X} \\ (\Phi(0), v) = (\Phi_0, v) & \forall v \in H_D^1(\Omega) \end{cases} \quad [10]$$

On considère le problème d'optimisation suivant:

Minimiser $J(S, T, \Phi)$ sous la contrainte de l'équation d'état (10), $(S, T) \in \mathcal{Q}^2$ **(Pc)**

Où $\mathcal{Q} := \mathcal{P}_0((0, t_f), L^\infty(\Omega))$.

Si on note $\tilde{\Phi} = \Phi - \Phi_D$ et $\xi = (\tilde{\Phi}, S, T, \psi) \Rightarrow$ Lagrangien associé **(Pc)** par: $\mathcal{L} : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\xi) = J(S, T, \Phi) + \int_0^{t_f} \{F(\psi) - (\nabla \Phi, \nabla \psi)_T - (\partial_t \Phi, \psi)_S\} dt \\ + (\Phi_0 - \Phi(0), \psi(0))_S, \end{aligned} \quad [11]$$

$\mathcal{W} := \mathcal{X} \times \mathcal{Q}^2 \times \mathcal{X}$.

Les conditions d'optimalités sont données:

$$\mathcal{L}'(\xi; \delta \xi) = 0, \forall \delta \xi = (\delta \tilde{\Phi}, \delta S, \delta T, \delta \psi) \in \mathcal{W}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_\psi(\xi; \delta \psi) &= \int_0^{t_f} \{F(\delta \psi) - (\nabla \Phi, \delta \psi)_T - (\partial_t \Phi, \delta \psi)_S\} dt \\ &+ (\Phi_0 - \Phi(0), \delta \psi(0))_S \\ \mathcal{L}'_\Phi(\xi; \delta \tilde{\Phi}) &= \langle J'_\Phi, \delta \tilde{\Phi} \rangle - \int_0^{t_f} \{(\partial_t(\delta \tilde{\Phi}), \psi)_S + (\nabla \psi, \nabla \delta \tilde{\Phi})_T\} dt \\ &- (\delta \tilde{\Phi}(0), \psi(0))_S \\ \mathcal{L}'_S(\xi; \delta S) &= - \int_0^{t_f} (\partial_t \Phi, \psi)_{\delta S} dt \\ \mathcal{L}'_T(\xi; \delta T) &= - \int_0^{t_f} (\nabla \Phi, \nabla \psi)_{\delta T} dt. \end{aligned} \quad [12]$$

4.3. Discrétisation en espace-temps par la méthode de Galerkin cG(s)dG(r)

Nous utilisons la méthode de Galerkin cG(s)dG(r) [8] pour la discrétisation de notre problème : Pour la discrétisation en espace nous utilisons la méthode de Galerkin continue d'ordre s notée cG(s) et pour la discrétisation en temps nous utilisons la méthode de Galerkin discontinue d'ordre r notée dG(r)

– On considère la discrétisation de l'intervalle $I_f = \cup_{k=1}^{N_\tau} I_k$, $I_k := (t_{k-1}, t_k]$.

– On définit pour $\sigma = S$ ou T le produit scalaire espace-temps:

$$((u, v))_\sigma = \sum_{k=1}^{N_\tau} \int_{I_k} (u, v)_\sigma dt.$$

– On note par $P_r(I_k, H_D^1(\Omega))$ l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à r de I_k à valeurs dans $H_D^1(\Omega)$.

– Pour la discrétisation en temps des problèmes (1), nous introduisons le sous-espace de dimension finie de $L^2(I, H_D^1(\Omega))$ pour $r \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{X}_\tau^r = \{v_\tau \in L^2(I, H_D^1(\Omega)); v_\tau|_{I_k} \in P_r(I_k, H_D^1(\Omega)), k = 1, \dots, N_\tau \text{ et } v_\tau(0) \in L^2(\Omega)\}$$

– Pour toute fonction v_k continue par morceaux, nous introduisons les notations suivantes:

$$v_{k,m}^\pm = \lim_{s \rightarrow 0} v_k(t_m \pm st), \quad [v_k]_m = v_{k,m}^+ - v_{k,m}^-$$

4.3.1. Discrétisation en temps du problème direct

Pour une paramétrisation donnée de (S, T)

Chercher $\Phi_\tau \in \mathcal{X}_\tau^r + \Phi_d$ tel que

$$\begin{aligned} ((\partial_t \Phi_\tau, v))_S + ((\nabla \Phi_\tau, \nabla v))_T &+ \sum_{k=0}^{N_\tau-1} ([\Phi_\tau]_k, v_k^+)_S + (\Phi_{\tau 0}^+, v_0^+)_S \\ &= (\Phi_0, v_0^+)_S + \int_0^{t_f} F(v) dt, \quad \forall v \in \mathcal{X}_\tau^r. \end{aligned} \quad [13]$$

Minimiser $J(S, T, \Phi_\tau)$ sous la contrainte du problème (13), $(S, T) \in \mathcal{Q}^2$

4.3.2. Discrétisation en espace du problème direct

Pour cela, nous choisissons un sous-espace de dimension finie $V_h^s \subset H_D^1(\Omega)$ formé par des éléments finis d'ordre s . Soit $\mathcal{T}_h$ un maillage régulier du domaine Ω et V_h^s est l'espace des éléments finis de l'espace $H_D^1(\Omega)$ définie par:

$$V_h^s := \{v \in C(\Omega) \cap H_D^1(\Omega); v|_K \in P_s(K), K \in \mathcal{T}_h\},$$

Nous définissons l'espace de discrétisation par éléments finis en espace par:

$$\mathcal{X}_{\tau,h}^{r,s} = \{v \in L^2(I, L^2(\Omega)) \mid v|_{I_n} \in P_r(I_n, V_h^{s,n}), n = 1, \dots, N_\tau \text{ et } v(0) \in V_h^{s,0}\}.$$

Par conséquent, la discrétisation par la méthode cG(s)dG(r) du problème (1) s'écrit :

Pour une zonation (S_h^c, T_h^c) , chercher $\Phi_{\tau h} \in \mathcal{X}_{\tau,h}^{r,s} + \Phi_{dh}$ tel que

$$\begin{aligned} ((\partial_t \Phi_{\tau h}, v))_{S_h^c} + ((\nabla \Phi_{\tau h}, \nabla v))_{T_h^c} &+ \sum_{k=0}^{N_\tau-1} ([\Phi_{\tau h}]_k, v_k^+)_{S_h^c} + (\Phi_{\tau h,0}^+, v_0^+)_{S_h^c} \\ &= (\Phi_0, v_0^+)_{S_h^c} + \int_0^{t_f} F(v) dt, \quad \forall v \in \mathcal{X}_{\tau,h}^{r,s}, \end{aligned} \quad [14]$$

Le problème d'optimisation semi-discret par la méthode cG(s)dG(r) est donné par:

$$\text{Minimiser } J(S_h^c, T_h^c, \Phi_{\tau h}) \text{ sous la contrainte (14), } (S_h^c, T_h^c) \in \mathcal{Z}^2 \quad (\mathbf{P}_{\tau h}^c)$$

4.3.3. Discrétisation des paramètres

L'espace de discrétisation de type Galerkin pour les paramètres S et T est:

$$\mathcal{Q}_h = \{\sigma \in \mathcal{Z}; \sigma|_{I_n} \in P_0(I_n, P_0(K)), \forall K \in \mathcal{T}_h^n, n = 1, \dots, N_\tau\}.$$

Les paramètres (S_h^c, T_h^c) sont considérés comme la projection des paramètres (S, T) dans l'espace $\mathcal{Q}_h$.

Finalement la discrétisation en espace-temps du problème direct (1) par la méthode de Galerkin de type cG(s)dG(r) est donnée par:

Pour (S_h, T_h) , chercher $\Phi_{\tau h} \in \mathcal{X}_{\tau, h}^{r, s} + \Phi_{dh}$ tel que

$$\begin{aligned} ((\partial_t \Phi_{\tau h}, v))_{S_h} + ((\nabla \Phi_{\tau h}, \nabla v))_{T_h} &+ \sum_{n=0}^{N_\tau-1} ([\Phi_{\tau h}]_n, v_n^+)_{S_h} + (\Phi_{\tau h, 0}^+, v_0^+)_{S_h} \\ &= (\Phi_0, v_0^+)_{S_h} + \int_0^{t_f} F(v) dt, \quad \forall v \in \mathcal{X}_{\tau, h}^{r, s}, \end{aligned} \quad [15]$$

Le problème d'optimisation discret avec la discrétisation des paramètres dans l'espace $\mathcal{Q}_h$ est donné par:

$$\text{Minimiser } J(S_h, T_h, \Phi_{\tau h}) \text{ sous contrainte (15), } (S_h, T_h) \in \mathcal{Q}_h^2 \quad (\mathbf{P}_{\tau h})$$

5. Analyse d'erreur a posteriori

Lemme 1 [5]

On donne Y un espace de fonctions et L une fonction trois fois gateaux différentiable sur Y . Nous cherchons le point stationnaire y_1 de L dans le sous espace $Y_1 \subseteq Y$, nous cherchons y_1 vérifiant

$$L'(y_1; \delta y_1) = 0 \quad \forall \delta y_1 \in Y_1.$$

Cette équation est approximée par une méthode de Galerkin en utilisant le sous espace $Y_2 \subseteq Y$. Le problème approché est: chercher $y_2 \in Y_2$ qui satisfait

$$L'(y_2; \delta y_2) = 0 \quad \forall \delta y_2 \in Y_2.$$

Si la solution du problème continu y_1 vérifie de plus

$$L'(y_1; y_2) = 0,$$

Alors pour un choix arbitraire $\hat{y}_2 \in Y_2$ l'erreur est représentée par:

$$L(y_1) - L(y_2) = \frac{1}{2} L'(y_2; y_1 - \hat{y}_2) + R,$$

où le terme de reste R est donné en fonction de $e := y_1 - y_2$ par

$$R = \frac{1}{2} \int_0^1 L'''(y_1 + se; e, e, e) s(s-1) ds.$$

La preuve de ce lemme est donnée dans [5]. On appliquant le lemme précédente dans notre cas nous obtenons le théorème suivant:

Théorème 1 Soit $\xi = (\tilde{\Phi}, S, T, \psi)$, $\xi_\tau = (\tilde{\Phi}_\tau, S, T, \psi_\tau)$, $\xi_{\tau h}^c = (\tilde{\Phi}_{\tau h}, S_h^c, T_h^c, \psi_{\tau h})$ et $\xi_{\tau h} = (\tilde{\Phi}_{\tau h}, S_h, T_h, \psi_{\tau h})$ sont respectivement les points stationnaires de $\mathcal{L}$ et $\mathbb{L}$ nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\xi; \delta \xi) &= \mathbb{L}'(\xi; \delta \xi) = 0 & \forall \delta \xi \in \mathcal{W}, \\ \mathbb{L}'(\xi_\tau; \delta \xi_\tau) &= 0 & \forall \delta \xi_\tau \in \mathcal{W}_\tau^r, \\ \mathbb{L}'(\xi_{\tau h}^c; \delta \xi_{\tau h}^c) &= 0 & \forall \delta \xi_{\tau h}^c \in \mathcal{W}_{\tau h}^{c, r, s}, \\ \mathbb{L}'(\xi_{\tau h}; \delta \xi_{\tau h}) &= 0 & \forall \delta \xi_{\tau h} \in \mathcal{W}_{\tau h}^{r, s}. \end{aligned} \quad [16]$$

Alors, les erreurs relatives à la fonction objectif J pour la discrétisation $dG(r)$ en temps et $cG(s)$ en espace sont:

$$\begin{aligned} J(S, T, \Phi) - J(S, T, \Phi_\tau) &= \frac{1}{2} \mathbb{L}'(\xi_\tau) \cdot (\xi - \hat{\xi}_\tau) + \mathcal{R}_\tau, \\ J(S, T, \Phi_\tau) - J(S_h^c, T_h^c, \Phi_{\tau h}^c) &= \frac{1}{2} \mathbb{L}'(\xi_{\tau h}^c) \cdot (\xi_\tau - \hat{\xi}_{\tau h}^c) + \mathcal{R}_h^c, \\ J(S_h^c, T_h^c, \Phi_{\tau h}^c) - J(S_h, T_h, \Phi_{\tau h}) &= \frac{1}{2} \mathbb{L}'(\xi_{\tau h}) \cdot (\xi_{\tau h}^c - \hat{\xi}_{\tau h}) + \mathcal{R}_h. \end{aligned} \quad [17]$$

où $\hat{\xi}_\tau = (\hat{\Phi}_\tau, \hat{S}, \hat{T}, \hat{\psi}_\tau)$, $\hat{\xi}_{\tau h}^c = (\hat{\Phi}_{\tau h}, \hat{S}_h^c, \hat{T}_h^c, \hat{\psi}_{\tau h})$ et $\hat{\xi}_{\tau h} = (\hat{\Phi}_{\tau h}, \hat{S}_h, \hat{T}_h, \hat{\psi}_{\tau h})$ sont choisis arbitrairement et $\mathcal{R}_\tau, \mathcal{R}_h^c$ et $\mathcal{R}_h$ ont les mêmes formes que dans le Lemme pour $L = \mathbb{L}$.

On note par

$$\mathcal{R}_\Phi(\xi)(\cdot) := \mathbb{L}'_\psi(\xi; \cdot) \quad \mathcal{R}_\psi(\xi)(\cdot) := \mathbb{L}'_\Phi(\xi; \cdot) \quad \mathcal{R}_S(\xi)(\cdot) := \mathbb{L}'_S(\xi; \cdot) \quad \mathcal{R}_T(\xi)(\cdot) := \mathbb{L}'_T(\xi; \cdot). \quad [18]$$

Nous pouvons déduire les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} J(S, T, \Phi) - J(S, T, \Phi_\tau) &\approx \frac{1}{2} \{ \mathcal{R}_\Phi(\xi_\tau)(\psi - \hat{\psi}_\tau) + \mathcal{R}_\psi(\xi_\tau)(\tilde{\Phi} - \hat{\Phi}_\tau) \}, \\ J(S, T, \Phi_\tau) - J(S_h^c, T_h^c, \Phi_{\tau h}^c) &\approx \frac{1}{2} \{ \mathcal{R}_\Phi(\xi_{\tau h}^c)(\psi_\tau - \hat{\psi}_{\tau h}) + \mathcal{R}_\psi(\xi_{\tau h}^c)(\tilde{\Phi}_\tau - \hat{\Phi}_{\tau h}) \}, \\ J(S_h^c, T_h^c, \Phi_{\tau h}^c) - J(S_h, T_h, \Phi_{\tau h}) &\approx \frac{1}{2} \{ \mathcal{R}_S(\xi_{\tau h})(S_h^c - \hat{S}_h) + \mathcal{R}_T(\xi_{\tau h})(T_h^c - \hat{T}_h) \}. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que les résidus

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_S(\xi_\tau)(S - \hat{S}) &= \mathcal{R}_T(\xi_\tau)(T - \hat{T}) = \mathcal{R}_S(\xi_{\tau h}^c)(S - \hat{S}_h^c) = \mathcal{R}_T(\xi_{\tau h}^c)(T - \hat{T}_h^c) = \\ \mathcal{R}_\Phi(\xi_{\tau h})(\psi_{\tau h} - \hat{\psi}_{\tau h}) &= \mathcal{R}_\psi(\xi_{\tau h})(\tilde{\Phi}_{\tau h} - \hat{\Phi}_{\tau h}) = 0 \end{aligned}$$

sont identiquement nulles pour les choix suivants:

$$\hat{S} = S, \quad \hat{T} = T, \quad \hat{S}_h^c = S, \quad \hat{T}_h^c = T, \quad \hat{\Phi}_{\tau h} = \tilde{\Phi}_{\tau h}, \quad \hat{\psi}_{\tau h} = \psi_{\tau h}.$$

Aussi nous avons $\mathcal{R}_S(\xi_{\tau h})(S_h^c - \hat{S}_h) = 0$, $\mathcal{R}_T(\xi_{\tau h})(T_h^c - \hat{T}_h) = 0$, pour les choix $\hat{S}_h = S_h^c$ et $\hat{T}_h = T_h^c$.

5.1. Evaluation des estimateurs d'erreur pour la méthode CG (1) dG (0)

On introduit les opérateurs: $\pi_h = \mathcal{I}_h^{(2)} - \text{id}$, $\mathcal{I}_h^{(2)} : V_h^1 \rightarrow V_h^2$ est un opérateur d'interpolation quadratique pour les fonctions constantes par morceaux en espace et id l'opérateur identité. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Phi(\xi_{\tau h})(\pi_h \psi_{\tau h}) &= - \sum_{n=1}^{N_\tau} \tau_n \{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h^n} \{ (r(\Phi_{h,n}), \mathcal{I}_h^{(2)} \psi_{h,n} - \psi_{h,n})_K - \sum_{e \in \partial K} (j(\Phi_{h,n}), \mathcal{I}_h^{(2)} \psi_{h,n} - \psi_{h,n})_e \} \} \\ &\quad - (\Phi_{h,0} - \Phi_{h,0}^0, \mathcal{I}_h^{(2)} \psi_{h,0} - \psi_{h,0})_{S_h} \end{aligned} \quad [19]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\psi(\xi_{\tau h})(\pi_h \Phi_{\tau h}) &= - \sum_{n=1}^{N_\tau} \tau_n \{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h^n} \{ (r(\psi_{h,n}), \mathcal{I}_h^{(2)} \Phi_{h,n} - \Phi_{h,n})_K - \sum_{e \in \partial K} (j(\psi_{h,n}), \mathcal{I}_h^{(2)} \Phi_{h,n} - \Phi_{h,n})_e \} \} \\ &\quad - (\mathcal{I}_h^{(2)} \Phi_{h,N_\tau} - \Phi_{h,N_\tau}, \psi_{h,N_\tau})_{S_h}. \end{aligned} \quad [20]$$

Les résidus pour chaque élément sont définis par :

$$\begin{aligned}\rho_{K,n} &:= \|r(\Phi_{h,n})\|_{0,K} + h_K^{-\frac{1}{2}} \sum_{e \in \partial K} \|j(\Phi_{h,n})\|_{0,e} \cdot \\ \rho_{K,n}^* &:= \|r(\psi_{h,n})\|_{0,K} + h_K^{-\frac{1}{2}} \sum_{e \in \partial K} \|j(\psi_{h,n})\|_{0,e} \cdot\end{aligned}$$

Les poids de chaque élément :

$$\begin{aligned}\omega_{K,n} &:= \|\Phi_{h,n} - \mathcal{I}_h^{(2)} \Phi_{h,n}\|_{0,K} + h_K^{\frac{1}{2}} \sum_{e \in \partial K} \|\Phi_{h,n} - \mathcal{I}_h^{(2)} \Phi_{h,n}\|_{0,e} \\ \omega_{K,n}^* &:= \|\psi_{h,n} - \mathcal{I}_h^{(2)} \psi_{h,n}\|_{0,K} + h_K^{\frac{1}{2}} \sum_{e \in \partial K} \|\psi_{h,n} - \mathcal{I}_h^{(2)} \psi_{h,n}\|_{0,e}\end{aligned}$$

Alors l'expression des estimateurs d'erreur a posteriori

$$\begin{aligned}\eta_\tau &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h^n} \{\rho_{K,n} \omega_{K,n}^* + \rho_{K,n}^* \omega_{K,n}\} \\ \eta_h &:= \sum_{n=1}^{N_\tau} \frac{\tau_n}{2} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h^n} \{\rho_{K,n} \omega_{K,n}^* + \rho_{K,n}^* \omega_{K,n}\} \right\}\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}-r(\Phi_{h,n})|_K &:= S_h \Phi_{h,n} - \Phi_{h,n-1} \tau_n - \text{div}(T_h \text{grad } \Phi_{h,n}) - 1 \tau_n \int_{t_{n-1}}^{t_n} Q(t) dt \\ -j(\Phi_{h,n})|_e &:= \begin{cases} \frac{1}{2} [(T_h \text{grad } \Phi_{h,n}) \cdot n_e] & e \subset \\ (T_h \text{grad } \Phi_{h,n}) \cdot n_e - q_N & e \subset N \end{cases} \\ -r(\psi_{h,n})|_K &:= \begin{cases} S_h \psi_{h,n} - \psi_{h,n-1} \tau_n + \text{div}(T_h \text{grad } \psi_{h,n}) - \frac{1}{\tau_n |K|} R_i^{LS}(\Phi_{h,n}) & (x_j, t_i) \in K \times \bar{I}_n \\ S_h \psi_{h,n} - \psi_{h,n-1} \tau_n + \text{div}(T_h \text{grad } \psi_{h,n}) & \text{sinon} \end{cases} \\ -j(\psi_{h,n})|_e &:= \begin{cases} \frac{1}{2} [(T_h \text{grad } \psi_{h,n}) \cdot n_e] & e \subset \\ (T_h \text{grad } \psi_{h,n}) \cdot n_e & e \subset N \end{cases}\end{aligned}$$

5.2. Algorithme d'adaptation de maillage

5.2.1. Stratégie d'adaptation de maillage

Pour la stratégie d'adaptation de maillage on a:

– Pour une itération n pour laquelle η_h^n satisfait

$$\eta_h^n \geq \frac{\eta_h}{N_\tau}, \quad [21]$$

– Générer une nouvelle grille $\Rightarrow$ divisant un élément K de maillage $\mathcal{T}_h^n$:

$$\eta_K^n \geq \frac{\eta_h^n}{|\mathcal{T}_h^n|} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^n, \quad [22]$$

où η_K^n désigne l'estimateur d'erreur local définissant la somme de η_h^n et $|\mathcal{T}_h^n|$ est le cardinal de $\mathcal{T}_h^n$.

– Nous faisons un raffinement récursive pour garder la conformité du maillages.

5.2.2. Algorithme [6]

1) Choisir $\mathcal{T}_h^0$ + une paramétrisation (S_h, T_h) (seule zone $Z_1 = \Omega$) + une discrétisation Φ_h^0 de Φ .

- 2) Initialiser $k = 0$.
- Faire** tant que les conditions d'arrêt ne sont pas satisfaites.
 - 3) Pour le maillage courant $\{\mathcal{T}_{h,k}^n, n = 1, \dots, N_\tau\}$, chercher (S_h^k, T_h^k) avec une zonation Z_p^k (p -zones) (APA).
 - 4) Evaluer l'estimateur a posteriori $\{\eta_h^n, n = 1, \dots, N_\tau\}$ et selectinner n tel que η_h^n satisfait (21).
 - 5) Obtenir la nouveau maillage $\mathcal{T}_{h,k+1}^n$ en utilisant (22).
 - 6) Minimiser J avec le maillage $\mathcal{T}_{h,k+1}^n$ de l'iteration n et la paramétrisation Z_p^k obtenue par APA.
 - 7) Si $J^{k+1} < J^k$ et $\|\nabla J^{k+1}\| < \|\nabla J^k\|$
 $k = k + 1$ et retour à 3.
 - 8) Sinon retour à 4.
- Fin de faire.**

6. Tests numériques

Nous allons considérer un exemple synthétique. Nous considérons une nappe carrée de coté égal à 1. Les frontières latérales sont des frontières imperméables. Sur le bord du haut, la hauteur piézométrique est imposée constante égal à $\Phi_d = 2$. Sur le bord du bas la hauteur piézométrique est imposée égale à $\Phi_d = 1$. On impose dans toute la nappe un terme source constant dans tout les points du domaine $Q = 10$ (voir figure 3). Pour la discrétisation en temps nous considérons $\Delta t = 0.2$ avec $t_f = 1$.

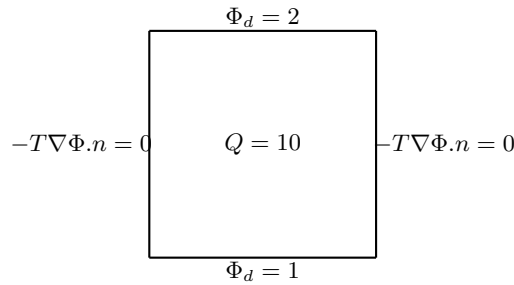


Figure 3. Schéma de la nappe synthétique

Dans cet exemple les paramétrisations exates de la transmissivité hydraulique T et du coefficient d'emmagasinement sont celles représentées dans la figure (4):

$$T = \begin{cases} 25 & (x \leq 0.7) \times (y \leq 0.7) & \text{zone 1} \\ 5 & \text{sinon} & \text{zone 2} \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} 5 & (x \leq 0.7) \times (y \leq 0.7) & \text{zone 1} \\ 1 & \text{sinon} & \text{zone 2} \end{cases}$$

Dans ce test nous avons diminué le nombre des observations. La figure (5) représente à gauche le maillage utilisé pour calculer les observations et à droite les points d'observation dans le domaine.



Figure 4. Coefficients exacts S (à gauche) et T (à droite).

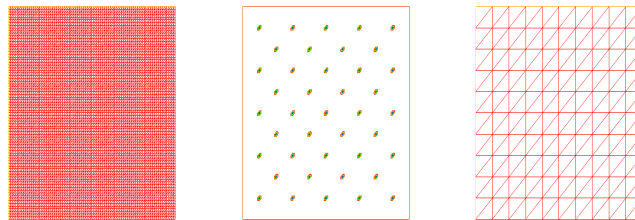


Figure 5. Maillage pour calculer les observations (gauche), positions des points d'observation (milieu) et maillage pour résoudre le problème direct (droite).

6.1. Estimation de S et T sans adaptation de maillage

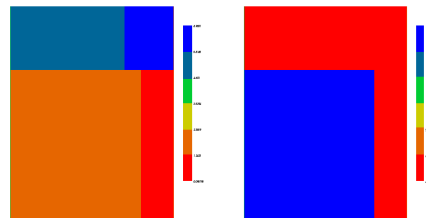


Figure 6. Coefficients calculés à l'itération 7 S à gauche et T à droite.

Dans ce cas test nous n'avons pas identifié la zonation cherchée pour les deux paramètres S et T après 6 itérations. A l'itération 7 de l'algorithme la fonction objectif ne varie pas et les valeurs des indicateurs de raffinement sont petites. L'algorithme ne converge pas vers la paramétrisation exacte.

6.2. Estimation de S et T avec adaptation de maillage

On refait le même test en ajoutant une étape d'adaptation du maillage. Nous avons retrouvé la zonation cherchée et les valeurs cherchées pour la transmissivité hydraulique par contre pour le coefficient d'emmagasinement nous n'avons pas retrouvé les bonnes valeurs. La combinaison d'un processus d'adaptation de maillage avec la paramétrisation adaptative permet à l'algorithme de paramétrisation adaptative de retrouver la paramétri-

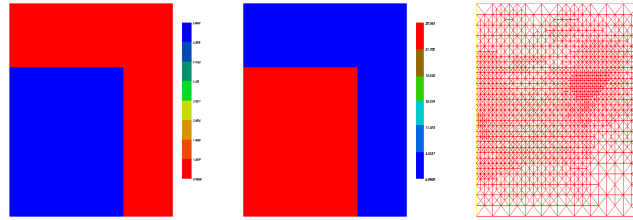


Figure 7. *Itération 6: Coefficients S (à gauche) et T (au milieu) et maillage retenu (à droite).*
sation cherchée des deux paramètres. Les raffinements de maillage sont situés autour des interfaces de discontinuités des paramètres. Ces raffinements de maillage permettent de retrouver les discontinuités des deux paramètres.

7. Conclusion

Dans ce travail nous avons développé des indicateurs de raffinement vectorielles et des indicateurs d'erreur a posteriori relatifs à la fonction objectif considérée. Nous avons mis en oeuvre un algorithme qui intègre une technique d'adaptation de maillage basée sur le calcul d'estimateurs d'erreurs a posteriori dans l'algorithme de paramétrisation adaptative. Nous avons testé cet algorithme sur un cas d'une nappe synthétique. Les résultats obtenus sont considérés satisfaisants.

8. Bibliographie

- [1] BEN AMEUR, HEND AND CHAVENT, GUY AND JAFFRÉ, JÉRÔME, « Refinement and coarsening indicators for adaptive parametrization: application to the estimation of hydraulic transmissivities », *Inverse Problems*, vol. 18, n° 3, 2002.
- [2] BEN AMEUR, HEND AND CLÉMENT, FRANÇOIS AND WEIS, PIERRE AND CHAVENT, GUY, « The multidimensional refinement indicators algorithm for optimal parameterization », *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, vol. 16, n° 2, 2008.
- [3] SUN, NE-ZHENG, « Inverse problems in groundwater modeling », *Kluwer Academic Publishers*, n° 1994.
- [4] LIU, JUN, « A multiresolution method for distributed parameter estimation », *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 14, n° 2, 1993.
- [5] BECKER, R AND BRAACK, M AND MEIDNER, D AND RANNACHER, R AND VEXLER, B, « Adaptive finite element methods for PDE-constrained optimal control problems », *Reactive flows, diffusion and transport*, Springer, vol. , n° , 2007.
- [6] BEN AMEUR, HEND AND KHARRAT, NIZAR AND MGHAZLI, ZOUBIDA, « Incorporating a posteriori error estimators in an adaptive parametrization algorithm », *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, vol. 24, n° 3, 2016.
- [7] BECKER, ROLAND AND VEXLER, BORIS, « A posteriori error estimation for finite element discretization of parameter identification problems », *Numerische Mathematik*, vol. 96, n° 3, 2004.

- [8] ERIKSSON, KENNETH AND JOHNSON, CLAES, « Adaptive finite element methods for parabolic problems I: A linear model problem », *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 28, n° 1, 1991.