



HAL
open science

Construire une représentation

Patrick Flandrin

► **To cite this version:**

| Patrick Flandrin. Construire une représentation. 2020. hal-02918739

HAL Id: hal-02918739

<https://hal.science/hal-02918739>

Preprint submitted on 21 Aug 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Construire une représentation

Patrick Flandrin

Univ Lyon, Ens de Lyon, Univ Claude Bernard,
CNRS, Laboratoire de Physique, F-69342 Lyon, France

*“Il faut qu’il y ait, dans les choses représentées,
le murmure insistant de la ressemblance.
Il faut qu’il y ait, dans la représentation,
le repli toujours possible de l’imagination.” [1]*

1 Introduction

Parler de façon très générale de *représentation* serait un objectif trop ambitieux, qui dépasserait largement les limites de ce court texte. De manière plus focalisée, il s’agit ici de souligner en quoi et comment toute représentation résulte d’une *construction* s’articulant tout autant sur des idées de modélisation et des connaissances *a priori* (“ce que l’on sait”) que sur des objectifs et des angles de description privilégiés (“ce que l’on veut”). Là encore, le programme est vaste, et on choisira de soutenir le propos en s’appuyant sur des problématiques en lien direct avec des questions de science et de technologie, qu’il s’agisse de signaux acoustiques, de cartographie, de perspective ou d’apprentissage automatique.

2 Les signaux comme exemple

2.1 Dessiner les sons

Si l’on s’en réfère à l’acceptation du terme “représentation” comme “action de faire voir” [2], comment représenter un son, comment le “faire voir” ?

L’approche la plus directe est de s’en remettre à une description *graphique* du phénomène physique qui en est à l’origine. Qu’il s’agisse de parole, de musique ou de bruits, il y a son quand il y a mise en vibration d’un volume d’air, et la perception qu’on en a résulte de la transmission de cette vibration au tympan de notre oreille interne. On peut en faire un enregistrement par tout récepteur qui est semblablement sensible aux variations de la pression acoustique : c’est ce que fait un microphone, dont le signal électrique de sortie reproduit les fluctuations du signal acoustique qu’il reçoit. Dans le cas idéalement simplifié d’un diapason donnant le la_3 , les lois de la mécanique et de l’acoustique nous instruisent que les fluctuations de pression sont parfaitement périodiques et varient sinusoidalement, avec une fréquence de 440 Hertz (soit 440 oscillations par seconde). La représentation graphique de ce signal a l’allure du tracé donné en Figure 1-(a), reflétant une périodicité de $1/440 = 2.3$ millisecondes. Moyennant que l’on accepte le modèle d’une variation sinusoidale, il suffit ainsi, pour reproduire ce tracé, de connaître deux paramètres : d’une part, la fréquence fixant

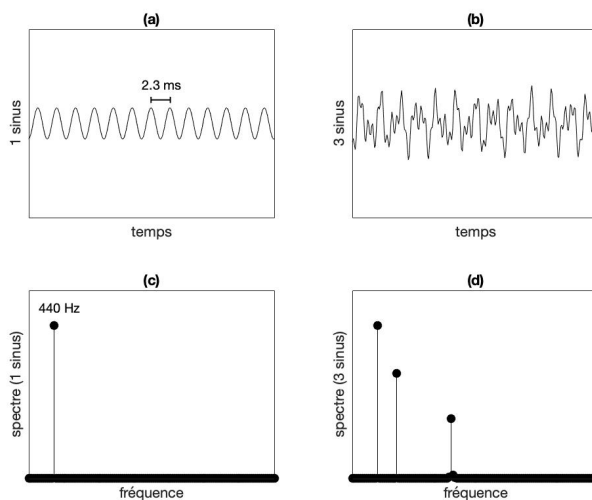


FIGURE 1 – (a) signal formé d’une sinusoïde ; (b) signal formé de 3 sinusoïdes ; (c) spectre du signal (a) ; (d) spectre du signal (b).

la périodicité et, d’autre part, l’amplitude. On peut donc convenir que la donnée de ces deux paramètres offre une représentation alternative au tracé de la forme d’onde, celle-là fournissant en outre un résumé beaucoup plus compact de l’information utile que l’ensemble des valeurs reportées sur le graphique de celle-ci.

De façon opérationnelle, la mise en œuvre de ce point de vue nécessite d’identifier dans un signal temporel les paramètres le caractérisant. C’est exactement l’objet de ce que l’on appelle “analyse de Fourier”. Cette technique, inventée au début du XIX^{ème} siècle par le mathématicien et physicien Joseph Fourier (1768-1830)¹, consiste à comparer un signal à toutes les oscillations sinusoïdales possibles et à mesurer pour chacune d’elle un “degré de ressemblance”. Il en résulte un *spectre*, fonction de la fréquence, qui prend une valeur d’autant plus grande que la fréquence considérée est constitutive du signal et de plus grande amplitude. Ainsi, la Figure 1 fournit en (c) le spectre de Fourier du signal tracé en (a) : celui-ci étant une sinusoïde “pure” de périodicité 2.3 ms, son spectre n’est constitué que d’une seule valeur non nulle, pour la fréquence $1/0.0023 = 440$ Hz.

Au-delà du cas démonstratif de la sinusoïde pure, la représentation de Fourier prend évidemment tout son sens dans les situations plus complexes où plusieurs fréquences sont en jeu. Il en est ainsi avec l’autre exemple de la Figure 1, où la vue du seul tracé du signal (b) rend difficile la reconnaissance de sa structure, alors que sa représentation spectrale (d) fait clairement apparaître qu’il est en fait constitué de la superposition de 3 sinusoïdes.

Il importe de noter que les deux descriptions, temporelle ou fréquentielle, sont *équivalentes* au sens où l’on peut passer de l’une à l’autre sans perdre d’information. Ce sont deux représentations complémentaires, l’une ne présentant

1. cf. [3] pour le texte fondateur et [4] pour une présentation moderne.

d'avantage éventuel sur l'autre qu'aux yeux de l'utilisateur à qui elles "donnent à voir" de façon différente le même contenu informationnel.

2.2 Ce que l'on sait et ce que l'on veut

Si l'on a volontairement détaillé le cas particulier des signaux acoustiques et leur analyse "à la Fourier", c'était pour donner un cadre concret à l'idée qu'une grandeur physique donnée puisse admettre plus d'une représentation, sans nécessairement que l'une soit préférable aux autres à tous égards. Cette première approche permet en outre de mettre en avant deux points importants.

Il y a d'abord, dans le mot même de représentation, l'idée de *re*-représentation, et donc celle qu'il s'agit de présenter sous un jour différent une même quantité, mais sans altération ni perte d'information. En termes mathématiques, on parle de "correspondance bi-univoque" ou d'"invertibilité", au sens où tout changement de représentation doit pouvoir suivre un chemin inverse et ramener à la forme initiale. (Il en est bien ainsi pour la représentation de Fourier, la transformation directe \mathbf{F} admettant une transformation inverse \mathbf{F}^{-1} telle que $\mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F} = \mathbf{I}$, en notant \circ la composition et \mathbf{I} l'identité.) Il y a ensuite l'idée qu'une "bonne" représentation doit être immédiatement parlante et reposer de préférence sur une description compacte. Il est donc naturel d'associer à son choix un principe de *parcimonie* visant à minimiser le nombre de ses descripteurs, appliquant le principe très général de "rasoir" énoncé par le théologien anglais Guillaume d'Ockham (1285-1347) [5] : "*Pluralitas non est ponenda sine necessitate*"². (Dès lors que le signal analysé est pluri-harmonique, la représentation de Fourier est naturellement parcimonieuse.)

On voit ainsi se mettre en place, dans le choix d'une représentation, un jeu de contraintes complémentaires que l'on peut qualifier d'*a priori* et d'*a posteriori*. *A priori* s'il y a appui sur une modélisation, car toute connaissance sur l'origine et la nature supposées de l'objet analysé peut guider dans le choix des descripteurs, faisant un pas vers une parcimonie garantie. *A posteriori* si, au contraire, la représentation choisie offre un caractère suffisant de neutralité pour permettre aux données de se structurer dans l'espace de représentation, guidant cette fois vers une modélisation possible qui, en retour, est susceptible d'ouvrir la voie à une représentation plus adaptée.

Entre ce que l'on sait (le modèle) et ce que l'on veut (l'information jugée utile), une représentation est bel et bien une construction.

3 Représentation et construction

3.1 Fourier 2.0

Pour éclairer davantage le dernier point évoqué, restons encore dans le cadre de la représentation des sons. On a parlé du diapason et de la bonne adéquation de la représentation de Fourier pour rendre compte de façon directe de la fréquence pure qu'il émet, et de l'extension de cette adéquation au cas où plusieurs fréquences pures seraient émises simultanément. On pourrait en fait aller encore plus loin car une des forces de l'analyse de Fourier est de garantir que "tout si-

2. "Les multiples ne doivent pas être utilisés sans nécessité."

gnal”³ peut se représenter comme une superposition convenable de fréquences pures⁴, lesquelles sont par définition éternelles. Si ceci est mathématiquement possible, on conçoit que l’interprétabilité de la représentation n’est pas nécessairement au rendez-vous, et ceci d’autant moins que la nature même du signal considéré s’éloigne davantage d’une modélisation objective comme superposition de fréquences pures. Ainsi, si l’on considère comme signal à représenter la sortie d’un générateur de fréquence qui, initialement débranché, n’est mis en route qu’un bref instant avant d’être débranché de nouveau, on est en présence d’un signal transitoire qui est objectivement nul avant et après le branchement. Il n’en est pas moins vrai que ce signal admet une représentation de Fourier combinant des fréquences éternelles dont la “conspiration” garantit, par effets de compensation, de fournir des valeurs nulles sur les intervalles de temps où le générateur est éteint. Ceci n’est possible que grâce à l’utilisation d’un très grand nombre (en fait, une infinité) de fréquences et à une orchestration subtile de leur agencement mutuel, mais au prix à la fois de l’interprétabilité et de la parcimonie.

Cette limitation, qui met en regard représentation mathématique et représentation physique, fait écho à la question évoquée précédemment de la modélisation, qu’elle soit *a priori* ou *a posteriori*. Elle a été soulevée plus d’une fois et l’on peut reproduire à cet égard deux citations particulièrement éclairantes. La première est due au physicien Louis de Broglie qui, en 1966, énonçait de façon lapidaire [6, p. 62] :

“La considération exclusive des ondes monochromatiques conduit à une [autre] conception qui me paraît erronée. Si l’on considère une grandeur qui peut être représentée à la manière de Fourier, par une superposition de composantes monochromatiques, c’est la superposition qui a un sens physique, et non pas les composantes de Fourier considérées isolément.”

La seconde remonte à une vingtaine d’années auparavant, lorsque le mathématicien Jean Ville écrivait en 1948 [7] :

“Si nous considérons en effet un morceau [de musique] contenant plusieurs mesures (ce qui est le moins qu’on puisse demander) et qu’une note, la par exemple, figure une fois dans le morceau, l’analyse [de Fourier] nous présentera la fréquence correspondante avec une certaine amplitude et une certaine phase, sans localiser le la dans le temps. Or, il est évident qu’au cours du morceau il est des instants où l’on n’entend pas le la. La représentation est néanmoins mathématiquement correcte, parce que les phases des notes voisines du la sont agencées de manière à détruire cette note par interférence lorsqu’on ne l’entend pas et à la renforcer, également par interférence, lorsqu’on l’entend; mais s’il y a dans cette conception une habileté qui honore l’analyse mathématique, il ne faut pas se dissimuler qu’il y a aussi une défiguration de la réalité : en effet, quand on n’entend pas le la, la raison véritable est que le la n’est pas émis.”

3. Il y a bien sûr des restrictions techniques à cette universalité, mais ce sont des détails dont l’exposition compliquerait inutilement l’argument de principe donné ici. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux ouvrages spécialisés, comme par exemple [4].

4. On parle aussi d’“ondes monochromatiques”, en référence à la lumière.

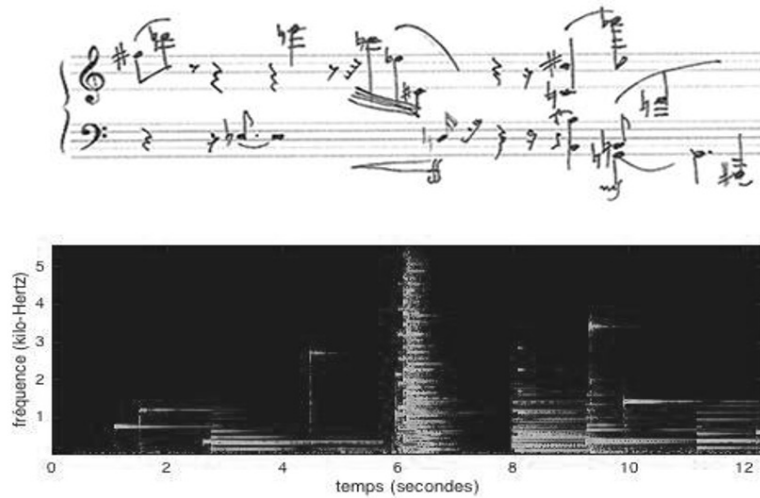


FIGURE 2 – Diagramme du haut : partition manuscrite d’un morceau de musique; Diagramme du bas : carte temps-fréquence (partition mathématique) du signal acoustique correspondant.

Ce que dit en filigrane cette citation, c’est qu’un morceau de musique n’est pas fait de fréquences pures, d’ondes monochromatiques éternelles, mais de notes. Or, qu’est-ce qu’une note, si ce n’est bien une fréquence (sa hauteur), mais une fréquence qui n’est tenue que pendant seulement un intervalle de temps fini (celui d’une noire, d’une blanche, d’une double croche, etc.)? La clé d’une meilleure représentation est ainsi à chercher du côté de ce qui est d’usage courant lorsqu’il s’agit d’écrire de la musique. Ceci se fait classiquement à l’aide d’une portée et procède d’une écriture graphique se déployant selon deux axes : un axe horizontal offrant la possibilité de marquer des événements en termes d’instant d’occurrence et de durées; un axe vertical permettant de situer la hauteur d’un son en l’accrochant aux barreaux de l’échelle que forme la portée (cf. le diagramme du haut de la Figure 2).

Il s’agit ainsi de substituer à la représentation de Fourier, qui est fonction de la seule fréquence et ne vit que sur un axe, une représentation *conjointe* incluant aussi une dimension temporelle, cette dernière étant l’abscisse d’un plan dont l’ordonnée est la fréquence : il s’agit en fait d’écrire la *partition mathématique* d’un signal.

Le principe étant énoncé, il reste à le mettre en œuvre mathématiquement, ce qui peut être fait de multiples façons et a été l’objet de travaux non moins multiples depuis essentiellement le milieu du XX^{ème} siècle (cf. par exemple [8] ou [9]). Sans entrer dans les détails, on se contentera de dire que les approches “post-Fourier” (car il n’y en a pas qu’une) consistent à s’approcher au plus près de ce à quoi devrait ressembler une note d’un point de vue mathématique, en gardant l’idée de fréquence et en lui rajoutant celle d’une localisation temporelle.

Pour naturelle et séduisante qu’elle soit, cette idée est néanmoins confrontée à une limitation tant physique que mathématique, à savoir le “principe d’in-

certitude” selon lequel une localisation parfaite et simultanée en temps et en fréquence n’est pas possible⁵. En lieu et place des ondes monochromatiques éternelles de Fourier (parfaitement localisées en fréquence et infiniment étendues en temps), ce sont donc des “atomes temps-fréquence” occupant une aire minimale dans le plan qui sont utilisés comme éléments de base pour la représentation [11]. Tout comme des atomes matériels, ils peuvent se combiner pour former des “molécules temps-fréquence”, par exemple des notes au sens physique du terme, en agrégeant plusieurs atomes.

Parce que la représentation est construite sur de tels grains d’information qui sont élémentaires au sens où ils occupent chacun le plus petit domaine possible dans le plan, elle offre au signal analysé la possibilité de se structurer en s’adaptant à une occupation globale qui devient de fait parcimonieuse. Il faut noter que cette approche permet en outre de fournir une aide à la modélisation dans la mesure où, les grains d’information étant les plus compacts possibles à la fois en temps et en fréquence, leur organisation en une structure cohérente éventuelle devient une propriété émergente de la représentation.

À l’image de la partition dont l’écriture peut être à la fois *prescription* (composition abstraite d’un morceau dont les sons sont à venir) et *transcription* (report sur le papier de sons effectivement émis), le paradigme “temps-fréquence” offre un langage naturel pour analyser, transformer ou synthétiser des sons. Il s’appuie pour cela sur une visualisation graphique qui, au-delà de simples courbes, prend la forme de véritables *cartes* dont le codage (en fausses couleurs) traduit le poids énergétique de chaque fréquence à chaque instant : il en est ainsi dans le diagramme du bas de la Figure 2 où l’échelle de gris s’échelonne du noir pour les plus faibles valeurs au blanc pour les plus grandes.

Il est important de noter que la carte représentée en Figure 2 résulte d’un choix particulier de transformation mathématique. Il s’agit en l’occurrence de ce que l’on appelle un *spectrogramme*, construit sur une analyse de Fourier locale, mais d’autres choix seraient possibles : transformation en ondelettes, représentation de Wigner, etc. [9]. Comme on l’a dit précédemment, il n’y a pas de façon unique d’associer une représentation à un signal, chacune ayant des avantages et des limitations qu’il convient de prendre en compte en termes de modélisation (“ce que l’on sait”, qui peut guider dans le choix des descripteurs à privilégier) et d’objectif (“ce que l’on veut”, qui pourra favoriser dans la représentation une information particulière que l’on souhaite mettre en exergue). Chaque représentation envisageable est un regard particulier que l’on porte sur un même objet, et c’est le plus souvent de la multiplicité de points de vue individuels que résulte une meilleure intelligibilité globale. En ce sens, la non-unicité doit être vue comme une richesse de diversité et non comme un point négatif.

Pour en revenir à l’idée de “carte”, on peut alors filer la métaphore plus avant en voyant les zones claires du spectrogramme de la Figure 2 comme définissant des îlots (d’autant plus montagneux qu’ils sont plus clairs) émergeant d’un “océan” de faibles valeurs, dessinant *de facto* un véritable paysage sonore. Cette remarque nous amène à élargir la réflexion sur la notion de représentation, conduite jusqu’ici dans le cadre physico-mathématique des signaux acoustiques, pour aborder des questions de représentation de l’espace, par le biais d’abord de la cartographie et ensuite de la perspective.

5. On associe généralement ce “principe” au nom du physicien Werner Heisenberg (1901-1976, Prix Nobel de Physique en 1932) qui, le premier, l’a formulé en 1927 dans le contexte de la mécanique quantique alors naissante [10].

3.2 Cartographies

Il ne s’agit pas ici de discuter de la cartographie en général, mais seulement de faire quelques remarques qui étayent le propos précédent, en mettant en particulier l’accent sur le pourquoi d’une représentation (“ce que l’on veut”) et comment y parvenir⁶.

Si l’on s’en tient à l’aspect topographique, l’objet d’une carte est de transcrire sur une surface plane un ensemble de données (continents, pays, etc.) qui vivent naturellement sur une sphère. Il s’agit donc d’une question de *projection*, sachant qu’une sphère ne peut être “aplatie” sans déformation. Il convient donc de faire un choix de représentation, ce qui a donné lieu à de multiples propositions au fil des siècles. Nous n’en retiendrons ici que deux en guise d’illustration.

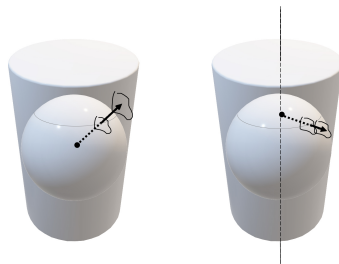


FIGURE 3 – Projections de Mercator (à gauche) et de Gall-Peters (à droite).

La première représentation résulte de la “projection de Mercator”, proposée en 1569 par le géographe flamand Gerardus Mercator (1512-1594) au vu de l’intérêt qu’elle présente pour la navigation maritime. D’un point de vue mathématique, la projection de Mercator est une projection cylindrique tangente à l’équateur terrestre qui possède la propriété d’être “conforme”, c’est-à-dire de conserver les angles. Il en résulte une efficacité d’usage pour les marins dans la mesure où elle permet un report direct, sur la carte, des angles tels qu’ils peuvent être mesurés à bord des navires à l’aide des instruments de navigation. Une ligne droite sur une carte de Mercator correspond ainsi à une trajectoire d’azimut constant (c’est-à-dire coupant les méridiens sous un angle fixé), ce que l’on appelle une “loxodromie”. Pour utile qu’elle soit en termes de routes maritimes, la projection de Mercator présente cependant le défaut de déformer les rapports de surface entre les différentes zones du globe, avec un sur-dimensionnement d’autant plus grand que l’on se rapproche des pôles. Pour prendre un exemple, l’Alaska apparaît ainsi plus étendu que le Brésil qui occupe pourtant 5 fois sa surface. En combinant les ingrédients de la tangence à l’équateur du cylindre de projection et du choix du méridien de Greenwich comme méridien de référence, la représentation de Mercator donne *de facto* une place centrale et particulièrement avantageuse à l’Europe, dont il est facile de donner une lecture géo-politique.

Le souci de respecter les surfaces plutôt que les angles a conduit à des propositions alternatives à celle de Mercator. Ceci est possible en restant dans le

6. On pourra se reporter à [12], [13] ou [14] pour des précisions et des considérations plus générales sur les quelques points esquissés dans la suite.

cadre d'une projection cylindrique tangente à l'équateur, mais en rendant celle-ci "équivalente" (et non plus conforme) par projection radiale sur le cylindre. Cette approche a une histoire qui remonte en fait à Archimède [15] avant que le principe n'en soit redécouvert en 1867 par James Gall (1808-1895) puis, après une nouvelle période d'oubli, réintroduit en 1967 par Arno Peters (1916-2002), valant à cette représentation d'être le plus souvent évoquée comme "projection de Gall-Peters", voire simplement "projection de Peters". L'avantage majeur de cette représentation est de rendre justice, en termes d'importance sur la surface du globe, à des zones sous-dimensionnées dans la carte de Mercator. C'est tout particulièrement le cas pour le continent africain et les régions para-équatoriales, et les "cartes de Peters" ont en ce sens connu un succès de diffusion dans un but pédagogique de réduction des inégalités culturelles de perception auxquelles les cartes classiques ont pu nous habituer, et de rééquilibrage des importances relatives des différentes parties du globe.



FIGURE 4 – Joaquín Torres García, *América invertida*, 1936.

On peut même aller plus loin en remarquant qu'un degré de liberté reste encore à utiliser pour les projections cylindriques, qu'elles soient de Mercator, de Peters ou autres, à savoir l'orientation. Là encore, l'usage nous a habitués à placer le Sud en bas d'une carte et le Nord en haut, suggérant implicitement une forme d'ascendance ou, à tout le moins, d'intérêt privilégié de celui-ci par rapport à celui-là. D'autres cartes sont évidemment possibles, dont l'orientation inversée (Nord en bas et Sud en haut), le centrage sur un méridien autre que celui de Greenwich et/ou la conservation des aires "à la Peters" nous conduisent à réapprendre à voir le monde suivant une grille de lecture *a priori* contre-intuitive mais pourtant tout autant légitime (cf. Figure 4 pour un exemple).

Tout comme pour les cartes temps-fréquence évoquées précédemment, il n'y

a pas de solution unique, également satisfaisante à tous égards, pour dresser une carte géographique. Même en se restreignant au seul aspect spatial supposé rendre compte d'une réalité purement topographique⁷, plusieurs cartes planaires sont possibles, apportant chacune des points de vue différents et guidant vers des lectures complémentaires. Elles n'en gardent pas moins une limitation intrinsèque qui est précisément liée à leur nature de *planisphère*, traditionnellement et historiquement indissociable de celle du support matériel associé. Des portulans médiévaux aux cartes routières du 20ème siècle, les cartes ont longtemps été des objets de papier déployant leur surface plane sans intermédiaire, mais la situation a changé depuis notre entrée (encore récente) dans une ère de l'information où des écrans de toute nature servent de plus en plus d'intermédiation. Suivre un trajet se fait aujourd'hui de façon courante en consultant une application comme Google Maps sur un *smartphone* ou un moniteur GPS, et il y a là plus qu'un changement de support par rapport à la carte Michelin qu'on déplaçait et repliait. L'échelle y est tout d'abord ajustable à volonté, et l'orientation elle-même peut être centrée sur le lecteur et facilement asservie à son mouvement. Lorsque l'on "descend" l'autoroute A6 de Paris à Lyon, ce n'est plus ni la carte "Nord en haut" que l'on retourne si l'on veut que le paysage de droite se "lise" sur la partie droite de la carte, ni le regard qui opère un tel retournement de façon purement mentale, mais une représentation à chaque instant nouvelle que l'on peut afficher, orientée par rapport à soi, variable, adaptée et également lisible tout le temps.

Une rupture de même nature avec la cartographie traditionnelle s'opère sur un écran d'ordinateur lorsqu'on part en exploration virtuelle avec un outil comme Google Earth. Planisphère d'un genre nouveau, l'écran joue bien un rôle de plan de représentation bidimensionnel, mais il apparaît aussi comme plan de projection pour une représentation virtuelle tridimensionnelle s'apparentant à celle que percevrait un observateur survolant la Terre. Un long *zoom* arrière nous renvoie à la vision de notre planète bleue dans ce qu'elle a de tout à fait sphérique, alors qu'un *zoom* avant nous offre une vue à vol d'oiseau plus ou moins rapprochée, à notre discrétion, tout comme est libre l'orientation que nous choisissons, qui n'est en rien fixée *a priori*. La carte n'est plus une représentation figée, construite selon des choix extérieurs qui en imposeraient la lecture mais, d'une certaine façon, c'est une ré-appropriation par le lecteur lui-même des données préalables à son écriture et une potentialité presque infinie de représentations possibles.

L'inscription d'une carte sur un plan 2D, comme projection d'objets intrinsèquement 3D, nous amène à cette autre problématique de représentation de l'espace qui est la perspective.

3.3 Perspectives

La perspective est, par définition [2], un "mode de représentation sur une surface plane des objets à trois dimensions". Parler de "la" perspective est cependant réducteur car, comme pour tout mode de représentation, il y a plus d'une possibilité. Ceci peut sembler contre-intuitif, tant l'usage nous a habitués à une forme si particulière de perspective qu'on pourrait la croire allant de soi — au

7. On pourrait considérer d'autres façons, indirectes, de représenter un territoire, comme par exemple en remplaçant les distances par des temps de trajets [13].

point qu’il est fait parfois référence à l’existence d’une perspective “naturelle” à laquelle toute perspective “artificielle” devrait se conformer —, mais un examen un tant soit peu approfondi montre qu’il n’en est rien et que, si unicité il y a, c’est relativement à un ensemble de contraintes et de pré-supposés implicites, voire de considérations symboliques.



FIGURE 5 – “Perspectographe” de Dürer (à gauche) et *camera obscura* (à droite).

Lorsqu’on parle de perspective sans autre forme de précision, on se réfère usuellement au schéma “linéaire” qui a été pour la première fois théorisé vers 1435 [16] par Leon Battista Alberti (1404-1472), après que Filippo Brunelleschi (1377-1446) en ait esquissé vingt ans plus tôt les principes d’un point de vue plus empirique d’architecte et en préfiguration de la *géométrie projective* que Girard Desargues (1591-1661) développera deux siècles plus tard. Le principe de la perspective linéaire est, pour un point d’observation donné, de construire la “pyramide visuelle” prenant celui-ci comme sommet et s’appuyant sur les points de la scène à imager qui en constituent la base. L’intersection de cette pyramide avec un plan situé entre l’observateur et la scène fournit alors la représentation perspective de cette dernière : c’est le principe que matérialise le *perspectographe* d’Albrecht Dürer (1471-1528) ; en prolongeant la pyramide visuelle au-delà du point d’observation, c’est aussi — à une inversion près — celui de la *camera obscura*, ancêtre de la chambre photographique (Figure 5).

Faire usage d’un perspectographe permet en quelque sorte de “découper” la projection d’une scène, mais ce n’est pas une construction à proprement parler. Le grand mérite d’Alberti a précisément été d’établir et de codifier les règles explicites permettant une telle construction *a priori*, avec un résultat qui s’identifie *a posteriori* à ce que serait la projection si elle était effectivement matérialisée. C’est lui qui le premier a formalisé une méthode (*costruzione legittima*) pour le rendu perspectif d’un plan horizontal carrelé, en introduisant les notions de ligne d’horizon, de point de fuite et de point de distance⁸.

Par la parenté étroite qui la lie à l’expérience photographique qui nous est familière, la perspective “albertienne” linéaire peut sembler présenter un caractère *objectif*. En tant que représentation destinée à rendre compte sur un plan d’une réalité tridimensionnelle telle que nous sommes censés la percevoir, elle présente néanmoins un certain nombre de caractéristiques qui en limitent la portée. Il y a tout d’abord l’ouverture du champ représenté qui doit être faible pour ne pas induire de déformations inacceptables pour les zones périphériques

8. La formulation moderne, légère variante par rapport à celle d’Alberti mais équivalente dans son résultat, a été popularisée par Viator en 1505 [17] et est restée la référence jusqu’à aujourd’hui.

s'écartant par trop de l'axe central de vision⁹. Il y a ensuite la restriction d'une vision monoculaire et qui plus est, statique, ne correspondant pas à la réalité de notre expérience visuelle. Il y a enfin, par la construction projective qui la sous-tend, l'impossibilité d'une inversion de la représentation.



FIGURE 6 – Variante de l'expérience de Brunelleschi (photographie de l'auteur, 2008).

Non-invertibilité et illusion — Commençons par ce dernier point d'une inversion impossible, auquel n'échapperont pas vraiment les formes alternatives de perspectives qui seront évoquées plus loin. Dès ses origines, la perspective a été étroitement liée à l'architecture et un de ses ressorts a précisément été de donner à voir l'apparence d'une scène urbaine, réelle ou fictive [18] : réelle comme dans l'expérience conduite par Brunelleschi vers 1435, où la vue qu'il avait tracée du baptistère de Florence était offerte au regard d'un spectateur en la superposant au reflet de l'édifice dans un miroir pour justifier de la véracité de son procédé (cf. Figure 6 pour une variante) ; fictive dans la scénographie (en particulier, du théâtre à l'italienne) où il s'agit de créer l'illusion d'une organisation spatiale et de sa profondeur. Car il s'agit bien d'illusion, l'intersection de la pyramide visuelle par le plan de représentation pouvant matérialiser par homothétie et/ou anamorphose une infinité de scènes différentes, chacune s'appuyant sur les mêmes "rayons" convergeant sur l'œil de l'observateur [19, Chap. VIII].

Cette non-unicité a été mise à profit à de nombreuses reprises dans des réalisations architecturales ou artistiques, avec comme but explicite la création d'un *trompe-l'œil* : on peut citer par exemple la galerie du palais Spada [20] à Rome, construite par Francesco Borromini (1599-1667), dont le raccourcissement "accélééré" des colonnes donne l'illusion d'une longueur quatre fois plus grande qu'elle n'est en réalité ; "Les ambassadeurs" [21], tableau peint en 1533 par Hans Holbein le Jeune (1497-1543) et dans lequel c'est par un changement de point de vue, en regardant la toile de façon presque rasante, que l'observateur peut voir apparaître un crâne humain dans la forme oblongue que la vision frontale per-

9. Ceci rejoint d'une certaine façon la critique adressée à la carte de Mercator pour sa représentation déformée des régions s'écartant significativement de l'équateur.

çoit ; ou encore une grande part de l’œuvre de l’artiste contemporain Georges Rousse [22], lequel intervient dans des lieux souvent abandonnés pour y créer un espace pictural anamorphosé dont l’illusion est rendue par l’observation (et la photographie) depuis un point précis. Il y a dans chacun de ces cas une forme de jeu d’interprétation entre la réalité et l’observation qui en est faite, l’observateur se faisant “ockhamien” en choisissant, parmi l’infinité des possibles, la lecture la plus simple qui puisse s’accorder à la fois à ce qui est perçu dans une situation particulière et à l’expérience qu’il a pu acquérir et accumuler par apprentissage dans des situations supposées similaires (par exemple, dès lors qu’on identifie une colonnade, il semble naturel d’attendre que les colonnes soient physiquement de même hauteur, etc.).

Dans les représentations artistiques ou s’y apparentant, il y a de façon centrale un pré-supposé implicite de ressemblance, en lien avec la perception. Il est bon cependant de remarquer que le but de la représentation peut s’écarter d’un souci d’illusion au profit d’une description pragmatique destinée à rendre compte d’une réalité tridimensionnelle. C’est évidemment le cas dans le dessin technique, préalable par exemple à la conception et l’usinage d’une pièce mécanique. L’usage est alors de recourir à une perspective axonométrique dite “cavalière”, dans laquelle les différents plans d’une scène sont rendus de façon égale, simplement décalés les uns par rapport aux autres en fonction de leur éloignement, mais sans point de fuite et sans raccourcissement lié à la profondeur. Si un tel système d’écriture graphique permet une mesure immédiate d’information spatiale en termes de coordonnées cartésiennes, la lecture qu’il faut en faire nécessite un apprentissage spécifique s’affranchissant de l’expérience visuelle courante. Ce n’en est pas moins une représentation perspective admissible, garantissant qui plus est l’exigence d’invertibilité !

Perspectives curvilignes et au-delà — On a mentionné le caractère monoculaire de la perspective linéaire mais, même en restant dans ce cadre restrictif, il est possible de s’affranchir du cadre albertien en remarquant que, dans la vision humaine, la surface rétinienne sur laquelle se projette une scène au fond de notre œil est une calotte sphérique et non un plan. Ceci a ouvert tout un pan de recherches et d’élaborations plus ou moins formalisées, destinées par exemple à mieux intégrer la latéralité de la vision dans des schémas cylindriques, en privilégiant la seule dimension horizontale pour une vue panoramique (Figure 7), voire sphériques complets, à la manière d’un objectif photographique de type *fisheye*. La manifestation la plus visible en est, dans la représentation, l’incurvation des droites de l’espace réel, en image de la réflexion qui se produirait sur une surface courbe.

Pour interroger la profondeur d’une scène, la perspective linéaire s’en rapporte à des *distances*, alors même que la centralité du regard tout comme la courbure de la rétine vue comme surface de projection suggère de leur préférer des *angles*. En ce qui concerne la vision, c’est en fait une idée ancienne, que l’on peut faire remonter à Euclide dans son *Optique* et qui a ensuite été reprise par exemple par Léonard de Vinci [24]. Le passage de la vision à la représentation ouvre alors la porte à des propositions de perspective “angulaire” qui, tout en contrevenant aux effets attendus de la perspective linéaire, procéderaient néanmoins d’un principe cohérent de construction et non d’une maîtrise imparfaite de la représentation de l’espace. Un des promoteurs les plus visibles de cette thèse est Erwin Panofsky (1892-1968), qui en fait une exposition détaillée dans

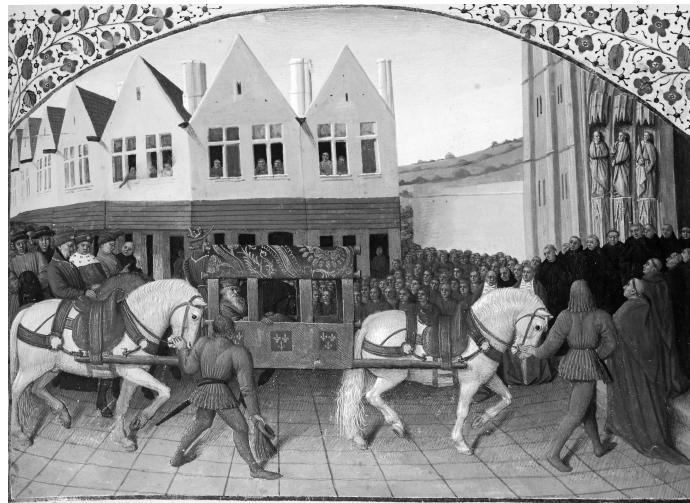


FIGURE 7 – Jean Fouquet, “Entrée de l’empereur Charles IV à Saint-Denis” (vers 1455–1460), *Grandes Chroniques de France*, BnF, Département des manuscrits français 6465, fol. 442 (Livre de Charles V), Paris.

La Perspective comme Forme Symbolique, l’ouvrage de référence qu’il a initialement publié dans les années 20 [23]. Un des points de départ en est l’observation, dans des peintures ou illustrations de l’Antiquité et du Moyen-Âge (donc dans des périodes pré-albertiennes), de représentations d’espaces supposés parallélépipédiques auxquels il est facile d’associer des lignes de fuite. En se livrant à cet exercice sur diverses images, Panofsky remarque une convergence qui ne se fait pas en un point unique, comme on l’attendrait d’une perspective linéaire centrale, mais qui se répartit sur un *axe de fuite*, aboutissant à ce qu’il qualifie de schéma “en arête de poisson”. Ceci résulterait pour lui d’une construction complexe faite de reports sur un plan de segments associés à des mesures angulaires [23, Fig. 12]. Pour ingénieuse qu’elle soit, cette explication ne convainc cependant pas totalement. Il y a d’abord le choix du *corpus* qui n’est statistiquement pas significatif au regard de la majorité des œuvres qui, contemporaines de celles retenues, ne s’inscrivent pas dans le schéma proposé. Il y a ensuite l’absence totale de trace d’un substrat théorique un tant soit peu formalisé sur lequel se serait appuyée la pratique picturale. Comme souligné cependant dans [25], il existe des traités du Moyen-Âge pouvant offrir une alternative à la proposition de Panofsky. Ceux-ci en effet, contrairement aux approches de la Renaissance supposant unanimement un point de vue monoculaire, mettent en avant de façon répétée l’importance de la vision binoculaire. Il en résulte une explication à la fois plus simple et plus satisfaisante que celle de Panofsky : celle-ci consiste à associer deux points de vue à point de fuite unique chacun, prolongeant de fait les lignes de fuite identifiées par Panofsky au-delà de l’axe de leur intersection (Figure 8). C’est dans ce schéma le caractère binoculaire qui l’emporte, sans le recours nécessaire à la construction complexe d’une perspective angulaire qu’exigerait l’hypothèse monoculaire.

Derrière l’idée de représentation attachée à une vision binoculaire peut aussi se cacher celle plus générale de rendre compte de façon simultanée de plusieurs

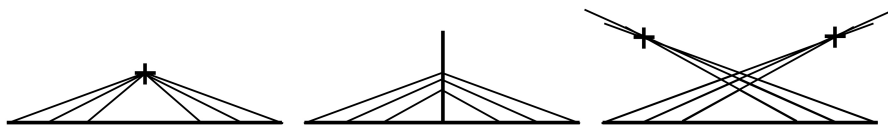


FIGURE 8 – Schémas comparés des lignes de fuite de trois constructions — Gauche : perspective “linéaire” (à la Alberti, point de fuite unique). Milieu : “arête de poisson” (à la Panofsky, axe de fuite). Droite : perspective “binoculaire” (à la Raynaud, deux points de fuite).

points de vue complémentaires. La peinture occidentale du XXème siècle en fournit un des exemples les plus marquants avec le mouvement cubiste et les portraits “face-profil” de Pablo Picasso. Du point de vue plus spécifique de la perspective, des approches conduisant à des résultats de même nature sont à chercher du côté de l’Orient et de l’art chrétien orthodoxe. Ainsi, il est fréquent d’observer dans les icônes, russes ou byzantines, des formes de perspective “inversée” offrant l’illusion d’un point de fuite qui se situerait *en avant* du plan du tableau (Figure 9). Sans que des règles précises soient édictées pour arriver à ce résultat, on peut le voir comme une tentative de conciliation, à partir de deux points de vue distincts, d’éléments qu’un point de vue unique ne pourrait faire apparaître simultanément. Phénoménologiquement, ceci fait écho à une remarque que l’on trouve déjà chez Euclide : l’observation frontale très rapprochée d’une sphère permet d’en voir plus de la moitié de la surface, précisément parce que notre vision est binoculaire.

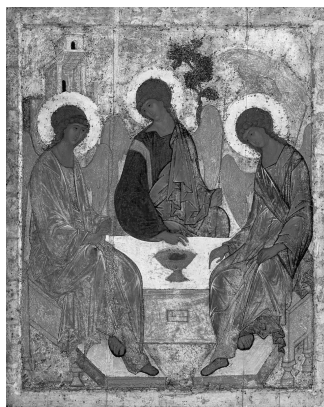


FIGURE 9 – Andreï Roublev, *Icône de la Trinité* (entre 1410 et 1427).

Au-delà de cette considération géométrique, la conséquence d’une telle “inversion” de la perspective est de hiérarchiser les plans d’une façon apparemment paradoxale, les éléments en apparaissant d’autant plus grands qu’ils sont plus éloignés. Il y a là — dans l’ordonnancement qui part de l’observateur sur Terre pour s’élever jusqu’au Ciel — une dimension spirituelle que revendique Pavel Florensky dans l’analyse qu’il fait en 1919 de la perspective inversée, affirmant

explicitement que “la perspective dans les tableaux n’est pas [...] une propriété des choses, [...] mais seulement un procédé d’expression symbolique” [26]. Le travail de Florensky précède celui de Panofsky de quelques années, mais ils procèdent tous deux d’un même souci de considérer la perspective dans un cadre élargi qui dépasse celui d’une simple technique. Il ne s’agit pas d’exclure la science du discours (Florensky était d’ailleurs mathématicien) mais de l’envisager dans son rapport à une vision spirituelle en termes de symboles, s’apparentant en cela au concept de “forme symbolique” qu’Ernst Cassirer développera dans les années 20 [27] et sur lequel s’appuiera explicitement Panofsky [23].

Il est intéressant de noter que le recours à la perspective inversée en tant qu’accès à une forme de “vérité” de la réalité par opposition à la reproduction de son apparence a trouvé une expression nouvelle dans l’art contemporain avec David Hockney, dont le discours théorique s’appuie nommément sur Florensky [28].

Espace et temps — La référence à l’œuvre de David Hockney [29] — en particulier à partir des années 80 — permet en fait d’aller plus loin dans la réflexion sur la représentation de l’espace et sa construction. Il y a d’une part un grand nombre de dessins et de peintures de cet artiste représentant en “perspective inversée” une chaise vue de face, sujet décliné de diverses façons mais choisi à répétition comme exemple didactique et programmatique [30]. Il y a ensuite des variantes du même sujet réalisées par collages photographiques, assemblant en une image composite une multitude de clichés pris (le plus souvent au Polaroid) d’autant de points de vue différents “tournant” autour de la scène. Appliqué plus généralement à des scènes d’intérieur ou à des paysages, ce procédé ajoute *de facto* à la représentation spatiale une dimension temporelle, qui est celle de la succession des instants où sont prélevés les fragments d’espace dont l’assemblage ultérieur fournira l’image globale. Il en résulte ainsi la construction d’une représentation spatio-temporelle dépassant le caractère *statique* (que l’on avait évoqué dans les limitations *a priori* du schéma albertien) au profit d’une appréhension *dynamique* de l’espace qui est plus en accord avec la pratique effective de notre observation visuelle. Pour un résultat final donné (l’image composite obtenue au terme de l’assemblage de ses éléments), on peut y voir aussi, par la trace implicite de son organisation temporelle, une ré-appropriation via la photographie de l’élaboration d’une représentation par le dessin ou la peinture. Dans ces dernières techniques en effet, la construction de l’ensemble ne peut se faire que de façon progressive, par ajouts successifs d’éléments d’intérêt. Ceci contraste évidemment avec le procédé photographique (qu’il soit analogique ou numérique) où c’est l’ensemble du champ observé qui est imagé en bloc, la seule temporalité restante étant celle du temps de pose dont l’effet est simplement intégrateur, sans spécificité de relations spatio-temporelles. La pratique du photo-collage à la Hockney se rapproche en ce sens du geste du dessinateur ou du peintre, chaque imagerie jouant le rôle d’une “touche” dans la composition finale. Elle garde en outre le caractère de captation de la réalité propre à la photographie, mais de manière locale.

4 Représentation et émergence

4.1 Attributs

La représentation d'une grandeur (comme une image ou un signal associé à un phénomène physique) n'est en général pas une fin en soi. Son choix permet une intelligibilité de l'observation et, par les caractéristiques qu'elle met en évidence et quantifie, elle peut ouvrir la porte à des tâches ultérieures de *post-traitement* telles que de la reconnaissance ou de la classification ("ce que l'on veut"), sur la base d'*attributs* supposés pertinents et bien choisis ("ce que l'on sait").

Prenons un exemple : celui de l'analyse et de la reconnaissance de la parole. Si l'on s'en tient aux approches "classiques", telles qu'elles ont été élaborées et raffinées depuis plus d'un demi-siècle, le cœur en est basé sur de la *modélisation*, et ceci à plusieurs niveaux [31]. Il y a dans un premier temps ce qui concerne la physique de la phonation et de l'audition, grâce à laquelle on peut ramener l'analyse du signal acoustique de parole à l'estimation, sur de courtes fenêtres temporelles, de paramètres servant d'attributs caractéristiques du son élémentaire émis et/ou du locuteur. Il y a ensuite la façon dont ces unités élémentaires se structurent dans le temps et ce sont là des modèles encodant des aspects syntaxiques et, plus généralement, linguistiques, qui sont mis à contribution.

En ce qui concerne le premier point, la modélisation du signal acoustique prend appui sur un schéma général dans lequel un signal observé est vu comme la sortie d'un système excité par une entrée convenable. Il est clair qu'il existe une infinité de couples entrée/système susceptibles de fournir le même résultat de sortie, et le choix est fait le plus souvent de mettre l'essentiel de la complexité du signal dans le système, en se gardant une entrée "neutre" et peu informationnelle. Dans le cas de la parole, la physiologie nous donne naturellement les clés d'une telle modélisation. En effet, la vibration acoustique d'un signal émis résulte d'une mise en résonance particulière de la cavité bucco-nasale (c'est elle le système), excitée par le flux d'air venant des poumons (qui constitue l'entrée). De façon très simplifiée, ce flux d'air peut prendre deux formes suivant que le son émis est "voisé" ou "non-voisé". Aux sons non-voisés correspond un flux libre et turbulent que l'on modélise par un bruit "blanc" qui, parce qu'il est sans corrélation temporelle ni structure particulière, est le prototype d'une entrée neutre stochastique. Le cas voisé est quant à lui associé à la mise en vibration des cordes vocales mais, là encore, on peut parler d'entrée neutre (déterministe) dans la mesure où il s'agit d'un simple train d'impulsions dont la seule information est la périodicité, fixant la hauteur du son.

Dans le cadre d'une telle modélisation, représenter un son de parole revient à identifier les paramètres du système liés aux résonances mises en jeu dans le cas observé, et à se servir ensuite de ceux-ci comme attributs (pour en comparer par exemple la valeur à des situations de référence s'il s'agit d'une tâche de reconnaissance). D'un point de vue plus mathématique, l'approche est formalisée dans le schéma-bloc de gauche de la Figure 10. Pour un signal s dont on fait l'hypothèse qu'il est la sortie d'un système H (dont on se donne un modèle paramétrique) lorsqu'il est excité par une entrée neutre e , on estime les paramètres de H en les ajustant au mieux de telle sorte qu'en prenant s pour entrée du système *inverse* H^{-1} , on obtienne une estimée \hat{e} de l'entrée dont la neutralité s'approche au mieux de celle de e . Ce qui est dit au niveau de la phonation

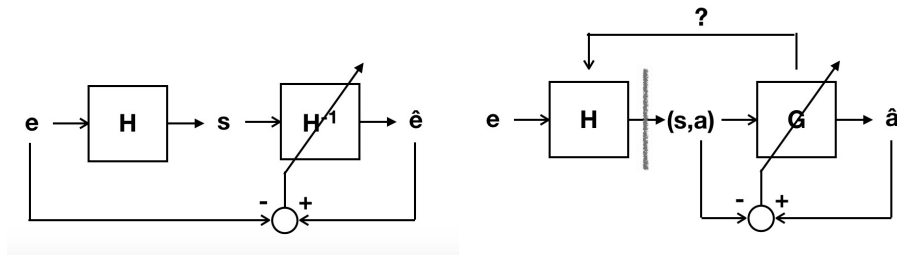


FIGURE 10 – Schémas-blocs comparés d’extraction d’attributs dans un cadre de modélisation (à gauche) et d’apprentissage (à droite).

peut être complété par des ingrédients de modélisation liés à l’audition et à la perception, prenant en compte ce que l’on sait physiologiquement de la cochlée et de l’oreille interne (comme par exemple sa structuration en banc de filtres à bande spectrale relative constante).

Jusqu’à un passé récent, cette logique de construire une représentation sur une modélisation *a priori* en vue d’une extraction d’attributs *a posteriori* est celle qui a prévalu le plus largement. Cependant, depuis environ une dizaine d’années, un autre point de vue est apparu et a gagné en importance au point de devenir majoritaire. En lieu et place d’une modélisation supposée s’appuyer sur une connaissance *a priori* du système générateur, l’idée est de conduire une analyse “pilotee par les données” en recourant à un système d’apprentissage à base d’exemples. Il s’opère ainsi un glissement de paradigme pouvant s’illustrer par le schéma-bloc de droite de la Figure 10 : le point de départ en est maintenant l’observation s , ou plus exactement tout un jeu d’observations étiquetées (s, a) que l’on sait être représentatives d’un état a , l’identification étant remplacée par l’ajustement d’un système G de telle sorte que sa sortie \hat{a} restitue au mieux la valeur vraie a . En d’autres termes, s’il s’agit par exemple de reconnaître le mot “chat”, un grand nombre d’occurrences de ce mot est présenté au système et, à chacune d’elles, les paramètres de ce dernier sont ajustés jusqu’à ce que la réponse se stabilise à un niveau jugé satisfaisant pour toute nouvelle occurrence étiquetée “chat”. À l’issue de cette phase d’apprentissage, les paramètres sont figés et ce sont eux qui encodent la “représentation” du mot considéré.

De conceptuelle qu’elle était dans les années 50 avec l’introduction du “perceptron” par Frank Rosenblatt [32], cette vision “de bout en bout” (ou *end-to-end*) d’une représentation comme *émergence* à partir des données seules a pris une importance considérable avec le développement ubiquitaire de l’apprentissage par réseaux de neurones profonds (*deep learning*), en particulier convolutionnels [33]. Ceci a été rendu possible par la concomitance de trois facteurs-clés : d’abord la découverte d’algorithmes efficaces (comme celui dit de la “rétro-propagation du gradient”) pour l’ajustement des paramètres dans des réseaux à plusieurs couches ; ensuite la disponibilité de moyens de calcul performants (les “cartes graphiques”) permettant de gérer des systèmes de très grande dimension ; enfin la disponibilité de données d’apprentissage suffisantes (car il en faut beaucoup) pour entraîner correctement de tels systèmes¹⁰.

10. On pourra noter à ce propos que disposer pleinement de telles ressources est de fait l’apanage des grandes plate-formes du numérique comme Google, Facebook, Baidu, etc., vers

En donnant à un réseau de neurones profond une structure générique en couches multiples qui est relativement universelle, l’approche par apprentissage de bout en bout opère à la façon d’une *boîte noire*, en laissant le système s’auto-organiser. Si cela pose des problèmes de confiance à accorder à la méthode, il n’en reste pas moins qu’il est possible d’effectuer une analyse *ex-post* en essayant d’interpréter les choix faits par le réseau, en particulier au niveau de ses premières couches. Il est alors tout à fait remarquable de constater que, dans le cas des signaux audio (parole mais aussi musique), les filtres équivalents attachés aux premières couches tendent à reproduire ce que l’on sait de l’organisation fréquentielle de la cochlée [34]. Ainsi, l’approche automatique basée sur une analyse pilotée par les données assure l’émergence d’une représentation de même nature que celle qu’une expertise aurait choisie classiquement en se basant sur des arguments de modélisation. Ceci ouvre la voie à une possible modélisation *a posteriori*, comme illustré par la boucle de retour dans le diagramme de droite de la Figure 10.

4.2 Représentativité

L’apprentissage à base d’exemples amène à une dernière considération sur la notion de représentation dont une des acceptions est le “fait de représenter [...] une collectivité” [2], ce qui ouvre aux concepts de *représentant* et de *représentativité*. Dans le cas de l’apprentissage automatique qui vient d’être mentionné, les exemples choisis dans la phase d’entraînement du réseau jouent le rôle de *représentants* d’une classe. Aussi bon soit l’algorithme qui prendra sa décision sur la base de ceux-ci, il ne pourra rendre compte que des informations qui lui auront été fournies. Les exemples servant de références se doivent ainsi d’être *représentatifs* de la classe en question si l’on veut donner sens au résultat.

Il ne s’agit pas ici de recenser toutes les dérives possibles liées à des biais d’apprentissage mais il est important de souligner qu’il en résulte une représentation de faits ou de situations dont la construction (qui est l’objet de ce texte) porte la marque de présupposés, qu’il soient implicites ou explicites. En ce sens, la représentation par apprentissage automatique à base d’exemples conduit à une forme d’objectivité *conditionnelle* qui rejoint certaines des considérations faites précédemment sur la perspective et les illusions pouvant résulter de sa lecture *a priori* lorsqu’elle est guidée elle aussi par l’apprentissage.

5 Conclusion

Sous son apparente dispersion la faisant passer de l’acoustique à l’intelligence artificielle en passant par la cartographie et la perspective, la réflexion proposée ici avait pour ambition de soutenir l’idée commune que, loin d’une donnée ou d’une transposition immédiate de la réalité, une représentation résultait d’une construction basée à la fois sur des connaissances et sur des objectifs. Pas d’unicité donc, mais bien davantage une multiplicité potentielle de points de vue complémentaires, conditionnels et conditionnés.

lesquelles s’est transférée une large part de l’avant-garde de la recherche, au détriment du monde académique.

Références

- [1] M. Foucault, *Les Mots et les Choses*, Gallimard, Paris, 1966.
- [2] www.dictionnaire-academie.fr
- [3] J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, Firmin Didot, Paris, 1822.
- [4] T.W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (UK), 1988.
- [5] W. of Ockham, *Quaestiones et decisiones in quatuor libros Sententiarum cum centilogio theologico*, Livre II, 1319; cf. p. 262 de l'édition de 1495 chez J. Trechsel, Lyon : <https://archive.org/details/A336059bis/page/n261/mode/2up>.
- [6] L. de Broglie, *Certitudes et Incertitudes de la Science*, Albin Michel, Paris, 1966.
- [7] J. Ville, "Théorie et Applications de la Notion de Signal Analytique," *Câbles et Transmissions*, 2ème A., No. 1, pp. 61-74, 1948.
- [8] Y. Meyer, *Les Ondelettes — Algorithmes et Applications*, Armand Colin, Paris, 1992.
- [9] P. Flandrin, *Temps-Fréquence*, Hermès, Paris, 1993.
- [10] W. Heisenberg, "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik," *Zeitschrift für Physik*, Vol. 43, No.3-4, pp. 172-198, 1927.
- [11] D. Gabor, "Theory of Communication," *J. IEE*, Vol. 93, No. 11, pp. 429-457, 1946.
- [12] https://fr.wikiversity.org/w/index.php?title=Repr%C3%A9sentations_et_cartes_du_monde/Repr%C3%A9sentation&oldid=791676
- [13] N. Lambert et C. Zanin, *Mad Maps*, Armand Colin, Paris, 2019.
- [14] <https://worldmapper.org/>
- [15] É. Ghys, "Archimède et l'Afrique," 2013. <http://www.breves-de-maths.fr/archimede-et-afrique/>.
- [16] L.B. Alberti, *De Pictura*, Nuremberg, 1511. Traduction par C. Popelin chez A. Lévy, Paris, 1869 : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k65009h>.
- [17] W.M. Ivins, Jr., *On the Rationalization of Sight — With an Examination of Three Renaissance Texts on Perspective*, Da Capo Press, Inc., New York, 1973.
- [18] H. Damisch, *L'Origine de la Perspective*, Flammarion, Paris, 1987.
- [19] E.H. Gombrich, *L'Art et l'Illusion — Psychologie de la Représentation Picturale*, Gallimard, Paris, 1987.
- [20] <http://galleriaspada.beniculturali.it/index.php?it/265/la-prospettiva>
- [21] <https://www.nationalgallery.org.uk/paintings/hans-holbein-the-younger-the-ambassadors>
- [22] <https://www.georgesrousse.com>

- [23] E. Panofsky, *La Perspective comme Forme Symbolique*, Éditions de Minuit, Paris, 1975.
- [24] J. White, *The Birth and Rebirth of Pictorial Space*, Faber and Faber, London, 1967.
- [25] D. Raynaud, *L'Hypothèse d'Oxford : Essai sur les Origines de la Perspective*, Presses Universitaires de France, Paris, 1998.
- [26] Père P.A. Florensky, *La Perspective Inversée, L'Iconostase et Autres Écrits sur l'Art*, L'Âge d'Homme, Paris, 1992.
- [27] E. Cassirer, *La Philosophie des Formes Symboliques*, Éditions de Minuit, Paris, 1972.
- [28] <https://www.theparisreview.org/blog/2018/04/16/david-hockneys-improbable-inspirations/>
- [29] <http://www.hockney.com/>
- [30] <https://www.tate.org.uk/art/artworks/hockney-the-perspective-lesson-p20104>
- [31] R. Boite, H. Boulard, Th. Dutoit, J. Hancq et H. Leich, *Traitement de la Parole*, Presses Polytechniques Universitaires Romandes, Lausanne, 2000.
- [32] F. Rosenblatt, *The Perceptron : A Probabilistic Model for Information Storage and Organization in the Brain*, *Psychological Review*, Vol. 65, No. 6, pp. 386-408, 1958.
- [33] Y. Le Cun, *Quand la Machine Apprend – La Révolution des Neurones Artificiels et de l'Apprentissage Profond*, Éditions Odile Jacob, Paris, 2019.
- [34] S. Dieleman and B. Schrauwen, “End-to-end learning for music audio,” Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP-14), pp. 6964-6968, 2014.