



**HAL**  
open science

# L'ARTICULATION SÉMANTIQUE, SYNTAXIQUE ET SÉMIOTIQUE DANS LE PROCESSUS DE TRANSPOSITION DES CONCEPTS DE DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET APPROXIMATIONS LOCALES

Fatma Belhaj Amor

► **To cite this version:**

Fatma Belhaj Amor. L'ARTICULATION SÉMANTIQUE, SYNTAXIQUE ET SÉMIOTIQUE DANS LE PROCESSUS DE TRANSPOSITION DES CONCEPTS DE DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET APPROXIMATIONS LOCALES. Didactique des mathématiques, Aug 2017, Paris, France. hal-02912489

**HAL Id: hal-02912489**

**<https://hal.science/hal-02912489v1>**

Submitted on 6 Aug 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# L'ARTICULATION SÉMANTIQUE, SYNTAXIQUE ET SÉMIOTIQUE DANS LE PROCESSUS DE TRANSPOSITION DES CONCEPTS DE DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET APPROXIMATIONS LOCALES

Fatma Belhaj Amor\*

## RESUME

Dans cette communication, nous présentons les résultats d'une investigation didactique sur l'enseignement et l'apprentissage des développements limités et des approximations locales en début de l'université. Trois investigations sont menées : la première, de nature épistémologique porte sur l'évolution historique et mathématique des dimensions sémantique, syntaxique et sémiotique ; la deuxième est macro-didactique consacrée aux résultats d'une analyse des programmes, des manuels, de photocopiés de cours et la troisième investigation est micro-didactique à partir de laquelle nous présenterons les premiers résultats de l'analyse d'une enquête adressée auprès de 24 enseignants universitaires pour en décrypter les visées et les caractéristiques didactiques.

Mots clefs : sémantique, syntaxique, sémiotique, approximation locale, développement limité.

## ABSTRACT

In this communication, we present the results of a didactic investigation on the teaching and learning of limited developments and local approximations at the beginning of the university. Three investigations are carried out: the first, of an epistemological nature, deals with the historical and mathematical evolution of the semantic, syntactic and semiotic dimensions; the second is macro-didactic dedicated to the results of an analysis of programs, textbooks, course handouts and the third investigation is micro-didactic from which we will present the first results of the analysis of a survey addressed to 24 university teachers to decrypt the aims and didactic characteristics.

Key words: semantic, syntactic, semiotic, polynomial approximation.

## INTRODUCTION

Nous avons conduit des investigations épistémologiques et didactiques en termes de transposition didactique de concept des développements limités en début de l'université et plus précisément, première année du cycle préparatoire aux études d'ingénieurs tunisiens spécialité mathématiques et physique. Nous adoptons une grille d'analyse croisant les registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993) et la composante praxéologique de Chevallard (1997) enrichie par les outils d'analyse de deux dimensions sémantique et syntaxique introduites dans les travaux de Tarski (1960) et développées dans les travaux de Kouki&Ghedamsi (2012). Dans un premier temps, nous présentons une synthèse de la genèse historique des développements limités. Le fait qu'à l'échelle de l'université, et contrairement au secondaire et au primaire tunisien, il n'existe pas de manuel universitaire nous a ramené à conduire des analyses du programme officiel, des ouvrages et de photocopiés de cours des enseignants afin de connaître la manière de la transposition des développements limités d'*un savoir-savant* à *un savoir à enseigner*. Et finalement, une comparaison de la formulation de cet objet dans l'histoire et son enseignement nous ramène à conduire un questionnaire auprès d'enseignants universitaires afin de répondre à notre questionnement sur l'articulation des dimensions sémantique, syntaxique et sémiotique dans l'enseignement des développements limités que nous présentons les résultats de son analyse.

## ÉTUDE ÉPISTÉMOLOGIQUE DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Dans cette partie, nous présentons les différentes phases qui nous paraissent pertinentes pour l'évolution historique des développements limités en s'appuyant sur différents types de

---

\* Université Virtuelle de Tunis – Tunisie – fatma.belhajamor@gmail.com

techniques de résolution dans différents registres sémiotiques (Duval, 1993) et en faisant intervenir le point de vue syntaxique<sup>1</sup> et/ou la sémantique<sup>2</sup>.

La résolution des problèmes des vitesses, quadratures, des tangentes, des maxima et minima par certains mathématiciens du XVII<sup>e</sup> siècle a ramené à l'élaboration du premier objet rencontré « la tangente ». Cet objet mathématique prend son étendue la première fois par les travaux de Roberval et Torricelli qui ont utilisé des concepts physiques (vitesses des mouvements). Par ailleurs, la détermination de l'équation d'une tangente aux courbes mécaniques et algébriques est due à l'utilisation d'une technique « infinitésimale ». Cette méthode s'appuie sur l'interprétation des représentations graphiques permettant un *calcul infinitésimal de la géométrie* soit par la méthode d'*adégalité* en termes d'équations et d'infiniment petits de Fermat, soit par un calcul algébrique de Descartes, soit par la technique du « triangle caractéristique » d'Isaac Barrow (Taton, 1961).

La géométrie analytique du XVII<sup>e</sup> siècle a ramené certains mathématiciens de cette époque à la découverte des « développements en séries infinies ». En effet, le développement de  $\ln(1+x)$  est obtenu par le calcul d'aire sous l'hyperbole selon une approche géométrique de Mercator et la « méthode des fluxions » de Newton d'une part, et le calcul infinitésimal de

Leibniz sous la forme :  $y = \frac{1}{1}x \frac{dy}{dx} - \frac{1}{1.2}xx \frac{ddy}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}x^3 \frac{d^3y}{dx^3}, etc.$ , d'autre part.

Selon Taton (1961), Newton a expliqué « sa méthode des flexions » :

*«Je ne considère pas les grandeurs mathématiques comme formées de parties, si petites soient-elles, mais comme décrites d'un mouvement continu» (Taton, 1961, p.242)*

Par ailleurs, les développements en séries infinies de  $\sin x$ ,  $\cos x$  et  $\tan x$  sont élaborés par Newton à travers son calcul fluxionnel et par Leibniz à travers l'utilisation de sa technique du « triangle caractéristique » (Taton, 1961). En développant sa technique dynamique, Newton a obtenu les développements d' $\arcsin x$  et ceux de  $\frac{1}{1+x^2}$  pour des  $x$  suffisamment petits et des  $x$  assez grands. Concernant le développement du binôme de Newton, Taton (1961) dit que :

*«C'est vers 1665 que Newton a les premières idées de son calcul des fluxions et qu'il découvre son développement du binôme.» (Ibid., p.242)*

Dans une troisième étape, John Bernoulli s'est appuyé sur le calcul des intégrales par la « méthode d'intégrations par partie successives » pour obtenir sa formule des développements en séries d'une fonction semblables à celles trouvées plus tard par Taylor. D'un autre côté, Newton a utilisé la technique d'approximation d'une fonction « des différences finies » pour trouver une solution l'équation différentielle du premier ordre sous forme d'un polynôme :

$$f = a_0(1 + kx + (\frac{k^2}{2})x^2 + \dots + (\frac{k^j}{j})x^j + \dots).$$

Au cours de la résolution du problème de Kepler concernant le calcul de l'anomalie excentrique d'une planète, Taylor s'est appuyé sur cette méthode d'approximation pour élaborer son développement en séries qui n'est autre que le polynôme d'interpolation redécouvert par Lagrange en 1797. Comme Taylor n'a pas indiqué la source de son théorème, divers mathématiciens de cette époque comme Maclaurin et Euler se sont attachés à en donner la démonstration selon un aspect purement analytique. En 1768, la technique de substitution numérique d'Euler a mis une crise de confiance à la théorie des séries qui sont conçues

<sup>1</sup> Correspondante à une manipulation et transformation des écritures symboliques mathématiques s'appuyant sur des opérations du calcul algébrique et formel.

<sup>2</sup> Qui s'impose dans le cas où les transformations et formulations des expressions nécessitent des contrôles et interprétations.

comme des polynômes à une infinité de termes. En effet, la substitution de la valeur 1 à la variable  $x$  dans l'expression algébrique  $\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 + \dots$

ramène à une contradiction  $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$  qui prouve que la dimension sémantique peut mettre en question certaines transformations syntaxiques de cette époque.

La naissance de « limite » d'Alembert, en 1754, change l'esprit mathématique par l'étude de la convergence des séries. Ainsi, Cauchy a étudié les formules de Taylor en vérifiant chaque étape des transformations syntaxiques des expressions analytiques développées par Taylor. D'un autre côté, Abel a étudié le développement du binôme de Newton.

Au cours de la résolution des équations différentielles de la mécanique céleste, Poincaré a élaboré son développement asymptotique en calculant suivant les puissances entières de  $\frac{1}{x}$  au voisinage de  $+\infty$  et à partir des développements en séries de Taylor.

Dans le tableau 1, nous présentons les principales phases de la genèse des développements limités en adoptant notre grille d'analyse<sup>3</sup> (Kouki, Belhaj Amor&Hachaichi, 2016).

| Principales phases de la genèse des DL   | Période  | Type de technique/registres                            | Dimensions |
|--|--|--|------------|
| Equation de la tangente et les deux premiers termes du développement de Taylor | Dès le début du XVII <sup>e</sup> siècle                       | $\tau_{dyn}$ Torricelli & Roberval (1636)/Gra          | Sémantique |
|  |  | $\tau_{inf}$ Fermat (1629, 1640)/Gra-Géom-Ana          | Mixte      |
|  |  | $\tau_{inf}$ Descartes (1637, 1638)/Gra-Géo-Alg        | Mixte      |
|  |  | $\tau_{inf}$ Isaac Barrow (1669)/Gra-Géo-Ana           | Mixte      |
| Les développements en séries infinies  | A partir de 1665   | $\tau_{géo}$ Mercator (1668)/Gra-Géo-Ana-Alg           | Mixte      |
|  |  | $\tau_{dyn}$ Newton (1665, 1670, 1693)/Gra-Géo-Ana-Alg | Mixte      |
|  |  | $\tau_{géo}$ Leibniz (1693)/Gra-Géo-Ana-Alg            | Mixte      |
|  |  | $\tau_{ana}$ Leibniz (1694)/Ana                        | Syntaxique |
| Les développements illimités et séries de Taylor                               | Fin du XVII <sup>e</sup> et début du XVIII <sup>e</sup> siècle | $\tau_{ana}$ Newton/Alg-Ana                            | Syntaxique |
|  |  | $\tau_{ana}$ John Bernoulli (1694)/Ana-Alg             | Syntaxique |
|  |  | $\tau_{ana}$ Taylor (1712)/Ana                         | Syntaxique |
|  |  | $\tau_{ana}$ Maclaurin (1742)/Ana                      | Syntaxique |
|  |  | $\tau_{num}$ Euler (1768)/Alg-Num                      | Syntaxique |
|  |  | $\tau_{ana}$ Euler (1774)/Ana-Alg                      | Syntaxique |
|  |  | $\tau_{ana}$ Lagrange (1697)/Ana                       | Syntaxique |
| Le développement de la formule de Taylor                                       | Au début du XIX <sup>e</sup> siècle                            | $\tau_{ana}$ Cauchy (1823)/Ana                         | Mixte      |
|  |  | $\tau_{ana}$ Abel (1826)/Alg                           | Mixte      |
| Développement asymptotique   | 1886   | $\tau_{ana}$ Poincaré (1886)/Ana                       | Mixte      |

**Tableau 1.** – Les principales phases de la genèse historique des développements limités.

Nous pouvons conclure que, dès le début du XVII<sup>e</sup> jusqu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, les mathématiciens se sont appuyés sur des interprétations des représentations graphiques des courbes mécaniques et algébriques, ainsi que sur des transformations syntaxiques des expressions analytiques et algébriques pour résoudre des problèmes physico-mathématiques.

<sup>3</sup> On note les types de technique par  $\tau$  et on écrit les trois premiers lettres de la technique ou le registre.

Ainsi, nous allons nous intéresser au processus de la transposition didactique de l'objet développement limité afin de pouvoir trouver quelques éléments des réponses à nos questions sur la prise en compte de l'articulation sémantique / syntaxique dans un ou plusieurs registres sémiotiques dans son enseignement.

## ANALYSE DIDACTIQUE EN TERMES DE TRANSPOSITION DIDACTIQUE DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Nous avons choisi d'étudier la transposition des développements limités dans le programme officiel, les parties ou des chapitres d'ouvrages et des photocopiés de cours des enseignants<sup>4</sup> de la première année de l'enseignement universitaire et plus précisément, au niveau du cycle préparatoire des études d'ingénieurs section mathématiques et physique.

### *1. Analyse du programme officiel*

L'objectif principal du programme est d'inviter l'enseignant à articuler les différentes représentations sémiotiques d'une fonction en interprétant les différentes syntaxes mobilisées. En revanche, dans le contenu du programme lié au développement limité, nous remarquons une quasi-absence de l'aspect sémantique et le travail au niveau graphique et numérique, ainsi que l'inexistence d'une interprétation de cet objet mathématique en tant que technique d'approximation polynomiale d'une fonction.

### *2. Analyse des différents supports de cours étudiés*

Nous avons conduit une analyse des parties d'ouvrages<sup>5</sup> et ceux des photocopiés de cours de trois enseignants tunisiens afin de connaître les approches choisies et les types de techniques à utiliser pour résoudre certaines tâches proposées dans l'environnement de développement limité. L'objet développement limité n'a pas été introduit en tant que nouvelle technique d'approximations locales d'une fonction et par différents types d'approches qui pourraient être du type numérique, graphique, dynamique, etc. En effet, même la notion d'« approximation » n'existe pas dans tous les différents supports de cours étudiés.

Par ailleurs, l'analyse des photocopiés de cours nous a permis de penser que les enseignants ont une tendance analytique purement syntaxique au cours du traitement de l'objet développement limité afin de donner son utilité dans le cas de l'étude locale d'une fonction en faisant appel aux techniques géométrique et algébrique du type mixte.

A l'issue de cette analyse institutionnelle, nous trouvons l'absence de l'enseignement des techniques d'approximations numériques ainsi que le travail très limité au niveau des représentations graphiques même si les recommandations du programme officiel invitent les enseignants à les considérer.

Ainsi, les résultats de notre étude historico-épistémologique de l'objet développement limité nous amènent à conclure que l'analyse institutionnelle a mis en évidence certains questionnements sur le projet institutionnel de l'enseignement de cet objet mathématique qui n'est pas introduit en tant que nouvelle technique d'approximation locale d'une fonction et par différents types d'approches qui pourraient être du type numérique, graphique, géométrique, dynamique, etc.

## ANALYSE DE L'ENQUÊTE

---

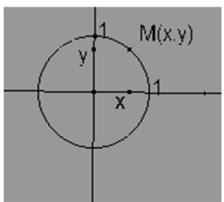
<sup>4</sup> Que nous avons adopté dans notre mémoire de master encadré par Rahim KOUKI et soutenu en avril 2016 à l'Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue.

<sup>5</sup> Dont deux français et deux tunisiens les plus utilisés par les enseignants comme références de cours.

Afin de trouver plus d'éléments de réponses à notre questionnement sur l'absence de l'articulation des différents types de techniques mobilisables dans l'enseignement de l'objet développement limité, nous avons de plus conduit une investigation sous forme d'une enquête auprès de 24 enseignants de première année des classes préparatoires de différents établissements universitaires (Belhaj Amor, 2016). Nous présentons les résultats de l'analyse d'une parmi les sept questions proposées dans le questionnaire.

1. Analyse de la question

Au cours de l'enseignement des développements limités usuels, on propose ces deux activités pour la détermination de développement limité de la fonction arcsinus au voisinage de 0 à l'ordre n.

| Activité 1   | Activité 2   |
|--|--|
|  <p>Le calcul de l'arc du cercle <math>y = \sqrt{1-x^2}</math></p> $\text{Arcsin}(x) = \int_0^x \sqrt{1+(y'(t))^2} dt = \int_0^x \sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}} dt$ $\text{Arcsin}(x) = \int_0^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^x \left[ 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1.3}{2.4}t^4 + \dots \right] dt$ $= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \dots + o(x^n)$ | <p>Dans le cas de la fonction définie par : <math>f(x) = \text{arcsin } x</math></p> $\forall x \in ]-1,1[; f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ <p>Au voisinage de 0 on a :</p> $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \dots + o(x^n)$ $\int_0^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \dots + o(x^{n+1})$ $= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \dots + o(x^n)$ <p>Finalement</p> $\text{Arcsin}(x) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \dots + o(x^n)$ |

1) Crochez la réponse que vous pensez convenable à deux activités.

| Activité   | Très importante | Peu importante | Sans intérêt |
|------------|-----------------|----------------|--------------|
| Activité 1 |                 |                |              |
| Activité 2 |                 |                |              |

2) Si vous allez proposer l'une ou les deux activités à vos étudiants. Que choisissez-vous ?

- La première activité       La deuxième activité       Les deux activités.

3) Dans quel contexte proposez-vous ce type d'activité(s)?

- Activité introductive     Application     Synthèse     Autre

Nous avons proposé deux différentes activités d'aspects géométrique et analytique dont le but est la détermination des développements limités de la fonction  $(x \rightarrow \text{arcsin}(x))$  au voisinage de 0. La première activité est prise de la technique développée par Newton en 1665 pour déterminer le calcul de l'arc du cercle en utilisant le calcul intégral du développement du binôme de  $(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Tandis que la deuxième est habituellement donnée dans l'enseignement des développements limités, d'après notre analyse institutionnelle.

Le tableau 2 représente le pourcentage d'effectifs (24 enseignants) qui ont répondu aux deux premières questions (1 et 2).

|                    | Très importante | Peu importante | Sans intérêts |
|--------------------|-----------------|----------------|---------------|
| Activité 1         | 20.83%          | 20.83%         | 8.33%         |
| Activité 2         | 33.34%          | 0%             | 0%            |
| Les deux activités | 12.50%          | 4.17%          | 0%            |

Tableau 2. – La place de la figure géométrique comme « outil » dans l'enseignement des développements limités

Nous pouvons dire que juste 8 enseignants soulignent l'intérêt de l'approche géométrique mais 3 parmi eux (soit 12.5%) voient que cette technique n'est pas suffisante par leur choix de deux activités dans l'enseignement des développements limités.

Le tableau 3 présente le pourcentage d'effectifs des enseignants selon leur choix des activités dans le contexte de leur enseignement.

|                    | Activité introductive | Application | Activité introductive et application | Application et synthèse | Autres |
|--------------------|-----------------------|-------------|--------------------------------------|-------------------------|--------|
| Activité 1         | 4.17%                 | 4.17%       | 0%                                   | 0%                      | 0%     |
| Activité 2         | 4.17%                 | 54.14%      | 4.17%                                | 4.17%                   | 4.17%  |
| Les deux activités | 4.17%                 | 12.50%      | 4.17%                                | 0%                      | 0%     |

**Tableau 3.** – La place de la figure géométrique comme « outil » dans l'enseignement des développements limités

Deux enseignants seulement s'intéressent à articuler les différents registres analytique, géométrique et graphique pour introduire l'objet développement limité ou dans les applications à travers leur choix de la première activité. Le travail sur le registre analytique est le plus sollicité pour appliquer l'objet développement limité. Puisque, 15 enseignants (soit environ 54.14%) sollicitent cette technique analytique. Et ce, même si nous n'avons enregistré que 4 réponses sollicitant des techniques analytiques et dynamiques.

Cette brève analyse expérimentale nous permet de conclure que la figure géométrique n'a pas de place en tant qu'« outil » dans l'enseignement actuel des développements limités et plus précisément, le travail au niveau du graphique via des techniques géométriques est remarquablement faible dans l'enseignement de l'objet développement limité.

## CONCLUSION

L'investigation épistémologique conduite nous permet de conclure que la genèse historique des développements limités a mis en évidence sur l'articulation des approches inter et intra-mathématiques ainsi que l'interprétation des différentes techniques syntaxiques mobilisables au sein de plusieurs registres analytique, algébrique, numérique, graphique et géométrique.

Du côté institutionnel, la prise en compte des dimensions sémantiques, syntaxiques et sémiotiques est relativement absente dans les programmes et les différents supports de cours analysés ainsi que dans les différentes réponses d'enseignants universitaires au questionnaire pour introduire l'objet développement limité en tant que nouvelle technique d'approximation locale d'une fonction dans les domaines intra et extra mathématiques en début de l'université.

Nous pensons qu'une investigation visant à analyser de tout près ce qui se passe en classe et en particulier, les pratiques enseignantes pourrait nous donner plus d'éléments de réponses à nos questionnements de natures mathématique et didactique.

## REFERENCES

- Belhaj Amor F (2016) *Enseignement de l'objet développement limité au début de l'université entre syntaxe et sémantique : Cas des classes préparatoires aux études d'ingénieurs tunisiennes*. Mémoire de maîtrise. Université virtuel de Tunis.
- Chevallard Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17 (3), 17-54.
- Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, 37-65.
- Kouki R., Ghedamsi I. (2012) Limite des méthodes syntaxiques en algèbre du secondaire. *Actes de colloque EMF 2012*, 435-444.
- Kouki R, Belhaj Amor F, Hachaichi Y. (2016). Comparaison entre l'évolution historique ayant mené aux développements limités et leur pratique d'enseignement au début de l'université: Entre syntaxe et sémantique. *Actes du colloque INDRUM 2016*.
- Tarski A. (1960) *Introduction à la logique*. Paris: Gauthier-Villars.
- Taton R. (1961) *Histoire générale des sciences: La science contemporaine- Le XIX<sup>e</sup> siècle* (vol 3). Paris.