



**HAL**  
open science

# STRUCTURE DE LIE SUR LES FIBRÉS D'ÉTAT

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

| Jean Louis Jonot. STRUCTURE DE LIE SUR LES FIBRÉS D'ÉTAT. 2020. hal-02908132

**HAL Id: hal-02908132**

**<https://hal.science/hal-02908132>**

Preprint submitted on 28 Jul 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# STRUCTURE DE LIE SUR LES FIBRÉS D'ÉTAT.

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. Le but de cet article est de définir la notion de Lagrangien de Yang-Mills sur un fibré d'état. Cette construction se fait à partir du fibré de Lie et du fibré d'algèbre de Lie associés au fibré d'état.

## 1. FIBRÉ D'ÉTAT

On rappelle qu'un fibré d'état, voir [1], est la donnée d'un fibré vectoriel

$$\zeta = (E, \pi, \mathcal{W}, \mathcal{H})$$

où la fibre  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert séparable,  $\mathcal{W}$  est une variété modelée sur  $\mathbb{R}^n$ . L'espace total  $E$  est muni d'une structure de variété de Banach, les cartes sont données par  $\pi^{-1}(W_\alpha)$  où  $W_\alpha$  parcourt l'ensemble des cartes de trivialisations du fibré et

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(W_\alpha) \rightarrow W_\alpha \times \mathcal{H}, \phi_\alpha(x) = (\pi(x), \psi_\alpha(x))$$

est une bijection. Les cartes de  $E$  sont modelées sur  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{H}$  qui est muni d'une structure d'espace de Banach.

On suppose que le groupe de structure  $G$  de  $\zeta$  est un groupe de Lie de dimension finie, où  $G$  est un sous-groupe de difféomorphismes de  $\mathcal{H}$  qui n'est pas nécessairement contenu dans le groupe linéaire  $\text{Gl}(\mathcal{H})$ . La question posée est de savoir si on peut construire un Lagrangien à la Yang-Mills sur ces fibrés. La formule du Lagrangien de Yang-Mills pour la connexion  $\nabla$  est donnée par, à une constante multiplicative près,

$$\mathcal{L}_\nabla = \int \text{Trace } R \wedge *R$$

où  $R$  est la courbure de la connexion  $\nabla$ ,  $*$  est l'opérateur de Hodge. La constante multiplicative dépend des constantes de couplage des trois forces fondamentales. Cette construction devient possible si on associe au fibré d'état  $\zeta$ , avec groupe de structure  $G$ , un fibré vectoriel de fibre l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  associée au groupe de Lie  $G$ . L'opérateur défini sur l'ensemble des connexions de Koszul, à valeurs dans  $]0, +\infty[$

$$\mathcal{L} : \nabla \rightarrow \mathcal{L}_\nabla$$

est le Lagrangien de Yang-Mills. Dans ce qui suit, on cherche à définir l'opérateur  $\mathcal{L}$  pour un fibré d'état sur une variété  $\mathcal{W}$  de dimension 4 qui modélise l'univers.

---

*Date:* 25/05/2020.

*1991 Mathematics Subject Classification.* 53A45, 81R12.

*Key words and phrases.* Groupe de Lie, Algèbre de Lie, Représentation adjointe, Connexion de Koszul, Courbure d'une connexion.

2. LES FIBRÉS  $\zeta_G$  ET  $\zeta_{\mathfrak{g}}$ 

On se fixe un recouvrement localement fini de cartes de trivialisations  $\{W_\alpha\}$  d'un fibré  $\zeta$  de fibre  $\mathcal{F}$ , tel que si on note

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(W_\alpha) \rightarrow W_\alpha \times \mathcal{F}, \phi_\alpha(x) = (\pi(x), \psi_\alpha(x))$$

ces cartes et

$$\phi_{\alpha,w} : \pi^{-1}(w) \rightarrow \mathcal{F}, \phi_{\alpha,w}(x) = (w, \phi_{\alpha,w}(x)) \text{ avec } \pi(x) = w,$$

les applications de transition sont définies par

$$\tau_{\alpha,\beta}(w) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, \tau_{\alpha,\beta}(w) = \phi_{\alpha,w} \circ \phi_{\beta,w}^{-1}, \forall w \in W_\alpha \cap W_\beta,$$

cette famille vérifie les propriétés de cocycles

$$\tau_{\alpha,\alpha}(w) = \mathbf{1}_{\mathcal{F}}, \forall w \in W_\alpha \quad (2.1)$$

$$\tau_{\alpha,\beta}^{-1}(w) = \tau_{\beta,\alpha}(w), \forall w \in W_\alpha \cap W_\beta \quad (2.2)$$

$$\tau_{\alpha,\gamma}(w) = \tau_{\alpha,\beta}(w) \circ \tau_{\beta,\gamma}(w), \forall w \in W_\alpha \cap W_\beta \cap W_\gamma. \quad (2.3)$$

Si  $\zeta$  est un fibré avec groupe de structure un groupe de Lie  $G$ , on peut définir d'autres structures de fibré induites par  $G$ . Soient  $\phi_\alpha$  et  $\phi_\beta$  deux cartes de trivialisations de  $\zeta$  en  $w$ , on pose

$$G_{\alpha,w} = \phi_{\alpha,w}^{-1} G \phi_{\alpha,w}$$

alors

$$G_{\beta,w} = G_{\alpha,w} = G_w,$$

cette remarque permet de construire le quadruplet associé au groupe de Lie  $G$ , noté

$$\zeta_G = (\cup_{w \in \mathcal{W}} G_w, \pi_G, \mathcal{W}, G), \pi_G(g) = w \text{ si } g \in G_w.$$

L'ensemble  $G_w$  a une structure de groupe de Lie, si  $\mathfrak{g}_w$  et  $\mathfrak{g}$  sont les algèbres de Lie associées à  $G_w$  et  $G$ , le quadruplet associé à l'algèbre de Lie de  $G$ , est défini par

$$\zeta_{\mathfrak{g}} = (\cup_{w \in \mathcal{W}} \mathfrak{g}_w, \pi_{\mathfrak{g}}, \mathcal{W}, \mathfrak{g}).$$

**Remark 1.** Les unions  $\cup_{w \in \mathcal{W}}$  sont disjointes.

**Theorem 1.**  $\zeta_G$  est un fibré de fibre  $G$ , dont les applications de transition sont

$$w \in W_\alpha \cap W_\beta \rightarrow \iota_{\tau_{\alpha,\beta}(w)} \in \text{Int}(G)$$

où  $\tau_{\alpha,\beta}$  sont les applications de transition du fibré  $\zeta$ .

*Proof.* Si  $\phi_\alpha$  est une carte de trivialisations du fibré  $\zeta$  alors

$$\psi_\alpha : \pi_G^{-1}(W_\alpha) \rightarrow W_\alpha \times G, \psi_\alpha(g) = \left( \pi_G(g), \phi_{\alpha,\pi_G(g)} \circ g \circ \phi_{\alpha,\pi_G(g)}^{-1} \right),$$

est une carte du fibré  $\zeta_G$ , les applications de transitions sont définies par

$$\psi_{\alpha,\beta} : W_\alpha \cap W_\beta \rightarrow \text{Int}(G)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha,\beta}(w)(h) &= \psi_{\alpha,w} \circ \psi_{\beta,w}^{-1}(h) = \phi_{\alpha,w} \circ \phi_{\beta,w}^{-1} \circ h \circ \phi_{\beta,w} \circ \phi_{\alpha,w}^{-1} \\ &= \tau_{\alpha,\beta}(w) \circ h \circ \tau_{\beta,\alpha}(w) = \iota_{\tau_{\alpha,\beta}(w)}(h) \end{aligned}$$

où  $\iota$  est l'application

$$\iota : G \rightarrow \text{Int}(G), g \rightarrow \iota_g \text{ avec } \iota_g(h) = ghg^{-1}.$$

□

**Theorem 2.**  $\zeta_{\mathfrak{g}}$  est un fibré avec fibre  $\mathfrak{g}$  dont les applications de transition sont

$$w \in W_\alpha \cap W_\beta \rightarrow \text{Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}(w)} \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$$

où  $\tau_{\alpha,\beta}$  sont les applications de transition du fibré  $\zeta$  et  $\text{Ad}$  est la représentation adjointe du groupe de Lie  $G$  dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .

*Proof.* Si  $\phi_\alpha$  est une carte de  $\zeta$  alors

$$\varphi_\alpha : \pi_{\mathfrak{g}}^{-1}(W_\alpha) \rightarrow W_\alpha \times \mathfrak{g}, \varphi_\alpha(\mathfrak{g}) = (\pi_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}), \varrho_\alpha(\pi_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})))$$

où

$$\varrho_{\alpha,w} : \mathfrak{g}_w \rightarrow \mathfrak{g}$$

est une application définie comme suit. On pose

$$\psi_{\alpha,w} : G_w \rightarrow G \text{ avec } \phi_{\alpha,w} \circ g \circ \phi_{\alpha,w}^{-1} = (w, \psi_{\alpha,w}(g)) \text{ pour } g \in G_w,$$

avec si  $g = \mathbf{1}_{G_w}$ ,  $\psi_{\alpha,w}(\mathbf{1}_{G_w}) = \mathbf{1}_G$  où  $\mathbf{1}_{G_w}$ ,  $\mathbf{1}_G$  sont les éléments neutres de respectivement  $G_w$ ,  $G$ . L'application  $\varrho_\alpha$  est définie par

$$\varrho_{\alpha,w} = T_{\mathbf{1}_{G_w}} \psi_{\alpha,w} : \mathfrak{g}_w \rightarrow \mathfrak{g} \text{ avec } \mathfrak{g}_w = T_{\mathbf{1}_{G_w}} G_w \text{ et } \mathfrak{g} = T_{\mathbf{1}_G} G.$$

Les applications de transition vérifient, si  $w \in W_\alpha \cap W_\beta$

$$w \in W_\alpha \cap W_\beta \rightarrow \varrho_{\alpha,\beta}(w) = \varrho_{\alpha,w} \circ \varrho_{\beta,w}^{-1} \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$$

$$\begin{aligned} \varrho_{\alpha,w} \circ \varrho_{\beta,w}^{-1} &= T_{\mathbf{1}_{G_w}} \psi_{\alpha,w} \circ (T_{\mathbf{1}_G} \psi_{\beta,w})^{-1} \\ &= T_{\mathbf{1}_{G_w}} \psi_{\alpha,w} \circ T_{\mathbf{1}_G} \psi_{\beta,w}^{-1} = T_{\mathbf{1}_{G_w}} (\psi_{\alpha,w} \circ \psi_{\beta,w}^{-1}) \\ \psi_{\alpha,w} \circ \psi_{\beta,w}^{-1} &= \iota_{\tau_{\alpha,\beta}(w)} \text{ et } T_{\mathbf{1}_G} \iota_{\tau_{\alpha,\beta}} = \text{Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}} \end{aligned}$$

avec

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}), \text{Ad}_g = T_{\mathbf{1}_G} i_g$$

est la représentation adjointe du groupe de Lie  $G$  sur son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

La représentation adjointe du fibré  $\zeta_G$  dans le fibré  $\zeta_{\mathfrak{g}}$  est défini comme suit. Soit  $\iota_w$  l'application définie par

$$\iota_w : G_w \rightarrow \text{Aut } G_w, g \in G_w \rightarrow (\iota_w)_g \in \text{Aut } G_w$$

où

$$(\iota_w)_g : h \in G_w \rightarrow ghg^{-1} \in G_w$$

pour tout  $h, g$  appartenant à  $G_w$ . L'application  $\iota_w$  est un morphisme de groupe de  $G_w$  dans  $\text{Aut } G_w$ . L'application  $(\iota_w)_g$  est différentiable et l'application tangente

$$T(\iota_w)_g : TG_w \rightarrow TG_w$$

en  $\mathbf{1}_{G_w}$ , notée  $T_{\mathbf{1}_{G_w}}(\iota_w)_g$ , est un morphisme d'algèbre de  $\mathfrak{g}_w$  car  $(\iota_w)_g$  est un morphisme de groupe, c'est-à-dire, un endomorphisme linéaire  $\mathfrak{g}_w$  qui conserve le crochet de Lie  $[\bullet, \bullet]_w$ . On pose

$$(\text{Ad}_w)_g = T_{\mathbf{1}_{G_w}}(\iota_w)_g : \mathfrak{g}_w \rightarrow \mathfrak{g}_w$$

ce morphisme d'algèbre de Lie et

$$\text{Ad}_w : G_w \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g}_w, \text{Ad}_w(g) = (\text{Ad}_w)_g$$

la représentation adjointe de  $G_w$ , pour tout  $w \in \mathcal{W}$ . L'application adjointe  $\text{Ad}_w$  est différentiable, on note

$$\text{ad}_w = T_{\mathbf{1}_{G_w}} \text{Ad}_w : \mathfrak{g}_w \rightarrow \text{Der } \mathfrak{g}_w$$

où  $\text{Der } \mathfrak{g}_w$  est l'algèbre de Lie associée au groupe  $\text{Aut } \mathfrak{g}_w$ . La représentation adjointe de  $\zeta_G$  dans  $\zeta_{\text{Aut } \mathfrak{g}}$  est définie par le morphisme de fibré

$$\text{Ad} : g \in \zeta_G \rightarrow \text{Ad}_g \in \zeta_{\text{Aut } \mathfrak{g}}, \text{Ad}_g = T_{\mathbf{1}_{G, \pi_G(g)}} \iota_g \in \text{Aut } \mathfrak{g}_{\pi_G(g)},$$

$$\text{Ad}_g : \mathfrak{g}_{\pi_G(g)} \rightarrow \mathfrak{g}_{\pi_G(g)}, \text{Ad}_g(\alpha) \in \mathfrak{g}_{\pi_G(g)} \text{ si } \alpha \in \mathfrak{g}_{\pi_G(g)}.$$

Le fibré  $\zeta_{\text{Aut } \mathfrak{g}}$  est défini par le 4-uplet

$$\zeta_{\text{Aut } \mathfrak{g}} = (\cup_{w \in \mathcal{W}} \text{Aut } \mathfrak{g}_w, \pi_{\zeta_{\text{Aut } \mathfrak{g}}}, \mathcal{W}, \text{Aut } \mathfrak{g})$$

où les applications de transition sont définies par

$$\varkappa_{\alpha\beta}(w) : \rho \in \text{Aut } \mathfrak{g}_w \rightarrow \varkappa_{\alpha\beta}(w)(\rho) \in \text{Aut } \mathfrak{g}_w$$

$$\varkappa_{\alpha\beta}(w)(\rho) = \text{Ad}_{\tau_{\alpha\beta}(w)} \circ \rho \circ \text{Ad}_{\tau_{\beta\alpha}(w)} = (\iota_w)_{\text{Ad}_{\tau_{\beta\alpha}(w)}}(\rho)$$

$$\varkappa_{\alpha\beta}(w) = (\iota_w)_{\text{Ad}_{\tau_{\beta\alpha}(w)}}.$$

Pour chaque section  $g \in \Gamma(\zeta_G)$ , on associe la section  $\text{Ad}_g \in \Gamma(\zeta_{\text{Aut } \mathfrak{g}})$

$$\text{Ad}_g(w) = \text{Ad}_{g(w)} = T_{\mathbf{1}_{G, w}} \iota_{g(w)} \in \text{Aut } \mathfrak{g}_w, \forall w \in \mathcal{W}$$

cette application est une application de  $\Gamma(\zeta_G)$  dans  $\Gamma(\zeta_{\text{Aut } \mathfrak{g}})$  qui vérifie

$$\text{Ad}_{gh} = \text{Ad}_g \circ \text{Ad}_h$$

et si  $\alpha \in \Gamma(\zeta_{\mathfrak{g}})$ , on pose

$$\text{Ad}_g(\alpha)(w) = \text{Ad}_{g(w)}(\alpha(w)), \forall w \in \mathcal{W}$$

alors

$$[\text{Ad}_g(\alpha), \text{Ad}_g(\beta)] = \text{Ad}_g[\alpha, \beta], \forall \alpha \in \zeta_{\mathfrak{g}} \text{ et } \forall \beta \in \zeta_{\mathfrak{g}}.$$

**Definition 1.** La forme de Killing sur le fibré  $\zeta_{\mathfrak{g}}$  est définie par

$$K : \zeta_{\mathfrak{g}} \times \zeta_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$K_w(\alpha, \beta) = \text{Trace} \left( (\text{ad}_w)_\alpha \circ (\text{ad}_w)_\beta \right), \forall \alpha \in \mathfrak{g}_w \text{ et } \forall \beta \in \mathfrak{g}_w$$

où  $K_w$  est la forme de Killing sur  $\mathfrak{g}_w$ .

**Proposition 1.** L'application

$$(\text{ad}_w)_\alpha : \mathfrak{g}_w \rightarrow \mathfrak{g}_w$$

vérifie

$$(\text{ad}_w)_\alpha(\beta) = [\alpha, \beta]_w, \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{g}_w$$

où  $[\bullet, \bullet]_w$  est le crochet de Lie sur  $\mathfrak{g}_w$ , la représentation adjointe de  $\zeta_{\mathfrak{g}}$  dans  $\zeta_{\text{End } \mathfrak{g}}$  est

$$\text{ad} : \zeta_{\mathfrak{g}} \rightarrow \zeta_{\text{End } \mathfrak{g}}, (\text{ad}_w)_\alpha : \beta \rightarrow [\alpha, \beta]_w,$$

$$(\text{ad}_w)_{[\alpha, \beta]} = \left[ (\text{ad}_w)_\alpha, (\text{ad}_w)_\beta \right], \forall \alpha \in \mathfrak{g}_w \text{ et } \forall \beta \in \mathfrak{g}_w(w).$$

*Proof.* C'est une application directe des propriétés de la forme de Killing sur chaque fibre.  $\square$

**Remark 2.** Le fibré dual  $\zeta_{\mathfrak{g}}^*$  a pour applications de transition

$$w \in W_{\alpha} \cap W_{\beta} \rightarrow \text{tr Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}(w)}$$

qui est la transposée de  $\text{Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}(w)}$  et le fibré  $\zeta_{\mathfrak{g}}^* \otimes \zeta_{\mathfrak{g}}$  a pour applications de transition

$$w \in W_{\alpha} \cap W_{\beta} \rightarrow \text{tr Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}(w)} \otimes \text{Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}(w)}$$

$$\text{tr Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}(w)} \otimes \text{Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}(w)} : \mathfrak{g}_w^* \otimes \mathfrak{g}_w \rightarrow \mathfrak{g}_w^* \otimes \mathfrak{g}_w$$

$$\text{tr Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}(w)} \otimes \text{Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}(w)}(l, u) = \text{tr Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}(w)}(l) \otimes \text{Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}(w)}(u), (l, u) \in \mathfrak{g}_w^* \otimes \mathfrak{g}_w$$

$$\text{tr Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}(w)}(l) \otimes \text{Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}(w)}(u) : \mathfrak{g}_w \rightarrow \mathfrak{g}_w$$

$$\text{tr Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}(w)}(l) \otimes \text{Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}(w)}(u)(x) = \text{tr Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}(w)}(l)(x) \cdot \text{Ad}_{\tau_{\alpha,\beta}(w)}(u), \forall g \in \mathfrak{g}_w$$

où  $\tau_{\alpha,\beta}$  sont les applications de transition du fibré  $\zeta$ . On peut ainsi définir les applications de transition du fibré  $\zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})}$ .

### 3. COCYCLES ET FIBRÉS DE LIE

On se donne un sous-groupe de Lie  $G \subset \text{Diff}(\mathcal{F})$  où  $\mathcal{F}$  est une variété réelle ou complexe et  $\mathcal{W}$  est une variété réelle de dimension finie. Un cocycle  $\tau$  sur  $\mathcal{W}$  à valeurs dans  $G$ , est la donnée d'un recouvrement localement fini  $\{W_{\alpha}\}$  de cartes de  $\mathcal{W}$  et une famille, notée

$$\tau_{\alpha\beta} : W_{\alpha} \cap W_{\beta} \rightarrow G \subset \text{Diff}(\mathcal{F}) \text{ si } W_{\alpha} \cap W_{\beta} \neq \emptyset,$$

vérifiant les propriétés 2.1, 2.2 et la propriété de cocycle 2.3. On pose

$$\mathcal{E} = \sum_{\alpha} W_{\alpha} \times \mathcal{F} \text{ et } E = \mathcal{E} / \sim$$

où

$$((w, x) \sim (v, y)) \Leftrightarrow (w = v \in W_{\alpha} \cap W_{\beta} \text{ et } y = \tau_{\alpha\beta}(w)(x)),$$

et on note  $\pi$  l'application projection définie par

$$\pi \left( \widetilde{(w, x)} \right) = w.$$

**Lemma 1.** Le quadruplet  $\zeta$ , défini par

$$\zeta = (E, \pi, \mathcal{W}, \mathcal{F}),$$

est un fibré de fibre  $\mathcal{F}$ , d'espace total  $E$ , de groupe de structure  $G$  et de mêmes applications de transition  $\tau_{\alpha\beta}$ .

**Remark 3.**  $E$  est une variété de dimension

$$\dim E = \dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{F}$$

si  $\mathcal{F}$  est une variété réelle de dimension finie et

$$\dim E = \dim \mathcal{W} + 2 \dim \mathcal{F}$$

si  $\mathcal{F}$  est une variété complexe de dimension finie.

**Definition 2.** Si le groupe  $G$  est un groupe de Lie, on dit que le cocycle est un cocycle de Lie. Si la fibre  $\mathcal{F}$  est un espace vectoriel topologique et  $G \subset \text{Gl}(\mathcal{F})$ , on dit que le cocycle est linéaire. Si la fibre est un espace de Hilbert séparable  $\mathcal{H}$ , le cocycle est hermitien si  $G$  est contenu dans l'ensemble des opérateurs hermitiens de  $\mathcal{H}$  et unitaire si il est contenu dans l'ensemble des opérateurs unitaires de  $\mathcal{H}$ .

**Theorem 3.** *Pour chaque cocycle de Lie  $\tau$  sur  $\mathcal{W}$  à valeurs dans  $G \subset \text{Diff}(\mathcal{F})$ , il existe un fibré*

$$\zeta_G = (E_{\zeta_G}, \pi_{\zeta_G}, \mathcal{W}, G)$$

où  $E_{\zeta_G}$  est une variété de dimension

$$\dim(E_{\zeta_G}) = \dim(\mathcal{W}) + \dim(G),$$

de fibre  $G$  et un fibré vectoriel

$$\zeta_{\mathfrak{g}} = (E_{\zeta_{\mathfrak{g}}}, \pi_{\zeta_{\mathfrak{g}}}, \mathcal{W}, \mathfrak{g})$$

où  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie de  $G$ .

*Proof.* Les constructions précédentes permettent de conclure.  $\square$

**Disgression:** En physique quantique une particule de l'univers  $\mathcal{W}$  est la donnée d'une carte ou voisinage ouvert de localisation d'une variété  $\mathcal{W}$  appelé l'espace support. L'ensemble des particules est la donnée d'une famille de cartes  $\{W_\alpha\}$ . On suppose que cette famille a une structure de cocycles, c'est-à-dire, qu'il existe des applications de transitions

$$\tau_{\alpha\beta} : W_\alpha \cap W_\beta \rightarrow G \subset \text{Diff}(\mathcal{H})$$

vérifiant 2.1, 2.2 et 2.3 avec  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert séparable appelé espace des mesures. Les interactions entre deux particules sont données par les applications de transition  $\tau_{\alpha\beta}$ . Puisque le groupe de structure est supposé être un groupe de Lie  $G$  de dimension finie, on peut définir le fibré  $\zeta_G$  où l'espace de base est la sous variété ouverte de  $\mathcal{W}$

$$\mathcal{W}_G = \cup_\alpha W_\alpha,$$

de fibre  $G$  et le fibré d'algèbre de Lie  $\zeta_{\mathfrak{g}}$  de fibre  $\mathfrak{g}$ . L'espace  $\mathcal{W}_G$  est une sous-variété ouverte de  $\mathcal{W}$  que l'on peut supposer connexe. Cette modélisation de l'univers permet de distinguer l'univers quantique ou univers des particules  $\mathcal{W}_G$  et l'univers relativiste  $\mathcal{W}$ . Pour cette modélisation, la question posée est la suivante, peut-on construire une métrique Lorentzienne  $g$ , compatible avec les interactions des particules, le problème mérite d'être approfondi.

#### 4. FORMES DIFFÉRENTIELLES SUR LE FIBRÉ $\zeta_{\mathfrak{g}}$

Soit  $\zeta$  un fibré d'état de fibre  $\mathcal{H}$ , le fibré  $\zeta_{\mathfrak{g}}$  est un fibré vectoriel de dimension finie de fibre  $\mathfrak{g} = T_{\mathbf{1}_G}G$ . Soit  $\xi^*$  le fibré cotangent sur  $\mathcal{W}$ , on note  $\wedge^n \xi^*$  la puissance  $n$ -ième extérieure de  $\xi$ , les sections de ce fibré sont les  $n$ -formes différentielles sur  $\mathcal{W}$ , on le note  $\Omega_{\mathcal{W}}^n$  et

$$\Omega_{\mathcal{W}} = \oplus_{n=0}^m \Omega_{\mathcal{W}}^n \text{ où } \Omega_{\mathcal{W}}^0 = C^\infty(\mathcal{W}, \mathbb{K}).$$

Soit  $\zeta_{\mathfrak{g}}$  le fibré d'algèbre de Lie associé au fibré  $\zeta$ , c'est un fibré vectoriel de dimension finie car  $G$  est de dimension finie. Le fibré  $(\wedge^n \xi^*) \otimes \zeta$  est le fibré des formes différentielles sur  $\mathcal{W}$  à valeurs dans  $\zeta$ , les sections

$$\Omega^n(\zeta) = \Gamma((\wedge^n \xi^*) \otimes \zeta)$$

du fibré  $(\wedge^n \xi^*) \otimes \zeta$  est l'espace des  $n$ -formes différentielles dans  $\zeta$ . Si  $\sigma \in \Omega^n(\zeta)$  alors  $\sigma(w)$  est une application  $n$ -linéaire alternée

$$\sigma(w) : T_w \mathcal{W} \times T_w \mathcal{W} \times \cdots \times T_w \mathcal{W} \rightarrow E_w(\zeta)$$

$n$ -fois

où  $E_w(\zeta)$  est la fibre de  $\zeta$  en  $w$ . On pose

$$\Omega(\zeta) = \bigoplus_{n=0}^m \Omega^n(\zeta) \text{ avec } \Omega^0(\zeta) = \Gamma(\zeta),$$

l'espace des formes différentielles dans le fibré  $\zeta$ .

Soit  $\zeta_{\mathfrak{g}}$  le fibré de Lie associé au fibré  $\zeta$ . On se fixe une connexion de Koszul  $\nabla$  sur  $\zeta_{\mathfrak{g}}$  et on note  $d^\nabla$  la dérivée extérieure associée,

$$d^\nabla : \Omega(\zeta_{\mathfrak{g}}) \rightarrow \Omega(\zeta_{\mathfrak{g}}), \quad d^\nabla(\Omega^n(\zeta_{\mathfrak{g}})) \subset \Omega^{n+1}(\zeta_{\mathfrak{g}})$$

avec  $d^\nabla$  est  $\mathbb{K}$ -linéaire et pour toute  $n$ -forme  $\omega \in \Omega_{\mathcal{W}}^n$  et toute section  $s$  de  $\Omega^p(\zeta_{\mathfrak{g}})$ ,  $d^\nabla$  vérifie la règle de Leibniz

$$d^\nabla(\omega \wedge s) = d\omega \wedge s + (-1)^n \omega \wedge d^\nabla(s), \quad \omega \in \Omega_{\mathcal{W}}^n \text{ et } s \in \Omega^0(\zeta_{\mathfrak{g}}),$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  si le fibré est réel et  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  si le fibré est complexe, où  $d$  est la dérivée extérieure dans l'algèbre graduée  $\Omega(\zeta)$  des formes différentielles sur le fibré cotangent avec

$$\nabla = d^\nabla|_{\Omega^0(\zeta_{\mathfrak{g}})} : \Omega^0(\zeta_{\mathfrak{g}}) \rightarrow \Omega^1(\zeta_{\mathfrak{g}}), \quad \Omega^0(\zeta_{\mathfrak{g}}) = \Gamma(\zeta_{\mathfrak{g}}),$$

avec  $\alpha \in \Omega^n(\zeta_{\mathfrak{g}})$  et  $X_0, X_1, \dots, X_n \in \Omega^0(\xi)$

$$\begin{aligned} & d^\nabla \alpha(X_0, X_1, \dots, X_n) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \nabla_{X_i} \left( \alpha(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n) \right) \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_n) \end{aligned}$$

où l'évaluation d'une section sur un champ de vecteur  $X$  de  $\mathcal{W}$ , notée

$$\nabla_X : \Omega^0(\zeta_{\mathfrak{g}}) \rightarrow \Omega^0(\zeta_{\mathfrak{g}}), \quad s \rightarrow \nabla_X s$$

$\nabla_X s(w)$  ne fait intervenir que  $X(w)$  et le 1-jet de  $s$  en  $w$  pour  $s \in \Omega^0(\zeta_{\mathfrak{g}})$  et s'étend linéairement en une opérateur sur  $\Omega(\zeta_{\mathfrak{g}})$  qui vérifie la relation de Leibniz, pour toute  $n$ -forme  $\omega$  et  $\forall s \in \Omega(\zeta_{\mathfrak{g}})$

$$\nabla_X(\omega \wedge s) = \mathcal{L}_X(\omega) \wedge s + (-1)^n \omega \wedge \nabla_X s$$

où  $\mathcal{L}_X(\omega)$  est la dérivée de Lie de la  $n$ -forme  $\omega \in \Omega_{\mathcal{W}}^n$  le long du champ  $X$ .

**Notation 1.** On rappelle que si  $\omega \in \Omega_{\mathcal{W}}^n$  et  $s$  est une section de  $\Omega^p(\zeta_{\mathfrak{g}})$  avec

$$s(w) : T_w \mathcal{W} \times \dots \times T_w \mathcal{W} \rightarrow \mathfrak{g}_w, \quad s(w)(x_1, \dots, x_p) \in \mathfrak{g}_w$$

alors

$$\begin{aligned} & (\omega \wedge s)(w)(x_1, x_2, \dots, x_{n+p}) \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{n,p\}} \varepsilon_\sigma \omega(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \cdot s(w)(x_{\sigma(n+1)}, \dots, x_{\sigma(n+p)}) \end{aligned}$$

où  $\text{Perm}\{n,p\}$  est formé des permutations de  $\{1, 2, \dots, n+p\}$  vérifiant

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(n) \text{ et } \sigma(n+1) < \dots < \sigma(n+p).$$

Si  $s \in \Omega^0(\zeta_{\mathfrak{g}})$  alors pour  $\omega \in \Omega_{\mathcal{W}}^n$ ,

$$\omega \wedge s = \left( \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{n,0\}} \varepsilon_\sigma \omega(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \right) \cdot s(w) = \omega \otimes s.$$

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  munie de l'application bilinéaire  $[\bullet, \bullet]$  induit une structure d'algèbre de Lie sur  $\mathfrak{g}_w = \pi_{\zeta_{\mathfrak{g}}}^{-1}(w)$ , dont la forme bilinéaire est notée  $[\bullet, \bullet]_w$ . Si  $s$  est une section de  $\Omega^p(\zeta_{\mathfrak{g}})$  et  $t$  est une section de  $\Omega^n(\zeta_{\mathfrak{g}})$ , on définit la section de  $\Omega^{p+n}(\zeta_{\mathfrak{g}})$

$$\begin{aligned} s \boxtimes t(w) &= \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{n,p\}} \varepsilon_{\sigma} \left[ s(w)(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}), t(w)(x_{\sigma(n+1)}, \dots, x_{\sigma(n+p)}) \right]_w. \end{aligned}$$

Si  $\alpha \in \Omega_{\mathcal{W}}^n$  et  $\beta \in \Omega_{\mathcal{W}}^p$  alors

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(w)(x_1, x_2, \dots, x_{n+p}) &= \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{n,p\}} \varepsilon_{\sigma} \alpha(w)(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \cdot \beta(w)(x_{\sigma(n+1)}, \dots, x_{\sigma(n+p)}) \end{aligned}$$

$\alpha \wedge \beta \in \Omega_{\mathcal{W}}^{n+p}$ .

**Remark 4.** Si  $\alpha \in \Omega_{\mathcal{W}}^n$ ,  $\beta \in \Omega_{\mathcal{W}}^p$  et  $s \in \Omega^0(\zeta_{\mathfrak{g}}) = \Gamma(\zeta_{\mathfrak{g}})$  alors

$$\alpha \wedge (\beta \otimes s) = (\alpha \wedge \beta) \otimes s.$$

L'ensemble des connexions de Koszul d'un fibré  $\zeta_{\mathfrak{g}}$  est muni d'une structure d'espace affine. Si  $\nabla_0$  et  $\nabla_1$  sont deux connexions de  $\zeta$  alors  $\nabla_1 - \nabla_0$  est un opérateur  $C^\infty(\mathcal{W})$ -linéaire de  $\Omega^0(\zeta_{\mathfrak{g}})$  à valeurs dans  $\Omega^1(\zeta_{\mathfrak{g}})$ , le lemme de tensorialité [3] donne l'existence d'une application  $\alpha \in \Omega^0(\zeta_{\mathfrak{g}}^* \otimes (\xi^* \otimes \zeta_{\mathfrak{g}}))$ , telle que

$$(\nabla_1 - \nabla_0)s(w) = \alpha(w)(s(w)), \forall w$$

les fibrés sont de dimension finie, on a les isomorphismes suivants

$$\Gamma(\zeta_{\mathfrak{g}}^* \otimes (\xi^* \otimes \zeta_{\mathfrak{g}})) = \Gamma(\xi^* \otimes (\zeta_{\mathfrak{g}}^* \otimes \zeta_{\mathfrak{g}})) = \Gamma(\xi^* \otimes \text{End}(\zeta_{\mathfrak{g}})) = \Omega^1(\text{End}(\zeta_{\mathfrak{g}})).$$

Toute connexion de Koszul  $\nabla_1$  s'écrit sous la forme

$$\nabla_1 = \nabla_0 + \alpha$$

où  $\alpha$  est un 1-forme du fibré  $\zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})}$ .

**Definition 3.** L'opérateur

$$R^\nabla = \nabla_1 \circ \nabla_0$$

représente la courbure de la connexion  $\nabla$ .

La courbure de la connexion de Koszul  $\nabla$  est un opérateur

$$R^\nabla : \Omega^0(\zeta_{\mathfrak{g}}) \rightarrow \Omega^2(\zeta_{\mathfrak{g}}),$$

cet opérateur associe à chaque section  $s$  du fibré  $\zeta_{\mathfrak{g}}$  une section du fibré  $(\wedge^2 \xi^*) \otimes \zeta$ . On rappelle que l'opérateur  $\nabla^2$  est  $C(\mathcal{W})$ -linéaire, la courbure est donc un opérateur  $C^\infty(\mathcal{W})$ -linéaire. Le lemme de tensorialité donne l'existence d'un morphisme

$$\rho \in \Gamma(\zeta_{\mathfrak{g}}^* \otimes (\wedge^2 \xi^* \otimes \zeta_{\mathfrak{g}})) = \Gamma(\wedge^2 \xi^* \otimes (\zeta_{\mathfrak{g}}^* \otimes \zeta_{\mathfrak{g}})) = \Gamma(\wedge^2 \xi^* \otimes \zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})}) = \Omega^2(\zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})})$$

tel que

$$R^\nabla(s)(w) = \rho(w)(s(w)), \forall w$$

la courbure s'identifie à une 2-forme du fibré  $\zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})}$ .

## 5. OPÉRATEUR DE HODGE

On munit l'univers d'une métrique riemannienne  $g$ . On définit l'opérateur de Hodge  $*$  induit par la métrique  $g$  sur  $\Omega_{\mathcal{W}}$

$$* : \Omega_{\mathcal{W}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{W}},$$

avec  $*|_{\Omega_{\mathcal{W}}^n}$  est un isomorphisme de  $\Omega_{\mathcal{W}}^n$  sur  $\Omega_{\mathcal{W}}^{m-n}$ ,  $m = \dim \mathcal{W}$ . L'opérateur de Hodge  $*_{\mathbf{1}}$  sur  $\Omega(\zeta_{\mathfrak{g}})$  est défini par si  $\omega \in \Omega_{\mathcal{W}}^n$  et  $s \in \Omega^0(\zeta_{\mathfrak{g}})$

$$*_{\mathbf{1}}(\omega \otimes s) = (*\omega) \otimes s \text{ avec } *_{\mathbf{1}} = * \otimes \mathbf{1},$$

où  $\mathbf{1}$  est la section identique du fibré  $\zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})}$ . On peut généraliser cet opérateur en posant

$$*_{\tau}(\omega \otimes s) = (*\omega) \otimes \tau(s)$$

où  $\tau \in \Omega^0(\zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})})$  avec

$$\tau(s)(w) = \tau(w)(s(w)).$$

**Lemma 2.** Si  $\eta \in \Omega^k(\zeta_{\mathfrak{g}})$  alors

$$(*_{\tau})^2 \eta = (-1)^{k(n-k)} \mathbf{1}_{\Omega^k(\zeta_{\mathfrak{g}})} \otimes \tau^2(\eta),$$

en particulier si  $\tau^2 = \mathbf{1}_{\Omega^0(\zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})})}$

$$(*_{\tau})^2 \eta = (-1)^{k(n-k)} \eta$$

**Definition 4.** Si  $\sigma \in \Omega^k(\zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})})$  et  $\tau \in \Omega^k(\zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})})$ ,

$$\begin{aligned} & (\sigma \wedge \tau)(w)(x_1, x_2, \dots, x_{n+p}) \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{n,p\}} \varepsilon_{\sigma} \sigma(w)(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \circ \tau(w)(x_{\sigma(n+1)}, \dots, x_{\sigma(n+p)}) \end{aligned}$$

$\forall x_i \in T_w \mathcal{W}$ .

Si  $\dim \mathcal{W} = 4$ ,  $R^{\nabla}$  s'identifie à une section de  $(\wedge^2 \xi^*) \otimes \zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})}$ , l'opérateur de Hodge envoie cette section sur une section du fibré  $(\wedge^2 \xi^*) \otimes \zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})}$ , notée  $*_{\mathbf{1}} R^{\nabla}$ . La section

$$R^{\nabla} \wedge (*_{\mathbf{1}} R^{\nabla})$$

est une 4-forme différentielle dans  $\zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})}$ . Soit  $\omega$  la forme volume associée à la métrique riemannienne  $g$ , alors il existe une unique section  $\sigma^{\nabla}$  de  $\zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})}$  telle que

$$R^{\nabla} \wedge (*_{\mathbf{1}} R^{\nabla}) = \omega \otimes \sigma^{\nabla}.$$

**Definition 5.** Le Lagrangien de Yang-Mills de la connexion  $\nabla$  du fibré  $\zeta_{\mathfrak{g}}$  est défini par

$$\mathcal{L}_{\nabla} = \int_{\mathcal{W}} \text{Trace}(\sigma^{\nabla}) \omega$$

et par abus de langage

$$\mathcal{L}_{\nabla} = \int_{\mathcal{W}} \text{Trace}(R^{\nabla} \wedge (*_{\mathbf{1}} R^{\nabla})).$$

Le Lagrangien du fibré d'état  $\zeta$  avec groupe de structure un groupe de Lie  $G$  de dimension finie est l'opérateur  $\mathcal{L}$  de l'ensemble des connexions de Koszul du fibré d'algèbre de Lie  $\zeta_{\mathfrak{g}}$  à valeurs dans  $]0, +\infty[$

$$\mathcal{L} : \nabla \rightarrow \mathcal{L}_{\nabla} = \int_{\mathcal{W}} \text{Trace}(R^{\nabla} \wedge (*_{\mathbf{1}} R^{\nabla})).$$

On peut généraliser la notion de Lagrangien de Yang-Mills sur une variété de dimension  $n \geq 3$ . L'opérateur de courbure  $R^\nabla$  est toujours une section  $(\wedge^2 \xi^*) \otimes \zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})}$  mais  $*_1 R^\nabla$  devient une section de  $(\wedge^{n-2} \xi^*) \otimes \zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})}$ , le produit extérieur

$$R^\nabla \wedge (*_1 R^\nabla)$$

est une section de  $(\wedge^n \xi^*) \otimes \zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})}$  qui s'écrit sous la forme

$$\omega \otimes \sigma^\nabla$$

avec  $\sigma^\nabla \in \Omega^0(\zeta_{\text{End}(\mathfrak{g})})$  où  $\omega$  est la forme volume associée à la métrique riemannienne  $g$  sur  $\mathcal{W}$ . Si on change de métrique riemannienne alors les sections  $\sigma_j^\nabla$  pour  $j = 1, 2$  obtenue pour ces deux métriques  $g_j$  sont proportionnelles

$$\sigma_2^\nabla = \phi \sigma_1^\nabla, \phi \in C^\infty(\mathcal{W}) \text{ avec } \omega_2 = \phi \omega_1$$

où  $\omega_j$  sont les  $n$ -formes volumes associées à  $g_j$ . On voit que le Lagrangien dépend du choix de la métrique riemannienne choisie. L'univers est muni d'une métrique Lorentzienne  $g_L$ . Comment construire à partir de la métrique Lorentzienne, une métrique riemannienne  $g$  qui permet de définir un Lagrangien de Yang-Mills. L'idée de cette construction est obtenue par rotation de Wick autour des champs chronologiques de l'univers  $\mathcal{W}$  définis par la métrique de Lorentz  $g_L$  [2].

## 6. CONCLUSION

La question posée au début de cet article était la suivante: " Peut-on construire un Lagrangien de Yang-Mills sur les fibrés d'état". La réponse est affirmative si on impose au fibré d'état d'avoir un groupe de structure qui soit un groupe de Lie de dimension finie. Ce procédé de construction introduit la notion de fibré de Lie  $\zeta_G$  associé au groupe de structure  $G$  et le fibré d'algèbre de Lie  $\zeta_{\mathfrak{g}}$  associé à l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Sur le fibré vectoriel  $\zeta_{\mathfrak{g}}$  de dimension finie, les constructions de Yang-Mills sont possibles.

## REFERENCES

- [1] Jonot J.L., "Axiomatisation quantique sur les fibrés d'état". 2016, hal-01306529v2
- [2] Jonot J.L., "Sur l'espace-temps d'Einstein". 2015, hal-01063803v3
- [3] Paulin F., "Leçons de géométrie riemannienne"

[https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~paulin/notescours/cours\\_georiem.pdf](https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~paulin/notescours/cours_georiem.pdf)

## REFERENCES

*E-mail address:* jean-louis.jonot@ac-versailles.fr