



HAL
open science

Modélisation réduite des transferts radiatifs dans l'habitat par une méthode hiérarchique

Mickaël Le Bohec, Denis Lemonnier, Didier Saury

► **To cite this version:**

Mickaël Le Bohec, Denis Lemonnier, Didier Saury. Modélisation réduite des transferts radiatifs dans l'habitat par une méthode hiérarchique. Congrès annuel de la Société Française de Thermique, Jun 2019, Nantes, France. hal-02905701

HAL Id: hal-02905701

<https://hal.science/hal-02905701>

Submitted on 23 Jul 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation réduite des transferts radiatifs dans l'habitat par une méthode hiérarchique

Mickaël LE BOHEC^{1*}, Denis LEMONNIER², Didier SAURY²

¹ Aix Marseille Université, CNRS, IUSTI UMR 7343, 13453, Marseille, France

² Institut Pprime, UPR CNRS 3346, CNRS / ISAE-ENSMA / Université de Poitiers,

1 avenue Clément Ader, BP 40109, F-86961 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France

* (auteur correspondant : mickael.le-bohec@univ-amu.fr)

Résumé - L'étude des transferts radiatifs dans l'habitat peut se ramener à la résolution de l'équation des radiosités. Celle-ci nécessite l'évaluation de couplages géométriques entre les éléments de la scène appelés facteurs de forme. Leur obtention est particulièrement ardue, notamment lorsqu'il s'agit de tenir compte d'éventuelles obstructions. Outre l'évaluation de ces facteurs, le système à résoudre est très lourd, puisque chaque surface interagit, le plus souvent, avec toutes les autres et que le nombre de noeuds mis en jeu dans la description d'une scène complexe est important. Nous présentons une méthode de résolution qui raffine le maillage d'une scène tout en construisant simultanément une représentation à différentes échelles des facteurs de forme entre ses éléments, dans le but de ne pas calculer tous les échanges à la résolution la plus fine. Elle permet ainsi de réduire considérablement le temps de calcul et rend son utilisation possible en bureau d'étude.

Nomenclature

Symboles latins

| | |
|-------|-------------------------------------|
| A | surface, m^2 |
| E | éclairage, $W \cdot m^{-2}$ |
| F | facteur de forme, — |
| J | radiosité, $W \cdot m^{-2}$ |
| k | nombre d'éléments initiaux, — |
| m | nombre d'éléments créés, — |
| M | émittance, $W \cdot m^{-2}$ |
| n | nombre d'éléments dans une scène, — |
| n_F | nombre de facteurs de forme, — |
| v | visibilité entre deux points, — |
| V | visibilité entre deux surfaces, — |

Symboles grecs

| | |
|------------|---------------------------------------|
| ϵ | erreur, — |
| ρ | réflectivité, — |
| τ_r | taux de réduction, — |
| φ | densité de flux net, $W \cdot m^{-2}$ |

Indices et exposants

| | |
|------------|-------------------------------------|
| ϵ | relatif à un seuil |
| i, j | indices d'éléments |
| ij | de l'élément i vers l'élément j |

Accents

| | |
|-----------------------|------------------------|
| $\hat{}$ | quantité adimensionnée |
| $\tilde{}$ | quantité corrigée |

1. Introduction

La modélisation des échanges radiatifs peut se faire par l'équation des radiosités [1]. Dans sa version la plus courante, ce modèle suppose que le milieu est transparent et que les surfaces sont opaques, grises et diffuses. C'est dans ce cadre que nous nous plaçons. Une fois le domaine discrétisé en n éléments sur lesquels la température, la réflectivité et l'éclairage sont supposés uniformes, l'équation discrète à résoudre est la suivante :

$$J_i = M_i + \rho_i \sum_{j=1}^n F_{ij} J_j \quad (1)$$

Le facteur de forme F_{ij} traduit le couplage géométrique entre les éléments i et j . Il représente la part d'énergie radiative quittant la surface i et arrivant directement sur j . Son obtention est

une tâche complexe et il n'en sera pas question dans ce qui suit. On pourra se référer à [2] pour une bonne introduction au sujet.

En thermique, les flux nets sur les surfaces sont plus utiles que les radiosités. Ils se déduisent de la façon suivante :

$$\varphi_i = J_i - E_i \quad (2)$$

Pour résoudre le système, il faut d'abord évaluer les n^2 interactions potentielles entre les éléments et pour chacune d'elles, tester si les $n - 2$ autres éléments ne s'interposent pas, totalement ou partiellement. L'obtention de la matrice du système a donc un coût de l'ordre de $O(n^2)$ si les obstructions n'ont pas à être testées et d'ordre $O(n^3)$ dans le cas contraire.

Nous présentons dans ce papier une méthode multirésolution permettant de réduire cette complexité à un ordre $O(k^2 + m)$ sans obstructions et $O(k^3 + km)$ avec, où k est le nombre d'éléments du maillage initial et m le nombre d'éléments créés pendant son raffinement.

Nous commencerons par présenter la méthode dans son ensemble avant de s'attarder sur la description de quelques itérations de raffinement. Ceci afin de montrer l'influence des différents paramètres permettant le contrôle du calcul. Nous expliquerons ensuite comment résoudre le système alors que les interactions n'ont pas toutes lieu à la même échelle. Nous présenterons enfin l'application de cette méthode sur une scène radiative représentative de l'habitat. Nous montrerons qu'une erreur inférieure à 1 % peut être atteinte en ne calculant que quelques pourcents du problème.

2. Méthode hiérarchique des radiosités

2.1. Présentation générale

La méthode hiérarchique des radiosités [3] repose sur le fait que les échanges radiatifs peuvent être évalués à des niveaux de détail différents suivant leur influence sur la solution. Les échanges dont l'impact est modeste peuvent être évalués à un niveau de détail faible, tandis que ceux dont l'effet est important doivent l'être à un niveau élevé.

Cette méthode construit donc un maillage multirésolution de la scène dans le but de permettre aux différentes mailles d'interagir à des échelles adaptées. Ces différents niveaux sont constitués de subdivisions successives du maillage de départ. Toute subdivision d'un élément entraîne la création d'un nouveau niveau de détail localisé sur cet élément. Ainsi, chaque maille initiale est la racine d'une arborescence dont chaque étage correspond à un niveau de détail comme le montre la figure 1. Le maillage complet de la scène est donc l'union des arborescences des éléments initiaux.

La subdivision des éléments a pour but d'affiner le calcul des échanges. Au préalable, l'intensité des transferts est évaluée au moyen d'un *estimateur* puis comparée à un *seuil* fourni par l'utilisateur. Les éléments visés par les transferts dont l'estimateur est supérieur au seuil sont subdivisés. Cela aura pour conséquence de densifier le maillage là où les transferts sont les plus intenses.

Puisque les échanges doivent être connus à un certain niveau de détail pour déterminer s'il est nécessaire de raffiner le calcul, tous les échanges initiaux doivent être évalués pour amorcer la méthode. Si la scène est initialement composée de k éléments, et qu'il n'y a pas d'obstructions, le coût de cette première évaluation est d'ordre $O(k^2)$. Le reste du travail consistera à calculer certains de ces transferts à des niveaux supérieurs. La complexité globale est en réalité d'ordre $O(k^2 + m)$ avec m le nombre d'éléments créés [4]. Ainsi, plus le maillage de départ est grossier,

c'est-à-dire plus k est faible, et plus la méthode hiérarchique est intéressante.

Le raffinement, lorsqu'il est nécessaire, est effectué pour un couple de mailles donné ce qui signifie qu'un même élément peut interagir avec d'autres à des niveaux de détail différents. Dans l'exemple de la figure 1 l'élément 2 interagit avec l'élément 3 à un niveau de détail supérieur à celui de son interaction avec l'élément 1. Ces interactions sont représentées par des *liens*. La puissance reçue par une maille peut donc venir de multiples niveaux. L'étape de résolution devra donc faire communiquer ces différentes échelles pour pouvoir accéder à la solution.

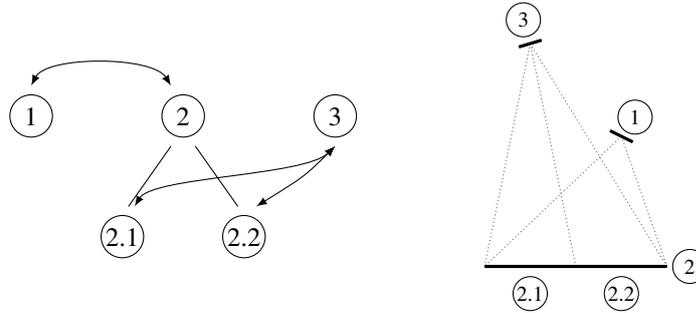


Figure 1: Exemple de configuration où les échanges (figurés à droite par des cônes) se font à différents niveaux de détail. L'échange entre les éléments 1 et 2 n'a pas été raffiné alors que celui entre les éléments 2 et 3 l'a été une fois. L'élément 2 interagit donc lui même avec l'élément 1 tandis qu'il interagit avec l'élément 3 par l'intermédiaire de ses "enfants" (mailles 2.1 et 2.2).

2.2. Raffinement

Pour aiguiller le raffinement, il faut donc estimer les échanges entre les éléments. Plusieurs estimateurs peuvent être utilisés pour cela. Le facteur de forme F_{ij} et plus encore l'éclairement $E_{ij} = F_{ij}J_i$ sont très utilisés dans la communauté du rendu graphique où les échanges sont dominés par quelques mailles représentant l'éclairage et qui sont les seuls à émettre de l'énergie (la lumière). Nous proposons l'emploi du flux net dans celui de la simulation thermique :

$$\varphi_{ij} = F_{ij}(J_i - J_j) \quad (3)$$

2.2.1. Cas général

La procédure de raffinement opère de manière récursive pour chaque couple d'éléments. Ainsi, pour un couple de mailles P et Q , elle compare les estimateurs φ_{pq} et φ_{qp} de la densité de leurs transferts mutuels de puissance au seuil φ_ε pour savoir s'il faut raffiner. Si au moins l'un d'entre eux est supérieur à φ_ε , c'est le cas. L'utilisation comme estimateur de la densité du transfert plutôt que du transfert en lui-même permet de déterminer la maille à subdiviser, le cas échéant, en choisissant celle sur laquelle la densité est la plus forte. Si au contraire les deux estimateurs sont inférieurs au seuil alors il n'est pas nécessaire de raffiner et un lien est créé entre P et Q . Si un raffinement a eu lieu, cette procédure est reproduite entre l'élément non raffiné et les enfants de l'élément raffiné.

Pour pouvoir utiliser la densité de flux net comme estimateur il faut disposer d'une solution initiale¹. Le processus est donc *progressif*, alternant résolution et raffinement jusqu'à convergence. Cette progressivité est également mise à profit en diminuant à chaque étape la valeur du

1. Obtenue avec $\varphi_\varepsilon = \infty$ car tous les échanges seront nécessairement inférieurs.

seuil. Cette logique permet de résoudre rapidement le système dans les premières étapes pour avoir une solution qui constituera une meilleure base de départ pour les suivantes. En pratique, on divise par deux le seuil à chaque étape soit $\varphi_{\varepsilon,k+1} = \varphi_{\varepsilon,k}/2$. C'est donc le plus petit seuil de cette suite, $\varphi_{\varepsilon,min}$, qui caractérise la précision finale d'un calcul.

La figure 2 illustre le fonctionnement de cette procédure sur quelques itérations. La configuration géométrique est présentée en haut, suivie par le profil de l'estimateur φ_{pq} du transfert de P vers Q et par son équivalent corrigé $\check{\varphi}_{pq}$. Celui-ci est obtenu par la relation :

$$\check{\varphi}_{pq_i} = \frac{A_q}{A_{q_i}} \varphi_{pq_i} \quad (4)$$

où Q_i désigne un descendant de Q . Il n'intervient pas dans le calcul mais permet de comparer des échanges entre mailles de tailles différentes. Le profil continu de l'échange réel est tracé avec un trait fin tandis que le profil discret de l'estimateur est représenté par un trait gras. Les échanges sont quant à eux figurés par un cône en pointillé. Pour simplifier, l'un des éléments est supposé indivisible. Le processus est ainsi plus facilement représentable puisque les subdivisions interviennent sur un seul élément.

Évidemment, au début de la première étape, aucune subdivision n'a eu lieu et l'échange est toujours représenté grossièrement par une unique valeur. Celle-ci étant inférieure au seuil $\varphi_{\varepsilon,1}$, il n'est pas nécessaire de raffiner et la procédure s'arrête pour ce couple d'éléments. Après avoir parcouru tous les autres échanges et avoir résolu le système, si $\varphi_{\varepsilon,min}$ n'est pas atteint, une nouvelle étape commence. Cette fois-ci, φ_{pq} est supérieur à $\varphi_{\varepsilon,2}$ et l'élément Q est subdivisé, mais comme les nouveaux échanges sont encore supérieurs au seuil, ils sont affinés de nouveau. À la

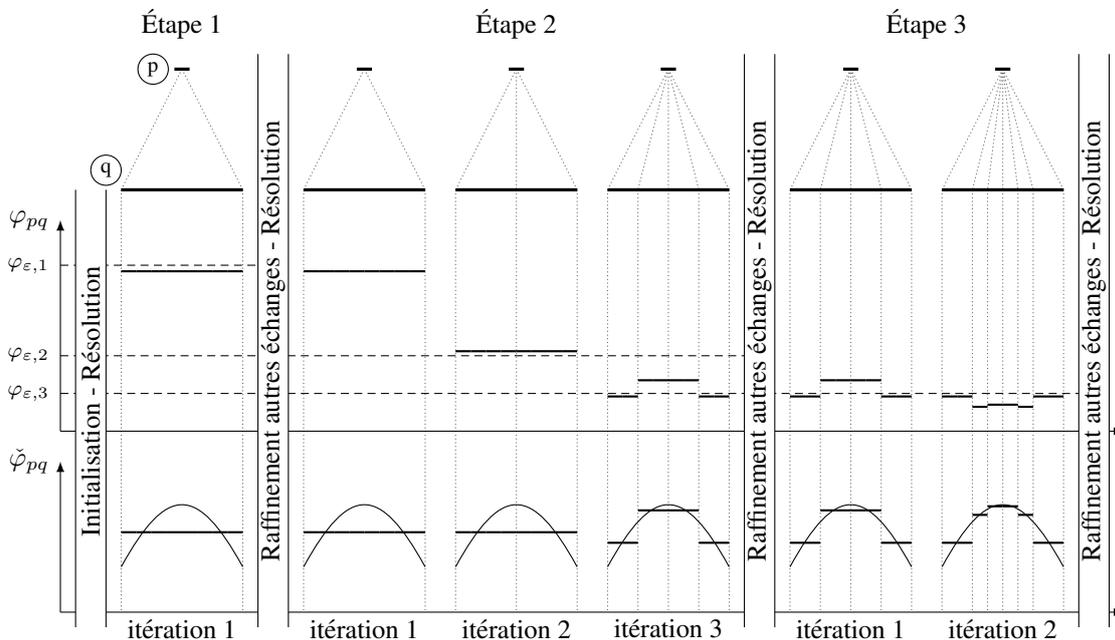


Figure 2: Mise en œuvre de la procédure de raffinement. Chaque étape est caractérisée par un seuil et est composée d'une phase de raffinement et d'une autre de résolution. Sur cette figure, la première itération d'une étape correspond strictement à la dernière de la précédente ce qui signifie que les résolutions ne modifient pas la radiosité J_p et J_q . En pratique c'est toujours le cas, sinon il n'y aurait pas d'intérêt à utiliser une suite décroissante de seuils.

troisième itération, tous les échanges sont inférieurs au seuil et le raffinement s'arrête. Lors de la troisième étape, seuls les échanges sur les bords sont inférieurs à $\varphi_{\varepsilon,3}$. Il n'est pas nécessaire de les raffiner. Les échanges du centre restent néanmoins trop importants et la procédure continue pour eux seuls. Le profil de $\check{\varphi}_{pq}$ montre bien que les échanges les plus importants ont été davantage subdivisés. Cette procédure continue jusqu'à atteindre $\varphi_{\varepsilon,min}$.

Pour éviter des raffinements trop importants, voire infinis, notamment dans les angles, on fixe une taille de maille minimale A_ε , en dessous de laquelle on cesse de subdiviser les éléments.

2.2.2. En présence d'obstruction

Le calcul de la visibilité entre éléments tire grandement profit de la logique hiérarchique du raffinement. En effet, le raffinement progressif permet d'exploiter l'information de visibilité obtenue à un certain niveau de détail dans les niveaux supérieurs. On évite ainsi certains calculs. En effet, si deux mailles se voient intégralement, c'est-à-dire si $V_{pq} = 1$, alors il n'est plus nécessaire de tester la visibilité entre les sous éléments issus de leurs éventuels raffinements. De même, si deux mailles ne se voient pas, c'est-à-dire si $V_{pq} = 0$, alors la procédure de raffinement peut s'arrêter. Seules les configurations dans lesquelles les éléments se voient partiellement, c'est-à-dire lorsque $V_{pq} \in]0, 1[$, nécessitent le calcul effectif de la visibilité.

La figure 3 présente le déroulement du processus de raffinement dans un cas où l'échange considéré comporte un obstacle. Dans la première itération, la visibilité est partielle. Elle est donc de nouveau calculée pour les deux échanges élémentaires de la seconde itération. Puisqu'elle est encore partielle, elle est une nouvelle fois évaluée pour les échanges de la troisième. À ce stade, la visibilité n'a plus à être calculée puisqu'elle est totale ($V_{pq} = 1$) sur les bords et nulle au centre ($V_{pq} = 0$). Si la résolution maximale n'est pas déjà atteinte, les échanges sur les bords pourront être raffinés sans calcul de visibilité tandis que les échanges au centre n'ont plus lieu d'être affinés puisqu'ils sont nuls.

Dans cet exemple, le seuil a été choisi nul et, malgré cela, le problème a bien été réduit puisqu'on n'évalue que six échanges à la résolution la plus fine au lieu des huit possibles². En

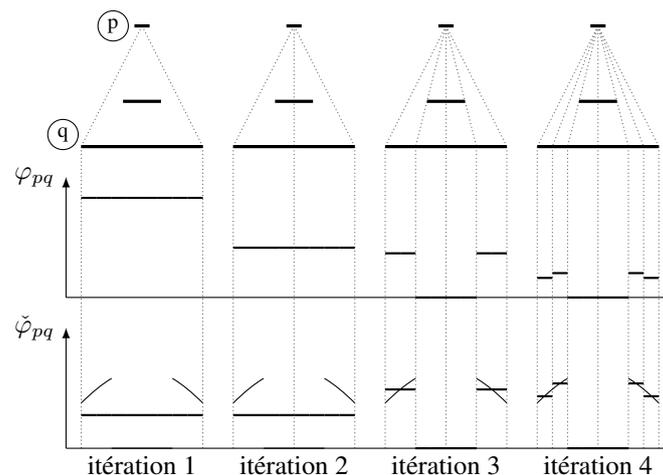


Figure 3: Mise en œuvre de la procédure de raffinement dans un cas comprenant un obstacle. Puisque les visibilités sont soit totales soit nulles à partir de la troisième itération, il n'est plus nécessaire de les évaluer dans la quatrième. Lorsqu'elles sont nulles, le raffinement s'arrête.

2. Si les deux échanges du centre avaient été subdivisés, il y en aurait deux de plus soit huit au total.

présence d'obstruction, le choix d'un seuil nul permet donc de comprimer un problème sans perte d'information puisque les échanges non évalués sont eux-même nuls.

En plus de cela, le maillage multirésolution de la méthode hiérarchique permet de limiter le nombre d'éléments à tester lors de chaque calcul de visibilité. En effet, il suffit de remarquer qu'une maille inclut ses propres subdivisions. Pour évaluer une éventuelle occlusion entre deux éléments P et Q , il suffit donc de tester les k mailles initiales. En présence d'obstruction la méthode a donc une complexité de l'ordre de $O(k^3 + km)$.

2.3. Résolution

Une fois la scène entièrement raffinée et la hiérarchie intégralement construite, il reste à résoudre le système des radiosités. Pour cela chaque élément doit *regrouper*, au travers des liens qui ont été créés, l'énergie qui lui revient, avant de la *transmettre* à sa hiérarchie. Ces étapes sont répétées jusqu'à convergence de la solution.

A l'issue de l'étape de regroupement, les radiosités et densités de flux net de chaque maille ne tiennent pas encore compte de l'influence d'échanges ayant lieu à d'autres niveaux de hiérarchie. La résolution est donc incomplète. L'étape de transmission vise à la finaliser en faisant communiquer entre eux les éléments d'une même hiérarchie. Elle a également pour conséquence de résoudre le système pour *chaque* niveau de détail du maillage.

Pour cela, on commence par compléter les niveaux de détails les plus importants du maillage en transmettant aux extrémités de la hiérarchie la densité d'énergie de l'ensemble de leur ascendance. Puisque chaque niveau de détail recouvre intégralement le niveau précédent, chaque niveau inférieur est obtenu en faisant la moyenne pondérée par les surfaces des densités d'énergie de leurs fils.

3. Réduction de modèle

Nous allons à présent appliquer la méthode hiérarchique (mh) présentée précédemment à un exemple concret issu de l'habitat et la comparer à la méthode conventionnelle (mc) dont la matrice est pleine. Pour qu'une telle comparaison ait un sens, il faut qu'elle se fasse à même résolution *maximale*.

3.1. Définitions

Commençons par définir les indicateurs que nous allons utiliser pour caractériser la méthode. Le taux de réduction (5) est défini comme la part de facteurs de forme qu'il n'est pas nécessaire de calculer pour obtenir une solution, à même résolution maximale, avec la méthode hiérarchique plutôt qu'avec la méthode conventionnelle. Il permet de juger de la capacité de la méthode hiérarchique à réduire le modèle.

$$\tau_r = 1 - \frac{n_{F,mh}}{n_{F,mc}} \quad (5)$$

Comme nous l'avons vu, un seuil nul entraîne le calcul de l'ensemble des échanges à la résolution la plus fine (hormis ceux dans lesquels intervient une obstruction). La solution obtenue de cette manière nous servira de référence puisqu'elle est identique à celle que nous aurions eu avec une méthode conventionnelle, les facteurs de forme nuls n'ayant aucun impact. Notre mesure de l'erreur sera la norme 2 relative entre les champs de flux net :

$$\epsilon = \frac{\|\varphi_{mh} - \varphi_{mc}\|_2}{\|\varphi_{mc}\|_2} \quad (6)$$

3.2. Résultats

La scène étudiée est un salon occupé par deux personnes et équipé d'une table basse et d'une chaise. La source est une cheminée dont le foyer est à 275 °C. La température de surface des occupants est de 30 °C tandis que le reste de la pièce (meubles compris) est à 19 °C. Toutes les surfaces ont une émissivité de 0,95. Le maillage initial représente une surface totale de 39,27 m² répartie en 188 éléments. Après raffinement jusqu'à une résolution maximale d'environ 10 cm², le niveau de détail le plus fin est composé de 27116 éléments. Sans méthode hiérarchique il faudrait donc évaluer 368 millions de facteurs de forme³.

La figure 4 présente l'évolution du taux de réduction et de l'erreur en fonction du seuil minimum. Au départ, le taux de réduction est presque de 100 % car le nombre de facteurs de forme calculé pour l'étape initiale est négligeable devant le nombre total.

Le premier constat à faire concerne la réduction du problème qui a lieu lorsque le seuil tend vers zéro. Il est de 45,1 % ce qui est déjà significatif alors même que tout le potentiel de la méthode n'est pas exploité. En effet, ce sont les seules obstructions qui ont permis cette réduction. On remarque également que les premières et dernières étapes de calcul évaluent une faible proportion du problème, environ 5 % pour des seuils supérieurs à 10⁻⁶ et 10 % pour des seuils inférieurs à 10⁻⁸, alors que 40 % des facteurs de forme sont calculés en quelques étapes pour des seuils variant de 10⁻⁶ à 10⁻⁸. Descendre sous une erreur de 0,01 % est donc coûteux.

La figure 5 montre les profils de densité de flux net reçue dans le salon pour deux seuils minimum différents : la solution de référence obtenue avec $\hat{\varphi}_{\varepsilon, \min} = 0$ et la solution obtenue avec $\hat{\varphi}_{\varepsilon, \min} = 1/2^{13} \approx 10^{-4}$. L'écart entre ces deux solutions est de 1,88 % et on constate que la différence est quasiment imperceptible. Sauf que dans le premier cas, le taux de réduction du problème est de 45,1 % et le temps de calcul de 3 j et 17 h alors que dans le second, le taux de réduction est de 99,3 % et le temps de calcul de 52 min⁴. L'acceptation de ce niveau d'erreur permet de diviser le temps de calcul et le nombre de facteur de forme évalués par 100.

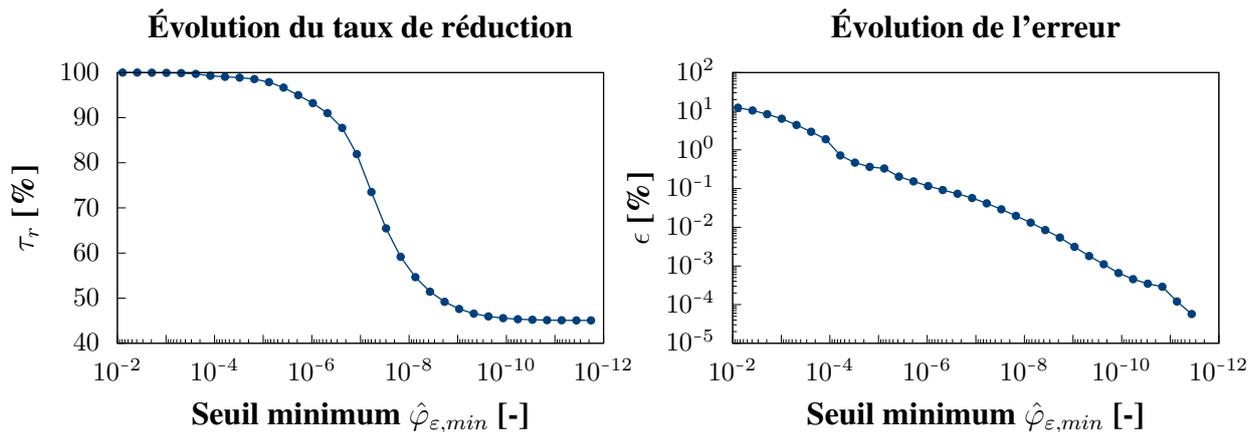


Figure 4: Évolution du taux de réduction (à gauche) et de l'erreur (à droite) en fonction du seuil minimum utilisé. Le problème est adimensionné par l'écart maximal d'émittance $M_{max} - M_{min}$.

3. $n_{F,mc} = n(n-1)/2$, c'est-à-dire la moitié de la matrice moins sa diagonale en exploitant la réciprocity du facteur de forme $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$ et le fait qu'un élément plan ne se voit pas lui-même.

4. Calcul effectué par un processeur Intel® Core™ i5-5200U de 2,02 GHz.

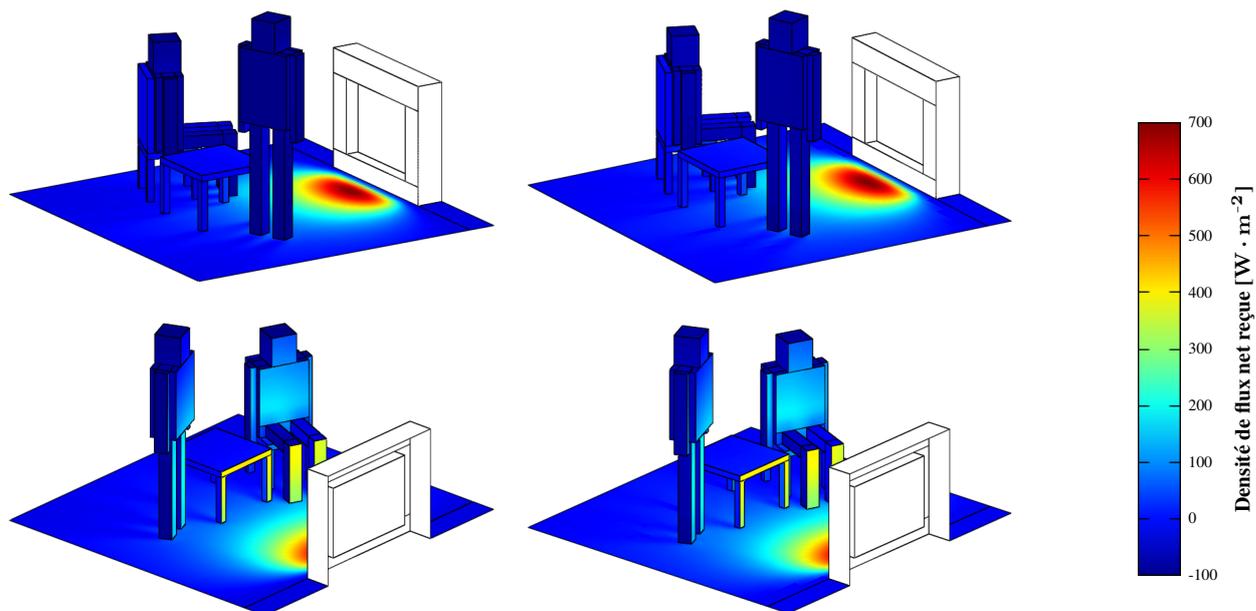


Figure 5: Profil de densité de flux net reçue dans un salon meublé, avec un seuil minimum de $\hat{\varphi}_{\varepsilon, \min} = 0$ (à gauche) et de $\hat{\varphi}_{\varepsilon, \min} = 1/2^{13} \approx 10^{-4}$ (à droite). La solution de droite a demandé 100 fois moins de ressources pour un écart de seulement 1,88 %.

4. Conclusion

Nous avons présenté la méthode hiérarchique des radiosités dans un contexte de simulation thermique dans l'habitat. Pour cela nous avons introduit un nouvel estimateur des échanges, le flux net. Nous avons montré que cette technique permet de réduire considérablement la complexité algorithmique du calcul des transferts radiatifs, notamment en présence d'obstructions.

L'exemple que nous avons étudié nous a montré que même sans exploiter le seuillage des échanges, il était possible de réduire amplement le problème et d'accéder à une solution exacte⁵ sans cela inaccessible. L'utilisation d'un seuil permet d'obtenir rapidement une solution fidèle moyennant l'acceptation d'une erreur.

Références

- [1] M. F. Modest, *Radiative heat transfer*, Academic press, 2013.
- [2] M. F. Cohen, J. R. Wallace : *Radiosity and realistic image synthesis*. Elsevier, 1993.
- [3] P. Hanrahan, D. Salzman et L. Aupperle : A rapid hierarchical radiosity algorithm. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 25(4) :197–206, Juillet 1991.
- [4] M. Le Bohec, *Contribution du rayonnement au confort thermique et aux économies d'énergie dans l'habitat*, Thèse de Doctorat, ISAE-ENSMA, Poitiers, Décembre 2017, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01699156>.

Remerciements

Les auteurs remercient le Groupe Atlantic et l'ANRT pour le financement de ces recherches.

5. Correspondant à la solution de référence.