



Fascination et exemplarité de l'arithmétique

Nicolas Bouleau

► To cite this version:

| Nicolas Bouleau. Fascination et exemplarité de l'arithmétique. 2020. hal-02904949v1

HAL Id: hal-02904949

<https://hal.science/hal-02904949v1>

Preprint submitted on 22 Jul 2020 (v1), last revised 14 Aug 2020 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Fascination et exemplarité de l'arithmétique.

Nicolas BOULEAU

Juillet 2020

*A Gustave Choquet, professeur généreux,
et philosophe profond de la question
« découvrir ou inventer ».*

L'histoire des mathématiques depuis des siècles ainsi que ses développements récents montrent clairement que l'arithmétique et la théorie des nombres suscitent un engouement d'une nature toute particulière chez le mathématicien qu'il soit amateur ou chercheur de haut niveau.

C'est la question que nous approfondissons ici en partant d'exemples concrets où cette fascination est apparente et analysable puis en discutant une réponse plus philosophique par l'exemplarité de l'arithmétique.

Les formules qui portent sur les nombres entiers ont une prégnance toute particulière. Elles donnent l'impression d'une cristallisation remarquable, éternelle, une trouvaille révélée d'une réalité incontestable et de surcroît compréhensible par le bétien. Les formules combinatoires de Ramanujan en sont un exemple fameux qui montre que chez certains esprits la créativité en ce domaine ne demande pas le préalable d'une vaste culture mathématique. Nous commençons la discussion par le volet psychologique.

I. Fascination.

Dans son célèbre *Essai sur la théorie des nombres* Legendre écrit "Il est à croire aussi qu'Euler avait un goût particulier pour ce genre de recherches, et qu'il s'y livrait avec une sorte de passion, comme il arrive à tous ceux qui s'en occupent". Courtois euphémisme! J'irais jusqu'à dire que pour le chercheur la théorie des nombres doit être consommée avec modération. C'est le domaine le plus addictif qui soit. Pour beaucoup de raisons notamment par le fait qu'on y trouve fréquemment des formules curieuses qui nous donnent l'impression de déboucher sur un jardin à la française mais où l'ordonnement apparent se change rapidement, hélas, en un taillis inextricable.

Il y a bien sûr le plaisir de savoir *libido sciendi* : les conjectures accompagnent la théorie et certaines ont acquis de leur ancienneté la respectabilité des vestiges qui ont résisté au temps, comme de vieilles bouteilles réputées. L'hypothèse de Riemann est le plus grand défi actuellement. Elle brille comme un mirage lointain. Elle est *presque* démontrée. Des millions de zéros de la fonction ζ ont pour abscisse $1/2$. Ce n'est pas le résultat d'approximation numériques, il s'agit de vraies démonstrations.¹ Mais bien sûr

1. Dans la hiérarchie logique cette hypothèse est un énoncé Π_1^0 (G. Kreisel) sa négation est un énoncé récursivement énumérable. Cela *pourrait* laisser entendre que sa réfutation survienne de façon fortuite.

il arrive en mathématiques qu'une régularité soit vérifiée jusqu'à une borne très lointaine et s'avère fausse néanmoins.² Elle fascine en elle-même bien plus que son équivalence en termes du dénombrement des nombres premiers et s'accompagne aujourd'hui d'un cortège de travaux très fins et de généralisations.

Pour raisonner concrètement j'ai choisi un exemple simple déjà révélateur d'une forme de dialectique typique. On peut établir³ la formule

$$\zeta(t) = \sum_n \frac{1}{n^s} \frac{1}{Q_s^t(n)}.$$

dans laquelle ζ est la fonction de Riemann, s et t sont ici des réels > 0 , $t > 1$, n parcourt les entiers naturels, et $Q_s^t(n) = \prod_{p^s-1}^{p^t-1}$ le produit étant pris pour p facteur premier de n .

Les formules ci-dessus ont la propriété de modifier les termes de la série $\sum \frac{1}{n^t}$ par des fonctions arithmétiques de sorte que la somme soit inchangée.

Par exemple on a

$$\sum_n \frac{1}{n^2 Q_2^4(n)} = \zeta(4).$$

$Q_2^4(n) = \prod (1 + p^2)$ le produit étant pris pour p facteur premier de n . Ce nombre entier varie beaucoup tantôt plus grand tantôt plus petit que n^2 . Le rapport $Q_2^4(n)/n^2$ n'a pas de limite. Par exemple $Q_2^4(94) = 11050$, et $Q_2^4(96) = 50$.

Il y a lieu de s'étonner que les valeurs de $Q_2^4(n)$ pour n grand viennent compenser exactement les écarts introduits pour n petit de telle sorte que la somme fasse exactement $\zeta(4)$. Il apparaît une sorte de complicité entre les grandes valeurs de n et les petites par l'entremise des nombres premiers qui interviennent dans le produit Q_2^4 , le nombre entier $Q_2^4(n)$ jouant le rôle de n^2 . Et cet imitateur semble très bien jouer son rôle car on a aussi

$$\sum_n \frac{Q_2^4(n)}{n^4} = \zeta(2).$$

Les formules dégagant des régularités des nombres entiers semblent fournir des propriétés d'une réalité *non contingente*. En général les avancées en analyse fonctionnelle ou en d'autres branches abstraites n'atteignent pas le même degré de *réalisme*. Elles ressemblent davantage à de la création artistique où l'on peut admirer l'usage talentueux d'un langage.⁴ Et comme le langage des mathématiques contemporaines est très riche, si riche qu'il rebute le profane, on n'est pas surpris qu'avec une telle liberté langagière on puisse obtenir des choses nouvelles.⁵

2. Un exemple célèbre concerne les fonctions $\pi(x)$ et $li(x)$ pour le dénombrement des nombres premiers plus petits que x . Gauss avait vérifié l'inégalité $\pi(x) < li(x)$ jusqu'à x égal à 3 millions. On sait maintenant (J. E. Littlewood 1914) que l'inégalité s'inverse une infinité de fois.

3. Plusieurs démonstrations sont possibles. Par exemple en utilisant le fait que si la série $\sum f(n)$ est convergente et si f est multiplicative alors $\sum f(n) = \prod_p (1 + f(p) + f(p^2) + \dots)$.

4. Typiquement comme les artistes de la Renaissance utilisaient le langage de l'architecture grecque en l'enrichissant de combinaisons nouvelles, comme le motif de la "serlienne" attribué à Sebastiano Serlio.

5. A noter que cependant Palladio souligne [13] l'importance de ce que la composition soit telle qu'on ne puisse rien y ajouter ni retirer. Voir aussi [4].

En arithmétique on a vraiment l'impression que la réalité parle d'elle-même. Et d'une certaine façon sur des choses aussi "évidentes" que les nombres entiers on peut s'étonner que la réalité n'ait pas déjà tout dit, et qu'elle nous révèle ses secrets au compte goutte.

II. Exemplarité.

Un point qui mérite approfondissement est de savoir si cet engouement pour ce qui touche aux nombres entiers n'est pas lié à une envie de savoir plus sérieuse que le côté ludique de manier des entités simples et d'arriver à des formules que tout le monde comprend. Est-ce que la fascination pour l'arithmétique ne viendrait pas de ce qu'elle est *exemplaire* de propriétés de la nature physique et vivante ?

Il y a dans le monde de la culture une équivoque concernant les mathématiques que l'arithmétique illustre particulièrement bien.

Pour beaucoup de philosophes, la rationalité est un cadre réducteur de la réalité incapable de rendre compte des choses les plus importantes de la vie. C'est particulièrement net à partir du début du 19^{ème} siècle où, comme plusieurs observateurs l'ont noté, les "deux cultures" se séparent avec d'un côté l'essor impressionnant de la physique mathématisée et de l'autre l'émergence de philosophies plus engagées que le kantisme ayant l'ambition d'aborder ce qui donne sens à l'existence humaine. Hegel puis Marx par exemple abordent la question du devenir, de ce qui fait que l'histoire avance. Certains vont même jusqu'à dénigrer la rigueur déductive comme Schopenhauer qui se moque des mathématiciens qui sont à chercher une démonstration de l'axiome des parallèles d'Euclide et qui n'auraient pas compris que c'était évident. Ce passage de son grand traité mérite d'être cité :

Die Eukleidische Demonstrirmethode hat aus ihrem eigenen Schooß ihre treffendste Parodie und Karikatur geboren, an der berühmten Streitigkeit über die Theorie der Parallelen und den sich jedes Jahr wiederholenden Versuchen, das elfte Axiom zu beweisen. Dieses nämlich besagt, und zwar durch das mittelbare Merkmal einer schneidenden dritten Linie, daß zwei sich gegen einander neigende (denn dies eben heißt kleiner als zwei rechte seyn), wenn genugsam verlängert, zusammentreffen müssen ; welche Wahrheit nun zu komplieirt seyn soll, um für selbstevident zu gelten, daher sie eines Beweises bedarf, der nun aber nicht aufzubringen ist ; eben weil es nichts Unmittelbareres giebt. Mich erinnert dieser Gewissensskrupel an die Schillersche Rechtsfrage :

"Jahre lang schon bedien' ich mich meiner Nase zum Riechen :

Hab' ich denn wirklich an sie auch ein erweisliches Recht ?"

ja, mir scheint, daß die logische Methode sich hiedurch bis zur Niaiserie steigere.⁶

6. La méthode de démonstration d'Euclide a produit sa propre parodie, la caricature la meilleure qu'on en puisse faire, dans la célèbre discussion sur la théorie des parallèles et dans les vains essais, renouvelés chaque année, de démontrer le onzième axiome. Cet axiome énonce, en effet et rend visible à l'aide d'une troisième droite sécante, que deux droites qui tendent l'une vers l'autre (car c'est cette position qu'exprime la formule "être plus petit que deux droits") si elles sont suffisamment prolongées, finiront par se rencontrer ; cette vérité paraît trop compliquée aux mathématiciens pour qu'ils l'acceptent comme évidente par elle-même, et c'est pourquoi ils en cherchent une démonstration ; mais cette démonstration ils ne réussissent jamais à la trouver, précisément parce que la vérité en question est d'une certitude on ne peut plus immédiate. Ce scrupule de conscience me remet en mémoire la question de droit si plaisamment formulée par Schiller : *Depuis des années déjà je me sers de mon*

Que Schopenhauer ne connaisse pas les géométries non euclidiennes développées par Gauss, Lobatchevski et Bolyai, et leur fécondité, est une chose. Ces travaux étaient récents à son époque. Mais il est dommage qu'il n'ait pas réalisé combien il est fascinant qu'Euclide ait ressenti la nécessité de faire de cet énoncé un axiome. Le traité est rédigé comme si on allait essayer de se passer de cet énoncé. Les 28 premières propositions des *Éléments* sont établies sans recourir à cet axiome, il est admis, semble-t-il, faute d'avoir pu le démontrer. Si Euclide est un groupe de géomètres grecs ayant vécu après Platon et avant Archimède, comme on le pense généralement aujourd'hui, après combien de tentatives de démonstration se sont-ils résolus à avouer leur ignorance et à lancer à la sagacité des savants cette "évidence" qui resta irrésolue durant plus de vingt siècles ? C'est que ces Grecs ne transigeaient pas avec la rigueur. Démontré voulait dire démontré, et non pas évident. Ils inventaient les vraies mathématiques. Ce n'est pas rien !

Nietzsche va encore plus loin. La science est pour lui un langage descriptif qui n'explique rien.

Aber eine essentiell mechanische Welt wäre eine essentiell sinnlose Welt ! Gesetzt, man schätzte den Werth einer Musik darnach ab, wie viel von ihr gezählt, berechnet, in Formeln gebracht werden könne — wie absurd wäre eine solche „wissenschaftliche“ Abschätzung der Musik ! Was hätte man von ihr begriffen, verstanden, erkannt ! Nichts, geradezu Nichts von dem, was eigentlich an ihr "Musik" ist !⁷

D'autres philosophes considèrent les deux cultures comme un état de fait, comme deux modes de pensée non miscibles, qui ne concernent pas les mêmes domaines.

Et pourtant, si on peut tirer une impression de la pratique de la théorie des nombres, c'est bien que les entiers naturels montrent une nature qui n'est pas du tout apodictique mais plutôt espiègle, à toujours nous montrer combien les nombres sont irréguliers, fantasques, insaisissables. On est devant ce paradoxe qu'en arithmétique tout est d'une rigueur parfaite et que pourtant le résultat de toute cette rigueur est un fouillis qui semble nous dire qu'au delà des petits nombres existe un paysage inconnu dont la difficulté est révélée par les innombrables conjectures que nous laissons irrésolues.

L'arithmétique nous montre un échantillon de nature qui semble déjouer tous les stratagèmes qui viseraient à faire régner la loi. Une nature capricieuse, variée, cachée, avec des sortes de providences secrètes qui apparaissent par des connexions sublimes : $\pi^2/6$, etc.

Dans des travaux récents [2] Beliakov et Matiyasevich étudient par des calculs numériques poussés sur ordinateur des approximations des zéros de $\zeta(s)$ par des séries de Dirichlet finies. Leurs calculs sont compatibles à ce degré d'approximation avec l'hypothèse de Riemann, mais ils insistent sur *les structures* que font apparaître ces approximations et les

nez pour flairer Mais puis-je établir que j'ai sur lui un droit réel ? Il me semble même que, dans ces tentatives de démonstration, la méthode logique atteint le comble de la niaiserie. [*Die Welt als Wille und Vorstellung*, Band 2, Kap. 13]

7. "Un monde essentiellement mécanique, mais ce serait un monde essentiellement stupide ! Si l'on mesurait la valeur d'une musique à ce qu'on en peut calculer et compter, à ce qu'on en peut traduire en chiffres, de quelle absurdité ne serait pas cette évaluation scientifique ! Qu'aurait-on bien saisi, compris, connu d'une mélodie ainsi jaugée ? Rien, et littéralement rien, de ce qui fait justement sa "musique" !" [*Le gai savoir*, livre V, §373]

présentent comme de nouvelles conjectures. Il semble là, et de même en [11], que la scène épistémologique qui se joue attribue un rôle nouveau à l'arithmétique conçue comme une ressource de nouveauté et non comme une production automatisée.

Le cas de Henri Bergson est caractéristique. Celui-ci pose très bien le problème en tentant de penser pourquoi le vivant, les plantes, les animaux seraient plus créatifs que ce que la science peut faire avec sa rationalité qui selon lui la cantonne à des choses automatiques. Il forge pour cela les concepts de “mécanisme cinématographique” et “d’illusion mécanistique”. C’est précisément là où réside la seule erreur d’appréciation de son approche. La déduction au niveau de l’arithmétique, ce n’est pas automatique. Bergson a mal placé la césure automatique vs créatif. Il serait complètement anachronique de lui en faire le reproche puisqu’à cette époque David Hilbert lui-même avait jugé pertinent de lancer son *programme* pour tenter de démontrer la cohérence de l’arithmétique (cf. [6]).

Reportons-nous aux termes qu’emploie Hilbert dans sa pénétrante introduction aux fameux 23 problèmes. Après avoir expliqué ce qu’est un problème mathématique intéressant, et que sa solution doit procéder par un nombre fini d’étapes purement logiques, il défend la thèse que tout problème mathématique a une solution :

Cette conviction de la possibilité de résoudre tout problème mathématique est pour nous un précieux encouragement pendant le travail. Nous entendons toujours résonner en nous cet appel : *Voilà le problème, cherchons-en la solution. Tu peux la trouver par le pur raisonnement. Jamais, en effet mathématicien ne sera réduit à dire : “Ignorabimus”*.⁸

L’existence du programme de Hilbert corrobore le bien fondé de la réflexion de Bergson pour penser la nature à son époque.

Seulement dans la césure “automatique vs créatif” il aurait fallu mettre l’arithmétique du côté du créatif.⁹ Nous pouvons dire aujourd’hui que – contrairement à ce que pensait Bergson – l’arithmétique est porteuse d’une exemplarité tout à fait fondamentale pour nous faire comprendre le vivant justement. Cela est dû à deux *révolutions épistémologiques* séparées d’une trentaine d’années.

D’abord la preuve de l’impossibilité du programme de Hilbert, incomplétude de l’arithmétique et phénoménologie de l’indécidable, que l’on doit attribuer à Kurt Gödel, Alonzo Church et Alan Turing.

Puis la transformation de la biologie. Le 20ème siècle nous a apporté une véritable révolution épistémologique en explicitant la nature combinatoire du vivant. Avec la découverte de la double hélice dans les années 1960 nous savons que les êtres vivants sont fondés justement sur une combinatoire, ce qui vint modifier radicalement le paysage dans lequel dialoguaient toutes les philosophies de la nature. Ce qui est assez troublant dans cette affaire, c’est que la nature aussi procède *more geometrico*. Depuis la découverte du rôle de l’ADN et de sa généralité dans le monde vivant, il apparaît que la nature est écrite comme l’arithmétique. De sorte que pour comprendre la spécificité des modifications génomiques il est tout à fait éclairant de se pencher sur les mathématiques car

8. traduction française L. Laugel relue par Hilbert 1902.

9. La césure se situe entre l’arithmétique de Presburger et l’arithmétique.

elles sont très analogues à la biologie et la chimie de synthèse. Certes les enjeux ne sont pas les mêmes mais la biologie présente aussi la phénoménologie de l'indécidable, un trait fondamental du point de vue de la connaissance. La principale différence est qu'en mathématiques le contexte de la combinatoire est simple et *ne varietur* alors qu'en biologie il est très riche, évoluant, et mal connu.

L'argument le plus convaincant quant à la présence de l'indécidable dans l'innovation génomique naturelle ou artificielle repose sur l'étude du problème du mot pour les systèmes de Thue (cf. [5] Chap. XV) : on considère les mots écrits, disons, avec deux lettres, on pose l'équivalence d'un nombre fini de couples de mots et on propage cette équivalence par les opérations de concaténation, de simplification à gauche et à droite. Et on pose la question de savoir s'il existe un algorithme permettant de savoir si deux mots donnés sont équivalents. En 1947 Markov et Post ont montré que ce problème était en général indécidable. Depuis, Tsejtin puis Matiyasevich explicitèrent cette indécidabilité pour des systèmes de plus en plus simples jusqu'à un système de Thue avec un alphabet de deux lettres et trois relations (cf. [12]).

En comparaison dans le vivant, l'alphabet est de quatre lettres (adénine, thymine, cytosine, guanine) et les mutations naturelles – ou artificielles avec la transgénése – qui procèdent à des scissions et du recollement sont d'une complexité telle qu'on ne voit pas comment ils pourraient être épargnés par le phénomène d'indécidabilité.

On peut exprimer les résultats d'incomplétude sur la hiérarchie des théories qui englobent l'arithmétique en disant qu'il n'existe pas d'axiomatique formalisée fournissant toutes les propriétés de nombres entiers.

Un malentendu concerne la portée du résultat de Gödel lui-même. Par souci de rigueur Gödel n'a pas suffisamment insisté sur la nouvelle vision de l'arithmétique qui apparaît. Il y a de l'indécidable, Gödel le prouve pour certains énoncés particuliers mais ces énoncés ne sont là que parce que sur eux *la preuve* de l'indécidabilité est possible, évidemment le paysage est maintenant celui d'une zone entre le prouvable et le réfutable dont la frontière est inconnue. Toutes sortes de propriétés que Dame Arithmétique garde dans ses greniers, dont font peut-être partie les nombreuses conjectures que nous laissons irrésolues.

De sorte que la leçon épistémique est non seulement que nous ne pouvons découvrir que progressivement les propriétés combinatoires il n'y a aucun automatisme dans ce processus, mais de plus il restera toujours un résidu inconnu à la présence duquel il faudra s'habituer. Gödel a dit "ignorabimus, nous ne saurons jamais, ça existe". A nous maintenant de vivre avec et d'en tenir compte.

La nature est maintenant arithmétique, mais en aucun cas automatique, au contraire porteuse d'une créativité qui échappe largement à la pensée strictement nomologique.¹⁰

Il reste évidemment des différences importantes. Le contexte des théories mathématiques, à savoir le langage des prédicats du premier ordre, n'est pas perturbé par les progrès des démonstrations au sein des théories, alors que le vivant évolue dans un

10. Le problème de la décision qui est de savoir s'il existe un algorithme pour résoudre une question a été deviné par les chimistes et les biologistes de synthèse de façon intuitive bien avant une approche logique. Roald Hoffmann remarque [7] à partir du problème de la synthèse du cubane qu'il n'y a pas de méthode a priori pour la synthèse chimique, et que lorsque la synthèse réussit elle emprunte des chemins par des molécules plus complexes que celle que l'on veut finalement obtenir.

contexte lui-même vivant dont il tient compte et qu'il modifie. Mais ces différences ne font qu'accroître les raisons de prendre conscience que nous devons nous accoutumer à une épistémologie dans laquelle existe une part d'ignorance définitive.¹¹

Cette ignorance en chimie ou biologie de synthèse signifie que nous ne savons pas dire à l'avance ce que va faire une nouvelle molécule sur l'ensemble du vivant existant. Et comme nous ignorons le détail des tentatives essayées par la nature durant l'évolution pour atteindre l'état présent, il se peut que le jeu artificiel purement combinatoire fabrique des entités qui n'ont jamais été rencontrées par la nature, ni utilisées ni essayées. La prudence requise a été reconnue et explicitée sur les questions de confinement dans les conférences d'Asilomar et de Cartagène, mais les institutions internationales ne sont pas encore construites pour contrôler leur application.

Références

- [1] BAYER P. "Variae Observationes Circa Series Infinitas" *Butlletí de les Societats Catalanes de Física, Química*, 75-127, 1984
- [2] BELIAKOV G., MATIYASEVICH Y. "Approximation of Riemann's zeta function by finite Dirichlet series : multiprecision numerical approach" arXiv : 1402.5295v1
- [3] BERGSON H. *L'évolution créatrice* Alcan 1907.
- [4] BOULEAU N. "Les deux sortes de beauté de Christopher Wren" *Tangente* hors-série 14, 34-37, 2003.
- [5] BOULEAU N. *Introduction à la philosophie des sciences* Spartacus-idh 2017.
- [6] BOULEAU N., GIRARD J.-Y., LOUVEAU A. *Five Conferences on Undecidability* arXiv : 0711.4717
- [7] HOFFMANN R. "In Praise of Synthesis" *American Scientist* n79, Jan.-Feb. 1991.
- [8] KOWALSKI E., *Arithmetic randonnée, an Introduction to Probabilistic Number Theory* March 13 2020 en ligne.
- [9] LONGO G., TENDERO P. E. "The differential method and the causal incompleteness of Programming Theory in Molecular Biology" *Foundations of science*, Springer 2007.
- [10] MANSTAVICIUS E. "Functional Limit Theorems in Probabilistic Number Theory" In : Bolyai Society Mathematical studies.11 : Paul Erdős and His Mathematics. vol. I, G. Halász, L. Lovász, M. Simonovits and V. T. Sos (Eds.), Springer, Berlin, 2002, p. 465-491.
- [11] MATIYASEVICH Y. "The Riemann Hypothesis and eigenvalues of related Hankel matrices. I" PDMI Preprint 03/2014
- [12] MARGENSTERN M. "Frontier between decidability and undecidability : a survey" *Theoretical Computer Science* 231 (2000) 217-251.
- [13] PALLADIO A. *I Quattro libri dell'architettura*, 1570, (trad. Éd. Arthaud, 1980).
- [14] RIEMANN B. "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" *Monatsberichte der Berliner Akademie*, Nov. 1859.
- [15] SCHOPENHAUER A. *Die Welt als Wille und Vorstellung* (1818-1844).
- [16] SCHWARZ W. "Some highlights from the history of probabilistic number theory" *Advanced Studies in Pure Mathematics* 49, 2007 Probability and Number Theory - Kanazawa 2005 pp. 367-419.

11. Comme écrivait Pierre Samuel il y a un demi-siècle déjà "L'oubli des limitations de la science est la cause directe de plusieurs des mythes qui constituent le credo du scientisme." (*Survivre* n10 oct-nov 1971).