



**HAL**  
open science

# Sur les sous-groupes paraboliques associés à un groupe réductif

Marion Jeannin

► **To cite this version:**

Marion Jeannin. Sur les sous-groupes paraboliques associés à un groupe réductif. 2020. hal-02903773v1

**HAL Id: hal-02903773**

**<https://hal.science/hal-02903773v1>**

Preprint submitted on 23 Jul 2020 (v1), last revised 24 Oct 2020 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur les sous-groupes paraboliques associés à un groupe réductif

Marion Jeannin

23 juillet 2020

## Abstract

Let  $k$  be an algebraically closed field of characteristic 0 and  $G$  be a (connected) reductive  $k$ -group, we denote by  $\mathfrak{g}$  its Lie algebra. Assume  $\mathfrak{g}$  to be semisimple. A theorem of Morozov leads to a characterisation of the parabolic subalgebras of  $\mathfrak{g}$  in terms of nilpotent elements of their solvable radical. In this article we aim to obtain analogues of Morozov's theorem in characteristic  $p > 0$ . This requires to find the good counterparts in characteristic  $p > 0$  of objects and notions classically related to the characteristic 0 framework, such as exponentiation. The generalisation of results first obtained by P. Deligne in [18] and V. Balaji, P. Deligne and A. J. Parameswaran in [2] we propose to show in this article leads to the desired analogue under some conditions on  $p$  and  $G$ . It also provides an additional characterisation of the obtained parabolic subalgebra in terms of geometric invariant theory.

## Résumé

Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et  $G$  un  $k$ -groupe réductif (connexe), tel que  $\text{Lie}(G) =: \mathfrak{g}$  soit semi-simple. Un théorème de Morozov permet de caractériser les sous-algèbres de Lie paraboliques de  $\mathfrak{g}$  à l'aide des éléments nilpotents de leur radical résoluble. Dans cet article nous démontrons des analogues du théorème de Morozov en caractéristique  $p > 0$  en généralisant des résultats obtenus par P. Deligne, puis V. Balaji, P. Deligne et A. J. Parameswaran. Pour ce faire, nous développons un formalisme en caractéristique positive qui permette d'obtenir des propriétés et outils de substitution à ceux bien connus en caractéristique nulle, tels que l'existence d'une exponentielle. Ceci fournit une caractérisation additionnelle des objets paraboliques considérés, en termes de théorie géométrique des invariants.

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Contexte</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Le passage de la caractéristique nulle à des caractéristiques positives</b>	<b>9</b>
2.1	Définitions et conventions . . . . .	9
2.2	Construire les bons analogues en caractéristique $p < h(G)$ . . . . .	10
2.2.1	Éléments nilpotents d'une algèbre de Lie et intégration, le cas de la caractéristique nulle . . . . .	10
2.2.2	Éléments nilpotents d'une algèbre de Lie et intégration, les écueils de la caractéristique $p > 0$ . . . . .	10
2.2.3	Intégration des algèbres de Lie nilpotentes en caractéristique nulle . . . . .	11
2.2.4	Un isomorphisme de groupes pour les caractéristiques $p > h(G)$ . . . . .	12
2.2.5	Le formalisme fppf . . . . .	12
2.2.6	Intégration et normalisateurs, contourner l'absence de compatibilité avec la représentation adjointe . . . . .	14
2.3	Défaut de lissité des normalisateurs . . . . .	14

2.3.1	Un défaut de lissité a priori . . . . .	14
2.3.2	Mesurer le défaut de lissité des normalisateurs . . . . .	14
2.3.3	Une condition nécessaire et suffisante . . . . .	16
<b>3</b>	<b>État des lieux</b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>Résultats principaux</b>	<b>17</b>
4.1	Autour du théorème de Morozov . . . . .	17
4.2	Comparaison des sous-groupes paraboliques canoniques de M. Atiyah et R. Bott à K. A. Behrend . . . . .	19
<b>II</b>	<b>Analogie du théorème de Morozov en caractéristique <math>p &gt; h(G)</math></b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Rappels et conventions sur les hypothèses usuelles</b>	<b>22</b>
5.1	Rang et représentations fidèles . . . . .	22
5.2	Sous-algèbres paraboliques . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Premiers résultats</b>	<b>24</b>
6.1	Lorsque tous les normalisateurs sont lisses . . . . .	24
6.2	Énoncés conditionnels lorsque la forme de Killing est non dégénérée . . . . .	25
<b>7</b>	<b>La méthode de Kempf–Rousseau et le sous-groupe parabolique optimal</b>	<b>26</b>
7.1	Construction . . . . .	26
7.2	Obstruction . . . . .	27
7.2.1	Remarques préliminaires . . . . .	28
7.2.2	Caractérisation, preuve du théorème 4.5 . . . . .	28
<b>8</b>	<b>Intégration, saturation infinitésimale et normalisateurs en caractéristique <math>p &gt; h(G)</math></b>	<b>29</b>
8.1	Loi de Campbell-Hausdorff . . . . .	30
8.2	Application exponentielle en caractéristique $p > 0$ . . . . .	31
8.3	Défaut de lissité des normalisateurs . . . . .	34
8.3.1	Saturation infinitésimale . . . . .	34
8.3.2	Application exponentielle et normalisateurs . . . . .	36
8.4	Démonstrations du théorème 4.2 et des corollaires 4.3, 4.4 et 4.6 . . . . .	37
8.4.1	Preuve du théorème 4.2 . . . . .	37
8.4.2	Remarques sur le cas de la caractéristique 0 ou $p$ grand . . . . .	37
8.4.3	Démonstrations des corollaires 4.3 et 4.4 . . . . .	40
8.4.4	Démonstration du corollaire 4.6 . . . . .	41
<b>9</b>	<b>Un exemple d’application : caractérisation du sous-groupe parabolique canonique d’un groupe réductif</b>	<b>41</b>
9.1	Sous-groupe parabolique canonique . . . . .	41
9.2	Démonstration de la proposition 4.7 . . . . .	44
9.2.1	Semi-stabilité des produits tensoriels . . . . .	44
9.2.2	Conséquences du corollaire 4.6 . . . . .	45
<b>III</b>	<b>Analogie du théorème de Morozov en caractéristique <math>p &lt; h(G)</math></b>	<b>46</b>
<b>10</b>	<b>Introduction</b>	<b>46</b>

<b>11 <math>\phi</math>-saturation infinitésimale, démonstration du théorème 10.4</b>	<b>49</b>
11.1 $\phi$ -saturation infinitésimale . . . . .	50
11.2 Une version infinitésimale du théorème 10.4 . . . . .	52
11.3 Démonstration du théorème 10.4 . . . . .	55
<b>12 Intégration des sous-algèbres <math>p</math>-nil du radical de <math>\mathfrak{g}</math></b>	<b>56</b>
12.1 Intégration de l'ensemble des éléments $p$ -nilpotents du radical . . . . .	57
12.2 Intégration du $p$ -radical . . . . .	57
<b>13 Démonstrations du théorème 10.1 et des corollaires 10.2 et 10.3</b>	<b>58</b>
13.1 Preuve du théorème 10.1 . . . . .	58
13.2 Démonstrations des corollaires 10.2 et 10.3 . . . . .	60
<b>A Hypothèses sur la caractéristique</b>	<b>60</b>
<b>B Résultats sur les groupes de type multiplicatif</b>	<b>62</b>
<b>C Résultats techniques sur les algèbres de Lie</b>	<b>64</b>
C.1 Résultats préliminaires sur les normalisateurs et centralisateurs . . . . .	64
C.1.1 Centralisateurs . . . . .	64
C.1.2 Voisinages infinitésimaux de l'identité . . . . .	66
C.1.3 Normalisateurs . . . . .	66
C.2 $p$ -algèbres de Lie restreintes . . . . .	67
C.3 Radicaux et nilpotence d'une algèbre de Lie . . . . .	68
<b>D Remarques sur la loi de Campbell–Hausdorff</b>	<b>79</b>
<b>E Un exemple où l'intégration plongée n'existe pas</b>	<b>81</b>

## Première partie

# Introduction

## 1 Contexte

La majeure partie des références historiques mentionnées dans les premiers paragraphes de cette introduction proviennent du travail bibliographique de F. Lê et A-S. Paumier nécessaire à la rédaction de leur article [44]. Nous mentionnons donc systématiquement à côté de la référence historique la partie de l'article qui l'étudie et qu'elle illustre.

“Algèbre, Arithmétique, Géométrie et toutes ces vieilles balivernes sont tout à fait comparables : il faut regarder la structure de chaque théorie et les classer de cette façon là. Malgré tout, bien entendu, il ne faut pas longtemps pour se rendre compte que malgré cet effort vers l'isolement des structures, elles ont une manière de se mélanger très rapidement et de la façon la plus fructueuse. On peut dire que les grandes idées en mathématiques proviennent de rencontres de plusieurs structures très différentes” (J. Dieudonné, voir [23, p. 19], [44, p. 14]). L'entreprise classificatoire à laquelle Bourbaki se confronte semble apparaître ici tout à la fois comme un vœux pieu soumis aux contraintes structurelles de la science mathématique et à l'évolution historique de sa pratique, et une absolue nécessité, en réponse à des enjeux tant pédagogiques que scientifiques. Ainsi F. Lê et A-S. Paumier de souligner dans [44, p. 14] “les questions de choix comme d'organisation dans [les *Éléments de mathématiques*] deviennent primordiales et aboutissent à des réflexions de nature classificatoires”. Dans [44, p. 17] il et elle nuancent toutefois le propos de J. Dieudonné en se basant sur les travaux de L. Corry ([17, p. 289-338]) : “En fait, les classifications ne forment pas non plus le cœur des *Éléments*” tout en “[suggérant] que les structures jouent un rôle déterminant dans la conception et la pratique mathématique,

notamment classificatoire, de ses différents membres en particulier.” Le lien est en effet fort entre ce que l’auteur et l’auteurice appellent “classification des mathématiques et la pratique mathématique de la classification” (voir [44, p. 15]), et d’étayer ainsi leur propos “comme expliqué dans “L’Architecture des mathématiques” ([46]), ce sont les structures qui permettent la classification des objets mathématiques eux-mêmes, via l’analyse des axiomes qu’ils vérifient”. La méthode classificatoire est ainsi sans surprise soumise à l’évolution des pratiques mathématiques, ce que J. Dieudonné semble suggérer fortement dans les premiers termes de la citation ci-dessus, et que F. Lê et A-S. Paumier illustrent dans [44, p. 23-25] via l’exemple de la classification de surfaces cubiques, originellement due à A. Cayley et G. Salmon en 1849, puis revisitée par L. Schläfli en 1863 et sur laquelle J. W. Bruce et C. T. C. Wall reviennent en 1979 : “Au-delà de l’omission éventuelle de cas, c’est aussi la façon de faire elle-même qui peut-être remise en question. [...] Le réexamen de la classification de Schläfli (complétée par Cayley) ne concerne pas ici les divisions en lesquelles elle consistait ; il vise sa substance géométrique, à travers l’utilisation d’un outillage mathématique “moderne” pour sa démonstration. [...] La classification est ainsi réévaluée en fonction des normes et des exigences du travail mathématique d’une époque de rédaction (liées ici au développement de la topologie), allant jusqu’à entraîner une modification des critères mêmes du classement.”

C’est toutefois l’écueil souligné le plus explicitement ici par J. Dieudonné, à savoir la difficulté d’isoler des objets communs à différents domaines des mathématiques qui connaissent une forte intrication, qui est au centre des enjeux classificatoires des théories dans lesquelles s’inscrit le travail du présent article. L. Schwartz semble voir dans cette difficulté la spécificité même des enjeux classificatoires de cette science (voir [14, p 162.-163], et [44, p. 15]) : “les théories mathématiques procèdent plutôt par croisements que par lignes verticales. Les espaces vectoriels topologiques sont à l’intersection de la catégorie des espaces vectoriels et de la catégorie des espaces topologiques”. Il n’en demeure pas moins que pour comprendre ces intersections il faut un dictionnaire, un prisme communs, ce que Bourbaki (entre autres) nomme “structure” et définit en ces termes dans [46] (voir [44, p. 15]) : “Le trait commun des diverses notions désignées sous ce nom générique, est qu’elle s’applique à des ensembles d’éléments dont la nature n’est pas spécifiée ; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments [...] ; on postule ensuite que les relations données satisfont à certaines conditions (qu’on énumère) et qui sont les axiomes de la structure envisagée”. L. Schwartz résume ainsi (voir [14, p. 159], et [44, p. 15]) : “pour définir un objet, on définit les axiomes qu’il doit vérifier, et non cet objet lui-même”.

Cette essentialisation de la structure marque un véritable tournant dans la pratique mathématique, c’est sans doute un principe fondateur de la géométrie algébrique abstraite, comme le souligne J. Dieudonné dans [24, p. 848] “It is well known that, from 1900 to 1930, the general concepts of algebra (mostly confined until then to real or complex numbers) were developed in a completely abstract setting, the notion of algebraic *structure* (such as group, ring, field, module, etc.) becoming the fundamental one and relegating to second place the nature of mathematical *objects* on which the structure was defined.” J. Dieudonné revient également dans [24, p. 827] sur l’importance d’une pratique classifiante des objets dans le domaine qui intéresse cet article, à savoir la géométrie algébrique : “With these reservations we may first group the main ideas of algebraic geometry as follows: (A) and (B) The twin themes of *classification* and *transformation*, hardly to be separated, since the general idea behind classification of algebraic varieties is to put together those which can be deduced from each other by some kind of “transformation”. Subordinate to these themes are the notion of *invariant*, both of algebraic type and of numerical type (such as dimension, degree, genus, etc), and the concept of *correspondence* and of *morphism*, which give precise meanings and extensions to the vague idea of “transformation””

Dans cet écrit l’auteur revient sur l’histoire de la géométrie algébrique et illustre l’importance des préoccupations combinatoires à l’aide du travail de B. Riemann (voir [24, p. 837]) “But the starting novelty of Riemann’s approach is of course the fact that to a class of “birational equivalent” irreducible algebraic curves he was able to attach his topological invariant  $g$ , the *genus* of all curves in the class. But he did not stop there, and by evaluation (using two different

methods) of the parameters on which a Riemann surface of genus  $g$  depended, he arrived at the conclusion that classes of isomorphic Riemann surfaces of genus  $g \geq 2$  were characterized by  $3g - 3$  complex parameters varying continuously (for  $g = 1$  there is only one parameter, and none for  $g = 0$ ); the precise meaning of this result (the so-called theory of “moduli” of curves) was to remain until very recently among the least clarified concepts of the theory.”

Les espaces de modules sont en fait précisément des objets mathématiques qui apparaissent souvent comme solutions de problèmes de classification. Ils permettent de paramétrer différentes entités, généralement géométriques (par exemple des courbes ou des fibrés vectoriels), à l’aide d’une relation d’équivalence donnée par l’action d’un groupe algébrique. C’est l’objet de la théorie géométrique des invariants, introduite par D. Mumford. La construction de quotients pour l’action d’un groupe  $G$  sur un schéma algébrique  $X$  constitue ainsi une question récurrente et naturelle en géométrie algébrique puisqu’elle permet d’obtenir de tels espaces. Toutefois, même lorsque  $X$  est défini au-dessus d’un corps  $k$  (i.e. lorsque  $X$  est une  $k$ -variété algébrique) un quotient de  $X$  par  $G$  n’existe pas toujours dans la catégorie des variétés algébriques. Ce serait le cas si toutes les orbites étaient fermées pour la topologie de Zariski (rappelons que les fermés sont ici les lieux des zéros de certaines fonctions polynomiales en plusieurs variables à coefficients dans  $k$ ), ce qui est une condition forte. À titre d’exemple, même l’action du groupe linéaire sur un  $k$ -espace vectoriel  $V$  possède une orbite ouverte (à savoir l’orbite complémentaire à l’orbite de 0).

Un théorème de Rosenlicht apporte une solution partielle à ce problème, en assurant qu’il existe toujours un ouvert de Zariski dense  $U \subset G$ , qui soit  $G$ -invariant et tel que  $U/G$  existe en tant que variété algébrique. Une réponse plus globale est aussi possible, grâce à la notion de bon quotient, développée notamment par la théorie géométrique des invariants.

Afin d’illustrer notre propos, commençons par considérer le cas particulier important où  $X = V$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $G$  est un  $k$ -groupe algébrique linéaire (par exemple un groupe fini) agissant sur  $V$  via sa représentation linéaire. Le quotient  $V//G$  est le spectre de l’anneau des coordonnées  $G$ -invariantes pour l’action induite. En d’autres termes les coordonnées de  $V//G$  sont données par les coordonnées de  $V$ , à savoir les polynômes en  $n$ -variables, invariantes pour l’action de  $G$ .

De manière plus générale, si  $G$  est un  $k$ -groupe réductif (i.e. un  $k$ -groupe algébrique dont le plus grand sous-groupe connexe distingué résoluble est un tore, par exemple le groupe linéaire) qui agit linéairement sur une variété affine, la théorie géométrique des invariants fournit un ouvert de Zariski (noté  $X^{\text{ss}}$ ), appelé ensemble des points semi-stables, tel qu’un bon quotient de  $X^{\text{ss}}$  pour l’action de  $G$  existe toujours. Le critère de Hilbert–Mumford fournit une caractérisation combinatoire de l’ensemble de ces points semi-stables.

Notons enfin qu’une théorie de la (semi-)stabilité pour un schéma algébrique au-dessus d’une base  $S$  localement noëthérienne existe. Elle a notamment été développée par C. S. Seshadri.

Il est possible d’étendre ces notions à des fibrés vectoriels sur une courbe (à savoir un schéma lisse, projectif, géométriquement connexe, de dimension 1) : un fibré vectoriel est (semi-)stable s’il est un point (semi-)stable d’un espace de modules de fibrés. Une caractérisation combinatoire de la (semi-)stabilité d’un fibré vectoriel existe et fait directement intervenir le degré : un fibré vectoriel  $F$  de rang  $r$  sur une courbe projective lisse connexe  $X$  est (semi-)stable si la pente de tout sous-fibré vectoriel  $F' \subseteq F$  de rang  $0 \leq r' \leq r$  (i.e. le ratio  $\text{deg}(F')/r'$ , où  $\text{deg}(F')$  désigne le degré de  $F'$ ) est strictement inférieure (inférieure ou égale) à la pente de  $F$ . Elle permet d’adapter assez naturellement les notions de (semi-)stabilité à des contextes plus algébriques. Nous présentons ici deux approches.

Lorsque  $k$  est un corps et  $V$  est un fibré vectoriel au-dessus d’une  $k$ -courbe  $X$ , G. Harder et M.S. Narasimhan ont montré que  $V$  admet une filtration avec quotients successifs semi-stables et pour laquelle la pente des quotients est strictement décroissante. Dans ce contexte, soit  $G$  un  $k$ -groupe réductif et  $E$  un  $G$ -fibré principal homogène sur  $X$  (par exemple, lorsque  $G = \mathbb{G}_m$  cela équivaut à considérer des fibrés en droites). Dans [1] M. Atiyah et R. Bott utilisent la filtration de Harder–Narasimhan de  $E(\mathfrak{g}) := \text{Lie}(E(G))$ , où  $E(G) := E \times_{\text{Ad}(G)} G$ , pour définir une théorie de la (semi-) stabilité pour les  $G$ -fibrés principaux homogènes. Sous nos hypothèses cette filtration

est de la forme :

$$0 \subset E_{-l} \subset \cdots \subset E_{-1} \subset E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_l := E(\mathfrak{g}),$$

où les indices sont choisis de telle sorte que le quotient  $E_0/E_{-1}$  soit de pente nulle. Les auteurs montrent que  $E_0$  est une sous-algèbre parabolique de  $E(\mathfrak{g})$ . Elle dérive d'un sous-groupe parabolique  $P \subseteq E(G)$  et définit une réduction de structure de  $E$  à  $P$ . Une telle réduction est dite canonique.

La théorie de Kempf–Rousseau permet une description combinatoire du sous-groupe parabolique  $P$  dont  $E_0$  dérive : la filtration susmentionnée fournit un simplexe de l'immeuble sphérique de  $GL(E(\mathfrak{g}))$  (qui est un complexe simplicial dont la géométrie est reliée aux données combinatoires de  $GL(E(\mathfrak{g}))$ ) et  $P$  est le stabilisateur de ce simplexe pour l'action de  $GL(E(\mathfrak{g}))$  sur l'immeuble.

En résumé, ce qui précède permet d'étendre les notions de (semi-)stabilité aux  $G$ -fibrés principaux homogènes, et associe de manière canonique un sous-groupe parabolique à tout  $X$ -groupe réductif qui est la forme tordue d'un  $k$ -groupe constant.

Soulignons enfin ici l'importance de l'article de M. Atiyah et R. Bott dans la compréhension de l'équation de Yang-Mills sur des surfaces de Riemann (voir l'article [70] de S. Trautwein à ce sujet), notamment car il permet d'établir un dictionnaire entre les objets de la géométrie symplectique et ceux de la géométrie algébrique.

Une autre manière d'introduire une théorie de la (semi-)stabilité d'un groupe réductif (et de lui associer un sous-groupe parabolique de manière canonique) est envisageable par le truchement du degré de son algèbre de Lie. C'est l'objet de l'article de K. A. Behrend (voir [4]) qui n'impose aucune restriction sur la caractéristique de  $k$  (qui est donc un corps quelconque), pas plus que sur le  $X$ -groupe réductif  $G$ . Plus précisément : le degré d'un sous-groupe lisse  $H \subseteq G$  (à fibres connexes), est le degré de son algèbre de Lie, vue comme un fibré vectoriel sur  $X$ . Le  $X$ -schéma en groupes réductif  $G$  est (semi-)stable si tout sous-groupe parabolique  $P \subsetneq G$  est de degré négatif (ou nul). L'ensemble des degrés des sous-groupes paraboliques de  $G$  est borné, de maximum le degré d'instabilité de  $G$ , noté  $d_i$ . Cela permet à l'auteur d'associer à tout groupe réductif  $G$  au-dessus d'une  $k$ -courbe  $X$ , un sous-groupe parabolique dit canonique, à savoir le sous-groupe parabolique de  $G$  maximal parmi les sous-groupes paraboliques de degré  $d_i$ .

Dans le même article, K. A. Behrend conjecture que cet objet canonique est un invariant géométrique de  $G$ , autrement dit qu'il est invariant par toute extension inséparable de la base. Cela est vérifié en particulier lorsque  $p = 0$ , ou  $p > 3$  si la pente minimale du fibré tangent de  $X$  est positive. Toutefois cette conjecture est fautive en toute généralité, comme l'illustre J. Heinloth dans [29], en fournissant des bornes explicites pour lesquelles la conjecture est vérifiée, ainsi que des contre-exemples dans les autres cas. Pour ce faire, l'auteur utilise le formalisme des  $G$ -fibrés principaux pour la topologie fppf, déjà introduit par K. A. Behrend.

Dans [55] puis [56], V. B. Mehta and S. Subramanian montrent que la définition de sous-groupe parabolique canonique due à K. A. Behrend généralise bien celle de M. Atiyah et R. Bott dans le cas où  $k$  est un corps de caractéristique  $p > 2 \dim(G)$  et  $G$  est un  $X$ -groupe réductif, forme tordue d'un  $k$ -groupe constant. Les preuves proposées dans ces deux articles ont recours à des méthodes de théorie des représentations, et invoquent des résultats sur la semi-simplicité des produits tensoriels en caractéristique  $p > 0$ . Nous en proposons une autre dans cet article (qui impose des contraintes légèrement plus faibles sur la caractéristique), l'énoncé exact est reproduit à la section 4.1 de cette introduction. La démonstration de cet énoncé met en évidence deux écueils principaux, propres à la caractéristique  $p > 0$  : le premier est la non semi-stabilité a priori d'un produit tensoriel de deux fibrés vectoriels semi-stables (voir par exemple [48, characteristic  $p > 0$ , p 10]), le second réside dans l'adaptation d'un corollaire d'un théorème de Morozov (dont l'énoncé et sa variante la plus connue sont reproduits ci-dessous), initialement établi pour des algèbres de Lie semi-simples sur  $\mathbb{C}$ , au contexte de la caractéristique positive.

**Théorème** (Morozov, voir par exemple [12, VIII, §10, Théorème 1]). *Soient  $V$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie réductive dans  $\mathfrak{gl}(V)$ . Soit  $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie. Notons  $\phi$  la forme bilinéaire  $(x, y) \mapsto \text{Tr}(xy)$  sur  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ . On suppose que l'orthogonal  $\mathfrak{u}$  de  $\mathfrak{q}$*

par rapport à  $\phi$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  composée d'endomorphismes nilpotents de  $V$ . Alors  $\mathfrak{q}$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ .

Dans cet article nous présentons l'analogie de cet énoncé comme une conséquence du théorème suivant, qui est la variante la plus usitée du théorème de Morozov (notons qu'en caractéristique nulle sa démonstration utilise le théorème 1).

**Théorème 1.1** (Morozov, voir par exemple [12, VIII, §10, Théorème 2]). *Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple et  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre formée d'éléments nilpotents. Notons  $\mathfrak{q} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ . Supposons que  $\mathfrak{u}$  soit l'ensemble des éléments nilpotents du radical de  $\mathfrak{q}$ . Alors  $\mathfrak{q}$  est parabolique.*

Rappelons que si  $k$  est un corps de caractéristique nulle l'ensemble des éléments nilpotents de toute sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{q}$  sur  $k$  est le plus grand idéal nilpotent de  $\mathfrak{q}$  (voir [10, §5, n°4, corollaire 7]), également appelé nilradical de  $\mathfrak{q}$ . Le théorème de Morozov en caractéristique nulle (théorème 1.1) est ainsi souvent formulé en ces termes :

**Théorème 1.2.** *Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple et  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre formée d'éléments nilpotents. Si  $\mathfrak{u}$  est le nilradical de son normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  alors ce dernier est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ .*

Dans cet article nous nous proposons de démontrer des énoncés similaires pour les algèbres de Lie au-dessus d'un corps algébriquement clos  $k$  de caractéristique  $p > 0$ . Avant d'en détailler davantage la nature, soulignons que le théorème de Morozov admet un énoncé analogue pour les  $k$ -groupes réductifs, et qui est insensible à la caractéristique (l'énoncé est valable pour un corps  $k$  arbitraire tant que le sous-groupe unipotent considéré est  $k$ -plongeable dans le radical unipotent d'un  $k$ -sous-groupe de Borel, c'est par exemple toujours le cas lorsque le corps de base est parfait) :

**Théorème 1.3** (Veisfeiler, voir [72], Borel–Tits, voir [6, corollaire 3.2]). *Soient  $k$  un corps et  $G$  un  $k$ -groupe réductif. Si un sous-groupe unipotent lisse connexe  $U$  est le radical unipotent la composante neutre de la partie lisse de son normalisateur, ce dernier est un sous-groupe parabolique de  $G$ .*

Nous précisons à la section 4.1 les hypothèses sur l'entier  $p > 0$  (et à la section 2.3 celles éventuelles faites sur le normalisateur), pour lesquelles le théorème ci-dessous est valide, ainsi que les raisons techniques qui justifient de telles restrictions :

**Théorème.** *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif. Sous certaines conditions sur  $p$ , si  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ , telle que  $\mathfrak{u}$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de son normalisateur dans  $\mathfrak{g}$  (et si, pour certaines caractéristiques, le normalisateur  $N_G(\mathfrak{u})$  satisfait une hypothèse additionnelle appelée “ $\phi$ -saturation infinitésimale” et que nous explicitons à la définition 2.1) alors :*

1. le normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ ,
2. de plus,  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}}) = \text{Lie}(P_G(U))$  où :
  - l'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$  est l'algèbre de Lie du sous-groupe parabolique optimal associé à  $\mathfrak{u}$  et fourni par le théorème de Hilbert–Mumford–Kempf–Rousseau (voir [41]),
  - le sous-groupe parabolique  $P_G(U)$  est le sous-groupe parabolique obtenu par le théorème de Veisfeiler–Borel–Tits appliqué à  $U$  (voir [6, corollaire 3.2]) (où  $U \subset G$  est un sous-groupe qui intègre  $\mathfrak{u}$ , i.e.  $U \subseteq G$  est un sous-groupe unipotent, lisse et connexe tel que  $\text{Lie}(U) = \mathfrak{u}$ , nous verrons que sous les hypothèses que nous imposons sur  $p$  un tel groupe existe toujours).

Lorsque  $k$  est un corps de caractéristique  $p > 0$  les algèbres de Lie qui dérivent d'un groupe réductif appartiennent à une classe particulière d'algèbres de Lie, appelées  $p$ -agèbres de Lie restreintes, qui sont munies d'une structure additionnelle appelée  $p$ -puissance (lorsque l'algèbre de Lie dérive d'un groupe, cette structure est directement héritée de ce dernier, voir par exemple

[19, II, §7, n°3]). Dans ce contexte la notion de nilpotence “canonique” est celle de  $p$ -nilpotence (définie à la sous-annexe C.2, voir également la section 2.2.2 de cette introduction). Elle permet de d’introduire la notion de  $p$ -radical d’une  $p$ -algèbre de Lie restreinte  $\mathfrak{q}$  sur  $k$ , noté  $\text{rad}_p(\mathfrak{q})$  : il s’agit du plus grand  $p$ -idéal  $p$ -nilpotent de  $\mathfrak{q}$ . Nous verrons à l’aide de résultats techniques sur les  $p$ -algèbres de Lie restreintes (voir la sous-annexe C.3) que théorème ci-dessus admet la reformulation suivante :

**Corollaire.** *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif. Sous certaines conditions sur  $p$  (et si, pour certaines caractéristiques le normalisateur  $N_G(\mathfrak{u})$  est  $\phi$ -infinimentalement saturé), si  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie telle que  $\mathfrak{u} = \text{rad}_p(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}))$ , alors  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est la sous-algèbre de Lie du sous-groupe parabolique obtenu au théorème ci-dessus.*

Nous montrons enfin que ces deux résultats sont le même cas particulier de l’énoncé suivant, que nous démontrons également (à savoir le cas pour lequel la tour de normalisateurs de l’énoncé converge dès la première étape) :

**Corollaire.** *Sous les hypothèses du théorème, soit  $\mathfrak{u}$  une sous-algèbre  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$ . Considérons la tour des normalisateurs associée à  $\mathfrak{u}$  : posons  $\mathfrak{u}_0 := \mathfrak{u}$  et  $\mathfrak{q}_1 := N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_0)$ . Le sous-espace  $\mathfrak{u}_1$  est l’ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $\mathfrak{q}_0$ , l’algèbre de Lie  $\mathfrak{q}_2$  est le normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_1)$ , et ainsi de suite : soient  $\mathfrak{u}_i$  l’ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{i-1})$  et  $\mathfrak{q}_{i+1} := N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_i)$ . Notons  $\mathfrak{q}_{\infty}$  l’objet limite de la tour des normalisateurs, et  $\mathfrak{u}_{\infty}$  l’ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty})$ . Si, pour certaines caractéristiques, ce normalisateur “limite”  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty})$  est  $\phi$ -infinimentalement saturé, alors :*

1. *la tour de normalisateurs de  $\mathfrak{u}$  converge vers une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ , notée  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty})$ ,*
2. *cet objet limite vérifie  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}_{\infty}}) = \text{Lie}(N_G(J_{\mathfrak{u}_{\infty}}))$  où le sous-groupe  $N_G(J_{\mathfrak{u}_{\infty}})$  est l’objet limite de la tour des normalisateurs lisses associée à  $V = \text{Rad}_U(N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0)$  (à savoir une construction analogue à celle du début de l’énoncé mais réalisée au niveau des groupes, et en considérant la composante neutre de la partie réduite du normalisateur à chaque itération).*

Soulignons que nous avons choisi de nous placer systématiquement dans le cadre réductif, quand les énoncés classiques de caractéristique nulle sont formulés dans le cas semi-simple (ce qui n’est pas une restriction dans ce contexte, puisqu’en caractéristique 0 les algèbres de Lie nilpotentes (et non seulement nil) s’intègrent). En caractéristique  $p > 0$  en revanche cela ajoute une difficulté supplémentaire du fait de la présence d’éventuels facteurs non lisses dans le centre de l’algèbre de Lie de  $G$ . Ces facteurs se retrouvent dans le nilradical de  $\mathfrak{g}$  mais pas dans son  $p$ -radical, qui est, en ce sens, le bon analogue du nilradical de la caractéristique nulle.

Comme nous pouvons nous y attendre, la situation pour de très grandes caractéristiques (ici lorsque  $p > 2^{2d}$  où  $d$  est la dimension d’une représentation fidèle minimale de  $G$ ) est identique à celle de la caractéristique nulle. Sous réserve d’un travail préliminaire pour démontrer que les énoncés et outils techniques développés en caractéristique nulle sont encore valides, la démonstration des énoncés précédents reprend verbatim chaque étape des preuves de ceux établis en caractéristique nulle. C’est l’objet de la première partie de la section 6. L’exercice s’avère toutefois intéressant car il permet de mettre en évidence une liste d’obstructions à l’obtention des résultats désirés pour une caractéristique arbitraire, et de dessiner les enjeux et le plan des chapitres II et III. Il s’agit, à chaque nouvel énoncé affaiblissant les hypothèses sur la caractéristique (et dont la démonstration fait l’objet d’un chapitre en soi), de discuter de la possibilité d’associer à toute (ou au moins à certaines, et le cas échéant de déterminer lesquelles) sous-algèbre de Lie  $p$ -nil  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  un sous-groupe unipotent lisse et connexe  $U \subseteq G$  tel que  $\text{Lie}(U) = \mathfrak{u}$  ; de déterminer, lorsqu’une telle construction est possible, si elle est compatible avec une représentation presque fidèle de petite hauteur de  $G$  (voir la section 2.1 de cette introduction pour une définition précise de ces conditions et la section 4.1 pour justifier ces hypothèses dans le contexte qui nous intéresse) ; et d’étudier la lissité des normalisateurs pour l’action adjointe de  $G$  sur son algèbre

de Lie. Notons que cette dernière propriété n'est pas vérifiée a priori dans les différentes versions du théorème de Morozov que nous nous proposons de démontrer dans cet article. Il a donc fallu établir une mesure de ce défaut de lissité. Un théorème de P. Deligne (voir [18, 1.7]) puis de V. Balaji, P. Deligne, et A. J. Parameswaran (voir [2, 2.5]), ce deuxième résultat est une généralisation de l'autre) permet de répondre à cette exigence dans certains cas. Ces énoncés imposaient des restrictions trop importantes sur la caractéristique du corps algébriquement clos considéré pour être appliqués au contexte qui nous intéresse, nous en proposons une généralisation à ce cadre. L'énoncé exact est reproduit à la section 4.1 de cette introduction.

## 2 Le passage de la caractéristique nulle à des caractéristiques positives

De récents travaux ont permis d'obtenir des analogues au théorème de Morozov. Nous introduisons à la section 3 de cette introduction deux résultats de la littérature qui ont été particulièrement importants dans la rédaction de cet article. Avant d'en détailler la teneur rappelons quelques définitions qui seront utiles à leur compréhension et explicitons les enjeux auxquels ils se confrontent.

### 2.1 Définitions et conventions

Soient  $k$  un corps de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif (toujours supposé connexe, nous reprenons ici les conventions de [22]). Soit  $T \subset B \subset G$  un tore maximal, respectivement un sous-groupe de Borel contenant  $T$  et qui définit un système de racines simples  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ . Si  $\alpha$  est une racine  $\alpha^\vee$  désigne la coracine correspondante. Supposons pour l'instant que le système de racines  $\Phi$  associé à  $G$  est irréductible. Notons  $\alpha_0 = \sum_i a_i \alpha_i$ , respectivement  $\alpha^\vee := \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i^\vee$ , la plus haute racine de  $\phi$  et sa décomposition en racines simples, respectivement la coracine associée. La caractéristique  $p$  de  $k$  est dite :

- de torsion pour  $\Phi$  s'il existe  $i \in [1, \dots, n]$  tel que  $p$  divise  $b_i$  ;
- mauvaise pour  $\Phi$  s'il existe  $i \in [1, \dots, n]$  tel que  $p$  divise  $a_i$  ;
- bonne pour  $\Phi$  si elle n'est pas mauvaise pour  $\Phi$  ;
- très bonne pour  $\Phi$  si elle est bonne pour  $\Phi$  et si  $p$  ne divise pas  $n + 1$  lorsque  $\Phi$  est de type  $A_n$ .

Le nombre de Coxeter de  $G$ , noté  $h(G)$ , est donné par l'égalité  $h_G := 1 + \sum a_i$ .

Si maintenant  $\Phi$  n'est plus irréductible, la caractéristique  $p$  de  $k$  est de torsion pour  $G$  si elle est de torsion pour une composante irréductible de  $\Phi$ , ou si  $p$  divise l'ordre du groupe fondamental de  $G$  ; elle est bonne, respectivement très bonne, pour  $G$  si elle est bonne, respectivement très bonne, pour chaque composante irréductible de  $\Phi = \Phi(G, T)$ . Le nombre de Coxeter de  $G$  est le maximum des nombres de Coxeter des composantes irréductibles de  $\Phi$ . Notons par ailleurs  $\mathcal{D}G$  le groupe dérivé de  $G$ . La caractéristique de  $k$  est dite séparablement bonne pour  $G$  si le revêtement universel du groupe dérivé de  $G$ , noté  $(\mathcal{D}G)^{\text{sc}}$  définit une isogénie séparable  $(\mathcal{D}G)^{\text{sc}} \rightarrow \mathcal{D}G$ .

Les hypothèses suivantes seront considérées pour le choix d'une représentation  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  : nous disons que  $\rho$  est de petite hauteur si la caractéristique  $p$  satisfait la condition suivante :

$$p > \max\left\{\sum_{\alpha > 0} \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \mid \lambda \text{ est un poids de } T\right\}.$$

Il s'agit d'un critère de semi-simplicité : dans [61, Part II, Lecture 4, Theorem 6, p 25] J-P. Serre montre en effet que les représentations de petite hauteur sont semi-simples (une autre dénomination est "complètement réductibles"). Par ailleurs, la représentation  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  est presque fidèle si son noyau est de type multiplicatif.

Enfin, rappelons que si  $k$  est un corps algébriquement clos et  $G$  est un  $k$ -groupe réductif, un sous-groupe  $P \subseteq G$  est parabolique s'il est lisse et s'il contient un sous-groupe de Borel de  $G$  (i.e. un sous-groupe fermé, résoluble, connexe, maximal de  $G$ ). Lorsque  $G$  est un groupe réductif au-dessus d'une base  $S$  arbitraire (par exemple, dans cet article, nous considérerons des groupes

réductifs au-dessus d'une courbe projective, lisse et connexe) un sous-groupe parabolique de  $G$  est un sous-groupe lisse tel que pour chaque  $s \in S$  la fibre géométrique  $P_{\bar{s}}$  contient un sous-groupe de Borel de  $G_{\bar{s}}$ .

## 2.2 Construire les bons analogues en caractéristique $p < h(G)$

### 2.2.1 Éléments nilpotents d'une algèbre de Lie et intégration, le cas de la caractéristique nulle

Soient  $R$  un anneau et  $G$  un  $R$ -groupe algébrique affine. Soit  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  une représentation fidèle de dimension finie. le morphisme dérivé induit, noté  $\mathrm{Lie}(\rho)$ , est encore injectif puisque le foncteur  $\mathrm{Lie}$  est exact à gauche (voir [19, II, §4, 1.5]). Un élément  $x \in \mathfrak{g}$  est dit nilpotent, nous écrirons  $\mathfrak{g}$ -nilpotent, si  $\mathrm{Lie}(\rho)(x)$  est un élément nilpotent de  $\mathfrak{gl}(V)$ . Cette notion est indépendante du choix de la représentation fidèle  $\rho$  considérée (voir [7, I.4.4, Theorem]).

Supposons maintenant que  $G$  est un groupe algébrique affine au-dessus d'un corps  $k$  de caractéristique nulle. Soit  $R$  une  $k$ -algèbre. D'après [19, II, §6, 3.1], pour chaque élément  $\mathfrak{g}$ -nilpotent  $x \in \mathfrak{g}(R)$ , il existe un unique élément  $\exp(tx) \in G(R[t])$  tel que  $\exp(\epsilon x) = e^{\epsilon x} \in G(R[\epsilon])$  et qui est compatible avec les différentes actions, c'est même une définition possible de la  $\mathfrak{g}$ -nilpotence (voir [19, Corollaire 3.5 et 3.7]). Précisons ici une notion importante pour la suite de ce mémoire : nous dirons que l'intégration est compatible avec la représentation adjointe si pour tout élément nilpotent  $x \in \mathfrak{g}$  l'égalité  $\mathrm{Ad}(\exp(tx)) = \exp(t \mathrm{ad}(x))$  est satisfaite.

En résumé, lorsque  $k$  est de caractéristique nulle il est possible d'intégrer ponctuellement et de manière unique les éléments  $\mathfrak{g}$ -nilpotents de  $\mathfrak{g}$  en des éléments unipotents de  $G$  et cette intégration est compatible avec la représentation adjointe.

### 2.2.2 Éléments nilpotents d'une algèbre de Lie et intégration, les écueils de la caractéristique $p > 0$

Lorsque  $k$  est un corps de caractéristique  $p > 0$  comme mentionné à la section précédente certaines algèbres de Lie  $\mathfrak{h}$  sont enrichies d'une puissance  $p$ -ième sur  $\mathfrak{g}$ , à savoir d'une application :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ x &\mapsto x^{[p]}, \end{aligned}$$

telle que

1. l'application adjointe est compatible avec la puissance  $p$ -ième : pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  nous avons

$$\mathrm{ad}(x^{[p]}) = (\mathrm{ad}(x))^p,$$

2. pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  et tout  $\alpha \in k$ , nous avons  $(\alpha x)^{[p]} = \alpha^p x^{[p]}$ ,
3. pour tous  $x_0, x_1 \in \mathfrak{g}$  nous avons  $(x_0 + x_1)^{[p]} = x_0^{[p]} + x_1^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x_0, x_1)$ , avec :

$$s_i(x_0, x_1) := -\frac{1}{r} \sum_{\sigma} \mathrm{ad}(x_{\sigma(1)}) \mathrm{ad}(x_{\sigma(2)}) \dots \mathrm{ad}(x_{\sigma(p-1)})(x_1)$$

où  $\sigma$  parcourt les applications  $[1, p-1] \rightarrow \{0, 1\}$  qui prennent  $i$  fois la valeur 0.

De telles algèbres sont appelées  $p$ -algèbres de Lie restreintes. En particulier, toute  $k$ -algèbre de Lie dérivant d'un  $k$ -groupe algébrique est une  $p$ -algèbre de Lie restreinte, la  $p$ -structure est héritée du groupe lui-même (voir [19, II, §7, n°3, proposition 3.4]). Dans ce contexte, soit  $G$  un  $k$ -groupe algébrique. Un élément  $x \in \mathfrak{g}$  est  $p$ -nilpotent s'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x^{[p^n]} = 0$ . Nous dirons que  $x$  est d'ordre de  $p$ -nilpotence  $n$ . Un théorème d'Iwasawa (voir [37]) généralisé par N. Jacobson (voir [38] et [60, I, §4, Theorem I.4.2]) au cadre des  $p$ -algèbres de Lie restreintes de dimension finie, permet de montrer que les deux définitions décrivent en fait la même propriété.

Lorsque  $k$  est un corps de caractéristique  $p > 0$  l'existence d'un élément  $\exp(tx) \in G(R[t])$  pour tout élément  $p$ -nilpotent  $x \in \mathfrak{g}(R)$  qui satisfasse l'égalité  $\exp(\epsilon x) = e^{\epsilon x}$  n'est plus systématiquement assurée. Toutefois une intégration ponctuelle reste possible sous certaines hypothèses, bien qu'elle ne soit plus nécessairement compatible avec la représentation adjointe, c'est l'objet des paragraphes suivants.

Notons  $\mathcal{N}_{\text{réd}}(\mathfrak{g})$  la variété nilpotente réduite de  $\mathfrak{g}$ , à savoir le sous-schéma réduit de  $\mathfrak{g}$  dont les  $k$ -points sont les éléments  $p$ -nilpotents de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathcal{V}_{\text{réd}}(G)$  la variété unipotente réduite de  $G$ , i.e. le sous-schéma réduit de  $G$  dont les  $k$ -points sont les éléments unipotents de  $G$ . Dans [65, theorem 3.1], T. A. Springer établit l'existence de morphismes  $G$ -équivariants entre les variétés réduites  $\mathcal{N}_{\text{réd}}(\mathfrak{g})$  et  $\mathcal{V}_{\text{réd}}(G)$  (qui sont des isomorphismes sur la clôture algébrique de  $k$ ) dès lors que  $p$  est bon pour le  $k$ -groupe  $G$  qui est lui supposé simplement connexe. De telles applications sont appelées isomorphismes de Springer. Dans [3, 9.3.2] P. Bardsley et R. W. Richardson étendent ce résultat à un groupe réductif arbitraire qui satisfait les hypothèses standard (telles que définie par J. C. Jantzen, voir par exemple [39, 2.9]). Enfin, dans [31, Corollary 5.5], S. Herpel établit l'existence d'isomorphismes de Springer pour un  $k$ -groupe  $G$  arbitraire lorsque la caractéristique de  $k$  est vraiment bonne. Pour ce faire, l'auteur utilise notamment des résultats de G. McNinch (voir [54, Theorem 3.3]).

Soulignons ici que si  $p > \mathfrak{h}(G)$  J-P. Serre montre dans [61, Part II, Lecture 2, Theorem 3] (voir également l'article de V. Balaji, P. Deligne et A. J. Parameswaran, [2, §6]) qu'il existe un unique isomorphisme de Springer, noté  $\exp : \mathcal{N}_{\text{réd}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\text{réd}}(G)$  et que cet isomorphisme de variété induit, pour tout sous-groupe de Borel  $B \subset G$ , un isomorphisme de groupes algébriques  $\exp_{\mathfrak{b}} : (\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B), \circ) \rightarrow \text{Rad}_U(B)$  (pour le choix d'une structure de groupe algébrique  $\circ$  convenable sur  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$ , nous détaillons ceci dans les paragraphes qui suivent). Il démontre également que bien que lorsque la caractéristique du corps est plus petite de nombreux isomorphismes de Springer existent, ils induisent tous la même bijection entre les  $G$ -orbites de  $\mathcal{N}_{\text{réd}}(\mathfrak{g})$  et celles de  $\mathcal{V}_{\text{réd}}(G)$  (voir [53, 10, Appendix], notons au passage que ces orbites sont en nombre fini).

L'existence de tels isomorphismes permet de définir pour tout élément  $p$ -nilpotent  $x \in \mathfrak{g}$  une application  $\mathbb{G}_a \rightarrow G$ ,  $t \mapsto \phi_x(t) := \phi(tx)$  appelée  $t$ -puissance. Lorsque  $p > \mathfrak{h}(G)$ , cela permet à P. Deligne de définir la notion de saturation infinitésimale d'un sous-groupe  $H \subseteq G$  (voir [18, définition 1.5], notons qu'il s'agit d'une adaptation de la notion de "saturation" d'un sous-groupe  $H \subseteq G$  introduite par J-P. Serre dans [62, §4]) :

**Définition 2.1.** Un sous-schéma en groupes  $H \subseteq G$  est infinitésimalement saturé si pour tout élément  $p$ -nilpotent  $x \in \mathfrak{h} := \text{Lie}(H)$  la  $t$ -puissance factorise par  $H$ . En d'autres termes, la situation est la suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_a & \xrightarrow{\exp_x(\cdot)} & G, \\ \exists \downarrow & \nearrow & \\ & & H. \end{array}$$

Cette notion se généralise mécaniquement au contexte des caractéristiques séparablement bonnes pour  $G$ . Soit  $\phi : \mathcal{N}_{\text{réd}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\text{réd}}(G)$  un isomorphisme de Springer pour  $G$ . Un sous-schéma en groupes  $H \subseteq G$  est  $\phi$ -infinitésimalement saturé si pour tout élément  $p$ -nilpotent  $x \in \mathfrak{h} := \text{Lie}(H)$  la  $t$ -puissance  $\phi_x : \mathbb{G}_a \rightarrow G$ ,  $t \mapsto \phi_x(t)$  factorise par  $H$ .

### 2.2.3 Intégration des algèbres de Lie nilpotentes en caractéristique nulle

Nous avons vu que lorsque  $k$  est de caractéristique nulle tout élément  $\mathfrak{g}$ -nilpotent s'intègre en un élément unipotent de  $G$ , cela permet de définir la loi de Baker–Campbell–Hausdorff sur  $\mathfrak{g}$ , notée  $\circ$  (voir [11] et [19, 4, §2, n°4.3]) : soit  $\log$  l'inverse de l'application exponentielle, pour

tous  $x$  et  $y$  éléments  $\mathfrak{g}$ -nilpotents de  $\mathfrak{g}$  posons  $x \circ y = \log(\exp(x)\exp(y))$ . Par ce procédé, toute sous-algèbre nilpotente de  $\mathfrak{g}$  est munie d'une structure de groupe algébrique isomorphe à un sous-groupe unipotent lisse et connexe de  $G$ , et ce procédé définit une équivalence de la catégorie des  $k$ -algèbres de Lie nilpotentes de dimension finie sur celle des  $k$ -groupes algébriques unipotents (voir [19, IV, §2, n°4, Corollaire 4.4]).

### 2.2.4 Un isomorphisme de groupes pour les caractéristiques $p > \mathfrak{h}(G)$

Dans [63, 2.2 proposition 1] J-P. Serre montre que la loi de Baker–Campbell–Hausdorff est à coefficients  $p$ -entiers lorsque  $p \geq \mathfrak{h}(G)$ . Cela découle du fait que sous ces conditions tout élément  $p$ -nilpotent de  $\mathfrak{g}$  est d'ordre de  $p$ -nilpotence égal à 1 (voir [51, 4.4 Corollary]). Si  $B \subset G$  est un sous-groupe de Borel, cela permet de munir l'algèbre de Lie de son radical unipotent (notée  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$ ) d'une structure de  $k$ -groupe algébrique isomorphe à  $\mathrm{Rad}_U(B)$ . Soit  $(\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B), \circ) \rightarrow \mathrm{Rad}_U(B)$  l'isomorphisme correspondant. L'énoncé suivant est un corollaire d'un résultat de P. Levy, G. McNinch et D. Testerman, il permet d'étendre l'existence de cet isomorphisme à toutes sous-algèbres de Lie  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$  (puisque si  $p > \mathfrak{h}(G)$ , il n'est pas de torsion pour  $G$ ) :

**Corollaire** (de [47, theorem 2 et remark a]). *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif. Supposons que  $p$  ne soit pas de torsion pour  $G$ . Soit  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre  $p$ -nil (i.e. dont tous les éléments sont  $p$ -nilpotents). Alors  $\mathfrak{u}$  est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie du radical unipotent d'un sous-groupe de Borel de  $G$ .*

Ce faisant, toute algèbre de Lie  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$  hérite d'une structure de groupe algébrique (qui provient de celle sur  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$ ) et s'intègre donc en un sous-groupe unipotent, lisse et connexe  $U \subseteq G$  tel que  $\mathrm{Lie}(U) = \mathfrak{u}$ . Cette intégration n'est toutefois plus compatible avec la représentation adjointe (voir [61, Part II, Lecture 4, Corollary 2]). Précisons que lorsque  $G$  admet une représentation fidèle de petite hauteur (par exemple si  $G$  est simple, simplement connexe et  $p > 2\mathfrak{h}(G) - 2$ ) cette difficulté est aisément contournée. Dans les autres cas, nous avons recours au formalisme fppf développé au paragraphe suivant. Par ailleurs, et contrairement à la situation en caractéristique nulle, cette intégration n'induit pas de correspondance bijective entre les  $k$ -sous-algèbres de Lie  $p$  et les  $k$ -sous-groupes unipotents de  $G$ . La notion de saturation infinitésimale fournit un critère pour lequel cette correspondance est assurée.

Notons  $G_{\mathbb{Z}}$  un  $\mathbb{Z}$ -groupe réductif tel que  $G = G_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} k$ . Un tel  $\mathbb{Z}$ -groupe réductif existe toujours d'après [22, XXV, corollaire 1.3]. J-P. Serre montre dans [63, 2.2] que la loi de groupe algébrique sur  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$  provient de la loi de groupe algébrique sur  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)_{\mathbb{Q}}$  : elle est définie sur  $\mathbb{Q}$ , s'étend sur  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ , et induit une loi de groupes sur  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)_{\mathbb{F}_p}$  puis sur  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$ , par spécialisation.

Soulignons enfin que d'après [2, 2.2] lorsque  $p > \mathfrak{h}(G)$  (en fait lorsque  $p \geq \mathfrak{h}(G)$  et le revêtement universel de  $G$  définit une isogénie séparable  $G^{\mathrm{sc}} \rightarrow G$ , ce qui revient à exclure l'éventualité d'un facteur  $\mathrm{PGL}_p$  en caractéristique  $p$  dans le revêtement universel) l'isomorphisme de Springer défini par l'exponentielle tronquée  $\exp : \mathcal{N}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{red}}(G)$  (et qui est, rappelons-le, l'unique isomorphisme de Springer sur  $G$  sous nos hypothèses sur  $p$ ) induit un isomorphisme de groupes algébriques

$\exp_{\mathfrak{b}} : (\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B), \circ) \rightarrow \mathrm{Rad}_U(B)$  pour tout sous-groupe de Borel  $B \subset G$ . Les détails de ces constructions sont repris à la partie 6 de l'article [2].

### 2.2.5 Le formalisme fppf

Lorsque  $k$  est de caractéristique séparablement bonne pour  $G$  un morphisme de Springer (non nécessairement unique)  $\phi : \mathcal{N}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{red}}(G)$  existe toujours. Lorsque  $G$  est simple cela est par exemple assuré par [64, theorem 1.1]. Le passage à un groupe réductif arbitraire ne pose pas de difficulté, en reprenant par exemple les arguments de la preuve de [31, Corollaire 5.5], qui justifient qu'une telle construction est stable par isogénie séparable et permet de relever ponctuellement les éléments de  $\mathfrak{g}$ . Toutefois, la loi de Baker–Campbell–Hausdorff (ou son analogue pour le morphisme  $\phi$  considéré) qu'il permet de définir formellement n'est plus définie sur

$\mathbb{Z}_{(p)}$  pour  $p < h(G)$ . Il n'est donc plus possible d'utiliser ce procédé pour munir l'algèbre de Lie du radical unipotent d'un sous-groupe de Borel de  $G$  d'une structure de  $k$ -groupe algébrique isomorphe à  $\text{Rad}_U(B)$ , ni de restreindre cette structure à toute sous-algèbre  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$  (lorsque  $p$  est séparablement bon il n'est pas de torsion et le corollaire de P. Levy, G. McNinch et D. Testerman s'applique encore).

L'existence d'une  $t$ -puissance associée à chaque isomorphisme de Springer n'est quant à elle pas impactée par ce changement de contexte, elle permet d'intégrer ponctuellement les éléments nilpotents de  $\mathfrak{g}$ . Tout isomorphisme de Springer  $\phi : \mathcal{N}_{\text{red}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\text{red}}(G)$  définit, avec sa  $t$ -puissance, un morphisme de schémas :

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{N}_{\text{red}}(\mathfrak{g}) \times \mathbb{G}_a &\rightarrow G \\ (x, t) &\mapsto \phi(tx) =: \phi_x(t). \end{aligned}$$

Une façon d'obtenir un schéma en groupes (lisse, connexe si la source du morphisme a les propriétés adéquates) à partir d'un morphisme de schémas à valeurs dans un schéma en groupes consiste à considérer le sous-préfaïceau en groupes engendré par l'image de ce morphisme (pour la topologie fppf (fidèlement plate de présentation finie)). Cette technique, développée dans [20, VIB, §7] permet notamment de construire le sous-groupe dérivé d'un groupe réductif. Ici, nous considérons, pour toute sous-algèbre de Lie  $p$ -nil  $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{g}$  le morphisme

$$\begin{aligned} \psi_{\mathfrak{v}} : \mathfrak{v} \times \mathbb{G}_a &\rightarrow G \\ (x, t) &\mapsto \phi(tx) =: \phi_x(t). \end{aligned}$$

Les résultats de [20, VIB, §7], notamment la proposition 7.1 et la remarque 7.6.1, permettent de définir un sous-groupe lisse et connexe  $J_{\mathfrak{v}} \subset G$  et nous montrons à la section 11 du chapitre III que ce sous-groupe est un bon candidat à l'intégration de la sous-algèbre  $p$ -nil  $\mathfrak{v}$  :

**Lemma (11.4).** *Soit  $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre  $p$ -nil. Le sous-groupe engendré  $J_{\mathfrak{v}}$  est unipotent et nous avons :*

$$\mathfrak{v} \subseteq \text{Lie}(J_{\mathfrak{v}}) = \mathfrak{j}_{\mathfrak{v}}.$$

Notons toutefois que l'inclusion du lemme ne peut-être une égalité que si  $\mathfrak{v}$  est a priori une  $p$ -sous-algèbre de Lie  $p$ -nil (puisque l'égalité  $\mathfrak{j}_{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v}$  munit  $\mathfrak{v}$  d'une  $p$ -structure héritée de celle de  $J_{\mathfrak{v}}$ ). Le sous-groupe obtenu par ce procédé apparaît donc comme un bon candidat à l'intégration des  $p$ -algèbres de Lie  $p$ -nil. Malheureusement, même avec cette hypothèse additionnelle il s'avère en général trop grossier. Nous présentons à l'annexe E.3 un exemple de sous-algèbre de Lie  $p$ -nil qui n'est pas intégrable. Toutefois, lorsque la sous-algèbre considérée satisfait certaines propriétés de maximalité, comme c'est le cas dans les énoncés des analogues du théorème de Morozov et ses corollaires, ce procédé permet bien d'obtenir l'intégration escomptée, nous le montrons à la section 12 :

**Lemme (12.2).** *Soient  $G$  un groupe réductif au-dessus d'un corps  $k$  de caractéristique  $p$  séparablement bonne pour  $G$  et  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre. Si  $\mathfrak{u}$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de son normalisateur dans  $\mathfrak{g}$ , noté  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ , alors la sous-algèbre  $\mathfrak{u}$  est intégrable.*

Un raisonnement similaire fournit également le lemme suivant, qui permet d'intégrer la sous-algèbre considérée dans le premier corollaire de l'analogue du théorème de Morozov que nous souhaitons obtenir :

**Lemme (12.4).** *Soient  $G$  un groupe réductif au-dessus d'un corps  $k$  de caractéristique  $p$  séparablement bonne pour  $G$  et  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre telle que le sous-groupe  $N_G(\mathfrak{h})$  soit  $\phi$ -infinitésimalement saturé. Si  $\mathfrak{u} := \text{rad}_p(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}))$  alors la sous-algèbre  $\mathfrak{u}$  est intégrable.*

Lorsque nous avons discuté la possibilité d'intégrer des sous-algèbres de Lie  $p$ -nil en caractéristique  $p > h(G)$  nous n'avons imposé aucune hypothèse quant à l'existence d'une  $p$ -structure. Cela découle de ce que sous ces hypothèses tout élément nilpotent d'une sous-algèbre de Lie  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$  est d'ordre de  $p$ -nilpotence égal à 1 (voir [51, corollary, p 11]). Lorsque  $p > h(G)$  toute sous-algèbre de Lie  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$  est donc une  $p$ -sous-algèbre.

## 2.2.6 Intégration et normalisateurs, contourner l'absence de compatibilité avec la représentation adjointe

Comme nous l'avons mentionné dans la section 1 de cette introduction, la compatibilité de l'intégration des algèbres de Lie  $p$ -nil considérées avec la représentation adjointe, ou, ce qui est une condition suffisante, l'existence d'une représentation fidèle de petite hauteur, sont des propriétés importantes car elles permettent de conclure quant à l'égalité des normalisateurs de l'algèbre de Lie  $p$ -nil considérée et du groupe qui l'intègre pour l'action de  $G$ . Le formalisme fppf décrit ci-dessus permet de contourner cette absence de compatibilité en utilisant la  $G$ -équivalence de la  $t$ -puissance associée à l'isomorphisme de Springer  $\phi$  (qui est une propriété toujours vérifiée, par définition). Nous obtenons ainsi :

**Lemme (12.1).** *Lorsque  $J_{\mathfrak{v}}$  intègre  $\mathfrak{v}$  alors  $N_G(J_{\mathfrak{v}}) = N_G(\mathfrak{v})$ .*

## 2.3 Défaut de lissité des normalisateurs

### 2.3.1 Un défaut de lissité a priori

Soient  $R$  un anneau et  $G$  un  $k$ -groupe algébrique agissant sur un  $R$ -schéma  $X$ . Soit  $Y$  un  $R$ -sous-schéma de  $X$ . Le normalisateur de  $Y$  pour l'action de  $G$  est le sous-foncteur  $N_G(Y)$  de  $G$  défini pour toute  $R$ -algèbre  $S$  par la conditions suivante

$$N_G(Y)(S) = \{g \in G(S) \mid g_{S \otimes T} \cdot Y(S \otimes T) = Y(S \otimes T), \text{ pour toute } R\text{-algèbre } T\}.$$

Si  $G$  est un  $R$ -groupe réductif, soient  $H \subseteq G$  un sous-groupe distingué et  $\mathfrak{h}$  son algèbre de Lie. D'après [19, II, §1 n°3, Théorème 3.6 b)] les normalisateurs  $N_G(H)$  et  $N_G(\mathfrak{h})$  sont représentables par des sous-foncteurs-groupes fermés de  $G$ .

Lorsque  $k$  est un corps de caractéristique 0, un théorème de P. Cartier (voir par exemple [19, II, §6 1.1.a))]) affirme que tout  $k$ -groupe localement algébrique est lisse. En particulier, si  $G$  est un  $k$ -groupe réductif tous les normalisateurs de sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  et de sous-groupes de  $G$  sont lisses. En caractéristique  $p > 0$  un tel résultat n'est plus vérifié : le groupe  $\mu_p = \text{Spec } k[T]/(T^p - 1)$  des racines

$p$ -ièmes de l'unité par exemple n'est pas lisse en caractéristique  $p$  puisque  $[\text{Lie}(\mu_p) : k] = 1 > \dim(\mu_p) = 0$  (rappelons qu'au-dessus d'un corps  $k$  un  $k$ -groupe localement algébrique  $G$  est lisse si et seulement si  $[\text{Lie}(G) : k] = \dim(G)$ ). En particulier, puisque  $\mu_p$  est le centre du  $k$ -groupe réductif  $\text{SL}_p$ , cet exemple montre qu'en caractéristique strictement positive le centre d'un  $k$ -groupe algébrique n'est pas toujours lisse. Les exemples de centralisateurs non lisses ne sont toutefois pas légion : dans [31, Theorem 1.1] S. Herpel démontre que la caractéristique  $p$  est vraiment bonne pour  $G$  si et seulement si les centralisateurs des sous-groupes fermés de  $G$  sont lisses (voir [31, Definition 2.11] pour une définition exacte de ces entiers, nous nous contentons de signaler ici que tout entier très bon pour  $G$  est vraiment bon).

Sans surprise, la lissité systématique des normalisateurs pour l'action d'un  $k$ -groupe réductif est également mise en défaut dans ce contexte, les contre-exemples sont plus nombreux et la situation plus complexe que pour les centralisateurs : dans [30, lemma 11] S. Herpel et D. I. Stewart proposent des exemples de normalisateurs non lisses pour l'action de  $\text{GL}_3(V)$  sur ses sous-groupes, pour toute caractéristique  $p > 0$ . Soulignons enfin que l'article susmentionné fournit des bornes sur la caractéristique de  $k$  pour lesquelles tous les normalisateurs pour l'action de  $G$  sur certains espaces sont lisses. Signalons notamment le théorème A de [30] qui stipule que les normalisateurs (pour l'action adjointe de  $G$ ) de tous les sous-ensembles de  $\mathfrak{g}$  sont lisses dès lors que  $p > 2^{2d}$  (où  $d$  est la dimension d'une représentation fidèle minimale de  $G$ ).

### 2.3.2 Mesurer le défaut de lissité des normalisateurs

Nous voulons démontrer que sous certaines hypothèses sur la caractéristique  $p$  du corps algébriquement clos  $k$  considéré, le  $k$ -groupe réductif  $G$  et la  $p$ -sous-algèbre de Lie  $p$ -nil  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$ , le normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) = \text{Lie}(N_G(\mathfrak{u}))$  dérive d'un sous-groupe parabolique. Un tel sous-groupe

est lisse par définition. Puisque les normalisateurs de sous-espaces de  $\mathfrak{g}$  ne le sont a priori pas en caractéristique  $p > 0$ , il nous faut mesurer l’obstruction de ces normalisateurs à l’être. C’est ce que permettent les notions et résultats présentés ci-dessous.

Lorsque  $p > \mathfrak{h}(G)$  nous démontrons à la section 8.3.1 que le normalisateur de toute sous-algèbre de Lie  $p$ -nil est infinitésimalement saturé (voir la définition 2.1). Pour ce faire nous utilisons l’existence systématique d’un sous-groupe unipotent lisse connexe de  $G$  associé à une sous-algèbre de Lie  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$  et qui l’intègre. Un théorème de structure des groupes unipotents nous permet de conclure. Lorsque  $p$  est séparablement bon pour  $G$  l’existence d’une intégration systématique des algèbres de Lie  $p$ -nil fait défaut et nous ne pouvons plus recourir à ce genre d’argument pour obtenir la  $\phi$ -saturation infinitésimale des normalisateurs. Notons que pour que les énoncés des analogues du théorème de Morozov soient corrects les normalisateurs doivent satisfaire cette propriété. En effet, il s’agit de montrer que ces derniers sont paraboliques mais tout sous-groupe parabolique est  $\phi$ -infinitésimalement saturé (nous le montrons à la section 11.1 du chapitre III).

P. Deligne dans [18, théorème 1.7] démontre un théorème qui permet de mesurer le défaut de lissité des sous-groupes infinitésimalement saturés de  $\mathrm{GL}(V)$ , où  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$  est une somme finie de représentations fidèles de  $G$ . Ce résultat a été étendu par V. Balaji, P. Deligne et A. J. Parameswaran dans [2, theorem 2.5] au cas des sous-groupes infinitésimalement saturés d’un groupe réductif arbitraire au-dessus d’un corps de caractéristique  $p > \mathfrak{h}(G)$ . Nous obtenons dans la section 11 du chapitre III une généralisation de ces théorèmes aux sous-groupes  $\phi$ -infinitésimalement saturés d’un groupe réductif arbitraire  $G$  au-dessus d’un corps  $k$  de caractéristique séparablement bonne pour  $G$  :

**Théorème (10.4).** *Supposons que  $p$  est séparablement bon pour  $G$ . Soit  $\phi : \mathcal{N}_{\mathrm{réd}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{réd}}(G)$  un isomorphisme de Springer pour  $G$  et  $N \subseteq G$  un sous-groupe  $\phi$ -infinitésimalement saturé. Alors  $N_{\mathrm{réd}}^0$  et  $\mathrm{Rad}_U(N_{\mathrm{réd}}^0)$  sont des sous-groupes distingués de  $N$ . En outre, le quotient  $N/N_{\mathrm{réd}}^0$  est un  $k$ -groupe de type multiplicatif.*

Une première étape à la démonstration consiste à obtenir une généralisation infinitésimale des théorèmes susmentionnés :

**Proposition 2.2 (11.10).** *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$  et  $G$  un  $k$ -groupe algébrique tels que  $p$  soit séparablement bon pour  $G$ . Soit  $\phi : \mathcal{N}_{\mathrm{réd}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{réd}}(G)$  un isomorphisme de Springer. Si  $N \subseteq G$  est un sous-groupe  $\phi$ -infinitésimalement saturé, alors :*

1. *L’algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_{\mathrm{réd}}$  est un idéal de  $\mathfrak{n}$ ,*
2. *L’algèbre de Lie du radical unipotent de  $N_{\mathrm{réd}}$  est un idéal de  $\mathfrak{n}$ .*

Notons que cette proposition suffit déjà à obtenir l’analogue du théorème de Morozov désiré en caractéristique séparablement bonne, pour presque tout  $k$ -groupe réductif  $G$  : seuls les cas où  $G$  possède un facteur de type  $A_{pm-1}$ , avec  $m \geq 1$  restent problématiques et nécessitent l’obtention de la version “forte” de la généralisation (donnée par le théorème ci-dessus).

Soulignons également que ces résultats permettent d’établir a priori que les normalisateurs des énoncés que nous désirons démontrer contiennent un tore, ce qui est une condition très minimale à satisfaire pour espérer que l’énoncé désiré soit exact.

Remarquons enfin que le dernier point du théorème, qui caractérise le quotient de la composante neutre d’un groupe  $\phi$ -infinitésimalement saturé par la partie réduite de sa composante neutre, comme un sous-groupe de type multiplicatif, permet de comparer les  $p$ -radicaux de ces deux groupes et de montrer l’équivalence entre l’énoncé de l’analogue du théorème de Morozov souhaité et son premier corollaire. Ceci a nécessité un travail préliminaire sur les  $p$ -algèbres de Lie restreintes, les résultats obtenus sont présentés à la sous-annexe C.3. Mentionnons notamment le lemme suivant qui est le point clé pour comprendre cette équivalence :

**Lemma (C.24).** *Soient  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p \geq 3$  et  $G$  un  $k$ -groupe algébrique. Supposons que  $G$  soit une extension d’un  $k$ -groupe de type multiplicatif  $S$  par un  $k$ -groupe algébrique lisse et connexe  $H$  tel que  $\iota(\mathrm{Rad}_U(H))$  soit un sous-groupe distingué de  $G$  :*

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} S \longrightarrow 1,$$

alors nous avons  $\text{rad}_p(\mathfrak{g}) = \{x \in \text{rad}(\mathfrak{g}) \mid x \text{ est } p\text{-nilpotent}\} = \text{Lie}(\iota)(\text{rad}_p(\mathfrak{h}))$ .

### 2.3.3 Une condition nécessaire et suffisante

La théorie de Hilbert–Mumford–Kempf–Rousseau permet d’associer à toute sous-algèbre de Lie  $p$ -nil  $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{g}$  un sous-groupe parabolique de la forme  $P_G(\lambda_{\mathfrak{v}})$ , où  $\lambda_{\mathfrak{v}}$  est un cocaractère de  $G$  qui n’est pas uniquement déterminé, optimal pour  $\mathfrak{v}$  dans un certain sens, et tel que  $\mathfrak{v}$  soit une sous-algèbre de l’algèbre de Lie du radical unipotent de  $P_G(\lambda_{\mathfrak{v}})$ .

Puisque nous travaillons sur un corps soient  $P \subseteq G$  et  $T \subseteq G$  un tore maximal de  $G$ , alors  $P$  est de la forme  $P_G(\lambda)$  où  $\lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow G$  est un cocaractère de  $T$ , non nécessairement unique (voir [16, Proposition 2.2.9]). Si l’énoncé de l’analogie du théorème de Morozov est exact alors le normalisateur de la  $p$ -sous-algèbre  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  considérée dans l’énoncé doit être de la forme  $P_G(\lambda)$  (rappelons que la généralisation du théorème de P. Deligne permet d’assurer l’existence d’un tore  $T \subseteq N_G(\mathfrak{u})$ ). En fait la théorie de Hilbert–Mumford–Kempf–Rousseau affirme que nous devons avoir  $P_G(\lambda) = P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$ .

La lissité des normalisateurs considérés dans les énoncés pour l’action de  $G$  est en fait une condition équivalente à l’exactitude de ces derniers comme nous le montrons à la section 7 du chapitre II :

**Théorème (4.5).** *Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ . Soient  $G$  un  $k$ -groupe réductif et  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie telle que  $\mathfrak{u}$  est l’ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de son normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ . Supposons que  $p$  n’est pas de torsion pour  $G$ . Soit encore  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$  le sous-groupe parabolique optimal pour  $\mathfrak{u}$  défini par la méthode de Hilbert–Mumford–Kempf–Rousseau (voir [41, Theorem 3.4] pour l’existence d’un tel sous-groupe). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *l’algèbre  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est l’algèbre de Lie du sous-groupe parabolique  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$  ;*
2. *la composante connexe  $N_G(\mathfrak{u})^0$  du normalisateur de  $\mathfrak{u}$  dans  $G$  est lisse ;*
3. *elle satisfait l’égalité  $N_G(\mathfrak{u})^0 = P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$ .*

## 3 État des lieux

Dans [2, 4.7] V. Balaji, P. Deligne et A. J. Parameswaran établissent ainsi le résultat suivant qui peut s’interpréter comme un analogue non lisse du théorème de Veisfeiler–Borel–Tits 1.3. Notons que dans le cas d’un groupe simple et simplement connexe les hypothèses imposées par les auteurs sur  $G$  et  $p$  sont satisfaites pour les bornes explicites suivantes :

- si  $G$  est de type  $F_4$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  ou  $E_8$  l’énoncé ci-dessous est vérifié dès lors que  $p > 2h(G) - 2$ ,
- si  $G$  est d’un autre type, il suffit d’imposer  $p > h(G)$ .

**Théorème ([2, theorem 4.7]).** *Soient  $k$  un corps de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif. Supposons que  $G$  admette une représentation presque fidèle de petite hauteur  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  et  $p > h(G)$ . Alors pour tout sous-groupe unipotent  $U \subset G$  il existe un sous-groupe parabolique propre  $P \subset G$  qui contient le normalisateur  $N_G(U)$  et dont le radical unipotent, noté  $\text{Rad}_U(P)$  contient  $U$ .*

Comme nous l’avons mentionné dans 2.2, les conditions de ce théorème assurent l’existence d’une intégration systématique des  $p$ -sous-algèbres  $p$ -nil de  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  en un sous-groupe unipotent lisse et connexe  $U \subset G$  tel que  $\text{Lie}(U) = \mathfrak{u}$  (car  $p > h(G)$ ), ainsi que l’existence d’une représentation presque fidèle et de petite hauteur (qui serait donc compatible avec l’intégration). Dans ce cas, un analogue du théorème de Morozov apparaît comme un corollaire immédiat du théorème de V. Balaji, P. Deligne et A. J. Parameswaran. En effet, soit  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie

telle que  $\mathfrak{u} = \text{rad}_p(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}))$ . Puisque le  $p$ -radical d'une algèbre de Lie est une  $p$ -sous-algèbre  $p$ -nil elle s'intègre (sous nos hypothèses) en un sous-groupe unipotent lisse et connexe  $U \subseteq G$  tel que  $\text{Lie}(U) = \mathfrak{u}$  et  $N_G(\mathfrak{u}) = N_G(U)$  (puisque l'intégration est ici compatible avec la représentation de  $G$  considérée). Le théorème ci-dessus affirme qu'il existe dans ce cas un sous-groupe parabolique  $P \subseteq G$  tel que  $U \subseteq \text{Rad}_U(P)$  et  $N_G(U) \subseteq P$ , ce qui entraîne les inclusions d'algèbres de Lie correspondantes.

Supposons maintenant que l'inclusion  $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(P)$  soit stricte. Un corollaire du théorème de Engel (voir par exemple [10, §4, n°1, proposition 3]) assure qu'alors  $\mathfrak{u}$  est une sous-algèbre propre de  $N_{\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(P)}(\mathfrak{u})$ . Nous pouvons montrer que ce normalisateur est une  $p$ -sous-algèbre  $p$ -nil propre de  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(P)$ . Puisque  $N_G(U) \subseteq P$ , ce sous-groupe normalise  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(P)$ . La sous-algèbre  $N_{\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(P)}(\mathfrak{u})$  est donc un  $p$ -idéal  $p$ -nil de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ , d'où l'inclusion  $N_{\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(P)}(\mathfrak{u}) \subseteq \mathfrak{u}$ , qui fournit l'égalité  $\mathfrak{u} = N_{\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(P)}(\mathfrak{u})$ . Ceci contredit le caractère propre de l'inclusion  $\mathfrak{u} \subseteq \text{rad}_p(\mathfrak{u})$ . Ainsi  $\mathfrak{u} = \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(P)$ , ce qui se traduit par une égalité des groupes lisses et connexes  $U = \text{Rad}_U(P)$  (d'après [19, II, §5, Corollaire 5.5]). Puisqu'un sous-groupe parabolique normalise son radical unipotent nous en déduisons les égalités  $N_G(\mathfrak{u}) = N_G(U) = P$  et l'algèbre de Lie  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{p}$  est bien une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ .

Des travaux plus récents de A. Premet et D. I. Stewart (voir [58, Corollary 1.3]) permettent d'obtenir, à l'aide d'une analyse de cas, une version infinitésimale du théorème de V. Balaji, P. Deligne et A. J. Parameswaran lorsque  $G$  satisfait une série d'hypothèses dites standard (qui assurent entre autres la semi-simplicité de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ ). Ce faisant ils obtiennent un analogue du théorème de Morozov en caractéristique  $p > 0$  (voir [58, Corollary 1.4]). Soulignons que ce dernier est énoncé pour une condition sur le nilradical du normalisateur, et non son  $p$ -radical, cette différence s'explique du fait de la semi-simplicité supposée de  $\mathfrak{g}$  (il s'agit d'une conséquence des hypothèses standard). À titre de comparaison avec les hypothèses de l'énoncé précédent, lorsque  $G$  est un groupe simple simplement connexe, il satisfait les hypothèse standard dès lors que  $p$  est bon pour  $G$  et ne divise pas  $n + 1$  si  $g$  possède un facteur de type  $A_n$ .

## 4 Résultats principaux

### 4.1 Autour du théorème de Morozov

Dans ce travail nous adaptons la preuve de V. Balaji, P. Deligne et A. J. Parameswaran et affaiblissons les hypothèses requises par les auteurs sur  $G$  et  $p$ . Cela nous permet d'obtenir un analogue du théorème de Morozov et ses corollaires, d'abord pour  $p > h(G)$  (c'est l'objet du chapitre II), puis pour  $p$  séparablement bon pour  $G$ , sous réserve que le normalisateur de la  $p$ -sous-algèbre de Lie  $p$ -nil considérée dans l'énoncé soit  $\phi$ -infinitésimalement saturé (où  $\phi$  est un isomorphisme de Springer pour  $G$ , c'est l'objet du chapitre III). Notons que l'hypothèse additionnelle que nous faisons sur le normalisateur en caractéristique séparablement bonne est toujours vérifiée lorsque  $p > h(G)$  c'est pourquoi elle n'apparaît pas dans les énoncés du chapitre II.

L'intérêt principal des méthodes développées (ou généralisées) ici réside dans le fait qu'elles permettent d'obtenir des démonstrations uniformes qui approchent le niveau de généralité de l'énoncé de A. Premet et D. I. Stewart, tout en proposant une caractérisation supplémentaire du sous-groupe parabolique obtenu, à l'aide de la théorie de Hilbert–Mumford–Kempf–Rousseau.

Plus précisément, nous démontrons au chapitre II le théorème suivant :

**Théorème** (Analogie du théorème de Morozov lorsque  $p > h(G)$ , 4.2). *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif tels que  $p > h(G)$  (où  $h(G)$  désigne le nombre de Coxeter de  $G$ , voir la section 2.1). Soit  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ . Supposons que  $\mathfrak{u}$  soit l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ , alors :*

1. *le normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ ,*
2. *cette sous-algèbre parabolique vérifie les égalités  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(U)$  où  $U \subset G$  est un sous-groupe unipotent, lisse et connexe tel que  $\text{Lie}(U) = \mathfrak{u}$  (lorsque  $p > h(G)$  un tel sous-groupe existe d'après [2, section 6], voir la section 8.2).*

L'absence de compatibilité entre la représentation adjointe et l'intégration est l'enjeu crucial à l'obtention de ce résultat. Comme nous l'avons déjà mentionné, cette propriété permet en effet d'assurer que tous les normalisateurs sont infinitésimalement saturés et d'obtenir l'égalité entre les normalisateurs (pour l'action de  $G$ ) des algèbres de Lie  $p$ -nil considérées d'une part, et des sous-groupes unipotents obtenus par intégration d'autre part.

Le théorème [2, 2.5] de V. Balaji, P. Deligne et A. J. Parameswaran pour les sous-groupes infinitésimalement saturés couplé avec le résultat susmentionné sur les  $p$ -radicaux des sous-algèbres de Lie restreintes permet d'obtenir

**Corollaire 4.1** (8.20, corollaire du lemme C.22). *Le corps algébriquement clos  $k$  est encore supposé de caractéristique  $p > \mathfrak{h}(G)$ . Soit  $H \subseteq G$  un sous-groupe infinitésimalement saturé. Les égalités suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} \mathrm{rad}_p(\mathfrak{h}) &= \{x \in \mathrm{rad}_p(\mathfrak{h}) \mid x \text{ est } p\text{-nilpotent}\} \\ &= \{x \in \mathrm{rad}_p(\mathrm{Lie}(H_{\mathrm{réd}})) \mid x \text{ est } p\text{-nilpotent}\} = \mathrm{rad}_p(\mathrm{Lie}(H_{\mathrm{réd}})) = \mathrm{rad}_{\mathfrak{u}}(H_{\mathrm{réd}}^0). \end{aligned}$$

Ce faisant nous pouvons démontrer l'énoncé suivant, qui est en fait équivalent à l'énoncé du théorème ci-dessus.

**Corollaire** (4.3). *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif tels que  $p > \mathfrak{h}(G)$  (où  $\mathfrak{h}(G)$  désigne le nombre de Coxeter de  $G$ , voir la section 2.1). Soit  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{u} = \mathrm{rad}_p(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}))$ . Alors  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est la sous-algèbre de Lie du sous-groupe parabolique obtenu au théorème 4.2.*

Ce corollaire permet d'éviter d'imposer que l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de chaque normalisateur de la tour de normalisateurs associée à l'algèbre de Lie  $p$ -nil soit muni d'une structure de sous-algèbre, nous démontrons :

**Corollaire** (4.4). *Sous les hypothèses du théorème 4.2, soit  $\mathfrak{u}$  une sous-algèbre  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$ , alors :*

1. *la tour de normalisateurs de  $\mathfrak{u}$  converge vers une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ , notée  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty})$ ,*
2. *cet objet limite vérifie  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}_{\infty}}) = \mathrm{Lie}(N_G(V_{\infty}))$  où le sous groupe  $N_G(V_{\infty})$  est l'objet limite de la tour des normalisateurs lisses associée à  $V = \mathrm{Rad}_U(N_G(\mathfrak{u})_{\mathrm{réd}}^0)$ .*

Les démonstrations des résultats précédents permettent de dessiner les contours d'une "méthode" pour obtenir des analogues du théorème de Morozov en caractéristique positive. Comme indiqué à la section 1 de cette introduction il s'agit d'intégrer les sous-algèbres de Lie  $p$ -nil considérées, ce qui est possible en caractéristique séparablement bonne grâce à l'existence d'isomorphismes de Springer  $\phi : \mathcal{N}_{\mathrm{réd}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{réd}}(G)$ , en utilisant le formalisme fppf expliqué ci-avant ; d'assurer l'égalité des normalisateurs pour l'action de  $G$  des algèbres de Lie considérés et des sous-groupes unipotents obtenus par intégration ; de démontrer (ou supposer ici) que ces normalisateurs sont  $(\phi)$ -infinitésimalement saturés ; et d'obtenir une généralisation du théorème de Deligne [18, théorème 1.7] ou de sa version étendue présente dans [2, théorème 2.5] pour mesurer le défaut de lissité des normalisateurs. Ce faisant nous démontrons les résultats suivants

**Théorème** (Analogue du théorème de Morozov lorsque  $p$  est séparablement bon, 10.1). *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif tels que  $p$  est séparablement bon pour  $G$ . Notons  $\phi : \mathcal{N}_{\mathrm{réd}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{réd}}(G)$  un isomorphisme de Springer pour  $G$ . Si  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie nilpotente de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{u}$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  et si  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est  $\phi$ -infinitésimalement saturé (voir 11.1) alors :*

1. *le normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ ,*
2. *cette sous-algèbre parabolique vérifie les égalités suivantes  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(J_{\mathfrak{u}}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$  où  $J_{\mathfrak{u}} \subset G$  est un sous-groupe unipotent, lisse, connexe tel que  $\mathrm{Lie}(J_{\mathfrak{u}}) = \mathfrak{u}$  (un tel sous-groupe existe d'après le lemme 12.2).*

Ce théorème admet la reformulation suivante à l'aide de résultats techniques permettant de comparer l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de certaines algèbres de Lie et leur  $p$ -radical :

**Corollaire (10.2).** *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif tels que  $p$  soit séparablement bon pour  $G$  (voir la section 2.1). Soit  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie telle que  $\mathfrak{u} = \text{rad}_p(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}))$ . Supposons de plus que le sous-groupe  $N_G(\mathfrak{u}) \subseteq G$  soit  $\phi$ -infinitésimalement saturé. Alors  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est la sous-algèbre de Lie du sous-groupe parabolique obtenu au théorème 10.1.*

Le théorème et le corollaire sont en fait le même cas particulier du résultat suivant (il s'agit du cas où la tour de normalisateurs stabilise immédiatement) :

**Corollaire (10.3).** *Sous les hypothèses du théorème 4.2, soit  $\mathfrak{u}$  une sous-algèbre  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$ . Considérons la tour des normalisateurs associée à  $\mathfrak{u}$  comme dans le chapitre précédent : posons  $\mathfrak{u}_0 := \mathfrak{u}$  et  $\mathfrak{q}_1 := N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_0)$ . Le sous-espace  $\mathfrak{u}_1$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $\mathfrak{q}_0$ , l'algèbre de Lie  $\mathfrak{q}_2$  est le normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_1)$ , et ainsi de suite : soient  $\mathfrak{u}_i$  l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{i-1})$  et  $\mathfrak{q}_{i+1} := N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_i)$ . Notons  $\mathfrak{q}_{\infty}$  l'objet limite de la tour des normalisateurs, et  $\mathfrak{u}_{\infty}$  l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty})$ . Supposons que ce normalisateur "limite"  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty})$  soit  $\phi$ -infinitésimalement saturé. Alors :*

1. la tour de normalisateurs de  $\mathfrak{u}$  converge vers une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ , notée  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty})$ ,
2. cet objet limite vérifie  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}_{\infty}}) = \text{Lie}(N_G(J_{\mathfrak{u}_{\infty}}))$  où le sous-groupe  $N_G(J_{\mathfrak{u}_{\infty}})$  est l'objet limite de la tour des normalisateurs lisses associée à  $V = \text{Rad}_U(N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0)$ .

## 4.2 Comparaison des sous-groupes paraboliques canoniques de M. Atiyah et R. Bott à K. A. Behrend

Soit  $k$  un corps de caractéristique  $p > 0$ . Comme mentionné à la section 1 de cette introduction, la définition de sous-groupe parabolique canonique associé à un groupe réductif  $G$  au-dessus d'une  $k$ -courbe projective lisse connexe  $X$  proposée par M. Atiyah et R. Bott a encore un sens lorsque la caractéristique  $p > 0$  est suffisamment grande, tant que  $G$  est la forme tordue d'un groupe constant sur  $X$ . Cela est en particulier justifié par V. B. Mehta dans [56] (entre autres). L'obtention d'analogues du théorème de Morozov en caractéristique positive permet d'obtenir une nouvelle preuve de ce résultat, en reproduisant le raisonnement de M. Atiyah et R. Bott (établi dans le cadre de la caractéristique nulle), et qui autorise des caractéristiques légèrement plus faibles que celles initialement considérées :

**Proposition (4.7).** *Si  $k$  est de caractéristique nulle ou  $p > 2 \dim G - 2$  et si  $G$  est muni d'une forme bilinéaire, symétrique et  $G$ -équivariante, non dégénérée alors :*

1. le sous-fibré  $E_0 \subseteq \mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe parabolique  $Q \subseteq G$  et  $E_{-1}$  est l'algèbre de Lie de son radical unipotent (notée  $\text{rad}_{\mathfrak{u}}(Q)$ ),
2. cette sous-algèbre parabolique vérifie  $E_0 = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}^{\text{can}}$  et  $E_{-1} = \text{rad}_{\mathfrak{u}}(P_G^{\text{can}})$ , où  $P_G^{\text{can}}$  désigne le sous-groupe parabolique canonique de  $G$  et  $\mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}^{\text{can}}$  son algèbre de Lie. Notons  $K$  le corps des fonctions de  $C$ , et  $\bar{K}$  sa clôture algébrique, sur la fibre géométrique générique nous avons  $(E_0)_{\bar{K}} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{(E_{-1})_{\bar{K}}})$ ,
3. les sous-fibrés  $E_i$  sont des idéaux  $p$ -nil de  $E_0 = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}^{\text{can}}$  pour tout  $-r \leq i < 0$ .

## Deuxième partie

# Analogie du théorème de Morozov en caractéristique $p > h(G)$

### Introduction

Soient  $G$  un groupe algébrique réductif au-dessus d'un corps  $k$  et  $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$  l'algèbre de Lie correspondante. Soit  $\mathfrak{u}$  une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  composée d'éléments  $p$ -nilpotents. À l'instar de [12, XVIII, §10, corollaire 2], il est possible d'associer à  $\mathfrak{u}$  une tour de sous-espaces  $p$ -nil dans  $\mathfrak{g}$  : posons  $\mathfrak{u}_0 := \mathfrak{u}$  et  $\mathfrak{q}_1 := N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_0)$ . Le sous-espace  $\mathfrak{u}_1$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $\mathfrak{q}_0$ , l'algèbre de Lie  $\mathfrak{q}_2$  est le normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_1)$ , et ainsi de suite : soient  $\mathfrak{u}_i$  l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{i-1})$  et  $\mathfrak{q}_{i+1} := N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_i)$ . Notons  $\mathfrak{q}_{\infty}$  l'objet limite de la tour des normalisateurs, et  $\mathfrak{u}_{\infty}$  l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty})$  (donc  $\mathfrak{q}_{\infty} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty})$ ). En caractéristique nulle, la  $p$ -nilpotence des éléments de  $\mathfrak{u}_i$  est remplacée par une condition de  $\mathfrak{g}$ -nilpotence (voir l'annexe C.3 pour la terminologie employée), et l'objet limite  $\mathfrak{q}_{\infty}$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  (en d'autres termes c'est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe parabolique de  $G$ ). Ce résultat est attribué à V. Morozov, une référence est [12, VIII, §10 corollaire 2].

Une construction similaire est possible au niveau des groupes, en considérant cette fois-ci la tour des normalisateurs lisses et connexes d'un sous-groupe unipotent lisse  $U$  de  $G$  (considérer la partie lisse connexe du normalisateur à chaque itération). Cette fois encore la tour stabilise, et l'objet limite est un sous-groupe parabolique de  $G$ , noté  $P_G(U)$  (d'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(U)$ ). Ce résultat est vérifié sans hypothèse restrictive sur le corps  $k$  dès lors que le sous-groupe unipotent  $U$  considéré est  $k$ -plongeable dans le radical unipotent d'un  $k$ -sous-groupe parabolique de  $G$ , c'est par exemple le cas lorsque  $k$  est parfait (voir B. Veisfeiler [72] et Borel–Tits [6, corollaire 3.2]).

Enfin, la théorie de Hilbert–Mumford–Kempf–Rousseau (voir [41] et [50, 2.3]) permet d'associer à toute sous-algèbre de Lie  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$  un sous-groupe parabolique optimal (et donc une sous-algèbre parabolique optimale), noté  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$  (respectivement  $\mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$ ), où  $\lambda_{\mathfrak{u}}$  est un cocaractère optimal pour  $\mathfrak{u}$  (voir §7 pour une construction et des définitions plus détaillées).

Nous proposons de démontrer les résultats suivants :

**Théorème 4.2** (Analogie du théorème de Morozov lorsque  $p > h(G)$ ). *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif tels que  $p > h(G)$  (où  $h(G)$  désigne le nombre de Coxeter de  $G$ , voir l'annexe A). Soit  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ . Supposons que  $\mathfrak{u}$  soit l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ , alors :*

1. *le normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ ,*
2. *cette sous-algèbre parabolique vérifie les égalités  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(U)$  où  $U \subset G$  est un sous-groupe unipotent, lisse et connexe tel que  $\text{Lie}(U) = \mathfrak{u}$  (lorsque  $p > h(G)$  un tel sous-groupe existe d'après [2, section 6], voir la section 8.2).*

Ce théorème peut être reformulé en termes de  $p$ -radicaux :

**Corollaire 4.3.** *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif tels que  $p > h(G)$  (où  $h(G)$  désigne le nombre de Coxeter de  $G$ , voir l'annexe A). Soit  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{u} = \text{rad}_p(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}))$ . Alors  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est la sous-algèbre de Lie du sous-groupe parabolique obtenu au théorème 4.2.*

Notons que le théorème 4.2 ci-dessus est en fait le cas particulier du corollaire suivant pour lequel la tour de normalisateurs stabilise immédiatement.

**Corollaire 4.4.** *Sous les hypothèses du théorème 4.2, soit  $\mathfrak{u}$  une sous-algèbre  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$ , alors :*

1. la tour de normalisateurs de  $\mathfrak{u}$  converge vers une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ , notée  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty})$ ,
2. cet objet limite vérifie  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}_{\infty}}) = \text{Lie}(N_G(V_{\infty}))$  où le sous groupe  $N_G(V_{\infty})$  est l'objet limite de la tour des normalisateurs lisses associée à  $V = \text{Rad}_U(N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0)$ .

Dans [2, Proposition 4.7], V. Balaji, P. Deligne et A. J. Parameswaran démontrent un résultat pour lequel le premier point du théorème 4.2 est un corollaire immédiat, ils supposent  $p > \mathfrak{h}(G)$  et que  $G$  admet une représentation presque fidèle de petite hauteur. Nous montrons ici que la seconde hypothèse est superflue. Lorsque  $G$  est simple et simplement connexe, cela revient à élargir le résultat, sans hypothèse additionnelle, aux groupes de type  $F_4$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  et  $E_8$  (voir [2, p.14]). Dans [58, Corollary 1.4], A. Premet et D. I. Stewart proposent une preuve du premier point du théorème 4.2 par réduction de cas, lorsque  $G$  satisfait les hypothèses standard (voir [39, 2.9], la définition est rappelée à l'annexe A). Leurs conditions sur  $p$  et  $G$  sont donc plus faibles que celles imposées ici, mais les outils développés dans ce chapitre permettent de caractériser le sous-groupe parabolique obtenu et d'obtenir une preuve uniforme des résultats susmentionnés. Notons enfin que ces hypothèses impliquent en particulier la semi-simplicité de  $\mathfrak{g}$ , ce qui justifie que les auteurs considèrent le nilradical de l'algèbre de Lie dans leurs énoncés et non le  $p$ -radical (lorsque  $\mathfrak{g}$  est semi-simple ces objets coïncident, voir l'annexe C.3, notamment la remarque C.27).

La lissité du normalisateur dans  $G$  d'une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  est un des enjeux cruciaux de la démonstration développée ici. Plus précisément :

**Théorème 4.5.** *Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ . Soient  $G$  un  $k$ -groupe réductif et  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie telle que  $\mathfrak{u}$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de son normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ . Supposons que  $p$  n'est pas de torsion pour  $G$ . Soit encore  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$  le sous-groupe parabolique optimal pour  $\mathfrak{u}$  défini par la méthode de Hilbert–Mumford–Kempf–Rousseau (voir [41, Theorem 3.4] pour l'existence d'un tel sous-groupe). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. l'algèbre  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est l'algèbre de Lie du sous-groupe parabolique  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$  ;
2. la composante connexe  $N_G(\mathfrak{u})^0$  du normalisateur de  $\mathfrak{u}$  dans  $G$  est lisse ;
3. elle satisfait l'égalité  $N_G(\mathfrak{u})^0 = P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$ .

Notons qu'en caractéristique nulle cette condition de lissité des normalisateurs est automatiquement vérifiée (c'est une conséquence d'un théorème de P. Cartier (voir par exemple [19, II, §6, n°1.1]), alors qu'en caractéristique strictement positive plus rien ne l'assure a priori (voir [30, lemma 11] pour des contre-exemples). Un théorème de P. Deligne (voir [18, Théorème 2.7]) énoncé dans le cas où  $G = \text{GL}(V)$  sous certaines hypothèses sur  $V$ , et généralisé dans l'article de V. Balaji, P. Deligne et A. J. Parameswaran [2, Theorem 2.5] permet d'évaluer le défaut de lissité des sous-groupes infinitésimalement saturés (voir la définition 8.9), et de pallier ce problème. En particulier, lorsque  $p > \mathfrak{h}(G)$  une application directe de ce théorème conduit à la conclusion que la composante neutre du normalisateur (pour l'action de  $G$ ) d'une sous-algèbre  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$  diffère de sa partie lisse seulement par un sous-groupe de type multiplicatif. Tout l'enjeu ici est donc de démontrer que le normalisateur de  $\mathfrak{u}$  est infinitésimalement saturé. Cela est immédiat lorsque la représentation adjointe est de petite hauteur, nous démontrons au paragraphe 8.3.1 que c'est encore le cas sous la simple hypothèse  $p > \mathfrak{h}(G)$ .

Le théorème 4.2 admet le corollaire suivant :

**Corollaire 4.6** (du théorème 4.2). *Soient  $k$  un corps algébriquement clos et  $G$  un  $k$ -groupe réductif. Supposons que  $k$  soit de caractéristique  $p > \mathfrak{h}(G)$  et que  $\mathfrak{g}$  soit munie d'une forme bilinéaire, symétrique  $G$ -équivariante et non dégénérée  $\kappa$ . Soit  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie telle que  $\mathfrak{p}^{\perp}$  est une sous-algèbre nilpotente de  $\mathfrak{g}$ , alors :*

1. la sous-algèbre  $\mathfrak{p}$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ ,
2. c'est l'algèbre parabolique obtenue au théorème 4.2, autrement dit

$$\mathfrak{p} = \text{Lie}(P_G(\exp(\mathfrak{p}^{\perp}))) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{p}^{\perp}}).$$

Ce résultat permet de démontrer, dans le cadre relatif et sous certaines conditions sur la base, que certaines sous-algèbres de Lie sont paraboliques (pour le formalisme de [22]). La dernière partie de ce chapitre est consacrée à un exemple d’application du théorème 4.2 (qui intervient dans les raisonnements sous la forme du corollaire 4.6). Plus précisément : soient  $k$  un corps et  $C$  une  $k$ -courbe projective, lisse et géométriquement connexe. Soit encore  $G$  un  $C$ -groupe réductif, forme tordue d’un  $C$ -groupe réductif constant  $G_0$ . Lorsque  $k$  est de caractéristique nulle, M. Atiyah et R. Bott considèrent la filtration de Harder–Narasimhan de l’algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  (vue comme un fibré vectoriel sur  $C$ ) :

$$0 \subsetneq E_{-r} \subsetneq \dots \subsetneq E_{-1} \subsetneq E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \dots \subsetneq E_l = \mathfrak{g},$$

où les indices sont choisis de telle sorte que le terme  $E_0$  soit celui dont le quotient semi-stable est de pente nulle. Ils montrent dans [1, §10] que  $E_0$  est une sous-algèbre de Lie parabolique de  $\mathfrak{g}$  et nomment “sous-groupe parabolique canonique de  $G$ ” le sous-groupe dont elle dérive. Dans [4], K. A. Behrend étend la notion de sous-groupe parabolique canonique au cas d’un  $C$ -groupe réductif arbitraire, et n’impose plus de conditions sur la caractéristique de  $k$ . Sa définition ne fait plus intervenir la filtration de Harder–Narasimhan de  $\mathfrak{g}$ . Dans [55, Proposition 3.4], V. B. Mehta et S. Subramanian montrent que la définition de M. Atiyah et R. Bott a un sens lorsque  $k$  est de caractéristique  $p > \max(2 \dim(G), 4 \mathrm{H}(G))$ , où  $\mathrm{H}(G)$  désigne la hauteur de  $G$  (voir l’annexe A) et  $G$  est un  $C$ -groupe réductif, forme tordue d’un  $C$ -groupe réductif constant  $G_0$  (voir également [56, Theorem 2.6] pour un raffinement à la seule condition  $p > 2 \dim(G)$ ). Leur preuve est basée sur des méthodes issues de la théorie des représentations. Le théorème 4.2 permet de proposer une nouvelle preuve de cette égalité lorsque  $p > 2 \dim(G) - 2$  en imitant celle déjà connue en caractéristique 0. Notons enfin que A. Langer établit la coïncidence des définitions lorsque le  $G_0$ -torseur  $E$  (où  $G = {}^E G_0$ ) admet une filtration de Harder–Narasimhan forte (voir [45, Definition 3.1 et proposition 3.3]). Nous démontrerons :

**Proposition 4.7.** *Si  $k$  est de caractéristique nulle ou  $p > 2 \dim G - 2$  et si  $G$  est muni d’une forme bilinéaire, symétrique et  $G$ -équivariante, non dégénérée alors :*

1. *le sous-fibré  $E_0 \subseteq \mathfrak{g}$  est l’algèbre de Lie d’un sous-groupe parabolique  $Q \subseteq G$  et  $E_{-1}$  est l’algèbre de Lie de son radical unipotent (notée  $\mathrm{rad}_u(Q)$ ),*
2. *cette sous-algèbre parabolique vérifie  $E_0 = \mathfrak{p}_\mathfrak{g}^{\mathrm{can}}$  et  $E_{-1} = \mathrm{rad}_u(P_G^{\mathrm{can}})$ , où  $P_G^{\mathrm{can}}$  désigne le sous-groupe parabolique canonique de  $G$  et  $\mathfrak{p}_\mathfrak{g}^{\mathrm{can}}$  son algèbre de Lie. Notons  $K$  le corps des fonctions de  $C$ , et  $\bar{K}$  sa clôture algébrique, sur la fibre géométrique générique nous avons*

$$(E_0)_{\bar{K}} = \mathfrak{p}_\mathfrak{g}(\lambda_{(E_{-1})_{\bar{K}}}),$$

3. *les sous-fibrés  $E_i$  sont des idéaux  $p$ -nil de  $E_0 = \mathfrak{p}_\mathfrak{g}^{\mathrm{can}}$  pour tout  $-r \leq i < 0$ .*

## 5 Rappels et conventions sur les hypothèses usuelles

Dans cette section et sauf mention expresse du contraire  $k$  est un corps de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  est un  $k$ -groupe réductif.

### 5.1 Rang et représentations fidèles

Dans cette sous-section  $k$  est supposé algébriquement clos.

**Lemme 5.1.** *Soit  $d$  la dimension d’une représentation fidèle minimale de  $G$ , alors  $d$  satisfait l’inégalité  $d > \mathrm{rg}(G)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_n$  une représentation fidèle minimale. Si  $\rho$  est une représentation fidèle de  $G$  c’est aussi une représentation fidèle d’un tore maximal  $T$  de  $G$ . Si nous notons  $n$  la dimension de  $T$ , nécessairement  $d \geq n =: \mathrm{rg}(G)$ .  $\square$

**Lemme 5.2.** *Pour tout  $k$ -groupe réductif  $G$  l'inégalité  $2h(G) - 2 \leq 2^{2d}$  est toujours vérifiée.*

*Démonstration.* Lorsque  $G$  est simple, les valeurs de  $h(G)$  et  $\text{rg}(G)$  sont rappelées dans la table 1 et une simple lecture permet de vérifier les inégalités  $2h(G) - 2 < 2^{2\text{rg}(G)} < 2^{2d}$  d'après le lemme 5.1.

Lorsque  $G$  est un  $k$ -groupe réductif arbitraire, le nombre de Coxeter de  $G$  est le maximum des nombres de Coxeter des composantes irréductibles d'un système de racines de  $G$ . Notons  $G_i$  les groupes simples qu'elles définissent. La restriction d'une représentation fidèle de  $G$  à  $G_i$  doit rester fidèle. Autrement dit  $d \geq d_i \geq h(G_i)$  pour tout  $G_i$ , où  $d_i$  est la dimension d'une représentation fidèle minimale de  $G_i$ . Puisque  $h(G) = h(G_i)$  pour un certain groupe simple, nous avons  $2h(G) - 2 \leq 2^{2\sum_{i=1}^m d_i} \leq 2^{2d}$ .  $\square$

## 5.2 Sous-algèbres paraboliques

Rappelons que par définition une sous-algèbre  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$  est parabolique si c'est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe parabolique  $P \subseteq G$ , autrement dit, s'il existe une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{p} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi'} \mathfrak{g}_\alpha$ , où le sous-ensemble  $\Phi' \subseteq \Phi$  est un sous-système parabolique de  $\phi$  (voir [22, XXVI, proposition 1.4]). Cette description permet d'étendre naturellement la notion de nombre de Coxeter d'un sous-groupe parabolique de  $G$  : il s'agit de la hauteur plus un de la plus haute racine du sous-système parabolique associé. En particulier  $h(G) = h(B)$  pour tout sous-groupe de Borel  $B \subset G$ . Lorsque  $k$  est de caractéristique zéro, ces conditions sont vérifiées si et seulement si  $\mathfrak{p}$  contient l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Borel de  $G$ . Lorsque  $k$  est un corps de caractéristique  $p > 0$ , une telle caractérisation n'est plus toujours valide : une sous-algèbre parabolique contient toujours une sous-algèbre de Borel (puisqu'un sous-groupe parabolique contient toujours un sous-groupe de Borel), mais il existe certaines caractéristiques pathologiques pour lesquelles des sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  qui contiennent des sous-algèbres de Borel ne proviennent pas de sous-groupes paraboliques de  $G$ .

**Proposition 5.3.** *Si  $k$  est de caractéristique  $p \neq 2, 3$ , une sous-algèbre  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$  est parabolique si et seulement si elle contient une sous-algèbre de Borel.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que toute sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$  qui contient une sous-algèbre de Borel est de la forme  $\mathfrak{p} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi'} \mathfrak{g}_\alpha$  avec  $\mathfrak{t}$  et  $\Phi'$  comme dans le préambule. Puisque  $\mathfrak{p}$  contient une sous-algèbre de Borel  $\mathfrak{b}$ , elle contient l'algèbre de Lie d'un tore maximal  $\mathfrak{t}$ . Cette sous-algèbre de Cartan agit sur  $\mathfrak{p}$  par le biais du crochet de Lie. Les racines de  $\mathfrak{t}$  forment une famille d'endomorphismes de  $\mathfrak{t}$  diagonalisables et qui commutent deux à deux, ils sont donc simultanément diagonalisables et  $\mathfrak{p}$  se décompose en une somme d'espaces de poids pour cette action :  $\mathfrak{p} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi'} \mathfrak{g}_\alpha$ . Il reste à remarquer que :

- la sous-partie  $\Phi' \subseteq \Phi$  contient un système de racines positives, ce qui est immédiat puisque par hypothèse  $\mathfrak{p}$  contient l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Borel,
- la sous-partie  $\Phi' \subseteq \Phi$  est de type  $(R)$  (voir [22, XXII, Définition 5.4.2]). D'après [22, XXII, théorème 5.4.7] il suffit de remarquer que  $\Phi'$  est close, autrement dit que pour tous  $\alpha, \beta \in \Phi'$  telles que  $\alpha + \beta \in \Phi$  alors  $\alpha + \beta \in \Phi'$ . C'est le cas dès lors que  $p \neq 2, 3$  d'après [22, XXIII, corollaire 6.6].  $\square$

**Remarque 5.4.** Lorsque  $G$  est de type  $A_1$ , il suffit d'imposer  $p \neq 2$  dans la proposition ci-dessus.

**Exemples 5.5.** 1. Lorsque  $G = \text{PGL}_3$ , et  $k$  est de caractéristique 3, considérons la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{p} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & td & g \end{pmatrix} \mid d, t \in k^\times \right\} \subseteq \mathfrak{pgl}_3(k)$ . La sous-algèbre  $\mathfrak{p}$  contient la sous-algèbre de Borel des matrices triangulaires supérieures de trace nulle. Par contre  $\mathfrak{p}$  ne peut pas s'écrire comme l'algèbre de Lie d'un sous-groupe parabolique  $P \subseteq \text{PGL}_3$  (il suffit de vérifier que lorsque  $k$  est de caractéristique nulle aucun sous-groupe parabolique n'admet  $\mathfrak{p}$  comme algèbre de Lie).

2. Toujours lorsque  $G = \mathrm{PGL}_3$  et  $k$  est un corps algébriquement clos de caractéristique 3, reprenons l'exemple de [47] : posons

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit  $\mathfrak{u} := \langle X, Y \rangle \subsetneq \mathfrak{pgl}_3$  la sous-algèbre engendrée par  $X$  et  $Y$ . C'est une sous-algèbre ad-nilpotente de  $\mathfrak{pgl}_3$ . Son normalisateur est donné par  $N_{\mathfrak{pgl}}(\mathfrak{u}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & b \\ g & -d & i \end{pmatrix} \right\}$  qui contient une sous-algèbre de Borel (à savoir l'algèbre de Lie du Borel obtenu en conjuguant le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures par  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ). Par contre  $\mathfrak{p}$  ne provient pas d'un sous-groupe parabolique de  $G$  (pour les mêmes raisons que celles invoquées précédemment).

## 6 Premiers résultats

Sans surprise, sous certaines conditions qui permettent de se rapprocher des phénomènes de caractéristique 0 nous obtenons des analogues du théorème de Morozov en caractéristique  $p > 0$ . Ces résultats sont déjà instructifs car ils mettent en évidence les obstructions liées à la positivité stricte de  $p$ .

### 6.1 Lorsque tous les normalisateurs sont lisses

Lorsque  $k$  est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle ou  $p$  très grande, le théorème 4.2 est une application immédiate du théorème de Veisfeiler–Borel–Tits (voir [6, corollaire 3.2]). Plus précisément :

**Proposition 6.1.** *Si  $k$  est algébriquement clos de caractéristique nulle ou  $p > 2^{2d}$  (où  $d$  est la dimension d'une représentation fidèle minimale de  $G$ ), soit  $\mathfrak{u}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{u}$  soit l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de son normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ . Alors  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est une sous-algèbre de Lie parabolique de  $\mathfrak{g}$ .*

**Remarque 6.2.** Lorsque  $G = \mathrm{GL}_n$ , les hypothèses de la proposition reviennent à imposer  $p > 2^{2n}$ .

*Démonstration.* Sous les hypothèses de la proposition le normalisateur de  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  pour l'action adjointe, noté  $N_G(\mathfrak{u})$ , est lisse (en caractéristique 0 c'est immédiat, lorsque  $p > 2^{2d}$  cela est assuré par [30, Theorem A]). Les hypothèses de la proposition garantissent par ailleurs l'existence d'une application exponentielle qui permet d'une part d'intégrer la sous-algèbre de Lie nil  $\mathfrak{u}$  en un sous-groupe unipotent, lisse, connexe  $U \subseteq G$  tel que  $\mathrm{Lie}(U) = \mathfrak{u}$  et d'autre part, d'assurer la compatibilité de cette intégration avec la représentation adjointe :

- lorsque  $k$  est de caractéristique 0 cela est par exemple démontré dans [19, II, §6, corollaire 3.4],
- lorsque  $p > 2^{2d}$ , voir [2, 6] et la proposition 8.3 pour l'intégration de  $\mathfrak{u}$  (puisque si  $p > 2^{2d}$  alors  $p > 2 \mathrm{h}(G) - 2 \geq \mathrm{h}(G)$  d'après 5.1); et voir [61, Lecture 4, Theorem 5] et [2, 4.6] pour la compatibilité de l'exponentielle tronquée avec la représentation adjointe (là encore ces résultats s'appliquent puisque  $p > 2 \mathrm{h}(G) - 2$ ).

Puisque l'application exponentielle et la représentation adjointe sont compatibles, les normalisateurs  $N_G(U)$  et  $N_G(\mathfrak{u})$  sont identiques d'après [30, lemma 4.3] (voir également le paragraphe 8.4.2 ci-dessous). Soit  $V$  le radical unipotent de  $N_G(U)^0$  (qui est bien défini car  $N_G(U) = N_G(\mathfrak{u})$  est lisse du fait des hypothèses sur la caractéristique). L'inclusion  $U \subseteq V$  est immédiate puisque

$U$  est un sous-groupe unipotent, lisse, connexe et distingué de  $N_G(U)$ . L'inclusion d'algèbres de Lie  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{v}$  s'en déduit. Par ailleurs, le lemme C.7 permet d'obtenir les égalités  $\text{Lie}(N_G(U)) = \text{Lie}(N_G(\mathfrak{u})) = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  au niveau des algèbres de Lie. Puisque  $V := \text{Rad}_U(N_G(U)_{\text{red}}^0)$ , la sous-algèbre  $\mathfrak{v} := \text{Lie}(V)$  est un  $p$ -idéal  $p$ -nilpotent de  $\mathfrak{g}$  (voir C.3). Par hypothèse  $\mathfrak{u}$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ , l'inclusion  $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{u}$  est donc immédiate. Ainsi  $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$  et comme  $U$  et  $V$  sont des sous-groupes lisses et connexes de  $G$ , l'égalité de leurs algèbres de Lie permet de conclure qu'ils sont égaux (voir [19, II, §5, 5.5]). En conclusion, le sous-groupe unipotent, lisse et connexe  $U = V$  est le radical unipotent de la composante neutre de son normalisateur lisse. D'après le théorème de Veisfeller–Borel–Tits ([72] et [6, corollaire 3.2]), ce dernier est donc un sous-groupe parabolique de  $G$  et  $\text{Lie}(N_G(U)) = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est bien une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

**Remarque 6.3.** Lorsque  $\mathfrak{h}(G) < p \leq 2^{2d}$ , bien qu'une application exponentielle existe encore et permette d'intégrer la sous-algèbre nil  $\mathfrak{u}$  en un sous-groupe lisse unipotent et connexe de  $U$ , aucune des étapes du raisonnement précédent n'est immédiate. Plus précisément, la compatibilité entre l'exponentielle et la représentation adjointe n'est plus assurée (voir par exemple [30, lemma 4.3], c'est une conséquence de [62, 4.1.7]), pas plus que la lissité des normalisateurs (voir [30, lemma 11]).

## 6.2 Énoncés conditionnels lorsque la forme de Killing est non dégénérée

L'examen de la preuve du théorème de V. Morozov fournie par [12, VIII, §10 corollaire 2] permet d'obtenir l'énoncé conditionnel suivant :

**Théorème 6.4.** *Soit  $G$  un groupe réductif sur un corps algébriquement clos  $k$  de caractéristique  $p > \mathfrak{h}(G)$  telle que  $\mathfrak{g}$  est munie d'une forme bilinéaire, symétrique et  $G$ -équivariante, non dégénérée, notée  $\kappa$ . Soit  $\mathfrak{u}$  une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{u}$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  et telle que l'orthogonal de  $\mathfrak{u}$  pour  $\kappa$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . Alors le normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est une sous-algèbre de Lie parabolique de  $\mathfrak{g}$ .*

Nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 6.5.** *Soit  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie, et soit  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre. Supposons que  $\mathfrak{u}$  soit l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $\mathfrak{h}$  et que :*

- la forme de Killing sur  $\mathfrak{g}$ , notée  $\kappa$ , est non dégénérée,
- la sous-algèbre  $\mathfrak{h}$  est le normalisateur de  $\mathfrak{u}$  dans  $\mathfrak{g}$ ,
- l'orthogonal de  $\mathfrak{u}$  pour  $\kappa$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ ,

alors  $\mathfrak{u}$  est l'orthogonal de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{h}$  pour la forme de Killing sur  $\mathfrak{g}$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{q}$  l'orthogonal de  $\mathfrak{u}$  pour la forme de Killing sur  $\mathfrak{g}$ . Montrons que  $\mathfrak{q} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{h}$  : pour tous  $(q_1, q_2) \in \mathfrak{q}$ , et tout  $x \in \mathfrak{u}$ , nous avons :

$$\kappa([x, q_1], q_2) = \kappa(x, [q_1, q_2]) = 0.$$

Ainsi  $[x, q_1] \in \mathfrak{q}^\perp$  (l'orthogonal de  $\mathfrak{q}$  pour  $\kappa$ ) donc  $[x, q_1] \in \mathfrak{u}$  pour tout  $q_1 \in \mathfrak{q}$  et  $\mathfrak{q}$  normalise  $\mathfrak{u}$ , autrement dit  $\mathfrak{q} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{h}$ .

D'autre part, d'après [10, §5, n° 1, proposition 6] l'idéal  $\mathfrak{u}$  et la sous-algèbre  $\mathfrak{h}$  sont orthogonaux pour la forme de Killing sur  $\mathfrak{h}$  puisque  $\mathfrak{u}$  est un idéal de  $\mathfrak{h}$  composé d'éléments  $p$ -nilpotents (c'est en particulier un idéal nilpotent) il est donc contenu dans le nilradical de  $\mathfrak{h}$ . Autrement dit  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{q} = \mathfrak{u}^\perp$  donc  $\mathfrak{h} = \mathfrak{q}$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 6.4.* Puisque  $p > \mathfrak{h}(G)$  la sous-algèbre nil  $\mathfrak{u}$  s'intègre en un sous-groupe unipotent lisse et connexe de  $G$  noté  $U$  (toujours d'après [2, 6] et la proposition 8.3). Soit  $N_0 := N_G(U)_{\text{red}}^0$  la partie lisse et connexe du normalisateur de  $U$  dans  $G$ , notons  $V_1 := \text{Rad}_U(N_0)$  et construisons la tour de normalisateurs lisses connexes de  $U$  dans  $G$ . Cette tour converge en un objet limite  $N_\infty$  qui est la composante neutre et lisse du normalisateur de son radical unipotent  $V_\infty$  (pour des raisons dimensionnelles). D'après [6, théorème 3.2] le normalisateur lisse et connexe  $N_\infty$  est un sous-groupe parabolique de  $G$ . Notons-le  $P_G(U)$ . Distinguons deux cas :

1. si  $P_G(U) = G$  alors  $V_\infty = \{0\}$ , par conséquent  $U = \{0\}$ , donc  $\text{Lie}(U) = \mathfrak{u}$  est triviale et le résultat est immédiat,
2. si  $P_G(U)$  est un sous-groupe parabolique propre de  $G$ , il contient un sous-groupe de Borel  $B \subseteq G$ . Puisque  $k$  est algébriquement clos, donc parfait, le sous-groupe unipotent lisse connexe  $V_\infty$  est  $k$ -plongeable dans le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel  $B \subseteq G$  (voir [6, Corollaire 3.7]) et puisque les sous-algèbres de Lie considérées sont de dimension finie, nous avons :

$$\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{v}_\infty \subseteq \mathfrak{rad}_\mathfrak{u}(B) \subseteq \text{Nil}(\mathfrak{b}) \subseteq (\mathfrak{b})^\perp$$

où la dernière inclusion est donnée par le lemme [10, §4 n°4]. Puisque par hypothèse  $\kappa$  est non dégénérée sur  $\mathfrak{g}$  nous en déduisons :

$$(\mathfrak{b}^\perp)^\perp = \mathfrak{b} \subseteq \text{Nil}(\mathfrak{b})^\perp \subseteq \mathfrak{v}_\infty^\perp \subseteq \mathfrak{u}^\perp = N_\mathfrak{g}(\mathfrak{u}),$$

où la première égalité est obtenue grâce au lemme 6.5 ou à la remarque C.27. Par hypothèse  $p > \mathfrak{h}(G)$ , autrement dit  $p \neq 2$  pour  $G = \text{SL}_2$  et  $p > 3$  sinon (voir la table 1). Dans ce cas les sous-algèbres paraboliques de  $\mathfrak{g}$  sont exactement celles qui contiennent l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Borel (voir la sous-section 5.2). L'algèbre de Lie  $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{u})$  satisfait cette condition d'après ce qui précède puisque  $\mathfrak{p}_\mathfrak{g}(U) \subseteq N_\mathfrak{g}(\mathfrak{u})$  est une sous-algèbre de Lie parabolique de  $\mathfrak{g}$ , elle contient donc une sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{g}$ . Ainsi  $N_\mathfrak{g}(\mathfrak{u})$  est bien une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ . □

## 7 La méthode de Kempf–Rousseau et le sous-groupe parabolique optimal

Dans la suite, et sauf mention expresse du contraire, le corps  $k$  est algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  est un  $k$ -groupe réductif. On suppose que la caractéristique de  $k$  n'est pas de torsion pour  $G$  (notons que c'est en particulier toujours le cas lorsque  $p > \mathfrak{h}(G)$  (voir l'annexe A)). Enfin, si  $Y$  est une  $k$ -variété, nous notons  $\bar{Y}$  son adhérence réduite.

### 7.1 Construction

Notons  $X := \mathfrak{g}^{\oplus d}$  et  $\text{Ad}(G)^\Delta$  l'action adjointe diagonale de  $G$  sur  $X$ . Soient  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre  $p$ -nil de dimension  $d > 0$  et  $\{x_1, \dots, x_d\}$  une base de  $\mathfrak{u}$ . La méthode de Hilbert–Mumford–Kempf–Rousseau (voir [41]) permet d'obtenir un sous-groupe parabolique de la forme  $P_G(\lambda_\mathfrak{u})$ , où  $\lambda_\mathfrak{u}$  est un cocaractère de  $G$  qui n'est pas uniquement déterminé, optimal pour  $\mathfrak{u}$  dans un certain sens, et tel que  $\mathfrak{u}$  est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie du radical unipotent de  $P_G(\lambda_\mathfrak{u})$ . Posons  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$  et  $S := \left( \overline{\text{Ad}(G)^\Delta x} \setminus \text{Ad}(G)^\Delta x \right)_{\text{réd}} \subseteq X$ .

**Lemme 7.1.** *La sous-variété  $S \subseteq X$  est fermée, elle est  $\text{Ad}(G)^\Delta$ -invariante et non vide. Par ailleurs, le vecteur  $x$  n'appartient pas à  $S$ .*

*Démonstration de 7.1.* Seule l'assertion sur la non vacuité de  $S$  n'est pas claire. Pour la démontrer il suffit de vérifier que  $0 \in S$  : d'après A.1 et la remarque qui suit, il existe un sous-groupe de Borel  $B \subseteq G$  tel que  $\mathfrak{u}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{rad}_\mathfrak{u}(B)$ . Soit  $T \subseteq B \subseteq G$  un tore maximal. Tout cocaractère dominant régulier  $\lambda$  de  $G$  par rapport à  $T$  vérifie l'égalité  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot z = 0$  pour tout  $z \in \mathfrak{rad}_\mathfrak{u}(B)^{\oplus d}$ . En particulier  $0 \in \left( \overline{\text{Ad}(G)^\Delta x} \setminus \text{Ad}(G)^\Delta x \right)_{\text{réd}} \subseteq X$ . □

Soit  $|X, x| := \left\{ \lambda \in X_*(G) \mid \lim_{t \rightarrow 0} \text{Ad}^\Delta(\lambda(t))x \text{ existe} \right\}$ , l'attracteur de  $X$  (voir [25, 1.4]). Pour tout  $\lambda \in |X, x|$  notons

$$x_0^\lambda := \lim_{t \rightarrow 0} \text{Ad}^\Delta(\lambda(t))x \in S$$

(ou plus simplement  $x_0 := x_0^\lambda$  en l'absence d'ambiguïté sur le cocaractère  $\lambda$  choisi). Définissons enfin :

$$\alpha_{S,x}(\lambda) := \begin{cases} \text{ordre d'annulation de } t \mapsto \text{Ad}^\Delta(\lambda(t))x - x_0 : \mathbb{A}^1 \rightarrow X \text{ si } x_0 \in S, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Notons qu'en particulier  $\alpha_{S,x} : X_*(G) \rightarrow \mathbb{N}$  est à valeurs strictement positives si et seulement si  $x_0^\lambda \in S$ .

Rappelons que tout cocaractère  $\lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow k$  définit un sous-groupe parabolique  $P_G(\lambda)$  tel que  $P_G(\lambda)(A) := \{g \in G(A) \mid \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot g \text{ existe}\}$  pour toute  $k$ -algèbre  $A$ . Son radical unipotent  $U_G(\lambda)$  est tel que  $U_G(\lambda)(A) := \{g \in P_G(\lambda)(A) \mid \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot g = 1\}$  pour toute  $k$ -algèbre  $A$ . Le théorème suivant est dû à G. R. Kempf dans le cadre plus général où l'on considère :

- une représentation linéaire  $(\rho, V)$  de dimension finie de  $G$ ,
- une sous-variété  $S$  de  $V^{\oplus d}$  fermée et  $\rho(G)^\Delta$ -invariante.

Il permet d'associer à  $\mathfrak{u}$  des cocaractères "optimaux" et le sous-groupe qu'ils définissent.

**Théorème 7.2** (Kempf, [41, Theorem 3.4]). *La fonction  $\lambda \mapsto \alpha_{S,x}(\lambda) / \|\lambda\|$  admet un maximum  $B > 0$  sur l'ensemble des éléments de  $|X, x|$ . Soit :*

$$\Delta_{S,x} = \{\lambda \in |X, x| \mid \alpha_{S,x}(\lambda) = B \cdot \|\lambda\| \text{ et } \lambda \text{ est indivisible}\}.$$

Un cocaractère  $\lambda \in \Delta_{S,x}$  est dit optimal. Sous ces conditions :

1. l'ensemble  $\Delta_{S,x}$  est non-vide,
2. il existe un sous-groupe parabolique  $P_{S,x} \subseteq G$ , noté par la suite  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$ , et tel que  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}}) = P_G(\lambda)$  pour chaque  $\lambda \in \Delta_{S,x}$ . Le sous-groupe parabolique  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$  est appelé sous-groupe parabolique optimal de  $\mathfrak{u}$ ,
3. l'ensemble  $\Delta_{S,x}$  est un espace principal homogène sous  $\text{Rad}_U(P_G(\lambda_{\mathfrak{u}}))(k)$ ,
4. tout tore maximal de  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$  contient un unique cocaractère qui appartient à  $\Delta_{S,x}$ .

**Lemme 7.3.** *Soient  $\mathfrak{u}$  et  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$  comme dans le théorème ci-dessus. Notons  $\mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}}) = \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(P_G(\lambda_{\mathfrak{u}}))$ . Alors  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$ .*

*Démonstration.* D'après [16, I, proposition 2.1.8] l'algèbre de Lie de  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$  est de la forme  $\mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}}) = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}}) \oplus \mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$  où :

- le facteur  $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}}) := \mathfrak{g}_0$  désigne l'algèbre de Lie du centralisateur du tore  $\lambda(\mathbb{G}_m)$  (noté quant à lui  $C_G(\lambda)$ ),
- et  $\mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}}) := \bigoplus_{n>0} \mathfrak{g}_n$ , avec  $\mathfrak{g}_n := \{v \in \mathfrak{g} \mid \lambda(t) \cdot v = t^n v\}$ .

Le choix de  $\lambda_{\mathfrak{u}}$  est tel que  $\alpha_{S,x}(\lambda_{\mathfrak{u}})$  est strictement positif. En particulier les poids sont tous strictement positifs pour  $x$ , donc pour chaque vecteur de la base de  $\mathfrak{u}$ , donc pour  $\mathfrak{u}$ , ce qui permet d'obtenir l'inclusion  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$ .  $\square$

**Remarque 7.4.** Si  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie nilpotente de dimension 1, les résultats de [39] garantissent l'existence d'un sous-groupe parabolique  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}}) \subseteq G$  tel que  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$  sans aucune restriction sur la caractéristique de  $k$  (puisque dans ce cas l' $\text{Ad}(G)$ -orbite de  $x$  n'est jamais fermée (d'après [39, 2.10])). Notons que dans le cas général (sans aucune restriction sur la dimension), l'hypothèse additionnelle sur  $p$  vient de ce que nous avons besoin de plonger  $\mathfrak{u}$  dans l'algèbre de Lie du radical unipotent d'un sous-groupe de Borel pour nous assurer que l' $\text{Ad}(G)$ -orbite de  $x$  n'est pas fermée (voir la preuve de 7.1).

## 7.2 Obstruction

Dans ce qui suit on suppose que l'algèbre de Lie  $p$ -nil  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de son normalisateur dans  $\mathfrak{g}$ .

### 7.2.1 Remarques préliminaires

Tout l'enjeu est de montrer l'inclusion  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) \subseteq \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$ . En effet :

**Lemme 7.5.** *Supposons que l'inclusion  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) \subseteq \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$  soit vérifiée. Alors sous nos hypothèses sur  $\mathfrak{u}$  ce normalisateur est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ .*

*Démonstration.* Supposons que l'inclusion  $\mathfrak{u} \subsetneq \mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$  soit stricte (où l'inclusion est donnée par lemme 7.3). Dans ce cas (voir par exemple [35, Chapter 1, §3 exercice 7]), il existe une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$ , à savoir  $\mathfrak{u}' := N_{\mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})}(\mathfrak{u}) \subseteq \mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$ , telle que  $\mathfrak{u}$  est un idéal propre de  $\mathfrak{u}'$ .

L'intersection  $\mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}}) \cap N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}'$  est une  $p$ -algèbre restreinte, puisqu'elle dérive d'un groupe algébrique (à savoir  $N_{U_G(\lambda_{\mathfrak{u}})}(\mathfrak{u})$ , voir le lemme C.7). C'est un  $p$ -idéal de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  (car  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) \subseteq \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$  par hypothèse). Il est  $p$ -nil d'après le lemme C.21 car  $\mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$  est l'algèbre de Lie du radical unipotent de  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$ . En particulier  $\mathfrak{u}'$  est un idéal nilpotent (donc résoluble) de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ , il est donc contenu dans le radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ . Puisque  $\mathfrak{u}$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents de ce radical, nous avons  $\mathfrak{u}' \subseteq \mathfrak{u}$ , donc  $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}}) \cap N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ , ce qui contredit le caractère propre de l'inclusion  $\mathfrak{u} \subsetneq \mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$ . Autrement dit l'égalité  $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$  est vérifiée.  $\square$

**Remarque 7.6.** L'inclusion désirée au lemme 7.5 est claire dans certains cas, par exemple lorsque  $N_G(\mathfrak{u})$  est lisse. Pour conclure il suffit d'appliquer [50, corollary 9, (2)] à  $N_G(\mathfrak{u})^0$ .

**Remarque 7.7.** Lorsqu'une sous-algèbre  $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$  est engendrée par un élément  $p$ -nilpotent  $x$ , sans aucune hypothèse supplémentaire, le normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est automatiquement l'algèbre de Lie d'un sous-groupe parabolique de  $G$ . En effet, d'après G. R. Kempf [52, proposition 18 (1)] il existe dans ce cas un cocaractère optimal  $\lambda$  de  $\mathfrak{u}$  associé à  $x$ , c'est-à-dire tel que :

1. l'élément  $x$  est de poids 2 pour l'action de conjugaison par  $\lambda$ ,
2. l'image de  $\mathbb{G}_m$  par  $\lambda$  est contenue dans le groupe dérivé d'un groupe de Levi  $L \subseteq G$  pour lequel  $x \in \text{Lie}(L)$  est distingué (chaque tore contenu dans  $C_G(x)$  est contenu dans le centre de  $G$ ).

L'action par  $\lambda$ -conjugaison sur  $\mathfrak{g}$  induit une graduation sur  $\mathfrak{g} = \bigoplus_i \mathfrak{g}_i$ . Pour une telle graduation le normalisateur de  $\mathfrak{u}$  dans  $\mathfrak{g}$  est contenu dans  $\mathfrak{g}_0$  : en effet, soit  $n := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} n_i \in N_{\mathfrak{g}}(x)$  alors  $[n, x] \in \mathfrak{g}_2$ . En particulier, puisque  $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$ , le crochet  $[n_i, x]$  est nécessairement trivial pour tout  $i < 0$ . En d'autres termes  $n_i \in C_{\mathfrak{g}}(x)$  pour tout  $i < 0$ , où  $C_{\mathfrak{g}}(x)$  est le centralisateur de  $x$  dans  $\mathfrak{g}$ . Mais  $C_{\mathfrak{g}}(x) = \mathfrak{p}_G(\lambda) = \text{Lie}(P_G(\lambda)) = \text{Lie}(C_G(x))$  puisque  $G$  satisfait les hypothèses standard (voir [39, 5.9, remark]). Ainsi  $n_i = 0$  pour tout  $i < 0$  et  $N_{\mathfrak{g}}(x) \subseteq \mathfrak{p}_G(\lambda)$ .

### 7.2.2 Caractérisation, preuve du théorème 4.5

Le premier point de la remarque 7.6 ci-dessus est en fait une équivalence, c'est l'objet du théorème 4.5.

*Démonstration du théorème 4.5.* Notons  $\text{Rad}_U(P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})) := U_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$ .

1.  $\implies$  3. De deux choses l'une :
  - soit  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}}) = G$  et dans ce cas l'algèbre de Lie  $p$ -nil  $\mathfrak{u}$  est triviale puisque  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$  l'est (pour rappel cette dernière inclusion est donnée par le lemme 7.3) ;
  - soit  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$  est un sous-groupe parabolique propre de  $G$ . Dans ce cas, nous avons

$$\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}}) = \text{rad}_p(\mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})) = \text{rad}_p(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})) \subset \text{rad}(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}))$$

où la première inclusion est assurée par le lemme 7.3, la première égalité est donnée par le lemme C.23, la deuxième égalité est assurée par l'hypothèse  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$  et la dernière inclusion, par le lemme C.13. Puisque  $\mathfrak{u}$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de son normalisateur, l'inclusion  $\text{rad}_p(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})) \subseteq \mathfrak{u}$  était vérifiée a priori

(rappelons que le  $p$ -radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est un  $p$ -idéal  $p$ -nil). En résumé  $\mathfrak{u} = \text{rad}_p(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}))$  et l'égalité  $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$  est vérifiée. Par ailleurs

$$N_G(\mathfrak{u})^0 = N_G(\mathfrak{u}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}}))^0 \supseteq N_G(U_G(\lambda_{\mathfrak{u}}))^0 = P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})^0 = P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$$

où l'inclusion est assurée par le lemme C.6, la première égalité est donnée par hypothèse, et la dernière égalité est assurée par [22, XXII, corollaire 5.8.5]. Autrement dit  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}}) \hookrightarrow N_G(\mathfrak{u})^0$  est un monomorphisme qui induit un isomorphisme au niveau des algèbres de Lie et dont la source est un  $k$ -groupe lisse (puisque c'est un sous-groupe parabolique de  $G$ , il est donc lisse par définition, voir [22, XXVI, Définition 1.1]). D'après [19, II, §5, 5.5] c'est donc une immersion ouverte. Puisque  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$  est un sous-groupe fermé de  $N_G(\mathfrak{u})^0$ , nous avons l'égalité  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}}) = N_G(\mathfrak{u})^0$  et ce dernier est lisse sur  $k$ .

3.  $\implies$  2. Immédiat, puisqu'un sous-groupe parabolique est lisse par définition ([22, XXVI, Définition 1.1]).

2.  $\implies$  1. D'après le lemme 7.5 il suffit de montrer l'inclusion  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) \subseteq \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$ . L'inclusion est obtenue dans [50, corollary 9, (2)] puisque  $N_G(\mathfrak{u})^0$  est lisse par hypothèse. Détaillons le raisonnement, les notations sont celles de la sous-section 3.1.

L'idée est de montrer que  $N_G(\mathfrak{u})^0$  normalise  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$ , puisqu'alors

$$N_G(\mathfrak{u})^0 \subseteq N_G(P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})) = P_G(\lambda_{\mathfrak{u}}),$$

(l'égalité est immédiate puisque  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$  est son propre normalisateur, voir [22, XXII, corollaire 5.8.5]). Cela conduit à l'inclusion désirée.

La lissité du normalisateur  $N_G(\mathfrak{u})^0$  est cruciale pour ce faire : elle permet de se restreindre à une preuve sur les  $k$ -points (par Zariski-densité de  $N_G(\mathfrak{u})^0(k)$  dans  $N_G(\mathfrak{u})^0$  puisque  $k$  est algébriquement clos, voir [26, corollaire 10.4.8]).

Il s'agit donc de montrer que

$$\text{Ad}(h)P_G(\lambda_{\mathfrak{u}}) = P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$$

pour tout  $h \in N_G(\mathfrak{u})^0(k)$ . D'après [41, Corollary 3.5] le sous-groupe  $\text{Ad}(h)P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$  et le sous-groupe parabolique optimal obtenu par un cocaractère optimal de  $\Delta_{S, \text{Ad}(h)x}$  coïncident. Autrement dit l'égalité  $\text{Ad}(h)P_G(\lambda_{\mathfrak{u}}) = P_{S, \text{Ad}(h)x}$  est satisfaite. Par ailleurs, les ensembles  $\Delta_{S,x}$  et  $\Delta_{S, \text{Ad}(h)x}$  sont égaux d'après [50, corollary 7] puisque pour tout  $h \in N_G(\mathfrak{u})^0(k)$  :

(i) les ensembles  $|X, x|$  et  $|X, \text{Ad}(h)(x)|$  sont égaux,

(ii) et  $\alpha_{S,x}(\lambda) = \alpha_{S, \text{Ad}(h)x}(\lambda)$ .

Cela permet d'obtenir l'égalité  $P_{S, \text{Ad}(h)x} = P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$  pour tout  $h \in N_G(\mathfrak{u})^0(k)$ , et donc l'inclusion désirée  $N_G(\mathfrak{u})^0 \subseteq P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$ . □

**Remarque 7.8.** Lorsque  $k$  est de caractéristique  $p > \mathfrak{h}(G)$  nous introduisons à la section 8.3.1 la notion de saturation infinitésimale due à P. Deligne et montrons avec le lemme 8.11 que le sous-groupe  $N_G(\mathfrak{u}) \subseteq G$  est infinitésimalement saturé. Le lemme C.24 qui s'applique dans notre cadre (voir [19, Theorem 2.5]) permet d'obtenir l'égalité  $\mathfrak{u} = \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(P_G(\lambda_{\mathfrak{u}}))$  beaucoup plus rapidement (il suffit d'appliquer ledit lemme).

## 8 Intégration, saturation infinitésimale et normalisateurs en caractéristique $p > \mathfrak{h}(G)$

Dans ce qui suit, et sauf mention expresse du contraire, le corps  $k$  est supposé algébriquement clos, de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  est un  $k$ -groupe réductif. On suppose désormais que  $p > \mathfrak{h}(G)$ . Soit  $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$  une  $p$ -sous-algèbre de Lie  $p$ -nil. La terminologie et les notations utilisées dans cette section sont détaillées dans l'annexe C.3.

Les notations de cette section sont celles de [2, II, §4, 3.7], elles sont rappelées à l’annexe C.1. Soit  $R$  une  $k$ -algèbre. D’après [19, II, §6, 3.1] lorsque  $k$  est de caractéristique nulle, pour chaque élément  $\mathfrak{g}$ -nilpotent  $x \in \mathfrak{g}(R)$ , il existe un unique élément  $\exp(tx) \in G(R[t])$  tel que  $\exp(\epsilon x) = e^{\epsilon x} \in G(R[\epsilon])$  et qui est compatible avec les différentes actions, c’est même une définition possible de la  $\mathfrak{g}$ -nilpotence (voir [19, Corollaire 3.5 et 3.7]). Autrement dit, il est possible d’intégrer ponctuellement et de manière unique les éléments  $\mathfrak{g}$ -nilpotents de  $\mathfrak{g}$  en des éléments unipotents de  $G$ . Cela permet de définir la loi de Baker–Campbell–Hausdorff sur  $\mathfrak{g}$ , notée  $\circ$  : soit  $\log$  l’inverse de l’application exponentielle, pour tous  $x$  et  $y$  éléments  $\mathfrak{g}$ -nilpotents de  $\mathfrak{g}$  posons  $x \circ y = \log(\exp(x) \exp(y))$ . Par ce procédé, toute sous-algèbre nilpotente de  $\mathfrak{g}$  est munie d’une structure de groupe algébrique isomorphe à un sous-groupe unipotent lisse et connexe de  $G$ .

En caractéristique  $p > \mathfrak{h}(G)$  l’existence d’éléments  $\exp(tx) \in G(R[t])$  pour tout élément  $p$ -nilpotent  $x \in \mathfrak{g}(R)$  tels que  $\exp(\epsilon x) = e^{\epsilon x}$  n’est plus systématique. Toutefois une intégration ponctuelle reste possible sous certaines hypothèses, bien qu’elle ne soit plus nécessairement compatible avec la représentation adjointe (voir 8.4.2, la compatibilité est en fait assurée lorsque  $Ad$  est de petite hauteur, voir la remarque 8.18).

Notons  $\mathcal{N}_{\text{réd}}(\mathfrak{g})$  la variété nilpotente réduite de  $\mathfrak{g}$ , à savoir le sous-schéma réduit de  $\mathfrak{g}$  dont les  $k$ -points sont les éléments  $p$ -nilpotents de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathcal{V}_{\text{réd}}(G)$  la variété unipotente réduite de  $G$ , i.e. le sous-schéma réduit de  $G$  dont les  $k$ -points sont les éléments unipotents de  $G$ . Un résultat historiquement dû à T. A. Springer (voir [65, theorem 3.1]) puis raffiné par P. Bardsley et R. W. Richardson (voir [3, 9.3.2]), et enfin, par S. Herpel dans [31, Corollary 5.5], établit l’existence d’isomorphismes de Springer pour un  $k$ -groupe  $G$  arbitraire de caractéristique nulle ou  $p > 0$  vraiment bonne. Le dernier auteur utilise notamment des résultats de G. McNinch dans sa preuve (voir [54, Theorem 3.3]).

Notons également que J-P. Serre démontre dans [53, Appendix] que deux isomorphismes de Springer induisent la même application entre les  $G(k)$ -orbites de  $\mathcal{V}_{\text{réd}}(G)(k)$  et celles de  $\mathcal{N}_{\text{réd}}(\mathfrak{g})(k)$  (rappelons qu’ici  $k$  est supposé algébriquement clos).

Lorsque  $p > \mathfrak{h}(G)$  l’existence d’un unique tel isomorphisme noté  $\exp : \mathcal{N}_{\text{réd}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\text{réd}}(G)$  pour un  $k$ -groupe réductif arbitraire  $G$  est également détaillée par J-P. Serre dans [61, Part II, Lecture 2, Theorem 3]. Dans ce cas, la loi de Baker–Campbell–Hausdorff est à coefficients  $p$ -entiers et permet encore de munir toute sous-algèbre de Lie nil de  $\mathfrak{g}$  d’une structure de groupe algébrique, c’est l’objet de la sous-section 8.1. Dans ce contexte, notons  $G_{\mathbb{Z}}$  un  $\mathbb{Z}$ -groupe réductif tel que  $G = G_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} k$ . Un tel  $\mathbb{Z}$ -groupe réductif existe toujours d’après [22, XXV, corollaire 1.3]. L’isomorphisme de variétés réduites  $\exp : \mathcal{N}_{\text{réd}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\text{réd}}(G)$  est unique et uniquement déterminé par l’exponentielle définie sur  $G_{\mathbb{Q}} := G_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ , il permet d’intégrer toute sous-algèbre  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$  en un sous-groupe unipotent, lisse et connexe de  $G$ , c’est l’objet de la section 8.2 (pour plus de détails sur la terminologie employée voir l’annexe C.3).

## 8.1 Loi de Campbell-Hausdorff

Le résultat suivant est dû à Serre [61, lecture 2, Theorem 3]. Comme expliqué en préambule il permet de munir les algèbres de Lie des radicaux unipotents des sous-groupes paraboliques  $P \subseteq G$  d’une structure de groupe algébrique “adaptée”, c’est-à-dire telle qu’il existe un isomorphisme de groupes algébriques  $\exp_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(P) \rightarrow \text{Rad}_U(P)$  (voir par exemple l’article de G. M. Seitz [59, §5] et celui de V. Balaji, P. Deligne et A. J. Parameswaran [2, §6]). La preuve du lemme reproduit et adapte les arguments développés par J.-P. Serre dans [63, §2] et G. McNinch dans [51, §8] :

**Lemme 8.1** (Serre). *Soit  $B \subset G$  un sous-groupe de Borel. Lorsque  $p \geq \mathfrak{h}(G)$ , l’algèbre de Lie  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$  est munie d’une loi de groupe sur  $k$ , notée  $\circ$  et donnée par la formule de Baker–Campbell–Hausdorff, à savoir : pour tout  $X, Y \in \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$ ,*

$$X \circ Y := X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] + \dots$$

**Remarque 8.2.** Sous les hypothèses du lemme, la caractéristique de  $k$  n'est jamais de torsion pour  $\mathfrak{g}$  (voir l'annexe A). D'après le corollaire A.1 toute sous-algèbre de Lie nil  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie du radical unipotent d'un sous-groupe de Borel  $B \subseteq G$  et hérite directement de la structure de groupe algébrique de  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$  (par stabilité de  $\mathfrak{u}$  pour le crochet de Lie, l'élément neutre étant donné par  $0 \in \mathfrak{u}$  et le symétrique de  $X \in \mathfrak{u}$  par  $-X \in \mathfrak{u}$ ).

*Démonstration.* L'idée est la suivante : notons  $G_{\mathbb{Z}}$  un groupe réductif sur  $\mathbb{Z}$  et  $B_{\mathbb{Z}} \subseteq G_{\mathbb{Z}}$  un sous-groupe de Borel tels que  $G = G_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} k$  et  $B = B_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} k$  (voir [22, XXV, corollaire 1.3]). Considérons  $B_{\mathbb{Q}} := B_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ , de radical unipotent  $\text{Rad}_U(B_{\mathbb{Q}}) = (\text{Rad}_U(B))_{\mathbb{Q}}$ . D'après [11, II, §6.5, remarque 3], l'algèbre de Lie de ce radical unipotent est un  $\mathbb{Q}$ -groupe algébrique pour la loi de Baker–Campbell–Hausdorff. Cette loi est en fait définie sur  $\mathbb{Z}_{(p)}$  (voir [63, §2.2, remarque 2]), donc sur  $\mathbb{F}_p$ , et donc sur  $k$  par spécialisation.  $\square$

La loi de groupe ainsi obtenue sur  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$  provient de la loi de groupe sur  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)_{\mathbb{Q}}$ , nous détaillons cette remarque à l'annexe D.

## 8.2 Application exponentielle en caractéristique $p > 0$

Soit  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie  $p$ -nil. Lorsque  $p > \mathfrak{h}(G)$  la loi de Baker–Campbell–Hausdorff permet de définir pour tout sous-groupe de Borel  $B \subseteq G$ , un isomorphisme de groupes algébriques  $B$ -équivariant  $\exp_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B) \rightarrow \text{Rad}_U(B)$  induit par le morphisme de variétés réduites  $\exp : \mathcal{N}_{\text{red}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\text{red}}(G)$  (voir [61, lecture 2] et [2, section 6] pour une construction détaillée de cet isomorphisme, voir en particulier [2, 6.7] pour la compatibilité entre  $\exp_{\mathfrak{b}}$  et  $\exp$  pour tout sous-groupe de Borel  $B \subseteq G$ ). Rappelons que l'exponentielle

$$\exp : \mathcal{N}_{\text{red}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\text{red}}(G)$$

est un isomorphisme  $G$ -équivariant de variétés algébriques (voir par exemple [65, Theorem 3.1] et [61, Lecture 2, Theorem 3]). Ceci implique en particulier que pour tout sous-groupe de Borel  $B \subseteq G$  l'isomorphisme de groupes algébriques  $\exp_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B) \rightarrow \text{Rad}_U(B)$  est  $G$ -équivariant sur les points fermés : pour tout point fermé  $x \in \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$  et pour tout  $g \in G$  nous avons

$$\text{Ad}(g) \exp_{\mathfrak{b}}(x) = \text{Ad}(g) \exp(x) = \exp(\text{Ad}(g)x).$$

Cet isomorphisme de groupes algébriques permet d'intégrer la sous-algèbre  $\mathfrak{u}$  en un sous-groupe unipotent, lisse, connexe  $U \subset G$  tel que  $\text{Lie}(U) = \mathfrak{u}$ . C'est l'objet de cette sous-section.

**Proposition 8.3.** *Soit  $G$  un groupe réductif connexe sur un corps algébriquement clos  $k$  de caractéristique  $p > \mathfrak{h}(G)$ . Soit  $\mathfrak{u}$  une sous-algèbre de Lie  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$ . La sous-algèbre  $\mathfrak{u}$  s'intègre en un sous-groupe unipotent, lisse et connexe de  $G$  (i.e. il existe un sous-groupe unipotent lisse et connexe  $U$  de  $G$  tel que  $\text{Lie}(U) \cong \mathfrak{u}$  en tant qu'algèbres de Lie).*

*Démonstration.* Puisque  $p > \mathfrak{h}(G)$  la caractéristique de  $k$  n'est pas de torsion pour  $G$  et d'après le corollaire A.1 il existe donc un sous-groupe de Borel  $B \subseteq G$  tel que  $\mathfrak{u}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$ .

D'après la remarque 8.2, la loi de Baker–Campbell–Hausdorff munit  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$  et  $\mathfrak{u}$  d'une structure de groupe algébrique, respectivement sous-groupe algébrique de  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$ . L'isomorphisme de groupes  $\exp_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B) \rightarrow \text{Rad}_U(B)$  mentionné en préambule se restreint donc au sous-groupe  $\mathfrak{u}$  et l'image de ce morphisme, notons-la  $U$ , est un sous-schéma en groupes unipotent, lisse et connexe de  $G$ . Par souci de clarté, nous reprenons ici la preuve de la section 6 de [2] pour détailler le raisonnement.

Rappelons que  $\text{Rad}_U(B)$  s'identifie avec l'espace affine de coordonnées  $(x_{\alpha})_{\alpha \in \Phi^+}$  (comme expliqué à la remarque D.1). Ainsi  $\mathcal{O}(\text{Rad}_U(B)) = k[x_{\alpha}]_{\alpha \in \Phi^+}$ .

Sous ces identifications, notons  $\epsilon_{\alpha} \in \text{Rad}_U(B)(k[\epsilon])$  le point de coordonnées toutes nulles à l'exception de la  $x_{\alpha}$ -ième, qui elle vaut  $\epsilon$  (les notations utilisées ici sont définies à l'annexe C.1).

Rappelons par ailleurs (voir [19, II, §4, 4.6]) que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$  est isomorphe à l'algèbre de Lie des dérivations de  $\mathcal{O}(\mathrm{Rad}_U(B))$  invariantes par translation à gauche. Cette algèbre est engendrée par les dérivations  $(D_\alpha)_{\alpha \in R^+}$ , où  $D_\alpha$  est la dérivation dans la direction  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} D_\alpha : \mathcal{O}(\mathrm{Rad}_U(B)) &\rightarrow \mathcal{O}(\mathrm{Rad}_U(B)) \\ f &\mapsto D_\alpha f, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} D_\alpha f : \mathrm{Rad}_U(B) &\rightarrow k \\ x &:= (a_\alpha)_{\alpha \in R^+} \mapsto \text{coefficient devant } \epsilon \text{ dans } f(a \cdot \epsilon_\alpha) \end{aligned}$$

(et  $a \cdot \epsilon_\alpha$  désigne le point de coordonnées toutes nulles, à l'exception de la  $x_\alpha$ -ième qui vaut  $a_\alpha \epsilon$ ).

Munissons  $\mathcal{O}(\mathrm{Rad}_U(B))$  de la graduation définie par  $\deg(x_\alpha) = \mathrm{ht}(\alpha)$  pour tout  $\alpha \in \Phi^+$ . Remarquons que pour tout  $\alpha \in \Phi^+$  le degré de  $x_\alpha$  est strictement inférieur à  $p$  (puisque par hypothèse  $p > \mathrm{h}(G)$ ). En d'autres termes  $\mathcal{O}(\mathrm{Rad}_U(B))$  est engendrée par  $\mathrm{Fil}_{p-1}$ , à savoir les termes de degré inférieur ou égal à  $p-1$ .

L'application exponentielle  $\exp_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B) \rightarrow \mathrm{Rad}_U(B)$  est définie dans [2, 6.3] comme l'isomorphisme de groupes algébriques dont les coordonnées sont les  $\exp_{\mathfrak{b}}(D)_\alpha := \sum_{n < p} \frac{D_\alpha^n}{n!}(x_\alpha)(e)$ .

Considérons la restriction de  $\exp_{\mathfrak{b}}$  à  $\mathfrak{u}$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B) & \xrightarrow{\exp_{\mathfrak{b}}} & \mathrm{Rad}_U(B), \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{u} & \xrightarrow{(\exp_{\mathfrak{b}})|_{\mathfrak{u}}} & U. \end{array}$$

Le morphisme  $(\exp_{\mathfrak{b}})|_{\mathfrak{u}} : \mathfrak{u} \rightarrow U$  est un isomorphisme de groupes algébriques.

Reprenons les notations de [20, II, Définition 4.6.1] : soit  $S$  un schéma, pour tout  $\mathcal{O}_S$ -module  $F$  nous notons  $W(F)$  le foncteur contravariant sur la catégorie des schéma sur  $S$  :

$$W(F)(S') := \Gamma(S', F \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'})$$

où  $\Gamma$  s'identifie à l'ensemble des sections de  $F \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$  au-dessus de  $S'$ . En vertu de [20, II, Lemme 4.11.7]  $\mathfrak{u} = W(\mathfrak{u})$ . En particulier  $\mathfrak{u}$  est lisse et connexe.

Par lissité de  $\mathfrak{u}$  et  $U$  l'isomorphisme de groupes algébriques  $(\exp_{\mathfrak{b}})|_{\mathfrak{u}}$  induit un isomorphisme  $\mathrm{Lie}(U) \cong \mathrm{Lie}(\mathfrak{u})$  (voir [20, VIIA proposition 8.2]). Puisque  $\mathfrak{u}$  est un espace vectoriel sur un corps  $\mathrm{Lie}(\mathfrak{u}) \cong \mathfrak{u}$  et donc  $\mathrm{Lie}(U) \cong \mathfrak{u}$  en tant qu'algèbres de Lie. En d'autres termes, l'application  $\exp_{\mathfrak{b}}$  induit l'identité sur les espaces tangents et la sous-algèbre  $p$ -nil  $\mathfrak{u}$  s'intègre en un sous-groupe unipotent, lisse et connexe de  $G$ .  $\square$

**Remarques 8.4.** L'intégration obtenue à la proposition 8.3 est compatible avec le morphisme de variétés réduites  $\exp : \mathcal{N}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{red}}(G)$  dans le sens suivant :

1. puisque l'intégration de  $\mathfrak{u}$  résulte de la restriction d'un morphisme  $\exp_{\mathfrak{b}}$  (pour le choix d'un sous-groupe de Borel  $B \subset G$  dans l'algèbre de Lie duquel  $\mathfrak{u}$  est  $k$ -plongeable) à la sous-algèbre  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$ , elle est induite par le morphisme de variétés réduites  $\exp : \mathcal{N}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{red}}(G)$  d'après [2, 6.7]. Autrement dit, pour tout  $x \in \mathfrak{u}$  l'égalité  $\exp(x) = \exp_{\mathfrak{b}}(x)$  est vérifiée (puisque  $x$  est un point fermé de  $\mathcal{N}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{g})$ , il appartient à la partie réduite de cette variété). En particulier pour tout  $g \in G$ , et tout sous-groupe de Borel  $B \subseteq G$  tel que  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{b}$  la  $G$ -équivariance de  $\exp$  permet d'assurer une  $G$ -équivariance ponctuelle :

$$\mathrm{Ad}(g)(\exp_{\mathfrak{b}}(x)) = \mathrm{Ad}(g)(\exp(x)) = \exp(\mathrm{Ad}(g)(x)) = \exp_{\mathfrak{b}}(\mathrm{Ad}(g)(x)).$$

2. L'application exponentielle construite ci-dessus permet de définir le morphisme suivant, appelé  $t$ -puissance :

$$\begin{aligned} \exp_x(\cdot) : \mathbb{G}_a &\rightarrow G \\ t &\mapsto \exp(tx), \end{aligned}$$

qui lui-même induit un morphisme :

$$\begin{aligned} \psi_{\mathfrak{u}} : W(\mathfrak{u}) \times \mathbb{G}_a &\rightarrow G \\ (x, t) &\mapsto \exp(tx) =: \exp_x(t). \end{aligned}$$

Le sous-groupe unipotent, lisse et connexe obtenu à la proposition 8.3 est en fait le sous-groupe  $\tilde{U} \subseteq G$  engendré par l'image du morphisme  $\psi$  pour la topologie fppf (voir [20, VIB proposition 7.1 et remarque 7.6.1]) En effet ce sous-groupe est unipotent (d'après [19, IV, §2, n°2, proposition 2.5] puisqu'il se plonge dans le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel de  $G$ ), connexe, d'après [20, VIB Corollaire 7.2.1] puisque  $\mathfrak{u} \cong W(\mathfrak{u})$  est géométriquement réduit et géométriquement connexe ; et réduit donc lisse, puisque c'est l'image d'un groupe lisse donc réduit (rappelons que  $k$  est algébriquement clos). L'inclusion  $\tilde{U} \subseteq U$  est immédiate et l'égalité des groupes considérés se déduit une fois de plus de celle de leurs algèbres de Lie : soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  tel que  $U \subseteq \text{Rad}_U(B)$ . Puisque l'exponentielle  $\exp_{\mathfrak{b}}$  induit l'identité sur les espaces tangents, l'égalité  $\text{Lie}(\tilde{U}) = \mathfrak{u}$  est nécessairement vérifiée. D'après [2, II, §5, 5.5]) les  $k$ -groupes  $U$  et  $\tilde{U}$  sont égaux puisque  $U$  et  $\tilde{U}$  sont lisses et connexes.

Cette remarque permet de montrer que l'intégration de la sous-algèbre  $\mathfrak{u}$  est indépendante du choix du sous-groupe de Borel  $B$  pour lequel  $\mathfrak{u} \subseteq \text{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$ . Plus précisément :

**Lemme 8.5.** *Soient  $B_1$  et  $B_2$  deux sous-groupes de Borel de  $G$  tels que  $\mathfrak{u} \subseteq \text{rad}_{\mathfrak{u}}(B_1)$  et  $\mathfrak{u} \subseteq \text{rad}_{\mathfrak{u}}(B_2)$ , alors  $\exp_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{u}) = \exp_{\mathfrak{b}_2}(\mathfrak{u}) = U$ .*

*Démonstration.* D'après la remarque 8.4, les sous-groupes  $\exp_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{u})$  et  $\exp_{\mathfrak{b}_2}(\mathfrak{u})$  sont engendrés par l'image du morphisme  $\psi$  pour tout  $x \in \mathfrak{u}$ . Puisque  $\exp_{\mathfrak{b}_i}(tx) = \exp(tx)$  pour tout  $i \in \{1, 2\}$  et tout  $x \in \text{rad}_{\mathfrak{u}}(B_i)$ , ces sous-groupes sont égaux.  $\square$

Rappelons que  $h(G) := h(B) > h(P)$  pour tout sous-groupe parabolique propre  $P \subset G$  (cela découle immédiatement de la définition de  $h(P)$ , voir la section 5.2). Lorsque  $\mathfrak{u}$  est l'algèbre de Lie du radical unipotent d'un sous-groupe parabolique propre de  $G$ , il est possible de reproduire exactement le raisonnement qui précède pour  $p > h(P)$  (la condition sur la caractéristique est ici plus faible). Plus précisément, pour un sous-groupe de Borel  $B \subseteq P$  et son système de racines positives  $\Phi^+$  associé, soit  $\Phi'' \subseteq \Phi^+$  le sous-ensemble de racines associé à  $P$ . Le choix d'un ordre sur les  $U_{\alpha}$  (pour  $\alpha \in \Phi^+$ ) dans la preuve ci-dessus se restreint à  $\Phi''$  et induit un isomorphisme  $\text{Rad}_U(P) \rightarrow \prod_{\alpha \in \Phi''} U_{\alpha}$  (voir [22, XXVI proposition 1.12]). Cela permet d'identifier  $\text{Rad}_U(P)$  avec l'espace affine de coordonnées  $(x_{\alpha})_{\alpha \in \Phi''}$ . Le reste de la preuve suit verbatim, en remarquant que :

- sous l'hypothèse  $p > h(P)$ , pour tout  $\alpha \in \Phi''$ , le degré de  $x_{\alpha}$  est inférieur à  $p$ ,
- la loi de Baker–Campbell–Hausdorff est bien définie sur  $\text{rad}_{\mathfrak{u}}(P)$  et munit cette algèbre de Lie d'une structure de groupes algébriques (voir [51, §8]).

En particulier, ce développement fournit le résultat suivant (voir également dans [59, proposition 5.3] et [51, §8]) :

**Lemme 8.6.** *Si  $P$  est un sous-groupe parabolique de  $G$ , alors  $\exp_{\mathfrak{b}}(\text{rad}_{\mathfrak{u}}(P)) = \text{Rad}_U(P)$ , où  $\mathfrak{b} = \text{Lie}(B)$  et  $B \subseteq P$  est un sous-groupe de Borel de  $G$ .*

**Remarque 8.7.** D'après ce qui précède, lorsque l'algèbre de Lie nil  $\mathfrak{u}$  est contenue dans l'algèbre de Lie du radical unipotent d'un sous-groupe parabolique  $P \subseteq G$ , il suffit que  $p > h(P)$  pour que les raisonnements développés dans cette section restent valides. En particulier, lorsque  $\mathfrak{u} \subseteq$

$\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(P)$  et  $P$  est un sous-groupe parabolique propre maximal de  $G$ , on retrouve le résultat de [58, Corollary 1.4]. Notons qu'il suffirait en fait d'imposer que  $p$  soit bon pour avoir un morphisme de groupes algébriques qui permette d'intégrer  $\mathfrak{u}$ , mais pour que les résultats qui suivent soient exacts, il faut que ce morphisme soit induit par un isomorphisme de Springer (qui n'existe que lorsque le groupe dérivé de  $G$  est simplement connexe (voir [2, 2.2])).

**Remarque 8.8.** Soit  $U$  un sous-groupe unipotent de  $G$ . Notons  $\mathfrak{u} := \text{Lie}(U)$ . Puisque  $k$  est algébriquement clos, donc en particulier parfait, le sous-groupe  $U$  est  $k$ -plongeable (il existe un sous-groupe parabolique  $P \subseteq G$  tel que  $U \subseteq \text{Rad}_U(P)$ ). Soit  $U \subseteq B \subseteq P$  un sous-groupe de Borel. L'isomorphisme de groupes algébriques  $\exp_{\mathfrak{b}}$  admet un isomorphisme de groupes réciproque, noté  $\log_B : \text{Rad}_U(B) \rightarrow \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$  et défini explicitement dans [2, section 6]. De même que pour l'exponentielle  $\exp_{\mathfrak{b}}$ , cet isomorphisme de groupes algébriques est induit par un isomorphisme de variétés réduites  $\log : \mathcal{V}_{\text{red}}(G) \rightarrow \mathcal{N}_{\text{red}}(\mathfrak{g})$ .

Notons qu'il n'est pas vrai en général que  $\exp(\mathfrak{u}) = U$ . De manière équivalente, en général  $\log_B(U) \neq \mathfrak{u}$ . En d'autres termes, l'application exponentielle définie dans ce paragraphe ne permet pas d'établir une correspondance bijective entre les sous-algèbres de Lie  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$  et les sous-groupes unipotents lisses et connexes de  $G$  comme c'est le cas en caractéristique 0 avec les algèbres de Lie nilpotentes (voir [19, IV, §2, 4.5]). Notons qu'en caractéristique nulle les algèbres de Lie nilpotentes (et non seulement les algèbres de Lie nil) sont toutes intégrables car les algèbres de Lie commutatives le sont (cela est dû à l'existence d'un morphisme de groupes  $\mathbb{G}_a \rightarrow \mathbb{G}_m$  dans ce contexte).

À titre d'exemple, si  $G = \text{SL}_3$  et  $p > 3$ , considérons les groupes unipotents, lisses et connexes  $U_1$  et  $U_2$  engendrés respectivement par l'élément  $\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & t & t^p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Puisque  $U_1 \neq U_2$ , nous avons nécessairement  $\log(U_1) \neq \log(U_2)$ , par contre l'égalité  $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2$  est bien vérifiée : ces algèbres sont données par l'algèbre de Lie engendrée par  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### 8.3 Défaut de lissité des normalisateurs

#### 8.3.1 Saturation infinitésimale

Le paragraphe 8.3 reprend les arguments de [2] pour établir l'existence d'un unique isomorphisme  $G$ -équivariant de schémas  $\exp : \mathcal{N}_{\text{red}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\text{red}}(G)$  qui induit un isomorphisme  $B$ -équivariant de groupes algébriques  $\exp_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B) \rightarrow \text{Rad}_U(B)$  pour tout sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$ . La définition ci-après généralise la notion de saturation introduite dans [62, §4], elle est due à P. Deligne (voir [18, Définition 1.5]).

**Définition 8.9.** Un sous-schéma en groupes  $H \subseteq G$  est infinitésimalement saturé si pour tout élément  $p$ -nilpotent  $x \in \mathfrak{h} := \text{Lie}(H)$  la  $t$ -puissance factorise par  $H$ . En d'autres termes, la situation est la suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_a & \xrightarrow{\exp_x(\cdot)} & G, \\ \exists \downarrow \text{dotted} & \nearrow & \\ & & H. \end{array}$$

Notons qu'il existe bien des sous-groupes infinitésimalement saturés (autres que le groupe  $G$  lui-même) à savoir les sous-groupes paraboliques d'un  $k$ -groupe réductif  $G$  c'est l'objet du lemme suivant :

**Lemme 8.10.** *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif tels que  $p > \mathfrak{h}(G)$ . Alors tout sous-groupe parabolique de  $G$  est infinitésimalement saturé.*

*Démonstration.* La démonstration est basée sur la méthode dynamique (voir [15, 4] et [16, §2.1]). Puisque  $k$  est un corps, soient  $P \subseteq G$  et  $T \subseteq P$  un tore maximal de  $G$ , alors  $P$  est de la forme  $P_G(\lambda)$  où  $\lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow G$  est un cocaractère de  $T$ , non nécessairement unique (voir [16, Proposition 2.2.9]) notons que c'est le sous-groupe parabolique associé à l'algèbre de Lie du radical unipotent de  $P$  construit à la section 7. Il s'agit de montrer que pour tout élément  $p$ -nilpotent  $x \in \mathfrak{p}$  la  $t$ -puissance  $\exp_x$  a son image dans  $P = P_G(\lambda)$ . Puisque  $k$  est algébriquement clos, il suffit de raisonner sur les  $k$ -points. Pour rappel

$$P_G(\lambda)(k) = \{g \in G(k) \mid \lim_{s \rightarrow 0} \lambda(s) \cdot g \text{ existe.}\}$$

Il s'agit de montrer  $\lim_{s \rightarrow 0} \lambda(s) \cdot \exp(tx)$  existe, mais cela est immédiat en utilisant la  $G$ -équivariance du morphisme  $\exp$ . En effet, nous avons  $\lambda(s) \cdot \exp(tx) = \exp(\lambda(s) \cdot tx)$ , et puisque  $x \in \mathfrak{p}_\mathfrak{g}(\lambda)$ , par définition  $\lim_{s \rightarrow 0} \lambda(s) \cdot x$  existe, donc  $\lim_{s \rightarrow 0} \lambda(s) \cdot \exp(tx)$  existe et  $\exp(tx)$  est un élément de  $P_G(\lambda) = P$ , qui est donc infinitésimalement saturé.  $\square$

Comme souligné à la remarque 8.8, il n'existe pas de correspondance bijective entre les sous-algèbres de Lie  $p$ -nil de l'algèbre de Lie d'un groupe-réductif  $G$  et les sous-groupes unipotents lisses connexes de  $G$ . La notion de saturation infinitésimale répond précisément à ce problème : par définition, les sous-groupes unipotents, lisses, connexes, infinitésimalement saturés de  $G$  sont en correspondance bijective avec les sous-algèbres de Lie  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$ , cette correspondance étant induite par l'application exponentielle.

Les lemmes qui suivent sont cruciaux dans la preuve du théorème 4.2. Notons qu'ils sont immédiats dès lors que  $p > 2\mathfrak{h}(G) - 2$ , comme détaillé à la sous-section 8.4.2.

**Lemme 8.11.** *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif tels que  $p > \mathfrak{h}(G)$ . Soit  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$ . Le normalisateur de  $\mathfrak{u}$  dans  $G$  est infinitésimalement saturé.*

*Démonstration.* Il s'agit de montrer que pour tout élément  $p$ -nilpotent  $x \in \text{Lie}(N_G(\mathfrak{u})) = N_\mathfrak{g}(\mathfrak{u})$  (où l'égalité est donnée par le lemme C.7), la  $t$ -puissance factorise par  $N_G(\mathfrak{u})$ .

Soit  $x$  un tel élément, alors :

1. si  $x \in \mathfrak{u}$ , puisque  $\mathfrak{u} = \text{Lie}(U)$ , les inclusions suivantes  $\exp(tx) \in U \subseteq N_G(U) \subseteq N_G(\mathfrak{u})$  sont vérifiées, d'après le lemme C.6,
2. si  $x \notin \mathfrak{u}$ , posons  $\mathfrak{u}_x := \mathfrak{u} \oplus kx$ . Comme  $x \in N_\mathfrak{g}(\mathfrak{u})$  c'est une sous-algèbre de Lie, elle est  $p$ -nil car engendrée par des éléments  $p$ -nilpotents. D'après la proposition 8.3 il existe donc des sous-groupes unipotents, lisses et connexes de  $G$ , notés respectivement  $U$  et  $U_x$  et tels que  $\text{Lie}(U_x) = \mathfrak{u}_x$ , respectivement  $\text{Lie}(U) = \mathfrak{u}$ . Notons que ces constructions sont indépendantes du sous-groupe de Borel dans l'algèbre de Lie duquel nous plongeons  $\mathfrak{u}$  et  $\mathfrak{u}_x$ , en particulier, il n'est pas nécessaire de choisir le même sous-groupe de Borel pour les deux sous-algèbres.

Par construction nous avons  $U \subseteq U_x$ , par lissité nous avons  $\dim \mathfrak{u}_x = \dim U_x$  et  $\dim \mathfrak{u} = \dim U$ . Puisque  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{u}_x$  est de codimension 1, le sous-groupe unipotent, lisse et connexe  $U$  est de codimension 1 dans le sous-groupe unipotent, lisse et connexe  $U_x$ . D'après [19, IV, §4 corollaire 3.15] c'est un sous-groupe distingué de  $U_x$  (de quotient isomorphe à  $\mathbb{G}_a$ ). Ainsi

$U_x \subseteq N_G(U) \subseteq N_G(\mathfrak{u})$  (la dernière inclusion est donnée par le lemme C.6), donc  $\exp(tx) \in N_G(\mathfrak{u})$  et  $N_G(\mathfrak{u})$  est infinitésimalement saturé.  $\square$

La preuve du lemme 8.11 permet de démontrer le lemme suivant :

**Lemme 8.12.** *Sous les hypothèses précédentes, notons  $U := \exp_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{u})$  où  $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Borel telle que  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$ . Alors  $N_G(U)$  est infinitésimalement saturé.*

*Démonstration de 8.12.* Il s'agit de montrer que pour tout élément  $p$ -nilpotent  $x \in \text{Lie}(N_G(U))$ , la  $t$ -puissance factorise par  $N_G(U)$ . Le lemme C.6 fournit une inclusion  $\text{Lie}(N_G(U)) \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ . En particulier  $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est un élément  $p$ -nilpotent. Puisque d'après la preuve du lemme 8.11, l'image de  $x$  par la  $t$ -puissance est un élément de  $N_G(U)$ , ce dernier est infinitésimalement saturé.  $\square$

**Remarque 8.13.** Nous venons de démontrer au lemme 8.11 que le normalisateur  $N_G(\mathfrak{u})$  de toute sous-algèbre de Lie  $p$ -nil  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  est infinitésimalement saturé. En particulier le normalisateur du théorème 4.2 est infinitésimalement saturé ce qui est une condition nécessaire à la véracité de l'énoncé puisque ce résultat affirme que la parabolicité de ce dernier, et car tout sous-groupe parabolique de  $G$  est infinitésimalement saturé en vertu du lemme 8.10.

### 8.3.2 Application exponentielle et normalisateurs

Soit  $G$  un groupe réductif sur un corps algébriquement clos  $k$  de caractéristique  $p > h(G)$ . De manière générale, lorsque  $U \subseteq G$  est un sous-groupe d'un groupe réductif  $G$ , seule l'inclusion  $N_G(U)_{\text{réd}} \subseteq N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}$  est vérifiée (voir lemme C.6). Lorsque  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre  $p$ -nil et  $U = \exp_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{u})$ , où  $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Borel telle que  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$ , ces normalisateurs sont égaux. Commençons par montrer l'égalité des parties réduites :

**Lemme 8.14.** *Sous les notations précédentes  $N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}} = N_G(U)_{\text{réd}}$ .*

*Démonstration.* Comme  $\text{Lie}(U) = \mathfrak{u}$  seule l'inclusion  $N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}} \subseteq N_G(U)_{\text{réd}}$  est à vérifier. Par densité de Zariski, puisque  $k$  est algébriquement clos, il suffit de raisonner sur les  $k$ -points (d'après [26, corollaire 10.4.8] puisque les schémas considérés ici sont localement de type fini) : soit  $g \in N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}(k)$ , et soit  $h \in U(k)$ . Puisque  $U := \exp_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{u})$  il existe  $x \in \mathfrak{u}(k)$  tel que  $h = \exp_{\mathfrak{b}}(x) = \exp(x)$  où la dernière égalité est justifiée par le préambule de la sous-section 8.2 et la remarque 8.4, puisque  $x \in \mathfrak{u}(k)$  est un point fermé. Toujours d'après la remarque sus-mentionnée nous avons

$$\text{Ad}(g)(h) = \text{Ad}(g)(\exp(x)) = \exp(\text{Ad}(g)(x)) \in U(k)$$

car  $g \in N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}(k)$  (où la dernière inclusion est justifiée en utilisant la  $G$ -équivariance de  $\exp$ ).  $\square$

Le formalisme fppf de la remarque 8.4 permet en fait d'établir l'égalité au niveau des groupes :

**Lemme 8.15.** *Le sous-groupe  $N_G(\mathfrak{u})$  normalise  $U$ . En particulier  $N_G(U) = N_G(\mathfrak{u})$ .*

*Démonstration.* Soit  $R$  une  $k$ -algèbre. Pour tous  $g \in N_G(\mathfrak{u})(R)$  et  $h \in U(R)$ , il existe  $S \rightarrow R$  un recouvrement fppf tel que  $h_S = \psi(x_1, s_1) \times \cdots \times \psi(x_n, s_n)$  où  $x_i \in \mathfrak{u}_R \otimes_R S$  et  $s_i \in S$ . Mais alors, en utilisant la  $G$ -équivariance de  $\exp_{x_i}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , nous avons

$$(\text{Ad}(g)h)_S = \prod_{i=1}^n \text{Ad}(g_S)\psi(x_i, s_i) = \prod_{i=1}^n \psi(\text{Ad}(g_S)x_i, s_i) \in U(S) \cap G(R) = U(R),$$

puisque  $U$  est engendré par  $\psi$  comme faisceau fppf. Ainsi  $\text{Ad}(g)h \in U(R)$ , autrement dit  $N_G(\mathfrak{u})(R) \subseteq N_G(U)(R)$  pour toute  $k$ -algèbre  $R$ . Le lemme de Yoneda permet de conclure que  $N_G(\mathfrak{u}) \subseteq N_G(U)$ . Puisque d'après la proposition 8.3 l'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}$  dérive du sous-groupe unipotent lisse et connexe  $U \subseteq G$ , l'inclusion  $N_G(U) \subseteq N_G(\mathfrak{u})$  est toujours vérifiée d'après le lemme C.6, et l'égalité des normalisateurs s'en déduit.  $\square$

## 8.4 Démonstrations du théorème 4.2 et des corollaires 4.3, 4.4 et 4.6

### 8.4.1 Preuve du théorème 4.2

*Démonstration du théorème 4.2.* D'après 8.3, puisque  $p > \mathfrak{h}(G)$  la sous-algèbre  $p$ -nil  $\mathfrak{u}$  s'intègre en un sous-groupe unipotent lisse et connexe  $U$ . En particulier  $U \subseteq N_G(U)_{\text{réd}}^0$ . Notons  $V$  le radical unipotent de  $N_G(U)_{\text{réd}}^0$ , l'inclusion  $U \subseteq V$  est nécessairement vérifiée. Au niveau des algèbres de Lie cela se traduit par l'inclusion  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{v}$ .

Il s'agit de montrer que  $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$ . Puisque  $U$  et  $V$  sont des sous-groupes lisses et connexes de  $G$  cela suffit pour conclure que  $U = V$  d'après [19, II, §5, 5.5]. Soit  $W := \text{Rad}_U(N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0)$ . D'après C.21 l'algèbre de Lie  $\mathfrak{w} := \text{Lie}(W)$  est un  $p$ -idéal  $p$ -nil de  $\text{Lie}(N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0) \subseteq \text{Lie}(N_G(\mathfrak{u})) = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ . C'est un  $p$ -idéal  $p$ -nil de  $\text{Lie}(N_G(\mathfrak{u})) = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  d'après [2, theorem 2.5] (qui s'applique car le sous-groupe  $N_G(\mathfrak{u})$  est infinitésimalement saturé, voir le lemme 8.11). Il est donc contenu dans le  $p$ -radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ , qui est lui-même contenu dans l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents de  $\text{rad}(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}))$  d'après le lemme C.13 2). Mais ce dernier ensemble rien d'autre que  $\mathfrak{u}$  par hypothèse.

En résumé nous avons les inclusions suivantes :  $\mathfrak{w} \subseteq \mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{v}$ .

D'après le lemme 8.14, les normalisateurs réduits  $N_G(U)_{\text{réd}}$  et  $N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}$  coïncident, donc leurs composantes neutres respectives également, de même que leurs radicaux unipotents. Autrement dit les sous-groupes  $V = W$  sont égaux, ce qui permet de conclure à l'égalité des algèbres de Lie  $\mathfrak{w} = \mathfrak{v} = \mathfrak{u}$ . Les groupes  $U \subseteq V$  étant lisses et connexes, l'égalité de leurs algèbres de Lie respectives permet de conclure que  $U = V$  (voir [19, II, §5, 5.5]).

En conclusion sous-groupe  $U$  est le radical unipotent de la composante neutre de son normalisateur lisse, qui est donc un sous-groupe parabolique de  $G$  d'après [6, Corollaire 3.2]. On le note  $P_G(U) := N_G(U)_{\text{réd}}^0$ .

Comme le groupe  $N_G(U)$  est infinitésimalement saturé, le sous-groupe  $N_G(U)_{\text{réd}}^0$  est distingué dans  $N_G(U)$  d'après [2, theorem 2.5]. Autrement dit  $N_G(U) \subseteq N_G(N_G(U)_{\text{réd}}^0)$ . Mais puisque  $N_G(U)_{\text{réd}}^0$  est son propre normalisateur (d'après [22, XXII, corollaire 5.8.5]), on a nécessairement  $N_G(U)_{\text{réd}}^0 = N_G(U)$  et ce dernier est un sous-groupe parabolique de  $G$ .

En particulier,  $N_G(U) = N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0$  est un sous-groupe parabolique de  $G$ . Puisque  $N_G(\mathfrak{u})$  est infinitésimalement saturé, le même raisonnement que ci-avant permet de conclure que  $N_G(\mathfrak{u}) = N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0$  est un sous-groupe parabolique propre de  $G$ . Ainsi les égalités

$$N_G(\mathfrak{u}) = N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0 = N_G(U)_{\text{réd}}^0 = N_G(U) = P_G(U),$$

sont satisfaites et  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) = \text{Lie}(N_G(\mathfrak{u})) = \text{Lie}(P_G(U))$  est bien une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ , à savoir l'algèbre de Lie du sous-groupe parabolique de  $G$  obtenu en appliquant le théorème de Borel-Tits à  $U$ .

Par ailleurs, d'après le théorème 4.5, puisque  $N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0 = N_G(U)$  est lisse, le normalisateur  $N_G(U)$  n'est rien d'autre que le sous-groupe parabolique optimal de  $\mathfrak{u}$  donné par la théorie de Kempf-Rousseau (voir la 7) et noté  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$ .  $\square$

**Remarque 8.16.** Le lemme 8.15 et le formalisme fppf qu'il introduit permettent de simplifier drastiquement la preuve de théorème 4.2 en assurant l'égalité des normalisateurs  $N_G(U)$  et  $N_G(\mathfrak{u})$  et non plus seulement celle de leurs parties lisses. Le lemme C.21 permet de conclure : reprenons les notations de la preuve ci-dessus. Puisque le sous-groupe intégré  $U$  est lisse et connexe nous avons l'inclusion  $U \subseteq V := \text{Rad}_U(N_G(U)_{\text{réd}}^0)$  qui permettrait d'obtenir une inclusion d'algèbres de Lie  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{v}$ . Par hypothèse  $\mathfrak{u}$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ , puisque  $\mathfrak{v} \subset N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est  $p$ -nil d'après le lemme C.21 l'inclusion  $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{u}$  est trivialement vérifiée, ce qui permet d'obtenir l'égalité désirée  $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$ . Nous en déduisons, comme dans la preuve, que  $N_G(U)$  est un sous-groupe parabolique de  $G$ . Mais puisque nous savons a priori que  $N_G(U) = N_G(\mathfrak{u})$  il n'y a plus besoin d'argument supplémentaire pour montrer que  $N_G(\mathfrak{u})$  est parabolique.

### 8.4.2 Remarques sur le cas de la caractéristique 0 ou $p$ grand

Soit  $G$  un  $k$ -groupe simple et simplement connexe. Lorsque  $p = 0$  ou  $p > 2\mathfrak{h}(G) - 2$ , la représentation adjointe est compatible avec l'application exponentielle. En d'autres termes, tout

élément  $\mathfrak{g}$ -nilpotent  $x \in \mathfrak{g}$  satisfait l'égalité  $\text{Ad}(\exp(tX)) \cdot y = \exp(t \text{ad}(X)) \cdot y$  pour tout  $y \in \mathfrak{g}$ . En caractéristique  $p > 0$ , la restriction sur  $p$  est imposée par la présence d'une  $p$ -structure sur  $\mathfrak{g}$  (voir [19, II, §7, 3.3] et C.2) : pour tous  $x$  et  $y \in \mathfrak{g}$  nous avons

$$(x + y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} - W(x, y).$$

Cela implique que l'égalité  $\exp(x)\exp(y) = \exp(x + y)$  pour  $x$  et  $y$  des éléments  $p$ -nilpotents de  $\mathfrak{g}$  n'est plus toujours vérifiée (voir [62, remarque 4.1.7]). L'hypothèse  $p > 2h(G) - 2$  permet de pallier ce problème en assurant qu'alors  $\text{Ad}$  est de petite hauteur. La démonstration de [30, lemma 4.3] fournit le raisonnement lorsque  $G$  est de type  $A_{n+1}$ , la preuve est identique pour les autres types : soit  $x$  un élément  $p$ -nilpotent de  $\mathfrak{g}$ , notons  $l$  la multiplication à gauche par  $tx$  et  $r$  la multiplication à droite par  $-tx$ , alors

$$\text{Ad}(\exp(tx)) = \exp(l)\exp(r) = \exp\left(l + r - \sum_{n=1}^{p-1} c_n l^{[n]} r^{[p-n]}\right),$$

où les  $c_n \in k$  sont des coefficients non nuls, et

$$\begin{aligned} W_p(l, r) &= \sum_{n=1}^{p-1} c_n l^{[n]} r^{[p-n]} \\ &= \sum_{n=1}^{h(G)-1} c_n l^{[n]} r^{[p-n]} + \sum_{n=h(G)}^{p-1} c_n l^{[n]} r^{[p-n]} = 0 \end{aligned}$$

puisque dans chaque somme un des facteurs est élevé à une puissance supérieure à  $h(G)$  et que dès lors que  $p > h(G)$ , tout élément nilpotent  $y \in \mathfrak{g}$  vérifie  $y^{[p]} = 0$  (voir [51, 4.4]). Une telle compatibilité simplifie drastiquement la preuve des lemmes 8.11 et 8.12. Détaillons le raisonnement.

Soit  $\mathfrak{u}$  une sous-algèbre nilpotente de  $\mathfrak{g}$ . D'après la proposition 8.3 cette sous-algèbre s'intègre en un sous-groupe unipotent, lisse et connexe de  $G$ , noté  $U := \exp_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{u})$ , où  $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Borel telle que  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{b})$ . A priori  $\text{Lie}(N_G(U)) \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  (en vertu du lemme C.6). La compatibilité de la représentation adjointe et de l'application exponentielle assure l'égalité de ces normalisateurs :

**Lemme 8.17.** *Soit  $G$  un  $k$ -groupe simple et simplement connexe. Supposons que  $p > 2h(G) - 2$ . Soit  $\mathfrak{u}$  une sous-algèbre  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$ . Alors  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) = \text{Lie}(N_G(U))$ .*

*Démonstration.* Soit  $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ . Il s'agit de montrer que  $x \in \text{Lie}(N_G(U))$ . D'après le lemme C.6 cela revient à vérifier que  $\text{Ad}(u)x - x \in \mathfrak{u}$  pour tout  $u \in U(k)$ . Soit donc  $u \in U(k)$ . Puisque  $U = \exp_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{u})$ , pour les mêmes raisons que dans la preuve du lemme 8.14 il existe un élément  $y \in \mathfrak{u}$  tel que  $u = \exp(y)$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Ad}(u)x - x &= \text{Ad}(\exp(y))(x) - x \\ &= \exp(\text{ad}(y))(x) - x \\ &= \sum_{0 \leq n < p} \frac{\text{ad}^n(y)}{n!}(x) - x \\ &= \sum_{1 \leq n < p} \frac{\text{ad}^n(y)}{n!}(x) \in \mathfrak{u} \end{aligned}$$

car  $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  par hypothèse. Lorsque  $\text{Ad}$  et  $\exp$  sont compatibles, en particulier, lorsque  $p > 2h(G) - 2$ , l'égalité  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) = \text{Lie}(N_G(U))$  est vérifiée.  $\square$

Lorsque  $p > 2h(G) - 2$  le lemme 8.12 n'apporte aucune information supplémentaire par rapport au lemme 8.11 et la preuve de ces résultats est immédiate :

*Démonstration de 8.12 et 8.11.* D'après ce qui précède et le lemme C.7 les égalités  $\text{Lie}(N_G(\mathfrak{u})) = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) = \text{Lie}(N_G(U))$  sont vérifiées. Il s'agit donc de montrer que pour tout élément  $p$ -nilpotent  $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ , la  $t$ -puissance  $t \mapsto \exp(tx)$  factorise par  $N_G(\mathfrak{u})$ . Soient  $y \in \mathfrak{u}$ , et  $x \in \mathfrak{g}$  un élément  $p$ -nilpotent. Puisque la représentation adjointe est compatible avec l'exponentielle, elle l'est également avec la  $t$ -puissance, et :

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\exp(tx))(y) &= \exp(\text{ad}(tx))(y) \\ &= \sum_{0 \leq n < p} \frac{\text{ad}(tx)^n}{n!}(y) \in \mathfrak{u} \end{aligned}$$

puisque  $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  par hypothèse. □

**Remarque 8.18.** Lorsque  $G$  est un  $k$ -groupe réductif arbitraire, les éléments suivants permettent, dans certains cas, d'affaiblir les conditions sur  $p$  tout en conservant une compatibilité entre une représentation de  $G$  et l'application exponentielle. Notons  $\text{ht}_G(\mathfrak{g}) := \max\{\sum_{\alpha > 0} \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle\}$  la hauteur de Dynkin de la représentation adjointe. La restriction sur  $p$  revient à imposer que la représentation adjointe soit de petite hauteur (i.e.  $p > \text{ht}_G(\mathfrak{g})$ ) puisque  $\text{ht}_G(\mathfrak{g}) = 2 \times \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_i = 2h(G) - 2$ , où les  $\bar{\omega}_i$  désignent les poids fondamentaux pour l'action de  $T$ , voir [61, Lecture 4, example of Theorem 8]).

De manière plus générale, il est possible d'affaiblir les restrictions sur la caractéristique en considérant une représentation  $\rho$  presque fidèle (i.e. dont le noyau est de type multiplicatif) et de hauteur de Dynkin minimale. Dans ce cas, l'application exponentielle et la représentation  $\rho$  sont compatibles (voir [2, 4.5 et 4.6]) et les raisonnements qui précèdent se généralisent. Notons que la représentation adjointe est toujours presque fidèle lorsque  $G$  est un  $k$ -groupe réductif : son noyau n'est rien d'autre que le centre de  $G$ , qui est de type multiplicatif. Lorsque  $G$  est simple et simplement connexe, si  $G$  n'est pas de type  $F_4$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  ou  $E_8$ , l'existence d'une représentation presque fidèle et de petite hauteur est assurée dès lors que  $p > h(G)$  (voir la remarque qui suit le Théorème 4.7 de [2]).

**Remarque 8.19.** Le défaut de compatibilité de l'exponentielle tronquée avec la représentation adjointe est étudié dans [43, Chapter 4]. Au paragraphe 4.2, l'auteur définit un opérateur  $\text{had}$ , compatible avec l'exponentielle tronquée. Une sous-algèbre  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  est  $\text{had}$ -faiblement saturée si et seulement si  $\text{had}(x)(\mathfrak{u}) \subseteq \mathfrak{u}$  pour tout élément  $p$ -nilpotent  $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ . En pratique une sous-algèbre de Lie  $p$ -nil  $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$  est  $\text{had}$ -faiblement saturée si et seulement si son normalisateur  $N_G(\mathfrak{u})$  est infinitésimalement saturé : une inclusion est claire, si  $\mathfrak{u}$  est  $\text{had}$ -faiblement saturée, soit  $y \in \mathfrak{u}$ , pour tout élément  $p$ -nilpotent  $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  et pour tout  $t \in R$  (où  $R$  est une  $k$ -algèbre) nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\exp(tx))(y) &= \exp(t \text{had}(x))(y) \\ &= \left( \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(t \text{had}(x))^i}{i!} \right) (y) \in \mathfrak{u}, \end{aligned}$$

puisque chaque coefficient  $\text{had}^i(x)(y) \in \mathfrak{u}$ . D'autre part, si  $N_G(\mathfrak{u})$  est infinitésimalement saturé soit  $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  un élément  $p$ -nilpotent. Pour tous  $y \in \mathfrak{u}$  et  $t \in \mathbb{G}_a$  nous avons :

$$\text{Ad}(\exp(tx))(y) = \left( \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(t \text{had}(x))^i}{i!} \right) (y) \in \mathfrak{u},$$

puisque  $N_G(\mathfrak{u})$  est infinitésimalement saturé. En particulier  $\text{had}(x)(y) \in \mathfrak{u}$  et  $\mathfrak{u}$  est faiblement  $\text{had}$ -saturé. Notons que le lemme 8.11 permet en particulier de conclure que si  $p > h(G)$  toute sous-algèbre  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$  est  $\text{had}$ -saturée.

### 8.4.3 Démonstrations des corollaires 4.3 et 4.4

Le corollaire 4.3 se déduit du théorème 4.2 grâce à la proposition suivante :

**Corollaire 8.20** (du lemme C.22). *Le corps algébriquement clos  $k$  est encore supposé de caractéristique  $p > \mathfrak{h}(G)$ . Soit  $H \subseteq G$  un sous-groupe infinitésimalement saturé. Les égalités suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} \mathrm{rad}_p(\mathfrak{h}) &= \{x \in \mathrm{rad}_p(\mathfrak{h}) \mid x \text{ est } p\text{-nilpotent}\} \\ &= \{x \in \mathrm{rad}_p(\mathrm{Lie}(H_{\mathrm{réd}})) \mid x \text{ est } p\text{-nilpotent}\} = \mathrm{rad}_p(\mathrm{Lie}(H_{\mathrm{réd}})) = \mathrm{rad}_{\mathfrak{u}}(H_{\mathrm{réd}}^0). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Puisque le groupe  $H$  est infinitésimalement saturé, d'après [2, Théorème 2.5] le radical unipotent de  $H_{\mathrm{réd}}^0$  est un sous-groupe distingué de  $H$  et le quotient  $H/H_{\mathrm{réd}}^0$  est un groupe de type multiplicatif. Les hypothèses du lemme C.22 sont donc vérifiées (notons que puisque  $p > \mathfrak{h}(G)$ , d'après la table 1 l'entier  $p$  est bien toujours supérieur ou égal à 3). Nous en déduisons les égalités désirées, en utilisant que  $\mathrm{Lie}(H_{\mathrm{réd}}^0) = \mathrm{Lie}(H_{\mathrm{réd}})$ .  $\square$

*Démonstration du corollaire 4.3.* Puisque  $p > \mathfrak{h}(G)$ , le normalisateur de  $\mathfrak{u}$  est infinitésimalement saturé d'après le lemme 8.11. Le corollaire 8.20 assure que  $\mathfrak{u}$ , qui est le  $p$ -radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ , est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  donnée par l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $\mathfrak{g}$ . Le théorème 4.2 s'applique.  $\square$

**Remarque 8.21.** Le corollaire 4.3 apparaît comme un corollaire du théorème 4.2 par le truchement de la proposition 8.20. Cette approche permet d'insister sur le fait que le  $p$ -radical d'une sous-algèbre de Lie qui dérive d'un  $k$ -groupe réductif au-dessus d'un corps de caractéristique  $p > 0$  est le bon analogue du nilradical d'une algèbre de Lie semi-simple en caractéristique nulle. Une preuve plus simple est néanmoins envisageable en utilisant l'existence de l'application exponentielle définie à la section 8.2 : par définition le  $p$ -radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est un  $p$ -idéal  $p$ -nil. D'après la proposition 8.3 l'idéal  $\mathfrak{u}$  s'intègre en un sous-groupe unipotent lisse et connexe  $U \subseteq G$ . Par construction  $U \leq N_G(U)_{\mathrm{réd}}^0$  et ce sous-groupe distingué est nécessairement contenu dans le radical unipotent de  $N_G(U)_{\mathrm{réd}}^0$ , noté  $V$ . L'inclusion est préservée en passant aux algèbres de Lie. Autrement dit nous avons  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{v}$ . Puisque d'après le lemme 8.12 le groupe  $N_G(U)$  est infinitésimalement saturé, les sous-groupes  $V$  et  $N_G(U)_{\mathrm{réd}}^0$  sont distingués dans  $N_G(U)$  (voir [2, Theorem 2.5]). Ainsi  $\mathfrak{v}$  est un idéal de  $\mathrm{Lie}(N_G(U))$ . Mais d'après le lemme 8.15 les normalisateurs  $N_G(U)$  et  $N_G(\mathfrak{u})$  sont égaux. Nous avons donc  $\mathrm{Lie}(N_G(U)) = \mathrm{Lie}(N_G(\mathfrak{u})) = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  (où la dernière égalité est assurée par le lemme C.7). L'algèbre de Lie de  $V$  est donc un  $p$ -idéal  $p$ -nil de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  d'après le lemme C.21, et l'algèbre de Lie  $\mathfrak{v}$  est donc nécessairement contenue dans le  $p$ -radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  qui est l'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}$  elle-même. Autrement dit nous avons démontré l'égalité  $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$  et donc l'égalité des sous-groupes lisses et connexes  $U$  et  $V$  (en appliquant [19, II, §5, 5.5]). Comme dans la preuve du théorème 4.2, le théorème de Veisfeiler–Borel–Tits (voir [6, Corollaire 3.2]) permet de conclure.

La démonstration du corollaire 4.4 est maintenant immédiate :

*Démonstration du corollaire 4.4.* Par noéthérianité de  $\mathfrak{g}$ , les suites  $(\mathfrak{u}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(\mathfrak{q}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de l'énoncé stabilisent pour un certain entier  $i$ . Notons  $\mathfrak{u}_{\infty}$ , respectivement  $\mathfrak{q}_{\infty}$ , les objets limites.

D'après le corollaire 8.20 puisque  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty})$  est infinitésimalement saturé d'après le lemme 8.11 l'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}_{\infty}$  s'identifie au  $p$ -radical de son normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty})$ . D'après le corollaire 4.4 ce normalisateur est une sous-algèbre de Lie parabolique de  $\mathfrak{g}$ . Le même énoncé assure qu'elle dérive du sous-groupe  $P(U_{\infty})$  obtenu en appliquant le théorème de Veisfeiler–Borel–Tits (voir [6, Corollaire 3.2]) au groupe  $U_{\infty}$  obtenu en intégrant  $\mathfrak{u}_{\infty}$  et qu'elle est également l'algèbre de Lie du sous-groupe parabolique optimal pour  $\mathfrak{u}$ , noté  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}_{\infty}})$ .  $\square$

#### 8.4.4 Démonstration du corollaire 4.6

Le corollaire 4.6 permet de faire le lien entre le théorème 4.2 et la section 9. Avant de définir le contexte de l'exemple d'application considéré (et donc de la proposition 4.7), commençons par démontrer ce résultat. Nous supposons ici que  $\mathfrak{g}$  admet une forme bilinéaire, symétrique non dégénérée et  $G$ -équivariante notée  $\kappa$ . Sous cette hypothèse  $\mathfrak{g}$  est semi-simple d'après [60, I, §8, Corollary].

*Démonstration.* Commençons par remarquer que  $\mathfrak{p} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{p}^{\perp})$  : soient  $x \in \mathfrak{p}$  et  $y \in \mathfrak{p}^{\perp}$ . Pour tout  $z \in \mathfrak{p}$ , nous avons :

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(y, [z, x]) = 0.$$

Autrement dit  $[x, y] \in \mathfrak{p}^{\perp}$  et  $\mathfrak{p}$  est une sous-algèbre de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{p}^{\perp})$ . Maintenant, puisque  $\mathfrak{p}^{\perp}$  est un idéal nilpotent de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{p}^{\perp})$  il est contenu dans le nilradical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{p}^{\perp})$ , qui est orthogonal à  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{p}^{\perp})$  d'après [10, §4, n°3, proposition 4d]. Autrement dit, puisque  $\kappa$  est non dégénérée, l'inclusion  $\mathfrak{p}^{\perp} \subseteq (N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{p}^{\perp}))^{\perp}$  est satisfaite, ce qui permet d'obtenir l'inclusion  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{p}^{\perp}) \subseteq \mathfrak{p}$  et donc l'égalité  $\mathfrak{p} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{p}^{\perp})$ .

D'après 4.3 et puisque par hypothèse que  $\mathfrak{p}^{\perp}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ , il suffit pour conclure de montrer que  $\mathfrak{p}^{\perp}$  est le  $p$ -radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{p}^{\perp})$ . C'est immédiat d'après la remarque C.27 et ce qui précède puisque par hypothèse  $\mathfrak{g}$  est semi-simple et que nous venons de montrer que  $\mathfrak{p}^{\perp} = \text{Nil}(\mathfrak{p})$ .  $\square$

## 9 Un exemple d'application : caractérisation du sous-groupe parabolique canonique d'un groupe réductif

### 9.1 Sous-groupe parabolique canonique

Dans la suite de cette section, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie des groupes réductifs au-dessus d'une base arbitraire, telle qu'elle est définie dans [22]. En particulier, un schéma en groupes  $G$  au-dessus d'une base  $S$  est réductif s'il est affine et lisse sur  $S$ , à fibres connexes et réductives (voir [22, XIX, Définition 2.7]). Pour une définition des sous-groupes de Borel dans ce cadre, voir en particulier [22, XXII Exemples 5.2.3.a)], et [22, XXVI Définition 1.1] en ce qui concerne les sous-groupes paraboliques. Pour les rappels sur le schéma des automorphismes d'un schéma en groupes voir [22, XXIV].

Soient  $k$  un corps et  $C$  une  $k$ -courbe projective, lisse, géométriquement connexe. Dans [4], K. A. Behrend définit la notion de sous-groupe parabolique canonique d'un  $C$ -groupe réductif (voir [4, Definition 5.6]). Il montre que tout groupe réductif  $G$  sur  $C$  admet un unique sous-groupe parabolique canonique, noté  $P_G^{\text{can}}$  : l'élément maximal (pour l'inclusion) de l'ensemble des sous-groupes paraboliques de  $G$  qui sont de degré le degré d'instabilité de  $G$  (voir theorem 7.3 et définition 4.4 ibid.). Pour rappel (voir définition 4.1 et note 4.2 ibid.), le degré d'un  $C$ -groupe lisse et connexe est le degré de son algèbre de Lie vue comme un fibré vectoriel sur  $C$ . Le degré d'un groupe réductif est ainsi toujours nul. Le sous-groupe parabolique défini par l'auteur généralise la définition de sous-groupe parabolique canonique d'un groupe réductif  $G$ , déjà introduite par M. Atiyah et R. Bott dans [1, §10] dans le cas particulier où  $k$  est de caractéristique nulle et  $G$  est un groupe réductif, forme tordue d'un groupe constant  $G_0$  au-dessus d'une  $k$ -courbe  $C$ . Notons  $U_G^{\text{can}} := \text{Rad}_U(P_G^{\text{can}})$ . Comme annoncé dans l'introduction, lorsque  $p > 2 \dim(G) - 2$  et  $G$  est une forme tordue d'un  $k$ -groupe réductif  $G_0$ , le théorème 4.2 permet de proposer une nouvelle preuve que la définition de M. Atiyah et R. Bott a encore un sens en caractéristique  $p > 0$  sous certaines restrictions sur  $\mathfrak{g}$ . Dans ce contexte, les sous-groupes paraboliques obtenus l'un par les travaux de K. A. Behrend dans [4, Theorem 7.3] (et qui existe toujours), l'autre par ceux de M. Atiyah et R. Bott dans [1, §10] (et qui existe dans ce cadre), coïncident. C'est l'objet de cette section.

Soit  $V$  un espace vectoriel sur une courbe  $C$ . Rappelons que la pente de  $V$ , notée  $\mu(V)$  est la quantité  $\deg(V)/\text{rang}(V)$  où  $\deg(V)$  et  $\text{rang}(V)$  désignent respectivement le degré et le rang du fibré vectoriel  $V$ . Soulignons en particulier que  $V$  est de pente positive (respectivement négative)

si et seulement si il est de degré positif (respectivement négatif). Tout fibré vectoriel sur une courbe admet une filtration de Harder–Narasimhan (voir [28, 1.3.9]), à savoir une filtration par des sous-fibrés vectoriels telle que les quotients successifs sont semi-stables et de pente strictement décroissante. Nous notons  $\mu_{\min}(V)$  (respectivement  $\mu_{\max}(V)$ ) le minimum (respectivement le maximum) des pentes des quotients successifs de cette filtration.

Dans la suite, le  $C$ -groupe réductif  $G$  est une forme tordue d'un  $C$ -groupe constant  $G_0$ . Pour simplifier les notations, notons  $P := P_G^{\text{can}}$  le sous-groupe parabolique canonique de  $G$ , soient  $I$  son type et  $P_0$  le sous-groupe parabolique de  $G_0$  dont  $P$  est une forme tordue. Le couple  $({}^E G_0, {}^{E_{P_0}} P_0)$  s'identifie naturellement avec le couple  $(G, P)$ , où  $E$  désigne le  $\text{Aut}(G_0, P_0)_k$ -torseur  $\text{Isom}((G_0, P_0), (G, P))$ , et  $E_{P_0}$  sa restriction à  $P_0$  (voir [22, exposé XXIV], notamment le corollaire 2.2). Cette restriction de structure est dite canonique (voir [4, §8] ainsi que le préambule et le lemme 4 de [29]). Le  $P_0/\text{Rad}_U(P_0)$ -torseur associé est semi-stable, c'est-à-dire que le groupe réductif  $P/\text{Rad}_U(P)$  qu'il définit est semi-stable (cela signifie que tout sous-groupe parabolique  $Q \subseteq P/U$  est de degré négatif ou nul, voir [4, Definition 4.4]).

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} := {}^E \mathfrak{g}_0$  est un fibré vectoriel sur  $C$ . Elle admet donc une filtration de Harder–Narasimhan :

$$0 \subsetneq E_{-r} \subsetneq E_{-r+1} \subsetneq \dots \subsetneq E_{-1} \subsetneq E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \dots \subsetneq E_l = \mathfrak{g},$$

où les indices sont choisis de telle sorte que  $\mu(E_i/E_{i-1}) \leq 0$  pour  $0 \leq i \leq l$  et  $\mu(E_{-i}/E_{-i-1}) > 0$  pour  $1 \leq i \leq r-1$ .

Le lemme suivant permet d'obtenir un premier élément de comparaison entre  $\mathfrak{p}_g^{\text{can}}$  et  $E_0$ . Sa démonstration requiert de comparer la semi-stabilité d'un  $H_0$ -torseur et celle du fibré vectoriel qu'il induit (pour  $H_0$  un  $C$ -groupe constant). C'est l'objet de [36, Theorem 3.1] lorsque  $H_0$  est semi-simple. Le cas général d'un groupe réductif lorsque la composante neutre du centre de  $H_0$  agit par homothétie est détaillé dans [5, proposition 6.9].

**Lemme 9.1.** *Lorsque  $p > 2h(G) - 2$  l'algèbre de Lie du sous-groupe parabolique au sens de K. A. Behrend vérifie l'inclusion  $\mathfrak{p}_g^{\text{can}} \subseteq E_0$ .*

*Démonstration.* Comme mentionné ci-avant, puisque  $P$  est le sous-groupe parabolique canonique de  $G = {}^E G_0$ , le  $P_0/\text{Rad}_U(P_0)$ -torseur induit par  $P_0$  est semi-stable. Rappelons (cela découle de la définition du nombre de Coxeter) que  $h(G_0) = h(G)$  et  $h(P_0) = h(P)$  (voir A et 5.2). Puisque sous l'hypothèse  $p > 2h(G) - 2$  la représentation adjointe  $\text{Ad} : P_0/\text{Rad}_U(P_0) \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{p}_o/\mathfrak{rad}_u(P_0))$  est de petite hauteur (voir la remarque 8.18), la proposition 6.9 de [5] s'applique, et le fibré vectoriel  $\mathfrak{p}_g^{\text{can}}/\mathfrak{rad}_u(P_G^{\text{can}})$  induit est semi-stable. Il est de degré 0 (car le quotient  $P/\text{Rad}_U(P)$  est réductif), donc  $\mu_{\min}(\mathfrak{p}_g^{\text{can}}) = 0$ . Puisque par construction  $\mu_{\max}(\mathfrak{g}/E_0) = \mu(E_1/E_0) < \mu(E_0/E_{-1}) \leq 0$ , le seul morphisme possible entre  $\mathfrak{p}_g^{\text{can}}$  et  $\mathfrak{g}/E_0$  est le morphisme trivial. Autrement dit,  $\mathfrak{p}_g^{\text{can}} \subseteq E_0$ .  $\square$

Tout l'enjeu de cette section est de déterminer certaines conditions pour lesquelles l'égalité  $E_0 = \mathfrak{p}_g^{\text{can}}$  est réalisée. Des hypothèses sur les pentes des quotients successifs des filtrations de Harder–Narasimhan de  $\mathfrak{rad}_u(P_G^{\text{can}})$  et  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_g^{\text{can}}$  permettent d'obtenir un premier critère :

**Proposition 9.2.** *Si  $p > 2h(G) - 2$ , si la filtration de Harder–Narasimhan de  $\mathfrak{u}_g^{\text{can}}$  admet des quotients successifs dont les pentes sont strictement positives, et si la filtration de Harder–Narasimhan de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_g^{\text{can}}$  admet des quotients successifs de pentes strictement négatives, alors  $E_0 = \mathfrak{p}_g^{\text{can}}$  et  $E_{-1} = \mathfrak{u}_g^{\text{can}}$ .*

*Démonstration.* Pour éviter de surcharger les notations, posons  $U := \text{Rad}_U(P_G^{\text{can}})$  et  $\mathfrak{u} := \mathfrak{u}_g^{\text{can}}$ .

Par construction,  $\mu_{\min}(\mathfrak{u}) > 0$ . Par ailleurs  $\mu_{\max}(\mathfrak{g}/E_{-1}) = \mu(E_0/E_{-1}) \leq 0$ . Le seul morphisme possible entre  $\mathfrak{u}$  et  $\mathfrak{g}/E_{-1}$  est donc le morphisme nul. Ainsi  $\mathfrak{u} \subseteq E_{-1}$ . Par hypothèse,  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$  admet une filtration par quotients semi-stables de pente strictement négative. Comme  $P$  est le sous-groupe parabolique canonique de  $G$ , pour les mêmes raisons que celles invoquées à la preuve du lemme 9.1, le quotient  $\mathfrak{p}/\mathfrak{u}$  est semi-stable et de pente nulle. Nous avons donc  $\mu_{\max}(\mathfrak{g}/\mathfrak{u}) = \mu(\mathfrak{p}/\mathfrak{u}) = 0$ . Puisque par construction  $\mu_{\min}(E_{-1}) = \mu(E_{-1}/E_{-2}) > \mu(E_{-1}/E_0) > 0$ ,

le seul morphisme possible entre  $E_{-1}$  et  $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$  est trivial, donc  $\mathfrak{u} = E_{-1}$ . En résumé  $E_{-2} \subsetneq E_{-1} = \mathfrak{u} \subsetneq \mathfrak{p} \subset E_0 \subsetneq E_1$  et il reste à montrer que  $\mathfrak{p} = E_0$ .

Par hypothèse, les pentes de la filtration de Harder-Narasimhan de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$  sont strictement négatives, donc  $\mu_{\max}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}) < 0$ . Puisque  $\mathfrak{u} = E_{-1}$  le quotient  $\mathfrak{p}/\mathfrak{u}$  est un sous-fibré de  $E_0/E_{-1}$ , qui est semi-stable. Autrement dit  $\mu(\mathfrak{p}/\mathfrak{u}) < \mu(E_0/E_{-1})$ . Le quotient  $\mathfrak{p}/\mathfrak{u}$  étant de degré nul, il est de pente nulle. Puisque par construction  $\mu(E_0/E_{-1}) \leq 0$ , nous obtenons  $\mu_{\min}(E_0) = \mu(E_0/E_{-1}) = 0$ . Le seul morphisme possible entre  $E_0$  et  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$  est donc le morphisme trivial, et  $E_0 = \mathfrak{p}$ . □

Lorsque  $\mathfrak{g}$  admet une forme bilinéaire, symétrique,  $G$ -équivariante non dégénérée  $\kappa$  alors :

**Lemme 9.3.** *Dans l'expression de la filtration de Harder-Narasimhan de  $\mathfrak{g}$  ci-dessus  $l = r + 1$  et  $E_{-i} \cong E_{i-1}^\perp$  pour tout  $1 \leq i \leq r$ .*

*Démonstration.* Si  $\kappa$  est non dégénérée alors  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^\vee$  et la filtration de Harder-Narasimhan de  $\mathfrak{g}^\vee$  est donnée par :

$$0 \subsetneq (E^\vee)_{-r} \subsetneq \dots \subsetneq (E^\vee)_{-1} \subsetneq (E^\vee)_0 \subsetneq (E^\vee)_1 \subsetneq \dots \subsetneq (E^\vee)_l = \mathfrak{g}^\vee,$$

où  $(E^\vee)_{-i} = (\mathfrak{g}/E_{i+l-r-1})^\vee$  si  $0 \leq i \leq r$ , et  $(E^\vee)_i = (\mathfrak{g}/E_{-i+l-r+1})^\vee$  si  $0 \leq i \leq l$ . En effet :

- le fibré  $(E^\vee)_{-r} = (\mathfrak{g}/E_{l-1})^\vee$  est semi-stable, puisque  $\mathfrak{g}/E_{l-1}$  l'est (c'est le premier quotient de la filtration de Harder-Narasimhan de  $\mathfrak{g}$ ),
- le quotient  $(E^\vee)_{-i}/(E^\vee)_{-i-1}$  est isomorphe à  $(E_{i+l-r}/E_{i+l-r-1})^\vee$  (lemme du serpent), et par conséquent  $(E^\vee)_{-i}/(E^\vee)_{-i-1}$  est semi-stable pour tout  $0 \leq i \leq r$ . Il en est de même pour  $(E^\vee)_i/(E^\vee)_{i-1} \cong (E_{-i+l-r+1}/E_{i+l-r})^\vee$ , pour tout  $0 \leq i \leq l$ ,
- les isomorphismes précédents nous garantissent les inégalités strictes désirées sur les pentes.

Les égalités  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^\vee$  et  $E_{-i} \cong (E^\vee)_{-i} = (E/E_{i-1})^\vee \cong E_{i-1}^\perp$  découlent de l'unicité de la filtration de Harder-Narasimhan. □

**Remarque 9.4.** Ce lemme permet de remarquer que sous les conditions de la proposition 4.7, les pentes de la filtration de Harder-Narasimhan de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_\mathfrak{g}^{\text{can}} = \mathfrak{g}/E_0$  sont strictement négatives et celles de la filtration de Harder-Narasimhan de  $\mathfrak{u}_\mathfrak{g}^{\text{can}}$  sont strictement positives. En d'autres termes les conditions de la proposition 4.7 impliquent celles de la proposition 9.2.

Comme annoncé dans l'introduction lorsque  $k$  est de caractéristique 0, l'égalité  $E_0 = P$  est établie dans [1, §10] et constitue en fait une définition du sous-groupe parabolique canonique, antérieure à celle de K. A. Behrend. En caractéristique  $p > 0$ , cette égalité est établie par V. B. Mehta dans [56, Theorem 2.6] lorsque  $p > 2 \dim(G)$  (voir aussi l'article de V. B. Mehta et S. Subramanian [55, Proposition 3.4] lorsque  $p > \max(2 \dim G, 4H(G))$ ), et par A. Langer dans [45, proposition 3.3] lorsque  $E$  admet la filtration de Harder-Narasimhan forte (voir [45, Definition 3.1]). Cette dernière condition est en particulier vérifiée si  $p > 3$  et la pente minimale du fibré tangent de  $X$  est strictement positive (voir [45, corollary 6.4] et [55, Theorem 4.1]). Le théorème 4.2 permet de démontrer l'égalité de la proposition 9.2 et d'en proposer une nouvelle preuve lorsque  $p > 2 \dim(G) - 2$ , en imitant celle déjà connue en caractéristique 0.

**Remarque 9.5.** Les résultats de l'article de V. Balaji, P. Deligne et A. J. Parameswaran [2] permettent déjà d'obtenir la proposition 9.2 lorsque  $G$  admet une représentation presque simple de petite hauteur et  $p > h(G)$ . Cela revient à imposer  $p > 2h(G) - 2$  si  $G$  simple et permet de démontrer [55, Proposition 3.4] sans l'hypothèse additionnelle  $p > 4H(G)$  (qui permettait aux auteurs d'utiliser un résultat de théorie des représentations dû à J-P. Serre pour se ramener au cas où  $G := \text{GL}_n$ ).

## 9.2 Démonstration de la proposition 4.7

Rappelons ici les notations de cette section : dans la suite, et sauf mention expresse du contraire  $k$  est un corps et  $C$  une  $k$ -courbe projective, lisse, géométriquement connexe, de corps des fonctions  $K$ . Nous notons  $\bar{K}$  sa clôture algébrique. Soit  $G$  un  $C$ -groupe réductif, tel que  $\mathfrak{g}$  est munie d'une forme de Killing non dégénérée, on suppose que  $G$  est une forme tordue d'un  $C$ -groupe constant  $G_0$ . Nous notons  $P$  le sous-groupe parabolique canonique de  $G$  au sens de Behrend (voir [4, Theorem 7.3]) et  $P_0$  le sous-groupe parabolique de  $G$  dont  $P$  est une forme tordue. Soient encore  $E$  le  $\text{Aut}(G_0, P_0)_C$ -torseur  $\text{Isom}((G_0, P_0), (G, P))$  et  $E_{P_0}$  sa restriction à  $P_0$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = {}^E\mathfrak{g}_0$  vue comme fibré vectoriel sur  $C$  admet une filtration de Harder–Narasimhan de la forme :

$$0 \subsetneq E_{-r} \subsetneq E_{-r+1} \subsetneq \dots \subsetneq E_{-1} \subsetneq E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \dots \subsetneq E_l = \mathfrak{g},$$

où les indices sont choisis tels que  $\mu(E_i/E_{i-1}) \leq 0$  pour  $0 \leq i \leq l$  et  $\mu(E_{-i}/E_{-i-1}) > 0$  pour  $1 \leq i \leq r-1$ . D'après le lemme 9.3, puisque sous nos hypothèses  $\mathfrak{g}$  est munie d'une forme de Killing non dégénérée les facteurs de la filtration vérifient  $E_{-i} \cong E_{i-1}^\perp$ .

La démonstration de la proposition 4.7 nécessite de montrer d'une part que le facteur  $E_0$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  et que le facteur  $E_{-1}$  est un idéal nilpotent de  $E_0$  (a priori il faudrait montrer que  $E_0$  est  $p$ -nil, mais l'hypothèse de l'existence d'une forme bilinéaire non dégénérée sur  $\mathfrak{g}$  fournit l'équivalence entre  $p$ -nilpotence et ad-nilpotence (voir la remarque C.27), d'autre part que  $E_0$  dérive d'un sous-groupe parabolique de  $G$ . La preuve du premier point repose sur des résultats de compatibilité entre produit tensoriel et semi-stabilité des facteurs du produit ; celle du deuxième point requiert l'utilisation du corollaire 4.6, qui permet d'obtenir que sur la fibre générique géométrique  $(E_0)_{\bar{K}}$  est une sous-algèbre parabolique.

### 9.2.1 Semi-stabilité des produits tensoriels

L'objet de ce paragraphe est de démontrer une partie du point 1. (à savoir de montrer que  $E_0$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  et  $E_{-1}$  est un idéal de cette sous-algèbre) et du point 3. de la proposition 4.7.

**Lemme 9.6.** *Sous l'hypothèse  $p > 2 \dim G - 2$ , les termes de la filtration de Harder–Narasimhan de  $\mathfrak{g}$  satisfont  $\mu_{\min}(E_i \otimes E_j) = \mu_{\min}(E_i) + \mu_{\min}(E_j)$  pour tous  $-r \leq i, j \leq l$ .*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe des résultats suivants :

1. si  $k$  est de caractéristique nulle, le produit tensoriel de fibrés vectoriel semi-stables  $V_1$  et  $V_2$  sur une courbe est encore semi-stable, de pente  $\mu(V_1) + \mu(V_2)$  (voir [1, lemma 10.1] mais également [48, theorem 6]), le résultat se généralise à  $k$  non algébriquement clos),
2. si  $V_1$  et  $V_2$  sont deux fibrés vectoriels semi-stables sur une courbe lisse sur un corps  $k$  de caractéristique  $p$ , et si  $p + 2 > \text{rang}(V_1) + \text{rang}(V_2)$  alors  $V_1 \otimes V_2$  est encore semi-stable, de pente  $\mu(V_1) + \mu(V_2)$  (voir [36, remark 3.4], et [48, theorem 8]).

□

Il s'agit d'utiliser le résultat précédent pour montrer que  $E_0$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . Considérons le crochet de Lie :

$$\phi : E_0 \otimes E_0 \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/E_0,$$

où nous avons identifié  $(\mathfrak{g}^\vee)^\vee \cong \mathfrak{g}$  car  $\kappa$  est non dégénérée.

Puisque d'après le lemme 9.3  $E_{-1} \cong E_0^\perp = (\mathfrak{g}/E_0)^\vee$  le degré de  $E_{-1}$  vérifie

$$\deg(E_{-1}) = -(\deg(\mathfrak{g}) - \deg(E_0)) = \deg(E_0),$$

où la dernière égalité vient de ce que  $\deg(\mathfrak{g}) = 0$ . Ainsi  $\mu_{\min}(E_0) = \mu(E_0/E_{-1}) = 0$ .

Par ailleurs, d'après le lemme 9.6,

$$\mu_{\min}(E_0 \otimes E_0) = \mu_{\min}(E_0) + \mu_{\min}(E_0) = 0,$$

et  $\mu_{\max}(\mathfrak{g}/E_0) = \mu(E_1/E_0) < \mu(E_0/E_{-1}) = 0$ . Ceci implique que l'application  $\phi$  est nécessairement le morphisme nul : le fibré vectoriel  $E_0$  est bien un fibré en algèbres de Lie.

Par ailleurs ce type de raisonnement permet de montrer que le facteur  $E_{-1}$  est un idéal nilpotent de  $\mathfrak{g}$ . Pour ce faire, considérons pour tout  $0 \leq j \leq r$  le crochet :

$$\phi : E_{-1} \otimes E_{-j} \rightarrow \mathfrak{g}/E_{-j-1},$$

avec la convention que  $E_{-r-1} = 0$ . Puisque par hypothèse  $p > 2 \dim G - 2$  nous avons

$$\begin{aligned} \mu_{\min}(E_{-1} \otimes E_{-j}) &= \mu_{\min}(E_{-1}) + \mu_{\min}(E_{-j}) \\ &= \mu(E_{-1}/E_{-2}) + \mu(E_{-j}/E_{-j-1}) \\ &> \mu(E_{-j}/E_{-j-1}) = \mu_{\max}(E_0/E_{-j-1}), \end{aligned}$$

car  $\mu(E_{-1}/E_{-2}) > \mu(E_0/E_{-1}) = 0$ . Par conséquent, l'application  $\phi$  est nécessairement le morphisme nul, ainsi  $[E_{-1}, E_{-j}] \subset E_{-j-1}$  pour tout  $0 \leq j$ , et  $E_{-1}$  est un idéal nilpotent de  $E_0$ .

Pour prouver 3., nous considérons une fois de plus le crochet de Lie suivant, pour tout  $0 \leq i \leq r$  :

$$E_{-i} \otimes E_0 \rightarrow E_0/E_{-i},$$

puisque

$$\begin{aligned} \mu_{\min}(E_0 \otimes E_{-i}) &= \mu_{\min}(E_0) + \mu_{\min}(E_{-i}) \\ &= \mu(E_0/E_{-1}) + \mu(E_{-i}/E_{-i-1}) \\ &> \mu_{\max}(E_0/E_{-i}) = \mu(E_{-i+1}/E_{-i}), \end{aligned}$$

car  $\mu(E_0/E_{-1}) = 0$  et  $\mu(E_{-i}/E_{-i-1}) > \mu(E_{-i+1}/E_{-i})$  par hypothèse. Par conséquent, l'application  $\phi$  est nécessairement le morphisme nul et  $E_{-i}$  est un idéal de  $E_0$ , nilpotent puisque  $E_{-1}$  l'est.

**Remarque 9.7.** Dans la preuve précédente il est crucial que

$$\mu_{\min}(E_0 \otimes E_0) = \mu_{\min}(E_0) + \mu_{\min}(E_0) = 0,$$

qui est une condition satisfaite dès lors que  $p > 2 \operatorname{rang} E_0 - 2$ . Cette condition, et de manière générale la semi-stabilité du produit tensoriel de deux fibrés semi-stables est assurée dans les articles de V. B. Mehta et S. Subramanian [55], et V. B. Mehta [56] par la condition  $p > 2 \dim(G)$ .

### 9.2.2 Conséquences du corollaire 4.6

Le corollaire 4.6 permet de démontrer que  $E_0$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ , c'est la deuxième partie du point 1. de la proposition 4.7 et d'en fournir une caractérisation en termes de sous-groupe parabolique d'instabilité de  $E_{-1}$  sur les fibres géométriques, c'est l'objet du point 2. du résultat susmentionné.

Puisque  $G$  est un groupe réductif, le crochet de Lie sur  $\mathfrak{g}_{\bar{K}}$  provient du crochet de Lie sur  $\mathfrak{g}$ . Rappelons que d'après le lemme 9.3, l'idéal  $E_{-1}$  est l'orthogonal de  $E_0$  pour la forme de Killing sur  $\mathfrak{g}$ . Nous avons donc :

$$(E_{-1})_{\bar{K}} := E_{-1} \times_C \operatorname{Spec}(\bar{K}) = (E_0^\perp)_{\bar{K}} = (E_0)_{\bar{K}}^\perp$$

est un idéal nil de  $(E_0)_{\bar{K}}$ . D'après le corollaire 4.6, la sous-algèbre  $(E_0)_{\bar{K}} \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{K}}$  est donc une sous-algèbre de Lie parabolique de  $\mathfrak{g}_{\bar{K}}$ . Elle dérive d'un sous-groupe parabolique  $\tilde{Q}$  de  $G_{\bar{K}}$ . D'après [22, XXII, Corollaire 5.3.4] nous avons  $\tilde{Q} = N_{G_{\bar{K}}}((E_0)_{\bar{K}})^0$  puisque  $G_{\bar{K}}$  est de type  $(RA)$

(puisque  $p > 2 \dim(G) - 2 \geq 2h - 2$  ce qui assure que  $G \rightarrow G^{\text{Ad}}$  est séparable). Cela implique notamment la lissité du normalisateur considéré.

Ce sous-groupe parabolique est en fait défini sur  $K$ . En effet, puisque  $E_0$  est définie sur  $C$ , donc sur  $K$ , nous pouvons considérer le normalisateur  $N_{G_K}((E_0)_K)$  (qui est représentable d'après [19, II, §1 n°3 Théorème 3.6 b])). D'après [19, II, §1 n°3] nous avons  $N_{G_{\bar{K}}}((E_0)_{\bar{K}})^0 = N_{G_K}((E_0)_K)^0 \times_K \bar{K}$ . Puisqu'en particulier  $N_{G_{\bar{K}}}((E_0)_{\bar{K}})^0$  est lisse, la situation est compatible au changement de base :

$$(E_0)_K \times_K \bar{K} = (E_0)_{\bar{K}} = \text{Lie}(\tilde{Q}) = \text{Lie}(N_{G_{\bar{K}}}((E_0)_{\bar{K}})^0) = \text{Lie}(N_{G_K}((E_0)_K)^0) \times_K \bar{K}.$$

Autrement dit  $(E_0)_K$  est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe lisse de  $G_K$  à fibre géométrique parabolique, donc d'un sous-groupe parabolique (par définition, voir [22, XXVI, Définition 1.1]).

Ce dernier s'étend de manière unique à un sous-groupe parabolique  $Q \subseteq G$  sur  $C$  (par projectivité du schéma des sous-groupes paraboliques de  $G$ , voir [22, exposé XXVI, corollaire 3.5]). Il s'agit de montrer que  $\text{Lie}(Q) = E_0$ . Rappelons que deux sous- $\mathcal{O}_C$ -modules de  $\mathfrak{g} = E_l = E_{r-1}$  localement facteurs directs, sont égaux s'ils coïncident génériquement. Cela permet de conclure : la projectivité du  $S$ -schéma  $\text{Grass}_S(n, E_0)$  assurée par exemple par [42, Définition 1.7.1 et Remarks 1.7.5] fournit en effet l'égalité générique escomptée :

$$\text{Grass}_S(n, E_0)(C) = \text{Grass}_S(n, E_0)(K) = \{\text{sous-fibrés vectoriels de rang } n \text{ de } E_0 \times_C K\}.$$

Notons au passage que  $\text{Grass}_S(n, E_0)$  est bien défini puisque  $E_0$  est localement facteur direct, comme tous les termes qui apparaissent dans la filtration de Harder–Narasimhan.

Par hypothèse (voir également [9, Planches]) la caractéristique de  $k$  est telle que  $p > 2 \dim(G) > 2(h(G) - 1)$ . D'après le lemme 9.1 nous avons  $\mathfrak{p} \subseteq E_0 = \mathfrak{q}$  et  $E_{-1} = \mathfrak{rad}_u(Q)$ , ce qui permet de déduire la suite d'inclusions  $E_{-1} \subseteq \mathfrak{rad}_u(P) \subseteq \mathfrak{p} \subseteq E_0$ . Le quotient  $E_0/E_{-1}$  étant semi-stable  $\mu(\mathfrak{p}/E_{-1}) < \mu(E_0/E_{-1}) = \mu(\mathfrak{q}/\mathfrak{rad}_u(Q)) = 0$ , donc  $\deg(\mathfrak{p}) \leq \deg(E_{-1}) = \deg(\mathfrak{q})$ . Puisque  $P$  est le sous-groupe parabolique canonique de  $G$ , il est maximal parmi les sous-groupes paraboliques de degré maximal de  $G$  (voir [4, Theorem 7.3]), donc  $P = Q$ , ce qui se traduit par une égalité des algèbres de Lie  $E_0 = \mathfrak{p}$  et  $E_{-1} = \mathfrak{u}$ . Ceci achève la démonstration du point 1. Enfin, d'après le corollaire 4.6, sur la fibre générique géométrique nous avons  $Q_{\bar{K}} = \tilde{Q} = P_{G_{\bar{K}}}(\lambda_{\mathfrak{p}_{\bar{K}}^\perp})$ . Ceci achève la démonstration du point 2. de la proposition 4.7.

**Remarque 9.8.** Si  $G$  est déployé sur  $X$ , soit  $T \subseteq G$  un tore maximal de  $G$ , il fournit par changement de base  $T_{\bar{K}} \subset G_{\bar{K}}$  un sous-tore maximal contenu dans  $\tilde{Q}$ . D'après [22, XXV, corollaire 1.3] il existe un triplet  $(T_{\mathbb{Z}}, Q_{\mathbb{Z}}, G_{\mathbb{Z}})$  qui redonne le triplet  $(T_{\bar{K}}, Q_{\bar{K}} = \tilde{Q}, G_{\bar{K}})$  après changement de base. Pour tout groupe de type multiplicatif  $H$  notons  $X^*(H)$  le groupe des cocaractères de  $H$ .

Soit  $\beta \in \mathbb{Q}_{>0} \lambda_{\mathfrak{p}_{\bar{K}}^\perp} \cap X^*(T_{\mathbb{Z}})$  le cocaractère indivisible de l'intersection. Il définit un sous-groupe parabolique  $P_{G_{\mathbb{Z}}}(\beta)$  tel que  $Q = P_G(\beta)$  et  $(P_G(\beta))_{\bar{K}} = P_{G_{\bar{K}}}(\lambda_{\mathfrak{p}_{\bar{K}}^\perp})$ . Si  $G$  n'est pas déployé, le même raisonnement reste valide localement, puisque  $G$  est la forme tordue d'un groupe constant (il est donc épinglable).

### Troisième partie

## Analogie du théorème de Morozov en caractéristique $p < h(G)$

### 10 Introduction

Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif. Dans cette section, nous proposons de démontrer un analogue du théorème de Morozov en caractéristique  $p > 0$  séparablement bonne pour le groupe  $G$  (voir l'annexe A), ce qui est une

condition bien plus faible que celle du chapitre précédent. Plus précisément nous proposons de montrer :

**Théorème 10.1** (Analogie du théorème de Morozov lorsque  $p$  est séparablement bon). *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif tels que  $p$  est séparablement bon pour  $G$ . Notons  $\phi : \mathcal{N}_{\text{red}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\text{red}}(G)$  un isomorphisme de Springer pour  $G$ . Si  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{u}$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  et si  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est  $\phi$ -infinitésimalement saturé (voir la définition 11.1) alors :*

1. *le normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ ,*
2. *cette sous-algèbre parabolique vérifie les égalités suivantes  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(J_{\mathfrak{u}}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}})$  où  $J_{\mathfrak{u}} \subset G$  est un sous-groupe unipotent, lisse, connexe tel que  $\text{Lie}(J_{\mathfrak{u}}) = \mathfrak{u}$ , un tel sous-groupe existe d'après le lemme 12.2.*

Les résultats proposés dans ce chapitre requièrent d'imposer une condition additionnelle sur le normalisateur de  $\mathfrak{u}$  dans  $G$  pour compenser l'absence d'une intégration systématique de toute  $p$ -sous-algèbre  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$  et a fortiori d'une intégration systématique qui serait compatible à la représentation adjointe.

Le théorème 10.1 peut être reformulé à l'aide du  $p$ -radical du normalisateur considéré :

**Corollaire 10.2.** *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif tels que  $p$  soit séparablement bon pour  $G$  (voir l'annexe A). Soit  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie telle que  $\mathfrak{u} = \text{rad}_p(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}))$ . Supposons de plus que le sous-groupe  $N_G(\mathfrak{u}) \subseteq G$  soit  $\phi$ -infinitésimalement saturé (voir la définition 11.1). Alors  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est la sous-algèbre de Lie obtenue au théorème 10.1.*

Notons enfin que le théorème 10.1 est (comme lorsque  $p > h(G)$ ) le cas particulier du corollaire suivant pour lequel la tour de normalisateurs stabilise immédiatement.

**Corollaire 10.3.** *Sous les hypothèses du théorème 4.2, soit  $\mathfrak{u}$  une sous-algèbre  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$ . Considérons la tour des normalisateurs associée à  $\mathfrak{u}$  comme dans le chapitre précédent : posons  $\mathfrak{u}_0 := \mathfrak{u}$  et  $\mathfrak{q}_1 := N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_0)$ . Le sous-espace  $\mathfrak{u}_1$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $\mathfrak{q}_0$ , l'algèbre de Lie  $\mathfrak{q}_2$  est le normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_1)$ , et ainsi de suite : soient  $\mathfrak{u}_i$  l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{i-1})$  et  $\mathfrak{q}_{i+1} := N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_i)$ . Notons  $\mathfrak{q}_{\infty}$  l'objet limite de la tour des normalisateurs, et  $\mathfrak{u}_{\infty}$  l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty})$ . Supposons que ce normalisateur "limite"  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty})$  soit  $\phi$ -infinitésimalement saturé (voir la définition 11.1). Alors :*

1. *la tour de normalisateurs de  $\mathfrak{u}$  converge vers une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ , notée  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty})$ ,*
2. *cet objet limite vérifie  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}_{\infty}}) = \text{Lie}(N_G(J_{\mathfrak{u}_{\infty}}))$  où le sous groupe  $N_G(J_{\mathfrak{u}_{\infty}})$  est l'objet limite de la tour des normalisateurs lisses associée à  $V = \text{Rad}_U(N_G(\mathfrak{u})_{\text{red}}^0)$ .*

Les démonstrations de ces résultats reproduisent et adaptent les arguments développés dans le chapitre précédent (dans lequel nous supposons  $p > h(G)$ ). L'obtention d'un tel énoncé pré-suppose l'existence d'un sous-groupe unipotent lisse et connexe de  $G$  qui intègre  $\mathfrak{u}$ . La difficulté première réside donc ici en l'absence, pour tous sous-groupe de Borel  $B \subseteq G$  d'une structure de groupe algébrique adaptée et qui fournisse un isomorphisme de groupes  $\phi_{\mathfrak{b}}$  qui permettent d'intégrer toute sous-algèbre  $p$ -nil  $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}$  en un sous-groupe unipotent lisse et connexe  $V \subset G$ . En effet, sous les hypothèses d'une caractéristique séparablement bonne pour  $G$  un morphisme de Springer (non nécessairement unique) entre les variétés réduites  $\phi : \mathcal{N}_{\text{red}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\text{red}}(G)$  existe toujours (voir par exemple [64, theorem 1.1] lorsque  $G$  est simple, le passage à un groupe réductif arbitraire ne pose pas de difficulté, en reprenant par exemple les arguments de la preuve de [31, Corollaire 5.5], qui justifient qu'une telle construction est stable par isogénie séparable) et permet de relever ponctuellement les éléments de  $\mathfrak{g}$ . Malheureusement la loi de Baker–Campbell–Hausdorff (ou son analogue pour le morphisme  $\phi$  considéré) qu'il permet de définir formellement

n'est plus définie sur  $\mathbb{Z}_{(p)}$  pour  $p < h(G)$ . Il n'est donc plus possible d'utiliser ce procédé pour munir l'algèbre de Lie du radical unipotent d'un sous-groupe de Borel de  $G$  d'une structure de groupe algébrique isomorphe à  $\text{Rad}_U(B)$ , ce qui est une condition sine qua non à l'intégration systématique des sous-algèbres de Lie  $p$ -nil lorsque  $p > h(G)$  et permet notamment de garantir une compatibilité entre l'intégration des  $p$ -sous-algèbres  $p$ -nil en  $k$ -groupes algébriques unipotents et celle, ponctuelle, de leurs éléments (voir la section 8.3 du chapitre précédent). Un contre-exemple à l'existence systématique d'une intégration plongée lorsque  $p < h(G)$  est présentée à l'annexe E (voir en particulier l'exemple E.3).

Lorsque  $p > h(G)$ , soit  $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}$  une  $p$ -sous-algèbre  $p$ -nil. Le point 2. de la remarque 8.4 permet de décrire le sous-groupe  $V \subseteq G$  qui l'intègre comme le sous-groupe de  $G$  engendré par le morphisme

$$\begin{aligned} \psi_{\mathfrak{v}} : W(\mathfrak{v}) \times \mathbb{G}_a &\rightarrow G \\ (x, t) &\mapsto \exp(tx) =: \exp_x(t). \end{aligned}$$

pour la topologie fppf (voir [20, VIB, proposition 7.1 et remarque 7.6.1]). Cette description fait directement intervenir la  $t$ -puissance pour  $\mathfrak{g}$ , qui est le morphisme de groupes dépendant d'un paramètre et défini grâce à l'exponentielle tronquée pour tout élément  $p$ -nilpotent  $x \in \mathfrak{g}$  :

$$\begin{aligned} \exp_x(\cdot) : \mathbb{G}_a &\rightarrow G \\ t &\mapsto \exp(tx). \end{aligned}$$

Lorsque  $p$  est séparablement bon pour  $G$ , bien que  $\text{rad}_u(B)$  ne puisse plus être muni d'une structure de  $k$ -groupe algébrique à l'aide de la loi de Baker–Campbell–Hausdorff, il existe encore des isomorphismes de Springer  $\phi : \mathcal{N}_{\text{red}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\text{red}}(G)$ , qui permettent de définir une  $t$ -puissance (il suffit de remplacer l'exponentielle tronquée par un isomorphisme de Springer arbitraire ici) et d'obtenir un candidat à l'intégration des  $p$ -sous-algèbres  $p$ -nil, à savoir le sous-groupe de  $J_{\mathfrak{v}} \subset G$  engendré par le morphisme

$$\begin{aligned} \psi_{\mathfrak{v}} : W(\mathfrak{v}) \times \mathbb{G}_a &\rightarrow G \\ (x, a) &\mapsto \phi_x(a), \end{aligned}$$

pour la topologie fppf, où  $\phi : \mathcal{N}_{\text{red}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\text{red}}(G)$  est un isomorphisme de Springer, et  $\phi_x : \mathbb{G}_a \rightarrow G$  est la  $t$ -puissance induite par  $\phi$ . Le sous-groupe  $J_{\mathfrak{v}}$  ainsi obtenu est a priori trop grossier. En général l'algèbre de Lie de départ est seulement contenue dans l'algèbre de Lie du groupe intégré, il n'y a a priori pas égalité. En particulier le procédé utilisé pour obtenir un sous-groupe  $J_{\mathfrak{v}}$  à partir d'une sous-algèbre  $p$ -nil  $\mathfrak{v}$  ne requiert aucune hypothèse additionnelle sur l'existence d'une  $p$ -structure éventuelle sur  $\mathfrak{u}$ , toutefois l'algèbre de Lie du groupe algébrique  $J_{\mathfrak{v}}$  ainsi obtenue est une  $p$ -algèbre, puisqu'elle dérive d'un  $k$ -groupe algébrique qui contient  $\mathfrak{v}$  (en vertu de [19, II, §7, n°3, Proposition 3.4]).

Notons ici que les hypothèses de maximalité sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}$  du théorème 10.1 et du corollaire 10.2 permettent tout de même de garantir l'égalité  $J_{\mathfrak{u}} = \mathfrak{u}$  (et par là-même que  $\mathfrak{u}$  est intégrable), c'est l'objet des lemmes 12.2 et 12.4. Soulignons que le premier lemme ainsi que le cas particulier du second lemme pour lequel  $\mathfrak{u} = \mathfrak{h}$ , ne requièrent pas que le normalisateur de  $\mathfrak{u}$  soit  $\phi$ -infinitésimalement saturé. Remarquons enfin que l'existence d'une telle intégration est une condition nécessaire pour que l'énoncé du théorème 10.1 (respectivement des corollaires 10.2 et 10.3) soit vérifié : si  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe parabolique, d'après la remarque C.23 l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents de son radical est l'algèbre de Lie du radical unipotent du sous-groupe parabolique dont il dérive, c'est donc a fortiori une  $p$ -sous-algèbre intégrable de  $\mathfrak{g}$ .

Comme mentionné dans l'introduction du chapitre précédent, un deuxième écueil de la caractéristique positive réside en l'absence de lissité a priori des normalisateurs. Sous l'hypothèse  $p > h(G)$ , P. Deligne introduit la notion de saturation infinitésimale (voir la définition 8.9) et

établit un théorème (démontré dans [18, Theorem 1.7] pour un sous-groupe infinitésimalement saturé de  $\mathrm{GL}_n$ , puis étendu par V. Balaji, P. Deligne et A. J. Parameswaran dans [2, Theorem 2.5] au cas d'un sous-groupe infinitésimalement saturé d'un groupe réductif arbitraire en caractéristique  $p > \mathfrak{h}(G)$ ) qui permet d'évaluer le défaut de lissité des sous-groupes infinitésimalement saturés. Ce résultat apporte une réponse au problème soulevé ici lorsque  $p > \mathfrak{h}(G)$ , puisqu'alors le normalisateur de toute algèbre de Lie  $p$ -nil est infinitésimalement saturé (voir le lemme 8.11). Pour le montrer nous avons utilisé un théorème de structure pour les groupes unipotents, ce qui était possible dans ce contexte car toute sous-algèbre de Lie  $p$ -nil  $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}$  est intégrable en un sous-groupe unipotent lisse et connexe  $V \subset G$  tel que  $\mathrm{Lie}(V) = \mathfrak{v}$ .

Comme mentionné ci-dessus, l'existence d'isomorphismes de Springer fournit une adaptation naturelle de la notion de saturation infinitésimale au cadre des caractéristiques séparablement bonnes et permet d'obtenir une généralisation du résultat de P. Deligne. C'est l'objet de la section 11, dans laquelle nous démontrons le théorème suivant, qui fournit la généralisation requise ainsi que sa version infinitésimale (voir la proposition 11.10) :

**Théorème 10.4.** *Supposons que  $p$  est séparablement bon pour  $G$ . Soit  $\phi : \mathcal{N}_{\mathrm{réd}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{réd}}(G)$  un isomorphisme de Springer pour  $G$  et  $N \subseteq G$  un sous-groupe  $\phi$ -infinitésimalement saturé. Alors  $N_{\mathrm{réd}}^0$  et  $\mathrm{Rad}_U(N_{\mathrm{réd}}^0)$  sont des sous-groupes distingués de  $N$ . En outre, le quotient  $N/N_{\mathrm{réd}}^0$  est un  $k$ -groupe de type multiplicatif.*

La difficulté soulevée en début de paragraphe n'est toutefois que partiellement résolue ici : l'absence d'une intégration systématique des sous-algèbres de Lie  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$  pour des caractéristiques strictement inférieures à  $\mathfrak{h}(G)$  ne permet plus de recourir à l'argument structurel utilisé dans la démonstration du lemme 8.11. C'est ce qui justifie l'hypothèse additionnelle de l'énoncé du théorème 10.1 en comparaison avec l'énoncé pour  $p > \mathfrak{h}(G)$ . Soulignons enfin que la  $\phi$ -saturation infinitésimale de ce normalisateur est une condition nécessaire à la parabolicité de ce dernier, nous montrons en effet au lemme 11.3 que tout sous-groupe parabolique de  $G$  est  $\phi$ -infinitésimalement saturé.

## 11 $\phi$ -saturation infinitésimale, démonstration du théorème 10.4

Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $N$  un sous-groupe d'un  $k$ -groupe réductif  $G$  (en particulier  $G$  est connexe et  $G$  et  $N$  sont de présentation finie). Dans le cas particulier où  $G = \mathrm{GL}(V)$  et  $V = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} V_i$  est une somme directe finie de représentations fidèles de  $G$  de dimension strictement inférieure à  $p$ , P. Deligne démontre au [18, théorème 1.7] que si  $N$  est un sous-groupe infinitésimalement saturé de  $G$  alors les sous-groupes réduits connexes  $N_{\mathrm{réd}}^0$  et  $\mathrm{Rad}_U(N_{\mathrm{réd}}^0)$  sont des sous-schémas en groupes invariants de  $N$ . Notons que sous de telles hypothèses l'exponentielle tronquée définie à la section 8.3 existe toujours sur chaque  $\mathrm{GL}(V_i)$  et la notion de saturation infinitésimale a encore un sens. Dans [2, theorem 2.5] V. Balaji, P. Deligne et A. J. Parameswaran montrent que ce théorème reste valide dans le cas plus général où  $G$  est un groupe réductif tel que le revêtement simplement connexe  $\tilde{G}$  du groupe dérivé  $[G, G]$  définit un morphisme étale  $\tilde{G} \rightarrow [G, G]$  et  $p \geq \mathfrak{h}(G)$ . Lorsque  $G$  est groupe réductif arbitraire et  $p$  est séparablement bon pour  $G$  l'existence d'isomorphismes de Springer pour  $G$  permet d'obtenir un analogue de ce résultat, à savoir le théorème 10.4. Le travail est essentiellement technique : il s'agit de décrire  $N$  comme le sous-groupe engendré par  $N_{\mathrm{réd}}$  et  $H$  pour la topologie fppf. Pour ce faire les démonstrations de [18, théorème 1.7] et [2, theorem 2.5] utilisent la saturation infinitésimale du sous-groupe  $N$  et considèrent un morphisme auxiliaire, étale en l'origine, qui relève chaque espace de poids non nuls dans la décomposition de  $\mathrm{Lie}(N)$  pour l'action d'un sous-groupe  $H \subseteq N$  connexe de type multiplicatif maximal. Le morphisme en question est construit à partir de la  $t$ -puissance associée à l'exponentielle tronquée à l'ordre  $p$  (puisque alors tous les éléments  $p$ -nilpotents considérés sont d'ordre de  $p$ -nilpotence égal à 1). Lorsque nous abaissons les hypothèses sur la caractéristique, bien qu'une généralisation de la  $t$ -puissance existe, il n'est a priori plus possible d'y recourir pour relever les espaces de poids non nuls apparaissant dans la décomposition de  $\mathrm{Lie}(N)$  susmentionnée, ces derniers n'étant plus

nécessairement uniquement composés d'éléments  $p$ -nilpotents. À titre illustratif, signalons que dans [2, exemple 3.6] les auteurs mentionnent un exemple de B. Conrad qui étudie l'action du groupe connexe de type multiplicatif  $\mu_p^2$  sur  $\mathrm{SL}_p$  au-dessus d'un corps  $k$  de caractéristique  $p > 0$ . Tous les espaces de poids pour cette action ne sont pas nil. Notons enfin que cet exemple permet entre autres de justifier, à l'aide de [2, Exemple 3.7], l'exclusion du cas où le groupe dérivé n'est pas simplement connexe. Tout l'enjeu de cette section est de montrer qu'il est possible de se passer du morphisme étale auxiliaire mentionné ci-avant.

### 11.1 $\phi$ -saturation infinitésimale

Dans ce paragraphe  $G$  désigne un groupe réductif au-dessus d'un corps algébriquement clos  $k$  de caractéristique  $p > 0$  séparablement bonne pour  $G$ . Rappelons qu'un isomorphisme de Springer est la donnée d'un isomorphisme  $G$ -équivariant de  $k$ -variétés réduites  $\phi : \mathcal{N}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{red}}(G)$ .

Lorsque  $G$  est simple, P. Sobaje mentionne dans [64, Theorem 1.1 and Remark 2] que tout isomorphisme de Springer  $\phi : \mathcal{N}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{red}}(G)$  se restreint en un isomorphisme de variétés réduites  $\mathrm{rad}_{\mathfrak{u}}(B) \rightarrow \mathrm{Rad}_U(B)$  et précise que la dérivée de cette restriction en 0 est un multiple scalaire non nul de l'identité (indépendant du choix du sous-groupe de Borel considéré). L'auteur attribue ce résultat à G. McNinch et D. Testerman, voir [54, Theorem E]. Il se généralise au cas d'un  $k$ -groupe algébrique arbitraire lorsque  $p$  est séparablement bon. Cela vient de ce que les propriétés mentionnées ici sont stables par passage à des isogénies séparables d'après la preuve de [31, corollary 5.5] et [53, proposition 9] (ceci permet d'assurer le passage au cas semi-simple). Le cas réductif arbitraire s'en déduit directement puisque les isomorphismes de Springer "ne voient pas le centre" (d'après le lemme C.14 et la remarque C.4 le radical de l'algèbre de Lie de  $G$  est l'algèbre de Lie de son centre, elle est donc torale et ne saurait contenir d'éléments  $p$ -nilpotents).

Dans la suite, et sans perte de généralité, l'isomorphisme de Springer  $\phi$  considéré est tel que la restriction de  $\phi$  à l'algèbre de Lie du radical unipotent de tout sous-groupe de Borel  $B \subseteq G$  a une dérivée en 0 égale à l'identité.

Soit  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une  $p$ -sous-algèbre  $p$ -nil. Considérons le morphisme induit par la  $t$ -puissance :

$$\begin{aligned} \psi_{\mathfrak{u}} : W(\mathfrak{u}) \times \mathbb{G}_a &\rightarrow G \\ (x, a) &\mapsto \phi_x(a), \end{aligned}$$

où nous avons repris les notations de [20, I.4.6], voir également [20, II, lemme 4.11.7]. Notons  $J_{\mathfrak{u}}$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $\psi_{\mathfrak{u}}$  comme faisceau fppf (voir [20, VIB proposition 7.1 et remarque 7.6.1]). C'est un sous-groupe unipotent puisque  $\phi : \mathcal{N}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{red}}(G)$  ; connexe, d'après [20, VIB Corollaire 7.2.1] puisque  $W(\mathfrak{u})$  est géométriquement réduit et géométriquement connexe ; et réduit (donc lisse, rappelons que  $k$  est algébriquement clos), puisque c'est l'image d'un groupe lisse (donc réduit). Il s'agit maintenant de comparer  $\mathfrak{u}$  et l'algèbre de Lie de  $J_{\mathfrak{u}}$ , notée  $\mathfrak{j}_{\mathfrak{u}}$ .

L'existence d'isomorphismes de Springer pour  $G$  permet d'étendre la notion de saturation infinitésimale introduite par P. Deligne dans [18, Définition 1.5 (ii)] au contexte des caractéristiques séparablement bonnes :

**Définition 11.1.** Soit  $\phi : \mathcal{N}_{\mathrm{red}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{red}}(G)$  un isomorphisme de Springer pour  $G$ . Un sous-schéma en groupes  $G' \subseteq G$  est  $\phi$ -infinitésimalement saturé si pour tout élément  $p$ -nilpotent  $x \in \mathfrak{g}'$  le morphisme :

$$\begin{aligned} \phi_x : \mathbb{G}_a &\rightarrow G, \\ t &\mapsto \phi(tx), \end{aligned}$$

également appelé  $t$ -puissance, factorise par  $G'$ . Autrement dit nous sommes dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{G}_a & \xrightarrow{\phi_x} & G, \\
\exists \downarrow & \nearrow & \\
G' & & 
\end{array}$$

**Remarque 11.2.** Lorsque  $p > h(G)$  J-P. Serre démontre dans [61, Part 2, Lecture 2, Theorem 1.3] qu'il existe un unique isomorphisme de Springer pour  $G$ , à savoir l'exponentielle classique issue de la caractéristique 0 et tronquée à l'ordre  $p$  (puisque sous l'hypothèse  $p > h(G)$  tout élément  $p$ -nilpotent de  $\mathfrak{g}$  vérifie  $x^{[p]} = 0$ ). Dans ce contexte la notion de  $\phi$ -saturation infinitésimale est celle de exp-saturation infinitésimale, donc de saturation infinitésimale telle qu'introduite par P. Deligne dans [18, Définition 1.5]).

Une fois de plus, maintenant que nous avons adapté le cadre, tout se passe comme en caractéristique  $p > h(G)$ , en particulier nous avons un exemple tout trouvé de sous-groupes non triviaux de  $G$  qui sont  $\phi$ -infinitésimalement saturés, à savoir, les sous-groupes paraboliques :

**Lemme 11.3.** *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif. Supposons que  $p$  soit séparablement bon pour  $G$  et notons  $\phi : \mathcal{N}_{\text{red}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\text{red}}(G)$  un isomorphisme de Springer sur  $G$ . Alors tout sous-groupe parabolique de  $G$  est  $\phi$ -infinitésimalement saturé.*

*Démonstration.* La démonstration est exactement la même que celle du lemme 8.10, il suffit de remplacer l'exponentielle par le morphisme de Springer  $\phi$ , puisque dans la preuve susmentionnée tout découle de la  $G$ -équivariance de l'exponentielle (qui est l'unique isomorphisme de Springer pour  $G$  lorsque  $p > h(G)$ ) sur les points. Les arguments s'adaptent sans difficulté.  $\square$

Nous sommes à présent en mesure de prouver le lemme suivant, qui indique que le sous-groupe engendré  $J_{\mathfrak{u}}$  semble être un bon candidat à l'intégration de  $\mathfrak{u}$ .

**Lemme 11.4.** *Soit  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une  $p$ -sous-algèbre  $p$ -nil. Le sous-groupe engendré  $J_{\mathfrak{u}}$  est unipotent et nous avons :*

$$\mathfrak{u} \subseteq \text{Lie}(J_{\mathfrak{u}}) = \mathfrak{j}_{\mathfrak{u}}.$$

*Démonstration.* Puisque  $\mathfrak{u}$  est une  $p$ -sous-algèbre de Lie  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$  et comme  $p$  est séparablement bon pour  $G$  (donc en particulier n'est pas de torsion), le corollaire A.1 s'applique et permet de plonger  $\mathfrak{u}$  dans l'algèbre de Lie du radical unipotent d'un sous-groupe de Borel  $B \subset G$ . Le sous-groupe obtenu  $J_{\mathfrak{u}}$  est donc  $k$ -plongeable dans le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel (puisque  $B$  est  $\phi$ -infinitésimalement saturé en vertu du lemme 11.3). Autrement dit  $J_{\mathfrak{u}}$  est unipotent (voir par exemple [19, IV, §2, n°2, proposition 2.5 (vi)]).

Notons encore  $\phi$  la restriction de l'isomorphisme de Springer à  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$ , et rappelons que  $(d\phi)_0 = \text{id}$  par convention. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{j}_{\mathfrak{u}}$  est engendrée par les dérivées en 0 des applications  $\phi_x$  pour tout  $x \in \mathfrak{u}$ . Puisque  $\mathfrak{u}$  est une  $p$ -algèbre restreinte, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}$  contient  $x$  et toutes ses  $p$ -puissances pour tout  $x \in \mathfrak{u}$ , d'où l'inclusion désirée.  $\square$

Le sous-groupe  $J_{\mathfrak{u}}$  semble donc être un candidat naturel à l'intégration de  $\mathfrak{u}$ . Nous verrons à la section 12 que lorsque  $\mathfrak{u}$  satisfait certaines hypothèses de maximalité c'est effectivement le cas. Le résultat suivant utilise le formalisme fppf pour comparer les normalisateurs de  $J_{\mathfrak{u}}$  et  $\mathfrak{u}$  dans  $G$ .

**Lemme 11.5.** *Le sous-groupe  $N_G(\mathfrak{u})$  normalise  $J_{\mathfrak{u}}$ .*

*Démonstration.* Rappelons que par définition des isomorphismes de Springer, l'application  $\phi_x$  est  $G$ -équivariante. Le morphisme  $\psi_{\mathfrak{u}}$  est donc compatible avec l'action de  $G$  sur  $\mathfrak{u}$  : autrement dit pour tout  $g \in G$  et tous  $(x, t) \in \mathfrak{u} \times \mathbb{G}_a$  nous avons  $\text{Ad}(g)\psi_{\mathfrak{u}}(x, t) = \psi_{\mathfrak{u}}(\text{Ad}(g)x, t)$ .

Soit  $R$  une  $k$ -algèbre, pour tous  $g \in N_G(\mathfrak{u})(R)$  et  $h \in J_{\mathfrak{u}}(R)$ , il existe un recouvrement  $S \rightarrow R$  pour la topologie fppf tel que  $h_S = \psi_{\mathfrak{u}}(x_1, s_1) \times \cdots \times \psi_{\mathfrak{u}}(x_n, s_n)$  où  $x_i \in \mathfrak{u}_R \otimes_R S$  et  $s_i \in S$ . Mais alors

$$(\text{Ad}(g)h)_S = \prod_{i=1}^n \text{Ad}(g_S)\psi_{\mathfrak{u}}(x_i, s_i) = \prod_{i=1}^n \psi_{\mathfrak{u}}(\text{Ad}(g_S)x_i, s_i) \in J_{\mathfrak{u}}(S) \cap G(R) = J_{\mathfrak{u}}(R),$$

où l'égalité  $J_{\mathfrak{u}}(S) \cap G(R) = J_{\mathfrak{u}}(R)$  découle du fait que  $J_{\mathfrak{u}}$  est engendré par  $\psi_{\mathfrak{u}}$  comme faisceau fppf et où la deuxième égalité de l'expression ci-dessus est obtenue en utilisant que  $\phi_x$  est  $G$ -équivariant. Ainsi  $\text{Ad}(g)h \in J_{\mathfrak{u}}(R)$  pour tous  $g \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})(R)$ , autrement dit  $N_G(\mathfrak{u})(R) \subseteq N_G(J_{\mathfrak{u}})(R)$  pour toute  $k$ -algèbre  $R$ . Le lemme de Yoneda permet d'obtenir l'inclusion désirée :  $N_G(\mathfrak{u}) \subseteq N_G(J_{\mathfrak{u}})$ .  $\square$

La notion de  $\phi$ -saturation infinitésimale introduite ici permet d'obtenir une généralisation des théorèmes [18, Théorème 1.7] et [2, Theorem 2.5] aux  $k$ -groupes réductifs  $\phi$ -infinitésimalement saturés pour  $k$  algébriquement clos de caractéristique  $p$  séparablement bonne pour  $G$ . C'est l'objet du théorème 10.4. Commençons par remarquer que les points (i) et (iii) de [18, Lemme 2.3] sont encore valables sous nos hypothèses et permettent de restreindre le reste de cette section au cas où  $N$  est connexe. Plus précisément :

**Lemme 11.6.** *1. Si  $N$  est  $\phi$ -infinitésimalement saturé dans  $G$  il en est de même pour  $N^0$ ,  
2. si la partie réduite  $N_{\text{réd}}^0$  de  $N^0$  et son radical unipotent  $\text{Rad}_U(N_{\text{réd}}^0)$  sont des sous-schémas en groupes distingués de  $N^0$  alors ils sont distingués dans  $N$ .*

*Démonstration.* La démonstration est exactement celle de [18, Lemme 2.3], puisque la notion de  $\phi$ -saturation infinitésimale généralise la notion de saturation infinitésimale dans notre contexte (voir la remarque 11.2).  $\square$

Dans la suite le sous-groupe  $\phi$ -infinitésimalement saturé  $N$  est donc supposé connexe.

## 11.2 Une version infinitésimale du théorème 10.4

Soit  $H \subseteq N$  un sous-groupe connexe de type multiplicatif maximal de  $N$ . Le  $k$ -groupe  $H$  est un produit direct d'un  $k$ -tore  $T$  et d'un  $k$ -groupe diagonalisable  $D$  qui est un produit de sous-groupes de la forme  $\mu_{p^i}$ . Par ailleurs, le  $k$ -tore  $T$  est donné par l'intersection  $H \cap N_{\text{réd}}$  et c'est un tore maximal de  $N$  et  $N_{\text{réd}}$ .

Soit  $Z := Z_{N_{\text{réd}}}^0(T)$  le centralisateur connexe de  $T$  dans  $N_{\text{réd}}$  et notons  $W = Z/T$ . C'est un sous-groupe unipotent de  $N$  (le raisonnement est le même qu'au paragraphe 2.5 de [18]) : puisque  $k$  est algébriquement clos, il s'agit de montrer que ce quotient ne contient pas de sous-groupe de type  $\mu_p$  (en vertu de [21, XVII, Proposition 4.3.1 iv]). Mais cela est immédiat : si un tel facteur existait son image inverse dans  $Z$  serait une extension dans  $N_{\text{réd}}$  de  $\mu_p$  par  $T$ , donc de type multiplicatif. Cela est absurde puisque les sous-groupes connexes de type multiplicatif maximaux d'un groupe algébrique lisse au-dessus d'un corps sont les tores maximaux (voir l'annexe B.1). Par ailleurs, puisque  $W$  est lisse (car  $T$  et  $Z$  le sont, voir [19, II, §5, n°5 Proposition 5.3 (ii)]), unipotent d'après ce qui précède, et puisque  $k$  est parfait, le théorème 6.1.1 de [21, exposé XVII] s'applique et justifie que la suite exacte suivante est scindée :

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow Z \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} W \longrightarrow 1.$$

En résumé nous avons un isomorphisme  $Z_{N_{\text{réd}}}(T) \cong T \times W$ . Soit  $X$  le  $k$ -sous-schéma réduit des éléments  $p$ -nilpotents de  $\mathfrak{n}^0 = W(\mathfrak{n}^0) = \text{Lie}(Z_{N_{\text{réd}}}(T))$ .

**Lemme 11.7.** *Le centralisateur  $Z_{N_{\text{réd}}}^0(T)$  est le sous-groupe de  $N$  engendré par  $T$  et par le morphisme*

$$\begin{aligned} \psi_X : X \times \mathbb{G}_a &\rightarrow G \\ (x, t) &\mapsto \phi(tx), \end{aligned}$$

*il est normalisé par  $H$ .*

*Démonstration.* Notons  $J_X \subseteq G$  le sous-groupe de  $N$  engendré par l'image de  $\psi_X$ . Puisque  $N$  est  $\phi$ -infinitésimalement saturé, l'image de tout élément  $p$ -nilpotent de  $\text{Lie}(Z_N(T))$  par  $\phi$  appartient à  $N$ . Ainsi  $\psi_X$  factorise par  $N$ . Par ailleurs  $J_X$  est un sous-groupe lisse de  $N$  puisque c'est l'image d'un  $k$ -schéma réduit. Ainsi nous avons l'inclusion  $J_X \subset N_{\text{réd}}$ . Enfin, le morphisme  $\phi$  étant un isomorphisme de Springer, il est  $G$ -équivariant, l'image de  $\psi_X$  commute donc avec tout élément de  $T$ . En conclusion  $J_X \subset Z_{N_{\text{réd}}}(T)$ .

Soit encore  $E_{T, J_X^0}$  le sous-groupe engendré par  $T$  et  $J_X^0$  comme faisceau fppf. C'est un sous-groupe lisse de  $Z_{N_{\text{réd}}}(T)$  (puisque  $T \in Z_{N_{\text{réd}}}^0(T)$  est lisse et car d'après ce qui précède  $J_X^0 \subset Z_{N_{\text{réd}}}^0(T)$ ). Puisqu'il est de plus connexe (d'après [20, VIB. corollaire 7.2.1] car  $T$  est géométriquement connexe et géométriquement réduit), il est en fait contenu dans la composante neutre du centralisateur réduit. Ceci se traduit au niveau des algèbres de Lie par l'inclusion  $\text{Lie}(E_{T, J_X^0}) \subseteq \text{Lie}(Z_{N_{\text{réd}}}^0(T)) = \text{Lie}(Z_{N_{\text{réd}}}(T))$ .

Puisque  $W$  est un sous-groupe unipotent de  $Z_{N_{\text{réd}}}^0(T) \cong T \times W$ , l'algèbre de Lie  $\mathfrak{w} := \text{Lie}(W)$  est une  $p$ -sous-algèbre  $p$ -nil de  $Z_{N_{\text{réd}}}^0(T)$ , elle est donc contenue dans le sous-schéma réduit  $X$ . Ce dernier est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents de  $\text{Lie}(Z_N(T))$  il est donc contenu dans l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents de  $\mathfrak{g}$ , qui coïncide avec le  $p$ -radical de  $\mathfrak{g}$  d'après le lemme C.22 (qui s'applique puisqu'ici  $p \geq 3$  ou  $p = 2$  seulement dans le cadre défini par la remarque C.25). L'entier  $p$  n'étant pas de torsion pour  $G$ , le corollaire A.1 s'applique et permet de plonger  $\text{rad}_p(\mathfrak{g})$  et donc  $X$  dans l'algèbre de Lie du radical unipotent d'un sous-groupe de Borel  $B \subseteq G$ . Puisque la dérivée en 0 de la restriction de  $\phi$  à cette sous-algèbre satisfait  $(d\phi)_0 = \text{id}$  et comme  $J_X$  est engendré par l'image de  $\psi_X$ , son algèbre de Lie (qui est celle de sa composante neutre) contient la dérivée en 0 de chaque  $\phi(tx)$ , pour  $t \in \mathbb{G}_a$  et  $x \in X$ . Autrement dit nous avons les inclusions  $\mathfrak{w} \subseteq X \subseteq \text{Lie}(J_X^0)$ . Par ailleurs, l'inclusion  $T \subseteq E_{T, J_X^0}$ , induit une inclusion d'algèbres de Lie  $\mathfrak{t} := \text{Lie}(T) \subseteq \text{Lie}(E_{T, J_X^0}) = \text{Lie}(E_{T, J_X^0})$ .

Comme  $Z_{N_{\text{réd}}}(T) \cong T \times W$ , ce qui précède permet d'obtenir l'inclusion

$$\text{Lie}(Z_{N_{\text{réd}}}^0(T)) = \text{Lie}(Z_{N_{\text{réd}}}(T)) \subseteq \text{Lie}(E_{T, J_X^0}),$$

et donc l'égalité  $\text{Lie}(Z_{N_{\text{réd}}}^0(T)) = \text{Lie}(E_{T, J_X^0})$ . Les groupes considérés ici étant lisses et connexes, cette égalité des algèbres de Lie se traduit en une égalité des groupes d'après [19, II, §5 n°5.5]. Autrement dit nous avons démontré que  $Z_{N_{\text{réd}}}^0(T) = E_{T, J_X^0}$ .

Montrons que  $E_{T, J_X^0}$  est normalisé par  $H$  : c'est le sous-groupe engendré par  $T \subseteq H$  (qui est distingué dans  $H$ ) et  $J_X^0$  (qui est un sous-groupe caractéristique de  $J_X$  (voir [19, II, §5, n°1.1])). Tout l'enjeu est donc de montrer que  $J_X$  est  $H$ -stable. Commençons par remarquer que  $X$  est stabilisé par  $H$  (car  $H$  stabilise  $\text{Lie}(Z_N(T))$  et l'action adjointe préserve les éléments  $p$ -nilpotents). La  $G$ -équivariance de  $\phi$  (et donc sa  $H$ -équivariance) nous permet de conclure : soit  $R$  une  $k$ -algèbre, pour tous  $j \in J_X(R)$  et  $h \in H(R)$ , il existe un recouvrement  $S \rightarrow R$  pour la topologie fppf tel que  $j_S = \psi_X(x_1, t_1) \times \cdots \times \psi_X(x_n, t_n)$  où  $x_i \in X_R \otimes_R S$  et  $s_i \in S$ . Mais alors

$$(\text{Ad}(h)j)_S = \prod_{i=1}^n \text{Ad}(h_S)\psi_X(x_i, s_i) = \prod_{i=1}^n \psi_X(\text{Ad}(h_S)x_i, s_i) \in J_X(S) \cap G(R) = J_X(R),$$

le lemme de Yoneda permet de conclure. En conclusion  $E_{T, J_X^0}$  est stable par  $H$ , et l'égalité  $E_{T, J_X^0} = Z_{N_{\text{réd}}}^0(T)$  établie au paragraphe précédent permet d'en déduire que  $Z_{N_{\text{réd}}}^0(T)$  est normalisé par  $H$ .  $\square$

**Lemme 11.8.** *La  $p$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_{\text{réd}} := \text{Lie}(N_{\text{réd}})$  est un idéal de  $\mathfrak{n}$  muni d'une action de  $H$ .*

*Démonstration.* D'après [2, lemma 2.14] le morphisme de  $k$ -schémas  $N_{\text{réd}} \times H \rightarrow N$  est fidèlement plat. Ceci permet de décrire  $N$  comme le faisceau fppf engendré par  $N_{\text{réd}}$  et  $H$ . Ainsi, pour montrer que  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}$  est  $N$ -stable, il suffit d'établir que  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}$  est stable pour l'action de  $H$ . Le tore  $T = H \cap N_{\text{réd}}$  agit sur  $N_{\text{réd}}$ , respectivement  $N$ , et permet d'obtenir les décompositions :

$$\mathfrak{n}_{\text{réd}} = \text{Lie}(N_{\text{réd}}) = \text{Lie}(Z_{N_{\text{réd}}}(T)) \oplus \bigoplus_{\alpha \in X(T)^*} \mathfrak{n}_{\text{réd}}^\alpha,$$

$$\text{et } \text{Lie}(N) = \text{Lie}(Z_N(T)) \oplus \bigoplus_{\alpha \in X(T)^*} \mathfrak{n}^\alpha,$$

où  $X(T)^*$  désigne le groupe des caractères non nuls de  $T$ . Rappelons que puisque  $T$  est distingué dans  $H$ , chaque facteur de la décomposition de  $\text{Lie}(N)$  est stable par  $H$ . Il s'agit de montrer qu'il en est de même pour chaque facteur de la décomposition de  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}$ . Commençons par étudier les espaces de poids positifs. Puisque  $N$  est engendré comme faisceau fppf par  $N_{\text{réd}}$  et le sous-groupe de type multiplicatif  $H$  (d'algèbre de Lie torale) les éléments  $p$ -nilpotents de  $\text{Lie}(N)$  proviennent tous des éléments  $p$ -nilpotents de  $\text{Lie}(N_{\text{réd}})$ . Ceci étant établi, puisque pour tout  $\alpha \neq 0$  l'espace de poids  $\mathfrak{n}^\alpha$  est composé uniquement d'éléments  $p$ -nilpotents (rappelons que nous considérons ici l'action d'un tore)  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}^\alpha := \mathfrak{n}^\alpha \cap \mathfrak{n}_{\text{réd}}$  est égal à  $\mathfrak{n}^\alpha$ . Ce sous-espace est donc  $H$ -stable.

Il s'agit donc d'établir la  $H$ -stabilité de  $\text{Lie}(Z_{N_{\text{réd}}}(T))$ . D'après le lemme 11.7 le sous-groupe  $H$  normalise  $Z_{N_{\text{réd}}}(T)^0$ , il laisse donc stable  $\text{Lie}(Z_{N_{\text{réd}}}(T)^0) = \text{Lie}(Z_{N_{\text{réd}}}(T))$ .

En conclusion  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}$  est stable pour l'action de  $H$  sur  $\mathfrak{n}$ , cette sous-algèbre est donc invariante pour l'action de  $N$ . En raisonnant sur les  $R[\epsilon]$ -points pour toute  $k$ -algèbre  $R$ , nous en déduisons que  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}$  est un idéal de  $\mathfrak{n}$ .  $\square$

La démonstration du lemme suivant reproduit exactement la preuve du lemme [18, 2.22] la modification de contexte n'affectant pas les arguments développés. Par souci de clarté nous détaillons ici les arguments utilisés.

**Lemme 11.9** (P. Deligne, [18, 2.22]). *Notons  $V$  le radical unipotent de  $N_{\text{réd}}$ . L'action de  $H$  sur  $\text{Lie}(N_{\text{réd}}) = \mathfrak{n}_{\text{réd}}$  stabilise le sous-espace  $\text{Lie}(V) := \mathfrak{v}$ .*

*Démonstration.* Le tore  $T$  agit sur  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}$  et donc sur  $\mathfrak{v}$ . Décomposons  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}$  et  $\mathfrak{v}$  en espaces de poids pour cette action, i.e.  $\mathfrak{n}_{\text{réd}} = \mathfrak{n}_{\text{réd}}^0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in X(T)^*} \mathfrak{n}_{\text{réd}}^\alpha$  et  $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}^0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in X(T)^*} \mathfrak{v}^\alpha$ . Rappelons que nous avons obtenu dans la preuve du lemme 11.8 la  $H$ -stabilité de la décomposition de  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}$ . L'idée est de montrer que chaque  $\mathfrak{v}^\alpha$  est également stable sous l'action de  $H$ .

Considérons le diagramme commutatif suivant (rappelons que puisque  $Z = T \times W$  et comme  $T$  et  $Z$  sont distingués dans  $N_{\text{réd}}$ , il en est de même pour le sous-groupe  $W \subseteq N_{\text{réd}}$ , qui est également unipotent, lisse est connexe, et donc nécessairement contenu dans  $V := \text{Rad}_U(N_{\text{réd}})$ ) :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T_Q, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & N_{\text{réd}} & \longrightarrow & Q. \end{array}$$

Commençons par étudier la stabilité de la partie de poids 0 de  $\mathfrak{v}$  pour l'action de  $H$ . Puisque le diagramme ci-dessus est cartésien nous avons  $\mathfrak{v}^0 = \mathfrak{n}_{\text{réd}}^0 \cap \mathfrak{v} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{v} = \mathfrak{w}$ . Or  $\mathfrak{w}$  est stable pour l'action de  $H$  : en effet les sous-groupes  $T$  et  $Z$  sont stables par  $H$  (pour le centralisateur  $c$ 'est l'objet du lemme 11.7) et la suite est scindée.

Pour les poids positifs, notons  $\mathfrak{q}$  l'algèbre de Lie du quotient réductif  $N_{\text{réd}}/V$ . Le tore  $T$  agit sur cette algèbre de Lie, qui se décompose en sous-espaces de poids :  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in X^*(T)} \mathfrak{q}^\alpha$ . On distingue deux cas :

- soit  $\alpha$  n'est pas un poids de  $T$  sur  $\mathfrak{q}$ . Dans ce cas  $\mathfrak{v}^\alpha = \mathfrak{n}_{\text{réd}}^\alpha$  et donc  $\mathfrak{v}^\alpha$  est stable par  $H$  ;
- soit  $\alpha$  est un poids non nul de  $T$  sur  $\mathfrak{q}$ , les espaces de poids  $\mathfrak{q}^\alpha$  et  $\mathfrak{q}^{-\alpha}$  sont de dimension 1 (d'après [22, XIX, proposition 1.12 (iii)]), et comme  $p > 2$  (puisque  $p$  est séparablement bon), l'accouplement

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}^\alpha \times \mathfrak{q}^{-\alpha} &\rightarrow \mathfrak{q}^0 := \text{Lie}(T_Q) \\ (X_\alpha, X_{-\alpha}) &\mapsto [X_\alpha, X_{-\alpha}] \end{aligned}$$

induit par le crochet sur  $\mathfrak{q}$  est non dégénéré (voir [22, XXIII, corollaire 6.5]), et donc à valeurs dans un sous-espace  $h_\alpha$  de dimension 1.

De même, le crochet sur  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}$  induit un accouplement non dégénéré de  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}^\alpha$  et  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}^{-\alpha}$ , et nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{n}_{\text{réd}}^\alpha \times \mathfrak{n}_{\text{réd}}^{-\alpha} & \longrightarrow & \mathfrak{n}_{\text{réd}}^0, \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{q}^\alpha \times \mathfrak{q}^{-\alpha} & \longrightarrow & \mathfrak{n}_{\text{réd}}^0/\mathfrak{w} \cong \mathfrak{t}_\mathfrak{q} = \mathfrak{t}/\mathfrak{w}. \end{array}$$

Notons  $d$  l'image de l'accouplement de  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}^\alpha$  et  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}^{-\alpha}$  composé avec la projection  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}^0 \rightarrow \mathfrak{n}_{\text{réd}}^0/\mathfrak{w}$ . D'après ce qui précède c'est une droite de  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}^0/\mathfrak{w}$ .

La situation est donc celle décrite par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{v}^{\pm\alpha} & \longrightarrow & \mathfrak{n}_{\text{réd}}^{\pm\alpha} & \longrightarrow & \mathfrak{q}^{\pm\alpha}, \\ & & & & \downarrow & \swarrow & \\ & & & & \text{Hom}(\mathfrak{n}_{\text{réd}}^{\mp\alpha}, d) & & \end{array}$$

Autrement dit  $\mathfrak{v}^{\pm\alpha} = \ker(\mathfrak{v}^{\pm\alpha} \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{n}_{\text{réd}}^{\mp\alpha}, d))$  et  $\mathfrak{v}^{\pm\alpha}$  apparaît comme une sous-représentation de la représentation définie par l'action de  $H$  sur  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}$ , il est donc stable par  $H$ . □

Les lemmes 11.8 et 11.9 permettent d'obtenir une version infinitésimale de [2, Théorème 2.5] :

**Proposition 11.10.** *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$  et  $G$  un  $k$ -groupe algébrique tels que  $p$  soit séparablement bon pour  $G$ . Soit  $\phi : \mathcal{N}_{\text{réd}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\text{réd}}(G)$  un isomorphisme de Springer. Si  $N \subseteq G$  est un sous-groupe  $\phi$ -infinitésimalement saturé, alors :*

1. l'algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_{\text{réd}}$  est un idéal de  $\mathfrak{n}$ ,
2. l'algèbre de Lie du radical unipotent de  $N_{\text{réd}}$  est un idéal de  $\mathfrak{n}$ .

*Démonstration.* Le premier point de la proposition est donné par le lemme 11.8. Le second découle directement du lemme 11.9 grâce à [2, lemma 2.14] : puisque  $N$  est engendré comme faisceau fppf par  $H$  et  $N_{\text{réd}}$ , il suffit de montrer que  $\text{rad}_u(N_{\text{réd}})$  est stable par  $H$ , c'est l'objet du lemme susmentionné. Nous en déduisons que  $\text{rad}_u(N_{\text{réd}})$  est un idéal de  $\mathfrak{n}$  en raisonnant sur les  $R[\epsilon]$ -points, pour toute  $k$ -algèbre  $R$ . □

### 11.3 Démonstration du théorème 10.4

Nous sommes désormais en mesure de démontrer le théorème 10.4.

Commençons par montrer que  $N_{\text{réd}}$  est un sous-groupe distingué de  $N$ . Puisque  $N$  est engendré comme faisceau fppf par  $H$  et  $N_{\text{réd}}$ , tout l'enjeu est de démontrer que  $N_{\text{réd}}$  est stable par

$H$ . Le raisonnement est le même qu'à la preuve du lemme 11.8 : nous considérons le sous-groupe  $E_{Z^0, J_{\mathfrak{n}^\alpha}}$  engendré par  $Z^0 := Z_{N_{\text{réd}}}^0(T)$  et, pour  $\alpha \in X(T)^*$ , les sous-groupes  $J_{\mathfrak{n}^\alpha}$  engendrés comme faisceaux fppf par l'image des morphismes

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : W(\mathfrak{n}^\alpha) \times \mathbb{G}_a &\rightarrow G \\ (x, t) &\mapsto \phi(tx). \end{aligned}$$

Notons que chaque morphisme  $\psi_\alpha$ , pour  $\alpha \in X(T)^*$  est bien défini : pour tout  $\alpha \in X(T)^*$  chaque espace de poids  $\mathfrak{n}^\alpha$  est composé d'éléments  $p$ -nilpotents (puisque nous considérons l'action d'un tore), ils sont géométriquement réduits (les  $\mathfrak{n}^\alpha$  sont des espaces vectoriels). Pour les mêmes raisons, ils sont géométriquement connexes. Les groupes engendrés  $J_{\mathfrak{n}^\alpha}$  sont donc lisses et connexes (la connexité est assurée par [20, VIB, corollaire 7.2.1]).

Pour les mêmes raisons qu'à la preuve du lemme 11.7 le  $k$ -sous-groupe  $E_{Z^0, J_{\mathfrak{n}^\alpha}}$  est contenu dans  $N$  puisque  $N$  est  $\phi$ -infinitésimalement saturé, et même dans  $N_{\text{réd}}$  puisqu'il est lisse. Par ailleurs, puisque  $p \geq 3$  et chaque espace de poids non nul est  $p$ -nil, ces derniers sont tous plongeables dans l'algèbre de Lie du radical unipotent d'un sous-groupe de Borel  $B \subseteq G$ . La dérivée en 0 de la restriction de  $\phi$  à ces dernières étant l'identité, les espaces de poids  $\mathfrak{n}^\alpha$  sont contenus dans  $\text{Lie}(E_{Z^0, J_{\mathfrak{n}^\alpha}}) =: \mathfrak{e}$ . C'est également le cas de  $\text{Lie}(Z^0)$  puisque  $Z^0 \subset E_{Z^0, J_{\mathfrak{n}^\alpha}}$ .

En résumé  $\mathfrak{n}_{\text{réd}} = \text{Lie}(Z^0) \oplus \bigoplus_{\alpha \in X(T)^*} \mathfrak{n}^\alpha \subseteq \mathfrak{e}$ . Comme les groupes considérés ici sont lisses et connexes, l'égalité des algèbres de Lie permet de conclure que  $E_{Z^0, J_{\mathfrak{n}^\alpha}} = N_{\text{réd}}^0$  (voir [19, II, §5, n°5.5]). Le problème se restreint donc à démontrer la stabilité de  $E_{Z^0, J_{\mathfrak{n}^\alpha}}$  pour l'action de  $H$ . Puisque d'après le lemme 11.7 le centralisateur  $Z^0$  est  $H$ -invariant, il s'agit de démontrer la stabilité de chaque  $J_{\mathfrak{n}^\alpha}$  ; mais  $H$  normalise  $T$ , chaque  $\mathfrak{n}^\alpha$  est donc invariant par  $H$  et cela découle de la  $G$ -équivariance de  $\phi$ . Ainsi  $N_{\text{réd}}$  est un sous-groupe distingué de  $N$ .

Puisque  $H = T \times D$  (pour  $D$  un  $k$ -groupe diagonalisable) normalise  $N_{\text{réd}}$  (qui est distingué dans  $N$ ) et comme  $HN_{\text{réd}} = N$  et  $N_{\text{réd}} \cong H \cap N_{\text{réd}}$ , nous avons un isomorphisme de faisceaux fppf qui est en fait un isomorphisme de  $k$ -groupes algébriques :

$$H/H_{\text{réd}} \cong N/N_{\text{réd}} \cong D.$$

Il reste à montrer que le radical unipotent de  $N_{\text{réd}}$  est distingué dans  $N$ . Une fois de plus, du fait du formalisme fppf, il suffit de montrer l'invariance de  $V$  pour l'action de  $H$  (puisque  $\text{Rad}_U(N_{\text{réd}})$  est distingué dans  $N_{\text{réd}}$ ). Le raisonnement est le même que pour montrer la normalité de  $N_{\text{réd}}$  dans  $N$  : nous considérons le sous-groupe  $E_{W, J_{\mathfrak{v}^\alpha}}$  engendré par les groupes  $W$  et  $J_{\mathfrak{v}^\alpha}$ , pour  $\alpha \in X(T)^*$ . Puisque  $W$  et  $J_{\mathfrak{v}^\alpha}$  sont distingués dans  $N_{\text{réd}}$ , le sous-groupe  $E_{W, J_{\mathfrak{v}^\alpha}}$  est un sous-groupe unipotent lisse connexe et distingué dans  $N$ , il est donc contenu dans le radical unipotent de  $N_{\text{réd}}$ . Par ailleurs, en plongeant chaque espace de poids non nul dans l'algèbre de Lie du radical unipotent d'un sous-groupe de Borel  $B \subset G$ , ce qui est possible car ces espaces sont  $p$ -nil et que  $p \geq 3$ , et en utilisant que la dérivée en 0 de la restriction de  $\phi$  à l'algèbre de Lie du radical unipotent de tout sous groupe de Borel est égale à l'identité, nous obtenons l'inclusion  $\mathfrak{v} = \mathfrak{w} \oplus \bigoplus_{\alpha \in X(T)^*} \mathfrak{v}^\alpha \subseteq \text{Lie}(E_{W, J_{\mathfrak{v}^\alpha}})$ , qui nous permet de conclure à l'égalité des groupes  $V = E_{W, J_{\mathfrak{v}^\alpha}}$ , en reprenant les arguments ci-dessus. Puisque d'après la preuve du lemme 11.9 le sous-groupe  $W$ , ainsi que chaque espace de poids non nul, est stable pour l'action de  $H$ , la  $G$ -équivariance de  $\phi$  permet de conclure que  $V$  est un sous-groupe distingué de  $N$ .

## 12 Intégration des sous-algèbres $p$ -nil du radical de $\mathfrak{g}$

Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif tel que  $p$  soit séparablement bon pour  $G$ . Soit  $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie composée d'éléments  $p$ -nil. Soit encore  $\phi : \mathcal{N}_{\text{réd}}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{V}_{\text{réd}}(G)$  un isomorphisme de Springer pour lequel pour tout sous-groupe de Borel  $B \subset G$  la dérivée en 0 de la restriction de  $\phi$  à  $\text{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$  est l'identité et

considérons :

$$\begin{aligned} \psi_{\mathfrak{u}} : W(\mathfrak{u}) \times \mathbb{G}_a &\rightarrow G \\ (x, a) &\mapsto \phi_x(a). \end{aligned}$$

Lorsque la  $p$ -sous-algèbre de Lie  $p$ -nil  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  satisfait certaines propriétés de maximalité (comme celles étudiées dans les paragraphes qui suivent et indiquées dans les énoncés des lemmes 12.2 et 12.4) elle est intégrable et intégrée par le sous-groupe  $J_{\mathfrak{u}}$ . Lorsque cette intégration est réalisée nous obtenons l'égalité des normalisateurs  $N_G(J_{\mathfrak{u}})$  et  $N_G(\mathfrak{u})$ , c'est l'objet du lemme suivant :

**Lemme 12.1.** *Lorsque  $J_{\mathfrak{u}}$  intègre  $\mathfrak{u}$  (ce qui est en particulier le cas lorsque  $\mathfrak{u}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  composée des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ ) alors  $N_G(J_{\mathfrak{u}}) = N_G(\mathfrak{u})$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 11.5 il suffit de montrer l'inclusion  $N_G(J_{\mathfrak{u}}) \subseteq N_G(\mathfrak{u})$ , qui est immédiate d'après le lemme C.6 puisque  $\text{Lie}(J_{\mathfrak{u}}) = \mathfrak{u}$  par hypothèse.  $\square$

## 12.1 Intégration de l'ensemble des éléments $p$ -nilpotents du radical

Dans ce paragraphe nous supposons que  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre qui est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ . Remarquons que  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est une  $p$ -algèbre de Lie restreinte (puisqu'elle dérive d'un  $k$ -groupe algébrique, à savoir  $N_G(\mathfrak{u})$  d'après le lemme C.7). Par ailleurs  $\mathfrak{u}$  est également une  $p$ -sous-algèbre  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$ . Ce dernier point est immédiat, il s'agit ici de montrer que  $\mathfrak{u}$  admet une  $p$ -structure. Si  $x \in \text{rad}(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}))$  est un élément  $p$ -nilpotent, pour tout  $i \in \mathbb{N}$  les  $p$ -puissances successives  $x^{[p^i]}$  et leurs multiples scalaires sont des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  (car le radical d'une  $p$ -algèbre de Lie est une  $p$ -sous-algèbre d'après le corollaire C.12).

**Lemme 12.2.** *Soient  $G$  un groupe réductif au-dessus d'un corps  $k$  de caractéristique  $p$  séparablement bonne pour  $G$  et  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre. Si  $\mathfrak{u}$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de son normalisateur dans  $\mathfrak{g}$ , noté  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ , alors la sous-algèbre  $\mathfrak{u}$  est intégrable.*

*Démonstration.* D'après le lemme 11.4, il existe un sous-groupe unipotent lisse et connexe  $J_{\mathfrak{u}} \subset G$  tel que  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{j}_{\mathfrak{u}} := \text{Lie}(J_{\mathfrak{u}})$ . Par ailleurs, puisque  $J_{\mathfrak{u}} \subseteq N_G(J_{\mathfrak{u}}) \subseteq N_G(\mathfrak{j}_{\mathfrak{u}})$  d'après le lemme C.6, nous avons, au niveau des algèbres de Lie :

$$\mathfrak{u} \subset \mathfrak{j}_{\mathfrak{u}} \subseteq \text{Lie}(N_G(J_{\mathfrak{u}})) \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{j}_{\mathfrak{u}}).$$

Supposons que l'inclusion  $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{j}_{\mathfrak{u}}$  soit propre. Dans ce cas  $\mathfrak{u}$  est une sous-algèbre propre de son normalisateur dans  $\mathfrak{j}_{\mathfrak{u}}$  d'après un corollaire du théorème de Engels (voir par exemple [10, §4 n°1 Proposition 3]). Autrement dit nous avons  $\mathfrak{u} \subsetneq N_{\mathfrak{j}_{\mathfrak{u}}}(\mathfrak{u}) := \mathfrak{j}_{\mathfrak{u}} \cap N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ . Mais  $J_{\mathfrak{u}}$  est normalisé par  $N_G(\mathfrak{u})$  d'après le lemme 11.5, par conséquent  $N_{\mathfrak{j}_{\mathfrak{u}}}(\mathfrak{u}) \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est un idéal de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ . C'est une  $p$ -algèbre (puisqu'elle dérive d'un groupe algébrique d'après le lemme C.7), un  $p$ -idéal (puisque la restriction de la  $p$ -structure de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  coïncide avec celle héritée de  $N_{J_{\mathfrak{u}}}(\mathfrak{u})$ ), et même un  $p$ -idéal  $p$ -nil (puisque  $\mathfrak{j}_{\mathfrak{u}}$  est  $p$ -nil d'après le lemme C.21). En particulier, c'est un idéal résoluble de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  ce qui se traduit par l'inclusion  $N_{\mathfrak{j}_{\mathfrak{u}}}(\mathfrak{u}) \subseteq \text{rad}(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}))$ . En résumé, l'ensemble  $\mathfrak{u}$  des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  est contenu dans un idéal  $p$ -nil de ce même radical, à savoir  $N_{\mathfrak{j}_{\mathfrak{u}}}(\mathfrak{u})$ , autrement dit il est égal à ce dernier. Ceci contredit le caractère propre de l'inclusion. Ainsi  $\mathfrak{u} = \mathfrak{j}_{\mathfrak{u}}$ . En particulier, il existe un sous-groupe  $J_{\mathfrak{u}} \subseteq G$  unipotent lisse et connexe tel que  $\text{Lie}(J_{\mathfrak{u}}) = \mathfrak{u}$ , i.e.  $\mathfrak{u}$  est intégrable.  $\square$

## 12.2 Intégration du $p$ -radical

Soit  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre, notons  $\mathfrak{u} := \text{rad}_p(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}))$ . Puisque le  $p$ -radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  est un  $p$ -idéal  $p$ -nil, le préambule de cette section s'applique et permet d'associer à  $\mathfrak{u}$  un sous-groupe unipotent, lisse et connexe  $J_{\mathfrak{u}} \subset G$ .

**Lemme 12.3.** *Le sous-groupe  $N_G(\mathfrak{h})$  normalise  $J_u$ .*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que la preuve du lemme 11.5 s'applique verbatim, puisque  $u$  est un idéal de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  (par hypothèse).  $\square$

**Lemme 12.4.** *Soient  $G$  un groupe réductif au-dessus d'un corps  $k$  de caractéristique  $p$  séparablement bonne pour  $G$  et  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre telle que le sous-groupe  $N_G(\mathfrak{h})$  soit  $\phi$ -infinitésimalement saturé. Si  $u := \text{rad}_p(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}))$  alors la sous-algèbre  $u$  est intégrable.*

*Démonstration.* Rappelons que  $u \subseteq j_u$  d'après 11.4. Par ailleurs, puisque  $N_G(\mathfrak{h})$  est  $\phi$ -infinitésimalement saturé  $J_u$  est un sous-groupe de  $N_G(\mathfrak{h})$  (car  $u := \text{rad}_p(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}))$  est un  $p$ -idéal  $p$ -nil, la  $t$ -puissance de tout élément de  $u$  est donc contenue dans  $N_G(\mathfrak{h})$ ). Nous avons, au niveau des algèbres de Lie :

$$u \subset j_u \subseteq \text{Lie}(N_G(\mathfrak{h})) = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}).$$

Supposons que l'inclusion  $u \subsetneq j_u$  soit propre. Dans ce cas  $u$  est une sous-algèbre propre de son normalisateur dans  $j_u$  d'après un corollaire du théorème de Engels (voir par exemple [10, §4 n°1 Proposition 3]). Autrement dit  $u \subsetneq N_{j_u}(u) := j_u \cap N_{\mathfrak{g}}(u) = j_u \cap N_{j_u}(\mathfrak{h})$ . Mais  $J_u$  est normalisé par  $N_G(\mathfrak{h})$  d'après le lemme 12.3, par conséquent  $N_{j_u}(u) \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  est un idéal de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ . C'est une  $p$ -algèbre (puisque'elle dérive d'un groupe algébrique d'après le lemme C.7), un  $p$ -idéal (puisque la restriction de la  $p$ -structure de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  coïncide avec celle hérité de  $N_{J_u}(\mathfrak{h})$ ), et c'est un  $p$ -idéal  $p$ -nil (puisque  $j_u$  est  $p$ -nil d'après le lemme C.21). En particulier c'est un idéal résoluble de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ . L'inclusion  $N_{j_u}(u) \subseteq \text{rad}(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}))$  est donc vérifiée. Ainsi  $N_{j_u}(\mathfrak{h}) = u$  puisque  $u$  est l'ensemble des éléments nilpotents de  $\text{rad}(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}))$ , ce qui contredit le caractère propre de l'inclusion. En conclusion  $u = j_u$  et il existe un sous-groupe  $J_u \subseteq G$  unipotent lisse et connexe tel que  $\text{Lie}(J_u) = u$ , i.e.  $u$  est intégrable.  $\square$

**Remarque 12.5.** Dans le cas particulier où  $\mathfrak{h} = u$ , i.e. lorsque  $u := \text{rad}_p(N_{\mathfrak{g}}(u))$  est le  $p$ -radical de son normalisateur dans  $\mathfrak{g}$ , l'hypothèse de  $\phi$ -saturation infinitésimale est superflue car alors l'inclusion  $J_u \subseteq N_G(J_u)$  est immédiate.

## 13 Démonstrations du théorème 10.1 et des corollaires 10.2 et 10.3

### 13.1 Preuve du théorème 10.1

Rappelons les notations du théorème 10.1 : dans la suite  $k$  est un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  est un  $k$ -groupe réductif. Nous supposons que  $p$  est séparablement bon pour  $G$ . Soit  $u \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie telle que  $u$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(u)$ .

*Démonstration du théorème 10.1.* La preuve est la même que pour l'analogie du théorème de Morozov en caractéristique  $p > h(G)$  (voir le théorème 4.2). D'après le lemme 12.2 la  $p$ -algèbre de Lie  $p$ -nil  $u$  s'intègre en un sous-groupe unipotent lisse et connexe de  $G$  noté  $J_u$ . Tout l'enjeu est de démontrer que  $N_G(u) = P_G(J_u)$ . Notons que cela implique directement la lissité de la composante neutre  $N_G(u)^0$  puisqu'un sous-groupe parabolique est lisse (voir [22, XXVI, Définition 1.1]), ce qui est une condition équivalente à l'égalité  $N_{\mathfrak{g}}(u) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_u)$  (voir la section 7, en particulier l'équivalence des conditions 2. et 3. du théorème 4.5).

Puisque par hypothèse, le sous-groupe  $N_G(u)$  est  $\phi$ -infinitésimalement saturé et satisfait les hypothèses du théorème 10.4, la composante neutre de sa partie réduite  $N_G(u)_{\text{réd}}^0$  est distinguée dans  $N_G(u)$ . En particulier si  $N_G(u)_{\text{réd}}^0$  est un sous-groupe parabolique de  $G$  alors  $N_G(u) = N_G(u)_{\text{réd}}^0$  puisqu'un sous-groupe parabolique est son propre normalisateur (voir [22, XXII, corollaire 5.8.5]). Il suffit donc de montrer que  $N_G(u)_{\text{réd}}^0$  est un sous-groupe parabolique de  $G$ .

D'après le lemme 12.1 les normalisateurs  $N_G(\mathfrak{u})$  et  $N_G(J_{\mathfrak{u}})$ , et donc les composantes neutres de leur partie réduite, sont égaux. Ainsi, il suffit de montrer que  $N_G(J_{\mathfrak{u}})_{\text{réd}}^0$  est un sous-groupe parabolique de  $G$ . Comme dans le cas où  $p > h(G)$ , nous utilisons le théorème de Veisfeiler–Borel–Tits ([6, corollaire 3.2]) pour obtenir l'égalité  $N_G(J_{\mathfrak{u}})_{\text{réd}}^0 = P_G(J_{\mathfrak{u}})$ . Soit  $V := \text{Rad}_U(N_G(J_{\mathfrak{u}})_{\text{réd}}^0)$ , il s'agit de montrer que  $N_G(J_{\mathfrak{u}})_{\text{réd}}^0 = N_G(V)_{\text{réd}}^0$ .

Puisque d'après le préambule de la section 11.1 le sous-groupe  $J_{\mathfrak{u}}$  est lisse et connexe, c'est un sous-groupe de  $N_G(J_{\mathfrak{u}})_{\text{réd}}^0$ . Comme c'est un sous-groupe unipotent et distingué, il est contenu dans le radical unipotent de  $N_G(J_{\mathfrak{u}})_{\text{réd}}^0$ , autrement dit  $J_{\mathfrak{u}} \subseteq V$  ce qui se traduit par l'inclusion d'algèbres de Lie  $\mathfrak{j}_{\mathfrak{u}} \subseteq \mathfrak{v}$ .

Enfin, par hypothèse,  $N_G(\mathfrak{u}) = N_G(J_{\mathfrak{u}})$  est  $\phi$ -infinimentésimale saturé, d'après le théorème 10.4 le sous-groupe unipotent  $V$  est donc distingué dans  $N_G(\mathfrak{u})$ . L'algèbre de Lie de  $V$  est donc un  $p$ -idéal  $p$ -nil de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  en vertu du lemme C.21. Nous sommes donc dans la situation suivante

$$\mathfrak{v} \subseteq \text{rad}_p(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})) \subseteq \mathfrak{u} = \text{Lie}(\mathfrak{j}_{\mathfrak{u}})$$

en utilisant le lemme C.13 puisque  $\mathfrak{u}$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents de  $\text{rad}(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}))$ . Notons que la dernière égalité se déduit du lemme 12.2 qui assure que le sous-groupe  $J_{\mathfrak{u}}$  intègre  $\mathfrak{u}$ . En conclusion  $\mathfrak{v} = \mathfrak{j}_{\mathfrak{u}}$ . Les sous-groupes  $V$  et  $J_{\mathfrak{u}}$  étant lisses et connexes d'égales algèbres de Lie ils coïncident (d'après [19, II, §5, 5.5]). Ainsi le sous-groupe  $V$  est le radical unipotent de la composante neutre de la partie lisse de son normalisateur, ce dernier est donc le sous-groupe parabolique de  $P_G(J_{\mathfrak{u}}) \subseteq G$  obtenu en appliquant le théorème de Veisfeiler–Borel–Tits [6, corollaire 3.2]).  $\square$

**Remarques 13.1.** La preuve du théorème 10.1 permet de formuler les deux remarques suivantes :

1. l'hypothèse de  $\phi$ -saturation infinitésimale assure a priori que la partie lisse et connexe du normalisateur  $N_G(\mathfrak{u})$  contient un tore (ce qui est une condition absolument nécessaire à la véracité de l'énoncé). En effet soit  $H \subseteq N_G(\mathfrak{u})$  un sous-groupe connexe de type multiplicatif maximal, supposons que  $N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0$  ne contiennent pas de tore, l'intersection  $H \cap N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0$  est donc triviale et  $N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0$  est unipotent (une fois de plus, cela découle de la maximalité de  $H$  qui exclut la présence d'éventuels facteurs de type  $\mu_p$  dans  $N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0$ , puisque  $k$  est algébriquement clos cela suffit pour conclure). Mais alors  $J_{\mathfrak{u}} = N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0$  dans la preuve du théorème 10.1, autrement dit  $N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0$  est à la fois parabolique et unipotent, ce qui est absurde.
2. Par ailleurs, la généralisation infinitésimale du théorème [2, 2.5] permettait déjà de démontrer une version infinitésimale du théorème 10.1, à savoir le même énoncé mais pour les algèbres de Lie. Lorsque  $G$  est de type  $(RA)$ , cela suffit même à démontrer la version "forte" du théorème de Morozov 10.1. En pratique cette hypothèse combinée avec l'hypothèse d'une caractéristique séparablement bonne pour  $G$  revient à demander que  $G$  ne possède aucun facteur de type  $A_{pm-1}$ . Commençons par montrer que la version infinitésimale permet d'obtenir la version infinitésimale du théorème de Morozov : la  $p$ -algèbre  $p$ -nil de  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  de l'énoncé du théorème s'intègre en un sous-groupe unipotent lisse connexe  $J_{\mathfrak{u}}$ . D'après le lemme 12.1 les normalisateurs  $N_G(\mathfrak{u})$  et  $N_G(J_{\mathfrak{u}})$  sont égaux. Soit  $V$  le radical unipotent de  $N_G(\mathfrak{u})$ . Puisque  $J_{\mathfrak{u}}$  est un sous-groupe unipotent lisse connexe et distingué de  $N_G(\mathfrak{u})$ , donc de  $N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0$ , il est contenu dans le radical unipotent de ce dernier. Autrement dit nous avons l'inclusion  $U \subseteq V$  et tout l'enjeu est de montrer l'inclusion inverse. Une fois de plus puisque les groupes considérés ici sont lisses et connexes il suffit de vérifier cette inclusion sur les algèbres de Lie (en utilisant [19, II, §5, n°5.5]) : d'après le lemme C.21 l'algèbre de Lie  $\mathfrak{v}$  est une  $p$ -sous-algèbre  $p$ -nil de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ . Puisque  $N_G(\mathfrak{u})^0$  est  $\phi$ -infinimentésimale saturé, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{v}$  est un idéal de  $\text{Lie}(N_G(\mathfrak{u})) = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  d'après le point 2. de la proposition 11.10. Autrement dit  $\mathfrak{v}$  est un  $p$ -idéal  $p$ -nil de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  il est donc contenu dans l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$  (d'après le lemme C.13). Ainsi  $J_{\mathfrak{u}} = V$  est le radical unipotent de son normalisateur lisse connexe. D'après [6, corollaire 3.2] ce normalisateur est le sous-groupe parabolique  $P_G(J_{\mathfrak{u}}) \subseteq G$ . Par ailleurs puisque  $\mathfrak{u}$  est l'algèbre

de Lie du radical unipotent d'un sous-groupe parabolique, c'est l'algèbre de Lie du radical unipotent de son sous-groupe parabolique d'instabilité (celui obtenu par la méthode de Hilbert–Mumford–Kempf–Rousseau, à la section 7), autrement dit  $\mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\mathfrak{u}}) = \mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{j}_{\mathfrak{u}})$  et nous avons bien obtenu une version infinitésimale du théorème 10.1. Afin d'alléger les notations posons  $P := P_G(J_{\mathfrak{u}})$  et  $\mathfrak{p}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{j}_{\mathfrak{u}}) =: \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$ . Si maintenant  $G$  est de type  $(RA)$ , chacun de ses sous-groupes paraboliques  $Q \subseteq G$  satisfait l'identité  $Q = N_G(\mathfrak{q})^0$  (d'après [22, XXII, proposition 5.3.4]). Autrement dit nous sommes dans la situation suivante :

$$\mathfrak{p} \trianglelefteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}) \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{p}) = \text{Lie}(N_G(\mathfrak{p})^0),$$

en vertu du point 1. de la proposition 11.10. Ceci se traduit par les inégalités suivantes

$$\dim(\mathfrak{p}) = \dim(P) \leq \dim(N_G(\mathfrak{u})) \leq \dim(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})) \leq \dim(N_G(\mathfrak{p})^0) = \dim(P)$$

et permet de conclure :  $P_G(J_{\mathfrak{u}}) = N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0 = N_G(\mathfrak{u})$ . L'égalité  $N_G(\mathfrak{u}) = P_G(\lambda_{\mathfrak{u}})$  en découle comme expliqué dans la démonstration ci-dessus.

### 13.2 Démonstrations des corollaires 10.2 et 10.3

Les paragraphes précédents avaient pour but d'adapter les techniques et notions développées lorsque  $p > h(G)$  au contexte des caractéristiques séparablement bonnes pour le  $k$ -groupe réductif  $G$ . Une fois ce travail effectué, les démonstrations des corollaires 10.2 et 10.3 sont exactement les mêmes que celles des corollaires 4.3 et 4.4.

*Démonstration du corollaire 10.2.* Tout l'enjeu est en fait d'obtenir la suite d'égalités :

$$\begin{aligned} \text{rad}_p(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})) &= \{x \in \text{rad}_p(N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})) \mid x \text{ est } p\text{-nilpotent}\} \\ &= \{x \in \text{rad}_p(\text{Lie}(N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0)) \mid x \text{ est } p\text{-nilpotent}\} = \text{rad}_p(\text{Lie}(N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0)) = \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(N_G(\mathfrak{u})_{\text{réd}}^0), \end{aligned}$$

établie au corollaire 8.20 dans le contexte de la caractéristique  $p > h(G)$ . Notons que puisque  $p$  est séparablement bon, nous avons toujours  $p \geq 3$  ou  $p = 2$  uniquement dans le cadre défini par la remarque C.25, voir la table 1. Nous pouvons donc utiliser le lemme C.24 nécessaire à la démonstration, du lemme 8.20, et dont la démonstration reposait sur l'évaluation du défaut de lissité d'un groupe infinitésimalement saturé proposée par P. Deligne. Il suffit de reproduire l'argument en invoquant cette fois le théorème 10.4. Le reste de la preuve suit verbatim.  $\square$

La démonstration du corollaire 10.3 est maintenant immédiate :

*Démonstration du corollaire 10.3.* Considérons les tours de l'énoncé et notons  $\mathfrak{u}_{\infty}$ , respectivement  $\mathfrak{q}_{\infty}$ , les objets limites. Puisque par hypothèse  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty})$  est  $\phi$ -infinitésimalement saturé, la preuve du corollaire 10.2 permet d'identifier l'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}_{\infty}$  avec le  $p$ -radical de son normalisateur  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u}_{\infty})$ . D'après le corollaire 10.3 ce normalisateur est une sous-algèbre de Lie parabolique de  $\mathfrak{g}$ . Le même énoncé assure qu'elle dérive du sous-groupe  $P(U_{\infty})$  obtenu en appliquant le théorème de Veisfeiler–Borel–Tits (voir [6, Corollaire 3.2]) au groupe  $U_{\infty}$  qui intègre  $\mathfrak{u}_{\infty}$  et qu'elle est également l'algèbre de Lie du sous-groupe parabolique optimal pour  $\mathfrak{u}$ , noté  $P_G(\lambda_{\mathfrak{u}_{\infty}})$ .  $\square$

## Annexe A Hypothèses sur la caractéristique

Dans cette section et sauf mention expresse du contraire  $k$  est un corps de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  est un  $k$ -groupe réductif.

Soit  $T \subset G$  un tore maximal, notons  $W = W(G, T)$  le groupe de Weyl et  $\Phi = \Phi(G, T)$  le système de racines associés. Soient alors  $\Phi^+$  un système de racines positives et  $\Delta := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  la base de racines correspondantes qui permettent de définir  $T \subset B \subset G$  le sous-groupe de Borel

correspondant.

Supposons pour l'instant que  $\Phi$  est irréductible, soit  $\alpha := \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i$  sa plus haute racine. La hauteur de  $G$ , notée  $H(G)$ , est la hauteur de  $\alpha$ , soit ici  $H(G) = \sum_{i=1}^n a_i$ . Le nombre de Coxeter de  $G$ , noté  $h(G)$ , est la hauteur de  $G$  plus 1.

Pour toute racine  $\beta \in \Phi$ , notons  $\beta^\vee$  la coracine correspondante. Soit  $\alpha^\vee := \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i^\vee$  la coracine associée à la plus haute racine. La caractéristique  $p$  de  $k$  est dite :

- de torsion pour  $\Phi$  s'il existe  $i \in [1, \dots, n]$  tel que  $p$  divise  $b_i$  ;
- mauvaise pour  $\Phi$  s'il existe  $i \in [1, \dots, n]$  tel que  $p$  divise  $a_i$  ;
- bonne pour  $\Phi$  si elle n'est pas mauvaise pour  $\Phi$  ;
- très bonne pour  $\Phi$  si elle est bonne pour  $\Phi$  et si  $p$  ne divise pas  $n + 1$  lorsque  $\Phi$  est de type  $A_n$ .

Pour une discussion plus approfondie sur les entiers de torsion pour  $G$  voir par exemple [67], les bonnes caractéristiques sont notamment discutées dans [65, §0.3].

Les valeurs de  $p$  en fonction du type de  $G$  sont listées dans la table ci-dessous, le rang du  $k$ -groupe algébrique  $G$  est également mentionné, il est égal à la dimension commune de ses tores maximaux (voir [22, XIX 1.5]), et est noté  $\text{rg}(G)$ .

Type de $G$	Entiers de torsion	Bonnes caractéristiques	Très bonnes caractéristiques	$\text{rg}(G)$	$h(G)$
$A_n$	1	toutes	$p \nmid n + 1$	$n$	$n$
$B_n$ , où $n \geq 2$	2	$> 2$	$> 2$	$n$	$2n$
$C_n$ , où $n \geq 2$	1	$> 2$	$> 2$	$n$	$2n$
$D_n$ , où $n \geq 3$	2	$> 3$	$> 3$	$n$	$2(n - 1)$
$E_6$	3	$> 3$	$> 3$	6	12
$E_7$	4	$> 3$	$> 3$	7	18
$E_8$	6	$> 5$	$> 5$	8	30
$F_4$	3	$> 3$	$> 3$	4	12
$G_2$	2	$> 3$	$> 3$	2	6

TABLE 1 – Hypothèses sur la caractéristique pour un groupe simple.

Lorsque la caractéristique est très bonne pour  $G$ , l'algèbre de Lie de  $G$  est munie d'une forme de Killing non dégénérée (voir par exemple [66, I, 5.3], [13, 1.16], et [39, 2.9]).

Lorsque  $\phi$  n'est plus irréductible et  $G$  est arbitraire, la hauteur de  $G$  est le maximum des hauteurs prises sur les composantes irréductibles de  $G$ , et le nombre de Coxeter de  $G$  est le maximum des nombres de Coxeter des composantes irréductibles de  $\phi$  (notons que l'égalité  $h(G) = H(G) + 1$  est encore vérifiée dans le cas réductif). La caractéristique  $p$  de  $k$  est :

- *de torsion* pour  $G$  réductif arbitraire si elle est de torsion pour une composante irréductible de  $\Phi$ , ou si  $p$  divise l'ordre du groupe fondamental de  $G$  ;
- *mauvaise* pour  $G$  si elle est mauvaise pour une composante irréductible de  $\Phi$ ,
- *bonne*, respectivement *très bonne*, pour  $G$  si elle est bonne, respectivement très bonne, pour chaque composante irréductible de  $\Phi = \Phi(G, T)$ .

De manière générale, la table 1 permet de vérifier que si la caractéristique est très bonne pour  $G$  alors elle n'est pas de torsion pour  $G$ . Par ailleurs, lorsque  $p > h(G)$  alors  $p$  est très bonne pour  $G$ .

Enfin, rappelons qu'un  $k$ -groupe réductif  $G$  satisfait les hypothèses standard (voir [39, 2.9]) si :

- (H1) le groupe dérivé de  $G$  est simplement connexe,
- (H2) la caractéristique de  $k$  est bonne pour  $G$ ,
- (H3) il existe une forme bilinéaire, symétrique,  $G$ -équivariante et non dégénérée sur  $\mathfrak{g}$ .

Rappelons que d'après [60, I, §8, Corollary] si  $\mathfrak{g}$  est munie d'une forme bilinéaire, symétrique  $G$ -équivariante et non dégénérée, l'algèbre de Lie est semi-simple (i.e. son radical résoluble est nul, voir [68, 1.7, Definition] et l'annexe C.3). Remarquons, d'après ce qui précède, que lorsque  $G$  est simple et simplement connexe, si  $p$  est très bon pour  $G$ , ce dernier satisfait les hypothèses standard. Notons enfin que J. C. Jantzen fournit dans [39, 2.9] des caractérisations explicites pour les algèbres de Lie des groupes réductifs satisfaisant de telles propriétés, et dans [40, B.6] des critères pour que les groupes réductifs adjoints satisfassent les hypothèses standard.

Lorsque  $k$  est un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$  et  $G$  est un  $k$ -groupe semi-simple, si  $p$  n'est pas de torsion pour  $G$ , le résultat suivant découle de [47, theorem 2.2 et remark a)] :

**Corollaire A.1** (de [47, theorem 2]). *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe semi-simple. Supposons que  $p$  n'est pas de torsion pour  $G$ . Soit  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre  $p$ -nil (voir l'annexe C.3). Alors  $\mathfrak{u}$  est une sous-algèbre d'une algèbre de Borel  $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ .*

**Remarque A.2.** 1. En réalité  $\mathfrak{u}$  est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie du radical unipotent d'un sous-groupe de Borel  $B \subseteq G$ . En effet, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{b}$  est la somme semi-directe de  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$  et  $\mathfrak{t}$ . Ce dernier facteur étant l'algèbre de Lie d'un tore, il ne contient aucun élément  $p$ -nilpotent (voir C.3) et nécessairement  $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$ .

2. Compte-tenu du point précédent, le corollaire se généralise à tout  $k$ -groupe réductif  $G$  où  $k$  est un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  qui n'est pas de torsion pour  $G$  : soient  $\pi : G \rightarrow G' := G/Z_{\text{red}}^0(G) = G/\text{Rad}(G)$  l'application quotient et  $\mathfrak{u}' := \text{Lie}(\pi)(\mathfrak{u})$  la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$  issue de  $\mathfrak{u}$ . Remarquons que  $\mathfrak{u} \cong \mathfrak{u}'$  (puisque  $\text{rad}(\mathfrak{g})$  est torale, elle ne contient donc aucun élément  $p$ -nilpotent). D'après le corollaire A.1 et le point précédent  $\mathfrak{u}' \subseteq \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}'}(B') \subset \mathfrak{b}'$  où  $\mathfrak{b}'$  est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Borel  $B'$  de  $G'$ . Soit  $B = \pi^{-1}(B')$ . Puisque  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}'}(B') \cong \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(B)$  on peut toujours supposer que  $\mathfrak{u}$  est une sous-algèbre d'une sous-algèbre de Borel  $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ .

Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif. Lorsque  $G$  est un groupe semi-simple la caractéristique de  $k$  est séparablement bonne pour  $G$  si :

1. l'entier  $p$  est séparablement bon pour  $G$ ,
2. le morphisme  $G^{\text{sc}} \rightarrow G$ , où  $G^{\text{sc}}$  désigne le revêtement simplement connexe de  $G$ , est séparable.

Lorsque  $G$  est un groupe réductif (au sens de [22, XIX Définition 2.7], donc en particulier connexe), l'entier  $p$  est séparablement bon s'il est séparablement bon pour le groupe dérivé  $[G, G]$  (voir [57, Definition 2.2]). Comme souligné dans le paragraphe qui suit la définition 2.2 de [57], si  $p$  est plutôt bon pour  $G$  alors il est séparablement bon. Cette dernière condition est toutefois moins restrictive en type  $A$ , qui est le seul pour lequel les bons, séparablement et très bons entiers ne coïncident pas.

## Annexe B Résultats sur les groupes de type multiplicatif

**Corollaire B.1** (de [16, Proposition A.2.11]). *Soient  $k$  un corps et  $G$  un  $k$ -groupe affine algébrique lisse. Les sous-groupes connexes de type multiplicatif de  $G$  maximaux pour ces propriétés sont les tores maximaux de  $G$ .*

*Démonstration.* Sans perte de généralité nous pouvons supposer que  $G$  est connexe (puisque tout sous-groupe de type multiplicatif connexe maximal de  $G$  est contenu dans la composante neutre  $G^0$ ). Soit  $H$  un sous-groupe connexe de type multiplicatif maximal de  $G$ .

Remarquons également que, comme expliqué dans la preuve du corollaire 3.3 de [2], le centralisateur de  $H$  dans  $G$ , noté  $Z_G^0(H)$ , est un sous-groupe lisse de  $G$ . Il s'agit d'une application

directe du théorème de lissité des centralisateurs (voir par exemple [19, II, §5, 2.8]) : puisque  $G$  est lisse, l'ensemble des points fixes de  $G$  pour la conjugaison par  $H$  est lisse sur  $k$ .

Raisonnons par récurrence sur la dimension de  $G$ , le cas de dimension 0 est trivial.

Si maintenant  $G$  est de dimension strictement positive, de deux choses l'une :

1. soit l'inclusion  $Z_G^0(H) \subset G$  est stricte, dans ce cas  $H$  est un sous-groupe connexe de type multiplicatif maximal dans  $Z_G^0(H)$  et par récurrence c'est un  $k$ -tore (de  $Z_G^0(H)$ , donc de  $G$ );
2. soit  $Z_G^0(H) = G$  et  $H$  est central dans  $G$ . Nous proposons deux manières de traiter ce cas.

- (i) Une première option consiste à considérer le quotient  $Z_G^0(H)/H = G/H$ , c'est un groupe affine, connexe, lisse puisque  $G = Z_G^0(H)$  est lisse, et nous montrons que  $G/H$  est unipotent.

Notons  $\underline{G}_t$ , le  $k$ -sous-groupe de  $G/H$  engendré par les  $k$ -tores de  $G/H$  et considérons la suite exacte donnée par [16, Proposition A.2.11] :

$$1 \longrightarrow \underline{G}_t \longrightarrow G/H \longrightarrow U \longrightarrow 1.$$

où  $U$  est un groupe unipotent. Soit  $\underline{T} \subset G/H$  un  $k$ -tore, notons  $H'$  son image inverse dans  $G$ . C'est une extension centrale de  $\underline{T}$  par  $H$ , donc un  $k$ -groupe connexe de type multiplicatif d'après [21, IX, Proposition 8.2 (i)], et nous avons  $H \subseteq H'$ . La maximalité de  $H$  impose que cette inclusion soit une égalité, autrement dit  $H = H'$ . En particulier nous avons  $\underline{T} = \{1\}$  et  $\underline{G}_t = \{1\}$ , donc le quotient  $G/H = U$  est unipotent, comme nous l'affirmions au début de ce point. En résumé nous avons une suite exacte centrale

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow G/H = U \longrightarrow 1,$$

Cela implique que tout sous-groupe connexe de type multiplicatif de  $G$  est contenu dans  $H$  qui est donc l'unique sous-groupe connexe de type multiplicatif maximal de  $G$ .

Notons  $\bar{k}$  la clôture algébrique de  $k$ . La suite exacte ci-dessus induit une suite exacte :

$$1 \longrightarrow H_{\bar{k}} \longrightarrow G_{\bar{k}} \longrightarrow (G/H)_{\bar{k}} = U_{\bar{k}} \longrightarrow 1,$$

par changement de base. En particulier  $H_{\bar{k}}$  est l'unique  $\bar{k}$ -sous-groupe de type multiplicatif maximal de  $G_{\bar{k}}$ .

Sans perte de généralité nous pouvons donc supposer que  $k$  est algébriquement clos. L'argument est alors identique à celui développé dans la preuve de [2, corollary 3.3] : le quotient  $G/H$  est unipotent par maximalité de  $H$  : il suffit, d'après [21, XVII, Proposition 4.3.1 iv] de montrer que  $G$  ne contient pas de sous-groupe isomorphe à  $\mu_p$ . Mais l'existence d'un tel sous-groupe impliquerait qu'il existe une extension non-triviale de  $H$  par un groupe de type multiplicatif non trivial, ce qui contredirait la maximalité de  $H$ . Le résultat découle alors de [21, Théorème 6.1.1 A iv)] : puisque le quotient  $G/H$  est unipotent, lisse, et puisque  $k$  est algébriquement clos donc parfait, l'extension de  $G/H$  par  $H$  est triviale. La lissité de  $H$  se déduit de celle de  $G$  et  $G/H$ , et implique que  $H$  est un tore d'après [19, IV, §1, n°3, corollaire 3.9].

- (ii) Une autre manière de procéder est d'appliquer directement la proposition A.2.11 de [16] à  $G$ . Cela fournit une suite exacte :

$$1 \longrightarrow G_t \longrightarrow G \longrightarrow V \longrightarrow 1,$$

où  $V$  est un groupe unipotent lisse et connexe et  $G_t$  est le  $k$ -sous-groupe de  $G$  engendré par les  $k$ -tores de  $G$ . Le sous-groupe  $H \subseteq G$  étant de type multiplicatif connexe maximal pour ces propriétés dans  $G$ , il satisfait les mêmes propriétés dans  $G_t$  (remarquons que puisque le quotient  $G/G_t = U$  est unipotent, le sous-groupe de type multiplicatif  $H$  intersecte  $U$  trivialement, autrement dit il est inclus dans  $G_t$ ). Si  $V \neq 1$  l'hypothèse de récurrence s'applique et  $H$  est un  $k$ -tore. Sinon  $G_t = G$ , et si  $T$  est un  $k$ -tore de  $G$ , le sous-groupe  $H \cdot T \subset G$  est de type multiplicatif, connexe et contient  $H$ . Par maximalité de  $H$  nous avons égalité, autrement dit  $T \subset H$ , donc  $G_t \subset H$  et nous avons montré  $H = G_t = G$ . La lissité de  $H$  se déduit de celle de  $G$ , c'est donc un  $k$ -tore. □

## Annexe C Résultats techniques sur les algèbres de Lie

### C.1 Résultats préliminaires sur les normalisateurs et centralisateurs

Dans cette sous-section nous adoptons le formalisme de [19, II, §4]. Soient  $A$  un anneau et  $G$  un groupe affine au-dessus de  $\text{Spec}(A)$ . Dans la suite les notations utilisées sont celles de [19, II, §4, 3.7], pour rappel :

1. la loi de groupe de  $\mathfrak{g}$  est notée additivement ;
2. soient  $A[t]$  l'algèbre des polynômes en  $t$ , et  $\epsilon$  l'image de  $t$  par la projection

$$A[t] \rightarrow A[t]/(t^2) =: A[\epsilon].$$

L'algèbre de Lie de  $G$ , notée  $\mathfrak{g}$ , s'identifie au noyau de la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow \text{Lie}(G) \longrightarrow G(A[\epsilon]) \xrightarrow{\quad} G(A) \longrightarrow 1,$$

pour tout  $y \in \mathfrak{g}$  l'image de  $y$  dans  $G(A[\epsilon])$  est notée  $e^{\epsilon y}$  et  $\mathfrak{g}$  désigne aussi bien l'algèbre de Lie de  $G$  que son image dans  $G(A[\epsilon])$ .

#### C.1.1 Centralisateurs

**Lemme C.1** ([19, II, §4, 2.5] ou [15, Proposition 1.2.3]). *Soit  $H$  un schéma en groupes au-dessus de  $A$  sur lequel  $G$  agit. Alors  $\text{Lie}(Z_G(H))$  est le sous-espace des points de  $\mathfrak{g}$  invariants par  $H$ -conjugaison, noté  $\mathfrak{g}^H$ .*

*Démonstration.* Rappelons (voir [19, II, §1, n°3.4]) que  $Z_G(H)$  est le sous-foncteur de  $G$  défini de telle sorte que pour toute  $A$ -algèbre  $R$ , l'ensemble  $Z_G(R)$  est la donnée de tous les éléments  $g \in G(R)$  tels que

$$\text{Ad}(g) : G \times_{\text{Spec}(A)} \text{Spec}(R) \rightarrow G \times_{\text{Spec}(A)} \text{Spec}(R)$$

induit l'identité sur  $H \times_{\text{Spec}(A)} \text{Spec}(R)$ . Autrement dit,

$$\begin{aligned} \text{Lie}(Z_G(H)) &= \mathfrak{g} \cap Z_G(H)(A[\epsilon]) \\ &= \{g \in \mathfrak{g} \mid \text{Ad}(g)h = h \forall h \in H(A[\epsilon])\} \\ &= \mathfrak{g}^H. \end{aligned}$$

□

**Lemme C.2.** Soit  $A$  un anneau, notons  $S = \text{Spec}(A)$ , soient  $G$  un  $S$ -schéma en groupes affine et  $\mathfrak{h}$  un sous-espace de  $\mathfrak{g}$ , alors l'égalité  $\text{Lie}(Z_G(\mathfrak{h})) = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  est satisfaite.

*Démonstration.* Par définition nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Lie}(Z_G(\mathfrak{h})) &= \mathfrak{g} \cap Z_G(\mathfrak{h})(A[\epsilon]) \\ &= \{g \in \mathfrak{g} \mid \text{Ad}(g_{A[\epsilon]})(x) = x, \forall x \in \mathfrak{h}(A[\epsilon])\}. \end{aligned}$$

Dans  $G(A[\epsilon, \epsilon'])$  la dernière relation s'écrit  $e^{\epsilon g} e^{\epsilon' x} e^{-\epsilon g} e^{-\epsilon' x} = e^{\epsilon \epsilon' [g, x]} = 1$ , autrement dit le crochet  $[g, x]$  s'annule (ce qui est une condition dans  $G(A[\epsilon])$ ). Nous obtenons donc :

$$\text{Lie}(Z_G(\mathfrak{h})) = \{g \in \mathfrak{g} \mid [g, x] = 0, \forall x \in \mathfrak{h}(A[\epsilon])\} = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}).$$

□

**Remarque C.3.** Même lorsque  $k$  est un corps algébriquement clos, si nous notons  $Z_G(\mathfrak{h})_{\text{réd}}$  la partie lisse du centralisateur, il n'y a aucune raison a priori pour que l'égalité  $\text{Lie}(Z_G(\mathfrak{h})_{\text{réd}}) = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  soit vérifiée (voir par exemple [39, 2.3]).

**Remarque C.4.** Soit  $S$  un schéma et soit  $G$  un  $S$ -schéma en groupes. Comme indiqué dans [20, 5.3.3] si  $G$  est un  $S$ -schéma en groupes l'algèbre de Lie obtenue par dérivation  $\text{Lie}(Z_G)$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ .

D'après [21, XII Théorème 4.7 d) et Proposition 4.11] lorsque  $G$  est lisse et affine sur  $S$ , à fibres connexes et de rang unipotent nul, le centre de  $G$  est le noyau de la représentation adjointe  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ . Sous ces hypothèses l'égalité  $\text{Lie}(Z_G) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$  est vérifiée. En effet la suite exacte de groupes algébriques

$$1 \longrightarrow Z_G \longrightarrow G \xrightarrow{\text{Ad}} \text{GL}(\mathfrak{g}),$$

induit par dérivation une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \text{Lie}(Z_G) \longrightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{ad} := \text{Lie}(\text{Ad})} \text{End}(\mathfrak{g})$$

(voir [19, II, §4, n°1.5]). Nous en déduisons l'égalité désirée puisque par définition  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} := \ker(\text{ad})$ . Ce résultat s'applique en particulier à tout  $S$ -groupe réductif  $G$  et à tout sous-groupe parabolique  $P \subseteq G$  (puisque tout sous-groupe de Cartan de  $P$  est un sous-groupe de Cartan de  $G$ ).

### C.1.2 Voisinages infinitésimaux de l'identité

Soient  $S = \text{Spec}(A)$  un schéma affine et  $Y$  un  $S$ -schéma non-vide, lisse, affine et à fibres connexes. Soit  $y \in Y$  un point fermé. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $Y(y)_n$  le sous-schéma fermé de  $Y$  défini par le  $A$ -module quasi-cohérent  $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^{n+1}$ , où  $\mathfrak{m}_y$  désigne l'idéal de  $\mathcal{O}_Y$  associé à  $y$ . Les schémas  $Y(y)_n$  sont appelés voisinages infinitésimaux d'ordre  $n$  de  $y$ .

Dans le cas particulier où  $Y$  est un schéma en groupes lisse, notons  $Y_n$  le voisinage infinitésimal d'ordre  $n$  de l'identité. Dans ce cas  $Y_1 \cong \text{Lie}(Y)$  puisque  $\text{Lie}(Y) = (\omega_{Y/S}^1)^\vee \cong \omega_{Y/S}^1$  d'après [20, II, scholie 4.11.3 et notation 4.11.6] et puisque les espaces vectoriels sont de dimension finie.

Rappelons la définition suivante :

**Définition C.5.** Étant donné un schéma  $X$ , une famille  $\{X_\alpha\}$  de sous-schémas fermés de  $X$  est faiblement schématiquement dense dans  $X$  si l'unique sous-schéma fermé de  $X$  qui contient tous les  $X_\alpha$  est le schéma  $X$  lui-même.

Pour tout  $S$ -groupe affine lisse  $H$ , la famille des voisinages infinitésimaux de l'identité  $\{H_n\}_{n>0}$  est faiblement schématiquement dense dans  $H$  et  $N_G(H) = \bigcap_{n>0} N_G(H_n)$  (voir [15, proof of Theorem 2.1.6]).

### C.1.3 Normalisateurs

Soit  $A$  un anneau, notons  $S = \text{Spec}(A)$ , et soit  $G$  un  $S$ -groupe de présentation finie. Dans ce qui suit  $H \subseteq G$  est un sous-groupe fermé. Rappelons que d'après [19, II, §1 n°3, Théorème 3.6 b)] les normalisateurs  $N_G(H)$  et  $N_G(\mathfrak{h})$  sont représentables par des sous-foncteurs-groupes fermés de  $H$ .

**Lemme C.6.** Si  $H \subseteq G$  est un sous-groupe fermé lisse à fibres connexes, alors l'inclusion  $N_G(H) \subseteq N_G(\mathfrak{h})$  est vérifiée.

*Démonstration.* Puisque  $N_G(H) = \bigcap_{n>0} N_G(H_n)$  d'après la preuve de [15, Theorem 2.1.6] et comme  $H_1$  est isomorphe à  $\mathfrak{h}$  d'après le paragraphe précédent, on obtient l'inclusion désirée  $N_G(H) \subseteq N_G(H_1) = N_G(\mathfrak{h})$ .  $\square$

**Lemme C.7.** Soit  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie. Alors l'égalité  $\text{Lie}(N_G(\mathfrak{h})) = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  est vérifiée.

*Démonstration.* Par définition

$$\begin{aligned} \text{Lie}(N_G(\mathfrak{h})) &= \mathfrak{g} \cap N_G(\mathfrak{h})(A[\epsilon]) \\ &= \{g \in \mathfrak{g} \mid \text{Ad}(g_{A[\epsilon]})(x) \in \mathfrak{h}_{A[\epsilon]}, \forall x \in \mathfrak{h}(A[\epsilon])\}. \end{aligned}$$

Dans  $G(A[\epsilon, \epsilon'])$ , puisque  $\epsilon^2 = 0$ , la dernière relation s'écrit

$$\text{Ad}(e^{\epsilon g})e^{\epsilon' x} = e^{\epsilon' x} e^{\epsilon' \epsilon [g, x]} = e^{\epsilon' (x + \epsilon [g, x])} \in \mathfrak{h}_R \cap G(A[\epsilon, \epsilon']).$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} \text{Lie}(N_G(\mathfrak{h})) &= \{g \in \mathfrak{g} \mid x + \epsilon [g, x] \in \mathfrak{h}_{A[\epsilon]}, \forall x \in \mathfrak{h}(A[\epsilon])\} \\ &= \{g \in \mathfrak{g} \mid \epsilon [g, x] \in \mathfrak{h}_{A[\epsilon]}, \forall x \in \mathfrak{h}(A[\epsilon])\} \\ &= \{g \in \mathfrak{g} \mid [g, x] \in \mathfrak{h}_{A[\epsilon]}, \forall x \in \mathfrak{h}(A[\epsilon])\} \\ &= N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}). \end{aligned}$$

$\square$

La deuxième partie du lemme suivant est établie dans la preuve de [16, proposition 3.5.7] lorsque  $k$  est un corps séparablement clos. Par inspection de la preuve, il suffit que  $H(k)$  soit Zariski-dense dans  $H$  pour que le résultat soit encore vérifié. C'est en particulier le cas lorsque :

- le corps  $k$  est parfait et le sous-groupe  $H$  est connexe (voir [7, corollary 18.2]),
- le corps  $k$  est infini et le sous-groupe  $H$  est réductif (voir [7, corollary 18.2]),
- le sous-groupe  $H$  est unipotent, lisse, connexe et déployé, puisqu'alors  $H$  est isomorphe à un produit de  $\mathbb{G}_a$ . Ces conditions sont notamment vérifiées lorsque  $k$  est parfait et  $H$  est unipotent, lisse et connexe (c'est un cas particulier du premier cas).

**Lemme C.8.** *Soit  $H \subseteq G$  un sous-groupe fermé lisse de  $G$ . Alors :*

1. *en général, seule l'inclusion  $\text{Lie}(N_G(H)) \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  est vérifiée,*
2. *si  $H(k)$  est Zariski-dense dans  $H$  alors*

$$\text{Lie}(N_G(H)) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{Ad}(h)(x) - x \in \mathfrak{h} \ \forall h \in H(k)\}.$$

*Démonstration.* Le lemme C.6 permet d'établir l'inclusion  $N_G(H) \subseteq N_G(\mathfrak{h})$ . Combinant ceci avec l'égalité obtenue au lemme C.8 nous avons

$$\text{Lie}(N_G(H)) \subseteq \text{Lie}(N_G(\mathfrak{h})) = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}).$$

Pour la deuxième partie du lemme, voir [16, proposition 3.5.7]. □

**Remarques C.9.** Le premier point du lemme précédent établit une inclusion stricte des algèbres de Lie dans le cas général. Ceci est en fait une particularité de la caractéristique positive (voir également [34, 10.5 Corollary B] et la remarque qui suit le corollaire B) :

1. lorsque  $k$  est de caractéristique nulle l'inclusion est toujours une égalité (voir [34, 13 Exercice 1]),
2. lorsque  $k$  est de caractéristique  $p > 0$  il existe des contre-exemples à l'égalité : par exemple (voir [34, 10 Exercice 4]) lorsque  $p = 2$  posons  $G = \text{SL}_2$  et considérons le sous-groupe de Borel  $B$  des matrices triangulaires supérieures. Puisque  $B$  est un sous-groupe de Borel, il est son propre normalisateur. Autrement dit nous avons  $N_G(B) = B$ . Au niveau des algèbres de Lie par contre nous avons  $\text{Lie}(N_G(B)) = \mathfrak{g}$  (du fait de la caractéristique 2).

En effet  $\mathfrak{sl}_2$  est engendré par les matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et il s'agit de vérifier que  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  normalise  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Nous avons  $\left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \text{id} \in \mathfrak{b}$ .

## C.2 $p$ -algèbres de Lie restreintes

Soient  $k$  un corps de caractéristique  $p > 0$  et  $\mathfrak{g}$  une  $k$ -algèbre de Lie. Rappelons (voir [19, II, §7 n°3.1 et 3.3]) qu'une puissance  $p$ -ième sur  $\mathfrak{g}$  est une application :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ x &\mapsto x^{[p]}, \end{aligned}$$

telle que

1. l'application adjointe est compatible avec la  $p$ -puissance : pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  nous avons

$$\text{ad}(x^{[p]}) = (\text{ad}(x))^p,$$

2. pour tout  $x \in \mathfrak{g}$  et tout  $\alpha \in k$ , nous avons  $(\alpha x)^{[p]} = \alpha^p x^{[p]}$ ,
3. pour tous  $x_0, x_1 \in \mathfrak{g}$  nous avons  $(x_0 + x_1)^{[p]} = x_0^{[p]} + x_1^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x_0, x_1)$ , avec :

$$s_i(x_0, x_1) := -\frac{1}{r} \sum_{\sigma} \text{ad}(x_{\sigma(1)}) \text{ad}(x_{\sigma(2)}) \dots \text{ad}(x_{\sigma(p-1)})(x_1)$$

où  $\sigma$  parcourt les applications  $[1, p-1] \rightarrow \{0, 1\}$  qui prennent  $i$  fois la valeur 0.

Une  $p$ -algèbre de Lie sur  $k$  est la donnée d'une  $k$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et d'une puissance  $p$ -ième sur  $\mathfrak{g}$ . D'après [19, II, §7, n°3.4] l'algèbre de Lie de tout  $k$ -schéma en groupes  $G$  est munie d'une structure de  $p$ -algèbre de Lie restreinte.

Soit  $\mathfrak{g}$  une  $p$ -algèbre de Lie restreinte sur  $k$ , dans la suite nous notons  $[p]$  la puissance  $p$ -ième sur  $\mathfrak{g}$ . Une sous-algèbre  $\mathfrak{h}$  (respectivement un idéal  $\mathfrak{j}$ ) de  $\mathfrak{g}$  est une  $p$ -sous-algèbre (respectivement un  $p$ -idéal) si pour tout  $x \in \mathfrak{h}$  (respectivement tout  $x \in \mathfrak{j}$ ), la puissance  $p$ -ième satisfait  $x^{[p]} \in \mathfrak{g}$  (respectivement  $x^{[p]} \in \mathfrak{j}$ ), voir par exemple [68, §2.1 Définition]. La proposition [19, II, §7, n°3.4] permet de caractériser la puissance  $p$ -ième munissant l'algèbre de Lie d'un  $k$ -sous-groupe algébrique  $G$  d'une structure de  $p$ -algèbre. Ce faisant, elle garantit également que la  $p$ -structure dont hérite l'algèbre de Lie de tout sous-groupe algébrique  $H \subseteq G$  est compatible avec la  $p$ -structure sur  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ . Autrement dit pour tout sous-groupe algébrique  $H \subseteq G$ , la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  est une  $p$ -sous algèbre.

Une  $k$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  peut être restreinte si  $\text{ad}(\mathfrak{h})$  est une  $p$ -sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie  $\text{Dér}(\mathfrak{h})$ . Une algèbre de Lie peut être restreinte si et seulement s'il existe une puissance  $p$ -ième  $[p] : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$  qui munisse  $\mathfrak{h}$  d'une structure de  $p$ -algèbre restreinte (voir [68, 2.2 Définition (D. Winter)]).

### C.3 Radicaux et nilpotence d'une algèbre de Lie

Rappelons qu'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est nilpotente s'il existe une suite finie décroissante d'idéaux  $(\mathfrak{g}_i)_{0 \leq i \leq l}$  de  $\mathfrak{g}$  (avec  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}_l = \{0\}$ ) telle que  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$  pour tout  $0 \leq i < l$ . Un corollaire du théorème d'Engel (voir [10, §4 n°2 Corollaire 1]) assure qu'une algèbre de Lie est nilpotente si et seulement si tous ses éléments sont ad-nilpotents. De même, le paragraphe qui précède [10, §4, Proposition 6] précise que pour qu'un idéal de  $\mathfrak{g}$  soit nilpotent il faut et il suffit que tous ses éléments soient ad-nilpotents.

Soit  $\mathfrak{g}$  une  $k$ -algèbre de Lie. Définissons les objets suivants :

1. le radical résoluble (ou radical) de  $\mathfrak{g}$ , noté  $\text{rad}(\mathfrak{g})$ , est le plus grand idéal résoluble de  $\mathfrak{g}$  (voir [68, §1.7, définition]),
2. le nilradical de  $\mathfrak{g}$ , noté  $\text{Nil}(\mathfrak{g})$ , est le plus grand idéal nilpotent de  $\mathfrak{g}$  (tous ses éléments sont donc ad-nilpotents d'après ce qui précède). Lorsque  $k$  est de caractéristique nulle, c'est l'ensemble des éléments ad-nilpotents du radical de  $\mathfrak{g}$  (voir [68, §1, Corollary 3.10] et [10, §5, corollaire 7]). Notons qu'en général l'égalité  $\text{Nil}(\mathfrak{g}/\text{Nil}(\mathfrak{g})) = 0$  n'est pas satisfaite (voir [68, p. 20] pour un contre-exemple).

Rappelons :

**Lemme C.10** ([68, 2.3 Exercice 5d]). *Soient  $\mathfrak{g}$  une  $p$ -algèbre de Lie restreinte alors  $\text{Nil}(\mathfrak{g})$  est une  $p$ -sous-algèbre de Lie.*

*Démonstration.* D'après [68, Theorem 2.4] l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}/\text{Nil}(\mathfrak{g})$  est munie d'une  $p$ -structure, héritée de celle de  $\mathfrak{g}$  via le morphisme surjectif d'algèbres de Lie  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\text{Nil}(\mathfrak{g})$ . Soit  $x \in \text{Nil}(\mathfrak{g})$ , pour tout  $m \in \mathbb{N}$  nous avons  $\pi(x^{[p^m]}) = \pi(x)^{[p^m]} = 0$ , autrement dit  $x^{[p^m]} \in \text{Nil}(\mathfrak{g})$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et  $\text{Nil}(\mathfrak{g})$  est bien une  $p$ -sous-algèbre de Lie.  $\square$

**Lemme C.11** ([68, 2.3 Exercice 7]). *Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie qui peut être restreinte et  $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  un morphisme surjectif d'algèbres de Lie où  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}} = 0$ . Alors le choix d'une  $p$ -structure sur  $\mathfrak{g}$  munit  $\ker(f)$  d'une structure de  $p$ -idéal.*

*Démonstration.* Notons  $[p]$  une  $p$ -structure sur  $\mathfrak{g}$ . D'après [68, §2.2 Theorem 2.4] l'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  peut être restreinte. Cette restriction provient de  $\mathfrak{g}$  et le choix de la  $[p]$ -puissance sur  $\mathfrak{h}$  est unique (d'après [68, §2.2 corollary 2.2]) et compatible avec  $f$  (qui est donc un morphisme de  $p$ -algèbres de Lie restreintes pour cette  $p$ -structure). Soit  $x \in \ker(f)$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$  nous avons  $f(x^{[p^m]}) = f(x)^{[p^m]} = 0$  donc  $x^{[p^m]} \in \ker(f)$  et le noyau de  $f$  est un  $p$ -idéal de  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

**Corollaire C.12.** *Soit  $\mathfrak{h}$  une  $p$ -algèbre de Lie restreinte sur  $k$  alors  $\text{rad}(\mathfrak{h})$  est une  $p$ -sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{h}$ .*

*Démonstration.* Il suffit de considérer le morphisme surjectif d'algèbres de Lie  $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}/\text{rad}(\mathfrak{h})$ . Puisque  $\text{rad}(\mathfrak{h}/\text{rad}(\mathfrak{h})) = 0$  (d'après [68, 1, §7, Theorem 7.2]), le centre  $\mathfrak{z}_{\text{rad}(\mathfrak{h}/\text{rad}(\mathfrak{h}))}$  est trivial. D'après le lemme C.11, le radical de  $\mathfrak{h}$  est une  $p$ -sous-algèbre de Lie.  $\square$

Supposons que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  dérive d'un  $k$ -groupe algébrique  $G$  affine. Soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation fidèle de dimension finie. Un élément  $x \in \mathfrak{g}$  est dit nilpotent, nous écrirons  $\mathfrak{g}$ -nilpotent, si  $\text{Lie}(\rho)(x)$  est un élément nilpotent de  $\mathfrak{gl}(V)$  (notons que le morphisme dérivé induit, noté  $\text{Lie}(\rho)$ , est encore injectif puisque le foncteur Lie est exact à gauche (voir [19, II, §4, 1.5])). De la même manière, un élément  $x \in \mathfrak{g}$  est dit semi-simple si  $\text{Lie}(\rho)(x)$  est un élément semi-simple de  $\mathfrak{gl}(V)$ . Ces notions sont indépendantes du choix de la représentation fidèle  $\rho$  (voir [7, I.4.4, Theorem]). Lorsque le corps  $k$  est parfait tout élément  $x \in \mathfrak{g}$  admet une décomposition unique  $x = x_s + x_n$ , appelée décomposition de Jordan, où  $x_s$  et  $x_n$  sont des éléments semi-simple, respectivement nilpotent, de  $\mathfrak{g}$  (voir par exemple [7, I.4.4, Theorem]).

De manière générale, si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie semi-simple sur un corps de caractéristique nulle (nous ne supposons pas ici que  $\mathfrak{g}$  dérive d'un groupe algébrique), tout élément  $x \in \mathfrak{g}$  admet une unique décomposition de Jordan (voir par exemple [10, §6 n°3 Théorème 3]). De même (voir [68, 2.3 Theorem 3.5]), lorsque  $k$  est un corps parfait de caractéristique  $p > 0$  et  $\mathfrak{g}$  est une  $p$ -algèbre de Lie restreinte, une telle décomposition existe toujours avec la condition additionnelle que  $x_n$  soit  $p$ -nilpotent. Cela signifie qu'il existe un entier  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $x_n^{[p^m]} = 0$ . Nous dirons que  $x_n$  est d'ordre de  $p$ -nilpotence  $m$ .

Dans ce cadre, un élément  $x \in \mathfrak{g}$  est dit  $p$ -semi-simple si  $x$  appartient à la  $p$ -algèbre de Lie engendrée par  $x^{[p]}$ . Un élément  $x \in \mathfrak{g}$  est dit toral si  $x^{[p]} = x$ . D'après [68, §2 proposition 3.3] et la remarque qui suit cette proposition, les deux définitions de semi-simplicité sont équivalentes. Dans la suite un élément est dit  $p$ -semi-simple (respectivement  $p$ -nilpotent) s'il est semi-simple (respectivement  $\mathfrak{g}$ -nilpotent). Cette équivalence des définitions est en particulier due au théorème d'Iwasawa (voir [37]) qui assure que toute algèbre de Lie de dimension finie sur un corps de caractéristique  $p > 0$  admet une représentation fidèle. Ce résultat a été étendu par la suite par N. Jacobson (voir [38] et [60, I, §4, Theorem I.4.2]) au cadre des  $p$ -algèbres de Lie restreintes de dimension finie, avec la contrainte supplémentaire que ladite représentation respecte la  $p$ -structure.

Une sous-algèbre  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  est dite nil si tout élément de  $\mathfrak{h}$  est  $p$ -nilpotent. Une  $k$ -algèbre de Lie nil de dimension finie est nilpotente. Soulignons ici que l'étude des idéaux constitués uniquement d'éléments semi-simples de  $\mathfrak{g}$  s'avère également instructive dans certains cas. Rappelons par exemple la résultat suivant (voir [8, Proposition 2.13]) : si  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  est l'algèbre de Lie d'un  $k$ -groupe réductif, soit  $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{g}$  un idéal stable par  $G$  alors  $\mathfrak{j}$  est formé d'éléments semi-simples si et seulement si  $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ .

Supposons dans la suite que  $k$  est un corps de caractéristique  $p > 0$ . Soit  $\mathfrak{h}$  une  $p$ -algèbre restreinte (c'est en particulier le cas si  $\mathfrak{h}$  dérive d'un sous-groupe  $H \subset G$  voir par exemple [19, II, §7, n°3.4]). Un  $p$ -idéal  $\mathfrak{j} \trianglelefteq \mathfrak{h}$  est  $p$ -nilpotent s'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathfrak{j}^{[p^n]} = 0$ . Lorsque  $\mathfrak{h}$  est de dimension finie tout  $p$ -idéal  $p$ -nilpotent est  $p$ -nil (autrement dit, tous ses éléments sont  $p$ -nilpotents).

Le  $p$ -radical de  $\mathfrak{h}$ , noté  $\text{rad}_p(\mathfrak{h})$ , est le  $p$ -idéal  $p$ -nilpotent maximal de  $\mathfrak{h}$  (voir [68, 2.1, corollary 1.6]). Notons par ailleurs que l'algèbre de Lie  $\text{rad}_u(H)$  est un idéal de  $\text{Nil}(\mathfrak{h})$  (car  $U$  est un sous-groupe distingué unipotent de  $\text{Rad}(H)$ ). Nous cherchons ici à comparer ces différents objets :

**Lemme C.13.** *Soit  $\mathfrak{h}$  une  $p$ -algèbre de Lie restreinte. Alors :*

1. les inclusions suivantes sont vérifiées :

$$\text{rad}_p(\mathfrak{h}) \subseteq \text{Nil}(\mathfrak{h}) \subseteq \text{rad}(\mathfrak{h}),$$

2. le  $p$ -radical de  $\mathfrak{h}$  est contenu dans l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $\mathfrak{h}$ ,
3. l'égalité  $\text{rad}_p(\mathfrak{h}) = \text{Nil}(\mathfrak{h})$  est satisfaite si et seulement si l'inclusion  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}} \subseteq \text{rad}_p(\mathfrak{h})$  est vérifiée, où  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}$  désigne le centre de  $\mathfrak{h}$ .

*Démonstration.* L'inclusion  $\text{rad}_p(\mathfrak{h}) \subseteq \text{Nil}(\mathfrak{h})$  est immédiate puisque  $\text{rad}_p(\mathfrak{h})$  est un idéal nil (puisque  $p$ -nil) de  $\mathfrak{h}$ . C'est donc un idéal nilpotent de  $\mathfrak{h}$  (pour rappel les algèbres de Lie considérées ici sont de dimension finie). La deuxième inclusion est claire également puisque tout idéal nilpotent est en particulier résoluble (voir par exemple [68, §1.5 Remark]). Cela achève la démonstration du point 1.

Puisque cette dernière inclusion est vérifiée et puisque  $\text{rad}_p(\mathfrak{h})$  est  $p$ -nil, il est nécessairement inclus dans l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical résoluble de  $\mathfrak{h}$ . Cela conclut le point 2.

Démontrons le point 3. : le centre de  $\mathfrak{h}$  est un idéal abélien de  $\mathfrak{h}$ , il est donc inclus dans le nilradical de  $\mathfrak{h}$ . Ainsi, si l'égalité  $\text{Nil}(\mathfrak{h}) = \text{rad}_p(\mathfrak{h})$  est vérifiée l'inclusion  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}} \subseteq \text{rad}_p(\mathfrak{h})$  est satisfaite.

Réciproquement, si  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}} \subseteq \text{rad}_p(\mathfrak{h})$ , montrons que tout  $x \in \text{Nil}(\mathfrak{h})$  est  $p$ -nilpotent : comme  $\text{Nil}(\mathfrak{h})$  est un idéal nilpotent l'élément  $x$  est ad-nilpotent d'après le corollaire [10, §4 n°2 Corollaire 1]. Puisque l'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  est munie d'une  $p$ -structure il existe un entier  $n$  tel que :

$$\text{ad}(x)^{p^n} = 0 = \text{ad}(x^{[p^n]}),$$

Autrement dit  $x^{[p^n]}$  est dans le centre de  $\mathfrak{h}$ . Puisque par hypothèse  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}$  est inclus dans  $\text{rad}_p(\mathfrak{h})$  qui est un idéal  $p$ -nil, cet élément est  $p$ -nilpotent. Il existe donc un entier  $m$  tel que  $(x^{[p^n]})^{[p^m]} = (x^{[p^{n+m}]}) = 0$ . Ainsi, tout élément de  $\text{Nil}(\mathfrak{h})$  est  $p$ -nilpotent. Puisque d'après le lemme C.10 le nilradical de  $\mathfrak{h}$  est un  $p$ -idéal, nous venons de démontrer que sous nos hypothèses  $\text{Nil}(\mathfrak{h})$  est un  $p$ -idéal  $p$ -nil de  $\mathfrak{h}$ , il est donc contenu dans le  $p$ -radical de  $\mathfrak{h}$ , d'où l'égalité désirée.  $\square$

Lorsque  $\mathfrak{g}$  dérive d'un  $k$ -groupe algébrique lisse et connexe  $G$  ces objets sont à comparer avec l'algèbre de Lie du radical et du radical unipotent de  $G$ .

**Lemme C.14.** *Soient  $k$  un corps de caractéristique  $p \geq 3$  et  $G$  un  $k$ -groupe réductif. Alors*

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} = \text{rad}(\mathfrak{g}) = \text{Nil}(\mathfrak{g}).$$

**Remarque C.15.** La condition sur la caractéristique permet ici de proposer une preuve uniforme, le cas de la caractéristique 2 peut être obtenu par étude de cas en utilisant la table 1 de [33]. Par ailleurs, le lemme C.19 ci-après traite les cas d'égalité  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} = \text{Nil}(\mathfrak{g})$  pour toute caractéristique strictement positive, qui est un résultat plus faible. Cet énoncé apparaît comme un corollaire de [71, Lemma 2.1].

Nous aurons besoin du lemme suivant pour démontrer ce résultat :

**Lemme C.16.** *Considérons une suite exacte centrale de groupes algébriques*

$$1 \longrightarrow S \xrightarrow{\iota} \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

où  $\tilde{G}$  et  $G$  sont des  $k$ -groupes réductifs. Soit  $\tilde{T}$  un  $k$ -tore maximal de  $\tilde{G}$ , notons  $T := \tilde{T}/S$ . Alors  $\text{Lie}(\pi)(\tilde{\mathfrak{g}})$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  et le quotient  $\mathfrak{g}/\text{Lie}(\pi)(\tilde{\mathfrak{g}})$  est isomorphe au quotient  $\mathfrak{t}/\text{Lie}(\pi)(\tilde{\mathfrak{t}})$  en tant que  $k$ -algèbres de Lie. En particulier si  $k$  est de caractéristique  $p > 0$ , la  $p$ -algèbre de Lie quotient  $\mathfrak{g}/\text{Lie}(\pi)(\tilde{\mathfrak{g}})$  est torale.

*Démonstration.* Rappelons que le centre d'un groupe réductif est un sous-groupe diagonalisable, voir par exemple [22, XXII, Corollaire 4.1.6]). La suite exacte du lemme étant centrale, le  $k$ -groupe  $S$  est diagonalisable (puisque tout sous-groupe d'un groupe diagonalisable défini sur un corps est diagonalisable, voir [21, IX, Proposition 8.1]). Soit  $E$  un  $k$ -tore tel que  $S^0 \subseteq E$ . Un tel objet existe toujours puisque les sous-groupes connexes de type multiplicatif maximaux d'un

groupe réductif au-dessus d'un corps sont les tores maximaux (voir le lemme B.1). Le diagramme commutatif de  $k$ -groupes algébriques :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \mathbb{G}_m^r & \longrightarrow & \mathbb{G}_m^r & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 1 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G' & \xrightarrow{\pi'} & G \longrightarrow 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 1 & \longrightarrow & S^0 & \longrightarrow & \tilde{G} & \xrightarrow{\pi} & G \longrightarrow 1, \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 
 \end{array}$$

où  $G'$  est construit de telle sorte que le carré inférieur gauche du diagramme soit commutatif, induit un diagramme commutatif d'algèbres de Lie :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \\
 & & k^r & \longrightarrow & k^r & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & k^r & \longrightarrow & \mathfrak{g}' & \xrightarrow{\text{Lie}(\pi')} & \mathfrak{g} \longrightarrow 0, \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathfrak{s} & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\text{Lie}(\pi)} & \mathfrak{g} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

où l'exactitude de la deuxième ligne est assurée par la lissité du noyau de  $\pi'$  (voir [19, II, §5, n°5, Proposition 5.3]). Montrons que  $\text{Lie}(\pi)(\tilde{\mathfrak{g}})$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  : soient  $y \in \mathfrak{g}$  et  $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$  tel que  $\text{Lie}(\pi)(x) = y$ . Soit  $g \in \mathfrak{g}$ , puisque  $\text{Lie}(\pi')$  est surjectif il existe un élément  $g' \in \mathfrak{g}'$  tel que  $\text{Lie}(\pi)(g') = g$ , ainsi nous avons :  $[y, g] = [\text{Lie}(\pi)(x), \text{Lie}(\pi')(g')] = [\text{Lie}(\pi')(x), \text{Lie}(\pi')(g')] = \text{Lie}(\pi')([x, g'])$ . Puisque  $\tilde{\mathfrak{g}}$  est le noyau du morphisme  $\mathfrak{g}' \rightarrow k^r$ , c'est un idéal de  $\mathfrak{g}'$ . Le crochet  $[x, g']$  définit donc un élément de  $\tilde{\mathfrak{g}}$ . Autrement dit  $[y, g] \in \text{Lie}(\pi)(\tilde{\mathfrak{g}})$  et  $\text{Lie}(\pi)(\tilde{\mathfrak{g}})$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .

Le reste de la démonstration est une application directe de [8, corollaire 2.17]. Ce résultat assure que  $\mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{g}/\text{Lie}(\pi)(\tilde{\mathfrak{g}})$ , il faut encore montrer que l'inclusion  $\text{Lie}(\pi)(\tilde{\mathfrak{t}}) \subseteq \text{Lie}(\pi)(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap \mathfrak{t}$  est en fait une égalité. Cela se déduit des carrés inférieurs droits des diagrammes commutatifs ci-dessus : puisque  $\pi'$  est surjectif et que son noyau  $E$  est un tore, le groupe  $T$  apparaît comme l'image d'un tore  $T' \subseteq G'$  (voir [21, IX, Proposition 8.2 (ii)]). Nous avons donc  $T = T'/E = \tilde{T}/S$ . Par commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} G' & \xrightarrow{\pi'} & G \\ i \uparrow & & \uparrow \\ \tilde{G} & \xrightarrow{\pi} & G, \end{array}$$

l'image  $i(\tilde{T})$  est contenue dans  $T'$ . La suite exacte

$$1 \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{i} G' \longrightarrow \mathbb{G}_m^r \longrightarrow 1$$

induit une suite exacte de tores (le sous-groupe  $T''$  est diagonalisable d'après [21, IX, Proposition 8.1] et lisse d'après [2, II, §5, n°5, Proposition 5.3 (ii)]) :

$$1 \longrightarrow \tilde{T} \xrightarrow{i} T' \longrightarrow T'' \longrightarrow 1$$

qui demeure exacte après dérivation, par lissité de  $\tilde{T}$ . Considérons maintenant le carré inférieur droit du diagramme commutatif d'algèbres de Lie ci-dessus :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & k^r & & \\ & & & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & k^r & \longrightarrow & \mathfrak{g}' & \xrightarrow{\text{Lie}(\pi')} & \mathfrak{g} \longrightarrow 0. \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & \text{Lie}(i) & & = \\ & & & & \tilde{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\text{Lie}(\pi)} & \mathfrak{g} \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Le morphisme  $\text{Lie}(\pi')$  est toujours surjectif (puisque  $E$  est lisse), nous avons donc encore  $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'/k^r$ . D'après ce qui précède, un élément  $y \in \text{Lie}(\pi)(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap \mathfrak{t}$  est l'image d'un élément  $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$  tel que  $\text{Lie}(i)(x) \in \mathfrak{t}'$ . L'exactitude de la suite dérivée

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathfrak{t}} \xrightarrow{\text{Lie}(i)} \mathfrak{t}' \longrightarrow \mathfrak{t}'' \longrightarrow 0$$

permet de conclure que  $x \in \tilde{\mathfrak{t}}$  et puisque  $y = \text{Lie}(\pi)(x) = \text{Lie}(\pi')(i(x)) \in \text{Lie}(\pi)(\tilde{\mathfrak{t}})$ , nous avons obtenu l'inclusion désirée.  $\square$

*Démonstration du lemme C.14.* Puisque  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$  est un idéal nilpotent (donc résoluble) de  $\mathfrak{g}$  les inclusions  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} \subseteq \text{Nil}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{rad}(\mathfrak{g})$  sont immédiates. Il suffit donc de montrer que  $\text{rad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ . Puisque

les objets considérés ici sont compatibles au changement de base nous pouvons supposer que  $k$  est algébriquement clos.

Nous procédons par “dévissage” : le cas réductif se déduit du cas simplement connexe, qui est gouverné par le cas semi-simple et simplement connexe :

1. si le  $k$ -groupe  $G$  est semi-simple et simplement connexe, il se décompose en produit de groupes presque simples (voir [69, 3.1.1, p. 55]) et nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $G$  est presque simple. À l’exception du cas  $G = G_2$  pour un corps  $k$  de caractéristique 3, le quotient  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$  est un  $G$ -module simple d’après [32, Hauptsatz], autrement dit le radical  $\text{rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}})$  est trivial. Il reste à considérer le cas pathologique : si  $G$  est de type  $G_2$  au-dessus d’un corps de caractéristique 3, d’après la table 1 de [33] il n’y a que deux possibilités pour  $\text{rad}(\mathfrak{g})$  : soit ce radical trivial, soit  $\text{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{p}\mathfrak{g}\mathfrak{l}_3$ . L’algèbre de Lie  $\mathfrak{p}\mathfrak{g}\mathfrak{l}_3$  n’étant pas résoluble on conclut que  $\text{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ .
2. Lorsque  $G$  est semi-simple il admet un revêtement universel, noté  $G^{\text{sc}}$  (voir par exemple [69, 1.1.2, Theorem 1, p. 43]). Considérons l’extension centrale associée :

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow G^{\text{sc}} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1.$$

Soit  $T^{\text{sc}}$  un  $k$ -tore maximal de  $G^{\text{sc}}$  et posons  $T = T^{\text{sc}}/\mu$  (on note  $\mathfrak{t}^{\text{sc}}$ , respectivement  $\mathfrak{t}$  les algèbres de Lie induites). Le lemme ci-dessus assure que  $\text{Lie}(\pi)(\text{Lie}(G^{\text{sc}}))$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  et nous avons une suite exacte de  $p$ -algèbres de Lie restreintes :

$$0 \longrightarrow \text{Lie}(\mu) \longrightarrow \text{Lie}(G^{\text{sc}}) \xrightarrow{\text{Lie}(\pi)} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\text{Lie}(\pi)(\text{Lie}(G^{\text{sc}})) \longrightarrow 0.$$

$\cong$   
 $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}^{\text{sc}}$

Comme la préimage du radical  $\text{rad}(\mathfrak{g})$  est un idéal résoluble de  $\text{Lie}(G^{\text{sc}})$  (c’est une conséquence de [68, 1.5, Theorem 5.1 (2)] puisque l’extension est centrale), elle est contenue dans le radical de  $\text{Lie}(G^{\text{sc}}) = \mathfrak{z}_{\text{Lie}(G^{\text{sc}})}$ , d’après le cas précédent. En appliquant  $\text{Lie}(\pi)$ , il vient  $\text{rad}(\mathfrak{g}) \cap \text{Lie}(\pi)(\text{Lie}(G^{\text{sc}})) \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ , d’où  $\text{rad}(\mathfrak{g}) \cap \text{Lie}(\pi)(\text{Lie}(G^{\text{sc}})) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} \cap \text{Lie}(\pi)(\text{Lie}(G^{\text{sc}}))$ . La suite exacte ci-dessus induit donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} \cap \text{Lie}(\pi)(\text{Lie}(G^{\text{sc}})) \longrightarrow \text{rad}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\text{Lie}(\pi)} \mathfrak{h} \longrightarrow 0.$$

où  $\mathfrak{h}$  est une  $p$ -sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{t}/\text{Lie}(\pi)(\mathfrak{t}^{\text{sc}})$ , qui est torale. Les éléments  $p$ -nilpotents de  $\text{rad}(\mathfrak{g})$  sont donc triviaux et  $\text{rad}(\mathfrak{g})$  consiste uniquement en des éléments semi-simples. Puisque le radical de  $\mathfrak{g}$  est un sous- $G$ -module propre de  $\mathfrak{g}$ , ceci implique que l’inclusion  $\text{rad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$  est vérifiée d’après [8, Proposition 2.13]. En effet, c’est un idéal propre de  $\mathfrak{g}$  puisque cette dernière est l’algèbre de Lie d’un  $k$ -groupe réductif, et il s’agit de montrer que  $N_G(\text{Nil}(\mathfrak{g})) = G$ . D’après [19, II, §5, n°3.2] puisque  $G$  est lisse et de présentation finie, et puisque  $\mathfrak{g}$  est lisse sur un corps (donc réduit), et fermé dans  $\text{Lie}(G)$ , il suffit de vérifier la stabilité de  $\text{Nil}(\mathfrak{g})$  sur les  $\bar{k}$ -points. Ceci est immédiat puisque le radical de  $\mathfrak{g}(\bar{k})$  est stable pour l’action adjointe (l’image de  $\text{rad}(\mathfrak{g})(\bar{k})$  par  $G(\bar{k})$ -conjugaison est un idéal résoluble de  $\mathfrak{g}(\bar{k})$ , la maximalité se déduit en appliquant le morphisme réciproque).

3. Si  $G$  est un  $k$ -groupe réductif arbitraire, la suite exacte :

$$1 \longrightarrow (Z_G^0)_{\text{réd}} = \text{Rad}(G) \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} G/(Z_G^0)_{\text{réd}} := G^{\text{ss}} \longrightarrow 1,$$

(voir par exemple [22, XXII Définition 4.3.6]) permet de se ramener au cas précédent : puisque  $\text{Rad}(G)$  est lisse, cette suite exacte induit une suite exacte d'algèbres de Lie (voir [19, §5, n°5, Proposition 5.3])

$$0 \longrightarrow \text{Lie}(\text{Rad}(G)) \longrightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{Lie}(\pi)} \text{Lie}(G^{\text{ss}}) \longrightarrow 0,$$

et puisque  $\text{Lie}(\pi)$  est surjective  $\text{Lie}(\pi)(\text{rad}(\mathfrak{g}))$  est un idéal résoluble de  $\text{Lie}(G^{\text{ss}})$ , il est donc contenu dans le centre de  $\text{Lie}(G^{\text{ss}})$  d'après ce qui précède. Soit  $x \in \text{rad}(\mathfrak{g})$ , puisque nous pouvons supposer  $k$  algébriquement clos, cet élément admet une décomposition de Jordan (voir par exemple [68, 2.3 Theorem 3.5]) :  $x = x_s + x_n$  où  $x_s$  désigne la composante semi-simple de  $x$ , et  $x_n$  est un élément  $p$ -nilpotent de  $\text{rad}(\mathfrak{g})$ . Comme  $\pi(x) \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$  nous avons nécessairement que  $\pi(x_n) = 0$ , autrement dit  $x_n \in \text{Lie}((Z_G^0)_{\text{réd}})$  qui est torale, donc  $x_n = 0$ . Le radical de  $\mathfrak{g}$  est donc constitué uniquement d'éléments semi-simples, et d'après [8, Proposition 2.13], puisque  $\text{rad}(\mathfrak{g})$  est un sous- $G$ -module propre de  $\mathfrak{g}$ , nous avons démontré que  $\text{rad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ . □

**Remarque C.17.** Le lemme C.14 permet d'évaluer le défaut de lissité du centre de  $G$ , plus précisément nous avons :

$$\text{Lie}(Z_G)/\text{Lie}((Z_G)_{\text{réd}}) \cong \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}/\text{Lie}((Z_G)_{\text{réd}}) \cong \text{rad}(\mathfrak{g})/\text{Lie}(\text{Rad}(G)),$$

où le premier isomorphisme est obtenu grâce à la remarque C.4, et ce quotient est une  $p$ -algèbre de Lie torale d'après la preuve du lemme C.14.

**Remarque C.18.** L'analyse de la preuve montre que le seul écueil à la caractéristique 2 réside dans l'absence de simplicité potentielle du  $G$ -module  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ . Lorsque  $k$  est algébriquement clos de caractéristique 2 et que le système de racines de  $G$  n'a que des composantes irréductibles de type  $A_n$  (qui est le seul cas où nous pourrions être confronté.e.s à la caractéristique 2 dans cet article), le quotient qui nous intéresse est toujours simple d'après [32, Hauptsatz].

En particulier, cette hypothèse ne contraint pas les résultats énoncés dans cet article : en effet le lemme C.14 est utilisé pour démontrer le corollaire 8.20 qui est utile dans les démonstrations des corollaires 4.3 et 10.2 qui requièrent en particulier que la caractéristique soit bonne pour  $G$ .

Comme annoncé à la remarque C.15 le résultat suivant permet d'affiner encore les hypothèses sur la caractéristique de  $k$  dans l'étude du nilradical de l'algèbre de Lie d'un groupe réductif.

**Lemme C.19.** *Soit  $G$  un  $k$ -groupe réductif. Si  $k$  est de caractéristique 2 supposons que  $G_{k^s}^{\text{Ad}}$  ne possède pas de facteur direct  $G_1$  isomorphe à  $\text{SO}_{2n+1}$  pour un certain  $n > 0$ . Alors  $\text{Nil}(\mathfrak{g})$  est le centre de  $\mathfrak{g}$ .*

*Démonstration.* Une inclusion est immédiate : le centre de  $\mathfrak{g}$  est un idéal nilpotent de  $\mathfrak{g}$  il est donc contenu dans le nilradical de  $\mathfrak{g}$  qui est l'idéal nilpotent maximal. Remarquons que cela ne nécessite aucune hypothèse additionnelle sur la caractéristique.

Pour montrer l'inclusion inverse, notons qu'il suffit de montrer que  $\text{Nil}(\mathfrak{g})/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} = 0$ . En effet, si cela est vérifié le nilradical de  $\mathfrak{g}$  est contenu dans  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ , qui est lui-même un idéal nilpotent de  $\mathfrak{g}$ . L'égalité  $\text{Nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$  s'en déduit.

Il reste donc à s'assurer de la trivialité de  $\text{Nil}(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}})$ . La suite exacte d'algèbres de Lie de la remarque C.4 :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} = \text{Lie}(Z_G) \longrightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{ad}} \text{End}(\mathfrak{g})$$

permet d'obtenir l'inclusion  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} \subseteq \text{Lie}(G^{\text{Ad}})$ . Supposons que  $\text{Nil}(\mathfrak{g})/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} \neq 0$  et montrons que le lemme 2.1 de [71] s'applique. Il s'agit de vérifier d'une part que  $\text{Nil}(\mathfrak{g})/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$  est un  $G^{\text{Ad}}$ -sous-module de  $\text{Lie}(G^{\text{Ad}})$ , d'autre part, que pour tout tore maximal  $T^{\text{Ad}} \subseteq G^{\text{Ad}}$  l'intersection  $\text{Nil}(\mathfrak{g})/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} \cap \text{Lie}(T^{\text{Ad}})$  est triviale.

Pour vérifier la première condition remarquons que  $\text{Nil}(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}) = \text{Nil}(\mathfrak{g})/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ . En effet, l'image inverse du nilradical de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$  est un idéal nilpotent de  $\mathfrak{g}$  puisque l'extension d'algèbres de Lie considérée :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} = \text{Lie}(Z_G) \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} \longrightarrow 0$$

est centrale. Puisqu'il contient le nilradical de  $\mathfrak{g}$  (car  $\text{Nil}(\mathfrak{g})/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$  est un idéal nilpotent de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ ) il lui est égal. Il s'agit donc de montrer que  $N_{G^{\text{Ad}}}(\text{Nil}(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}})) = G^{\text{Ad}}$ . D'après [19, II, §5, n°3.2] puisque  $G^{\text{Ad}}$  est lisse et de présentation finie, et puisque  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$  est lisse sur un corps (donc réduit), et fermé dans  $\text{Lie}(G^{\text{Ad}})$ , il suffit de vérifier la stabilité de  $\text{Nil}(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}})$  sur les  $\bar{k}$ -points. Ceci est immédiat puisque le nilradical de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\bar{k})$  est stable pour l'action adjointe (l'image de  $\text{Nil}(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}})(\bar{k})$  par  $G^{\text{Ad}}(\bar{k})$ -conjugaison est un idéal nilpotent de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\bar{k})$ , la maximalité se déduit en appliquant le morphisme réciproque).

Pour démontrer la seconde condition, remarquons que tout tore maximal  $T^{\text{Ad}} \subset G^{\text{Ad}}$  provient d'un tore maximal  $T \subset G$ . Au niveau des algèbres de Lie, la situation se résume sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \text{Nil}(\mathfrak{g})/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} & \\ & \cap & \\ 0 & \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} \longrightarrow \text{Lie}(G^{\text{Ad}}), & \\ & \cup & \cup \\ 0 & \longrightarrow \text{Lie}(T)/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} \longrightarrow \text{Lie}(T^{\text{Ad}}). & \end{array}$$

Supposons que l'intersection  $\text{Nil}(\mathfrak{g})/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} \cap \text{Lie}(T^{\text{Ad}})$  soit non triviale. Cela signifie en particulier que l'intersection  $\text{Nil}(\mathfrak{g})/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} \cap \text{Lie}(T)/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$  est non triviale, puisque tout élément de la première intersection est un élément de l'image de la projection  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ . Rappelons que d'après le préambule de cette démonstration le centre  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$  est contenu dans  $\text{Nil}(\mathfrak{g})$ . D'après la remarque C.4 c'est l'algèbre de Lie du centre de  $G$ , il est donc également contenu dans  $\text{Lie}(T)$ . Supposer que l'intersection  $\text{Nil}(\mathfrak{g})/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} \cap \text{Lie}(T)/\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$  est non triviale revient donc à supposer que l'inclusion  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} \subsetneq \text{Lie}(T) \cap \text{Nil}(\mathfrak{g})$  est stricte, ce qui est absurde puisque tout élément du nilradical est ad-nilpotent (d'après le préambule de la section C.3), et tout élément ad-nilpotent de l'algèbre de Lie d'un tore est central. En effet, et pour rappel : notons  $n$  l'ordre de ad-nilpotence de  $x \in \text{Lie}(T)$ , et soit  $y \in \mathfrak{g}$ . Quitte à supposer  $k$  algébriquement clos, l'algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  admet une décomposition en espaces de poids pour l'action du tore maximal  $T$  (qui est localement déployable). Notons  $R$

un système de racines associé :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$ . Nous avons  $y = y_0 + \sum_{\alpha \in R} y^\alpha$  où  $y^0 \in \mathfrak{t}$  et  $y^\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ , pour  $\alpha \in R$ . Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} 0 = \text{ad}^n(x)(y) &= \text{ad}^n(x)(y^0 + \sum_{\alpha \in R} y^\alpha) \\ &= \sum_{\alpha \in R} \alpha^n(x)y^\alpha, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé que  $\text{ad}(x)(y^0) = 0$  puisque  $x \in \mathfrak{t}$ . Cette égalité est vérifiée si et seulement si  $\text{ad}(x)(y^\alpha) = 0$  pour tout  $\alpha \in R$ . On en déduit que  $x \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ . □

**Remarque C.20.** Dans ce travail nous avons toujours a minima requis que  $p$  ne soit pas de torsion pour  $G$ . Pour tout facteur de type  $B_n$  cela revient à imposer que  $p$  soit strictement supérieur à 2 (voir la table 1). Nous sommes donc toujours dans la situation où le nilradical de l'algèbre de Lie d'un groupe réductif est le centre de  $\mathfrak{g}$ .

**Lemme C.21.** *Soit  $U$  un  $k$ -groupe algébrique unipotent, alors  $\mathfrak{u}$  est  $p$ -nil. En particulier, l'algèbre de Lie du radical unipotent d'un  $k$ -groupe lisse connexe  $G$  est un  $p$ -idéal  $p$ -nil.*

*Démonstration.* D'après [19, IV, §2, n°2 Proposition 2.5 vi)], puisque  $k$  est un corps le  $k$ -groupe unipotent  $U$  est plongeable dans le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures  $U_{n,k}$  de  $\text{GL}_n$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Cela se traduit par une inclusion de  $p$ -algèbres de Lie restreintes (ces algèbres de Lie dérivant toutes d'un  $k$ -groupe algébrique)  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{u}_{n,k}$ . La  $p$ -structure sur  $\mathfrak{u}_{n,k}$  est donnée par les puissances de matrices, ses éléments sont les matrices triangulaires strictement supérieures de taille  $n$ . Puisque cette sous-algèbre est  $p$ -nil, il en est de même pour  $\mathfrak{u}$ .

En particulier, si  $U$  est le radical unipotent d'un  $k$ -groupe lisse connexe  $G$ , son algèbre de Lie est un idéal de  $\mathfrak{g}$  (puisque c'est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe distingué de  $G$ ). Cet idéal dérivant d'un sous-groupe algébrique du  $k$ -groupe  $G$ , il est muni d'une  $p$ -structure, compatible avec la  $p$ -structure de  $G$  (voir par exemple [19]). Autrement dit c'est un  $p$ -idéal. □

**Lemme C.22.** *Supposons que  $k$  soit un corps parfait. Soit  $H$  un  $k$ -groupe algébrique lisse et connexe. Alors :*

1. *Si le  $k$ -groupe réductif  $\underline{H} := H/\text{Rad}_U(H)$  satisfait les conditions du lemme C.19 l'algèbre de Lie du radical unipotent de  $H$  est le  $p$ -radical de  $\mathfrak{h}$ , autrement dit l'égalité  $\text{rad}_{\mathfrak{u}}(H) = \text{rad}_p(\mathfrak{h})$  est vérifiée,*
2. *Si  $k$  est de caractéristique  $p \geq 3$  le  $p$ -radical de  $\mathfrak{h}$  est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents de  $\text{rad}(\mathfrak{h})$ .*

**Remarque C.23.** En particulier, si  $k$  est un corps parfait, l'algèbre de Lie du radical unipotent de tout  $k$ -sous-groupe parabolique d'un groupe réductif  $P \subseteq G$  tel que les sous-groupes de Lévi qu'il détermine satisfassent les hypothèses du lemme C.19 est le  $p$ -radical de son algèbre de Lie. C'est l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents du radical de  $\mathfrak{p}$ . Pour rappel (voir [22, proposition 1.21 ii)], si  $L \subseteq P$  est un sous-groupe de Levi, le radical résoluble  $\text{Rad}(P)$  est le produit semi-direct du radical unipotent de  $P$  et du radical de  $L$ . En particulier le nilradical de  $\mathfrak{p}$  va contenir les éléments de  $\text{Lie}(Z_L^0)$  où  $Z_L^0$  est le centre de  $L$ .

*Démonstration.* Commençons par montrer le point 1. du lemme. Une implication est immédiate : d'après le lemme C.21 l'algèbre de Lie  $\text{rad}_{\mathfrak{u}}(H)$  est un  $p$ -idéal  $p$ -nil, en particulier l'inclusion  $\text{rad}_{\mathfrak{u}}(H) \subseteq \text{rad}_p(\mathfrak{h})$  est vérifiée.

Montrons l'inclusion inverse. Le radical de  $H$  étant un sous-groupe lisse, la suite exacte de  $k$ -groupes algébriques :

$$1 \longrightarrow \text{Rad}_u(H) \longrightarrow H \xrightarrow{\pi} H/\text{Rad}_U(H) =: \underline{H} \longrightarrow 1,$$

induit d'après [19, II, §5, n°5 Proposition 5.3] une suite exacte de  $k$ -algèbres de Lie :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{rad}_u(H) \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\text{Lie}(\pi)} \mathfrak{h}/\mathfrak{rad}_u(H) =: \underline{\mathfrak{h}} \longrightarrow 0.$$

La suite exacte dérivée est une suite exacte de  $p$ -algèbres de Lie restreintes (voir [19, II, §7 n°2.1 et n°3.4] pour la compatibilité à la  $p$ -structure). Puisque  $\text{Lie}(\pi)$  est surjectif l'image de  $\text{Nil}(\mathfrak{h})$  par  $\text{Lie}(\pi)$  est encore un idéal. Puisque  $\text{Lie}(\pi)$  est un morphisme de  $p$ -algèbres de Lie restreintes, cet idéal est un idéal nilpotent. Autrement dit  $\text{Lie}(\pi)(\text{Nil}(\mathfrak{h})) \subseteq \text{Nil}(\underline{\mathfrak{h}})$  qui est égal à  $\mathfrak{z}_{\underline{\mathfrak{h}}}$  d'après le lemme C.19 (qui s'applique car  $\underline{\mathfrak{h}}$  dérive d'un  $k$ -groupe réductif et que l'énoncé exclut le cas pathologique exhibé par A. Vasiu dans [71]).

Puisque d'après le lemme C.13 1. nous avons  $\text{rad}_p(\mathfrak{h}) \subseteq \text{Nil}(\mathfrak{h})$ , l'image de tout élément  $x \in \text{rad}_p(\mathfrak{h})$  est un élément du centre de  $\mathfrak{z}_{\underline{\mathfrak{h}}}$ . Le  $p$ -radical étant un  $p$ -idéal  $p$ -nil, l'élément  $x$  est  $p$ -nilpotent, de même que  $\text{Lie}(\pi)(x)$  (le morphisme  $\text{Lie}(\pi)$  étant compatible avec les  $p$ -structures de  $\mathfrak{h}$  et  $\underline{\mathfrak{h}}$ ). Autrement dit  $\text{Lie}(\pi)(x)$  est un élément  $p$ -nilpotent de  $\mathfrak{z}_{\underline{\mathfrak{h}}}$ , qui est, d'après la remarque C.4, l'algèbre de Lie du centre du  $k$ -groupe réductif  $\underline{H}$ . Ce centre est donc une  $p$ -sous-algèbre torale (voir par exemple [22, XXII, Corollaire 4.1.7]) et cet élément est donc nul. Autrement dit  $x \in \mathfrak{rad}_u(H)$  et nous avons obtenu l'égalité  $\text{rad}_p(\mathfrak{h}) = \mathfrak{rad}_u(H)$ . Ceci conclut la démonstration de 1.

Montrons le point 2. Une fois encore une inclusion est immédiate : le  $p$ -radical  $\text{rad}_p(\mathfrak{h})$  étant un  $p$ -idéal  $p$ -nil de  $\mathfrak{h}$ , il est inclus dans l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents de  $\mathfrak{h}$ . Montrons l'inclusion réciproque : soit  $x \in \text{rad}(\mathfrak{h})$ , puisque  $\text{Lie}(\pi)$  est surjectif  $\text{Lie}(\pi)(x) \in \text{rad}(\underline{\mathfrak{h}})$  qui est le centre de  $\underline{\mathfrak{h}}$  d'après le lemme C.14 (qui s'applique puisque par hypothèse  $p \geq 3$ ). Puisque  $\text{Lie}(\pi)(x)$  est également un élément  $p$ -nilpotent, il est nul. Autrement dit  $x$  est un élément de  $\mathfrak{rad}_u(\mathfrak{h})$  qui est le  $p$ -radical de  $\mathfrak{h}$  d'après point 1. du lemme. Tout élément  $p$ -nilpotent du radical de  $\mathfrak{h}$  est ainsi un élément du  $p$ -radical de  $\mathfrak{h}$ , d'où l'égalité désirée.  $\square$

**Lemme C.24.** *Soient  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p \geq 3$  et  $G$  un  $k$ -groupe algébrique. Supposons que  $G$  soit une extension d'un  $k$ -groupe de type multiplicatif  $S$  par un  $k$ -groupe algébrique lisse et connexe  $H$  tel que  $\iota(\text{Rad}_U(H))$  soit un sous-groupe distingué de  $G$  :*

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} S \longrightarrow 1,$$

alors nous avons  $\text{rad}_p(\mathfrak{g}) = \{x \in \text{rad}(\mathfrak{g}) \mid x \text{ est } p\text{-nilpotent}\} = \text{Lie}(\iota)(\text{rad}_p(\mathfrak{h}))$ .

*Démonstration.* Une inclusion est immédiate : le  $p$ -radical de  $\mathfrak{g}$  est un  $p$ -idéal  $p$ -nil de  $\text{rad}(\mathfrak{g})$  il est donc contenu dans l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents de  $\text{rad}(\mathfrak{g})$ , c'est le point 2. du lemme C.13.

Puisque que  $H$  est lisse et le morphisme  $G \rightarrow S$  est surjectif, la suite dérivée est encore exacte (voir [19, II, §5, n° Proposition 5.3]) :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\text{Lie}(\iota)} \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{Lie}(\pi)} \mathfrak{s} \longrightarrow 0,$$

et c'est une suite exacte de  $p$ -morphisms de  $p$ -algèbres de Lie restreintes (voir [19, II, §7 n°2.1 et n°3.4] pour la compatibilité à la  $p$ -structure). Soit  $x$  un élément  $p$ -nilpotent de  $\text{rad}(\mathfrak{g})$ . L'image  $\text{Lie}(\pi)(x)$  est un élément  $p$ -nilpotent de  $\mathfrak{s}$  qui est l'algèbre de Lie d'un groupe de type multiplicatif et qui est donc torale. La puissance  $p$ -ième est donc injective sur  $\mathfrak{s}$ , ce qui implique la nullité de l'élément  $\text{Lie}(\pi)(x)$ . Par exactitude de la suite dérivée, l'élément  $x$  appartient à l'image de  $\text{Lie}(\iota)$ , disons  $x = \text{Lie}(\iota)(z)$ , pour un élément  $z \in \mathfrak{h}$ . Puisque  $\iota$  est un  $p$ -morphisme de  $p$ -algèbres de Lie, et comme par hypothèse  $x$  est  $p$ -nilpotent, il existe un entier  $m$  tel que

$$0 = x^{[p^m]} = \iota(z)^{[p^m]} = \iota(z^{[p^m]}),$$

mais puisque  $\iota$  est injectif cela signifie que  $z^{[p^m]}$  est nul, donc  $z$  est  $p$ -nilpotent. L'élément  $x$  appartient donc à l'ensemble des éléments  $p$ -nilpotents de  $\text{rad}(\mathfrak{g}) \cap \text{Im}(\text{Lie}(\iota))$  qui est un idéal résoluble de  $\text{Im}(\text{Lie}(\iota))$ , et qui est donc contenu dans  $\text{rad}(\text{Im}(\text{Lie}(\iota)(\mathfrak{h})) \cong \text{rad}(\mathfrak{h}))$ . Autrement dit, tout élément  $p$ -nilpotent de  $\text{rad}(\mathfrak{g})$  est l'image d'un élément  $p$ -nilpotent de  $\text{rad}(\mathfrak{h}) = \text{rad}_p(\mathfrak{h}) = \mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(H)$  d'après le lemme C.22.

Par hypothèse, l'image de  $\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(H) = \text{rad}_p(\mathfrak{h})$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ . C'est un  $p$ -idéal  $p$ -nilpotent de  $\mathfrak{g}$ , puisque  $\text{Lie}(\iota)$  est un  $p$ -morphisme de  $p$ -algèbres de Lie restreintes. Autrement dit nous avons  $\text{Lie}(\iota)(\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(H)) \subseteq \text{rad}_p(\mathfrak{g})$ .

En résumé nous sommes dans la situation suivante :

$$\{x \in \text{rad}(\mathfrak{g}) \mid x \text{ est } p\text{-nilpotent}\} \subseteq \text{Lie}(\iota)(\mathfrak{rad}_{\mathfrak{u}}(H)) \subseteq \text{rad}_p(\mathfrak{g}).$$

Et nous avons obtenu l'égalité désirée. □

**Remarque C.25.** La contrainte sur la caractéristique dans l'énoncé du point 2. du lemme C.22 et dans l'énoncé du lemme C.24 est justifiée par l'utilisation du lemme C.14. La remarque C.18 nous autorise donc à utiliser ce lemme également lorsque  $k$  est algébriquement clos de caractéristique 2 est  $G$  a un système de racines pour lequel toutes les composantes irréductibles sont de type  $A_n$  (qui est le seul cas envisageable en caractéristique 2 dans le contexte de cet article).

Le résultat suivant est un corollaire de [49, Lemme 2], il permet de comparer l'algèbre de Lie du radical d'un  $k$ -groupe réductif  $G$  et le radical de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  :

**Corollaire C.26.** *Soit  $k$  un corps de caractéristique  $p > 3$  et soit  $G$  un  $k$ -groupe réductif tel que  $G$  n'a pas de facteur de type  $A_n$  avec  $n \equiv -1 \pmod{p}$ . L'algèbre de Lie du radical de  $G$  est le radical résoluble de son algèbre de Lie.*

*Démonstration.* Considérons la suite exacte de  $k$ -groupes algébriques :

$$1 \longrightarrow \text{Rad}(G) \xrightarrow{\text{Lie}(\iota)} G \xrightarrow{\text{Lie}(\pi)} G^{\text{ss}} \longrightarrow 1.$$

Puisque le radical de  $G$  est lisse, cette suite exacte induit une suite exacte d'algèbres de Lie (voir [2, II, §5 n°5 Proposition 5.3]) :

$$0 \longrightarrow \text{Lie}(\text{Rad}(G)) \xrightarrow{\text{Lie}(\iota)} \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{Lie}(\pi)} \text{Lie}(G^{\text{ss}}) \longrightarrow 0.$$

Il s'agit de montrer que  $\text{Lie}(G^{\text{ss}})$  est semi-simple, autrement dit que  $\text{rad}(\text{Lie}(G^{\text{ss}})) = 0$ . Montrons que cela est assuré par [49, Lemme 2] : d'après [22, XXV, corollaire 1.3] il existe un  $\mathbb{Z}$ -groupe réductif tel que  $G^{\text{ss}} \cong G_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} k$ . Soit  $G_{\mathbb{C}}^{\text{ss}} := G_{\mathbb{Z}}^{\text{ss}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  le  $\mathbb{C}$ -groupe réductif obtenu par changement

de base. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\text{ss}}$  est une union disjointe d'algèbres de Lie simples  $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\text{ss}})_j$ . À chaque facteur  $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\text{ss}})_j$  correspond une algèbre de Lie dite "classique"  $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\text{ss}})_j(I_j)$  où  $I_j$  est l'ensemble des sommets du diagramme de Dynkin associé à  $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\text{ss}})_j$  (voir [49, 2.1]) et pour laquelle il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie  $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\text{ss}})_j \cong (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\text{ss}})_j(I_j)$ . Les algèbres de Lie  $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_j$  sont des formes tordues d'algèbres de Lie  $(\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}^{\text{ss}})_j$  définies sur  $\mathbb{Z}$ . Après changement de base nous obtenons la décomposition

$$\mathfrak{g}^{\text{ss}} = \coprod ((\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}^{\text{ss}})_j(I_j)) \otimes_{\mathbb{Z}} k$$

et sous les hypothèses du lemme chaque facteur de cette décomposition est simple d'après [49, Lemme 2].  $\square$

**Remarque C.27.** Si  $G$  est un  $k$ -groupe réductif tel que  $\mathfrak{g}$  soit munie d'une forme bilinéaire, symétrique  $G$ -équivariante et non dégénérée sur  $\mathfrak{g}$ , l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est semi-simple d'après [60, I, §8, Corollary] : son radical (donc son centre) est trivial. Autrement dit la représentation adjointe  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  est fidèle, tout élément ad-nilpotent est donc  $p$ -nilpotent sous cette hypothèse. En particulier pour toute  $p$ -sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  nous avons l'égalité des  $p$ -idéaux  $\text{Nil}(\mathfrak{h}) = \text{rad}_p(\mathfrak{h})$  sont égaux.

**Lemme C.28.** *Supposons que le corps  $k$  soit algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ . Soit  $G$  un  $k$ -groupe réductif tel que  $\mathfrak{g}$  soit munie d'une forme bilinéaire, symétrique  $G$ -équivariante et non dégénérée sur  $\mathfrak{g}$ , notée  $\kappa$  et soit  $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Borel. Alors l'égalité  $\text{Nil}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}^{\perp}$  est vérifiée.*

*Démonstration.* Une inclusion est immédiate : d'après [10, §4, n°4, proposition 6] nous avons  $\text{Nil}(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}^{\perp}$ .

Soit  $\Phi^+$  un système de racines positives associé à  $B$ . D'après la remarque C.23 le  $p$ -radical de  $\mathfrak{b}$  est l'algèbre de Lie du radical unipotent de  $B$ . En effet les conditions du corollaire C.19 sont bien vérifiées puisque le sous-groupe parabolique considéré est un sous-groupe de Borel (les contraintes à imposer sont donc les mêmes que celles à imposer sur  $G$  (la table 1 permet de vérifier que l'existence de  $\kappa$  sur  $\mathfrak{g}$  exclus le cas pathologique mentionné au lemme C.19)).

D'après le point 3. du lemme C.13 ce  $p$ -radical est le nilradical de  $\mathfrak{b}$  si et seulement si  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{b}} \subseteq \mathfrak{b}$ . Montrons que c'est bien le cas ici : nous avons supposé que  $\mathfrak{g}$  était munie d'une forme bilinéaire  $G$ -équivariante, symétrique et non dégénérée  $\kappa$ . D'après [60, I, §8, Corollary] l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est semi-simple. En particulier son centre est trivial d'après [68, Corollary 5.6]). Mais puisque  $Z_G^0 \subseteq Z_B \subseteq Z_G$  (voir par exemple [7, Corollary 11.11]), par passage aux algèbres de Lie nous obtenons  $\text{Lie}(Z_B) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} = 0$ . La trivialité de  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{b}}$  en découle, en remarquant que l'algèbre de Lie du centre d'un sous-groupe de Borel est le centre de son algèbre de Lie (voir la remarque C.4).

En résumé nous avons démontré les égalités suivantes :

$$\text{Nil}(\mathfrak{b}) = \text{rad}_p(\mathfrak{b}) = \text{Lie}(\text{Rad}_U(B)) = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}^{\alpha}$$

où la première égalité est obtenue à l'aide du lemme C.13, et la deuxième égalité à l'aide de la remarque C.23. Puisque  $\mathfrak{g}^{\alpha}$  est orthogonal à  $\mathfrak{g}^{\mu}$  dès lors que  $\mu \neq -\alpha$ , nous avons nécessairement  $\mathfrak{b}^{\perp} \subseteq \text{Nil}(\mathfrak{b})$  et l'égalité est démontrée.  $\square$

## Annexe D Remarques sur la loi de Campbell–Hausdorff

Soit  $G$  un groupe réductif au-dessus d'un corps algébriquement clos  $k$  de caractéristique  $p \geq \mathfrak{h}(G)$ . Soit  $B \subset G$  un sous-groupe de Borel. Comme le souligne J-P. Serre dans [63, 2.2] la propriété de relèvement utilisée dans la démonstration du lemme 8.1 caractérise la loi de groupe sur  $\text{rad}_u(B)$ . Nous reprenons et détaillons ici sous ce prisme le raisonnement de cette partie de l'article susmentionné.

Plus précisément, si nous notons encore  $G_{\mathbb{Z}}$  un groupe réductif sur  $\mathbb{Z}$  et  $B_{\mathbb{Z}} \subset G_{\mathbb{Z}}$  un sous-groupe de Borel tels que  $G = G_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} k$  et  $B = B_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} k$ , alors :

**Proposition D.1.** *La loi de groupe algébrique sur  $\mathfrak{rad}_u(B)$  provient de la loi de groupe algébrique sur  $\mathfrak{rad}_u(B)_\mathbb{Q}$  : elle est définie sur  $\mathbb{Q}$ , s'étend sur  $\mathfrak{rad}_u(B)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ , et induit une loi de groupes sur  $\mathfrak{rad}_u(B)_{\mathbb{F}_p}$  puis sur  $\mathfrak{rad}_u(B)$ , par spécialisation. Autrement dit nous sommes dans la situation suivante et tout l'enjeu est d'obtenir la flèche en pointillés (c'est-à-dire de montrer que la loi de Baker–Campbell–Hausdorff est à coefficients dans  $\mathbb{Z}_{(p)}$ ) :*

$$\begin{array}{ccc}
(B, G) & & (\mathfrak{rad}_u(B), \circ) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(B_{\mathbb{F}_p}, G_{\mathbb{F}_p}) \rightarrow (B_{\mathbb{Z}_{(p)}}, G_{\mathbb{Z}_{(p)}}) \leftarrow (B_{\mathbb{Q}}, G_{\mathbb{Q}}) & & (\mathfrak{rad}_u(B)_{\mathbb{F}_p}, \circ) \rightarrow (\mathfrak{rad}_u(B)_{\mathbb{Z}_{(p)}}, \circ) \leftarrow \cdots (\mathfrak{rad}_u(B)_{\mathbb{Q}}, \circ) \\
\searrow \quad \downarrow \quad \swarrow & & \searrow \quad \downarrow \quad \swarrow \\
& (B_{\mathbb{Z}}, G_{\mathbb{Z}}) & \mathfrak{rad}_u(B)_{\mathbb{Z}}
\end{array}$$

*Démonstration.* Soit  $\Phi^+$  le système de racines positives de  $\mathfrak{g}_\mathbb{Q}$  associé à  $B_\mathbb{Q}$ . Notons  $U_{\mathbb{Q},\alpha}$  le groupe de racines associé à  $\alpha \in \Phi^+$ , isomorphe à  $\mathbb{G}_a$  via l'isomorphisme  $x_{\alpha,\mathbb{Q}} : \mathbb{G}_a \rightarrow U_{\alpha,\mathbb{Q}}$ . D'après [22, XXII, 4.1]), le choix d'un ordre total sur les  $U_\alpha$  induit un isomorphisme  $\prod_{\alpha \in \Phi^+} U_{\alpha,\mathbb{Q}} \rightarrow (\text{Rad}_U(B))_\mathbb{Q}$ . Pour toute  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $A$ , tout point  $x \in \text{Rad}_U(B)_\mathbb{Q}(A)$  s'écrit donc de manière unique sous la forme  $x = \prod_{\alpha \in \Phi^+} x_{\alpha,\mathbb{Q}}(t_\alpha)$  avec  $t_\alpha \in A$ . Les  $t_\alpha$  forment ainsi un système de coordonnées sur  $(\text{Rad}_U(B))_\mathbb{Q}$ .

Par ailleurs, la loi de Baker–Campbell–Hausdorff est bien définie sur  $\mathbb{Q}$  et permet de munir  $(\mathfrak{rad}_u(B))_\mathbb{Q}$  d'une structure de groupe algébrique (voir [11, II, §6.5, remarque 3]) isomorphe à  $(\text{Rad}_U(B))_\mathbb{Q}$  via l'application exponentielle. Autrement dit  $\mathfrak{rad}_u(B)_\mathbb{Z} \cong \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \text{Lie}(U_{\alpha,\mathbb{Z}})$  et cet isomorphisme induit un autre système de coordonnées sur  $(\text{Rad}_U(B))_\mathbb{Q}$  : tout point  $x$  de  $(\text{Rad}_U(B))_\mathbb{Q}(A)$  s'écrit de manière unique sous la forme  $\exp(\sum_{\alpha \in \Phi^+} m_\alpha X_{\alpha,\mathbb{Q}})$  avec  $m_\alpha \in A$ . Notons que  $x_{\alpha,\mathbb{Q}}(t_\alpha) = \exp(t_\alpha X_{\alpha,\mathbb{Q}})$  par définition des  $X_{\alpha,\mathbb{Q}}$ . Cela permet de comparer les deux systèmes de coordonnées sus-mentionnés : le produit  $\prod_{\alpha \in \Phi^+} x_{\alpha,\mathbb{Q}}(t_\alpha)$  peut se réécrire sous la forme  $\exp(H((t_\alpha, X_{\alpha,\mathbb{Q}})_{\alpha \in \Phi^+}))$  avec

$$\begin{aligned}
H((t_\alpha, X_{\alpha,\mathbb{Q}})_{\alpha \in \Phi^+}) &= \sum_{\alpha \in \Phi^+} t_\alpha X_{\alpha,\mathbb{Q}} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha < \beta} t_\alpha t_\beta [X_{\alpha,\mathbb{Q}}, X_{\beta,\mathbb{Q}}] + \dots \\
&= \sum_{\alpha \in \Phi^+} t_\alpha X_{\alpha,\mathbb{Q}} + \sum_{\alpha \in \Phi^+} P_\alpha((t_\beta)_{\beta < \alpha})
\end{aligned}$$

où  $P_\alpha := \sum_\lambda c_\lambda t^\lambda Z_\lambda$ , où :

1. la somme est réalisée sur les multi-indices  $\lambda := (\lambda_\alpha)$  de poids total  $\sum \lambda_\alpha$  strictement supérieur à 1,
2. pour un multi-indice  $\lambda := (\lambda_\alpha)$  fixé, le produit des  $t_\alpha^{\lambda_\alpha}$  est noté  $t^\lambda$  et le coefficient  $c_\lambda$  est un nombre rationnel (et même  $p$ -entier lorsque  $p > \sum \lambda_\alpha$ , voir [11, II, §4]),
3. pour un multi-indice  $\lambda := (\lambda_\alpha)$  fixé, la combinaison  $\mathbb{Z}$ -linéaire de crochets itérés des  $X_{\alpha,\mathbb{Q}}$  de multi-degré  $\lambda$  est notée  $Z_\lambda$ .

Tout l'enjeu est donc de montrer que  $P_\alpha$  est un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{Z} \left[ \frac{1}{(h(G)-1)!} \right]$  (et donc a fortiori sur  $\mathbb{Z}_{(q)}$  pour tout  $q \geq h(G)$ ). Remarquons que :

1. les  $Z_\lambda$  sont des combinaisons  $\mathbb{Z}$ -linéaires des  $X_{\gamma,\mathbb{Q}}$  tels que  $h(\gamma) = \sum \lambda_\alpha h(\alpha)$ . Chaque terme  $X_{\alpha,\mathbb{Q}}$  de cette combinaison linéaire provient de crochets itérés impliquant des  $X_{\beta,\mathbb{Q}}$  avec  $h(\beta) < h(\alpha)$ , et donc  $\beta < \alpha$ ,
2. les crochets itérés de poids total supérieur ou égal à  $h(G)$  sont nuls (voir [51, corollary p. 9, remark 3 p. 10]). La sommation a donc lieu sur le nombre fini de  $\lambda$  de poids total strictement inférieur à  $h(G)$ ,
3. pour une telle restriction de la sommation, les coefficients  $c_\lambda$  apparaissant dans la somme sont  $p$ -entiers pour tout  $p \geq h(G)$  (car alors le poids de chaque multi-indice  $\lambda$  qui s'exprime dans la somme est strictement inférieur à  $p$ ).

Ainsi les deux expressions  $\prod_{\alpha \in \Phi^+} x_{\alpha, k}(t_\alpha)$  et  $\exp(H((t_\alpha, X_{\alpha, k})_{\alpha \in \Phi^+}))$  coïncident sur  $k$ .  $\square$

## Annexe E Un exemple où l'intégration plongée n'existe pas

Soient  $k$  un corps et  $G$  un  $k$ -groupe algébrique. Notons  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. Soient  $\mathfrak{u}$  et  $\mathfrak{v}$  deux  $p$ -sous-algèbres de Lie  $p$ -nil et intégrables de  $\mathfrak{g}$ , et soit  $f : \mathfrak{u} \rightarrow \mathfrak{v}$  un  $p$ -morphisme d'algèbres de Lie restreintes. L'exemple présenté dans cette annexe montre que ce morphisme  $f$  ne s'intègre pas systématiquement en un morphisme de groupes  $\phi : U \rightarrow V$  tel que  $\text{Lie}(\phi) := f$ . En d'autres termes l'application  $\text{Hom}(G, \mathbb{G}_a) \rightarrow \text{Hom}_{p\text{-Lie}}(\mathfrak{g}, k)$  n'est pas surjective.

Avant de présenter l'exemple soulignons plusieurs points importants : les seules algèbres de Lie candidates à l'intégration sont les  $p$ -algèbres de Lie restreintes. En effet, soit  $\mathfrak{h}$  une algèbre de Lie pour laquelle il existe un  $k$ -groupe algébrique  $H$  connexe tel que  $\text{Lie}(H) = \mathfrak{h}$ . Puisque  $\mathfrak{h}$  dérive d'un groupe algébrique, elle hérite d'une  $p$ -structure d'après [19, II, §7, n°3, Proposition 3.4]. Par ailleurs, l'intégration des morphismes de  $p$ -algèbres de Lie dépend de l'intégration des  $p$ -algèbres considérées. En effet, rappelons que même lorsque  $G$  est un groupe réductif au-dessus de d'un corps algébriquement clos  $k$  de caractéristique  $p > h(G)$ , bien que toutes les  $p$ -sous-algèbres de Lie  $p$ -nil soient intégrables (voir la section 8.2), il n'y a pas de correspondance bijective entre ces sous-algèbres et les sous-groupes unipotents lisses et connexes de  $G$  (un contre-exemple est présenté à la remarque 8.8).

Remarquons toutefois :

**Lemme E.1.** *Soient  $G$  et  $H$  deux  $k$ -groupes algébriques lisses et soit  $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  un morphisme d'algèbres de Lie. Si  $f$  est intégrable en un morphisme lisse de groupes algébriques  $\phi : G \rightarrow H$ , alors  $f(\mathfrak{g})$  est intégrable en un  $k$ -groupe algébrique lisse et connexe.*

*Démonstration.* Notons  $\mathfrak{v} := f(\mathfrak{g})$ . Si  $f$  s'intègre en un morphisme lisse  $\phi : G \rightarrow H$ , a priori  $f(\mathfrak{g}) \subseteq \text{Lie}(\phi(G)) \subseteq \mathfrak{h}$ , mais puisque  $k$  est un corps, et comme le morphisme  $\phi$  et les groupes  $H$  et  $G$  sont lisses, le morphisme  $f = \text{Lie}(\phi) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  est surjectif d'après [19, II, §5, proposition 5.3]. Autrement dit  $\mathfrak{v} = \mathfrak{h} = \text{Lie}(H^0)$  et l'algèbre de Lie  $\mathfrak{v}$  est intégrable en un  $k$ -groupe algébrique lisse connexe.  $\square$

**Remarque E.2.** Soit  $\phi : G \rightarrow H$  un morphisme lisse de  $k$ -groupes algébriques et tel que  $\text{Lie}(\phi) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  admette une section  $s : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$  de  $p$ -algèbres de Lie restreintes. Rien n'assure que cette section s'intègre en une section lisse de groupes algébriques. En effet, d'après [27, Corollaire 17.12.3] la section  $\sigma$  est a priori seulement une immersion quasi-régulière puisque  $\phi$  est lisse. En particulier, même si  $G$  et  $H$  sont lisses rien ne garantit a priori que l'image de  $s$  s'intègre. Notons au passage que si  $s$  s'intègre en un morphisme lisse, alors la suite exacte d'algèbres de Lie qu'il induit est triviale (notons  $\mathfrak{n} := \text{Ker}(f)$ ). En effet, soit  $\sigma : H \rightarrow G$  le morphisme intégré, puisque  $k$  est un corps, si  $\sigma$  est lisse, il induit un morphisme d'algèbres de Lie surjectif. Autrement dit  $\text{Lie}(\sigma(\mathfrak{h})) = \mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{n} = 0$ .

**Exemple E.3.** Soit  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p > 0$ . Considérons le diagramme commutatif de groupes algébriques suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_a & \xrightarrow{\quad i \quad} & W_2 & \xrightarrow{\quad r \quad} & \mathbb{G}_a \longrightarrow 0, \\ & & \text{Frob} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{G}_a & \xrightarrow{\quad i \quad} & W'_2 = (W_2 \times \mathbb{G}_a) / \langle i(x) - i(x^p) \mid x \in \mathbb{G}_a \rangle & \xrightarrow{\quad r \quad} & \mathbb{G}_a \longrightarrow 0. \end{array}$$

où Frob désigne l'automorphisme de Frobenius absolu et où le terme central de la suite inférieure est obtenu en prenant le pushout de  $i$  et Frob. L'exactitude des deux suites horizontales est préservée par dérivation d'après [20, II, §5, proposition 5.3] et [19, II, §7, n°3, proposition 3.4] puisque  $\mathbb{G}_a$  est lisse. On obtient ainsi le diagramme commutatif de  $p$ -algèbres de Lie restreintes

et de  $p$ -morphisms (puisque tout ici dérive de groupes algébriques et de morphismes de groupes algébriques) :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_a) & \xrightarrow{\mathrm{Lie}(i)} & \mathfrak{w}_2 := \mathrm{Lie}(W_2) & \xrightarrow{\mathrm{Lie}(r)} & \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_a) \longrightarrow 0, \\
\mathrm{Lie}(\mathrm{Frob}) = 0 & & \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow = \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_a) & \xrightarrow{\mathrm{Lie}(i)} & \mathfrak{w}'_2 & \xrightarrow{\mathrm{Lie}(r)} & \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_a) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Le morphisme  $\mathfrak{w}'_2 \rightarrow k$  est scindé : le  $p$ -morphisme  $\pi$  passe au quotient et factorise par  $\mathfrak{w}'_2$  puisque  $\mathrm{Lie}(\mathrm{Frob}) = 0$ . Cela fournit un  $p$ -morphisme de  $p$ -algèbres de Lie restreintes  $s : \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_a) \rightarrow \mathfrak{w}'_2$ .

Bien que  $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}_a)$  et  $\mathfrak{w}_2$  soient intégrables, cette section ne se relève pas en un morphisme de groupes algébriques. Puisque  $k$  est parfait, il suffit de le vérifier sur les  $k$ -points : dans ce cas les morphismes verticaux du diagramme commutatif de groupes algébriques ci-dessus sont des égalités. Si la section  $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}_a) \rightarrow \mathfrak{w}'_2$  s'intégrait en un morphisme  $\sigma : \mathbb{G}_a(k) \rightarrow W'_2(k)$  tel que  $\mathrm{Lie}(\sigma)_k = s_k$ , la suite exacte inférieure du diagramme commutatif de groupes algébriques ci-dessus serait scindée (puisque le foncteur  $\mathrm{Lie}$  est exact à gauche). D'après la remarque qui précède sur les  $k$ -points, la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underbrace{\mathbb{G}_a(k)}_{=k} \longrightarrow W_2(k) \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

serait donc également scindée, ce qui est absurde puisque le facteur de droite  $\mathbb{G}_a$  est de  $p$ -torsion et que  $W_2$  n'est pas de  $p$ -torsion (voir par exemple [19, 5, §1, n°1, corollaire 1.8]).

**Remarque E.4.** Soit  $\mathfrak{u}$  une  $p$ -sous-algèbre de Lie  $p$ -nil et intégrable en un sous-groupe unipotent lisse et connexe  $U \subseteq G$ . L'exemple précédent permet également de montrer que lorsque  $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{u}$  est une  $p$ -sous-algèbre de Lie, il n'existe pas nécessairement un sous-groupe unipotent lisse et connexe  $V$  tel que  $\mathrm{Lie}(V) = \mathfrak{v}$ . En particulier une sous-algèbre d'une  $p$ -algèbre de Lie restreinte n'est pas nécessairement une  $p$ -sous-algèbre.

**Remarque E.5.** Par ailleurs, cet exemple met également en évidence le défaut de surjectivité a priori de l'application  $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_a, U) \rightarrow \mathrm{Ext}^1_{p\text{-Lie}}(\mathbb{G}_a, \mathfrak{u})$ , où  $\mathfrak{u}$  est une  $p$ -sous-algèbre de Lie  $p$ -nil de  $\mathfrak{g}$ , intégrable en un sous-groupe unipotent lisse et connexe de  $G$ . Notons que cela permettrait d'obtenir immédiatement que le normalisateur  $N_G(\mathfrak{u})$  est  $\phi$ -infinitésimalement saturé dans le chapitre III (et donc de nous passer de l'hypothèse additionnelle dans le théorème 10.1 par rapport à son analogue en caractéristique  $p > h(G)$ ), à savoir le théorème 4.2), en reproduisant à l'identique la preuve de la saturation infinitésimale de  $N_G(\mathfrak{u})$  lorsque  $p > h(G)$  (cette dernière fait intervenir un théorème de structure des groupes unipotents).

## Références

- [1] M. F. ATIYAH et R. BOTT – « The Yang-Mills equations over Riemann surfaces », *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **308** (1983), no. 1505, p. 523–615.
- [2] V. BALAJI, P. DELIGNE et A. J. PARAMESWARAN – « On complete reducibility in characteristic  $p$  », *Épjournal de Géométrie Algébrique* **Volume 1** (2017).
- [3] P. BARDSLEY et R. W. RICHARDSON – « Étale slices for algebraic transformation groups in characteristic  $p$  », *Proc. London Math. Soc. (3)* **51** (1985), no. 2, p. 295–317.
- [4] K. A. BEHREND – « Semi-stability of reductive group schemes over curves. », *Mathematische Annalen* **301** (1995), no. 2, p. 281–306.
- [5] I. BISWAS et Y. I. HOLLA – « Harder-Narasimhan reduction of a principal bundle », *Nagoya Math. J.* **174** (2004), p. 201–223.
- [6] A. BOREL et J. TITS – « Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs. i. », *Inventiones mathematicae* **12** (1971), p. 95–104.

- [7] A. BOREL – *Linear algebraic groups*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [8] A. BOREL et J. TITS – « Compléments à l'article : "Groupes réductifs" », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1972), no. 41, p. 253–276.
- [9] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines*, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337, Hermann, Paris, 1968.
- [10] —, *éléments de mathématique. Fasc. XXVI. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre I : Algèbres de Lie*, Seconde édition. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1285, Hermann, Paris, 1971.
- [11] —, *éléments de mathématique. Fasc. XXXVII. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre II : Algèbres de Lie libres. Chapitre III : Groupes de Lie*, Hermann, Paris, 1972, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1349.
- [12] —, *éléments de mathématique. Fasc. XXXVIII : Groupes et algèbres de Lie. Chapitre VII : Sous-algèbres de Cartan, éléments réguliers. Chapitre VIII : Algèbres de Lie semi-simples déployées*, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1364. Hermann, Paris, 1975.
- [13] R. W. CARTER – *Finite groups of Lie type*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985, Conjugacy classes and complex characters, A Wiley-Interscience Publication.
- [14] K. CHANDRASEKHARAN – « The autobiography of Laurent Schwartz : review of *laurent schwartz, un mathématicien aux prises avec le siècle* [Editions Odile Jacob, Paris, 1997] », *Notices Amer. Math. Soc.* **45** (1998), no. 9, p. 1141–1147.
- [15] B. CONRAD – « Reductive group schemes », *Autour des schémas en groupes. Vol. I, Panor. Synthèses*, vol. 42/43, Soc. Math. France, Paris, 2014, p. 93–444.
- [16] B. CONRAD, O. GABBER et G. PRASAD – *Pseudo-reductive groups*, second éd., New Mathematical Monographs, vol. 26, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [17] L. CORRY – « Mathematical structures from Hilbert to Bourbaki : the evolution of an image of mathematics », *Changing images in mathematics*, Stud. Hist. Sci. Technol. Med., vol. 13, Routledge, London, 2001, p. 167–185.
- [18] P. DELIGNE – « Semi-simplicité de produits tensoriels en caractéristique  $p$  », *Invent. Math.* **197** (2014), no. 3, p. 587–611.
- [19] M. DEMAZURE et P. GABRIEL – *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*, Masson & Cie, Éditeur, Paris ; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970, Avec un appendice it Corps de classes local par Michiel Hazewinkel.
- [20] M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK – *Schémas en groupes (SGA 3). Tome I. Propriétés générales des schémas en groupes*, Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], vol. 7, Société Mathématique de France, Paris, 2011, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962–64, avec la collaboration de M. Artin, J.-E. Bertin, P. Gabriel, M. Raynaud and J-P. Serre, Édition recomposée et annotée de l'édition originale de 1970, éditeurs P. Gille et P. Polo.
- [21] —, « Schémas en groupes (SGA 3). Tome II », Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962–64, avec la collaboration de M. Artin, J.-E. Bertin, P. Gabriel, M. Raynaud and J-P. Serre, Édition recomposée et annotée de l'édition originale de 1970, éditeurs P. Gille et P. Polo, 2011.
- [22] —, *Schémas en groupes (SGA 3). Tome III. Structure des schémas en groupes réductifs*, Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], vol. 8, Société Mathématique de France, Paris, 2011, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962–64, avec la collaboration de M. Artin, J.-E. Bertin, P. Gabriel, M. Raynaud and J-P. Serre, Édition recomposée et annotée de l'édition originale de 1970, éditeurs P. Gille et P. Polo.
- [23] J. DIEUDONNÉ – « Regards sur Bourbaki », *An. Univ. București Mat.-Mec.* **18** (1969), no. 2, p. 13–25.
- [24] —, « The historical development of algebraic geometry », *Amer. Math. Monthly* **79** (1972), p. 827–866.
- [25] V. DRINFELD et D. GAITSGORY – « On a theorem of Braden », *Transform. Groups* **19** (2014), no. 2, p. 313–358.
- [26] A. GROTHENDIECK – « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1966), no. 28, p. 255.
- [27] —, « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1967), no. 32, p. 361.

- [28] G. HARDER et M. NARASIMHAN – « On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves. », *Mathematische Annalen* **212** (1974), p. 215–248.
- [29] J. HEINLOTH – « Bounds for Behrend’s conjecture on the canonical reduction », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2008), no. 14, p. Art. ID rnn045, 17.
- [30] S. HERPEL et D. I. STEWART – « On the smoothness of normalisers, the subalgebra structure of modular lie algebras, and the cohomology of small representations », *Doc. Math., J. DMV* **21** (2016), p. 1–37.
- [31] S. HERPEL – « On the smoothness of centralizers in reductive groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **365** (2013), no. 7, p. 3753–3774.
- [32] G. HISS – « Die adjungierten Darstellungen der Chevalley-Gruppen », *Arch. Math. (Basel)* **42** (1984), no. 5, p. 408–416.
- [33] G. M. D. HOGEWELJ – « Almost-classical Lie algebras. I, II », *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* **44** (1982), no. 4, p. 441–452, 453–460.
- [34] J. E. HUMPHREYS – *Linear algebraic groups*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975, Graduate Texts in Mathematics, No. 21.
- [35] —, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978, Second printing, revised.
- [36] S. ILANGOVAN, V. B. MEHTA et A. J. PARAMESWARAN – « Semistability and semisimplicity in representations of low height in positive characteristic », A tribute to C. S. Seshadri (Chennai, 2002), Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2003, p. 271–282.
- [37] K. IWASAWA – « On the representation of Lie algebras », *Jpn. J. Math.* **19** (1948), p. 405–426.
- [38] N. JACOBSON – « A note on Lie algebras of characteristic  $p$  », *Amer. J. Math.* **74** (1952), p. 357–359.
- [39] J. C. JANTZEN – « Nilpotent orbits in representation theory », p. 1–211, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.
- [40] J. C. JANTZEN – « Representations of Lie algebras in positive characteristic », Representation theory of algebraic groups and quantum groups, Adv. Stud. Pure Math., vol. 40, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004, p. 175–218.
- [41] G. R. KEMPF – « Instability in invariant theory », *Ann. of Math. (2)* **108** (1978), no. 2, p. 299–316.
- [42] J. KOLLÁR – *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [43] D. L. KRACHT – *Applications of the Artin-Hasse exponential series and its generalizations to finite algebra groups*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2011, Thesis (Ph.D.)–Kent State University.
- [44] F. LÊ et A.-S. PAUMIER – « De la science comme classification à la classification comme pratique scientifique : quelques réflexions à partir de deux cas mathématiques », *Cahiers François Viète* **III. 1** (2016), p. 137–158.
- [45] A. LANGER – « Semistable principal  $G$ -bundles in positive characteristic », *Duke Math. J.* **128** (2005), no. 3, p. 511–540.
- [46] F. LE LIONNAIS (éd.) – *Les Grands Courants de la Pensée Mathématique*, Cahiers du Sud, 1948.
- [47] P. LEVY, G. MCNINCH et D. M. TESTERMAN – « Nilpotent subalgebras of semisimple lie algebras », **347** (2009).
- [48] M. MACULAN – « Tensor product and semi-stability : four variations on a theme », *Eur. Math. Soc. Newsl.* (2018), no. 108, p. 8–15.
- [49] O. MATHIEU – « Classification des algèbres de Lie simples », no. 266, 2000, Séminaire Bourbaki, Vol. 1998/99, p. Exp. No. 858, 4, 245–286.
- [50] G. MCNINCH – « Completely reducible Lie subalgebras », *Transform. Groups* **12** (2007), no. 1, p. 127–135.
- [51] G. J. MCNINCH – « Abelian unipotent subgroups of reductive groups », *J. Pure Appl. Algebra* **167** (2002), no. 2-3, p. 269–300.
- [52] —, « Nilpotent orbits over ground fields of good characteristic », *Math. Ann.* **329** (2004), no. 1, p. 49–85.
- [53] —, « Optimal  $SL(2)$ -homomorphisms », *Comment. Math. Helv.* **80** (2005), no. 2, p. 391–426.

- [54] G. J. MCNINCH et D. M. TESTERMAN – « Nilpotent centralizers and Springer isomorphisms », *J. Pure Appl. Algebra* **213** (2009), no. 7, p. 1346–1363.
- [55] V. B. MEHTA et S. SUBRAMANIAN – « On the Harder-Narasimhan filtration of principal bundles », *Algebra, arithmetic and geometry, Part I, II* (Mumbai, 2000), Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., vol. 16, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 2002, p. 405–415.
- [56] V. B. MEHTA – « Representations of algebraic groups and principal bundles on algebraic varieties », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, Higher Ed. Press, Beijing, 2002, p. 629–635.
- [57] J. PEVTSOVA et J. STARK – « Varieties of elementary subalgebras of maximal dimension for modular Lie algebras », *Geometric and topological aspects of the representation theory of finite groups*, Springer Proc. Math. Stat., vol. 242, Springer, Cham, 2018, p. 339–375.
- [58] A. PREMÉT et D. I. STEWART – « Classification of the maximal subalgebras of exceptional Lie algebras over fields of good characteristic », *J. Amer. Math. Soc.* **32** (2019), no. 4, p. 965–1008.
- [59] G. M. SEITZ – « Unipotent elements, tilting modules, and saturation », *Inv. Math.* **141** (2000), no. 3, p. 467–502.
- [60] G. B. SELIGMAN – *Modular Lie algebras*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 40, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.
- [61] J.-P. SERRE – « 1998 moursund lectures at the university of oregon », *ArXiv Mathematics e-prints* (2003).
- [62] J.-P. SERRE – « Sur la semi-simplicité des produits tensoriels de représentations de groupes », *Invent. Math.* **116** (1994), no. 1-3, p. 513–530.
- [63] — , « Exemples de plongements des groupes  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_p)$  dans des groupes de Lie simples », *Invent. Math.* **124** (1996), no. 1-3, p. 525–562.
- [64] P. SOBAJE – « Springer isomorphisms in characteristic  $p$  », *Transform. Groups* **20** (2015), no. 4, p. 1141–1153.
- [65] T. A. SPRINGER – « The unipotent variety of a semi-simple group », *Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968)*, Oxford Univ. Press, London, 1969, p. 373–391.
- [66] T. A. SPRINGER et R. STEINBERG – « Conjugacy classes », *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups (The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1968/69)*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 131, Springer, Berlin, 1970, p. 167–266.
- [67] R. STEINBERG – « Torsion in reductive groups », *Advances in Math.* **15** (1975), p. 63–92.
- [68] H. STRADE et R. FARNSTEINER – *Modular Lie algebras and their representations*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 116, Marcel Dekker, Inc., New York, 1988.
- [69] J. TITS – « Classification of algebraic semisimple groups », *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966, 1966, p. 33–62.
- [70] S. TRAUTWEIN – « A survey of the GIT picture for the Yang-Mills equation over Riemann surfaces », *Enseign. Math.* **63** (2017), no. 1-2, p. 63–153.
- [71] A. VASIU – « Normal, unipotent subgroup schemes of reductive groups », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **341** (2005), no. 2, p. 79–84.
- [72] B. J. VEISFEILER – « A class of unipotent sub-groups of semi-simple algebraic groups », *Uspehi Mat. Nauk* **21** (1966), no. 2 (128), p. 222–223.