



**HAL**  
open science

# LE TENSEUR "ÉNERGIE-IMPULSION" DANS LES FIBRÉS VECTORIELS

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. LE TENSEUR "ÉNERGIE-IMPULSION" DANS LES FIBRÉS VECTORIELS.  
2020. hal-02902776

**HAL Id: hal-02902776**

**<https://hal.science/hal-02902776>**

Preprint submitted on 20 Jul 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LE TENSEUR "ÉNERGIE-IMPULSION" DANS LES FIBRÉS VECTORIELS

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. Dans cet article, on propose de construire un tenseur qui généralise la notion de tenseur "énergie-impulsion" de la relativité générale. On construit une extension de ce tenseur par couplage d'une connexion de Koszul et d'une section de Dirac Lorentzienne. La connexion et la section sont obtenues en minimisant un Lagrangien du type Yang-Mills.

In this article, we propose to build a tensor that generalizes the concept of "Stess-energy" tensor in general relativity. An extension of this tensor is built by coupling a Koszul connection and a section of Dirac Lorentzienne. The connection and section are obtained by minimizing a Yang-Mills type Lagrangian.

## 1. EXTENSION DU TENSEUR "ÉNERGIE-IMPULSION"

On rappelle les notions mathématiques qui permettent les constructions à paraître. Les  $n$ -formes différentielles à valeurs dans le fibré  $\zeta$  sont les sections du fibré

$$\Lambda^n \zeta^* \otimes \zeta$$

où  $\zeta$  est un fibré vectoriel

$$\zeta = (E, \pi_\zeta, \mathcal{W}, \mathcal{H})$$

et  $\Lambda^n \zeta^*$  est le fibré des  $n$ -formes différentielles sur  $\mathcal{W}$ . On note  $\nabla$  une connexion de Koszul sur  $\zeta$  et  $R^\nabla$  l'opérateur de courbure associé. Si  $W$  est une carte de trivialisations des fibrés  $\xi_{\mathcal{W}}$  et  $\zeta$ , on munit cette carte d'une section locale de bases  $\{\partial_\mu\}$  et on note  $\{d^\nu\}$  la section locale de bases duales. Soit  $\{e_\alpha\}$  une section locale de bases de  $\zeta$ , l'opérateur  $R^\nabla$  est une 2-forme à valeurs dans  $\zeta$  et  $R^\nabla(\partial_\mu, \partial_\nu)$  est une section locale de  $\zeta^* \otimes \zeta$ . Dans  $\{e_\alpha\}$ ,  $R^\nabla(\partial_\mu, \partial_\nu)$  s'écrit

$$R^\nabla(\partial_\mu, \partial_\nu)e_\alpha = R_{\mu\alpha\nu}^\beta e_\beta,$$

$R_{\mu\alpha\nu}^\beta$  est le tenseur de courbure de  $\nabla$ . On définit le tenseur de Ricci sur le fibré  $\zeta$  par

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = \text{Trace}(R^\nabla(\partial_\mu, \partial_\nu)),$$

la courbure scalaire est définie par  $R = R_{\mu\mu}$ . Dans ce qui suit,  $\Lambda$  représente la constante cosmologique et  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur énergie-impulsion.

**Remark 1.** *Si la fibre est de dimension infinie, on impose à l'opérateur de courbure de vérifier que  $R^\nabla(X, Y)$  est un opérateur borné et à trace sur chaque fibre pour tous les champs locaux  $X$  et  $Y$ .*

---

*Date:* 20/07/2020.

*1991 Mathematics Subject Classification.* 47A08, 47A07, 58A14, 53C05, 53C10, 53Z05.

*Key words and phrases.* Connexion de Koszul, Section de Dirac Lorentzienne, Lagrangien de Yang-Mills, Tenseur énergie-impulsion.

Les tenseurs définis, précédemment, ne sont pas des tenseurs dans le sens ordinaire, à savoir des sections des fibrés des  $(p, q)$ -tenseurs,  $p$  fois covariant et  $q$  fois contravariant est noté

$$\xi_{\mathcal{W}}^{p,q} = (\otimes^p \xi_{\mathcal{W}}^*) \otimes (\otimes^q \xi_{\mathcal{W}}).$$

On munit le fibré  $\zeta$  d'une section de Dirac Lorentzienne  $\gamma$ , la métrique Lorentzienne locale dans la section de bases  $\{\partial_{\mu}\}$  est

$$g^{\mu\nu} = \text{Trace}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}), \quad \gamma^{\mu}(s) = \gamma(d^{\mu} \otimes s) \quad \forall s \in \Lambda_{\zeta}^0 = \Gamma(\zeta).$$

Pour cette métrique  $g$ , on se fixe un champ chronologique local  $T$ , par rotation de Wick autour de ce champ, on obtient une métrique riemannienne  $g_{\mathcal{W}}$ . Si  $\{\lambda^W\}$  est une partition de l'unité d'un recouvrement localement fini de cartes  $W$ , la métrique

$$\mathbf{g} = \lambda^W g_{\mathcal{W}}$$

est riemannienne. On peut consulter [1] pour ces définitions.

**Remark 2.** Les métriques riemanniennes  $\mathbf{g}$  sont obtenues par rotations de Wick autour d'une famille de champs chronologiques locaux.

La métrique riemannienne  $\mathbf{g}$  permet de construire l'opérateur de Hodge sur le fibré des formes différentielles  $\Lambda_{\mathcal{W}}$ , noté

$$\star : \Lambda_{\mathcal{W}}^n \rightarrow \Lambda_{\mathcal{W}}^{m-n}, \quad m = \dim \mathcal{W}$$

et on définit l'opérateur de Hodge sur le fibré des formes différentielles à valeurs dans  $\zeta$  par

$$\star = \star \otimes \mathbf{1}_{\zeta^* \otimes \zeta} : \Lambda_{\zeta}^n \rightarrow \Lambda_{\zeta}^{m-n}, \quad \star(\omega \otimes s) = \star\omega \otimes s.$$

**Remark 3.** On rappelle que

$$\Lambda_{\zeta}^n = \Gamma((\wedge^n \xi_{\mathcal{W}}^*) \otimes \zeta) \approx \Lambda_{\mathcal{W}}^n \otimes_{C^{\infty}(\mathcal{W})} \Lambda_{\zeta}^0, \quad n \geq 1 \text{ et } \Lambda_{\zeta}^0 = \Gamma(\zeta).$$

Dans une section locale de bases  $\{e_{\alpha}\}$ , on a si

$$\gamma^{\mu} e_{\alpha} = \gamma_{\alpha}^{\mu\beta} e_{\beta} \text{ alors } g^{\mu\nu} = \gamma_{\alpha}^{\mu\alpha\nu} \text{ où } \gamma_{\alpha}^{\mu\rho\nu} = \gamma_{\beta}^{\mu\rho} \gamma_{\alpha}^{\nu\beta}$$

en posant

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} e_{\alpha} = \gamma_{\alpha}^{\mu\rho\nu} e_{\rho},$$

on en déduit que si

$$g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} \gamma_{\beta}^{\sigma\alpha\rho} = \gamma_{\mu\beta\nu}^{\alpha} \text{ et } \gamma_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} \gamma_{\alpha}^{\sigma\alpha\rho}$$

alors

$$g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} \gamma^{\sigma\rho} = g_{\mu\sigma} \delta_{\nu}^{\sigma} = g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}.$$

**Definition 1.** Une section de couplage  $\phi$  est une section du fibré

$$\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = (\mathcal{W} \times \mathbb{K}^{\otimes 2}, pr_1, \mathcal{W}, \mathbb{K}^{\otimes 2}),$$

à chaque  $w \in \mathcal{W}$  on associe une forme bilinéaire

$$\phi(w)(x, y) = \alpha(w)x + \beta(w)y, \quad (x, y) \in \mathbb{K}^2$$

et

$$\alpha, \beta \in C^{\infty}(\mathcal{W}).$$

L'opérateur  $\phi(\nabla, \gamma)$  défini par le tenseur

$$T_{\nu\beta\mu}^\alpha = \phi(R_{\nu\beta\mu}^\alpha, \gamma_{\nu\beta\mu}^\alpha)$$

dans les repères locaux décrits précédemment est le couplage d'une connexion de Koszul et d'une section de Dirac Lorentzienne par la section  $\phi$ .

**Theorem 1.** *Si*

$$\phi(w)(x, y) = \frac{1}{\tau}x - \frac{\frac{1}{2}R - \Lambda}{\tau}y, \quad (1.1)$$

alors

$$T_{\nu\alpha\mu}^\alpha$$

est le tenseur "énergie-impulsion" de l'univers relativiste d'Einstein.

*Proof.* L'équation relativiste d'Einstein s'écrit sous la forme

$$R_{\nu\mu} - \left(\frac{1}{2}R - \Lambda\right)g_{\nu\mu} = \tau T_{\nu\mu}, \quad T_{\nu\mu} \text{ est le tenseur énergie impulsion,}$$

$$g_{\nu\mu} = \frac{R_{\nu\mu} - \tau T_{\nu\mu}}{\frac{1}{2}R - \Lambda} \text{ et } R = R_{\nu\nu}$$

pour la section de couplage  $\phi$  défini par 1.1, le tenseur associé à  $\phi(\nabla, \gamma)$  s'écrit

$$\frac{1}{\tau}R_{\nu\beta\mu}^\alpha - \frac{\frac{1}{2}R - \Lambda}{\tau}g_{\nu\beta\mu}^\alpha = T_{\nu\beta\mu}^\alpha$$

en prenant les traces de ces opérateurs on a

$$\frac{1}{\tau}R_{\nu\alpha\mu}^\alpha - \frac{\frac{1}{2}R - \Lambda}{\tau}g_{\nu\alpha\mu}^\alpha = T_{\nu\alpha\mu}^\alpha$$

et

$$T_{\nu\alpha\mu}^\alpha = T_{\nu\mu}.$$

□

## 2. CONSTRUCTION DE $(\nabla, \gamma)$

Le tenseur défini par l'opérateur  $\phi(\nabla, \gamma)$  est un tenseur "énergie-impulsion" généralisé associé à la paire  $(\nabla, \gamma)$  et sa trace est l'énergie-impulsion de l'univers  $\mathcal{W}$  pour ce couplage. Cette construction donne une extension du tenseur "énergie-impulsion" dans un fibré  $\zeta$  muni d'une section de Dirac Lorentzienne et d'une connexion de Koszul. Le problème posé est de savoir comment choisir le couple  $(\nabla, \gamma)$ . La métrique Lorentzienne choisie  $g$  permet de définir par rotation de Wick une métrique riemannienne  $\mathbf{g}$ . Pour cette métrique, on peut construire l'opérateur de Hodge  $*$  sur  $\zeta$ , défini précédemment. Si  $\dim \mathcal{W} = 4$ , la forme différentielle

$$R^\nabla \wedge *R^\nabla$$

est une 4-forme différentielle à valeurs dans  $\zeta^* \otimes \zeta$ , elle s'écrit

$$R^\nabla \wedge *R^\nabla = \omega \otimes \sigma, \quad \sigma \in \Lambda_{\zeta^* \otimes \zeta}^0$$

où  $\omega$  est la forme volume définie par  $\mathbf{g}$ . Si la fibre est de dimension infinie, on impose au fibré  $\zeta^* \otimes \zeta$  que la fibre soit composée d'opérateurs bornés et à trace. On pose

$$\mathcal{L}_{(\nabla, \gamma)} = \int_{\mathcal{W}} \text{Trace}(\sigma) \omega$$

ou encore

$$\mathcal{L}_{(\nabla, \gamma)} = \int_{\mathcal{W}} \text{Trace} (R^\nabla \wedge *R^\nabla) \omega.$$

**Definition 2.** Une paire  $(\nabla_0, \gamma_0)$  est un couple de Yang-Mills sur  $\mathcal{A}$  si

$$\mathcal{L}_{(\nabla_0, \gamma_0)} = \inf_{(\nabla, \gamma) \in \mathcal{A}} \mathcal{L}_{(\nabla, \gamma)}$$

où  $\mathcal{A}$  est formé des paires  $(\nabla, \gamma)$  pour lesquelles  $\nabla$  est une connexion de Koszul et  $\gamma$  est une section de Dirac Lorentzienne.

Pour les constructions précédentes, les paires utilisées sont les paires de Yang-Mills sur  $\mathcal{C}$  où  $\mathcal{C}$  décrit l'ensemble des connexions de Koszul et les sections de Dirac sont les sections de Dirac Lorentziennes.

### 3. CONCLUSION

Pour la section de couplage défini en 1.1 la paire  $(\nabla, \gamma)$ , si elle existe, minimise le Lagrangien et donne une équation tensorielle entre la connexion de Koszul  $\nabla$  et la section de Dirac Lorentzienne pour une extension du tenseur "énergie-impulsion". La question que l'on peut se poser est de savoir si l'extension du tenseur "énergie-impulsion" a un sens physique. Pour décrire une métrique Lorentzienne, on a besoin des opérateurs de la formes  $\gamma^\mu$  qui sont des sections du fibré  $\zeta^* \otimes \zeta$  que représente les opérateurs

$$\tau (\partial_\mu, \partial_\nu) e_\alpha = \phi (R_{\nu\alpha\mu}^\beta, \gamma_{\nu\alpha\mu}^\beta) e_\beta$$

dans ce contexte.

### REFERENCES

- [1] Jonot J.L., "Groupe de Lie dans les fibrés" 2020. hal-02900483  
*E-mail address:* j.jonot@gmail.com ou jean-louis.jonot@ac-versailles.fr