



HAL
open science

GROUPE DE LIE DANS LES FIBRÉS

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

| Jean Louis Jonot. GROUPE DE LIE DANS LES FIBRÉS. 2020. hal-02900483v2

HAL Id: hal-02900483

<https://hal.science/hal-02900483v2>

Preprint submitted on 23 Jul 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GROUPE DE LIE DANS LES FIBRÉS

JEAN LOUIS JONOT

ABSTRACT. Dans cet article, on développe des outils liés au groupe de structure G du fibré d'état à étudier. On adapte les résultats de la théorie des fibrés pour construire une équation d'évolution analogue à l'équation de Schrödinger en introduisant une connexion de Koszul ∇ qui minimise, en un certain sens, un Lagrangien de Yang-Mills. L'opérateur de Hodge permettant cette construction est défini à partir d'une métrique riemannienne obtenue par rotation de Wick autour d'un champ chronologique local défini par la métrique Lorentzienne de l'univers.

In this article, we develop tools related to the structure group G of the state fiber to be studied. We adapt the results of the theory of fibers to construct an equation of evolution analogous to the equation of Schrödinger by introducing a Koszul's connection which minimizes, in a certain sense, the Yang-Mills Lagrangian. The Hodge operator enabling this construction is defined from a Riemannian metric obtained by rotation of Wick around a local chronological field defined by the Lorentzienne metric of the universe.

1. FORMES DIFFÉRENTIELLES SUR UN FIBRÉ

Les variétés considérées sont des variétés réelles ou complexes de dimension $< \infty$. On note

$$\xi_{\mathcal{W}} = (T\mathcal{W}, \pi_{\mathcal{W}}, \mathcal{W}, \mathbb{R}^4)$$

le fibré tangent sur \mathcal{W} et

$$\xi_{\mathcal{W}}^* = (T^*\mathcal{W}, \pi_{\mathcal{W}}^*, \mathcal{W}, \mathbb{R}^4)$$

son fibré dual. Si la dimension est infinie, on suppose que les variétés réelles sont modelées sur un espace de Banach séparable muni d'une base de Schauder inconditionnelle [1] dit espace de Schauder et les variétés complexes sont modelées sur un espace de Hilbert séparable. Un fibré d'état sur \mathcal{W} est la donnée d'un fibré vectoriel réel ou complexe

$$\zeta = (E, \pi, \mathcal{W}, \mathcal{F})$$

de base une variété \mathcal{W} . Si la fibre est de dimension infinie, dans le cas d'un fibré réel, on impose à la fibre \mathcal{F} d'être un espace de Schauder. Si la fibre est complexe, on suppose que c'est un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} . Quand la dimension de la base \mathcal{W} est finie, on dira que ζ est un fibré d'état. Pour $\dim \mathcal{W} = 4$, on retombe sur la notion de fibré d'état donné dans [3]. Si la fibre \mathcal{F} est un espace de Schauder ou un espace de Hilbert séparable, les cartes de trivialisations de ζ sont de la forme $W \times \mathcal{F}$, on peut munir l'espace total E d'une structure de variété banachique.

Date: 05/07/2020.

1991 Mathematics Subject Classification. 47A07, 47A80, 51P05, 51P99, 53C50, 53C20.

Key words and phrases. Forme différentielle, Algèbre graduée, Groupe de Lie, Algèbre de Lie, Mesure de Haar, G-fibré hermitien, connexion de Koszul, Section de Dirac, Courbure d'une connexion.

Si la fibre \mathcal{F} du fibré étudié est de dimension finie, l'espace total E du fibré ζ est une variété réelle de dimension $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{F}$ si \mathcal{F} est un espace vectoriel réel et de dimension $\dim \mathcal{W} + 2 \dim \mathcal{F}$, si \mathcal{F} est un espace vectoriel complexe. Le fibré des n -formes différentielles sur \mathcal{W} est l'espace des sections du fibré $\wedge^n \xi_{\mathcal{W}}^*$

$$\Lambda_{\mathcal{W}}^n = \Gamma(\wedge^n \xi_{\mathcal{W}}^*) \text{ avec } \Lambda_{\mathcal{W}}^0 = C^\infty(\mathcal{W}, \mathbb{K})$$

et le fibré des (p, q) -tenseurs, p fois covariant et q fois contravariant est noté

$$\xi_{\mathcal{W}}^{p,q} = (\otimes^p \xi_{\mathcal{W}}^*) \otimes (\otimes^q \xi_{\mathcal{W}}).$$

Pour un fibré vectoriel ζ , on considère l'ensemble des n -formes différentielles à valeurs dans l'espace total E ,

$$\Lambda_{\zeta}^n = \Gamma((\wedge^n \xi_{\mathcal{W}}^*) \otimes \zeta) \approx \Lambda_{\mathcal{W}}^n \otimes_{C^\infty(\mathcal{W})} \Lambda_{\zeta}^0, \quad n \geq 1 \text{ et } \Lambda_{\zeta}^0 = \Gamma(\zeta)$$

une section du fibré Λ_{ζ}^n est une C^∞ -application

$$s : \mathcal{W} \rightarrow \Lambda_{\mathcal{W}}^n \otimes \zeta,$$

où

$$s(w) : \underbrace{T_w \mathcal{W} \times \cdots \times T_w \mathcal{W}}_{\text{produit d'ordre } n} \rightarrow E_w(\zeta)$$

est une application multilinéaire alternée.

Notation 1. En général, l'espace Λ_{ζ}^n est noté $\Omega^n(\zeta)$ dans la littérature.

Remark 1. La notion de C^k -application est définie par la condition suivante:

Pour toute famille de champs locaux $\{X_p : p = 1, 2, \dots, n\}$ on a

$$w \rightarrow s(w)(X_1(w), \dots, X_n(w))$$

est une application de classe C^k comme application d'un ouvert de \mathcal{W} à valeurs dans $E(\zeta)$.

Pour $n > \dim \mathcal{W}$, $\Lambda_{\mathcal{W}}^n = 0$. Pour une n -forme $\omega \in \Lambda_{\mathcal{W}}^n$ et une section s de $\Lambda_{\mathcal{W}}^p \otimes \zeta$, on définit la loi de composition externe

$$\begin{aligned} & (\omega \wedge s)(w)(x_1, x_2, \dots, x_{n+p}) \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{n, p\}} \varepsilon_{\sigma} \omega(w)(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \cdot s(w)(x_{\sigma(n+1)}, \dots, x_{\sigma(n+p)}), \end{aligned}$$

où $\text{Perm}\{n, p\}$ est l'ensemble des permutations σ de $\{1, 2, \dots, n+p\}$ telles que

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(n) \text{ et } \sigma(n+1) < \sigma(n+2) < \cdots < \sigma(n+p).$$

Lemma 1. $\omega \wedge s$ est une section du fibré $\Lambda_{\mathcal{W}}^{n+p} \otimes \zeta$.

Proof. Si $\omega \in \Lambda_{\mathcal{W}}^n$, $\varpi \in \Lambda_{\mathcal{W}}^p$ et $s \in \Lambda_{\zeta}^0$ alors

$$\omega \wedge (\varpi \otimes s) = (\omega \wedge \varpi) \otimes s.$$

□

Remark 2. Si $\alpha \in \Lambda_{\mathcal{W}}^1$ alors $\alpha \wedge s = \alpha \otimes s$. Pour une 1-forme $\alpha \in \Lambda_{\mathcal{W}}^1$, la section $\alpha \otimes s \in \Lambda_{\zeta}^1$ est définie par

$$(\alpha \otimes s)(w) : T_w \mathcal{W} \rightarrow E_w(\zeta), \quad (\alpha \otimes s)(w)(x) = \alpha(w)(x) \cdot s(w), \quad \forall x \in T_w \mathcal{W},$$

on peut écrire,

$$\alpha \otimes s = \alpha \wedge s$$

et pour une C^∞ -application

$$\phi : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}, d\phi \in \Lambda_{\mathcal{W}}^1 \text{ et } d\phi \otimes s = d\phi \wedge s.$$

Si $\zeta = \xi^*$, $\alpha \wedge \beta$ est le produit extérieur sur l'algèbre $\Lambda_{\mathcal{W}}$.

Le produit intérieur d'une section s de $\Lambda^{n+p}\zeta$ par une section X de ξ^p est une section de $\Lambda^n\zeta$

$$\iota_X s(w)(x_1, \dots, x_n) = s(w)(X_1(w), \dots, X_p(w), x_1, \dots, x_n),$$

en particulier, pour un champ de vecteur X

$$\iota_X s(w)(x_1, \dots, x_n) = s(w)(X(w), x_1, \dots, x_n),$$

la formule de Cartan lie le produit intérieur au produit extérieur par

$$\mathcal{L}_X \omega = d\iota_X \omega + \iota_X d\omega$$

pour tout champ X sur \mathcal{W} . On rappelle que si f est une C^1 -application

$$f : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2,$$

le "**pullback**" d'une n -forme différentielle ω sur \mathcal{W}_2 est défini par

$$f^*(\omega)(w)(x_1, \dots, x_n) = \omega(f(w))(df_w(x_1), \dots, df_w(x_n)),$$

f^* est un opérateur de $\Lambda_{\mathcal{W}_1}$ dans $\Lambda_{\mathcal{W}_2}$ et la dérivée de Lie le long du champ X de la n -forme volume ω , $\mathcal{L}_X \omega$ est définie par

$$\mathcal{L}_X \omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^* \omega - \omega}{t} = \frac{d}{dt} \phi_t^* \omega \Big|_{t=0}$$

où ϕ_t est le flot du champ X , c'est-à-dire,

$$\phi_0(w) = w \text{ et } \frac{d}{dt} \phi_t(w) = X(\phi_t(w))$$

pour t proche de 0.

Definition 1. L'algèbre graduée du fibré ζ est définie par

$$\Lambda\zeta = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^n \zeta,$$

où $\Lambda_\zeta^n = 0$ si $n > \dim \mathcal{W}$.

On sait que Λ_ζ est un module gradué sur $C^\infty(\mathcal{W})$ muni de l'addition

$$\begin{aligned} (s+t)(w)(x_1 + \dots + x_n) \\ = s(w)(x_1 + \dots + x_n) + t(w)(x_1 + \dots + x_n), \end{aligned} \quad s \text{ et } t \in \Lambda_\zeta^n, x_i \in E_w(\zeta)$$

et de la loi de composition externe

$$(\phi.s)(w)(x) = \phi(w).s(w)(x), \quad x \in E_w(\zeta) \text{ et } \phi \in C^\infty(\mathcal{W}).$$

Proposition 1. Pour un fibré $\zeta = (E, \pi, \mathcal{W}, \mathcal{F})$, le morphisme de "pullback"

$$\pi^* : \Lambda_E \rightarrow \Lambda_{\mathcal{W}},$$

est un morphisme d'algèbre graduée.

2. CHAMPS CHRONOLOGIQUES STABLES

Definition 2. Une section de Dirac γ est une section du fibré

$$(\xi_{\mathcal{W}}^* \otimes \zeta)^* \otimes \zeta,$$

c'est-à-dire, $\gamma \in \Lambda_{(\xi_{\mathcal{W}}^* \otimes \zeta)^* \otimes \zeta}^0$.

Remark 3. Une section de $(\xi_{\mathcal{W}}^* \otimes \zeta)^* \otimes \zeta$ par l'isomorphisme

$$(\xi_{\mathcal{W}}^* \otimes \zeta)^* \otimes \zeta \approx \xi_{\mathcal{W}} \otimes (\zeta^* \otimes \zeta)$$

s'identifie à une section de $\text{End}(\xi_{\mathcal{W}}^*, \zeta^* \otimes \zeta)$.

Sur chaque fibre, on note $\gamma(w)$ le morphisme

$$\gamma(w) : T_w^* \mathcal{W} \otimes E_w \rightarrow E_w, \quad \gamma(w)(\delta \otimes x) \in E_w \text{ avec } \delta \in T_w^* \mathcal{W} \text{ et } x \in E_w,$$

soit $d \in \Lambda_{\mathcal{W}}^1$, on définit la section $\gamma^d \in \Lambda_{\zeta^* \otimes \zeta}^0$ par

$$\gamma^d(w) : E_w \rightarrow E_w \text{ avec } \gamma^d(w)(x) = \gamma(w)(d(w) \otimes x), \quad \forall x \in E_w$$

et pour toute section $s \in \Lambda_{\zeta}^0$

$$\gamma^d(s)(w) = \gamma(w)(d(w) \otimes s(w)) \in E_w, \quad w \in \mathcal{W}$$

en particulier, $\gamma^d(s)$ est une section de Λ_{ζ}^0 .

Lemma 2. Si ζ est de dimension finie alors l'application \mathbb{K} -linéaire

$$\widehat{\gamma} : \Lambda_{\xi_{\mathcal{W}}^* \otimes \zeta}^0 \rightarrow \Lambda_{\zeta}^0, \quad \widehat{\gamma}(\tau) = \gamma \otimes \tau$$

définie par

$$\widehat{\gamma}(\tau) : \mathcal{W} \rightarrow E(\zeta), \quad \widehat{\gamma}(\tau)(w) = \gamma \otimes \tau(w) = \gamma(w)(\tau(w)), \quad \forall w \in \mathcal{W} \quad (2.1)$$

est $\Lambda_{\mathcal{W}}^0$ -linéaire.

Proof. On utilise le lemme de tensorialité [6], γ est une section du fibré $(\xi_{\mathcal{W}}^* \otimes \zeta)^* \otimes \zeta$. \square

Definition 3. Sur un fibré d'état ζ , une section de Dirac γ est dite $\Lambda_{\mathcal{W}}^0$ -linéaire si et seulement si $\widehat{\gamma}$ est $\Lambda_{\mathcal{W}}^0$ -linéaire.

Remark 4. En utilisant le lemme précédent, toutes les sections de Dirac d'un fibré vectoriel de dimension finie sont $\Lambda_{\mathcal{W}}^0$ -linéaires. En dimension infinie la notion de $\Lambda_{\mathcal{W}}^0$ -linéaire n'est pas, en général, vérifiée sauf sous certaines hypothèses sur la section γ et le fibré ζ .

Les sections d'endomorphismes de Dirac sont définies par,

$$\gamma^d(s) = \gamma(d \otimes s), \quad d \in \Lambda_{\mathcal{W}}^1 = \xi_{\mathcal{W}}^* \text{ et } s \in \Lambda_{\zeta}^0,$$

le commutateur d'une famille finie d'endomorphismes de Dirac $\{\gamma^{d^{\mu}}\}$ est

$$\left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n} \right] = \sum_{\tau \in \text{Perm}\{1,2,\dots,n\}} \varepsilon(\tau) \gamma^{d^{\tau(1)}} \circ \gamma^{d^{\tau(2)}} \circ \dots \circ \gamma^{d^{\tau(n-1)}} \circ \gamma^{d^{\tau(n)}} \quad (2.2)$$

et l'anticommutateur ou crochet de Poisson est défini par,

$$\left\{ \gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n} \right\} = \sum_{\tau \in \text{Perm}\{1,2,\dots,n\}} \gamma^{d^{\tau(1)}} \circ \gamma^{d^{\tau(2)}} \circ \dots \circ \gamma^{d^{\tau(n-1)}} \circ \gamma^{d^{\tau(n)}}. \quad (2.3)$$

Remark 5. $[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}]$ est le commutateur des opérateurs γ^{d^1} et γ^{d^2} . Le crochet de Poisson est $\{\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}\}$.

L'extension de

$$d \in \Lambda_{\mathcal{W}}^1 \rightarrow \gamma^d \in \text{End } \zeta$$

est l'application $\Lambda_{\mathcal{W}}^0$ -linéaire définie sur les tenseurs alternés pures par

$$d^1 \wedge \cdots \wedge d^n \in \Lambda_{\mathcal{W}}^n \rightarrow \gamma^{d^1 \wedge \cdots \wedge d^n} = [\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n}] \in \text{End } \zeta,$$

$$d \in \Lambda_{\mathcal{W}}^n \rightarrow \gamma^d \in \text{End } \zeta,$$

cette construction a un sens car

$$[\gamma^{d^{\sigma(1)}}, \gamma^{d^{\sigma(2)}}, \dots, \gamma^{d^{\sigma(n)}}] = \varepsilon_{\sigma} [\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n}].$$

Definition 4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note encore γ l'extension de la section de Dirac définie par

$$\gamma : \Lambda_{\zeta}^1 \rightarrow \Lambda_{\zeta}^0, \gamma(d \otimes s) = \gamma^d(s), d \in \Lambda_{\mathcal{W}} \text{ et } s \in \Lambda_{\zeta}^0.$$

On peut construire, sous certaines hypothèses sur la section de Dirac, des métriques pseudo-riemanniennes. On suppose que la variété \mathcal{W} est de dimension 4 mais cette construction s'étend aux variétés \mathcal{W} de dimension finie. Pour une carte de trivialisatation $W \subset \mathcal{W}$ du fibré $\xi_{\mathcal{W}}$, on note $\{\partial_{\nu} : \nu = 0, 1, 2, 3\}$ une base de champs locaux sur W et on pose $\{d^{\mu} : \mu = 0, 1, 2, 3\}$ la base duale locale des 1-formes sur W

$$d^{\mu} \otimes \partial_{\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}, d^{\mu} \otimes \partial_{\nu}(w) = d^{\mu}(w)(\partial_{\nu}(w)), \forall w \in W.$$

Sur la carte W , le tenseur de Poisson est défini par

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Trace} \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = \text{Trace} (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu}).$$

Soit $\{\partial_{\nu,j}\}$ deux bases locales de champs locaux sur la carte W avec $j = 1, 2$ et $\{d^{\mu,j}\}$ les bases duales, on pose

$$\gamma_j^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Trace} \{\gamma_j^{\mu}, \gamma_j^{\nu}\} = \text{Trace} (\gamma_j^{\mu} \gamma_j^{\nu})$$

et la section locale P des matrices de passage de $\{\partial_{\nu}^1\}$ à $\{\partial_{\nu}^2\}$ qui sont réelles sur chaque fibre

$$P_{\nu}^{\tau} \partial_{\tau}^1 = \partial_{\nu}^2,$$

la transposée de P donne la section locale des matrices de passage sur le dual

$$Q = P^{\dagger}, Q_{\sigma}^{\mu} = P_{\mu}^{\sigma}.$$

La section locale des matrices de passage de $\{d_1^{\mu}\}$ à $\{d_2^{\mu}\}$

$$Q_{\sigma}^{\mu} d_1^{\sigma} = d_2^{\mu}$$

vérifie

$$d_2^{\mu} \partial_{\nu}^2 = \delta_{\nu}^{\mu} = Q_{\sigma}^{\mu} d_1^{\sigma} P_{\nu}^{\tau} \partial_{\tau}^1 = Q_{\sigma}^{\mu} P_{\nu}^{\tau} d_1^{\sigma} \partial_{\tau}^1 = Q_{\sigma}^{\mu} P_{\nu}^{\sigma}, Q = P^{-1},$$

$$\gamma_2^{\mu} = \gamma^{\mu} Q_{\sigma}^{\mu} d_1^{\sigma} = Q_{\sigma}^{\mu} \gamma_1^{\sigma}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2^{\mu\nu} &= \text{Trace}(\gamma_2^\mu \gamma_2^\nu) = \text{Trace}((Q_\sigma^\mu \gamma_1^\sigma)(Q_\rho^\nu \gamma_1^\rho)) \\
&= \text{Trace}(Q_\sigma^\mu Q_\rho^\nu \gamma_1^\sigma \gamma_1^\rho) = Q_\sigma^\mu Q_\rho^\nu \text{Trace}(\gamma_1^\sigma \gamma_1^\rho) \\
&= Q_\sigma^\mu \gamma_1^{\sigma\rho} P_\rho^\nu = Q_\sigma^\mu \gamma_1^{\sigma\rho} (Q^{-1})_\rho^\nu \\
(\gamma_2^{\mu\nu}) &= P^\dagger (\gamma_1^{\mu\nu}) P \text{ avec } P^\dagger = P^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Definition 5. Une section de Dirac est localement métrisable en $w \in \mathcal{W}$ si et seulement si il existe une section locale de bases $\{\partial_\mu\}$ pour laquelle le tenseur $\gamma^{\mu\nu}$ existe et que ce tenseur soit un tenseur pseudo-métrique.

Si la fibre \mathcal{F} est un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} , la section γ est dite hermitienne d'ordre n (respectivement unitaire d'ordre n) si il existe une section locale de bases $\{\partial_\mu\}$ du fibré tangent ξ_W définie sur une carte W pour laquelle $(\gamma^{d^\mu})^n$ est un opérateur hermitien (respectivement unitaire).

Si les opérateurs

$$\gamma^\mu(w) : E_w(\zeta) \rightarrow E_w(\zeta),$$

sont des opérateurs bornés et à trace, le tenseur de Poisson $\gamma^{\mu\nu}$ est défini. On dit que la section de Dirac est bornée et à trace non nulle si pour toute carte W de trivialisations de ζ , il existe une section de bases locales $\{\partial_\mu\}$ pour laquelle $\gamma^\mu(w)$ sont des opérateurs bornés et à trace pour tout $w \in W$. Par 2.4, cette définition est indépendante du choix de $\{\partial_\mu\}$ et les sections locales des matrices de passage sont réelles, la notion de section hermitienne d'ordre n est invariante par changement de base. En résumé, les définitions données précédemment ne dépendent pas de la carte choisie. La notion locale se prolonge au globale par recollement.

Theorem 1. Une section de Dirac bornée, à trace non nulle, hermitienne à l'ordre 1 (respectivement, 2) est localement métrisable de métrique riemannienne (respectivement, de métrique pseudo-riemannienne).

Proof. Le tenseur de Poisson est symétrique. En utilisant 2.4, il existe une section locales de bases $\{\partial_\mu\}$ pour laquelle

$$\text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 0 \text{ si } \mu \neq \nu,$$

si γ est une section de Dirac bornée et à trace non nulle alors le tenseur de Poisson existe. Si la section est hermitienne à l'ordre 1, il est métrisable et la métrique associée est riemannienne car

$$\text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\mu) > 0.$$

Si la section est hermitienne à l'ordre 2 alors la métrique est pseudo-riemannienne car

$$\text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\mu) \in \mathbb{R}^*.$$

□

Notation 2. Pour une section de Dirac métrisable, on pose g la pseudo-métrique définie par $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$.

Definition 6. Un champ chronologique local sur une carte $W \subset \mathcal{W}$ est un champ local

$$T : W \subset \mathcal{W} \rightarrow \tau\mathcal{W}$$

de genre temps, c'est-à-dire, qu'il vérifie

$$\forall w \in W \subset \mathcal{W}, g(w)(T(w), T(w)) < 0.$$

Une variété Lorentzienne est une variété connexe, orientée en temps, c'est-à-dire, qu'il existe en chaque événement de \mathcal{W} un champ chronologique local.

Le champ chronologique normalisé associé à T est

$$w \rightarrow \frac{T(w)}{\sqrt{-g(w)(T(w), T(w))}}, \forall w \in W$$

que l'on note encore T .

Une ligne de temps de l'univers est une courbe maximale, paramétrée par

$$\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{W}$$

pour laquelle

$$g(\rho(t))(\rho'(t), \rho'(t)) < 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1. Pour l'espace-temps de Minkowski (\mathbb{R}^4, ds^2) avec

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

le champ $T = \frac{\partial}{\partial t}$ est un champ chronologique global sur \mathbb{R}^4 . On peut définir la section de Dirac Lorentzienne, définissant la métrique de Minkowski, sur le fibré trivial

$$\varkappa = (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}, \text{pr}_1, \mathbb{R}^4, \mathbb{C})$$

où pr_1 désigne la première projection sur \mathbb{R}^4 , l'ensemble des sections Λ_{\varkappa}^0 du fibré \varkappa , est isomorphe à $C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$. Soit

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \mu = 0, 1, 2, 3 \text{ et } \{d^\mu\} \text{ la base duale,}$$

si on pose,

$$\gamma^\mu(x) = \gamma^{d^\mu}(x) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}^4$$

et les matrices M_μ sont les matrices de $\gamma^\mu(x)$ dans la base $\{1, i\}$, alors pour

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice $(\gamma^{\mu\nu})$ vérifie

$$(\gamma^{\mu\nu}) = (\text{Trace } \gamma^\mu \gamma^\nu) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et la métrique de Minkowski peut être définie par la section de Dirac Lorentzienne γ où

$$\gamma^d = \lambda_\mu \gamma^\mu, \lambda_\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}), d = \lambda_\mu d^\mu.$$

Sur une carte $W \subset \mathcal{W}$ où le champ chronologique T existe, le sous-espace vectoriel de dimension 1, engendré par le vecteur $T(w) \in \tau_w \mathcal{W}$ est un sous-espace non isotrope pour la forme bilinéaire $g(w)$ sur $\tau_w \mathcal{W}$ et scinde $\tau_w \mathcal{W}$ en une somme orthogonale unique

$$\tau_w \mathcal{W} = T_w \oplus E_w$$

où

$$T_w = \mathbb{R}T(w) \text{ et } E_w = T_w^\perp.$$

Cette décomposition est unique car la métrique est lorentzienne. La restriction $g(w)|_{E_w}$ est définie positive sur E_w et $g(w)|_{T_w}$ est définie négative. Tout champ local $X : W \subset \mathcal{W} \rightarrow \tau_w \mathcal{W}$ se décompose de la façon suivante

$$X = X_E + \lambda T,$$

$\lambda : W \subset \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ est une C^∞ -application, X_E est un champ espace, $X_E(w) \in E_w$ pour tout $w \in W \subset \mathcal{W}$, en particulier,

$$g(w)(X_E(w), X_E(w)) > 0 \text{ si } X_E(w) \neq o_{T_w} \mathbf{w},$$

on définit la norme de $X_E(w)$ par

$$|X_E(w)| = \sqrt{g(w)(X_E(w), X_E(w))}, \forall w \in W.$$

Definition 7. *Un champ T est stable en l'événement $w \in \mathcal{W}$, s'il existe une carte W de \mathcal{W} pour laquelle si T s'écrit dans une section locale de base $\{\partial_\nu\}$,*

$$T = T^\nu \partial_\nu$$

on ait

$$\partial_\mu (T^\nu g_{\sigma\nu}) = \partial_\sigma (T^\nu g_{\mu\nu}), \forall \mu, \forall \sigma$$

où

$$g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu).$$

Remark 6. *Cette définition est indépendante de la base locale de champs $\{\partial_\nu\}$.*

Example 2. *Pour l'espace de Minkowski, $\frac{\partial}{\partial t}$ est un champ chronologique stable de \mathbb{R}^4 .*

Theorem 2. *Si le champ chronologique T est stable sur $W \subset \mathcal{W}$, le système de Pfaff*

$$w \rightarrow \epsilon(w) = E_w, w \in W$$

est complètement intégrable. Pour chaque $w \in W$, la composante connexe de l'intégrale associée à ce système est une variété connexe dite feuille d'espace en w , notée \mathcal{E}_w .

Proof. On peut consulter [3] pour une preuve. \square

L'univers est une variété de dimension 4 connexe, muni d'une métrique de Lorentz g et d'une chronologie définie par un champ local stable T , tel que

$$g(T, T) = -1.$$

Chaque chronologie stable permet de feuilletter \mathcal{W} en deux feuilletages orthogonaux pour la métrique g . L'un est le feuilletage espace, noté \mathcal{E} , dont les feuilles sont des sous-variétés connexes sans bord, de dimension 3 de \mathcal{W} , dites feuilles d'espace, l'autre est le feuilletage chronologique noté \mathcal{T} , dont les feuilles sont des sous-variétés connexes sans bord, de dimension 1 de \mathcal{W} , dites feuilles chronologiques.

Remark 7. *Les feuilles chronologiques, ou lignes de temps de l'univers, ne peuvent être que \mathbb{S}^1 ou \mathbb{R} . Si l'événement w évolue sur une feuille chronologique de type \mathbb{S}^1 , on dit qu'il est cyclique. L'événement est acyclique si la feuille chronologique est \mathbb{R} . Le flot local du champ chronologique T permet de construire des lignes de temps locales de l'univers \mathcal{W} pour lesquelles si ρ est un paramétrage local on a l'événement w*

$$\rho(0) = w \text{ et } \rho'(0) = T(w),$$

si le champ T est stable, le feuilletage local en feuille espace permet de décrire l'univers en $\varphi(0) = w$ par la feuille espace \mathcal{E}_w , l'observateur situé en w ne voit que la feuille espace dans laquelle il se trouve.....Pour un champ chronologique stable T , un événement situé sur une ligne de temps distinctes de la ligne de temps de l'observateur ne peut être observable que si l'événement se situe à l'intersection de sa ligne de temps et de la feuille d'espace de l'observateur.

La notion de changement local de coordonnées entre deux espace-temps définis par les champs chronologiques T et S est la donnée d'une section locale θ , définie sur une carte $W \subset \mathcal{W}$ du fibré

$$\text{End}(\xi_{\mathcal{W}}) = \xi_{\mathcal{W}}^* \otimes \xi_{\mathcal{W}}$$

telle que

$$\theta \otimes T = S \text{ et } g(\theta \otimes X, \theta \otimes Y) = g(X, Y) \text{ sur } W \subset \mathcal{W} \quad (2.5)$$

pour tout champ local X, Y sur $W \subset \mathcal{W}$. On rappelle que pour un champ X de \mathcal{W} défini sur W ,

$$\theta \otimes X(w) = \theta(w)(X(w))$$

et l'application

$$w \rightarrow \theta(w) : \tau_w \mathcal{W} \rightarrow \tau_w \mathcal{W}$$

définie, en chaque événement w , une $g(w)$ -isométrie. On dit que θ conserve la métrique de Lorentz.

Theorem 3. *Pour tous les champs chronologiques T et S , il existe un changement local de coordonnées.*

Proof. On peut consulter [3] pour une preuve. \square

3. TRANSFORMATION DE WICK

Dans ce qui suit, on suppose que la section de Dirac est métrisable avec métrique pseudo-riemannienne. Sur une carte de trivialisatation W de $\xi_{\mathcal{W}}$ et ζ , on se fixe une base de champs locaux $\{\partial_\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ et la base duale $\{d^\nu\}$ vérifiant

$$d^\nu(\partial_\mu) = \delta_\mu^\nu,$$

en utilisant 2.4, on peut supposer que

$$g(\partial_\mu, \partial_\nu) = 0 \text{ si } \mu \neq \nu,$$

on en déduit que

$$\text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 0 \text{ si } \mu \neq \nu.$$

Soit $\tilde{\gamma}$, la section définie par

$$\tilde{\gamma}^\mu = i\gamma^\mu \text{ si } \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\mu) < 0 \text{ où } i^2 = -1$$

$$\tilde{\gamma}^\mu = \gamma^\mu \text{ si } \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\mu) > 0,$$

on pose

$$\tilde{\gamma}(d \otimes s) = \lambda_\mu \tilde{\gamma}^\mu(s) \text{ où } d = \lambda_\mu d^\mu,$$

la métrique \tilde{g} associée vérifie

$$\tilde{\gamma}^{\mu\mu} > 0 \text{ et } \tilde{\gamma}^{\mu\nu} = 0 \text{ pour } \mu \neq \nu,$$

cette métrique est une métrique riemannienne locale qui est indépendante de la base de sections locales par 2.4.

Definition 8. *La transformation de Wick est une transformation qui à une section de Dirac métrisable associe une section de Dirac riemannienne. La rotation de Wick autour d'un champ chronologique T est une transformation de Wick qui transforme ce champ en un champ espace.*

Remark 8. *Pour passer d'une section de Dirac lorentzienne à une section de Dirac riemannienne, il suffit de faire une rotation de Wick autour d'un champ chronologique T .*

On peut construire à l'aide de n'importe quelle section de Dirac métrisable γ , de métrique g , une métrique riemannienne \mathbf{g} en prenant un recouvrement localement fini de cartes de trivialisations de $\xi_{\mathcal{W}}$ et ζ (on suppose qu'un tel recouvrement existe sur \mathcal{W}), par transformation de Wick sur chaque W de ce recouvrement on définit \mathbf{g}_W et on prend pour \mathbf{g} la métrique riemannienne

$$\mathbf{g} = \rho^W \mathbf{g}_W \quad (3.1)$$

où $\{\rho^W\}$ est une partition de l'unité associée au recouvrement $\{W\}$ de \mathcal{W} .

4. CONNEXION DE KOSZUL

Definition 9. *Une connexion de Koszul ∇ est un opérateur \mathbb{K} -linéaire*

$$\nabla : \Lambda_{\zeta}^0 \rightarrow \Lambda_{\zeta}^1$$

telle que la relation de Leibniz

$$\nabla(\phi s) = d\phi \otimes s + \phi \nabla s, \quad \forall s \in \Lambda_{\zeta}^0 \text{ et } \phi \in \Lambda_{\mathcal{W}}^0$$

soit vérifiée.

Definition 10. *La dérivée extérieure d^{∇} sur ζ est une application qui transforme les sections de Λ_{ζ}^n en sections de Λ_{ζ}^{n+1} ,*

$$d^{\nabla} : \Lambda_{\zeta} \rightarrow \Lambda_{\zeta}, \quad \nabla(\Lambda_{\zeta}^n) \subset \Lambda_{\zeta}^{n+1}$$

$$d^{\nabla} |_{\Lambda_{\zeta}^0} = \nabla,$$

et pour toute n -forme ω et toute section s de $\Lambda^p \zeta$, ∇ vérifie la règle de Leibniz

$$d^{\nabla}(\omega \wedge s) = d\omega \wedge s + (-1)^n \omega \wedge d^{\nabla}(s), \quad \omega \in \Lambda_{\mathcal{W}}^n \text{ et } s \in \Lambda_{\zeta}^p,$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si le fibré est réel et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si le fibré est complexe, d est la dérivée extérieure dans l'algèbre graduée $\Lambda_{\mathcal{W}}$.

Remark 9. *La connexion de Koszul permet de définir la dérivée extérieure d^{∇} par extension. Toute connexion ∇ a une extension*

$$d^{\nabla} |_{\Lambda_{\Lambda_{\mathcal{W}}^n \otimes \zeta}^0} = \nabla_n : \Lambda_{\Lambda_{\mathcal{W}}^n \otimes \zeta}^0 \rightarrow \Lambda_{\Lambda_{\mathcal{W}}^{n+1} \otimes \zeta}^0$$

avec,

$$\nabla_0 = \nabla, \quad \Lambda_{\mathcal{W}}^0 \otimes \zeta = \Lambda_{\zeta}^0$$

et

$$\nabla_n(\omega \wedge s) = d\omega \wedge s + (-1)^n \omega \wedge \nabla s, \quad \phi \in \Lambda_{\mathcal{W}}^n.$$

Notation 3. *Par abus de langage, on peut identifier ∇ à son extension d^{∇} .*

On peut donner une définition réduite de la dérivée extérieure sur le fibré ζ sous la forme suivante,

Definition 11. La dérivée extérieure sur le fibré ζ est une application \mathbb{K} -linéaire

$$d^\nabla : \Lambda_\zeta \rightarrow \Lambda_\zeta$$

telle que pour tout n -forme ω et tout $s \in \Lambda_\zeta$, la formule de Leibniz

$$d^\nabla (\omega \wedge s) = d\omega \wedge s + (-1)^n \omega \wedge d^\nabla (s)$$

est vérifiée.

Theorem 4. L'opérateur $(d^\nabla)^2$ est $\Lambda_{\mathcal{W}}$ -linéaire.

Proof. On a pour une n -forme ω

$$\begin{aligned} & (d^\nabla)^2 (\omega \wedge s) \\ &= d^\nabla (d\omega \wedge s + (-1)^n \omega \wedge d^\nabla (s)) = d^\nabla (d\omega \wedge s) + (-1)^n d^\nabla (\omega \wedge d^\nabla (s)) \\ &= d^2\omega \wedge s + (-1)^{n+1} d\omega \wedge d^\nabla (s) + (-1)^n (d\omega \wedge d^\nabla (s) + (-1)^n \omega \wedge (d^\nabla)^2 (s)) \\ &= d^2\omega \wedge s + (-1)^{n+1} d\omega \wedge d^\nabla (s) + (-1)^n d\omega \wedge d^\nabla (s) + (-1)^{2n} \omega \wedge (d^\nabla)^2 (s) \\ &= \omega \wedge (d^\nabla)^2 (s), \quad d^2\omega = 0. \end{aligned}$$

□

Lemma 3. L'ensemble des connexions de Koszul d'un fibré ζ est muni d'une structure d'espace affine.

Proof. Soit

$$\nabla = (1 - \lambda) \nabla_0 + \lambda \nabla_1,$$

pour tout n -forme ω et s une section de $\Lambda^p \zeta$

$$\begin{aligned} & \nabla (\omega \wedge s) \\ &= (1 - \lambda) \nabla_0 (\omega \wedge s) + \lambda \nabla_1 (\omega \wedge s) \\ &= (1 - \lambda) (d\omega \wedge s + (-1)^n \omega \wedge \nabla_0 (s)) + \lambda (d\omega \wedge s + (-1)^n \omega \wedge \nabla_1 (s)) \\ &= d\omega \wedge s + (-1)^n \omega \wedge \nabla (s), \end{aligned}$$

cette remarque permet de construire des connexions par recouvrement localement fini. □

L'évaluation d'une section sur un champ de vecteur X de $\xi_{\mathcal{W}}$,

$$\nabla_X : \Gamma(\zeta) \rightarrow \Gamma(\zeta)$$

notée $\nabla_X s(w)$, ne fait intervenir que $X(w)$ et le 1-jet de s en w .

Proposition 2. Pour chaque champ X , l'application

$$\nabla_X : \Lambda_\zeta \rightarrow \Lambda_\zeta$$

est \mathbb{K} -linéaire et vérifie pour tout n -forme ω , la relation de Leibniz

$$\nabla_X (\omega \wedge s) = \mathcal{L}_X (\omega) \wedge s + (-1)^n \omega \wedge \nabla_X s, \quad \forall s \in \Lambda_\zeta.$$

Remark 10. On peut construire l'extension de

$$\nabla_X : \Lambda_\zeta \rightarrow \Lambda_\zeta$$

à partir de

$$\nabla_X : \Lambda_\zeta^0 \rightarrow \Lambda_\zeta^0 \quad \text{et} \quad \nabla_X (\phi \wedge s) = \mathcal{L}_X (\phi) \wedge s + \phi \wedge \nabla_X (s).$$

Une connexion ∇ du fibré ζ passe canoniquement, voir [6], au fibré ζ^* , $\otimes^p \zeta$, Λ_ζ^p et $\text{End}(\zeta) = \zeta^* \otimes \zeta$. Si ∇_1 et ∇_2 sont deux connexions de ζ alors

$$\nabla_1 - \nabla_2$$

est $\Lambda_{\mathcal{W}}^0$ -linéaire, l'ensemble des connexions de ζ a une structure d'espace affine. Si ζ_j , $j = 1, 2$ sont munis des connexions ∇_j alors $\zeta_1 \oplus \zeta_2$ et $\zeta_1 \otimes \zeta_2$ sont munis respectivement des connexions

$$\nabla = \nabla_1 \oplus \nabla_2 \text{ et } \nabla = \nabla_1 \otimes \nabla_2$$

où

$$(\nabla_1 \oplus \nabla_2)_X (s_1 \oplus s_2) = (\nabla_1)_X (s_1) \oplus (\nabla_2)_X (s_2)$$

et

$$(\nabla_1 \otimes \nabla_2)_X (s_1 \otimes s_2) = (\nabla_1)_X (s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes (\nabla_2)_X (s_2).$$

On donne la description de la connexion $\nabla_{\text{End}(\zeta)}$, associée à une connexion ∇_ζ , sous la forme

$$\nabla_{\text{End}} L = [\nabla, L] = \nabla L - L \nabla,$$

si

$$L \in \Lambda_{\text{End}(\zeta)}^0 = \Gamma(\text{End}(\zeta)) = \Lambda_{\zeta^* \otimes \zeta}^0, \nabla L \in \Lambda_{\text{End}(\zeta)}^1 = \Gamma(\xi_{\mathcal{W}}^* \otimes (\zeta^* \otimes \zeta))$$

$$\nabla_{\text{End}(\zeta)} L(w) : T_w \mathcal{W} \rightarrow E_w^*(\zeta) \otimes E_w(\zeta)$$

$$\nabla_{\text{End}(\zeta)} L(w)(x) : E_w(\zeta) \rightarrow E_w(\zeta), \nabla_{\text{End}(\zeta)} L(w)(x)(u) \in E_w(\zeta) \text{ pour } u \in E_w(\zeta),$$

si $s \in \Lambda_\zeta^0$, on pose

$$(\nabla_{\text{End}(\zeta)} L)(s) = \nabla(L(s)) - L(\nabla s) = [\nabla, L](s),$$

$$Ls(w) = L(w)(s(w)), Ls \in \Lambda_\zeta^0 \text{ et } \nabla(L(s)) \in \Lambda_\zeta^1,$$

$$\nabla s \in \Lambda^1(\zeta)$$

$$L(\nabla s)(w) = L(w) \circ \nabla s(w), L(\nabla s) \in \Lambda_\zeta^1$$

donc,

$$(\nabla_{\text{End}(\zeta)} L)(s) \in \Lambda_\zeta^1, s \in \Lambda_\zeta^0,$$

$$\nabla_{\text{End}(\zeta)} L = [\nabla, L].$$

On a

$$\nabla_{\text{End}(\zeta)}(\phi L)(s) = \nabla(\phi L)(s) - \phi L(\nabla s) = d\phi \times Ls + \phi[\nabla, L]s, d\phi \times Ls = d\phi \otimes Ls$$

la formule de Leibniz est vérifiée. $\nabla_{\text{End}(\zeta)} L$ est une section du fibré $\xi_{\mathcal{W}}^* \otimes (\zeta^* \otimes \zeta)$, car en dimension finie

$$\text{Hom}(\Lambda_\zeta^0, \Lambda_\zeta^1) \approx \Lambda_{\text{End}(\zeta)}^1$$

et on a les relations suivantes

$$\nabla_{\text{End}(\zeta)}(L)(s_1 + s_2) = \nabla_{\text{End}(\zeta)}(L)(s_1) + \nabla_{\text{End}(\zeta)}(L)(s_2)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\text{End}(\zeta)}(L)(\phi s) &= \nabla(L(\phi s)) - L\nabla(\phi s) = \nabla(\phi L(s)) - L(d\phi \times s + \phi \nabla s) \\ &= d\phi \times L(s) + \phi \nabla L(s) - d\phi \times L(s) - \phi L(\nabla s) \\ &= \phi[\nabla, L](s) = \phi \nabla_{\text{End}(\zeta)}(L)(s). \end{aligned}$$

Definition 12. L'opérateur de Dirac-Koszul est l'opérateur H qui opère sur les sections locales de ζ , noté

$$H = \gamma \otimes \nabla,$$

défini sur chaque fibre E_w par

$$H(s)(w) = \gamma(w)(\nabla s(w)).$$

Notation 4. Soit $\phi \in \Lambda_{\mathcal{W}}^0$, l'application

$$\widehat{\phi} : \Lambda_{\zeta}^0 \rightarrow \Lambda_{\zeta}^0, \widehat{\phi}s(w) = \phi(w)s(w)$$

est le multiplicateur par ϕ .

Theorem 5. Pour une section de Dirac γ , $\Lambda_{\mathcal{W}}^0$ -linéaire, on a

$$[H, \widehat{\phi}] = \gamma^{d\phi}, \quad (4.1)$$

en particulier, si γ^{ω} est l'opérateur nul sur les formes exactes ω alors l'opérateur H est $\Lambda_{\mathcal{W}}^0$ -linéaire.

Proof. Avec les notations de 2.1,

$$\begin{aligned} H(\phi s) &= H(\phi \wedge s) \\ &= \gamma \otimes \nabla(\phi s) = \widehat{\gamma}(\nabla(\phi s)) = \widehat{\gamma}(d\phi \wedge s + \phi \wedge \nabla s) \\ &= \gamma^{d\phi}(s) + \phi \wedge H(s), \end{aligned}$$

car γ est $\Lambda_{\mathcal{W}}^0$ -linéaire. Si la forme $\gamma^{\omega} = 0$ sur toutes les formes exactes de $\xi_{\mathcal{W}}^*$ alors H est $\Lambda_{\mathcal{W}}^0$ -linéaire. \square

Corollary 1. Si la section de Dirac γ s'annule sur les formes exactes, il existe $\widehat{H} \in \Lambda_{\zeta^* \otimes \zeta}^0$ tel que

$$H(s) = \widehat{H} \otimes s, H(s)(w) = \widehat{H}(w)(s(w)), \forall s \in \Lambda_{\zeta}^0.$$

Proof. On utilise le lemme de tensorialité [6]. \square

Definition 13. L'opérateur

$$R^{\nabla} = \nabla_1 \circ \nabla_0$$

représente la courbure de la connexion ∇ .

La courbure de la connexion de Koszul ∇ est un opérateur

$$R^{\nabla} : \Lambda_{\zeta}^0 \rightarrow \Lambda_{\zeta}^2,$$

cet opérateur associe à chaque section s du fibré ζ une section du fibré $\Lambda_{\mathcal{W}}^2 \otimes \zeta$. Si la fibre de ζ est de dimension finie, on a un isomorphisme entre les fibrés suivants

$$\Lambda_{\mathcal{W}}^2 \otimes \zeta \approx \text{Hom}(\xi_{\mathcal{W}} \otimes \xi_{\mathcal{W}}, \zeta) \approx \text{B}(\xi_{\mathcal{W}} \times \xi_{\mathcal{W}}, \zeta)$$

où la fibre de $\text{B}(\xi_{\mathcal{W}} \times \xi_{\mathcal{W}}, \zeta)$ en l'événement w est formée des applications bilinéaires de

$$E_w(\xi_{\mathcal{W}}) \times E_w(\xi_{\mathcal{W}}) \rightarrow E_w.$$

Dans l'hypothèse où la fibre est de dimension infinie, $\text{B}(\xi_{\mathcal{W}} \times \xi_{\mathcal{W}}, \zeta)$ est l'espace des applications bilinéaires bornées et il existe un monomorphisme

$$\text{Hom}(\xi_{\mathcal{W}} \otimes \xi_{\mathcal{W}}, \zeta) \rightarrow \text{B}(\xi_{\mathcal{W}} \times \xi_{\mathcal{W}}, \zeta)$$

et un isomorphisme

$$\Lambda_{\mathcal{W}}^2 \otimes \zeta \rightarrow \text{Hom}(\xi_{\mathcal{W}} \otimes \xi_{\mathcal{W}}, \zeta),$$

on note

$$\rho : \Lambda_{\mathcal{W}}^2 \otimes \zeta \rightarrow \text{B}(\xi_{\mathcal{W}} \times \xi_{\mathcal{W}}, \zeta) \quad (4.2)$$

cette application. Si ζ a une fibre de dimension infinie alors ρ est un monomorphisme de fibré, l'image de ρ est un sous-fibré de

$$\text{B}(\xi_{\mathcal{W}} \otimes \xi_{\mathcal{W}}, \zeta).$$

Lemma 4. *La courbure R^∇ est $\Lambda_{\mathcal{W}}^0$ -linéaire, il existe $\mathcal{R}^\nabla \in \Lambda_{\zeta^* \otimes \zeta}^2$ tel que*

$$R^\nabla(s)(w) = \mathcal{R}^\nabla(w)(s(w)) = \mathcal{R}^\nabla \otimes s(w), \forall w \in \mathcal{W}. \quad (4.3)$$

Proof. On a montré que ∇^2 est $\Lambda_{\mathcal{W}}$ -linéaire, R^∇ est $\Lambda_{\mathcal{W}}^0$ -linéaire, l'existence de \mathcal{R}^∇ est donné par le lemme de tensorialité [6]. \square

5. MODÉLISATION PAR STRUCTURE DE LIE

On se fixe un fibré d'état ζ sur l'univers \mathcal{W} , dont le groupe de structure G est un groupe de Lie contenu dans le groupe des difféomorphismes de la fibre \mathcal{H} du fibré ζ . Si on veut étudier les états d'une particule quantique, on est amené à définir cette particule par un voisinage ouvert de localisation, ainsi une particule devient une carte de l'univers \mathcal{W} . Une interaction entre une particule α et une particule β est la donnée d'une application

$$\tau_{\alpha\beta} : W_\alpha \cap W_\beta \rightarrow G \subset \text{Diff}(\mathcal{H}), \quad (5.1)$$

la famille des interactions entre particules doit vérifier les propriétés

$$\tau_{\alpha\alpha}(w) = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}, \tau_{\beta\alpha}(w) = \tau_{\alpha\beta}^{-1}(w) \quad (5.2)$$

et la propriété de cocycle

$$\tau_{\alpha\beta}(w) \tau_{\beta\gamma}(w) = \tau_{\alpha\gamma}(w), \forall w \in \mathcal{W}. \quad (5.3)$$

La fibre \mathcal{H} est l'espace des mesures, en général \mathcal{H} est un espace hermitien. Le fibré d'état ζ permet de construire les fibrés de Lie associés à ζ , à savoir ζ_G et $\zeta_{\mathfrak{g}}$ décrits dans [4].

Remark 11. *On peut étendre les constructions de [4] à des groupes de Lie de dimension infinie.*

Le fibré ζ_G est un groupe qui permet de définir une observable sous forme de section hermitienne. Si le groupe de Lie G est localement compact, on le munit d'une mesure de Haar λ , cette mesure permet de définir une mesure de Haar sur chaque fibre G_w en remarquant que la mesure λ_α sur E_w , définie par

$\lambda_\alpha(B) = \lambda(\phi_{\alpha,w}(B))$ avec $\phi_\alpha(x) = (\pi(x), \phi_{\alpha,\pi(x)}(x))$ pour tout $x \in \pi^{-1}(W_\alpha)$ et tout borélien B de la fibre E_w , est une mesure indépendante de la carte ϕ_α . Pour une autre carte ϕ_β on a

$$\phi_{\beta,w}(B) = \tau_{\beta\alpha}(w)(\phi_{\alpha,w}(B))$$

or $\tau_{\beta\alpha}(w)$ est une application de transition qui est dans le groupe G et λ est une mesure de Haar sur G , on en déduit

$$\lambda_\beta(B) = \lambda(\phi_{\beta,w}(B)) = \lambda(\tau_{\beta\alpha}(w)(\phi_{\alpha,w}(B))) = \lambda(\phi_{\alpha,w}(B)) = \lambda_\alpha(B), \forall B.$$

Si G est compacte, on peut définir une probabilité sur chaque fibre G_w du fibré de Lie ζ_G

Dans la théorie de Yang-Mills on suppose que G est contenu dans le groupe linéaire $\text{Gl}(\mathcal{H})$, si \mathcal{H} est un espace de Hilbert, les opérateurs de $\text{Gl}(\mathcal{H})$ sont les

opérateurs bi-bornés de \mathcal{H} . Les groupes de Yang-Mills sont les groupes de Lie G ayant un système de générateurs fini $\{L_\alpha\}$ vérifiant des relations de la forme

$$[L_{\alpha_1}, L_{\alpha_2}, \dots, L_{\alpha_k}] = \lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_l} [L_{\beta_1}, L_{\beta_2}, \dots, L_{\beta_l}], \quad (5.4)$$

ou

$$\{L_{\alpha_1}, L_{\alpha_2}, \dots, L_{\alpha_k}\} = \lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_l} \{L_{\beta_1}, L_{\beta_2}, \dots, L_{\beta_l}\}, \quad \lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_l} \in \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \quad (5.5)$$

où $[L_{\alpha_1}, L_{\alpha_2}, \dots, L_{\alpha_k}]$ et $\{L_{\alpha_1}, L_{\alpha_2}, \dots, L_{\alpha_k}\}$ sont définis en 2.2 et 2.3. Dans la situation 5.4, on dit que le groupe est antisymétrique et dans la situation 5.5, on dit que ce groupe est symétrique. Les matrices de Dirac-Majorana sont des exemples de groupes de Yang-Mills. Les constantes $\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_l}$ définissent sur le fibré ζ des fonctions de couplages, notées encore $\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_l} \in C^\infty(\mathcal{W})$.

Definition 14. Un état s de ζ est une section de ζ , $s \in \Lambda_\zeta^0$. Une observable τ des états est une section du fibré ζ_G , $\tau \in \Lambda_{\zeta_G}^0$, telle que $\tau(w)$ est un opérateur hermitien de \mathcal{H} pour tout $w \in \mathcal{W}$.

Pour une observable τ en w , l'opérateur $\tau(w) : E_w \rightarrow E_w$ a une base de vecteurs propres pour chaque w et telle que l'application $w \rightarrow \tau(w)$ est C^∞ dans le sens suivant, pour toute section $s \in \Lambda_\zeta^0$, l'application

$$w \rightarrow \tau \otimes s(w) = \tau(w)(s(w))$$

est C^∞ dans le sens de [7]. Les fonctions $\lambda : W \subset \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} pour lesquelles il existe une section s , non nulle sur W , vérifiant

$$\tau \otimes s(w) = \lambda(w)s(w), \quad \forall w \in W$$

sont des fonctions propres de τ sur W et les états associés s sont de états propres de τ sur W . Le théorème de Von Neumann permet d'associer à $\tau(w)$, une mesure spectrale

$$P_{\tau(w)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(E_w),$$

qui à chaque borélien B de \mathbb{R} associe un projecteur $P_{\tau(w)}(B)$ de l'espace de Hilbert séparable E_w où E_w est la fibre en w du fibré ζ muni de la structure hilbertienne induite par \mathcal{H} . Pour chaque couple $(s, t) \in (\Lambda_\zeta^0)^2$ et chaque $w \in \mathcal{W}$, on définit la mesure complexe $\nu_{(s(w), t(w))}$ sur les boréliens de \mathbb{R}

$$\nu_{(s(w), t(w))}(B) = \langle P_{\tau(w)}(B)(s(w)) \mid t(w) \rangle_w,$$

$\langle \bullet \mid \bullet \rangle_w$ est le produit hermitien de E_w . On en déduit, pour chaque $w \in \mathcal{W}$ et chaque $s \in \Lambda_\zeta^0$, l'existence d'une mesure sur les boréliens de \mathbb{R} définie par

$$\nu_{s(w)}(B) = \langle P_{\tau(w)}(B)(s(w)) \mid s(w) \rangle_w.$$

En particulier, pour $s \in \Lambda_\zeta^0$, on définit une section ν_s sur le fibré $\mathcal{B}_\mathcal{W}$ dont la fibre est formée des mesures boréliennes sur \mathbb{R} . Si la section s est normalisée pour tout w , c'est-à-dire, $\|s(w)\|_w = 1$, $\nu_{s(w)}$ est une probabilité sur les boréliens de \mathbb{R} , notée $P_{s, \tau}$ avec $P_{s, \tau}(w) = \nu_{s(w)}$, $w \in \mathcal{W}$. La décomposition de Paul Levy [8], permet d'écrire ν_s comme une somme de mesures

$$\nu_s = \nu_s^{ac} + \nu_s^p + \nu_s^{sc},$$

où ν_s^{ac} est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ν_s^p est une somme de mesures de Dirac et ν_s^{sc} est une mesure singulièrement continue,

la fonction de répartition est une fonction continue et la mesure n'est chargée que sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Definition 15. *Si*

$$\nu_s = \nu_s^p$$

on dit que l'état s a un spectre discret et si

$$\nu_s = \nu_s^{ac},$$

on dit que l'état s a un spectre continu [5]. Les états singuliers sont les états de mesure singulière ν_s^{sc} .

Les axiomes de quantification sont:

Axiom 1. *L'état d'un système physique est défini, par une section locale s d'un fibré ζ , dit fibré d'état.*

Axiom 2. *A toute grandeur physique on associe une observable τ de $\Lambda_{\zeta_G}^0$. On dit que τ est l'observable quantique de la grandeur physique.*

Axiom 3. *Quelque soit l'état s du système où l'on effectue la mesure de la grandeur, les seuls résultats possibles sont les fonctions propres de τ .*

Axiom 4. *Si s représente l'état normalisé du système, la probabilité de trouver la fonction λ lors d'une mesure dans Δ est*

$$P_{s,\tau}(\lambda) = P_{s,\tau}(\Delta)$$

où

$$P_{s,\tau}(\Delta)(w) = P_{s(w),\tau(w)}(\Delta(w))$$

avec $\Delta(w) =]\lambda_1(w), \lambda_2(w)]$ si le spectre de s est continu. Si le spectre est discret, cette probabilité est

$$P_{s,\tau}(\lambda)(w) = P_{s(w),\tau(w)}(\lambda(w)).$$

Axiom 5. *L'état du système immédiatement après une mesure ayant donnée la fonction λ est*

$$\tilde{s} = \frac{P_{E_\lambda}(s)}{\|P_{E_\lambda}(s)\|},$$

où $\tilde{s}(w) = P_{E_{\lambda(w)}}(s(w))$ et $P_{E_{\lambda(w)}}$ est le projecteur sur le sous-espace propre $E_{\lambda(w)}$ associé à la valeur propre $\lambda(w)$ de $\tau(w)$.

Axiom 6. *Soit s , l'état du système en w_0 dans une carte W de \mathcal{W} , tant que le système n'est soumis à aucune observation, son évolution le long d'un champ chronologique T associé au tenseur de Poisson $\gamma^{\mu\nu}$ est*

$$Hs = i\lambda\nabla_T s, \tag{5.6}$$

où $H = \gamma \otimes \nabla$, γ est une section de Dirac Lorentzienne et ∇ est une connexion qui sont associés au fibré d'état.

Remark 12. *L'équation d'évolution est définie par analogie à l'équation de Schrödinger définie dans le fibré \varkappa .*

Il nous reste à définir le choix de la connexion ∇ et de la métrique Lorentzienne définissant le champ chronologique T . On se fixe une section de Dirac Lorentzienne γ et des champs chronologiques locaux T_μ . Par rotation de Wick autour des champs T_μ , on construit des métriques riemanniennes locales qui permettent de définir une métrique riemannienne g globale si on impose aux domaines des champs locaux de former un recouvrement ouvert localement fini de l'univers \mathcal{W} . Les métriques g obtenues sont localement invariantes 2.5. La métrique riemannienne g permet de construire l'opérateur de Hodge \star sur $\Lambda_{\mathcal{W}}$ par

$$\star : \Lambda_{\mathcal{W}} \rightarrow \Lambda_{\mathcal{W}},$$

avec $\star|_{\Lambda_{\mathcal{W}}^n}$ est un isomorphisme de $\Lambda_{\mathcal{W}}^n$ sur $\Lambda_{\mathcal{W}}^{m-n}$ où $m = \dim \mathcal{W}$. L'opérateur de Hodge \star sur Λ_{ζ} est défini par si $\omega \in \Lambda_{\mathcal{W}}^n$ et $s \in \Lambda_{\zeta}^0$

$$\star(\omega \otimes s) = (\star\omega) \otimes s \text{ avec } \star = \star \otimes \mathbf{1}_{\zeta^* \otimes \zeta},$$

où $\mathbf{1}_{\zeta^* \otimes \zeta}$ est la section identique de $\Lambda_{\zeta^* \otimes \zeta}^0$.

Lemma 5. Si $\eta \in \Lambda_{\zeta}^k$ alors

$$(\star)^2 \eta = (-1)^{k(n-k)} \eta.$$

Definition 16. Si $\sigma = \omega \otimes s \in \Lambda_{\zeta^* \otimes \zeta}^n$ et $\tau = \varpi \otimes t \in \Lambda_{\zeta^* \otimes \zeta}^p$ alors on pose

$$\sigma \wedge \tau = (\omega \wedge \varpi) \otimes (s \circ t).$$

Remark 13. Si $\sigma \in \Lambda_{\zeta^* \otimes \zeta}^n$ et $\tau \in \Lambda_{\zeta^* \otimes \zeta}^p$, on pose

$$\begin{aligned} & (\sigma \wedge \tau)(w)(x_1, x_2, \dots, x_{n+p}) \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{n,p\}} \varepsilon_{\sigma} \sigma(w)(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \circ \tau(w)(x_{\sigma(n+1)}, \dots, x_{\sigma(n+p)}) \end{aligned}$$

$\forall x_i \in T_w \mathcal{W}$. Si $\sigma \in \Lambda_{\zeta^* \otimes \zeta}^n$ et $\tau \in \Lambda_{\zeta^* \otimes \zeta}^p$ alors $\sigma \wedge \tau \in \Lambda_{\zeta^* \otimes \zeta}^{n+p}$.

Si $\dim \mathcal{W} = 4$, R^∇ s'identifie à une section de $(\wedge^2 \xi^*) \otimes \zeta^* \otimes \zeta$, l'opérateur de Hodge envoie cette section sur une section du fibré $(\wedge^2 \xi^*) \otimes (\zeta^* \otimes \zeta)$, notée $\star R^\nabla$. La section

$$R^\nabla \wedge \star R^\nabla$$

est une 4-forme différentielle dans $\Lambda_{\zeta^* \otimes \zeta}$. Soit ω la forme volume associée à la métrique riemannienne g , alors il existe une unique section $\sigma^\nabla \in \Lambda_{\zeta^* \otimes \zeta}^0$ telle que

$$R^\nabla \wedge \star R^\nabla = \omega \otimes \sigma^\nabla.$$

Remark 14. On peut généraliser l'opérateur de Hodge, noté

$$\star_{\chi} = \star \otimes \chi$$

où $\chi \in \Lambda_{\zeta^* \otimes \zeta}^0$. Pour cet opérateur, si $\omega \in \Lambda_{\mathcal{W}}^n$ et $s \in \Lambda_{\zeta}^0$

$$(\star)^2 (\omega \otimes s) = (-1)^{k(n-k)} \omega \otimes \chi^2 s.$$

Definition 17. Le Lagrangien de Yang-Mills de la connexion ∇ du fibré ζ est défini par

$$\mathcal{L}_{\nabla} = \int_{\mathcal{W}} \text{Trace}(\sigma^\nabla) \omega$$

et par abus de langage

$$\mathcal{L}_\nabla = \int_{\mathcal{W}} \text{Trace} (R^\nabla \wedge *R^\nabla).$$

Le Lagrangien du fibré d'état ζ avec groupe de structure un groupe de Lie G de dimension finie est l'opérateur \mathcal{L} de l'espace affine des connexions de Koszul du fibré ζ à valeurs dans \mathbb{R}

$$\mathcal{L} : \nabla \rightarrow \mathcal{L}_\nabla = \int_{\mathcal{W}} \text{Trace} (R^\nabla \wedge *R^\nabla).$$

Puisque le fibré d'état ζ est un fibré de fibre un espace de Hilbert \mathcal{H} , le fibré $\zeta^* \otimes \zeta$ est le fibré de fibre les opérateurs bornés et à trace de \mathcal{H} .

Definition 18. Une connexion unitaire à l'ordre $p \geq 1$, pour le fibré d'état ζ , est une connexion de Koszul pour laquelle

$$\int_{\mathcal{W}} \|\sigma^\nabla\|^p \omega = \int_{\mathcal{W}} \|\sigma^\nabla(w)\|^p dw(w)$$

est minimale où $\|\sigma^\nabla(w)\|$ est la norme de l'opérateur borné

$$\sigma^\nabla(w) : E_w(\zeta) \rightarrow E_w(\zeta), \forall w \in \mathcal{W}$$

et ω est la forme volume associée à g .

On peut définir l'équation d'évolution 5.6 à l'aide d'une section de Dirac Lorentzienne bornée et à trace, d'un champ chronologique T associé à la métrique Lorentzienne et d'une connexion de Koszul unitaire à l'ordre 2.

6. CONCLUSION

La représentation de l'univers \mathcal{W} proposée dans cet article est une représentation définie à partir d'une métrique Lorentzienne de l'univers. L'intérêt de cette construction est de relier la physique quantique aux sections de Dirac Lorentziennes, bornées et à trace, de l'univers relativiste d'Einstein. L'équation d'évolution 5.6 peut être étudiée pour son intérêt mathématique, elle permet de construire un pont entre les états d'un fibré et le spectre associés aux états. Le Lagrangien de Yang-Mills permet de définir une connexion de Koszul pour d'écrire l'équation d'évolution d'un système physique dans un état donné. Les outils mathématiques utilisés pour cette modélisation sont à approfondir, notamment, pour l'étude du Lagrangien sur un fibré d'état ne faisant pas intervenir le fibré d'algèbre de Lie $\zeta_{\mathfrak{g}}$ développé dans [4]. On a défini un lien entre la notion de section de Dirac Lorentzienne, bornée et à trace, et le Lagrangien de Yang-Mills.

REFERENCES

- [1] Fabian M., Habala P., Hájek P., Montesinos V., Pelant J., Zizler V., "Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry", Springer 2000
- [2] Jonot J.L., "Indépendance dimensionnelle et désintégration dans la régularisation des intégrales divergentes" hal.archives-ouvertes.
- [3] Jonot J.L., "Géométrie et quantification de l'univers de Dirac-Einstein" hal.archives-ouvertes.
- [4] Jonot J.L., "Structure de Lie sur les fibrés d'état" 2020. hal-02882625
- [5] Jonot J.L., "Sur la ∇^γ -quantification" 2014. hal-01083059v4
- [6] Paulin F., "Groupes et géométries" <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr>
- [7] Tumpach A.B. "Variétés kaehlériennes et hyperkaehlériennes de dimension infinie" Thèse HAL archives-ouvertes. (2006)

- [8] Villani C., "Intégration et Analyse de Fourier" cedricvillani.org/wp-content/uploads/2
E-mail address: j.jonot@gmail.com ou jean-louis.jonot@ac-versailles.fr