



**HAL**  
open science

# Marche au hasard d'une quasi-particule massive dans le gaz de phonons d'un superfluide à très basse température

Yvan Castin

► **To cite this version:**

Yvan Castin. Marche au hasard d'une quasi-particule massive dans le gaz de phonons d'un superfluide à très basse température. 2020. hal-02895083v1

**HAL Id: hal-02895083**

**<https://hal.science/hal-02895083v1>**

Preprint submitted on 10 Jul 2020 (v1), last revised 18 Jan 2021 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Marche au hasard d'une quasi-particule massive dans le gaz de phonons d'un superfluide à très basse température

Yvan Castin

Laboratoire Kastler Brossel, ENS-Université PSL, CNRS, Université de la Sorbonne et Collège de France, 24 rue Lhomond, 75231 Paris, France

---

## Résumé

Nous considérons en dimension 3 un superfluide homogène de très basse température  $T$  présentant deux types d'excitations, (i) des phonons acoustiques sans bande interdite de relation de dispersion linéaire à faible nombre d'onde, et (ii) des quasi-particules  $\gamma$  à bande interdite de relation de dispersion quadratique (massive) au voisinage de ses extréma. Des travaux récents [Nicolis et Penco (2018), Castin, Sinatra et Kurkjian (2017, 2019)], prolongeant l'étude historique de Landau et Khalatnikov sur l'interaction phonon-roton dans l'hélium 4 liquide, ont déterminé explicitement l'amplitude de diffusion d'un phonon sur une quasi-particule  $\gamma$  au repos à l'ordre dominant en température. Nous généralisons ce calcul au cas d'une quasi-particule  $\gamma$  de vitesse de groupe subsonique arbitraire, avec une construction rigoureuse de la matrice  $S$  entre états asymptotiques exacts, tenant compte de l'interaction incessante phonon-phonon et phonon- $\gamma$ , qui habille le phonon et la quasi-particule  $\gamma$  incidents ou émergents de phonons virtuels; ceci apporte un éclairage physique nouveau sur les diagrammes de Feynman de la diffusion phonon- $\gamma$ . Dans tout le domaine de l'espace des paramètres (nombre d'onde  $k$ , force des interactions, etc) où la quasi-particule  $\gamma$  est énergétiquement stable vis-à-vis de l'émission de phonons de vecteur d'onde arbitraire, nous pouvons dès lors caractériser le mouvement erratique qu'elle effectue dans le superfluide à la suite de ses collisions incessantes avec les phonons thermiques, au travers (a) de la force moyenne subie  $F(k)$  et (b) des coefficients de diffusion en impulsion longitudinal  $D_{\parallel}(k)$  et transverse  $D_{\perp}(k)$  intervenant dans une équation de Fokker-Planck puis, aux temps longs où la quasi-particule s'est thermalisée, (c) du coefficient de diffusion spatiale  $\mathcal{D}^{\text{spa}}$ , indépendant de  $k$ . À l'endroit  $k_0$  d'un extrémum de la relation de dispersion, où la vitesse de groupe de la quasi-particule s'annule,  $F(k)$  varie linéairement en vitesse avec un coefficient de frottement visqueux isotrope  $\gamma$  que nous calculons; si  $k_0 = 0$ , la diffusion en impulsion est elle aussi isotrope et  $F(k_0) = 0$ ; si  $k_0 > 0$ , elle ne l'est pas ( $D_{\parallel}(k_0) \neq D_{\perp}(k_0)$ ), et  $F(k_0)$  est non nul mais sous-dominant par rapport à  $\gamma$  d'un ordre en température. La fonction de corrélation temporelle de la vitesse, dont l'intégrale donne  $\mathcal{D}^{\text{spa}}$ , distingue aussi entre ces deux cas ( $k_0$  est cette fois l'endroit du minimum): si  $k_0 = 0$ , elle décroît exponentiellement, avec le taux d'amortissement visqueux attendu de la vitesse moyenne; si  $k_0 > 0$ , elle est bimodale et admet une seconde composante, d'amplitude plus faible par un facteur  $\propto T$ , mais de taux d'amortissement plus faible dans le même rapport (c'est le taux de thermalisation de la direction de la vitesse), ceci compensant cela. Nous caractérisons aussi analytiquement le comportement de la force et de la diffusion en impulsion au voisinage de tout bord sonique du domaine de stabilité où la vitesse de la quasi-particule tend vers la vitesse du son dans le superfluide. Les expressions générales données dans ce travail sont censément exactes à l'ordre dominant en température (ordre  $T^8$  pour  $F(k)$ , ordre  $T^9$  pour  $D_{\parallel}(k)$ ,  $D_{\perp}(k)$  et  $F(k_0)$ , ordre  $T^{-7}$  pour  $\mathcal{D}^{\text{spa}}$ ). Elles supposent cependant une connaissance exacte de la relation de dispersion de la quasi-particule  $\gamma$  et de l'équation d'état du superfluide à température nulle. Nous les illustrons donc dans l'approximation BCS, après calcul du domaine de stabilité, pour une quasi-particule  $\gamma$  fermionique (un fermion non apparié) dans un superfluide de fermions de spin 1/2 non polarisé, système réalisable avec des atomes froids dans des pièges à fond plat. En passant, nous réfutons la thèse de Lerch, Bartosch et Kopietz (2008), selon laquelle il n'existerait pas de quasi-particule fermionique dans un tel superfluide.

*Mots-clés* : gaz de fermions; condensat de paires; modes collectifs; diffusion phonon-roton; paire brisée; atomes froids; théorie BCS

## 1. Position du problème et système modèle considéré

Certains superfluides tridimensionnels spatialement homogènes présentent à basse température deux types d'excitations. Le premier type correspond à une branche d'excitation acoustique, de pulsation propre  $\omega_q$  tendant linéairement vers zéro avec le nombre d'onde  $q$ ,

$$\omega_q \underset{q \rightarrow 0}{=} cq \left[ 1 + \frac{\gamma}{8} \left( \frac{\hbar q}{mc} \right)^2 + O(q^4 \ln q) \right] \quad (1)$$

où  $c$  est la vitesse du son à température nulle,  $m$  la masse d'une particule et  $\gamma$  une courbure adimensionnée ; cette branche est toujours présente dans un superfluide siège d'interactions à courte portée, et les quanta associés sont des quasi-particules bosoniques, les phonons. On rappelle la relation hydrodynamique exacte  $mc^2 = \rho d\mu/d\rho$  où  $\mu$  est le potentiel chimique et  $\rho$  la densité dans l'état fondamental. Le second type d'excitations n'est pas garanti : il correspond à des quasi-particules, appelées ici  $\gamma$  pour abrégé, présentant une bande d'énergie interdite  $\Delta_* > 0$  et un comportement de particule massive, c'est-à-dire avec une relation de dispersion parabolique au voisinage du minimum :

$$\epsilon_k \underset{k \rightarrow k_0}{=} \Delta_* + \frac{\hbar^2(k - k_0)^2}{2m_*} + \frac{\hbar^2(k - k_0)^3 b}{3m_*} + O(k - k_0)^4 \quad (2)$$

La masse effective  $m_*$  est strictement positive, mais la position  $k_0$  du minimum dans l'espace des nombres d'onde peut être strictement positive ou nulle selon les cas ; le coefficient  $b$  a la dimension d'une longueur et est *a priori* non nul seulement si  $k_0 > 0$ . Les excitations des deux types sont couplées entre elles, au sens où une quasi-particule  $\gamma$  peut absorber ou émettre des phonons, par exemple.

À température nulle, une quasi-particule  $\gamma$  de nombre d'onde  $k$  assez proche de  $k_0$ , donc d'énergie assez proche de  $\Delta_*$ , a une vitesse de groupe suffisamment faible, en particulier inférieure à la vitesse du son, et ne peut émettre de phonons sans violer la conservation de l'énergie-impulsion, selon un argument assez classique dû à Landau. La quasi-particule est alors stable et avance dans le fluide de manière balistique, sans amortissement.

À une température  $T$  non nulle mais arbitrairement basse, la branche d'excitation acoustique est peuplée thermiquement, si bien qu'un gaz de phonons à l'équilibre coexiste avec le superfluide. La quasi-particule  $\gamma$  présente, qui était stable à température nulle, subit désormais des collisions aléatoires avec les phonons et décrit une marche au hasard dans l'espace des impulsions  $\hbar\mathbf{k}$ . Dans la limite quasi-classique où la largeur  $\Delta k$  de la distribution en nombre d'onde de  $\gamma$  est assez grande, de manière que la longueur de cohérence  $1/\Delta k$  de  $\gamma$  soit beaucoup plus faible que la longueur d'onde typique des phonons thermiques,

$$\frac{1}{\Delta k} \ll \frac{\hbar c}{k_B T} \quad (3)$$

on peut caractériser cette marche au hasard par une force moyenne  $\mathbf{F}(\mathbf{k})$  et une matrice de diffusion en impulsion  $\underline{\underline{D}}(\mathbf{k})$  intervenant dans une équation de Fokker-Planck. La quasi-particule  $\gamma$  effectue également une marche au hasard dans l'espace des positions, un mouvement brownien, que l'on caractérise aux temps longs par un coefficient de diffusion spatiale  $\mathcal{D}_{\text{spa}}$ . L'objectif du présent travail est de calculer la force et la diffusion à l'ordre dominant en température, pour toute valeur du nombre d'onde  $k$  où la quasi-particule  $\gamma$  est stable à température nulle. Il faut pour cela déterminer l'amplitude de diffusion d'un phonon sur la quasi-particule  $\gamma$  à l'ordre dominant en le nombre d'onde  $q$  du phonon pour une vitesse subsonique quelconque de  $\gamma$ , ce qui, à notre connaissance, n'a pas été fait dans la littérature ; les références [1, 2] se limitent ainsi aux faibles vitesses.

Plusieurs systèmes présentent les deux types d'excitations requis. Dans le cas d'un système bosonique, on pense immédiatement à l'hélium 4 liquide superfluide, dont l'unique branche d'excitation comporte à la fois un départ linéaire acoustique à nombre d'onde nul et un minimum relatif quadratique à nombre d'onde non nul ; la quasi-particule massive  $\gamma$  associée au minimum est un roton selon la terminologie consacrée. Dans le cas d'un système fermionique, viennent à l'esprit les gaz d'atomes froids à deux états de spin  $\uparrow$  et  $\downarrow$  : dans le gaz non polarisé, c'est-à-dire avec exactement le même nombre de fermions dans chaque état de spin, à suffisamment basse température, les fermions se regroupent par paires liées  $\uparrow\downarrow$  sous l'effet des interactions attractives entre atomes de spins opposés, ces paires forment un condensat et un superfluide avec une branche d'excitation acoustique. Une excitation par brisure de

paire créerait deux fragments, chacun étant une quasi-particule fermionique  $\gamma$  de bande interdite  $\Delta_*$  la demi-énergie de liaison de la paire et de relation de dispersion parabolique au voisinage du minimum. Pour avoir une seule quasi-particule  $\gamma$  présente, il suffit d'ajouter au gaz non polarisé un unique fermion  $\uparrow$  ou  $\downarrow$ , qui restera non apparié et formera la quasi-particule souhaitée.<sup>1</sup> Le cas homogène spatialement est réalisable dans une boîte de potentiel à fond plat [3, 4, 5, 6].

Pour fixer les idées, nous ferons des calculs explicites du domaine de stabilité de  $\gamma$  à  $T = 0$ , puis de la force et de la diffusion qu'elle subit à  $T > 0$ , seulement dans le cas d'un gaz d'atomes froids fermioniques, en utilisant faute de mieux la théorie BCS, pour une force des interactions quelconque puisque la longueur de diffusion  $a$  entre  $\uparrow$  et  $\downarrow$  est ajustable à volonté par résonance de Feshbach [7, 8, 9, 10, 11, 12]. Il nous semble alors que la marche au hasard de  $\gamma$  dans l'espace des impulsions ou des positions est accessible expérimentalement, puisqu'on peut séparer l'atome fermionique non apparié des fermions appariés pour l'imager, en transformant ceux-ci en molécules dimères fortement liées par rampe de Feshbach rapide vers la limite CBE (condensat de Bose-Einstein)  $a \rightarrow 0^+$  [13]. Ceci permettrait, sinon de mesurer, du moins de contraindre l'amplitude de diffusion  $\mathcal{A}$  entre phonons et quasi-particule  $\gamma$ , dont  $\mathbf{F}$ ,  $\underline{D}$  et  $\mathcal{D}_{\text{spa}}$  dépendent. Il y a pour cela une forte motivation : l'expression exacte de cette amplitude à l'ordre dominant en  $q$  ne fait pas encore l'unanimité, les références [1] et [2] restant en désaccord, même si l'on tient compte comme dans l'erratum [14] de l'interaction entre phonons omise dans [2]. Nous en profiterons pour rendre plus convaincant et plus solide le calcul de  $\mathcal{A}$  à partir du hamiltonien effectif de basse énergie de la référence [2].

## 2. Domaine de stabilité dans l'espace des impulsions de la quasi-particule $\gamma$ à $T = 0$

Considérons une quasi-particule  $\gamma$  de vecteur d'onde initial  $\mathbf{k}$  dans le superfluide à température nulle, donc en l'absence initiale de phonons ou autres excitations, et étudions la stabilité de cette quasi-particule vis-à-vis de l'émission d'excitations dans le superfluide.

*Émission de phonons.* Tout d'abord, la quasi-particule  $\gamma$  peut émettre un nombre *a priori* quelconque  $n \geq 1$  de phonons de vecteurs d'onde  $\mathbf{q}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , en reculant pour conserver la quantité de mouvement. Le changement d'énergie correspondant vaut

$$\Delta E = \epsilon_{\mathbf{k} - \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i} + \left( \sum_{i=1}^n \hbar \omega_{\mathbf{q}_i} \right) - \epsilon_{\mathbf{k}} \quad (4)$$

où l'on note indifféremment  $\omega_{\mathbf{q}}$  ou  $\omega_q$  la relation de dispersion en pulsation des phonons et  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  ou  $\epsilon_k$  la relation de dispersion en énergie de la quasi-particule  $\gamma$ . Lorsque les  $\mathbf{q}_i$  décrivent le domaine d'existence  $D^*$  de la branche acoustique, et que  $n$  décrit  $\mathbb{N}^*$ , l'énergie  $\epsilon_{\mathbf{k}} + \Delta E$  de l'état final décrit un continuum d'énergie. Il y a donc deux cas possibles : (i)  $\Delta E$  est toujours positif, l'énergie  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  se trouve au bord inférieur du continuum,<sup>2</sup> l'état initial  $|\gamma : \mathbf{k}\rangle$  de la quasi-particule reste un état discret et  $\gamma$  est *stable* au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  considéré ; (ii)  $\Delta E$  n'est pas toujours positif, l'énergie initiale  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  de la quasi-particule se trouve à l'intérieur du continuum d'énergie, l'émission résonnante de phonons (avec  $\Delta E = 0$ ) est possible, l'état initial  $|\gamma : \mathbf{k}\rangle$  se dilue dans le continuum et donne naissance à une résonance d'énergie complexe, et la quasi-particule  $\gamma$  est *instable* au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  considéré.

Pour trancher entre les deux cas, il faut déterminer le bord inférieur  $\epsilon_{\mathbf{k}} + \Delta E_{\text{inf}}(\mathbf{k})$  du continuum, en minimisant  $\Delta E$  sur le nombre et les vecteurs d'onde des phonons émis. Cette minimisation peut être effectuée en deux temps : à vecteur d'onde total des phonons émis fixé,  $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i$ , on minimise l'énergie pour obtenir une relation de dispersion acoustique effective<sup>3</sup>

$$\hbar \omega_{\text{eff}}(\mathbf{Q}) = \min_{n \in \mathbb{N}^*} \min_{\{(\mathbf{q}_i)_{1 \leq i \leq n} \in D^* \mid \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i = \mathbf{Q}\}} \sum_{i=1}^n \hbar \omega_{\mathbf{q}_i} \quad (5)$$

1. À température non nulle, il existe une fraction non nulle de paires liées brisées thermiquement, mais c'est un  $O(T^\alpha \exp(-\Delta_*/k_B T))$  ( $\alpha = 1/2$  si  $k_0 > 0$ ,  $\alpha = 3/2$  si  $k_0 = 0$ ) que nous négligeons dans la suite.

2. Pour le voir, il suffit de faire tendre les  $\mathbf{q}_i$  vers zéro dans  $\Delta E$ .

3. Comme le domaine d'existence  $D^*$  ne contient pas le vecteur d'onde nul, il faut en principe prendre la borne inférieure sur les  $\mathbf{q}_i$ . On se ramène à la prise d'un minimum en ajoutant le vecteur nul non physique à  $D^*$ ,  $D = D^* \cup \{\mathbf{0}\}$ , et en prolongeant  $\omega_{\mathbf{q}}$  par continuité,  $\omega_{\mathbf{q}=0} = 0$ .

puis on minimise sur  $\mathbf{Q}$  :

$$\Delta E_{\text{inf}}(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{Q}} \Delta E(\mathbf{Q}) \quad \text{avec} \quad \Delta E(\mathbf{Q}) \equiv \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{Q}} - \epsilon_{\mathbf{k}} + \hbar \omega_{\text{eff}}(\mathbf{Q}) \quad (6)$$

Si  $\Delta E_{\text{inf}}(\mathbf{k}) < 0$ , la quasi-particule  $\gamma$  est instable au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , sinon elle est stable. Il est instructif d'effectuer une étude locale à faible nombre d'onde total émis  $Q$  : du comportement (1) et des remarques simplificatrices qui suivent, nous tirons  $\omega_{\text{eff}}(\mathbf{Q}) \underset{Q \rightarrow 0}{=} cQ + O(Q^3)$  ce qui conduit au développement

$$\Delta E(\mathbf{Q}) \underset{Q \rightarrow 0}{=} \hbar c Q (1 - |v_k|/c) + \frac{1}{2} Q^2 \frac{d^2 \epsilon_k}{dk^2} + O(Q^3) \quad (7)$$

où la direction de  $\mathbf{Q}$ , choisie pour minimiser l'énergie, est celle de  $\mathbf{k}$  si la vitesse de groupe  $v_k = d\epsilon_k/\hbar dk$  de la quasi-particule  $\gamma$  est positive, et celle de  $-\mathbf{k}$  sinon. Ceci fournit un premier scénario d'instabilité possible, bien connu : si la quasi-particule  $\gamma$  est supersonique ( $|v_k| > c$ ), elle peut se freiner en émettant des phonons de nombre d'onde arbitrairement faible. Si le passage d'un intervalle de  $k$  où  $\gamma$  est stable à un intervalle de  $k$  où  $\gamma$  est instable se fait selon ce scénario, c'est-à-dire par franchissement de la vitesse du son en le nombre critique  $k_c$ ,  $\Delta E_{\text{inf}}(k)$  varie quadratiquement au voisinage de  $k_c$  du côté instable, suivant la loi déduite de l'équation (7)<sup>4</sup> :

$$\Delta E_{\text{inf}}(k) \underset{k \rightarrow k_c}{=} -\frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \epsilon_k}{dk^2} \right|_{k=k_c} (k - k_c)^2 + O(k - k_c)^3 \quad (8)$$

Pour la cohérence interne de ce scénario, il faut que la dérivée seconde de  $\epsilon_k$  soit positive en  $k = k_c$  : on a  $|v_{k_c}| = c$  et  $\Delta E(k = k_c, \mathbf{Q})$  doit atteindre son minimum en  $Q = 0$ ; dans le cas contraire, le passage à  $\Delta E_{\text{inf}}(k) < 0$  aurait eu lieu avant le seuil sonique. Nous avons donc affaire ici à une transition du second ordre, voir la figure 1a. Un deuxième scénario d'instabilité possible est que la vitesse de groupe reste subsonique mais que  $\Delta E(\mathbf{Q})$  admette un minimum absolu strictement négatif en  $Q_0(k) > 0$  : la quasi-particule  $\gamma$  réduit son énergie en émettant des phonons d'impulsion totale nécessairement non infinitésimale. Lorsque  $k$  passe de la zone stable à la zone instable, la position du minimum de  $\Delta E(\mathbf{Q})$  saute alors de manière discontinue de la valeur nulle à la valeur  $Q_0(k)$  non nulle en  $k = k_c$ ,  $\Delta E_{\text{inf}}(k)$  varie linéairement au voisinage de  $k_c$  du côté instable<sup>5</sup> et la transition est du premier ordre, voir la figure 1b.

Déterminons explicitement la carte de stabilité d'une quasi-particule  $\gamma$  dans un gaz de fermions condensé par paires, à l'aide de la théorie approchée BCS. La relation de dispersion de la quasi-particule  $\gamma$  est alors donnée par

$$\epsilon_k = \left[ \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right)^2 + \Delta^2 \right]^{1/2} \quad (9)$$

où  $m$  est la masse d'un fermion,  $\mu$  est le potentiel chimique du gaz et  $\Delta > 0$  son paramètre d'ordre. Si  $\mu > 0$ , le minimum de  $\epsilon_k$  est atteint en  $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar > 0$ , vaut  $\Delta_* = \Delta$  et conduit à une masse effective  $m_* = m\Delta/2\mu$ . Si en revanche  $\mu < 0$ , le minimum de  $\epsilon_k$  est atteint en  $k_0 = 0$ , vaut  $\Delta_* = (\Delta^2 + \mu^2)^{1/2}$  et conduit à la masse effective  $m_* = m\Delta_*/|\mu|$ . La relation de dispersion des phonons se déduit de la RPA d'Anderson ou, ce qui revient au même, de la théorie BCS dépendant du temps linéarisée autour de la solution stationnaire. Elle a été étudiée en détail dans les références [15, 16, 17]. Disons simplement qu'elle a un domaine d'existence  $D$  invariant par rotation de la forme compacte connexe  $q \leq q_{\text{sup}}$  pour une longueur de diffusion  $a < 0$  (soit  $0 < \Delta/\mu < 1,162$  d'après la théorie BCS), de la forme non connexe  $q \leq q_{\text{sup}}$  ou  $q \geq q_{\text{inf}}$  pour  $1,162 < \Delta/\mu < 1,729$ , et donné par  $\mathbb{R}^3$  tout entier pour  $\Delta/\mu > 1,729$  ou  $\mu < 0$ . Le calcul de  $\hbar \omega_{\text{eff}}(\mathbf{Q})$  par minimisation numérique de l'énergie sur le nombre de phonons  $n$  et leurs vecteurs d'onde  $\mathbf{q}_i$  à vecteur d'onde total fixé, comme dans l'équation (5), est facilité par les remarques suivantes :<sup>6</sup>

4. La notation allégée  $\Delta E_{\text{inf}}(k)$  tire parti de l'invariance par rotation de  $\Delta E_{\text{inf}}(\mathbf{k})$ . Tout près de  $k_c$ , du côté supersonique, l'approximation quadratique (7) atteint son minimum en  $Q_0(k) = (|v_k|/c - 1)\hbar c / (d^2 \epsilon_k / dk^2)$ , et ce minimum vaut  $\Delta E_{\text{inf}}(k) = -[\hbar c (1 - |v_k|/c)]^2 / (2d^2 \epsilon_k / dk^2)$ . Il reste à linéariser la vitesse de groupe au voisinage de  $k = k_c$ ,  $\hbar v_k \simeq \pm \hbar c + \frac{d^2 \epsilon_k}{dk^2} \Big|_{k=k_c} (k - k_c)$ , pour obtenir (8).

5. On dérive  $\Delta E_{\text{inf}}(k) = \Delta E(k, Q_0(k))$  par rapport à  $k$  (avec des notations évidentes) et on utilise le fait que  $\partial_Q \Delta E = 0$  en  $Q = Q_0(k)$  pour obtenir  $d\Delta E_{\text{inf}}(k)/dk = \partial_k \Delta E(k, Q_0(k))$  de limite *a priori* non nulle en  $k = k_c$ .

6. En voici de brèves justifications, sachant que  $\omega_q$  est une fonction positive croissante de  $q$ . (a) : si  $D = B(0, q_{\text{sup}})$  et  $P$  projette orthogonalement sur  $\mathbf{Q}$ , alors (i)  $D$  est stable par l'action de  $P$ , (ii) la substitution  $\mathbf{q}_i \rightarrow P\mathbf{q}_i$  ne change pas le vecteur d'onde total et n'augmente pas l'énergie; on peut donc se limiter à  $\mathbf{q}_i$  colinéaire à  $\mathbf{Q}$ . Si  $\mathbf{q}_i$  et  $\mathbf{q}_j$  sont colinéaires mais de sens opposés, avec  $q_i \geq q_j$ , on abaisse l'énergie à vecteur d'onde total fixé (sans sortir de  $D$ ) par la substitution  $(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) \rightarrow (\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j, \mathbf{0})$ ; on peut donc se limiter à des  $\mathbf{q}_i$  colinéaires à  $\mathbf{Q}$  et de même sens. (b), (c) : si  $q_i < q_j$  se trouvent dans un intervalle de concavité (convexité) de  $\omega_q$ , et que l'on pose  $Q_{ij} = q_i + q_j$ , la fonction  $q \mapsto \omega_q + \omega_{Q_{ij}-q}$  est de dérivée positive (négative) en  $q = q_i < Q_{ij}/2$ , car la dérivée de  $\omega_q$  est décroissante (croissante), donc on abaisse l'énergie en réduisant (augmentant)  $q_i$  à  $Q_{ij}$  fixé.

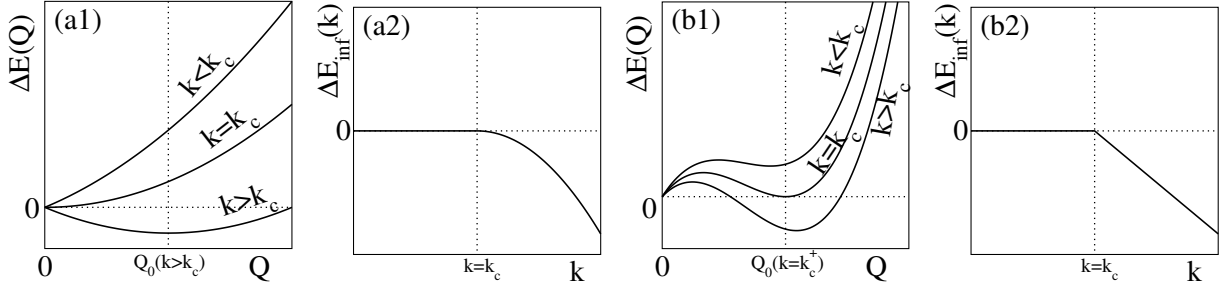


FIGURE 1: Les différents scénarios de déstabilisation d'une quasi-particule massive  $\gamma$  de nombre d'onde  $k$  par émission de phonons dans un superfluide. (a) La vitesse de groupe de la quasi-particule passe de subsonique à supersonique lorsque  $k$  croise  $k_c$  (par exemple de gauche à droite); le changement d'énergie  $\Delta E(\mathbf{Q})$  à l'émission d'une quantité de mouvement phononique totale  $\hbar\mathbf{Q}$  fixée (voir l'équation (6)) est minimal en  $Q = 0$  pour  $k < k_c$  et en  $Q = Q_0(k) > 0$  pour  $k > k_c$ , où  $Q_0(k)$  tend linéairement vers zéro lorsque  $k \rightarrow k_c^+$ , comme sur (a1); le minimum absolu  $\Delta E_{\text{inf}}(k)$  du changement d'énergie s'écarte de zéro quadratiquement près de  $k_c$  et la transition est du second ordre, comme en (a2). (b) La vitesse de groupe reste subsonique lorsque  $k$  croise  $k_c$ , mais le minimum de  $\Delta E(\mathbf{Q})$  en  $Q = Q_0(k) > 0$ , qui n'était que relatif pour  $k < k_c$ , devient absolu (et strictement négatif) pour  $k > k_c$ , comme en (b1);  $\Delta E_{\text{inf}}(k)$  s'écarte de zéro linéairement et la transition est du premier ordre, comme en (b2).

- (a) si  $D$  est connexe, on peut imposer sans rien perdre sur l'énergie que tous les  $\mathbf{q}_i$  sont colinéaires à  $\mathbf{Q}$  et de même sens, comme nous le faisons dans la suite de ces remarques. Il reste à minimiser sur  $n$  et les nombres d'onde  $q_i$ .
- (b) si  $\omega_q$  est concave sur l'intervalle  $[q_a, q_b]$ , et que deux nombres d'onde d'essai  $q_i$  et  $q_j$  se trouvent dans cet intervalle, on abaisse l'énergie à  $Q$  fixé en les écartant symétriquement de leur moyenne  $(q_i + q_j)/2$  jusqu'à ce que l'un des deux atteigne  $q_a$  ou  $q_b$ . S'il y avait  $s \geq 2$  nombres d'essai dans l'intervalle, on se ramène ainsi à une configuration avec  $s_a$  nombres d'onde en  $q_a$ ,  $s_b$  en  $q_b$  et zéro ou un dans l'intérieur de l'intervalle.
- (c) si  $\omega_q$  est convexe sur l'intervalle  $[q_a, q_b]$ , et que deux nombres d'onde d'essai  $q_i$  et  $q_j$  se trouvent dans cet intervalle, on abaisse l'énergie à  $Q$  fixé en les faisant converger symétriquement vers leur valeur moyenne  $(q_i + q_j)/2$ . S'il y a plus de deux nombres d'essai dans l'intervalle, on les fait tous coalescer en leur valeur moyenne.
- (d) si de plus  $q_a = 0$ , on abaisse l'énergie à  $Q$  fixé en remplaçant le nombre d'onde d'essai coalescé  $Q_{\text{coa}}$  par un nombre divergent  $S$  de phonons de nombres d'onde égaux infinitésimaux  $Q_{\text{coa}}/S$ , ce qui permet de linéariser la relation de dispersion en  $q = 0$  et conduit à l'énergie coalescée  $\hbar c Q_{\text{coa}}$ .

Donnons un premier exemple de réduction du problème dans le cas  $1,221 < \Delta/\mu < 1,710$ , en nous limitant à la composante connexe basse du domaine d'existence  $D$ , la boule de centre  $\mathbf{0}$  de rayon  $q_{\text{sup}}$ , où la branche acoustique présente deux points d'inflexion  $q_a$  et  $q_b$  :  $\omega_q$  est convexe sur l'intervalle  $[0, q_a]$ , concave sur  $[q_a, q_b]$  et à nouveau convexe sur  $[q_b, q_{\text{sup}}]$ . On peut donc paramétrer l'énergie des phonons dans cette boule comme suit,

$$\hbar\omega_{\text{eff}}(\mathbf{Q}) = \hbar c Q_1 + \hbar\omega_{q_2} + n_3 \hbar\omega_{q_3} \quad \text{ou} \quad \hbar c Q_1 + n_3 \hbar\omega_{q_3} \quad (10)$$

avec la contrainte  $Q = Q_1 + q_2 + n_3 q_3$  ou  $Q = Q_1 + n_3 q_3$ ,  $Q_1$  positif quelconque,  $q_2 \in ]q_a, q_b[$ ,  $n_3 \in \mathbb{N}$  et  $q_3 \in [q_b, q_{\text{sup}}]$ . On peut simplifier encore en notant qu'il ne peut y avoir de phonon  $q_2$  que si  $Q_1 = 0$ <sup>7</sup>. Il reste à minimiser numériquement  $\hbar c Q_1 + n_3 \hbar\omega_{q_3}$  ou  $\hbar\omega_{q_2} + n_3 \hbar\omega_{q_3}$  par rapport aux paramètres indépendants restants. Donnons deux autres exemples : dans le cas  $\Delta > 1,729\mu$  ou  $\mu < 0$ , la branche acoustique existe et est convexe sur tout  $\mathbb{R}^+$ , si bien que  $\hbar\omega_{\text{eff}}(\mathbf{Q}) = \hbar c Q$ ; dans le cas  $0 < \Delta/\mu < 0,869$ , la branche acoustique est concave sur tout son domaine d'existence  $q \in ]0, q_{\text{sup}}]$ , si bien que  $\hbar\omega_{\text{eff}}(\mathbf{Q}) = \hbar\omega_{Q-nq_{\text{sup}}} + n\hbar\omega_{q_{\text{sup}}}$  où  $n$  est la partie entière de  $Q/q_{\text{sup}}$ .

La carte de stabilité obtenue dans le plan (nombre d'onde, force des interactions) dans le cas  $\mu > 0$  est représentée sur la figure 2a. Le domaine de stabilité est limité inférieurement à droite de  $k = k_0$  par la ligne sonique positive

7. Si  $Q_1 > 0$  en présence d'un phonon  $q_2$ , effectuons la variation  $(Q_1, q_2) \rightarrow (Q_1 + \eta, q_2 - \eta)$  où  $\eta$  est infinitésimal de signe quelconque. Le changement d'énergie correspondant dans (10) est  $\delta E = \hbar[c - v(q_2)]\eta + (1/2)\hbar[dv(q_2)/dq]\eta^2 + O(\eta^3)$ , où  $v(q) = d\omega_q/dq$  est la vitesse de groupe des phonons.  $\delta E$  doit toujours être positif puisqu'on s'écarte du minimum d'énergie. Le coefficient de  $\eta$  doit donc être nul, ce qui n'est pas exclu a priori; celui de  $\eta^2$  doit être positif, ce qu'interdit la concavité stricte de la branche acoustique en  $q_2$ . Si  $Q_1 = 0$ ,  $\eta$  est nécessairement positif et ce raisonnement impose seulement  $v(q_2) < c$ .

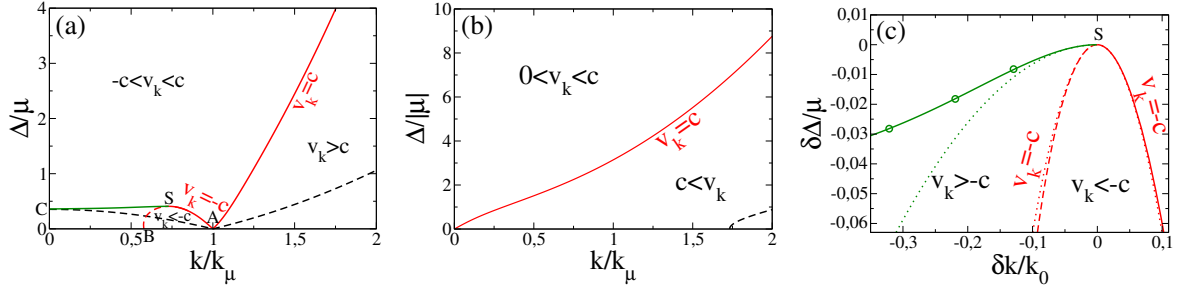


FIGURE 2: Carte de stabilité d'une quasi-particule fermionique  $\gamma$  dans un gaz non polarisé de fermions condensé par paires à température nulle, dans le plan (nombre d'onde  $k$  de  $\gamma$ , force des interactions), prédite par la théorie BCS. (a) Cas d'un potentiel chimique  $\mu > 0$ . (b) Cas d'un potentiel chimique  $\mu < 0$ . (c) Agrandissement du cas (a) autour du point critique S, après recentrage sur S ( $\delta k = k - k_S$  et  $\delta\Delta = \Delta - \Delta_S$  avec  $k_S \approx 0,731k_\mu$  et  $\Delta_S \approx 0,408\mu$ ); en trait plein, les résultats de (a) [la ligne verte est en réalité une interpolation des points (les cercles) réellement calculés], en pointillé les départs quadratiques (13) avec  $A \approx 1,121 k_\mu^{-1}$ ,  $B \approx 14,178 \mu k_\mu^{-3}$ ,  $C \approx 5,929 \mu k_\mu^{-3}$ . En rouge : lignes soniques  $v_k = \pm c$  de transition du second ordre (déstabilisation par émission de phonons de nombres d'onde infinitésimaux), où  $v_k$  est la vitesse de groupe de  $\gamma$  et  $c$  la vitesse du son. En vert : ligne de transition du premier ordre (déstabilisation par émission de phonons à nombre d'onde total non infinitésimal). En noir : lignes de déstabilisation par brisure d'une paire liée  $\uparrow\downarrow$  [on prend ( $n = 0, s = 1$ ) dans l'équation (16); pour  $\mu > 0$  et  $k < 3k_0$ , ce sont les lignes d'annulation du minorant dans l'équation (17)]. En tireté : lignes de déstabilisation déjà mentionnées mais se trouvant en dessous d'autres lignes de déstabilisation et ne changeant donc pas la carte de stabilité.  $k$  est en unités de  $k_\mu = (2m|\mu|)^{1/2}/\hbar$  (pour  $\mu > 0$ ,  $c$ 'est aussi le nombre d'onde  $k_0$  minimisant l'énergie  $\epsilon_k$  de la quasi-particule  $\gamma$ ; pour  $\mu < 0$ ,  $k_0 = 0$ ). La force des interactions est repérée par  $\Delta/|\mu|$ , où  $\Delta > 0$  est le paramètre d'ordre du gaz de fermions.

$v_k = c$ , asymptotiquement parabolique<sup>8</sup>, à gauche de  $k = k_0$  d'abord par la ligne de transition du premier ordre  $CS$  puis par la ligne sonique négative  $SA$  (sur laquelle  $v_k = -c$ ). La partie ascendante  $BS$  de cette ligne sonique, en tireté sur la figure, est masquée par l'instabilité à  $Q$  non infinitésimal et n'a donc pas de signification physique. On aura noté que la relation de dispersion (9) admet un maximum parabolique en  $k = 0$  (ici  $\mu > 0$ ) : la quasi-particule massive correspondante est parfois appelée *maxon*. La théorie BCS prédit donc que le maxon est stable pour des interactions assez fortes,  $\Delta/\mu > (\Delta/\mu)_C \approx 0,35$ . Dans la limite opposée d'une interaction faible, le domaine de stabilité se réduit à l'intervalle étroit centré sur  $k_0$  et de mi-largeur  $m\Delta/\sqrt{2}\hbar^2k_0$ . Le cas  $\mu < 0$ , représentée sur la figure 2b, est plus pauvre : le domaine de stabilité est simplement limité à droite par la ligne sonique positive, donnée par  $\hbar k/m = c$  dans la limite CBE (soit une pente 4 à l'origine sur la figure 2b dans la théorie BCS) et par  $\Delta = y\hbar^2k^2/2m$  dans la limite  $\mu = 0^-$  (soit une loi asymptotique parabolique sur la figure 2b), avec le même coefficient  $y$  que dans la note 8.

Une étude des lignes de transition au voisinage du point sommital S de la figure 2a peut être effectuée analytiquement. Considérons par commodité la relation de dispersion (9) comme une fonction  $\epsilon(k, \Delta)$  de  $k$  et  $\Delta$  à longueur de diffusion  $a$  fixée; de même, la branche acoustique est vue comme une fonction  $\omega(q, \Delta)$ . Sur la ligne sonique SA (SB), la dérivée seconde  $\partial_k^2 \epsilon$  est positive (négative), comme le montre la discussion après l'équation (8), et s'annule par continuité au point sommital. Les coordonnées  $(k_S, \Delta_S)$  de S dans le plan  $(k, \Delta)$  se déduisent donc du système

$$\partial_k \epsilon_k|_S = -\hbar c|_S \quad \text{et} \quad \partial_k^2 \epsilon_k|_S = 0 \quad (11)$$

Près du point critique S, on trouve que  $\delta k \equiv k - k_S$  et le minimiseur  $Q_0(k)$  sont des infiniment petits du premier ordre, alors que  $\delta\Delta \equiv \Delta - \Delta_S$  est un infiniment petit du second ordre. Il suffit alors de développer  $\Delta E(\mathbf{Q})$  à l'ordre trois, en utilisant le fait que  $\mathbf{Q}$  est antiparallèle à  $\mathbf{k}$  comme il est dit après l'équation (7), et que  $\omega_{\text{eff}}(\mathbf{Q}) = \omega(Q, \Delta)$  dans le cas concave ( $\Delta < 0, 869\mu$ ) à faible  $Q$  ( $Q < q_{\text{sup}}$ ),

$$\Delta E(\mathbf{Q}) \underset{Q \rightarrow 0}{=} Q \left[ A \delta\Delta + \frac{1}{2} B (\delta k)^2 \right] + \frac{1}{2} Q^2 B \delta k + \frac{1}{3} Q^3 C + O(Q^4) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = \partial_k \partial_\Delta \epsilon|_S + \hbar \partial_\Delta c|_S > 0 \\ B = \partial_k^3 \epsilon|_S > 0 \\ C = \frac{1}{2} B + \frac{3}{8} \hbar c \gamma \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^2 |_S > 0 \end{cases} \quad (12)$$

où le coefficient  $\gamma$  est celui de l'équation (1) et les signes sont prédits par la théorie BCS, pour obtenir le départ

8. Pour  $\mu > 0$ , on trouve  $\Delta/\mu \sim y(k/k_0)^2$  si  $k/k_0 \rightarrow +\infty$  à  $v_k/c = 1$  fixé. Ici  $y \approx 1,828$  est la solution positive de  $y(1+y^2) = \frac{2\Delta}{mc^2} \Big|_{\mu=0} = 3(Y+1/Y)$  avec  $Y = \pi^2/[2\Gamma^4(3/4)]$ .



quadratique des lignes SC et BSA du point S comme sur la figure 2c :<sup>9</sup>

$$\delta\Delta \underset{\delta k \rightarrow 0^-}{\sim} \frac{(3B-8C)B}{16AC}(\delta k)^2, \quad \delta\Delta \underset{\delta k \rightarrow 0}{\sim} -\frac{B}{2A}(\delta k)^2 \quad (13)$$

*Poids spectral non nul.* Pour que  $\gamma$  soit véritablement une quasi-particule stable au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , il ne suffit pas que son énergie  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  soit au bord inférieur du continuum d'énergie auquel elle est couplée par émission de phonons. Il faut aussi qu'elle soit une quasi-particule, c'est-à-dire qu'elle ait un poids spectral non nul. Mathématiquement, ceci signifie que son propagateur retardé, considéré comme une fonction de l'énergie complexe  $z$ , a un résidu  $Z$  non nul en l'énergie propre  $z = \epsilon_{\mathbf{k}}$ . À l'ordre dominant en le couplage  $\hat{V}_{\phi\gamma}$  entre  $\gamma$  et les phonons, le propagateur est donné par le diagramme à une boucle de la figure 3a :

$$\langle \gamma : \mathbf{k} | \frac{1}{z - \hat{H}} | \gamma : \mathbf{k} \rangle \underset{\text{une boucle}}{=} \frac{1}{z - \epsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} - \int_{q < \Lambda} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{|\langle \phi : \mathbf{q}, \gamma : \mathbf{k} - \mathbf{q} | \hat{V}_{\phi\gamma} | \gamma : \mathbf{k} \rangle|^2}{z - (\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(0)} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{(0)})}} \quad (14)$$

Le hamiltonien complet  $\hat{H}$  et l'opérateur potentiel d'interaction  $\hat{V}_{\phi\gamma}$  sont donnés par l'équation (20) de la section suivante et par leurs éléments de matrice volumiques dans l'Annexe A, dans une théorie effective de basse énergie en principe exacte dans la limite des faibles nombres d'onde phononiques [18].  $\epsilon_{\mathbf{k}}^{(0)}$  et  $\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(0)}$  sont les énergies nues des excitations et  $\Lambda$  est une coupure ultraviolette sur le nombre d'onde des phonons. En dérivant le dénominateur de (14) par rapport à  $z$ , et en remplaçant à l'ordre dominant les quantités nues par leur valeur effective, on obtient le résidu

$$Z_{\mathbf{k}} \underset{\text{une boucle}}{=} \frac{1}{1 + \int_{q < \Lambda} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{|\langle \phi : \mathbf{q}, \gamma : \mathbf{k} - \mathbf{q} | \hat{V}_{\phi\gamma} | \gamma : \mathbf{k} \rangle|^2}{[\epsilon_{\mathbf{k}} - (\hbar\omega_{\mathbf{q}} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})]^2}} \quad (15)$$

Dans cette expression, au dénominateur de l'intégrande, la différence d'énergie ne peut s'annuler pour  $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ , par stabilité supposée de la quasi-particule  $\gamma$ ; elle tend linéairement vers zéro lorsque  $q \rightarrow 0$ . Au numérateur de l'intégrande, l'élément de matrice de  $\hat{V}_{\phi\gamma}$  tend vers zéro comme  $q^{1/2}$ , voir les équations (A.5) et (A.7) de l'Annexe A. C'est une propriété robuste : elle traduit simplement le fait que  $\gamma$  se couple directement aux fluctuations quantiques de densité du superfluide, qui sont d'amplitude volumique  $(\hbar\rho q/2mc)^{1/2}$  dans le mode de phonon de vecteur d'onde  $\mathbf{q}$  ( $\rho$  est la densité moyenne), comme le prédit l'hydrodynamique quantique [18]. L'intégrale dans (15) est donc convergente. Ainsi, à l'ordre considéré, dans un gaz superfluide de fermions en dimension 3, la théorie effective de Landau et Khalatnikov exclut toute suppression du poids spectral de la quasi-particule fermionique par singularité infrarouge, quelle que soit la valeur de la longueur de diffusion  $a$  ou de la force des interactions<sup>10</sup>. Ceci contredit directement et, nous semble-t-il, réfute les conclusions de la référence [19], qui s'appuie sur un calcul lui aussi à une boucle, mais dans un modèle microscopique<sup>11</sup>.

*Émission de paires brisées.* Notre discussion de stabilité précédente ne tient compte que de l'émission de phonons. Dans un gaz de fermions appariés, elle néglige le fait que la quasi-particule fermionique  $\gamma$  initiale puisse, par collision avec des paires liées, en briser une ou plusieurs, disons un nombre  $s$ , si elle possède une énergie suffisante. Dans ce cas, l'état final contient  $n$  phonons et  $2s + 1$  quasi-particules fermioniques, en incluant la quasi-particule initiale qui a reculé, et l'expression (4) du changement d'énergie doit être généralisée comme suit :

$$\Delta E = \epsilon_{\mathbf{k} - \sum_{j=1}^{2s} \mathbf{k}_j - \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i} + \left( \sum_{j=1}^{2s} \epsilon_{\mathbf{k}_j} \right) + \left( \sum_{i=1}^n \hbar\omega_{\mathbf{q}_i} \right) - \epsilon_{\mathbf{k}} \quad (16)$$

9. Écrivons le second membre de (12) sous la forme  $\Delta E = c_1 Q + c_2 Q^2/2 + c_3 Q^3/3$ . Sur la ligne de transition sonique, on a simplement  $c_1 = 0$ . Sur la ligne de transition du premier ordre, il existe  $Q_c$  tel que  $\Delta E(Q_c) = d\Delta E(Q_c)/dQ = 0$ , comme le suggère la figure 1b1, c'est-à-dire que le discriminant du polynôme de degré 3 en  $Q$  s'annule,  $(c_1 c_2/2)^2 - (4/3)c_3 c_1^3 = 0$ ; on trouve  $Q_c = -3c_2/4c_3$ , qui doit être  $> 0$ , ce qui impose  $\delta k < 0$ .

10. Par exemple, même dans la limite CBE  $k_{Fa} \rightarrow 0^+$  et pour  $k \rightarrow 0$ , l'équation (15) prédit une correction finie  $1 - Z_{\mathbf{k}} \approx mc\Lambda^2/\hbar\rho$ .

11. Même si les auteurs ne le disent pas explicitement, leur approche prédit une divergence  $\propto q^{-1/2}$  de l'élément de matrice du couplage  $\phi - \gamma$ , comme le montre l'intégration explicite de leurs équations (9) et (10) sur la fréquence de Matsubara, c'est-à-dire sur la composante énergie de leur quadrivecteur  $P$ . L'intégrale dans notre équation (15) présenterait effectivement, dans ce cas, une divergence infrarouge logarithmique.



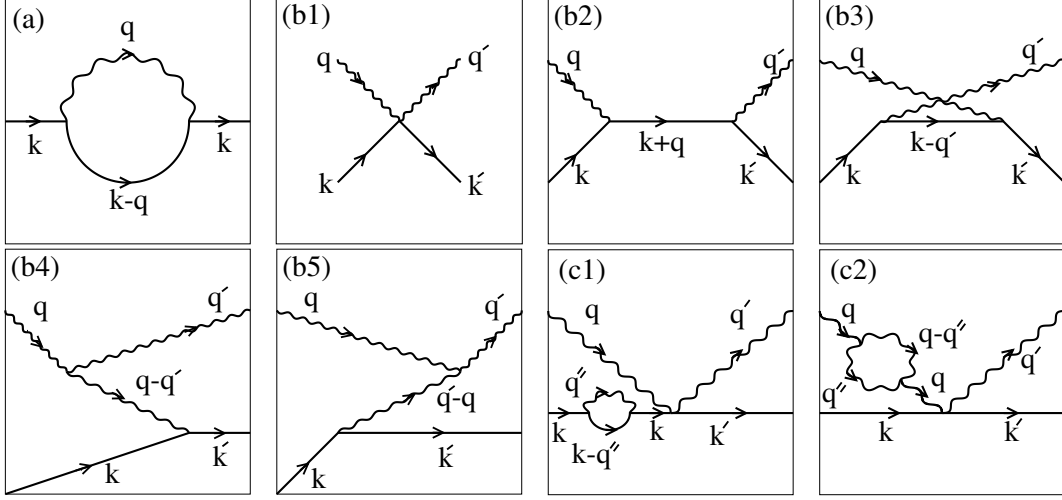


FIGURE 3: Diagrammes utiles issus de l'interaction entre quasi-particule  $\gamma$  (ligne droite ou courbe) et phonons (ligne ondulée). (a) Contribution à une boucle au propagateur de la quasi-particule  $\gamma$ , voir l'équation (14). (b) Contributions à l'amplitude de diffusion  $|\phi : \mathbf{q}, \gamma : \mathbf{k}\rangle \rightarrow |\phi : \mathbf{q}', \gamma : \mathbf{k}'\rangle$  d'un phonon sur la quasi-particule  $\gamma$  à l'ordre dominant en température ( $q, q' = O(T) \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{k}$  fixé); la numérotation de (b1) à (b5) correspond, dans cet ordre, aux termes  $\mathcal{T}_1$  à  $\mathcal{T}_5$  de l'équation (23). (c) Exemples de diagrammes infinis d'ordre trois en l'interaction dans la série perturbative de l'amplitude de diffusion (23) entre états nus; comme le montre un calcul explicite, ils n'apparaissent pas dans l'amplitude de diffusion (31) entre états asymptotiques exacts.

Montrons cependant que l'émission de paires brisées ne change pas la carte de stabilité BCS de la figure 2. Supposons en effet que  $s \geq 1$ . Comme  $\epsilon_{\mathbf{k}} \geq \Delta_*$  et  $\hbar\omega_{\mathbf{q}} \geq 0$  pour tous les vecteurs d'onde, nous disposons de la minoration

$$\Delta E^{(s \neq 0)} \geq 3\Delta_* - \epsilon_{\mathbf{k}} \quad (17)$$

Il ne peut donc y avoir instabilité par émission de paires brisées que si  $\epsilon_{\mathbf{k}} > 3\Delta_*$ . On vérifie cependant que, dans le cadre de la théorie BCS, la zone  $\epsilon_{\mathbf{k}} > 3\Delta_*$  est incluse strictement dans la zone instable par émission de phonons<sup>12</sup>. Pour être complet, nous calculons et représentons en tireté noir sur la figure 2 la ligne de déstabilisation par émission d'une paire brisée ( $s = 1$  et  $n = 0$  dans l'équation (16)); elle se réduit sur la figure 2a ( $\mu > 0$ ) à  $\epsilon_{\mathbf{k}} = 3\Delta$  car  $k$  est  $< 3k_0$ , et sur la figure 2b ( $\mu < 0$ ) à  $\epsilon_{\mathbf{k}} = 3\epsilon_{\mathbf{k}/3}$  car  $k \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}}$  est croissante convexe.

### 3. Amplitude de diffusion de la quasi-particule $\gamma$ sur un phonon de basse énergie

Dans le problème qui nous intéresse, la quasi-particule  $\gamma$ , à un vecteur d'onde initial  $\mathbf{k}$  assurant sa stabilité à température nulle au sens de la section 2, est plongée dans le gaz de phonons du superfluide à la température non nulle mais très basse  $T$ , en particulier  $k_B T \ll mc^2, \Delta_*$ . La quasi-particule  $\gamma$  ne peut absorber des phonons en conservant l'énergie-impulsion, puisque sa vitesse de groupe  $v_k$  est subsonique. Pour le voir, il suffit de développer la variation d'énergie après absorption de  $n$  phonons de vecteurs d'onde  $\mathbf{q}_i$  au premier ordre en les  $q_i = O(k_B T / \hbar c)$ :

$$\Delta E_{\text{abs}} = \epsilon_{\mathbf{k} + \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i} - \left( \epsilon_{\mathbf{k}} + \sum_{i=1}^n \hbar\omega_{\mathbf{q}_i} \right) \sim - \sum_{i=1}^n \hbar c q_i \left( 1 - \frac{v_k}{c} \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}_i \right) < 0 \quad (18)$$

12. Pour  $\mu > 0$ , on vérifie d'abord sur la figure 2a que la ligne  $\epsilon_{\mathbf{k}} = 3\Delta$ , c'est-à-dire  $\Delta = |\hbar^2 k^2 / 2m - \mu| / \sqrt{8}$ , est en dessous des lignes d'instabilité CSA et  $v_k = c$  [le seul cas d'incertitude est la limite  $k/k_\mu \rightarrow 0$ , où la ligne tireté semble rejoindre la ligne verte en  $\Delta/\mu = 1/\sqrt{8}$ ; la chaîne d'inégalités  $\Delta E_{\text{inf}}^{s=0}(k) \leq \Delta + \hbar\omega_{|\mathbf{k}-k_0|} - \epsilon_{\mathbf{k}} \leq 3\Delta - \epsilon_{\mathbf{k}} \leq \Delta E^{(s \neq 0)}$  permet de conclure, la première inégalité venant du choix  $n = 1$  et  $\mathbf{q}_1 = (1 - k_0/k)\mathbf{k}$  dans l'équation (4), la seconde de  $\hbar\omega_{\mathbf{q}} \leq 2\Delta$  sur tout le domaine d'existence de la branche acoustique [15, 17] et la troisième de l'équation (17)]. Puis on le vérifie hors du cadre de la figure, en utilisant en particulier l'équivalent donné dans la note 8. Pour  $\mu < 0$ , on vérifie numériquement que  $v_k > c$  sur la ligne  $\epsilon_{\mathbf{k}} = 3(\Delta^2 + \mu^2)^{1/2}$ , ce qui est évident dans la limite CBE  $\mu \rightarrow -\infty$ , et dans la limite  $\mu \rightarrow 0^-$  compte tenu de la même note 8.

où l'on a introduit les directions des vecteurs d'onde  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$  et  $\hat{\mathbf{q}}_i = \mathbf{q}_i/q_i$ . En revanche, rien n'empêche que la quasi-particule  $\gamma$  diffuse des phonons, c'est-à-dire en absorbe et réémette un certain nombre non nul. À basse température, le processus dominant est la diffusion d'un phonon,

$$|\gamma : \mathbf{k}, \phi : \mathbf{q}\rangle \rightarrow |\gamma : \mathbf{k}', \phi : \mathbf{q}'\rangle \quad \text{avec} \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{q}' \quad \text{et} \quad \mathbf{q}' \neq \mathbf{q} \quad (19)$$

dont il faut maintenant calculer l'amplitude de probabilité sur la couche d'énergie dans la limite  $q, q' \rightarrow 0$ .<sup>13</sup>

*Le hamiltonien.* Pour cela, nous partons du hamiltonien effectif de basse énergie obtenue par l'hydrodynamique quantique pour la partie phononique et par une approximation d'homogénéité locale, valable dans la limite quasi-classique (3), pour le couplage entre phonons et quasi-particule  $\gamma$ , dans le volume de quantification avec conditions aux limites périodiques  $[0, L]^3$  dont on fera tendre la taille vers l'infini [18, 21, 1, 2] :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \hat{H}_0 = E_0 + \sum_{\mathbf{q} \neq 0}^{q < \Lambda} \hbar \omega_{\mathbf{q}}^{(0)} \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}} + \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}} \\ \hat{V} = \hat{V}_{\phi\phi} + \hat{V}_{\phi\gamma} \quad \text{et} \quad \hat{V}_{\phi\gamma} = \hat{H}_3^{\phi\gamma} + \hat{H}_4^{\phi\gamma} \end{cases} \quad (20)$$

Contentons-nous ici d'en décrire qualitativement les différentes contributions, puisque leurs expressions explicites sont données ailleurs (en particulier dans l'Annexe A) :

- Le hamiltonien sans interaction  $\hat{H}_0$  est quadratique en les opérateurs de création et d'annihilation  $\hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger}$  et  $\hat{b}_{\mathbf{q}}$  d'un phonon de vecteur d'onde  $\mathbf{q}$ ,  $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  et  $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}}$  d'une quasi-particule  $\gamma$  de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , opérateurs obéissant aux habituelles relations de commutation bosoniques pour les phonons, et d'anticommutation fermioniques pour la quasi-particule  $\gamma$  d'un superfluide de fermions, par exemple  $[\hat{b}_{\mathbf{q}}, \hat{b}_{\mathbf{q}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'}$ . Il fait intervenir les énergies propres nues  $\hbar \omega_{\mathbf{q}}^{(0)}$  et  $\epsilon_{\mathbf{k}}^{(0)}$  des quasi-particules, qui seront déplacées par l'effet des interactions pour donner les énergies propres vraies ou effectives  $\hbar \omega_{\mathbf{q}}$  et  $\epsilon_{\mathbf{k}}$ . Il comporte une coupure  $\Lambda$  sur le nombre d'onde des phonons empêchant une divergence ultraviolette de ces déplacements d'énergie ; c'est inévitable dans une théorie effective de basse énergie, qui ne sait pas décrire l'effet des interactions aux grands nombres d'onde. Le choix de la coupure le plus simple ici est  $\Lambda = Ak_B T / \hbar c$ , avec une constante  $A \gg 1$  ; une fois l'amplitude de diffusion  $\phi - \gamma$  calculée à l'ordre dominant en température, on peut faire tendre  $A$  vers  $+\infty$  sans déclencher de divergence, comme nous le verrons.
- Le hamiltonien d'interaction  $\hat{V}$  se compose de l'opérateur d'interaction entre phonons, noté  $\hat{V}_{\phi\phi}$ , et de l'opérateur d'interaction entre phonon et quasi-particule  $\gamma$ , noté  $\hat{V}_{\phi\gamma}$ . Nous omettons ici l'opérateur d'interaction  $\hat{V}_{\gamma\gamma}$  entre quasi-particules  $\gamma$ , puisqu'il y en a une seule dans le système<sup>14</sup>.
- L'interaction entre phonons résulte à l'ordre dominant de processus à 3 corps, de type  $\hat{b}^{\dagger} \hat{b}^{\dagger} \hat{b}$  (décroissance à la Beliaev d'un phonon en deux phonons) ou  $\hat{b}^{\dagger} \hat{b} \hat{b}$  (recombinaison à la Landau de deux phonons en un), qui peuvent être résonnants (conserver l'énergie-impulsion) si la branche acoustique est de départ convexe, ou encore de type  $\hat{b}^{\dagger} \hat{b}^{\dagger} \hat{b}^{\dagger}$  ou  $\hat{b} \hat{b} \hat{b}$ , jamais résonnants. Paradoxalement, les interactions  $\hat{b}^{\dagger} \hat{b} \hat{b}$  et  $\hat{b}^{\dagger} \hat{b}^{\dagger} \hat{b}$  entre phonons contribuent à l'amplitude de diffusion  $\phi - \gamma$  à l'ordre dominant [1] ; leur omission malheureuse dans la référence [2] a fait l'objet de la rectification [14]. Aux ordres sous-dominants,  $\hat{V}_{\phi\phi}$  comporte des processus à 4 corps [18, 21], à 5 corps [22], etc, que l'hydrodynamique quantique permet en principe de décrire,<sup>15</sup> mais qui ne jouent pas de rôle dans notre problème.
- L'interaction de la quasi-particule  $\gamma$  avec les phonons consiste à l'ordre dominant en un processus d'absorption  $\hat{b} \hat{\gamma}^{\dagger} \hat{\gamma}$  ou d'émission  $\hat{b}^{\dagger} \hat{\gamma}^{\dagger} \hat{\gamma}$  d'un phonon ; ces termes étant cubiques en les opérateurs de création et d'annihilation, nous les rangeons dans  $\hat{H}_3^{\phi\gamma}$ . À l'ordre sous-dominant, elle comporte la diffusion directe d'un phonon

13. On peut se demander pourquoi  $\gamma$  ne pourrait pas diffuser un phonon incident de vecteur d'onde infinitésimal  $\mathbf{q}$  dans un mode de vecteur d'onde non infinitésimal  $\mathbf{q}'$ . Cependant, si tel était le cas,  $\mathbf{q}'$  aurait une limite  $\mathbf{q}'_0$  non nulle lorsque  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}$  et le processus  $|\gamma : \mathbf{k}\rangle \rightarrow |\gamma : \mathbf{k} - \mathbf{q}'_0, \phi : \mathbf{q}'_0\rangle$  conserverait l'énergie, en contradiction avec l'hypothèse de stabilité de la quasi-particule  $\gamma$ .

14. Dans une théorie microscopique du gaz de fermions, il en irait autrement, l'interaction effective  $\phi - \gamma$  apparaissant comme un sous-diagramme d'une interaction  $\gamma - \gamma$  ne conservant pas le nombre total de quasi-particules  $\gamma$  (si ce n'est modulo 2) [20].

15. Il faudrait alors, pour être cohérent, tenir compte de corrections dites « du gradient » dans les termes d'ordre inférieur, au sens par exemple des références [25, 26], comme il est fait dans la section V.D de la référence [21].

$\hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\gamma}^\dagger \hat{\gamma}$ , l'absorption directe de 2 phonons (absorption double)  $\hat{b} \hat{b} \hat{\gamma}^\dagger \hat{\gamma}$  et le processus inverse d'émission double  $\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{\gamma}^\dagger \hat{\gamma}$ , contributions quartiques toutes rangées dans  $\hat{H}_4^{\phi\gamma}$ . Il ne sera pas utile ici d'aller au-delà, ce que l'approche de la référence [2] telle quelle ne permettrait d'ailleurs pas de faire (voir notre note 15).

- Les éléments de matrice de  $\hat{V}_{\phi\phi}$  dans l'hydrodynamique quantique ne dépendent que de l'équation d'état du gaz à température nulle, c'est-à-dire du potentiel chimique  $\mu(\rho)$  considéré comme une fonction de la densité  $\rho$  dans l'état fondamental, et de ses dérivées par rapport à  $\rho$  à longueur de diffusion  $a$  entre atomes fixée<sup>16</sup>. Les éléments de matrice de  $\hat{V}_{\phi\gamma}$  déduits de l'homogénéité locale dépendent de la relation de dispersion de la quasi-particule  $\gamma$  et de ses dérivées première et seconde par rapport à  $\rho$  à vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et longueur de diffusion  $a$  fixés.

*La matrice S habituelle.* Calculons l'amplitude de diffusion  $\phi - \gamma$  comme l'amplitude de probabilité de transition entre l'état initial  $|i\rangle = |\gamma : \mathbf{k}, \phi : \mathbf{q}\rangle$  et l'état final  $|f\rangle = |\gamma : \mathbf{k}', \phi : \mathbf{q}'\rangle$  comme dans l'équation (19), par la méthode de la matrice  $S$  (section B<sub>III</sub>.1 de la référence [24]), c'est-à-dire dans la limite d'un temps d'évolution infini. Les états asymptotiques étant pris comme des états propres de  $\hat{H}_0$ , la transition n'est autorisée que si elle conserve l'énergie correspondante, c'est-à-dire la somme des énergies nues :

$$E_i^{(0)} \equiv \epsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(0)} = E_f^{(0)} \equiv \epsilon_{\mathbf{k}'}^{(0)} + \hbar\omega_{\mathbf{q}'}^{(0)} \quad (21)$$

L'amplitude de transition est donnée alors par l'élément de matrice de l'opérateur  $\hat{T}(z)$  entre  $|i\rangle$  et  $|f\rangle$  sur la couche d'énergie, c'est-à-dire pour  $z = E_i^{(0)} + i\eta$ ,  $\eta \rightarrow 0^+$  :

$$A_{fi}^{(0)} = \langle f | \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E_i^{(0)} + i\eta - \hat{H}} \hat{V} | i \rangle \quad (22)$$

À l'ordre dominant à basse température ( $q, q' = O(T) \rightarrow 0$  à  $k$  fixé), une analyse générale de la série perturbative en  $\hat{V}$  du résultat (22), exposée dans l'Annexe A et sur laquelle nous reviendrons, suggère que l'on puisse se limiter à l'ordre deux en  $\hat{V}$ , c'est-à-dire remplacer  $\hat{H}$  par  $\hat{H}_0$  au dénominateur de l'équation (22). On élimine ensuite les contributions sous-dominantes restantes, comme l'explique l'Annexe A, pour obtenir :

$$A_{fi}^{(0)} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 + \mathcal{T}_4 + \mathcal{T}_5 \quad (23)$$

avec

$$\mathcal{T}_1 = L^{-3} \langle \phi : \mathbf{q}', \gamma : \mathbf{k}' | \mathcal{H}_4^{\phi\gamma} | \phi : \mathbf{q}, \gamma : \mathbf{k} \rangle \quad (24)$$

$$\mathcal{T}_2 = L^{-3} \frac{\langle \phi : \mathbf{q}', \gamma : \mathbf{k}' | \mathcal{H}_3^{\phi\gamma} | \gamma : \mathbf{k} + \mathbf{q} \rangle \langle \gamma : \mathbf{k} + \mathbf{q} | \mathcal{H}_3^{\phi\gamma} | \phi : \mathbf{q}, \gamma : \mathbf{k} \rangle}{\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(0)} + \epsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)}} \quad (25)$$

$$\mathcal{T}_3 = L^{-3} \frac{\langle \gamma : \mathbf{k}' | \mathcal{H}_3^{\phi\gamma} | \phi : \mathbf{q}, \gamma : \mathbf{k} - \mathbf{q}' \rangle \langle \phi : \mathbf{q}', \gamma : \mathbf{k} - \mathbf{q}' | \mathcal{H}_3^{\phi\gamma} | \gamma : \mathbf{k} \rangle}{\epsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} - \hbar\omega_{\mathbf{q}'}^{(0)} - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}^{(0)}} \quad (26)$$

$$\mathcal{T}_4 = L^{-3} \frac{\langle \gamma : \mathbf{k}' | \mathcal{H}_3^{\phi\gamma} | \phi : \mathbf{q} - \mathbf{q}', \gamma : \mathbf{k} \rangle \langle \phi : \mathbf{q}', \phi : \mathbf{q} - \mathbf{q}' | \mathcal{V}_{\phi\phi} | \phi : \mathbf{q} \rangle}{\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(0)} - \hbar\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{(0)} - \hbar\omega_{\mathbf{q}'}^{(0)}} \quad (27)$$

$$\mathcal{T}_5 = L^{-3} \frac{\langle \phi : \mathbf{q}' | \mathcal{V}_{\phi\phi} | \phi : \mathbf{q}' - \mathbf{q}, \phi : \mathbf{q} \rangle \langle \phi : \mathbf{q}' - \mathbf{q}, \gamma : \mathbf{k}' | \mathcal{H}_3^{\phi\gamma} | \gamma : \mathbf{k} \rangle}{\epsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} - \epsilon_{\mathbf{k}'}^{(0)} - \hbar\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}^{(0)}} \quad (28)$$

Les termes successifs au second membre de (23) sont représentés par les diagrammes (b1) à (b5) de la figure 3, et les éléments de matrice volumiques au numérateur sont donnés par les équations (A.4), (A.5) et (A.6) de l'Annexe A, parfois à une conjugaison hermitienne près ; dans le dernier terme, on a utilisé le fait que  $\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{q}' - \mathbf{q}$ . Les énergies propres nues diffèrent des énergies effectives par des termes en  $O(T^3)$  comme le montre la théorie des perturbations

16. Tant que l'on ne s'est pas affranchi de la coupure  $\Lambda$ , il faut prendre l'équation d'état nue dans les éléments de matrice [23].

ordinaire<sup>17</sup>; or, à l'ordre dominant pour  $A_{fi}$ , qui est d'ordre un en  $T$ , il suffit de développer les numérateurs et les dénominateurs du deuxième et du troisième terme de (23) jusqu'à l'ordre relatif sous-dominant  $T$  c'est-à-dire jusqu'à l'ordre  $T^2$ , le reste pouvant être écrit directement à l'ordre dominant<sup>18</sup>. On peut donc remplacer les énergies nues par les énergies effectives dans les dénominateurs d'énergie et les éléments de matrice de (23), ainsi que dans la conservation de l'énergie (21), ce qui redonne exactement l'expression (3) de la référence [14].

Notre calcul par matrice  $S$  n'est cependant pas pleinement convaincant. L'analyse générale de l'Annexe A mentionnée plus haut passe sous silence l'existence, aux ordres en  $\hat{V}$  supérieurs ou égaux à trois, de diagrammes infinis (et non pas divergents). Dans ces diagrammes, l'un des dénominateurs d'énergie, donnant la différence entre  $E_i^{(0)} = E_f^{(0)}$  et l'énergie de l'état intermédiaire, vaut exactement zéro, et pas sur un ensemble de mesure nulle<sup>19</sup>. Ce phénomène se produit chaque fois que l'état intermédiaire repasse par l'état initial  $|i\rangle$  ou passe de manière anticipée par l'état final  $|f\rangle$ . Des exemples en sont donnés sur la figure 3c, à l'ordre trois en  $\hat{V}$ . De plus, comme nous le verrons, dans la limite d'une vitesse de groupe nulle  $v_k \rightarrow 0$ , notre amplitude de diffusion (23) n'est même pas en accord avec celle de la référence [1], ce qui nous incite à un surcroît de rigueur.

*États asymptotiques exacts.* L'apparition catastrophique de termes infinis dans la série perturbative de l'amplitude (22) est un phénomène connu en théorie quantique des champs et n'a rien de surprenant. En effet, l'expression de la matrice  $S$  à l'origine des relations (21,22) provient de la mécanique quantique ordinaire, où le nombre total de particules est une quantité conservée, comme dans la collision de deux atomes.

Ici, en revanche, le hamiltonien  $\hat{H}$  conserve le nombre de quasi-particules  $\gamma$ , mais pas le nombre de phonons. La quasi-particule  $\gamma$  ne cesse en fait jamais d'interagir avec le champ phononique, même aux instants infiniment antérieurs ou infiniment ultérieurs à sa collision avec le phonon incident, en émettant et réabsorbant des phonons *virtuels* ou *captifs*, que la conservation de l'énergie-impulsion empêche de partir à l'infini. Les bons états asymptotiques de la quasi-particule  $\gamma$  à considérer dans la théorie de la diffusion sont donc ses états stationnaires vrais  $|\gamma : \mathbf{k}\rangle$  et  $|\gamma : \mathbf{k}'\rangle$  d'énergies propres  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  et  $\epsilon_{\mathbf{k}'}$ , habillés de phonons captifs, plutôt que les états nus  $|\gamma : \mathbf{k}\rangle = \hat{\gamma}_{\mathbf{k}}^\dagger |\text{vide}\rangle$  et  $|\gamma : \mathbf{k}'\rangle = \hat{\gamma}_{\mathbf{k}'}^\dagger |\text{vide}\rangle$  non stationnaires<sup>20</sup>. De même, le phonon incident  $|\phi : \mathbf{q}\rangle$  ou émergent  $|\phi : \mathbf{q}'\rangle$  ne cesse jamais d'interagir avec le champ phononique; il peut se désintégrer virtuellement en deux phonons, qui peuvent continuer à se désintégrer en paires de phonons ou au contraire se recombiner pour redonner le phonon initial, etc. Ces processus sont non résonnants, et les phonons créés sont virtuels si la branche acoustique est de départ concave [ $\gamma < 0$  dans l'équation (1)]; on construit ainsi, comme dans la note 20, les états stationnaires vrais  $|\phi : \mathbf{q}\rangle$  et  $|\phi : \mathbf{q}'\rangle$ , d'énergies propres  $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$  et  $\hbar\omega_{\mathbf{q}'}$ , habillés de phonons captifs et à utiliser comme bons états asymptotiques. Le cas convexe est d'une autre nature, puisque  $|\phi : \mathbf{q}\rangle$  et  $|\phi : \mathbf{q}'\rangle$  sont instables et peuvent se désintégrer réellement en phonons partant à l'infini; comme il est montré dans l'Annexe A, nous sommes sauvé par la lenteur (taux  $\approx q^5$ ) de cette décroissance, ce qui permet formellement de l'ignorer dans le calcul de l'amplitude de diffusion  $\phi - \gamma$  à l'ordre dominant.

Il faut donc reprendre la construction de la matrice  $S$  en utilisant comme états initial et final les états asymptotiques

17. Le déplacement d'énergie  $\delta\epsilon_{\mathbf{k}}$  d'une quasi-particule  $\gamma$  seule ou  $\hbar\delta\omega_{\mathbf{q}}$  d'un phonon seul est non nul à partir de l'ordre 2 en  $\hat{V}$ . À cet ordre, il se déduit donc d'un diagramme à une boucle comme sur la figure 3a. De l'équation (14), nous tirons  $\delta\epsilon_{\mathbf{k}} \approx \int_{q<\Lambda} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{V(\phi:\mathbf{q};\mathbf{k}-\mathbf{q})V(\phi\gamma:\mathbf{k})^2}{\epsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} + i\eta - (\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(0)} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{(0)})}$ ; le numérateur et le dénominateur de l'intégrande sont d'ordre  $T$ , comme la coupure  $\Lambda$ , donc  $\delta\epsilon_{\mathbf{k}}$  est d'ordre  $T^3$ . De même,  $\hbar\delta\omega_{\mathbf{q}} \approx \int_{q<\Lambda} \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \frac{V(\phi:\mathbf{q}';\phi:\mathbf{q}-\mathbf{q}')V(\phi\phi|\phi:\mathbf{q})^2/2}{\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(0)} + i\eta - (\hbar\omega_{\mathbf{q}'}^{(0)} + \hbar\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{(0)})}$ ; le numérateur est  $\approx qq'|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|$  et le dénominateur se développe grâce à l'équation (1) en gardant le terme de courbure au voisinage de l'angle nul entre  $\mathbf{q}'$  et  $\mathbf{q}$ , ce qui donne  $\text{Re } \hbar\omega_{\mathbf{q}} \approx T^5 \ln T$  et, si  $\gamma > 0$ , une partie imaginaire non nulle  $\text{Im } \hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(0)} \approx T^5$ .

18. En effet, les contributions du deuxième et du troisième terme se compensent exactement à leur ordre dominant  $T^0$ , alors que celles des trois autres termes sont immédiatement d'ordre  $T$ .

19. Si le dénominateur d'énergie s'annulait à l'intérieur d'une intégrale sur le vecteur d'onde d'un phonon interne, le décalage imaginaire pur infinitésimal  $+i\eta$  de  $E_i^{(0)}$  donnerait une intégrale finie au sens des distributions.

20. Pour donner une définition précise de  $|\gamma : \mathbf{k}\rangle$ , considérons le sous-espace  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$  engendré par action répétée du hamiltonien d'interaction  $\hat{V}$  sur le vecteur  $|\gamma : \mathbf{k}\rangle$ , c'est-à-dire sur une quasi-particule  $\gamma$  nue en présence du vide de phonons.  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$  est ainsi la superposition d'états à nombre et vecteurs d'onde quelconques de phonons, en présence d'une quasi-particule  $\gamma$  nue ayant reculé. Il est stable sous l'action du hamiltonien complet  $\hat{H}$ . Sous la condition de stabilité acoustique énoncée après l'équation (6), on s'attend à ce que  $\hat{H}$  admette dans  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$  un seul niveau d'énergie discret  $\epsilon_{\mathbf{k}}$ , associé à l'état fondamental  $|\gamma : \mathbf{k}\rangle$ , et situé au bord inférieur d'un continuum d'énergies propres.  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  est le pôle du propagateur exact au premier membre de l'équation (14); le résidu associé donne le poids de la quasi-particule nue dans la quasi-particule habillée,  $Z_{\mathbf{k}} = \langle \gamma : \mathbf{k} | \gamma : \mathbf{k} \rangle^2$ , et doit être  $> 0$ .

exacts<sup>21</sup>

$$||i\rangle = \hat{B}_{\mathbf{q}}^{\dagger} ||\gamma : \mathbf{k}\rangle \quad \text{et} \quad ||f\rangle = \hat{B}_{\mathbf{q}'}^{\dagger} ||\gamma : \mathbf{k}'\rangle \quad (29)$$

où  $\hat{B}_{\mathbf{q}}^{\dagger}$  est l'opérateur de création d'un phonon habillé  $||\phi : \mathbf{q}\rangle$  de vecteur d'onde  $\mathbf{q}$ <sup>22</sup>. À la limite d'un temps d'évolution infini, la transition se produit sur la couche d'énergie exacte (plutôt que nue)

$$E_i \equiv \epsilon_{\mathbf{k}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}} = E_f \equiv \epsilon_{\mathbf{k}'} + \hbar\omega_{\mathbf{q}'} \quad (30)$$

avec l'amplitude de probabilité

$$A_{fi} = \langle \gamma : \mathbf{k}' | \hat{B}_{\mathbf{q}'}^{\dagger} ([\hat{V}_{\phi\gamma}, \hat{B}_{\mathbf{q}}^{\dagger}] + \hat{\Delta}_{\mathbf{q}}^{\dagger}) ||\gamma : \mathbf{k}\rangle + \langle \gamma : \mathbf{k}' | ([\hat{B}_{\mathbf{q}'}, \hat{V}_{\phi\gamma}] + \hat{\Delta}_{\mathbf{q}'}^{\dagger}) \frac{1}{E_i + i\eta - \hat{H}} ([\hat{V}_{\phi\gamma}, \hat{B}_{\mathbf{q}}^{\dagger}] + \hat{\Delta}_{\mathbf{q}}^{\dagger}) ||\gamma : \mathbf{k}\rangle \quad (31)$$

Il nous a fallu introduire l'opérateur

$$\hat{\Delta}_{\mathbf{Q}}^{\dagger} \equiv [\hat{H}_{\phi\phi}, \hat{B}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}] - \hbar\omega_{\mathbf{Q}} \hat{B}_{\mathbf{Q}}^{\dagger} \quad \text{avec} \quad \hat{H}_{\phi\phi} = \sum_{\mathbf{q} \neq 0}^{q < \Lambda} \hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(0)} \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}} + \hat{V}_{\phi\phi} \quad (32)$$

Ici  $\hat{H}_{\phi\phi}$  est la partie purement phononique du hamiltonien complet  $\hat{H}$  et le facteur  $\omega_{\mathbf{Q}}$  est bien la pulsation propre exacte, pas la pulsation nue. Contrairement aux apparences,  $\hat{\Delta}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$  n'est pas nul, même si son action sur le vide de phonons donne zéro,  $\hat{\Delta}_{\mathbf{Q}}^{\dagger} |vide\rangle = 0$  (voir cependant la note 22). Le calcul conduisant à l'expression (31), détaillé dans l'Annexe A, reprend celui de la diffusion photon-atome dans les sections B<sub>III.2</sub> et B<sub>III.3</sub> de la référence [24], et le généralise en habillant l'état asymptotique du photon (autant dire, du phonon) et pas seulement celui de l'atome (autant dire, de la quasi-particule  $\gamma$ ). Il est facile de se convaincre que la série perturbative de l'expression (31) ne comporte plus de diagrammes infinis. Comme les parties habillées des états asymptotiques diluent les parties nues dans un continuum, elles ne peuvent conduire à un risque de dénominateur nul (sauf sur un ensemble de mesure nulle) et l'on peut, pour comprendre ce qui se passe, se focaliser sur la contribution à  $A_{fi}$  des parties nues  $|\phi : \mathbf{q}\rangle$  et  $|\phi : \mathbf{q}'\rangle$ ,  $|\gamma : \mathbf{k}\rangle$  et  $|\gamma : \mathbf{k}'\rangle$  :

$$A_{fi}^{\text{parties nues}} = (Z_{\mathbf{k}} Z_{\mathbf{k}'} Z_{\mathbf{q}} Z_{\mathbf{q}'})^{1/2} \left[ \langle \gamma : \mathbf{k}' | \hat{b}_{\mathbf{q}'} [\hat{V}_{\phi\gamma}, \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger}] | \gamma : \mathbf{k}\rangle + \langle \gamma : \mathbf{k}' | [\hat{b}_{\mathbf{q}'}, \hat{V}_{\phi\gamma}] \frac{1}{E_i + i\eta - \hat{H}} [\hat{V}_{\phi\gamma}, \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger}] | \gamma : \mathbf{k}\rangle \right] \quad (33)$$

où les résidus de quasi-particule  $Z_{\mathbf{k}}$ ,  $Z_{\mathbf{k}'}$ ,  $Z_{\mathbf{q}}$  et  $Z_{\mathbf{q}'}$  sont les poids des états nus dans les états habillés, si bien que  $\hat{B}_{\mathbf{q}}^{\dagger} |vide\rangle = Z_{\mathbf{q}}^{1/2} \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} |vide\rangle$  par exemple. La présence de commutateurs dans l'équation (33) force l'absorption du phonon incident  $\mathbf{q}$  comme premier événement et l'émission du phonon  $\mathbf{q}'$  comme dernier événement. En effet, seuls les termes de  $\hat{V}_{\phi\gamma}$  contenant au moins un facteur  $\hat{b}_{\mathbf{q}}$  ( $\hat{b}_{\mathbf{q}'}^{\dagger}$ ) peuvent donner une contribution non nulle au commutateur avec  $\hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger}$  ( $\hat{b}_{\mathbf{q}'}$ ). Mais, l'absorption du phonon  $\mathbf{q}$  efface la mémoire de l'état initial, et avant émission du phonon  $\mathbf{q}'$ , on n'a pas connaissance de l'état final, donc (i) si l'on remplace  $E_i$  par  $E_i^{(0)}$  dans (33), on ne peut pas avoir de dénominateurs

21. Contrairement au cas de la diffusion résonnante d'un photon par un atome à deux niveaux initialement dans l'état fondamental, dont la série perturbative présente un dénominateur d'énergie nul chaque fois que l'atome passe dans l'état excité en présence du vide de rayonnement [24], on ne peut pas guérir la matrice  $S$  naïve (22) en renormalisant par exemple le propagateur de la quasi-particule  $\gamma$  incidente par resommation des diagrammes à  $n$  boucles disjointes (bulles) dont la figure 3c1 représente le cas  $n = 1$  (la boucle en question est celle de la figure 3a). Le développement en bulles à l'énergie complexe  $z$  fait apparaître une série géométrique de raison  $\Delta\epsilon_{\mathbf{k}}(z - \hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(0)}) / (z - E_i^{(0)})$  où  $\Delta\epsilon_{\mathbf{k}}(z)$  est la fonction déplacement d'énergie propre de  $\gamma$  à l'ordre deux en  $\hat{V}_{\phi\gamma}$  (pour  $L = +\infty$ , c'est l'intégrale au dénominateur de (14)). La resommation des bulles dans l'état initial  $|\gamma : \mathbf{k}\rangle$  transforme donc l'amplitude du diagramme de la figure 3b1 en  $\frac{z - E_i^{(0)}}{z - E_i^{(0)} - \Delta\epsilon_{\mathbf{k}}(z - \hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(0)})} L^{-3} \langle \phi : \mathbf{q}' | \mathcal{H}_4^{\phi\gamma} | \phi : \mathbf{q}, \gamma : \mathbf{k}\rangle$ , ce qui donne zéro si l'on fait tendre  $z$  vers  $E_i^{(0)}$  comme le prescrit l'équation (22), ou l'infini si l'on fait tendre heuristiquement  $z$  vers  $E_i$  écrit à l'ordre deux en  $\hat{V}_{\phi\gamma}$ . Une resommation des bulles sur la couche d'énergie à la fois dans l'état final et dans l'état initial de  $\gamma$  conduit à la même conclusion.

22. Pour simplifier, nous limitons ici le hamiltonien d'interaction entre phonons  $\hat{V}_{\phi\phi}$  aux termes de Beliaev  $\hat{b}^{\dagger} \hat{b}^{\dagger} \hat{b}$  et de Landau  $\hat{b}^{\dagger} \hat{b} \hat{b}$ , comme dans l'équation (A.1), si bien que le vide de phonons est stationnaire. Ce ne serait pas le cas si l'on gardait les termes non résonnants  $\hat{b}^{\dagger} \hat{b}^{\dagger} \hat{b}^{\dagger}$  et  $\hat{b} \hat{b} \hat{b}$ ; il faudrait alors construire un vide habillé  $||vide\rangle$  sur lequel faire agir  $\hat{B}_{\mathbf{q}}^{\dagger}$  et  $\hat{B}_{\mathbf{q}'}^{\dagger}$ .

d'énergie nuls dans la série perturbative (sauf à l'intérieur d'une intégrale sur un vecteur d'onde de phonon interne), et (ii) si l'on garde la valeur de  $E_i$  dans (33), on ne peut pas avoir de petits dénominateurs (de l'ordre de l'écart  $O(\hat{V}^2)$  entre les énergies propres nues et exactes) qui invalideraient notre développement perturbatif.

Analysons maintenant le résultat (31) à l'ordre dominant. L'analyse générale de l'Annexe A, qui nous a conduit à limiter (22) à l'ordre deux en  $\hat{V}$ , peut lui être appliquée. Comme chaque contribution à  $A_{fi}$  est au moins d'ordre un en  $\hat{V}$ , il suffit de déterminer l'habillage de la quasi-particule  $\gamma$  et du phonon incident ou émergent au premier ordre de la théorie des perturbations :

$$|\gamma : \mathbf{k}\rangle = |\gamma : \mathbf{k}\rangle + \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{Q} \neq \mathbf{0}} \frac{\langle \phi : \mathbf{Q}, \gamma : \mathbf{k} - \mathbf{Q} | \mathcal{H}_3^{\phi\gamma} | \gamma : \mathbf{k}\rangle}{\epsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} + i\eta - (\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{Q}}^{(0)} + \hbar\omega_{\mathbf{Q}}^{(0)})} |\phi : \mathbf{Q}, \gamma : \mathbf{k} - \mathbf{Q}\rangle + \dots \quad (34)$$

$$\hat{B}_{\mathbf{Q}}^\dagger = \hat{b}_{\mathbf{Q}}^\dagger + \frac{1}{2L^{3/2}} \sum_{\mathbf{Q}' \neq \mathbf{0}, \neq \mathbf{Q}} \frac{\langle \phi : \mathbf{Q}', \phi : \mathbf{Q} - \mathbf{Q}' | \mathcal{V}_{\phi\phi} | \phi : \mathbf{Q}\rangle}{\hbar\omega_{\mathbf{Q}'}^{(0)} + i\eta - (\hbar\omega_{\mathbf{Q}-\mathbf{Q}'}^{(0)} + \hbar\omega_{\mathbf{Q}}^{(0)})} \hat{b}_{\mathbf{Q}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{Q}-\mathbf{Q}'}^\dagger + \dots \quad (35)$$

Dans l'écriture (34), nous avons immédiatement négligé la correction due à  $\hat{H}_4^{\phi\gamma}$ , c'est-à-dire à l'émission double de phonons par  $\gamma$ , que ses éléments de matrice d'un ordre plus élevé en température et la mise en jeu d'une somme double sur les vecteurs d'onde des phonons rendent négligeable devant l'émission simple. De l'expression (35), nous tirons que l'opérateur  $\hat{\Delta}_{\mathbf{Q}}^\dagger$  est d'ordre un en  $\hat{V}$  (tout comme le commutateur de  $\hat{B}_{\mathbf{Q}}$  ou  $\hat{B}_{\mathbf{Q}}^\dagger$  avec  $\hat{V}_{\phi\gamma}$ ), et que son action sur l'état asymptotique exact  $|\gamma : \mathbf{k}\rangle$  est d'ordre deux,

$$\hat{\Delta}_{\mathbf{Q}}^\dagger |\gamma : \mathbf{k}\rangle = O(\hat{V}^2) \quad (36)$$

En effet, l'action sur la partie nue de la quasi-particule  $\gamma$  donne zéro,  $\hat{\Delta}_{\mathbf{Q}}^\dagger |\gamma : \mathbf{k}\rangle = 0$ , puisque  $\hat{\Delta}_{\mathbf{Q}}^\dagger$  est purement phononique et donne zéro sur le vide de phonons. Dans la seconde contribution à (31), celle contenant la résolvante de  $\hat{H}$ , nous pouvons alors négliger directement tout habillage des phonons et de la quasi-particule  $\gamma$ , c'est-à-dire négliger  $\hat{\Delta}_{\mathbf{q}}^\dagger$  et  $\hat{\Delta}_{\mathbf{q}'}$ , remplacer les opérateurs habillés  $\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger$  et  $\hat{B}_{\mathbf{q}'}$  par les opérateurs nus  $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger$  et  $\hat{b}_{\mathbf{q}'}$ , les états habillés  $|\gamma : \mathbf{k}\rangle$  et  $\langle \gamma : \mathbf{k}'|$  par les états nus  $|\gamma : \mathbf{k}\rangle$  et  $\langle \gamma : \mathbf{k}'|$ , et enfin garder seulement  $\hat{H}_3^{\phi\gamma}$  dans l'interaction  $\hat{V}_{\phi\gamma}$  et approximer  $E_i - \hat{H}$  par  $E_i^{(0)} - \hat{H}^{(0)}$  au dénominateur ; nous retrouvons ainsi exactement la contribution  $\mathcal{T}_2$  de la théorie naïve (23), c'est-à-dire le diagramme absorption-émission non croisé de la figure 3b2. Dans la première contribution à (31), nous effectuons un développement au second ordre pour obtenir des expressions directement interprétables :

$$\begin{aligned} \text{1ère contribution à (31)} &= \langle \gamma : \mathbf{k}' | \hat{b}_{\mathbf{q}'} [\hat{V}_{\phi\gamma}, \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger] |\gamma : \mathbf{k}\rangle + \langle \gamma : \mathbf{k}' | \hat{b}_{\mathbf{q}'} [\hat{H}_3^{\phi\gamma}, \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger] |\gamma : \mathbf{k}\rangle^{(1)} + {}^{(1)}\langle \gamma : \mathbf{k}' | \hat{b}_{\mathbf{q}'} [\hat{H}_3^{\phi\gamma}, \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger] |\gamma : \mathbf{k}\rangle + \\ &\langle \gamma : \mathbf{k}' | \hat{B}_{\mathbf{q}'}^{(1)} [\hat{H}_3^{\phi\gamma}, \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger] |\gamma : \mathbf{k}\rangle + \langle \gamma : \mathbf{k}' | \hat{b}_{\mathbf{q}'} [\hat{H}_3^{\phi\gamma}, \hat{B}_{\mathbf{q}}^{(1)\dagger}] |\gamma : \mathbf{k}\rangle + \langle \gamma : \mathbf{k}' | \hat{b}_{\mathbf{q}'} \hat{\Delta}_{\mathbf{q}}^\dagger |\gamma : \mathbf{k}\rangle^{(1)} + \dots \quad (37) \end{aligned}$$

où  $\hat{B}_{\mathbf{Q}}^{(1)\dagger}$  est le premier écart, ou écart d'ordre un, entre l'opérateur de création d'un phonon habillé  $\hat{B}_{\mathbf{Q}}^\dagger$  et d'un phonon nu  $\hat{b}_{\mathbf{Q}}^\dagger$ , et  $|\gamma : \mathbf{k}\rangle^{(1)}$  est le premier écart, ou écart d'ordre un, entre l'état habillé  $|\gamma : \mathbf{k}\rangle$  et l'état nu  $|\gamma : \mathbf{k}\rangle$  de la quasi-particule  $\gamma$ . Le premier terme de (37) ne contient aucun habillage, et redonne exactement le diagramme de diffusion directe  $\mathcal{T}_1$  de la théorie naïve (23), représenté sur la figure 3b1, puisque la composante  $\hat{H}_3^{\phi\gamma}$  de  $\hat{V}_{\phi\gamma}$  donne zéro au contraire de  $\hat{H}_4^{\phi\gamma}$ . Le deuxième terme de (37) tient compte de l'habillage de la quasi-particule  $\gamma$  dans l'état initial et redonne la contribution  $\mathcal{T}_3$  de la théorie naïve, c'est-à-dire le diagramme croisé de la figure 3b3 ; on l'interprète physiquement en disant que le phonon émis  $\mathbf{q}'$  était un phonon virtuel de la quasi-particule  $\gamma$  que l'arrivée du phonon  $\mathbf{q}$  a rendu réel, en lui permettant de partir à l'infini sans violer la conservation de l'énergie-impulsion. Le troisième terme de (37) est nul puisque le commutateur mis en jeu est scalaire vis-à-vis des variables phononiques, ce qui permet à  $\hat{b}_{\mathbf{q}'}$  d'agir à droite sur le vide de phonons pour donner zéro. Pour la même raison, au remplacement près de  $\hat{b}_{\mathbf{q}'}$  par  $\hat{B}_{\mathbf{q}'}^{(1)}$ , le quatrième terme de (37) est nul. Le cinquième terme de (37) redonne  $\mathcal{T}_4$ , représenté par le diagramme de la figure 3b4 : il correspond à l'absorption par la quasi-particule  $\gamma$  d'un phonon appartenant à une paire de phonons virtuels habillant le phonon incident, l'autre phonon de la paire étant alors déconfiné et partant à l'infini. Enfin, le sixième terme de (37) redonne  $\mathcal{T}_5$ , représenté par le diagramme de la figure 3b5 : il résulte de la diffusion du phonon incident sur un phonon du halo habillant la quasi-particule  $\gamma$ .<sup>23</sup>

23. Pour mener à bien ces calculs, on a besoin seulement, en ce qui concerne l'habillage des phonons, des propriétés (36) et  $\langle \phi : \mathbf{q}' | \hat{B}_{\mathbf{q}}^{(1)\dagger} | \phi : \mathbf{q}\rangle$  :



À l'ordre dominant à basse température,  $q, q' = O(T), T \rightarrow 0$ , il y a donc accord parfait entre l'amplitude de diffusion phonon- $\gamma$  (22) prédite par la théorie de la mécanique quantique ordinaire et celle (31) de la théorie des champs à états asymptotiques exacts, les deux conduisant à l'expression (23), qui reproduit celle de la référence [14] après remplacement (légitime à cet ordre, comme nous l'avons vu) des énergies propres nues par les énergies propres effectives. Par conséquent, notre désaccord avec l'amplitude de diffusion de la référence [1] pour une quasi-particule  $\gamma$  de vitesse de groupe  $v_k$  nulle, soulevé par la référence [14] et en contradiction avec la note 8 hâtive de cette même référence [1], persiste et reste inexplicé.

*Résultat final à l'ordre  $q$ .* Notre calcul de l'amplitude de diffusion  $\phi - \gamma$  s'appuie sur le hamiltonien effectif « hydrodynamique » de basse énergie (20) et n'est valable qu'à l'ordre dominant en  $q$ . Il est donc inutile de garder une dépendance à tous les ordres en  $q$  dans les dénominateurs d'énergie et dans les éléments de matrice au numérateur des différents termes de l'expression (23). Nous passons alors à la limite  $q \rightarrow$  à vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  fixé de la quasi-particule  $\gamma$ , sans supposer (comme l'ont fait les références [1, 2]) que sa vitesse  $v_k$  tend vers zéro; un calcul un peu long mais sans difficulté particulière donne ainsi sur la couche d'énergie le résultat à notre connaissance original<sup>24</sup> :

$$\mathcal{A}_{\text{fi}} = \mathcal{A}(\gamma : \mathbf{k}, \phi : \mathbf{q} \rightarrow \gamma : \mathbf{k}', \phi : \mathbf{q}') \underset{q \rightarrow 0}{\overset{\mathbf{k} \text{ fixé}}{\sim}} \frac{\hbar c q}{\rho} \left( \frac{1 - ue_k}{1 - u'e_k} \right)^{1/2} R_k(u, u', w) \quad \text{avec} \quad q' \underset{q \rightarrow 0}{\overset{\mathbf{k} \text{ fixé}}{\sim}} \frac{1 - ue_k}{1 - u'e_k} q + O(q^2) \quad (38)$$

Nous avons dû introduire quelques notations : l'amplitude de transition volumique  $\mathcal{A}_{\text{fi}} = L^3 A_{\text{fi}}$  (c'est-à-dire pour un volume de quantification unité), les cosinus des angles entre les trois vecteurs  $\mathbf{q}, \mathbf{q}'$  et  $\mathbf{k}$  (de directions  $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/q$ , etc),

$$u = \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}, u' = \hat{\mathbf{q}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}, w = \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{q}}' \quad (39)$$

l'expression sans dimension fonction symétrique de  $u$  et  $u'$ , appelée amplitude de diffusion réduite,

$$R_k(u, u', w) = \frac{\hbar k}{2mc} \left\{ e_x - we_\rho - e_k(1 + e_k e_\rho)(u - u')^2 \frac{w + \frac{1+\lambda}{2}}{(1 - ue_k)(1 - u'e_k)(1 - w)} \right. \\ \left. + \frac{(u + e_\rho)(u' + e_\rho)[e_k(w - uu') + uu'e_{kk}] + (u + e_\rho)(1 - u'e_k)(w + ue_{\rho k}) + (u' + e_\rho)(1 - ue_k)(w + u'e_{\rho k})}{(1 - ue_k)(1 - u'e_k)} \right\} \quad (40)$$

et les paramètres physiques sans dimension tirés du potentiel chimique  $\mu(\rho)$  du gaz superfluide à température nulle, de la relation de dispersion  $\epsilon_k(\rho)$  de la quasi-particule  $\gamma$  et de leurs dérivées par rapport au nombre d'onde  $k$  de la quasi-particule ou à la densité  $\rho$  du gaz (à potentiel d'interaction fixé entre les atomes de masse  $m$  du gaz) :

$$e_k = \frac{v_k}{c} = \frac{1}{\hbar c} \frac{\partial \epsilon_k}{\partial k} \quad e_\rho = \frac{\rho}{\hbar k c} \frac{\partial \epsilon_k}{\partial \rho} \quad e_{\rho\rho} = \frac{\rho^2}{\hbar k c} \frac{\partial^2 \epsilon_k}{\partial \rho^2} \quad \lambda = \frac{\rho}{d\mu/d\rho} \frac{d^2 \mu/d\rho^2}{d\mu/d\rho} = 2 \frac{d \ln c}{d \ln \rho} - 1 \\ e_{kk} = \frac{k}{c} \frac{\partial v_k}{\partial k} = \frac{k}{\hbar c} \frac{\partial^2 \epsilon_k}{\partial k^2} \quad e_{\rho k} = \frac{\rho}{c} \frac{\partial v_k}{\partial \rho} = \frac{\rho}{\hbar c} \frac{\partial^2 \epsilon_k}{\partial \rho \partial k} \quad e_x = e_{\rho\rho} - \lambda e_\rho \quad (41)$$

$\mathbf{q}' - \mathbf{q}) = 0$  et de l'expression de  $\hat{B}_{\mathbf{q}}^{(1)\dagger}$  (vide). On peut alors faire comme si  $\hat{B}_{\mathbf{q}}^{(1)\dagger} = \hat{Q} G_0^\phi(\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(0)} + i\eta) \hat{V}_{\phi\phi} \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger$ , par restriction au sous-espace à  $n \leq 1$  phonon. Ici  $\hat{Q}$  est le projecteur orthogonal sur l'espace à un phonon et  $G_0^\phi(z) = (z - \hat{H}_0^{\phi\phi})^{-1}$  est la résolvante du hamiltonien des phonons seuls sans interaction. On donne aussi  $\hat{\Delta}^{(1)\dagger} = L^{-3/2} \sum_{\mathbf{q}'} \langle \phi : \mathbf{q}, \phi : \mathbf{q}' - \mathbf{q} | \mathcal{V}_{\phi\phi} | \phi : \mathbf{q}' \rangle \hat{b}_{\mathbf{q}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}' - \mathbf{q}}$ .

24. La lourdeur du calcul vient du fait que les termes  $\mathcal{T}_2$  et  $\mathcal{T}_3$  sont d'ordre  $q^0$  et se compensent dans la somme (23) à l'ordre dominant, ce qui oblige à développer leur numérateur et leur dénominateur jusqu'à l'ordre sous-dominant, c'est-à-dire avec une erreur relative  $O(q^2)$  et absolue  $O(q^3)$  [2]. On aboutit à une simplification notable par un paramétrage plus symétrique des vecteurs d'onde entrants et sortants, en développant l'amplitude  $\mathcal{A}(\gamma : \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}{2}, \phi : \mathbf{q} \rightarrow \gamma : \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}{2}, \phi : \mathbf{q}')$  à  $\mathbf{k}$  fixé, qui reste équivalente à l'amplitude originelle à l'ordre  $q$ . On peut ainsi se ramener à des expressions à développer paires ou impaires en  $\mathbf{q}$  ou  $\mathbf{q}'$ , par exemple au dénominateur d'énergie  $\hbar\omega_{\mathbf{q}} + \epsilon_{\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}{2}} - \epsilon_{\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}{2}}$  de  $\mathcal{T}_2$ , ce qui annule automatiquement l'ordre impair ou pair. En particulier, l'expression de  $q'$  en fonction de  $q$  sur la couche d'énergie donnée dans l'équation (38) présente maintenant, telle quelle, l'erreur sous-sous-dominante  $O(q^3)$  requise. Il faut aussi penser à remplacer  $\epsilon_{\mathbf{k}_i} - \epsilon_{\mathbf{k}_i}$  par  $\hbar\omega_{\mathbf{q}'} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}$  au dénominateur de  $\mathcal{T}_5$ . On remarque alors qu'à l'ordre dominant, l'on passe de  $\mathcal{T}_4$  à  $\mathcal{T}_5$  en changeant  $|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|$  en  $-|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|$ ; à cet ordre,  $\mathcal{T}_4 + \mathcal{T}_5$  est en fait une fraction rationnelle en  $|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2$ , ce qui permet de faire disparaître la racine carrée contenue dans  $|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|$ .



Nous avons relié la quantité  $\lambda$ , un peu à part car seule à ne pas dépendre du nombre d'onde  $k$ , au paramètre de Grüneisen  $d \ln c / d \ln \rho$  au moyen de la relation hydrodynamique exacte sur la vitesse du son,  $mc^2 = \rho d\mu / d\rho$ . La quantité  $e_{pp}$  n'est qu'un intermédiaire de calcul et ne contribue à l'amplitude de diffusion qu'au travers de  $e_x$ ; elle n'apparaîtra guère dans la suite. Contrairement aux apparences, la fonction  $R_k$  donc l'amplitude de diffusion n'ont pas de divergence en  $w = 1$ , compte tenu de l'inégalité  $(u - u')^2 = [\hat{\mathbf{k}} \cdot (\hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{q}}')]^2 \leq (\hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{q}}')^2 = 2(1 - w)$ . À partir de l'expression (38), il est aisé de vérifier que notre amplitude de diffusion obéit bien à l'ordre dominant en  $q$  au principe de microréversibilité sur la couche d'énergie

$$\mathcal{A}(\gamma : \mathbf{k}, \phi : \mathbf{q} \rightarrow \gamma : \mathbf{k}', \phi : \mathbf{q}') = \mathcal{A}(\gamma : \mathbf{k}', \phi : \mathbf{q}' \rightarrow \gamma : \mathbf{k}, \phi : \mathbf{q}) \quad (42)$$

compte tenu du lien entre  $q$  et  $q'$  qui y existe et de l'invariance de la fonction  $R_k$  sous l'échange de  $u$  et  $u'$ .

À *vitesse nulle*. La fonction  $R_k$  se simplifie beaucoup dans la limite d'une quasi-particule  $\gamma$  de vitesse de groupe nulle. Le calcul est simple : on utilise le développement (2) de la relation de dispersion de  $\gamma$  au voisinage d'un extrémum à l'ordre deux pour calculer le comportement des quantités (41) dans cette limite. Il faut tenir compte du fait que les coefficients  $\Delta_*$ ,  $k_0$  et  $m_*$  dans l'équation (2) dépendent de la densité  $\rho$ , et séparer les cas  $k_0(\rho) > 0$  et  $k_0(\rho) \equiv 0$ . (i) Si  $k_0(\rho) > 0$ , seul le coefficient  $e_k$  *a priori* tend vers zéro lorsque  $k$  tend vers  $k_0$ ; les limites des autres coefficients sont repérées par un tilde :

$$\begin{aligned} e_k &\xrightarrow[k \rightarrow k_0]{k_0 > 0} \frac{\hbar(k - k_0)}{m_* c} & e_\rho &\xrightarrow[k \rightarrow k_0]{k_0 > 0} \tilde{e}_\rho = \frac{\rho}{\hbar c k_0} \frac{d\Delta_*}{d\rho} & e_x &\xrightarrow[k \rightarrow k_0]{k_0 > 0} \tilde{e}_x = \frac{\rho^2}{\hbar c k_0} \left[ \frac{d^2\Delta_*}{d\rho^2} - \frac{d^2\mu/d\rho^2}{d\mu/d\rho} \frac{d\Delta_*}{d\rho} + \frac{\hbar^2}{m_*} \left( \frac{dk_0}{d\rho} \right)^2 \right] \\ e_{kk} &\xrightarrow[k \rightarrow k_0]{k_0 > 0} \tilde{e}_{kk} = \frac{\hbar k_0}{m_* c} & e_{\rho k} &\xrightarrow[k \rightarrow k_0]{k_0 > 0} \tilde{e}_{\rho k} = -\frac{\rho \hbar}{m_* c} \frac{dk_0}{d\rho} \end{aligned} \quad (43)$$

et l'on obtient l'amplitude de diffusion réduite en  $k = k_0$  en accord avec la référence [14] mais pas avec [1] :

$$R_k(u, u', w) \xrightarrow[k \rightarrow k_0]{k_0 > 0} \frac{\hbar k_0}{2mc} \left[ (u + u' + \tilde{e}_\rho) w + \tilde{e}_x + \tilde{e}_{\rho k} u (u + \tilde{e}_\rho) + \tilde{e}_{\rho k} u' (u' + \tilde{e}_\rho) + \tilde{e}_{kk} u u' (u + \tilde{e}_\rho)(u' + \tilde{e}_\rho) \right] \quad (44)$$

Dans le problème du gaz de fermions qui nous intéresse, ceci correspond à un potentiel chimique  $\mu$  strictement positif dans la relation de dispersion BCS (9), considérée au voisinage de son minimum. (ii) Si  $k_0(\rho) \equiv 0$ , les coefficients  $e_k$ ,  $e_{kk}$  et  $e_{\rho k}$  tendent linéairement vers zéro lorsque  $k \rightarrow k_0$ , et les autres divergent comme  $1/k$ , avec des coefficients repérés par un accent tchèque dont il faut garder trace :

$$\begin{aligned} e_k &\xrightarrow[k \rightarrow 0]{k_0 \equiv 0} \frac{\hbar k}{m_* c} & \frac{\hbar k}{mc} e_\rho &\xrightarrow[k \rightarrow 0]{k_0 \equiv 0} \check{e}_\rho = \frac{\rho}{mc^2} \frac{d\Delta_*}{d\rho} & \frac{\hbar k}{mc} e_x &\xrightarrow[k \rightarrow 0]{k_0 \equiv 0} \check{e}_x = \frac{\rho^2}{mc^2} \left( \frac{d^2\Delta_*}{d\rho^2} - \frac{d^2\mu/d\rho^2}{d\mu/d\rho} \frac{d\Delta_*}{d\rho} \right) \\ e_{kk} &\xrightarrow[k \rightarrow 0]{k_0 \equiv 0} \frac{\hbar k}{m_* c} & e_{\rho k} &\xrightarrow[k \rightarrow 0]{k_0 \equiv 0} \frac{\hbar k \rho}{m_*^2 c} \frac{dm_*}{d\rho} \end{aligned} \quad (45)$$

pour écrire le résultat final, qui corrige une affirmation hâtive de la référence [2]<sup>25</sup> :

$$R_k(u, u', w) \xrightarrow[k \rightarrow k_0]{k_0 \equiv 0} \frac{1}{2} \left[ \check{e}_x + w \check{e}_\rho \left( 1 + \frac{m}{m_*} \check{e}_\rho \right) \right] \quad (46)$$

Dans notre problème fermionique, ce cas correspond à un potentiel chimique  $\mu$  strictement négatif dans la relation de dispersion BCS (9) considérée au voisinage de son minimum, ou encore à un potentiel chimique  $\mu$  strictement positif dans cette même relation, considérée cette fois au voisinage de son maximum relatif en  $k = 0$ ; cette seconde situation, de masse effective  $m_* < 0$ , est celle du *maxon*, dont on a vu sur la figure 2a qu'il est stable d'après la théorie BCS dans un régime d'interaction assez forte.

25. La référence [2] pensait à tort déduire le cas  $k \rightarrow k_0 \equiv 0$  du cas  $k \rightarrow k_0 > 0$  en faisant tendre  $k_0$  vers zéro dans son équation (10), donc dans notre équation (44), voir la phrase après cette équation (10). En réalité, pour obtenir l'équivalent (44), on a fait tendre  $e_k$  vers zéro à  $e_{kk}$  fixé, alors que  $e_{kk} \sim e_k \rightarrow 0$  dans la limite  $k \rightarrow k_0 \equiv 0$ . Du coup, la compensation des deux termes  $u u'$  dans la sous-expression  $e_k(w - u u') + u u' e_{kk}$  entre crochets dans (40) ne peut pas être prise en compte (la sous-expression est  $\sim e_k w$  et non pas  $\sim u u' e_{kk}$  si  $k \rightarrow k_0 \equiv 0$ ); or, cette sous-expression est affectée d'un poids divergent et donne une contribution non nulle au résultat final (46). Signalons que la note 37 étend (46) à l'ordre un en  $k$ .

*Diffusion à 4 phonons.* Pour terminer cette section, soulignons que le résultat central (38) est très général. Il s'applique quelle que soit la statistique quantique de la quasi-particule  $\gamma$  ou sa relation de dispersion isotrope  $\epsilon_{\mathbf{k}}$ . En particulier, comme le souligne la référence [1], il doit décrire la diffusion d'un phonon mou (de vecteur d'onde  $\mathbf{q}$  infinitésimal) sur un phonon dur (de vecteur d'onde fixé  $\mathbf{k}$ , en particulier  $k \gg q$ ), avec production d'un phonon mou  $\mathbf{q}'$  et d'un phonon dur  $\mathbf{k}'$ . Ce problème à quatre phonons a été étudié dans le contexte de l'hélium 4 superfluide, et l'amplitude de diffusion correspondante peut être calculée de manière exacte avec l'hydrodynamique quantique dans la limite  $\hbar k \ll mc$  où  $\epsilon_{\mathbf{k}} \sim \hbar ck$  [18]. Dans ce cas, seule la quantité  $e_{kk}$  tend vers zéro;  $e_{\mathbf{k}}$  tend vers un (limite sonique),  $e_{\rho}$  et  $e_{\rho k}$  tendent vers  $(1 + \lambda)/2$ ,  $e_{\rho\rho}$  tend vers  $(\rho^2/c) d^2c/d\rho^2$ , et notre amplitude de diffusion (38) reproduit effectivement celle de l'équation (111) de la référence [21] appliquée à la relation de dispersion linéaire  $\omega_{\mathbf{q}} = cq$ , ce qui constitue un bon test. Le problème à quatre phonons peut aussi être étudié dans un gaz de bosons en interaction faible avec la méthode de Bogolioubov, qui permet de s'affranchir de la contrainte  $\hbar k \ll mc$ ; à l'endroit d'un minimum rotonique ( $k \rightarrow k_0 > 0$ ), la référence [27] a ainsi pu tester avec succès le résultat de la référence [14], c'est-à-dire *in fine* (44).

#### 4. Caractériser la marche au hasard : force moyenne, diffusion en impulsion, diffusion en position

Notre quasi-particule  $\gamma$  est désormais immergée dans le gaz thermique de phonons du superfluide de température  $T$  arbitrairement basse; par interaction incessante avec les phonons, elle subit une dynamique stochastique dans l'espace des impulsions et des positions, que nous allons maintenant décrire.

*Équation maîtresse.* La quasi-particule  $\gamma$  est préparée initialement dans un état de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  stable au sens de la section 2, en particulier avec une vitesse de groupe  $v_{\mathbf{k}}$  subsonique. Elle ne peut donc émettre des phonons, ce serait un processus endoénergétique. Pour la même raison, elle ne peut en absorber, ce serait un processus exoénergétique, voir l'équation (18). Reste donc, à l'ordre dominant en température, le processus de diffusion d'un phonon de vecteur d'onde  $\mathbf{q}$  étudié dans la section 3. Écrivons une équation maîtresse sur la distribution en vecteur d'onde  $\Pi(\mathbf{k}, t)$  de la quasi-particule  $\gamma$ , en comptant négativement les processus de départ  $(\mathbf{k}) + (\mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{k}') + (\mathbf{q}')$  du mode  $|\gamma : \mathbf{k})$  et positivement les processus d'alimentation  $(\mathbf{k}') + (\mathbf{q}') \rightarrow (\mathbf{k}) + (\mathbf{q})$  de ce mode, somme étant prise à  $\mathbf{k}$  fixé sur tous les vecteurs d'onde distincts  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{q}'$  des phonons et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}'$  s'en déduisant par conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Pi(\mathbf{k}, t) &= -\frac{1}{L^6} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{A}(\gamma : \mathbf{k}, \phi : \mathbf{q} \rightarrow \gamma : \mathbf{k}', \phi : \mathbf{q}')|^2 \delta(\epsilon_{\mathbf{k}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}'} - \hbar\omega_{\mathbf{q}'}) \bar{n}_{\mathbf{q}}(1 + \bar{n}_{\mathbf{q}'}) \Pi(\mathbf{k}, t) \\ &\quad + \frac{1}{L^6} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{A}(\gamma : \mathbf{k}', \phi : \mathbf{q}' \rightarrow \gamma : \mathbf{k}, \phi : \mathbf{q})|^2 \delta(\epsilon_{\mathbf{k}'} + \hbar\omega_{\mathbf{q}'} - \epsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}) \bar{n}_{\mathbf{q}'}(1 + \bar{n}_{\mathbf{q}}) \Pi(\mathbf{k}', t) \end{aligned} \quad (47)$$

Pour calculer le taux des processus, nous avons utilisé la règle d'or de Fermi, dont on reconnaît le facteur  $2\pi/\hbar$  et la distribution de Dirac traduisant la conservation de l'énergie (30), en incluant les facteurs d'amplification bosoniques accompagnant l'absorption (facteur  $\bar{n}$ ) ou l'émission (facteur  $1 + \bar{n}$ ) d'un phonon dans un mode de nombre d'occupation moyen thermique  $\bar{n}_{\mathbf{q}} = [\exp(\beta\hbar\omega_{\mathbf{q}}) - 1]^{-1}$ , où  $\beta = 1/k_B T$ .<sup>26</sup> Rappelons que la règle d'or traite implicitement le processus de diffusion dans l'approximation de Born. On ne peut donc l'appliquer directement au hamiltonien d'interaction  $\hat{V}$ , en l'occurrence à sa composante  $\hat{H}_4^{\phi\gamma}$  dans l'équation (20), ce qui reviendrait à ne tenir compte que du diagramme de diffusion directe de la figure 3b1. On l'applique plutôt à un hamiltonien d'interaction effectif  $\hat{W}$  de même forme que la partie en  $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger, \hat{b}_{\mathbf{q}}$  de  $\hat{H}_4^{\phi\gamma}$  dans l'équation (A.3) mais avec des éléments de matrice volumiques donnés directement pour  $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}'$  par l'amplitude de transition volumique vraie  $\mathcal{A}(\gamma : \mathbf{k}, \phi : \mathbf{q} \rightarrow \gamma : \mathbf{k}', \phi : \mathbf{q}')$ .<sup>27</sup>  $\hat{W}$  est un

26. Nous avons pris ici une loi de Bose de potentiel chimique nul car le nombre total de phonons  $N_\phi$  n'est pas une constante du mouvement de la dynamique purement phononique. Quand la branche acoustique est de départ convexe, les processus collisionnels dominants conservant l'énergie-impulsion sont ceux de Beliaev-Landau à trois phonons; ils ne conservent effectivement pas  $N_\phi$  et l'affaire est entendue. Dans le cas concave, les processus collisionnels dominants sont ceux à quatre phonons  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  de Landau-Khalatnikov, et il faut invoquer des processus sous-dominants (à cinq phonons [22] ou à trois phonons par non-conservation de l'énergie entre états instables [28]) pour faire varier  $N_\phi$ ; le gaz de phonons pourrait alors présenter un état de pseudo-équilibre thermique de potentiel chimique  $\mu_\phi < 0$  pendant une durée de l'ordre de  $T^{-11}$  [22] ou  $T^{-9}$  [28].

27. L'approche plus puissante de l'équation pilote dans l'approximation de Born-Markov [24] prédirait de plus un effet réactif du réservoir de phonons sur la quasi-particule  $\gamma$ , à savoir un changement de sa relation de dispersion dépendant de la température, en particulier sous l'effet des termes diagonaux  $\mathbf{q} = \mathbf{q}'$  et des termes hors couche d'énergie de  $\hat{W}$ , non donnés ici. On peut supposer dans la suite que  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  est cette relation de dispersion modifiée, sans que cela affecte l'amplitude de diffusion réduite  $R_k(u, u', w)$  à l'ordre dominant en température.

opérateur hermitien, compte tenu de la microréversibilité (42); par construction, il conduit dans l'approximation de Born à l'amplitude de diffusion  $\phi - \gamma$  désirée. La même microréversibilité et la relation  $1 + \bar{n} = \exp(\beta\hbar\omega) \bar{n}$  permettent de vérifier que  $\Pi_{\text{st}}(\mathbf{k}) \propto \exp(-\beta\epsilon_{\mathbf{k}})$  est solution stationnaire exacte de l'équation maîtresse (47) : la quasi-particule  $\gamma$  est bien thermalisée par le gaz de phonons aux temps longs.

*Équation de Fokker-Planck.* Dans ce travail, nous supposons toujours que la distribution en nombre d'onde de la quasi-particule  $\gamma$  a une largeur  $\Delta k$  beaucoup plus grande que celle des phonons, comme dans l'équation (3). Cette condition est d'ailleurs automatiquement satisfaite lorsque  $\gamma$  est à l'équilibre thermique (à suffisamment basse température), la relation de dispersion parabolique (2) de  $\gamma$  imposant à  $\Pi_{\text{st}}(\mathbf{k})$  une largeur  $\propto T^{1/2}$  beaucoup plus grande que celle  $\propto T$  typique d'une relation de dispersion linéaire (1). Dans le régime (3), la quasi-particule  $\gamma$  subit à chaque diffusion un changement de vecteur d'onde  $\delta\mathbf{k} = \pm(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$  très faible devant  $\Delta k$  et l'équation aux différences finies (47) peut être simplifiée en une équation aux dérivées partielles par développement au second ordre en  $\delta\mathbf{k}/\Delta k \approx T^{1/2}$ . Pour ce faire, nous introduisons le flux de probabilité partant de  $\mathbf{k}$  par diffusion  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}'$  (une fonctionnelle de  $\Pi$ ) :

$$\Phi_t(\mathbf{k}|\mathbf{q}, \mathbf{q}') \equiv \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{A}(\gamma : \mathbf{k}, \phi : \mathbf{q} \rightarrow \gamma : \mathbf{k}', \phi : \mathbf{q}')|^2 \delta(\epsilon_{\mathbf{k}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}'} - \hbar\omega_{\mathbf{q}'}) \bar{n}_{\mathbf{q}}(1 + \bar{n}_{\mathbf{q}'}) \Pi(\mathbf{k}, t) \quad (48)$$

et, par simple échange des variables muettes  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{q}'$  dans son terme d'alimentation puis passage à la limite thermodynamique, nous récrivons l'équation maîtresse (47) comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi(\mathbf{k}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} [\Phi_t(\mathbf{k} + \mathbf{q}' - \mathbf{q}|\mathbf{q}, \mathbf{q}') - \Phi_t(\mathbf{k}|\mathbf{q}, \mathbf{q}')] \quad (49)$$

Cette forme rend évidente la conservation de la probabilité totale  $\int d^3 k \Pi(\mathbf{k}, t)/(2\pi)^3$ , égale à un, et conduit, à l'ordre deux en  $\mathbf{q} - \mathbf{q}'$ , à l'équation de Fokker-Planck tridimensionnelle

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi(\mathbf{k}, t) = -\frac{1}{\hbar} \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial}{\partial k_i} [F_i(\mathbf{k}) \Pi(\mathbf{k}, t)] + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{i=x,y,z} \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial^2}{\partial k_i \partial k_j} [D_{ij}(\mathbf{k}) \Pi(\mathbf{k}, t)] \quad (50)$$

avec les coefficients de la force moyenne  $\mathbf{F}(\mathbf{k})$  et de la matrice de diffusion en impulsion  $\underline{\underline{D}}(\mathbf{k})$  dans la base cartésienne,

$$F_i(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3 q d^3 q'}{(2\pi)^6} \hbar(q_i - q'_i) \frac{\Phi_t(\mathbf{k}|\mathbf{q}, \mathbf{q}')}{\Pi(\mathbf{k}, t)} \quad \text{et} \quad D_{ij}(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3 q d^3 q'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2} \hbar^2 (q_i - q'_i)(q_j - q'_j) \frac{\Phi_t(\mathbf{k}|\mathbf{q}, \mathbf{q}')}{\Pi(\mathbf{k}, t)} \quad (51)$$

indépendants de  $\Pi(\mathbf{k}, t)$  et du temps. Sous cette forme, la matrice  $\underline{\underline{D}}(\mathbf{k})$  est visiblement symétrique réelle positive.

*Force et diffusion en impulsion à l'ordre dominant en  $T$ .* Comme la quasi-particule  $\gamma$  de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  évolue dans un milieu homogène et isotrope, la force moyenne et la diffusion en impulsion qu'elle subit doivent être invariantes par rotation d'axe la direction  $\hat{\mathbf{k}}$  du vecteur d'onde. Elles donc sont caractérisées par des fonctions du seul nombre d'onde  $k$ , à savoir la composante longitudinale  $F(k)$  de la force, le coefficient de diffusion en impulsion longitudinal  $D_{\parallel}(k)$  et transverse  $D_{\perp}(k)$  :

$$F_i(\mathbf{k}) = \frac{k_i}{k} F(k) \quad \text{et} \quad D_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} D_{\parallel}(k) + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) D_{\perp}(k) \quad (52)$$

À l'ordre dominant, nous pouvons aisément sortir la dépendance en température de ces coefficients en exprimant les vecteurs d'onde des phonons en unités de  $k_B T/\hbar c$  dans les intégrales sextuples de l'équation (51) et en utilisant l'équivalent (38) de  $\mathcal{A}$  pour obtenir les lois de puissance (le facteur numérique  $\pi^5/15$  est de pure commodité)

$$F(k) \underset{k_B T/\hbar c \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi^5 \hbar c}{15 \rho^2} \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)^8 \mathcal{F}(k) \quad \text{et} \quad D_{\perp, \parallel}(k) \underset{k_B T/\hbar c \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi^5 \hbar^2 c}{15 \rho^2} \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)^9 \mathcal{D}_{\perp, \parallel}(k) \quad (53)$$

Les fonctions restantes  $\mathcal{F}(k)$  et  $\mathcal{D}_{\perp, \parallel}(k)$  sont sans dimension. Pour les calculer, passons en coordonnées sphériques d'axe polaire  $\hat{\mathbf{k}}$  sur les variables  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{q}'$ . Les distributions de Dirac de conservation de l'énergie permettent d'intégrrer

facilement sur le module  $q'$ , *in fine* relié à  $q$  par (38). L'intégrale sur le module  $q$  des contributions linéaires en les nombres d'occupation fait sortir la fonction  $\zeta$  de Riemann ; celle des contributions quadratiques fait sortir des fonctions moins étudiées ( $s$  est un entier  $> 2$ ,  $x$  un réel  $> 0$ ) :

$$\Phi_s(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dQ Q^s}{(e^{Q/\sqrt{x}} - 1)(e^{Q'/\sqrt{x}} - 1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s!}{(m\sqrt{x} + n/\sqrt{x})^{s+1}} = \Phi_s(1/x) \quad (54)$$

L'invariance de l'intégrande par rotation conjointe de  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{q}'$  autour de  $\mathbf{k}$  permet de se ramener à une intégrale sur un seul angle azimutal, l'angle relatif  $\alpha = \phi - \phi'$ . Dans la force, une contribution difficile faisant intervenir la fonction  $\Phi_7$  se révèle être une fonction antisymétrique des cosinus  $u$  et  $u'$  des angles polaires, d'intégrale nulle donc<sup>28</sup>. Une telle simplification ne se produit pas dans la diffusion en impulsion. Il reste avec les notations (39,40,41)<sup>29</sup> :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(k) &= \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 du' (u - u') \frac{(1 - ue_k)^3}{(1 - u'e_k)^5} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} [R_k(u, u', w)]^2 \quad (55) \\ \left( \begin{array}{l} \mathcal{D}_{//}(k) \\ \mathcal{D}_{\perp}(k) \end{array} \right) &= \frac{15}{16\pi^8} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 du' \left[ \frac{(1 - ue_k)^3}{(1 - u'e_k)^6} 8! \zeta(9) + \frac{\Phi_8\left(\frac{1-ue_k}{1-u'e_k}\right)}{[(1 - ue_k)(1 - u'e_k)]^{3/2}} \right] \\ &\times \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} [R_k(u, u', w)]^2 \left( \frac{(u' - u)^2}{(u' - u)^2 \frac{e_k^2 - 1}{2} + (1 - w)(1 - ue_k)(1 - u'e_k)} \right) \quad (56) \end{aligned}$$

L'intégration triple dans (55) peut être effectuée analytiquement<sup>30</sup> ; la force moyenne admet ainsi une expression explicite en les paramètres (41), combinaison de fonctions rationnelles et d'un logarithme, malheureusement trop longue pour être écrite ici. Les coefficients de diffusion en impulsion doivent être évalués numériquement. Dans l'approximation BCS, où la relation de dispersion  $\epsilon_k$  et l'équation d'état à température nulle ont une forme analytique explicite (voir notre équation (9) et la référence [30])<sup>31</sup>, nous représentons sur la figure 4 la dépendance en nombre d'onde de la force et des coefficients de diffusion pour différents régimes d'interaction.

Dans la limite dite BCS  $k_F a \rightarrow 0^-$ , où l'approximation BCS est la plus quantitative, des résultats simples peuvent être obtenus, en faisant tendre  $\Delta/\epsilon_F$  vers zéro à  $\kappa = \hbar^2 k_0(k - k_0)/m\Delta$  fixé. La vitesse du son devient proportionnelle à la vitesse de Fermi,  $c \sim \hbar k_F/m\sqrt{3}$ , le nombre d'onde du minimum de la relation de dispersion se confond avec le nombre d'onde de Fermi  $k_0 \sim k_F$ , la quasi-particule  $\gamma$  est subsonique et stable tant que  $|\kappa| < 1/\sqrt{2}$  et l'amplitude de diffusion réduite  $\phi - \gamma$ , dominée par  $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3$  dans l'expression (23) (les diagrammes omis dans la référence [2] deviennent négligeables), prend la forme très simple indépendante de  $w$  :<sup>32</sup>

$$R_k(u, u', w) \underset{k_F a \rightarrow 0^-}{\overset{\kappa \text{ fixé}}{\sim}} \frac{3\epsilon_F/\Delta}{(1 + \kappa^2)^{3/2}} \frac{(u^2 - 1/3)(u'^2 - 1/3)}{(1 - ue_k)(1 - u'e_k)} \quad \text{avec} \quad e_k \sim \frac{\sqrt{3}\kappa}{(1 + \kappa^2)^{1/2}} \quad (57)$$

Il devient alors raisonnable de donner l'expression analytique de la force et un développement des coefficients de diffusion en impulsion à faible vitesse :<sup>33</sup>

$$\mathcal{F}(k) \sim -\frac{512}{14175} \frac{(\epsilon_F/\Delta)^2}{(1 + \kappa^2)^3} \frac{e_k(1 + 3e_k^2)(33 + 47e_k^2)}{(1 - e_k^2)^6} \quad \text{et} \quad \left( \begin{array}{l} \mathcal{D}_{//}(k) \\ \mathcal{D}_{\perp}(k) \end{array} \right) \sim \left( \frac{\epsilon_F}{\Delta} \right)^2 \left( \begin{array}{l} \frac{5632}{4725} + \frac{159232}{4725} + \frac{94208\pi^2}{14553} \\ \frac{512}{945} + \frac{61952}{11025} + \frac{38912\pi^2}{43659} \end{array} \right) \kappa^2 + O(\kappa^4) \quad (58)$$

28. À un facteur près, il s'agit de  $(u - u') \Phi_7\left(\frac{1-ue_k}{1-u'e_k}\right)/[(1 - ue_k)(1 - u'e_k)]$ .

29. En particulier,  $w = uu' + [(1 - u^2)(1 - u'^2)]^{1/2} \cos \alpha$ .

30. Les seules intégrales un peu difficiles sont  $\int_0^{2\pi} d\alpha/(1 - w) = 2\pi/|u - u'|$  et  $\int_0^{2\pi} d\alpha/(1 - w)^2 = 2\pi(1 - uu')/|u - u'|^3$  où  $w$  est écrit comme dans la note 29.

31. Nous avons rendu plus compactes les expressions de la référence [30] en utilisant les propriétés des intégrales elliptiques  $E(ix) = [1 + ix]E(x/[1 + ix])$  et  $K(ix) = K(x/[1 + ix])/[1 + ix]$  valables pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . En posant  $\mu/\Delta = \text{sh } \tau$ , il vient alors  $-\pi/2a = (2m\Delta/\hbar^2)^{1/2} I_1$  et  $\rho = (2m\Delta/\hbar^2)^{3/2} I_2/(2\pi^2)$  avec  $I_1 = (2e^{-\tau})^{1/2} [e^\tau \text{ch } \tau K(\text{ie}^\tau) - E(\text{ie}^\tau)]$  et  $I_2 = (2e^{-\tau}/9)^{1/2} [\text{sh } \tau E(\text{ie}^\tau) + \text{ch } \tau K(\text{ie}^\tau)]$ . Par ailleurs,  $e_k = (\hbar k/mc)(\xi_k/\epsilon_k)$ ,  $e_{kk} = (\hbar k/mc)[\xi_k^2 + \Delta^2(3\xi_k + 2\mu)]/\epsilon_k^3$ ,  $e_{\rho k} = -(\hbar k/mc)\Delta(\xi_k \rho \Delta' + \Delta \rho \mu')/\epsilon_k^2$ ,  $e_\rho = (\Delta \rho \Delta' - \xi_k \rho \mu')/(\hbar c k \epsilon_k)$ ,  $e_{\rho\rho} = [(\Delta \rho \mu' + \xi_k \rho \Delta')^2 + \epsilon_k^2(\Delta \rho^2 \Delta'' - \xi_k \rho^2 \mu'')]/(\hbar c k \epsilon_k^3)$ . On a noté avec un prime la dérivation par rapport à la densité  $\rho$  à longueur de diffusion  $a$  fixée et on a posé  $\xi_k = \hbar^2 k^2/(2m) - \mu$ .

32. Pour être complet, donnons  $e_\rho \sim -e_k/3$ ,  $\lambda \rightarrow -1/3$ ,  $e_{kk} \sim (2\sqrt{3}\epsilon_F/\Delta)(1 + \kappa^2)^{-3/2}$ ,  $e_{\rho k} \sim -e_{kk}/3$ ,  $e_{\rho\rho} \sim e_{kk}/9$ .

33. Dans la limite (57), on peut aussi ramener la contribution de  $\Phi_8$  dans (56) à une intégrale simple au prix de l'introduction des fonctions de Bose ou polylogarithmes  $g_\alpha(z) = \sum_{n \geq 1} z^n/n^\alpha$  (le reste, calculable analytiquement, est une fraction rationnelle en  $e_k$ ) : en posant  $f_s(u) \equiv g_s(\exp(-Q(1 - e_k u)))/(Q e_k)^s$ , il vient  $\int_{-1}^1 du du' (u^2 - 1/3)^2 (u'^2 - 1/3)^2 (u - u')^2 \Phi_8\left(\frac{1-ue_k}{1-u'e_k}\right)/[(1 - ue_k)(1 - u'e_k)]^{7/2} = 2 \int_0^{+\infty} dQ Q^8 [A_0(Q)A_2(Q) -$

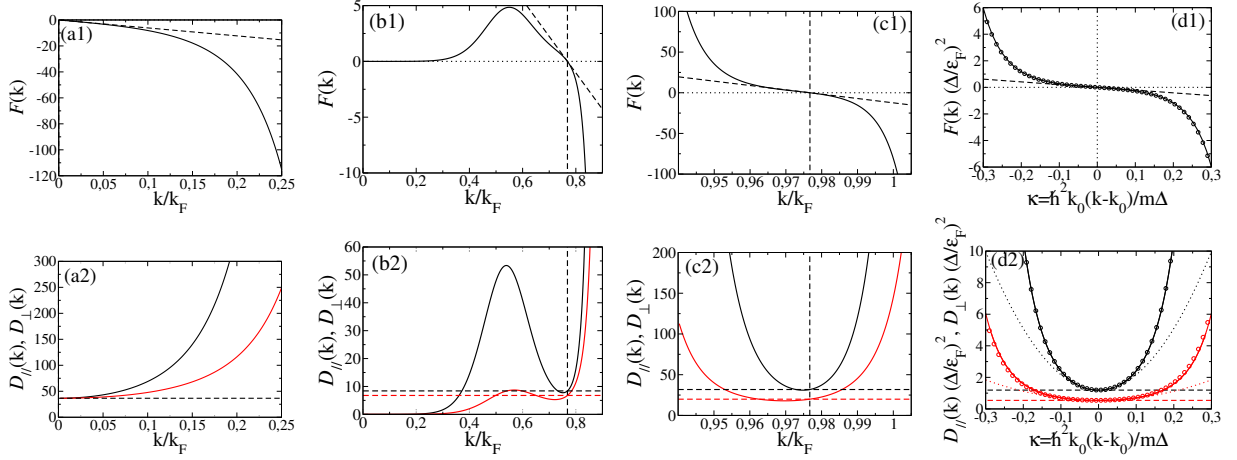


FIGURE 4: Force moyenne  $\mathcal{F}$  (en noir) (rangée supérieure) et coefficients de diffusion en impulsion longitudinal  $\mathcal{D}_{\parallel}$  (en noir) et transverse  $\mathcal{D}_{\perp}$  (en rouge) (rangée inférieure), après extraction de l'ordre dominant en température et adimensionnement comme dans l'équation (53), pour une quasi-particule  $\gamma$  fermionique dans un gaz non polarisé de fermions condensé par paires à très basse température, en fonction du nombre d'onde  $k$  de la quasi-particule. On a déduit les coefficients (41) de l'équation d'état du gaz (voir la note 31) et de la relation de dispersion (9) de  $\gamma$  dans l'approximation BCS, puis on a intégré numériquement les équations (55,56). Dans la zone de raccordement CBE-BCS : (a) du côté CBE  $1/k_F a = 1$  ( $\mu/\epsilon_F \approx -0,801$ ,  $\Delta/\epsilon_F \approx 1,332$ ), (b) à la limite unitaire  $1/k_F a = 0$  ( $\mu/\epsilon_F \approx 0,591$ ,  $\Delta/\epsilon_F \approx 0,686$ ), (c) du côté BCS  $1/k_F a = -1$  ( $\mu/\epsilon_F \approx 0,954$ ,  $\Delta/\epsilon_F \approx 0,208$ ). Tireté vertical : position  $k_0$  du minimum de la relation de dispersion. Tireté oblique ou horizontal : prédictions analytiques (62,63,64,65,67) et approximation linéaire  $e_k \approx \hbar(k - k_0)/m_*$  dans l'équation (62); en (b1), le point d'annulation de  $\mathcal{F}$  n'est pas un point d'inflexion.  $k_F = (3\pi^2\rho)^{1/3}$  est le nombre d'onde de Fermi du gaz,  $\epsilon_F = \hbar^2 k_F^2/2m$  son énergie de Fermi,  $\rho$  sa densité uniforme,  $\mu$  son potentiel chimique et  $\Delta > 0$  son paramètre d'ordre à température nulle,  $a$  la longueur de diffusion dans l'onde  $s$  entre fermions de masse  $m$  de spins opposés. Dans la limite BCS (d)  $k_F a \rightarrow 0^-$ , comportements limites universels déduits de l'équation (57) après multiplication de la force, de la diffusion et de l'écart de  $k$  à  $k_0$  par des puissances bien choisies de  $\Delta$ , en trait plein [la loi limite pour  $\mathcal{F}$  est explicite, voir l'équation (58), celle pour  $\mathcal{D}_{\parallel}$  ou  $\mathcal{D}_{\perp}$  requiert une intégration numérique]; tiretés obliques ou horizontaux : comme dans (a), (b) et (c) mais pour  $\Delta/\epsilon_F \rightarrow 0$ ; courbes en pointillé pour la diffusion : approximations quadratiques (58); cercles :  $1/k_F a = -3$  ( $\Delta/\epsilon_F \approx 9,72 \times 10^{-3}$ ) tirés numériquement des équations (55,56).

**Forces de Langevin.** L'équation de Fokker-Planck (50) est une équation déterministe portant sur la distribution de probabilité du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  de la quasi-particule  $\gamma$ . Il est cependant plus parlant physiquement, en particulier quand la notion de corrélation temporelle entre en jeu, d'utiliser la reformulation stochastique qu'en a donné Langevin [29], en termes d'une marche au hasard du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  dans l'espace de Fourier :

$$\hbar d\mathbf{k} = \mathbf{F}(\mathbf{k}) dt + [2dt \underline{\underline{D}}(\mathbf{k})]^{1/2} \boldsymbol{\eta} \quad (59)$$

Nous utilisons ici les règles de calcul d'Ito : on tire entre les instants  $t$  et  $t + dt$  un vecteur aléatoire gaussien  $\boldsymbol{\eta}$ , réel, de moyenne nulle, de matrice de covariance identité,  $\langle \eta_i \eta_j \rangle = \delta_{ij}$ , statistiquement indépendant des vecteurs  $\boldsymbol{\eta}$  tirés aux autres temps. Ceci montre en particulier que  $\mathbf{F}(\mathbf{k})$  est bien la force moyenne, puisque  $d\langle \hbar \mathbf{k} \rangle / dt = \langle \mathbf{F}(\mathbf{k}) \rangle$ . La méthode habituelle de la fonction test<sup>34</sup> permet de retrouver immédiatement l'équation (50) à partir de (59). L'invariance par rotation ayant conduit aux formes (52) incite à transformer (59) en équations stochastiques sur le module  $k$  et la

$A_1(Q)^2$  avec  $A_0(Q) = [120e_k f_6(u) + 24(1 - 5e_k u) f_5(u) + 8(7e_k - 3u) f_4(u) + \frac{16}{3}(2 - 3e_k u) f_3(u) + \frac{4}{9}(7e_k - 6u) f_2(u) + \frac{4}{9}(1 - e_k u) f_1(u)]_1^1$ ,  $A_1(Q) = [-720e_k f_7(u) - 120(1 - 6e_k u) f_6(u) + 8(15u - 43e_k) f_5(u) + 8(13e_k u - 7) f_4(u) + \frac{8}{9}(18u - 25e_k) f_3(u) + \frac{4}{9}(8e_k u - 7) f_2(u) + \frac{4}{9}(u - e_k) f_1(u)]_1^1$  et  $A_2(Q) = [5040e_k f_8(u) + 720(1 - 7e_k u) f_7(u) + 40(61e_k - 18u) f_6(u) + 8(43 - 95ue_k) f_5(u) + \frac{8}{3}(64e_k - 39u) f_4(u) + \frac{8}{9}(25 - 33e_k u) f_3(u) + \frac{4}{9}(9e_k - 8u) f_2(u) + \frac{4}{9}(1 - e_k u) f_1(u)]_1^1$ . De même, dans  $\text{Tr} \underline{\underline{D}}$ ,  $\int_{-1}^1 du du' (u^2 - 1/3)^2 (u'^2 - 1/3)^2 [(1 - ue_k)^2 + (1 - u'e_k)^2 - 2uu'(1 - ue_k)(1 - u'e_k)] \Phi_8(\frac{1 - ue_k}{1 - u'e_k}) / [(1 - ue_k)(1 - u'e_k)]^{7/2} = 2 \int_0^{+\infty} dQ Q^8 [B_0(Q) B_2(Q) - B_1(Q)^2]$  avec  $B_0(Q) = A_0(Q)$ ,  $B_1(Q) = A_1(Q) - e_k A_2(Q)$  et  $B_2(Q) = A_0(Q) - 2e_k A_1(Q) + e_k^2 A_2(Q)$ . Ces expressions sont numériquement mal posées pour  $Q$  ou  $|e_k|$  trop petits, les termes  $f_s(u)$  devenant individuellement très grands.

34. On exprime de deux manières différentes la variation d'ordre  $dt$  de l'espérance  $\langle f(\mathbf{k}(t)) \rangle$  où  $f$  est une fonction lisse arbitraire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  à décroissance rapide.

direction  $\hat{\mathbf{k}}$  du vecteur d'onde :

$$\hbar dk = F(k) dt + \frac{2D_{\perp}(k)}{\hbar k} dt + [2dt D_{\parallel}(k)]^{1/2} \eta_{\parallel} \quad (60)$$

$$d\hat{\mathbf{k}} = -\frac{2D_{\perp}(k)}{\hbar^2 k^2} dt \hat{\mathbf{k}} + \frac{[2dt D_{\perp}(k)]^{1/2}}{\hbar k} \eta_{\perp} \quad (61)$$

où  $\eta_{\parallel}$  et  $\eta_{\perp}$  sont les composantes du vecteur  $\eta$  parallèle et orthogonale à  $\mathbf{k}$ . Ceci donne un sens physique à  $D_{\perp}(k)/(\hbar k)^2$ , celui d'un coefficient de diffusion de la direction de  $\mathbf{k}$  sur la sphère unité.

*Près de la vitesse nulle.* Soit  $k_0$  un point d'annulation de la vitesse de groupe  $v_k$  de la quasi-particule  $\gamma$ , correspondant à un minimum ou un maximum de la relation de dispersion [masse effective  $m_* > 0$  ou  $< 0$  dans le développement (2)]. En ce point, à l'ordre  $T^8$  en température, la force moyenne tend vers zéro linéairement avec  $v_k$ , ce qui donne pour la forme réduite (53) :

$$\mathcal{F}(k) \underset{k \rightarrow k_0}{\sim} -\gamma e_k \quad \text{avec} \quad \gamma = \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 du' 4(u-u')^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \left[ \lim_{k \rightarrow k_0} R_k(u, u', w) \right]^2 \geq 0 \quad (62)$$

La quasi-particule subit alors une force de frottement visqueux, de coefficient de frottement réduit  $\gamma$ . Le coefficient de diffusion en impulsion longitudinal à l'ordre  $T^9$ , sous la forme réduite (53), tend tout simplement vers  $\gamma$  :

$$\mathcal{D}_{\parallel}(k) \underset{k \rightarrow k_0}{\rightarrow} \gamma \quad (63)$$

Ceci ressort de l'équation (56), de la valeur  $\Phi_8(1) = 8![\zeta(8) - \zeta(9)]$  et de l'expression de  $\gamma$  dans (62). L'explication physique en est d'ailleurs très simple dans le cas  $m_* > 0$  : c'est, sous forme adimensionnée, la relation d'Einstein liant température d'équilibre, coefficient de diffusion en impulsion et coefficient de frottement. Nous l'écrivons plus tard sous forme dimensionnée, voir l'équation (88). Elle est bien connue lorsque  $k_0 = 0$ , mais elle vaut donc aussi dans le cas plus inhabituel  $k_0 > 0$  d'une diffusion en impulsion anisotrope, à condition qu'on l'applique à  $\mathcal{D}_{\parallel}(k_0)$ . En effet, le coefficient de diffusion transverse réduit a une limite non nulle en  $k = k_0$  *différente* de  $\gamma$  si  $k_0 > 0$ , mais *égale* à  $\gamma$  si  $k_0 = 0$  (la matrice  $\underline{D}$  devient alors scalaire). Pour écrire des expressions explicites, il faut distinguer ces deux cas. Si  $k_0 > 0$ , on utilise l'expression limite (44) de l'amplitude de diffusion  $\phi - \gamma$  réduite ; après triple intégration angulaire, il vient

$$\begin{aligned} \gamma \underset{k_0 > 0}{=} & \left( \frac{\hbar k_0}{2mc} \right)^2 \left[ \frac{128}{225} + \frac{32}{35} \tilde{e}_{kk}^2 + \frac{2944}{525} \tilde{e}_{kk} \tilde{e}_{\rho k} + \frac{384}{35} \tilde{e}_{\rho k}^2 + \left( \frac{64}{15} \tilde{e}_{kk} + \frac{896}{45} \tilde{e}_{\rho k} \right) \tilde{e}_x + \frac{32}{3} \tilde{e}_x^2 \right. \\ & \left. - \left( \frac{1088}{525} \tilde{e}_{kk} + \frac{128}{15} \tilde{e}_{\rho k} + \frac{64}{9} \tilde{e}_x \right) \tilde{e}_{\rho} + \left( \frac{32}{9} - \frac{1216}{525} \tilde{e}_{kk}^2 - \frac{128}{15} \tilde{e}_{kk} \tilde{e}_{\rho k} + \frac{128}{45} \tilde{e}_{\rho k}^2 - \frac{64}{9} \tilde{e}_{kk} \tilde{e}_x \right) \tilde{e}_{\rho}^2 + \frac{64}{15} \tilde{e}_{kk} \tilde{e}_{\rho}^3 + \frac{32}{15} \tilde{e}_{kk}^2 \tilde{e}_{\rho}^4 \right] \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\perp}(k) \underset{k \rightarrow k_0}{\underset{k_0 > 0}{\rightarrow}} & \left( \frac{\hbar k_0}{2mc} \right)^2 \left[ \frac{256}{225} + \frac{32}{175} \tilde{e}_{kk}^2 + \frac{256}{175} \tilde{e}_{kk} \tilde{e}_{\rho k} + \frac{1408}{315} \tilde{e}_{\rho k}^2 + \left( \frac{64}{45} \tilde{e}_{kk} + \frac{512}{45} \tilde{e}_{\rho k} \right) \tilde{e}_x \right. \\ & \left. + \frac{32}{3} \tilde{e}_x^2 - \left( -\frac{64}{105} \tilde{e}_{kk} + \frac{128}{45} \tilde{e}_{\rho k} + \frac{64}{9} \tilde{e}_x \right) \tilde{e}_{\rho} + \left( \frac{32}{9} + \frac{128}{175} \tilde{e}_{kk}^2 + \frac{128}{45} \tilde{e}_{kk} \tilde{e}_{\rho k} + \frac{256}{45} \tilde{e}_{\rho k}^2 \right) \tilde{e}_{\rho}^2 + \frac{64}{45} \tilde{e}_{kk} \tilde{e}_{\rho}^3 + \frac{32}{45} \tilde{e}_{kk}^2 \tilde{e}_{\rho}^4 \right] \end{aligned} \quad (65)$$

Comme on le voit sur la forme de Langevin module-direction (60,61), près de l'extrémum ( $e_k \simeq \hbar(k - k_0)/m_*c$ ), le nombre d'onde moyen  $\langle k(t) \rangle$  relaxe exponentiellement vers  $k_0$  si  $m_* > 0$ <sup>35</sup> ou s'en écarte exponentiellement si  $m_* < 0$ , et la direction moyenne du vecteur d'onde tend exponentiellement vers zéro, ceci avec des taux

$$\Gamma_k = \frac{\pi^5}{15} \gamma \frac{\hbar}{m_* \rho^2} \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)^8 \quad \text{et} \quad \Gamma_{\hat{\mathbf{k}}} = \frac{2\pi^5}{15} \mathcal{D}_{\perp}(k_0) \frac{c}{\rho^2 k_0^2} \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)^9 \quad (66)$$

35. La valeur stationnaire de  $\langle k \rangle$  diffère en général légèrement de  $k_0 > 0$ . D'une part,  $e_k$  peut contenir un petit terme cubique  $\propto (k - k_0)^3$  qui gauchit  $\Pi_{st}(k)$  et conduit à  $\langle k - k_0 \rangle \simeq T$  ; d'autre part, même en l'absence de ce terme cubique, le jacobien tridimensionnel  $k^2$  gauchit la distribution de probabilité  $k^2 \Pi_{st}(k)$  du nombre d'onde  $k$  et conduit à un écart du même ordre entre  $\langle k \rangle$  et  $k_0$ .



Si  $k_0 \equiv 0$  il faut utiliser plutôt l'expression limite (46) pour obtenir<sup>36</sup>

$$\mathcal{D}_{//}(k) \underset{k \rightarrow k_0}{\overset{k_0 \equiv 0}{\approx}} \mathcal{D}_{\perp}(k) \underset{k \rightarrow k_0}{\overset{k_0 \equiv 0}{\rightarrow}} \gamma \underset{k_0 \equiv 0}{=} \frac{8}{9} \left\{ \left[ \check{\epsilon}_{\rho} \left( 1 + \frac{m}{m_*} \check{\epsilon}_{\rho} \right) - \check{\epsilon}_x \right]^2 + 2\check{\epsilon}_x^2 \right\} \quad (67)$$

Comme le montre la forme cartésienne (59) de l'équation de Langevin, le vecteur d'onde moyen  $\langle \mathbf{k}(t) \rangle$  relaxe alors vers zéro avec un taux  $\Gamma_{\mathbf{k}}$  de même expression formelle que  $\Gamma_k$  au voisinage d'un minimum de la relation de dispersion, ou au contraire s'en écarte exponentiellement avec ce même taux au voisinage d'un maximum. Pour être complet, signalons que, par rapport au cas  $k_0 > 0$ , on gagne un ordre en précision dans les développements (62,63,67), l'écart relatif au terme dominant étant désormais  $\approx e_k^2$ .<sup>37</sup>

Dans l'approximation BCS,  $\gamma$  et  $\mathcal{D}_{\perp}(k_0)$  sont représentés en fonction de la force des interactions sur la figure 5a. Le cas  $k_0 > 0$  correspond au minimum de la relation de dispersion BCS (9) pour un potentiel chimique  $\mu > 0$ ; le cas  $k_0 = 0$  correspond soit au minimum de la relation de dispersion BCS pour  $\mu < 0$ , soit au maximum, c'est-à-dire au maximum relatif de la relation de dispersion, pour  $\mu > 0$ . On constate que le coefficient de frottement réduit du maxon  $\gamma_{\maxon}$  rejoint la branche  $\mu < 0$  du coefficient de frottement réduit du minimum  $\gamma_{\minon}$  de manière dérivable en  $\mu = 0$ , alors que  $\gamma_{\minon}$  y admet un point anguleux. Lorsque  $\mu = 0$ , la relation de dispersion de la quasi-particule varie quartiquement à l'endroit  $k = 0$  de son minimum; la relation (62) s'applique, avec une expression analytique simple du coefficient de frottement déduite de l'équation d'état BCS donnée dans la note 31,<sup>38</sup>

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \gamma \overset{\text{approx.BCS}}{=} \left\{ 36\pi^4 \left[ \frac{1}{\Gamma(1/4)^8} + \frac{1}{24\pi^4 - \Gamma(1/4)^8/4 + 3\Gamma(1/4)^{16}/(512\pi^4)} \right] \right\}^{-1} = 5,269\,833\dots \quad (68)$$

mais la vitesse de groupe réduite  $e_k$  et donc la force moyenne tendent vers zéro cubiquement avec  $k$ ; quant à la diffusion en impulsion, elle est isotrope en  $k = 0$ , comme le dit l'équation (67). À la limite unitaire, comme on le voit sur la figure 5a,  $\gamma_{\maxon}$  s'annule, ce qui nous paraît être un artefact de l'approximation BCS<sup>39</sup>, et une valeur plus précise de  $\gamma_{\minon}$ , allant au-delà de BCS, a été ajoutée à partir des valeurs mesurées  $k_0 \approx 0,92k_F$  et  $\Delta/\epsilon_F \approx 0,44$  [31],  $\mu \approx 0,376\epsilon_F$  [12] et de la valeur théorique issue d'un développement dimensionnel en  $\epsilon = 4 - d$ ,  $m_*/m = 0,56$  [32]. Dans la limite CBE  $k_F a \rightarrow 0^+$ , le gaz de fermions se réduit à un condensat de dimères de masse  $2m$  et de longueur de diffusion  $a_{dd} \approx 0,60a$  [33, 34], et la quasi-particule  $\gamma$  à un fermion surnuméraire non apparié de masse  $m_* = m$ , interagissant avec les dimères avec une longueur de diffusion  $a_{ad} \approx 1,18a$  [35, 36], d'où la limite exacte (non représentée sur la figure 5a):<sup>40</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \underset{k_F a \rightarrow 0^+}{=} \frac{\hbar^2}{2ma^2} \left[ -1 + \pi\rho a^2 a_{dd} + O(\rho a^3)^{3/2} \right] \\ \Delta_* \underset{k_F a \rightarrow 0^+}{=} \frac{\hbar^2}{2ma^2} \left[ 1 + \pi\rho a^2 (3a_{ad} - a_{dd}) + O(\rho a^3)^{3/2} \right] \end{array} \right\} \implies \gamma \underset{k_F a \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 8 \left( \frac{a_{ad}}{a_{dd}} \right)^2 \left( 1 - \frac{3a_{ad}}{a_{dd}} \right)^2 \approx 750 \quad (69)$$

36. Pour montrer que  $\mathcal{D}_{\perp}(k) - \mathcal{D}_{//}(k) \rightarrow 0$  lorsque  $k \rightarrow k_0 \equiv 0$ , on applique la remarque de la note 44 à la fonction  $f(u, u', w) = g(w)[2(1-w) - 3(u-u')^2]$  où  $g(w)$  est quelconque. On a alors bien  $\int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 du' \int_0^{2\pi} d\alpha f(u, u', w) = 0$  car  $2(1-w) - 3(u-u')^2 = 2(1 - \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{q}}') - 3[\hat{\mathbf{k}} \cdot (\hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{q}}')]^2$  est de moyenne nulle sur  $\hat{\mathbf{k}}$  à  $\hat{\mathbf{q}}$  et  $\hat{\mathbf{q}}'$  fixés donc à  $w$  fixé.

37. On le montre en poussant un cran plus loin le développement (46),  $R_k(u, u', w) \underset{k \rightarrow 0}{\overset{k_0 \equiv 0}{\approx}} \frac{1}{2}(\check{\epsilon}_x + f\check{\epsilon}_{\rho}w) + \frac{\hbar k}{2mc}(u+u')(wf^2 + \check{\epsilon}_{\rho}\check{\epsilon}_{\rho k}) + O(k^2)$  avec  $f = 1 + (m/m_*)\check{\epsilon}_{\rho}$  et  $\check{\epsilon}_{\rho k} = \lim_{k \rightarrow 0}(mc/\hbar k)e_{\rho k} = \rho d(m/m_*)/d\rho$ , et en utilisant dans les intégrales angulaires sur  $(u, u', \alpha)$  l'imparité de l'intégrande sous la transformation  $(u, u', \alpha) \rightarrow (-u, -u', \alpha)$ , qui préserve  $w$  et  $(u-u')^2$ .

38. À longueur de diffusion  $a > 0$  fixée, la limite  $\mu \rightarrow 0^+$  dans la théorie BCS correspond à  $\rho \rightarrow \rho_0^+$ , avec  $\rho_0 a^3 = [\Gamma(1/4)]^8/(1536\pi^4)$ ; donnons ici seulement les lois d'échelle  $k_0 \approx (\rho - \rho_0)^{1/2}$  et  $1/m_* \approx \rho - \rho_0$ , qui montrent que  $(\hbar\rho dk_0/d\rho)^2/m_*$  a une limite finie et non nulle.

39. D'après la théorie BCS, il y aurait à la limite unitaire une compensation dans  $R_k(u, u', w)$  jusqu'à l'ordre  $k$  lorsque  $k \rightarrow 0$ ,  $R_k \sim 2\delta^2 k^2 (w + 2uu')/(9(3 + 2i\delta))$  où  $\delta = \Delta/mc^2 = \text{cte}$  par invariance d'échelle, si bien que  $\mathcal{F}(k) \approx (\hbar k/mc)^5$  et  $\mathcal{D}_{//,\perp}(k) \approx (\hbar k/mc)^4$ , la matrice de diffusion en impulsion restant non scalaire à cet ordre. Dans une théorie exacte, on aurait  $e_k = mc^2 G((\hbar k/mc)^2)$ , où la fonction  $G$  est lisse mais inconnue, en supposant que le maxon existe et soit stable. Alors  $R_k(u, u', w) \overset{1/a=0}{\underset{k \rightarrow 0}{\approx}} \frac{w}{9} G(0)[3 + 4G(0)G'(0)]\{1 + \frac{\hbar k}{2mcG(0)}(u+u')[3 + 4G(0)G'(0)]\} + O(k^2)$ . Dans les notations usuelles,  $\check{\epsilon}_x = 0$ ,  $G(0) = 3\check{\epsilon}_{\rho}/2 = \Delta_*/mc^2$  et  $G'(0) = m/2m_*$  si bien que  $G(0)G'(0) = \Delta_*/2m_*c^2$ , égal à  $-3/4$  dans la théorie BCS.

40. En effet, dans la limite CBE, l'état fondamental du gaz a une énergie  $E_0 \approx (N/2)(-\hbar^2/m_0 a^2) + (N/2)(N/2 - 1)g_{dd}/(2L^3)$  et l'état excité par brisure d'un dimère en deux atomes libres de vecteurs d'onde  $\pm \mathbf{k}$  a une énergie  $E_1 \approx (N/2 - 1)(-\hbar^2/m_0 a^2) + (N/2 - 1)(N/2 - 2)g_{dd}/(2L^3) + 2 \times \hbar^2 k^2/2m + 2 \times g_{ad}(N/2 - 1)/L^3$ , où  $g_{dd} = 4\pi\hbar^2 a_{dd}/m_d$  et  $g_{ad} = 2\pi\hbar^2 a_{ad}/m_f$  sont les constantes de couplage dimère-dimère et atome-dimère,  $m_f = mm_d/(m + m_d) = 2m/3$  est la masse réduite d'un atome et d'un dimère,  $N$  est le nombre total de fermions. On l'aura compris, les atomes fermioniques et les dimères bosoniques étant des particules discernables, il n'y a pas d'effet de groupement Hanbury-Brown et Twiss dans leur énergie de couplage de champ moyen. À la limite thermodynamique,  $dE_0/dN \rightarrow \mu$  et  $(E_1 - E_0)/2 \rightarrow \epsilon_{\mathbf{k}} \approx \Delta_* + \hbar^2 k^2/2m_*$ . Notons que  $\check{\epsilon}_x = O(\rho^{1/2})$ .



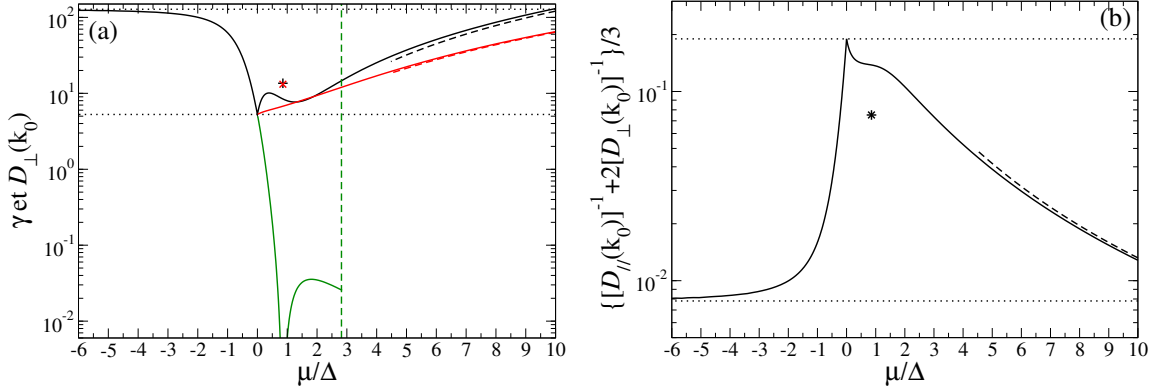


FIGURE 5: (a) Coefficient de frottement réduit  $\gamma$  et coefficient de diffusion en impulsion transverse réduit  $\mathcal{D}_\perp(k_0)$  à l'endroit  $k_0$  d'un extrémum de la relation de dispersion  $\epsilon_k$ , pour une quasi-particule  $\gamma$  fermionique dans un gaz non polarisé de fermions de masse  $m$  condensé par paires à très basse température, en fonction de la force des interactions dans le gaz repérée par le rapport de son potentiel chimique  $\mu$  et de son paramètre d'ordre  $\Delta$ . Le coefficient de diffusion en impulsion longitudinal réduit  $\mathcal{D}_\parallel(k_0)$  est identiquement égal à  $\gamma$ , voir l'équation (63). Trait plein noir :  $\gamma$  à l'endroit du minimum et dans l'approximation BCS ( $k_0 = 0$  si  $\mu < 0$ ,  $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$  si  $\mu > 0$ ). Trait plein vert :  $\gamma$  à l'endroit du maximum relatif (maxon) et dans l'approximation BCS ( $k_0 = 0$ ,  $\mu > 0$ ). Trait plein rouge :  $\mathcal{D}_\perp(k_0)$  dans l'approximation BCS là où  $k_0 > 0$  (ailleurs, il se confond avec  $\gamma$ ); il croise et surpasse le trait noir donc  $\mathcal{D}_\parallel(k_0)$  autour de  $\mu/\Delta = 1,6$ . On a utilisé les équations (64), (65) ou (67) suivant les cas. Tireté vertical vert : limite de stabilité du maxon comme sur la figure 2a. Symboles : coordonnées plus précises (au-delà de l'approximation BCS) des coefficients  $\gamma$  (signe plus noir) et  $\mathcal{D}_\perp(k_0)$  (croix rouge) à l'endroit du minimum à la limite unitaire ( $\mu/\Delta \approx 0,85$ ,  $\gamma \approx 13,6$ ,  $\mathcal{D}_\perp(k_0) \approx 13,2$ ). Pointillé horizontal supérieur : valeur de  $\gamma$  dans la limite CBE d'après la théorie BCS [ $\approx 5,8$  fois plus faible que la valeur exacte (69) non représentée ici]. Pointillé horizontal inférieur : limite (68) des différentes branches de  $\gamma$  et de  $\mathcal{D}_\perp(k_0)$  en  $\mu = 0$  d'après la théorie BCS. Les courbes tiretées dans le régime de couplage faible  $\mu/\Delta \gg 1$  sont issues de la relation de dispersion (9) et des formes limites BCS  $\Delta \approx 8e^{-2}\epsilon_F \exp[-\pi/(2k_F|a|)]$ ,  $\mu \approx \epsilon_F$ . (b) Coefficient de diffusion spatiale réduit de la quasi-particule  $\gamma$  à l'équilibre dans le gaz de phonons, c'est-à-dire numérateur du dernier membre de l'expression (86). Trait plein noir : approximation BCS. Pointillés horizontaux : sa limite en  $\mu/\Delta = 0$  ou  $\mu/\Delta \rightarrow -\infty$ . Tireté : sa forme limite en couplage faible [relation de dispersion (9) et formes limites BCS  $\Delta \approx 8e^{-2}\epsilon_F \exp[-\pi/(2k_F|a|)]$ ,  $\mu \approx \epsilon_F$ ]. Étoile : estimation plus précise que BCS à la limite unitaire.

La théorie BCS en est très loin (elle sous-estime la limite de  $\gamma$  d'un facteur  $\approx 6$ ) car elle évalue fort mal les longueurs de diffusion dimère-dimère et atome-dimère,  $a_{\text{dd}}^{\text{BCS}} = 2a$  et  $a_{\text{ad}}^{\text{BCS}} = 8a/3$ .

*Force moyenne à vitesse nulle.* À l'endroit  $k_0$  du minimum de la relation de dispersion  $\epsilon_k$ , la vitesse de groupe de la quasi-particule  $\gamma$  est nulle. Si  $k_0 = 0$ , la force moyenne subie par  $\gamma$  est alors rigoureusement nulle, par invariance par parité. Si  $k_0 > 0$ , en revanche, la force moyenne subie n'est pas nulle,  $F(k_0) \neq 0$ . Plus précisément, à basse température, elle s'annule bien à l'ordre  $T^8$ , comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, mais pas à l'ordre  $T^9$ , et l'on peut obtenir son expression exacte à cet ordre sans avoir besoin de connaître l'amplitude de diffusion avec les phonons au-delà de son ordre dominant  $\approx T$ ,

$$F(k_0) \underset{T \rightarrow 0}{\underset{k_0 > 0}{\approx}} \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dk} \mathcal{D}_\parallel(k_0) + \frac{2}{\hbar k_0} [\mathcal{D}_\parallel(k_0) - \mathcal{D}_\perp(k_0)] \underset{T \rightarrow 0}{\underset{k_0 > 0}{\approx}} \frac{\pi^5}{15} \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)^9 \hbar c \rho^{-2} \left[ \frac{d}{dk} \mathcal{D}_\parallel(k_0) + \frac{2}{k_0} (\mathcal{D}_\parallel(k_0) - \mathcal{D}_\perp(k_0)) \right] \quad (70)$$

L'ordre  $T^9$  des coefficients de diffusion en impulsion est en effet déjà connu. Il conduit à un troisième membre non nul se déduisant des équations (63,64,65) et de l'expression suivante,

$$\begin{aligned} k_0 \frac{d}{dk} \mathcal{D}_\parallel(k_0) = & \left( \frac{\hbar k_0}{2mc} \right)^2 \frac{64}{4725} \{ 630c_1 \tilde{e}_{kk}^2 \tilde{e}_\rho^4 - 3(228c_1 - 210c_2 - 175c_3 - 81) \tilde{e}_{kk}^2 \tilde{e}_\rho^2 + 420(\tilde{e}_\rho + 7c_1 \tilde{e}_{kk}^{-1}) \tilde{e}_{\rho k}^3 \\ & + 42[3\tilde{e}_{kk}^3 + 5(3c_1 + 1)\tilde{e}_{kk}] \tilde{e}_\rho^3 + 3(90c_1 - 138c_2 - 105c_3 + 19) \tilde{e}_{kk}^2 - 3(102c_1 - 210c_2 - 175c_3 - 47) \tilde{e}_{kk} \tilde{e}_\rho \\ & - 30[7c_1 \tilde{e}_\rho^2 - 129c_1 + 98c_2 - 33 - 7(6\tilde{e}_{kk} - 5c_1 \tilde{e}_{kk}^{-1}) \tilde{e}_\rho] \tilde{e}_{\rho k}^2 - 3[105(8c_1 - 2c_2 + 1) \tilde{e}_{kk} \tilde{e}_\rho^2 - (552c_1 - 750c_2 - 490c_3 + 45) \tilde{e}_{kk} \\ & - 7(6\tilde{e}_{kk}^2 - 60c_1 + 50c_2 - 5) \tilde{e}_\rho] \tilde{e}_{\rho k} - 105[10c_1 \tilde{e}_{kk} \tilde{e}_\rho^2 - (6c_1 - 14c_2 - 15c_3 - 3) \tilde{e}_{kk} - 30c_1 \tilde{e}_{kk}^{-1} \tilde{e}_{\rho k}^2 - (10\tilde{e}_{kk} \tilde{e}_\rho + 28c_1 - 30c_2 + 9) \tilde{e}_{\rho k}] \tilde{e}_x \\ & + 5\lambda [81\tilde{e}_{kk}^2 \tilde{e}_\rho^2 - 49\tilde{e}_{kk}^2 + 63\tilde{e}_{kk} \tilde{e}_\rho - 294\tilde{e}_{\rho k}^2 - 63(3\tilde{e}_{kk} + 5\tilde{e}_{\rho k}) \tilde{e}_x + 3(35\tilde{e}_{kk} \tilde{e}_\rho^2 - 87\tilde{e}_{kk} + 35\tilde{e}_\rho) \tilde{e}_{\rho k}] + 84 \} \quad (71) \end{aligned}$$

qui a été obtenue par dérivation par rapport à  $k$  de la première composante de l'identité (56), et fait intervenir les coefficients adimensionnés supplémentaires  $c_1 = k_0 b$ ,  $c_2 = \rho m_*^{-1} d m_* / d \rho$  et  $c_3 = \rho^2 k_0^{-1} d^2 k_0 / d \rho^2$ , où la longueur  $b$  apparaît

à l'ordre  $(k - k_0)^3$  dans le développement (2) de  $\epsilon_k$ .<sup>41</sup> Dans l'approximation BCS, nous trouvons que l'expression entre crochets dans le troisième membre de l'équation (70) est positive et qu'elle tend vers zéro ( $+\infty$ ) en unités de  $1/k_F$  lorsque  $\mu/\Delta \rightarrow 0(+\infty)$ ; nous n'avons pas jugé utile de la représenter ici. Une conséquence physiquement parlante des résultats (62,70) est que, dans le cas  $k_0 > 0$ , la force moyenne subie par la quasi-particule  $\gamma$  à basse température s'annule un peu à côté de  $k_0$ , à une distance en nombre d'onde  $k - k_0$  ou à une vitesse  $v_k$  proportionnelle à la température.

Pour établir l'équation (70), le plus simple est de passer par la solution stationnaire  $\Pi_0$  de l'équation de Fokker-Planck (50) vue comme une équation de continuité. Cette distribution  $\Pi_0(k)$ , invariante par rotation, s'obtient aisément en exprimant que le courant de probabilité  $\mathbf{j}(\mathbf{k})$  qu'elle porte dans l'espace de Fourier est nul. De l'expression générale de la composante selon  $O_i$ ,  $j_i(\mathbf{k}) = F_i(\mathbf{k})\Pi(\mathbf{k})/\hbar - \sum_j \frac{\partial}{\partial k_j} [D_{ij}(\mathbf{k})\Pi(\mathbf{k})]/\hbar^2$ , nous tirons après division par  $\Pi_0(k)/\hbar$  et utilisation des formes sphériques (52) :

$$F(k) = \frac{2}{\hbar k} [D_{//}(k) - D_{\perp}(k)] + \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dk} D_{//}(k) + D_{//}(k) \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dk} \ln \Pi_0(k) \quad (72)$$

Nous l'avons dit,  $\Pi_{st}(\mathbf{k}) \propto \exp(-\beta\epsilon_k)$  est solution stationnaire exacte de l'équation maîtresse. Ce n'est cependant pas une solution stationnaire exacte de l'équation de Fokker-Planck, puisque cette dernière résulte d'un développement tronqué de l'équation maîtresse à basse température. En estimant l'erreur commise, sachant que  $\Pi_0(k)$  a une largeur en  $k$  d'ordre  $T^{1/2}$  autour de  $k_0$ ,<sup>42</sup> nous aboutissons à la relation exacte dans la largeur de la distribution :

$$F(k) \stackrel{k-k_0=O(T^{1/2})}{T \rightarrow 0} \frac{2}{\hbar k} [D_{//}(k) - D_{\perp}(k)] + \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dk} D_{//}(k) - \beta D_{//}(k) \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dk} \epsilon_k + O(T^{9+1/2}) \quad (73)$$

Il suffit de l'appliquer en  $k = k_0$ , où la dérivée de  $\epsilon_k$  s'annule, pour trouver le résultat (70)<sup>43</sup>.

On peut aussi établir (70) par un calcul assez long, en repartant de l'expression générale (51) de la force moyenne et en la développant à l'ordre  $T^9$  dans le cas particulier  $k = k_0$ . Il faut exprimer  $q'$  en fonction de  $q$  à l'aide de la conservation de l'énergie un cran plus loin que dans le calcul de  $\mathcal{F}(k)$ ,  $q' = q - \hbar q^2(u' - u)^2 / (2m_*c) + O(q^3)$ , et surtout utiliser une expression exactement microréversible de l'amplitude de diffusion  $\phi - \gamma$  sur la couche d'énergie :

$$\mathcal{A}(\gamma : \mathbf{k}, \phi : \mathbf{q} \rightarrow \gamma : \mathbf{k}', \phi : \mathbf{q}') = \frac{\hbar c}{\rho} (qq')^{1/2} R_{\|\frac{\mathbf{k}+\mathbf{k}'}{2}\|} \left( \hat{\mathbf{q}} \cdot \frac{\mathbf{k} + \mathbf{k}'}{\|\mathbf{k} + \mathbf{k}'\|}, \hat{\mathbf{q}}' \cdot \frac{\mathbf{k} + \mathbf{k}'}{\|\mathbf{k} + \mathbf{k}'\|}, \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{q}}' \right) \quad (74)$$

où  $\mathbf{k} + \mathbf{q} = \mathbf{k}' + \mathbf{q}'$  et la fonction  $R_k(u, u', w)$  est celle de l'équation (38). En notant  $R_{k_0}^2$  et  $\frac{d}{dk} R_{k_0}^2$  les valeurs de la fonction  $R_k^2$  et de sa dérivée par rapport à  $k$  en  $k = k_0$ , on obtient pour le premier membre de l'équation (70) :

$$F(k_0) \stackrel{k_0 > 0}{T \rightarrow 0} \frac{4\pi^5}{15} \frac{\hbar c}{\rho^2 k_0} \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)^9 \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 du' \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \left[ \frac{3\hbar k_0}{m_* c} u'(u' - u)^2 R_{k_0}^2 + (u' - u)^2 k_0 \frac{d}{dk} R_{k_0}^2 + (1 - w)(u - u') \left( \frac{\partial R_{k_0}^2}{\partial u} - \frac{\partial R_{k_0}^2}{\partial u'} \right) - (u - u')^2 \left( u \frac{\partial R_{k_0}^2}{\partial u} + u' \frac{\partial R_{k_0}^2}{\partial u'} \right) \right] \quad (75)$$

41. On calcule d'abord la dérivée des fonctions  $e_\rho$ , etc, en  $k = k_0$  : en notant  $\tilde{e}_\rho = k_0 de_\rho(k_0)/dk$ , etc, on trouve  $\tilde{e}_\rho = -\tilde{e}_\rho + \tilde{e}_{\rho k}$ ,  $\tilde{e}_k = \tilde{e}_{kk}$ ,  $\tilde{e}_{kk} = (1 + 2c_1)\tilde{e}_{kk}$ ,  $\tilde{e}_{\rho k} = 2c_1\tilde{e}_{\rho k} - c_2\tilde{e}_{kk}$ ,  $\tilde{e}_x = -\tilde{e}_x - (\lambda + 2c_2)\tilde{e}_{\rho k} - c_3\tilde{e}_{kk} + 2c_1\tilde{e}_{\rho k}^2/\tilde{e}_{kk}$ ; les valeurs  $\tilde{e}_\rho$ , etc, en  $k = k_0$  sont données dans l'équation (43). Puis on développe l'amplitude réduite (40) en  $k_0$  au premier ordre en  $k - k_0$ . Enfin, on insère le développement obtenu dans la première composante de l'équation (56), que l'on développe de même, et on intègre sur  $\alpha$ ,  $u$  et  $u'$ , en utilisant la première intégrale de la note 30.

42. Remarquons en effet que les premiers termes négligés dans l'expression du courant selon  $O_i$  sont de la forme  $\frac{\partial^2}{\partial k_j \partial k_k} [E_{ijk}(\mathbf{k})\Pi_0(k)]/\hbar^2$  et  $\frac{\partial^3}{\partial k_j \partial k_k \partial k_l} [G_{ijkl}(\mathbf{k})\Pi_0(k)]/\hbar^3$ , où les tenseurs  $E_{ijk}$  et  $G_{ijkl}$  sont des moments d'ordre 3 et 4 du changement de vecteur d'onde  $\mathbf{q} - \mathbf{q}'$  accompagnant la diffusion d'un phonon, alors que  $F$  et  $D$  en sont les moments d'ordre 1 et 2, voir l'équation (51). En procédant comme pour la force et la diffusion, on trouve qu'à l'ordre dominant en  $T$ ,  $E_{ijk} \propto T^{10}\mathcal{E}_{ijk}$  et  $G_{ijkl} \propto T^{11}\mathcal{G}_{ijkl}$ , où les fonctions réduites  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{G}$ , indépendantes de la température, ont une largeur en  $k$  d'ordre  $T^0$ ,  $\mathcal{E}$  s'annulant linéairement en  $k = k_0$  ( $\mathcal{E} \approx e_k$ ) et  $\mathcal{G}$  y ayant une limite finie et non nulle. Alors chaque différentiation de  $\Pi_0(k)$  par rapport à  $\mathbf{k}$  sort un facteur  $\approx T^{-1/2}$ , et le facteur  $e_k$  est de l'ordre de  $T^{1/2}$  sur la largeur de  $\Pi_0(k)$ , si bien que  $\frac{\partial^2}{\partial k_j \partial k_k} [E_{ijk}(\mathbf{k})\Pi_0(k)] \approx T^{-1+10+1/2}\Pi_0$  et  $\frac{\partial^3}{\partial k_j \partial k_k \partial k_l} [G_{ijkl}(\mathbf{k})\Pi_0(k)] \approx T^{-3/2+11}\Pi_0$  et l'on tombe sur l'équation (73).

43. En identifiant les termes d'ordre  $k - k_0$  puis d'ordre  $(k - k_0)^2$  dans la relation (73), on montre qu'il existe un coefficient  $\gamma$  déjà introduit et un nouveau coefficient  $\zeta$  tels que  $\mathcal{F}(k) = -(\gamma e_k + \zeta e_k^2 + O(e_k^3))$  et  $\mathcal{D}_{//}(k) = \gamma + \zeta e_k + O(e_k^2)$ , si bien que  $\mathcal{F}(k)/\mathcal{D}_{//}(k) = -e_k + O(e_k^3)$  lorsque  $k \rightarrow k_0$ . On arrive aux mêmes résultats par développement limité des expressions (55,56) à l'ordre sous-dominant en  $e_k$ , en considérant  $R_k$  comme une fonction de  $e_k$  plutôt que de  $k$ . La valeur de  $\zeta$  se déduit aisément de l'équation (71).

Les différents termes au second membre de (70) se déduisent à l'ordre  $T^9$  de l'expression (56) et de la dérivée par rapport à  $k$  de sa première composante, le tout pris en  $k = k_0$  ( $e_k = 0$ ). Pour la forme (40) de la fonction  $R_k$ , il y a bien accord à l'ordre  $T^9$  entre les deux premiers membres de l'équation (70).<sup>44</sup> Ce calcul explicite permet de comprendre comment on peut obtenir de manière exacte la force moyenne à l'ordre sous-dominant  $T^9$  sans connaître l'amplitude de diffusion  $\mathcal{A}$  à l'ordre sous-dominant  $T^2$ . C'est parce qu'on s'est placé en  $k = k_0$  : à cet endroit, la contribution à  $F(k)$  de la première correction à  $\mathcal{A}$  s'annule par antisymétrie de l'intégrande sous l'échange de  $u$  et  $u'$ .

*Près de la vitesse du son.* À force des interactions fixée entre atomes du superfluide, l'un des bords du domaine de stabilité de la quasi-particule  $\gamma$  dans l'espace des vecteurs d'onde (en rouge sur la figure 2) correspond au régime sonique d'une vitesse de groupe égale en valeur absolue à la vitesse du son. Or, nos expressions (55,56) de la force moyenne et de la diffusion en impulsion réduites divergent à la limite sonique  $e_k \rightarrow \pm 1$ , comme le laissent pressentir les dénominateurs  $1 - ue_k$  et  $1 - u'e_k$ .

Pour le voir sur la force moyenne, nous effectuons dans les intégrales les changements de variables  $u = 1 - x$  et  $u' = 1 - (1 - e_k)x'$  si  $e_k \rightarrow 1^-$ ,  $u = x - 1$  et  $u' = -1 + (1 + e_k)x'$  si  $e_k \rightarrow -1^+$ , puis nous passons à la limite dans l'intégrande à  $x, x'$  fixés, ce qui fait disparaître la dépendance en l'angle azimutal  $\alpha$ , pour obtenir après intégration sur  $x' \in \mathbb{R}^+$  (effectuer l'intégration sur  $x$  est élémentaire mais ne conduit pas à une expression plus compacte) :<sup>45</sup>

$$\mathcal{F}(k) \underset{e_k \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{1}{24} \left( \frac{\hbar k}{mc} \right)^2 \frac{(1 + e_\rho)^2}{(1 - e_k)^6} \int_0^2 dx x^2 \left\{ e_{kk}(1 + e_\rho) + \left[ e_{\rho k} - \frac{1 + \lambda}{2} - (2 + e_\rho)e_{kk} \right] x + e_{kk}x^2 \right\}^2 \quad (76)$$

$$\mathcal{F}(k) \underset{e_k \rightarrow -1^+}{\sim} \frac{1}{24} \left( \frac{\hbar k}{mc} \right)^2 \frac{(1 - e_\rho)^2}{(1 + e_k)^6} \int_0^2 dx x^2 \left\{ e_{kk}(1 - e_\rho) + \left[ e_{\rho k} + \frac{1 + \lambda}{2} - (2 - e_\rho)e_{kk} \right] x + e_{kk}x^2 \right\}^2 \quad (77)$$

La force moyenne est négative dans la limite  $e_k \rightarrow 1^-$ . Or cette limite correspond toujours à la borne supérieure  $k_{\text{sup}}$  du domaine de stabilité en nombre d'onde de la quasi-particule  $\gamma$ , comme on peut le voir sur la figure 2. La force subie par la quasi-particule  $\gamma$  près du bord tend donc systématiquement à éloigner son vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  de la zone supersonique<sup>46</sup>. Inversement, quand le domaine de stabilité de la quasi-particule  $\gamma$  présente un bord  $e_k = -1$ , c'est toujours une borne inférieure  $k_{\text{inf}}$ ; la force moyenne est positive dans la limite  $e_k \rightarrow -1^+$  et repousse là aussi la quasi-particule de la zone supersonique. Nous aurions pu cependant tomber sur la conclusion inverse (et physiquement incorrecte) si nous avions ignoré la ligne d'instabilité  $SC$  subsonique (en vert sur la figure 2c) : pour  $\Delta/\mu < (\Delta/\mu)_S$ , c'est-à-dire en dessous du point sommital S sur la figure, on aurait alors  $e_k = -1$  en un bord *supérieur* du domaine de stabilité, et la force moyenne près du bord rapprocherait  $\mathbf{k}$  de la frontière sonique.

44. Cette conclusion n'est pas propre à la forme (40) mais repose en définitive sur l'identité  $\int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 du' \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} ((u - u')[(1 - w)(\partial_u - \partial_{u'}) - (u - u')(u\partial_u + u'\partial_{u'})]R_{k_0}^2 - [3(u - u')^2 - 2(1 - w)]R_{k_0}^2) = 0$ . Pour l'établir, on remarque d'abord que  $\frac{1}{4} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 du' \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} f(u, u', w) = \langle f(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}', \hat{\mathbf{k}}) \rangle$  où  $\langle \dots \rangle$  est la moyenne prise uniformément sur la sphère unité pour les trois directions  $\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}'$  et  $\hat{\mathbf{k}}$ ,  $f$  étant une fonction invariante par rotation de ces trois directions ou, ce qui revient au même, une fonction des trois produits scalaires  $u = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}, u' = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}'$  et  $w = \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{q}}'$ . Alors si  $\hat{\mathbf{k}} \mapsto \mathcal{T}_{\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}'}(\hat{\mathbf{k}})$  est un difféomorphisme de la sphère unité dans la sphère unité dépendant paramétriquement de  $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}')$  et de jacobien  $J_{\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}'}(\hat{\mathbf{k}})$ , on a  $\langle f(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}', \hat{\mathbf{k}}) \rangle = \langle J_{\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}'}(\hat{\mathbf{k}}) f(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}', \mathcal{T}_{\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}'}(\hat{\mathbf{k}})) \rangle$ . Il reste à appliquer cette identité à la fonction  $f(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}', \hat{\mathbf{k}}) = \hat{\mathbf{k}} \cdot (\hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{q}}') R_{k_0}^2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}', \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{q}}')$  et au difféomorphisme  $\mathcal{T}_{\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}'}(\hat{\mathbf{k}}) = (\hat{\mathbf{k}} + \eta \frac{\hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{q}}'}{2}) / \|\hat{\mathbf{k}} + \eta \frac{\hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{q}}'}{2}\| = \hat{\mathbf{k}}[1 - \eta(u - u')/2] + \eta(\hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{q}}')/2 + O(\eta^2)$  de jacobien  $J_{\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}'}(\hat{\mathbf{k}}) = 1 - \eta(u - u') + O(\eta^2)$ .

45. Supposons que  $e_k \rightarrow 1^-$  pour fixer les idées et décomposons le domaine d'intégration  $[-1, 1]^2$  sur les cosinus  $(u, u')$  des angles polaires en un grand carré  $[-1, 1 - \epsilon] \times [-1, 1 - \epsilon]$ , un petit carré  $[1 - \epsilon, 1] \times [1 - \epsilon, 1]$  et deux rectangles très allongés, l'un couché  $[-1, 1 - \epsilon] \times [1 - \epsilon, 1]$  et l'autre debout  $[1 - \epsilon, 1] \times [-1, 1 - \epsilon]$  où  $0 < \epsilon \ll 1$  est fixé lorsque  $e_k \rightarrow 1^-$ , puis tend vers zéro à la fin des calculs. La contribution du grand carré a une limite finie lorsque  $e_k \rightarrow 1^-$  donc est toujours négligeable. Dans le cas de la force, la contribution du petit carré est  $\approx \epsilon^3/(1 - e_k)^6$  donc petite, celle du rectangle couché  $\approx \epsilon^0/(1 - e_k)^6$  donc dominante, celle du rectangle debout  $\approx (1 - e_k)^0/\epsilon^3$  donc négligeable. Ceci justifie la procédure utilisée dans le texte. Dans le cas de la diffusion, il y a deux types de contributions, celle de même type que dans  $\mathcal{F}(k)$  et celle mettant en jeu la fonction  $\Phi_8$ . La première se traite comme précédemment. Dans la seconde, on trouve que la contribution dominante provient du petit carré et qu'elle diverge dans  $\mathcal{D}_{\parallel}$  comme  $(1 - e_k)^{-3}$  avec un préfacteur contenant l'intégrale  $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dx' (x - x')^2 \Phi_8(\frac{1+x}{1+x'}) / [(1+x)(1+x')]^{7/2}$ , et dans  $\mathcal{D}_{\perp}$  comme  $(1 - e_k)^{-2}$  avec un préfacteur contenant l'intégrale  $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dx' [(1+x)(1+x')(x+x') - (x-x')^2] \Phi_8(\frac{1+x}{1+x'}) / [(1+x)(1+x')]^{7/2}$  (ceci résulte des changements de variables  $u = 1 - x(1 - e_k)$  et  $u' = 1 - x'(1 - e_k)$  et du passage à la limite  $e_k \rightarrow 1^-$  à  $x$  et  $x'$  fixés dans l'intégrande); les contributions des rectangles sont négligeables en vertu de la majoration  $\Phi_8(x) \leq (8\pi^8/15)x^{-7/2}$  sur  $\mathbb{R}^{++}$  et de l'équivalent  $\Phi_8(x) \sim (8\pi^8/15)x^{7/2}$  lorsque  $x \rightarrow 0^+$ , qui montrent aussi que  $\Phi_8(x)$  est bornée et que les intégrales en préfacteur sont finies.

46. On arrive à la même conclusion en raisonnant sur le nombre d'onde moyen : d'après l'équation (60),  $d(\hbar k)/dt = \langle F(k) + 2D_{\perp}(k)/\hbar k \rangle$ , mais le terme de diffusion transverse, de même exposant de divergence sonique  $-6$  que le terme de force, est négligeable car sous-dominant en température.

Dans le cas de la diffusion en impulsion, on montre d'abord que la contribution de la fonction  $\Phi_8$  dans l'expression (56) est sous-dominante dans la limite sonique (voir la note 45), puis on applique au reste la même procédure que pour la force, ce qui donne

$$\left(\frac{\mathcal{D}_{\parallel}(k)}{\mathcal{D}_{\perp}(k)}\right)_{e_k \rightarrow 1^-} \sim \frac{225 \zeta(9)}{\pi^8} \left(\frac{\hbar k}{mc}\right)^2 (1+e_{\rho})^2 \frac{6(1-e_k)^{-7}}{(1-e_k)^{-6}} \int_0^2 dx x^3 \left\{ e_{kk}(1+e_{\rho}) + \left[ e_{\rho k} - \frac{1+\lambda}{2} - (2+e_{\rho})e_{kk} \right] x + e_{kk}x^2 \right\}^2 \quad (78)$$

$$\left(\frac{\mathcal{D}_{\parallel}(k)}{\mathcal{D}_{\perp}(k)}\right)_{e_k \rightarrow 1^+} \sim \frac{225 \zeta(9)}{\pi^8} \left(\frac{\hbar k}{mc}\right)^2 (1-e_{\rho})^2 \frac{6(1+e_k)^{-7}}{(1+e_k)^{-6}} \int_0^2 dx x^3 \left\{ e_{kk}(1-e_{\rho}) + \left[ e_{\rho k} + \frac{1+\lambda}{2} - (2-e_{\rho})e_{kk} \right] x + e_{kk}x^2 \right\}^2 \quad (79)$$

Le coefficient de diffusion en impulsion longitudinal diverge donc plus rapidement que la force moyenne. Faut-il le préciser, les résultats (76,77, 78,79) ne valent que si l'on fait tendre d'abord la température du gaz vers zéro, comme dans l'équation (53), puis la vitesse de la quasi-particule  $\gamma$  vers  $\pm c$ . Rien n'indique en effet que la divergence se maintienne dans une interversion des limites.

*Diffusion spatiale.* On se place désormais aux temps suffisamment longs pour que la distribution en vecteur d'onde de la quasi-particule  $\gamma$  ait atteint son équilibre thermique. La direction  $\hat{\mathbf{k}}$  du vecteur d'onde est de loi uniforme sur la sphère unité. Le nombre d'onde  $k$  de la quasi-particule déviant faiblement de la position du minimum  $k_0$  de la relation de dispersion,  $k - k_0 \approx T^{1/2}$ , on peut remplacer la force moyenne  $F(k)$  à l'ordre  $T^8$  par son approximation linéaire (62) et les coefficients de diffusion en impulsion par leur valeur en  $k_0$ . Il existe cependant un degré de liberté instationnaire dont nous n'avons pas parlé jusqu'à présent, et dont la distribution de probabilité s'étale indéfiniment à la limite thermodynamique. Il s'agit du vecteur position  $\mathbf{r}(t)$  de la quasi-particule  $\gamma$ , dont la dérivée temporelle  $\mathbf{v}(t)$  n'est autre que la vitesse de groupe de la quasi-particule  $\gamma$  :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{v}(t) = \frac{1}{\hbar} \frac{d\epsilon_k}{dk} \hat{\mathbf{k}} \quad (80)$$

Le changement du vecteur position entre 0 et  $t$  est donné par l'intégrale du vecteur vitesse entre ces deux instants ; sa variance est donc donnée par une intégrale double temporelle de la fonction de corrélation de la vitesse à deux temps. À l'équilibre, cette fonction de corrélation ne dépend que de la différence des temps. Nous posons donc en toute généralité (sans tenir compte du fait que les vitesses moyennes  $\langle v_i \rangle$  et  $\langle v_j \rangle$  sont évidemment nulles par isotropie de l'équilibre) :

$$C_{ij}(\tau) = \langle v_i(\tau)v_j(0) \rangle - \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle \quad (81)$$

La covariance des déplacements de la quasi-particule  $\gamma$  pendant  $t$  selon les directions  $i$  et  $j$  vaut alors<sup>47</sup>

$$\text{Cov}(r_i(t) - r_i(0), r_j(t) - r_j(0)) = \int_0^t d\tau (t - \tau) [C_{ij}(\tau) + C_{ji}(\tau)] \quad (82)$$

Comme nous allons le voir en distinguant les cas  $k_0 \equiv 0$  et  $k_0 > 0$ , nous trouvons que la matrice des corrélations de la vitesse, scalaire à cause de l'invariance par rotation, décroît rapidement (exponentiellement) en temps. Aussi la position de la quasi-particule  $\gamma$  subit-elle toujours asymptotiquement en temps un étalement diffusif isotrope, la variance du déplacement pendant  $t$  ayant une divergence linéaire indépendante de la direction de vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  considérée :

$$\text{Var}([\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)] \cdot \mathbf{n}) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 2\mathcal{D}^{\text{spa}} t \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}^{\text{spa}} = \int_0^{+\infty} d\tau C_{zz}(\tau) \quad (83)$$

En d'autres termes, aux temps beaucoup plus longs que le temps de corrélation de la vitesse, la quasi-particule  $\gamma$  effectue dans l'espace des positions un mouvement brownien de coefficient de diffusion spatiale  $\mathcal{D}^{\text{spa}}$ , qu'il nous faut calculer à l'ordre dominant en température. Pour cela, comme nous allons le voir, nous pouvons nous limiter dans

47. On est confronté à  $I_{ij}(t) = \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' f_{ij}(|\tau - \tau'|)$  avec  $f_{ij}(|\tau - \tau'|) = [C_{ij}(\tau - \tau') + C_{ji}(\tau - \tau')]/2$  car  $C_{ji}(\tau - \tau') = C_{ij}(\tau' - \tau)$ . On a successivement  $I_{ij}(t) = 2 \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} d\tau' f_{ij}(\tau - \tau') = 2 \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} d\tau'' f_{ij}(\tau'') = 2 \int_0^t d\tau (t - \tau) f_{ij}(\tau)$ . On a posé  $\tau' = \tau - \tau''$  dans l'intégrale intérieure, puis on a intégré par parties sur  $\tau$ .

$C_{zz}(\tau)$ , si  $k_0 \equiv 0$ , à une seule contribution exponentielle, d'amplitude  $\approx T$  et de taux de décroissance  $\Gamma_k$  donné par l'équation (66) :

$$C_{ij}(\tau) \stackrel{k_0 \equiv 0}{\simeq} \delta_{ij} \frac{k_B T}{m_*} e^{-\Gamma_k |\tau|} \quad (84)$$

La loi asymptotique (83) vaut alors pour  $\Gamma_k t \gg 1$ . Si  $k_0 > 0$ , en revanche, il faut garder *deux* contributions dans  $C_{zz}(\tau)$ , l'une d'amplitude  $\approx T$  et de taux  $\Gamma_k$ , qui provient de la décorrélation plus rapide de la variable nombre d'onde  $k$ , et l'autre d'amplitude  $\approx T^2$  et de taux  $\Gamma_{\hat{\mathbf{k}}}$  donné par l'équation (66), qui provient de la décorrélation plus lente des variables angulaires  $\hat{\mathbf{k}}$  :

$$C_{ij}(\tau) \stackrel{k_0 > 0}{\simeq} \delta_{ij} \frac{k_B T}{3m_*} \left[ e^{-\Gamma_k |\tau|} + \frac{4m_* k_B T}{\hbar^2 k_0^2} e^{-\Gamma_{\hat{\mathbf{k}}} |\tau|} \right] \quad (85)$$

Cette seconde contribution est initialement plus faible que la première par un facteur  $\approx T$  mais elle décroît plus lentement par un facteur  $\approx T$ , donc contribue en définitive au coefficient de diffusion spatiale au même ordre en  $T$  que la première contribution ; la loi asymptotique (83) ne vaut alors que pour  $\Gamma_{\hat{\mathbf{k}}} t \gg 1$ . Regroupons les deux cas dans une expression synthétique du coefficient de diffusion spatiale :

$$\mathcal{D}^{\text{spa}} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \frac{k_B T}{3m_* \Gamma_k} \left[ 1 + \frac{2D_{\parallel}(k_0)}{D_{\perp}(k_0)} \right] \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{3} (k_B T)^2 \left[ \frac{1}{D_{\parallel}(k_0)} + \frac{2}{D_{\perp}(k_0)} \right] \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \frac{\hbar}{m} \frac{1}{\frac{\pi^5}{15} \left( \frac{mc}{\hbar \rho^{1/3}} \right)^6 \left( \frac{k_B T}{mc^2} \right)^7} \quad (86)$$

en utilisant la relation d'Einstein (63) puis les équivalents (53). On rappelle que  $\mathcal{D}_{\parallel}(k_0)$  coïncide avec le coefficient de frottement réduit  $\gamma$ , toujours défini par l'équation (62) et d'expression explicite (67) pour  $k_0 \equiv 0$ , (64) pour  $k_0 > 0$ . De même,  $\mathcal{D}_{\perp}(k_0)$ , que l'on peut toujours déduire de la limite en  $k = k_0$  de l'équation (56), vaut  $\gamma$  si  $k_0 \equiv 0$  et admet l'expression explicite (65) sinon. Le coefficient de diffusion spatiale (86) est représenté sur la figure 5b sous forme adimensionnée dans l'approximation BCS, en fonction de la force des interactions au sein du gaz de fermions. Remarquons qu'il est continu à la transition entre les cas  $k_0 \equiv 0$  et  $k_0 > 0$  [ $\mu = 0$  dans la relation de dispersion BCS (9)] mais y présente un point anguleux.

Exposons brièvement les calculs conduisant à l'équation (85). Commençons par le cas  $k_0 \equiv 0$ , abondamment traité dans la littérature. Des approximations à l'ordre dominant  $\mathbf{v} \simeq \hbar \mathbf{k} / m_*$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{k}) \simeq -\Gamma_k \hbar \mathbf{k}$ ,  $\underline{D}(\mathbf{k}) \simeq \underline{D}(\mathbf{0}) = D_{\parallel}(0) \text{Id}$  et  $\Pi_{\text{st}}(\mathbf{k}) \propto \exp(-\beta \hbar^2 k^2 / 2m_*)$ , et de l'équation de Langevin cartésienne (59), nous tirons la valeur initiale et l'équation d'évolution de la fonction de corrélation de la vitesse :

$$C_{ij}(0) \simeq \delta_{ij} \frac{k_B T}{m_*} \quad \text{et} \quad dC_{ij}(\tau) \underset{\tau > 0}{=} \langle dv_i(\tau) v_j(0) \rangle \simeq -\Gamma_k d\tau C_{ij}(\tau) \quad (87)$$

dont l'intégration jointe à la relation  $C_{ij}(-\tau) = C_{ji}(\tau)$  conduit à l'expression (84) si le coefficient  $\gamma$  est celui de l'équation (67) et, après report dans l'expression (83) de  $\mathcal{D}^{\text{spa}}$ , au résultat annoncé (86) avec  $\mathcal{D}_{\parallel}(k_0) = \mathcal{D}_{\perp}(k_0) = \gamma$ .

Le cas  $k_0 > 0$  est plus inhabituel. Pour construire un modèle minimal, nous prenons cette fois  $\mathbf{v} = \hbar[(k - k_0)/m_*] \hat{\mathbf{k}}$ ,  $D_{\parallel, \perp}(k) \equiv D_{\parallel, \perp}(k_0)$  et une distribution stationnaire  $\Pi_0(k) \propto \exp[-\beta \hbar^2 (k - k_0)^2 / 2m_*]$  (la direction  $\hat{\mathbf{k}}$  de  $\mathbf{k}$  a une distribution uniforme sur la sphère unité)<sup>48</sup>. La relation (72) nous oblige alors à inclure dans la force moyenne non seulement le terme de frottement visqueux attendu, mais aussi la contribution à vitesse nulle sous-dominante en température, qui prend une forme plus simple ici car on néglige la dépendance en  $k$  de  $D_{\parallel}$  :

$$F(k) = -\hbar \Gamma (k - k_0) + \frac{2}{\hbar k_0} [D_{\parallel}(k_0) - D_{\perp}(k_0)] \quad \text{avec} \quad \Gamma \equiv \frac{D_{\parallel}(k_0)}{m_* k_B T} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \Gamma_k \quad (88)$$

48. Comme la direction de  $\mathbf{k}$  se thermalise plus lentement que le module d'un ordre en température d'après l'équation (66), il existe, pour un état initial hors d'équilibre, un régime transitoire dans lequel la distribution de  $k$  a atteint l'équilibre, mais celle de  $\hat{\mathbf{k}}$  pas encore ( $\hat{\mathbf{k}}$  n'a pas eu le temps de diffuser sur la sphère unité, le terme constant dans la force (88) n'a pas encore vraiment agi), si bien que  $C_{ij}(t) \simeq (k_B T / m_*) \langle \hat{k}_i \hat{k}_j \rangle_0 \exp(-\Gamma_k t)$  où la moyenne  $\langle \dots \rangle_0$  est prise sur la distribution de  $\hat{\mathbf{k}}$  initiale. Cette forme à une exponentielle ressemble au cas  $k_0 = 0$ , à un facteur 3 près sur la trace (la dimension effective  $d_{\text{eff}}$ , c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté quadratiques dans la forme approchée de l'énergie  $\epsilon_k$  près de  $k = k_0$ , passe de  $d_{\text{eff}} = 3$  pour  $k_0 \equiv 0$  à  $d_{\text{eff}} = 1$  pour  $k_0 > 0$ ). À ces temps intermédiaires  $\Gamma_k^{-1} \ll t \ll \Gamma_{\hat{\mathbf{k}}}^{-1}$ , la quasi-particule  $\gamma$  effectue un mouvement brownien transitoire de matrice de diffusion spatiale  $\mathcal{D}_{ij}^{\text{spa, trans}} = (k_B T / m_* \Gamma_k) \langle \hat{k}_i \hat{k}_j \rangle_0$ , peut-être anisotrope mais de trace fixée.

En insérant ces éléments du modèle dans les équations stochastiques en module et direction (60,61), et en remplaçant comme dans (88) le nombre d'onde  $k$  par  $k_0$  dans les dénominateurs, nous obtenons la formulation de Langevin minimale

$$\hbar dk = -\Gamma dt \hbar(k - k_0) + \frac{2D_{\parallel}(k_0)}{\hbar k_0} dt + \left[2dt D_{\parallel}(k_0)\right]^{1/2} \eta_{\parallel} \quad (89)$$

$$d\hat{\mathbf{k}} = -\Gamma_{\perp} dt \hat{\mathbf{k}} + (\Gamma_{\perp} dt)^{1/2} \boldsymbol{\eta}_{\perp} \quad \text{avec} \quad \Gamma_{\perp} = \frac{2D_{\perp}(k_0)}{\hbar^2 k_0^2} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \Gamma_{\hat{\mathbf{k}}} \quad (90)$$

La variation correspondante de la vitesse selon  $O_i$ ,

$$dv_i = \frac{\hbar \hat{k}_i}{m_*} dk + \frac{\hbar(k - k_0)}{m_*} d\hat{k}_i + \frac{\hbar}{m_*} dk d\hat{k}_i = -(\Gamma + \Gamma_{\perp}) dt v_i + \frac{2\Gamma dt k_B T}{\hbar k_0} \hat{k}_i + \text{bruit} \quad (91)$$

ne conduit plus comme dans la relation (87) à une équation fermée sur la fonction de corrélation de la vitesse, mais la couple à une fonction de corrélation mixte direction-vitesse  $\tilde{C}_{ij}(\tau) = \langle \hat{k}_i(\tau) v_j(0) \rangle$ , d'où le système différentiel à  $\tau \geq 0$  :

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} C_{ij}(\tau) \\ \tilde{C}_{ij}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\Gamma + \Gamma_{\perp}) & \frac{2k_B T}{\hbar k_0} \Gamma \\ 0 & -\Gamma_{\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{ij}(\tau) \\ \tilde{C}_{ij}(\tau) \end{pmatrix} \quad (92)$$

De l'annulation à l'équilibre des moyennes des variations  $d(k - k_0)$  et  $d[(k - k_0)^2]$ , et de la relation d'isotropie  $\langle \hat{k}_i \hat{k}_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}$ , nous tirons les conditions initiales dans le modèle de Langevin (89,90),  $C_{ij}(0) = \delta_{ij} (k_B T / 3m_*) [1 + 4m_* k_B T / (\hbar k_0)^2]$  et  $\tilde{C}_{ij}(0) = \delta_{ij} (2k_B T / 3\hbar k_0)$ . L'intégration du système (92), jointe à la relation  $C_{ij}(-\tau) = C_{ji}(\tau)$ , donne le résultat annoncé (85) si l'on néglige dans la première exponentielle le taux  $\Gamma_{\perp}$  devant  $\Gamma$ , ce qui est légitime puisque  $\Gamma_{\perp} / \Gamma = O(T)$ .

Le modèle minimal que nous venons d'utiliser pour  $k_0 > 0$ , qui néglige la dépendance en nombre d'onde de  $D_{\parallel, \perp}(k)$  et les corrections  $\approx (k - k_0)^3$  à la relation de dispersion, ne constitue cependant pas une démonstration. Une étude plus solide est effectuée dans l'Annexe B, à l'aide d'un développement contrôlé à basse température. Elle conduit exactement aux mêmes résultats (85,86). Enfin, ces calculs de la diffusion spatiale ne s'appliquent pas au point de transition entre les cas  $k_0 \equiv 0$  et  $k_0 > 0$ , où la force moyenne est de départ cubique,  $F(k) \approx -k^3$ . Une étude à part de la zone de transition, exposée dans la même Annexe B, y confirme cependant la validité de l'équivalent à basse température (86).

## Annexe A. Compléments sur la diffusion $\phi - \gamma$

Les grandes lignes du calcul de l'amplitude de diffusion d'un phonon de vecteur d'onde  $\mathbf{q}$  sur une quasi-particule  $\gamma$  stable de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  à partir d'un hamiltonien effectif de basse énergie ont été présentées dans la section 3. Nous donnons ici quelques détails et points de rigueur supplémentaires.

*Le hamiltonien.* La forme explicite des différentes contributions au hamiltonien (20) est disponible dans la littérature, voir par exemple les références les plus récentes [2, 14]. Nous la rappelons par commodité (et pour corriger une erreur vénielle dans le dernier terme entre crochets de l'équation (4) de [2], écrit à tort comme un hermitien conjugué), en nous limitant dans  $\hat{V}_{\phi\phi}$  aux processus à trois phonons de Beliaev et de Landau, seuls utiles ici :

$$\hat{V}_{\phi\phi} = \frac{1}{2L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3} \langle \phi : \mathbf{q}_1, \phi : \mathbf{q}_2 | \mathcal{V}_{\phi\phi} | \phi : \mathbf{q}_3 \rangle (\hat{b}_{\mathbf{q}_1}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}_2}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}_3} + \hat{b}_{\mathbf{q}_3}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}_1} \hat{b}_{\mathbf{q}_2}) \quad (A.1)$$

$$\hat{H}_3^{\phi\gamma} = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} \langle \phi : \mathbf{q}, \gamma : \mathbf{k} | \mathcal{H}_3^{\phi\gamma} | \gamma : \mathbf{k}' \rangle (\hat{\gamma}_{\mathbf{k}'}^{\dagger} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{q}} + \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}'}) \quad (A.2)$$

$$\hat{H}_4^{\phi\gamma} = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}, \mathbf{q}'} \langle \phi : \mathbf{q}', \gamma : \mathbf{k}' | \mathcal{H}_4^{\phi\gamma} | \phi : \mathbf{q}, \gamma : \mathbf{k} \rangle \hat{\gamma}_{\mathbf{k}'}^{\dagger} \hat{\gamma}_{\mathbf{k}} \left( \hat{b}_{\mathbf{q}'}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{-\mathbf{q}'} + \frac{1}{2} \hat{b}_{-\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}'}^{\dagger} \right) \quad (A.3)$$



avec les éléments de matrice pour un volume unité entre états à un ou deux phonons, à zéro ou une quasi-particule  $\gamma$  :

$$\langle \phi : \mathbf{q}_1, \phi : \mathbf{q}_2 | \mathcal{V}_{\phi\phi} | \phi : \mathbf{q}_3 \rangle = \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3} \frac{mc^2}{\rho^2} \rho_{q_1} \rho_{q_2} \rho_{q_3} \left( \lambda + \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{q_1 q_2} + \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_3}{q_1 q_3} + \frac{\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_3}{q_2 q_3} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$\langle \phi : \mathbf{q}, \gamma : \mathbf{k} | \mathcal{H}_3^{\phi\gamma} | \gamma : \mathbf{k}' \rangle = \delta_{\mathbf{q} + \mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2} \rho_q \left[ \frac{\partial \epsilon_{\mathbf{k}}^{(0)}}{\partial \rho} + \frac{\partial \epsilon_{\mathbf{k}'}^{(0)}}{\partial \rho} + \frac{\hbar c \mathbf{q}}{\rho q} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{k}') \right] \quad (\text{A.5})$$

$$\langle \phi : \mathbf{q}', \gamma : \mathbf{k}' | \mathcal{H}_4^{\phi\gamma} | \phi : \mathbf{q}, \gamma : \mathbf{k} \rangle = \delta_{\mathbf{q} + \mathbf{k}, \mathbf{q}' + \mathbf{k}'} \frac{1}{2} \rho_q \rho_{q'} \left( \frac{\partial^2 \epsilon_{\mathbf{k}}^{(0)}}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{\mathbf{k}'}^{(0)}}{\partial \rho^2} \right) \quad (\text{A.6})$$

Pour clarifier les notations, nous convenons que les vecteurs d'onde  $\mathbf{q}$  sont toujours ceux des phonons, et les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}$  toujours ceux de la quasi-particule  $\gamma$ . Le paramètre  $\lambda$  est donné par l'équation (41) (voir cependant la note 49). Les deltas de Kronecker assurent la conservation de la quantité de mouvement. On a introduit l'amplitude des fluctuations quantiques de la densité du superfluide dans le mode de phonon de vecteur d'onde  $\mathbf{q}$ ,<sup>49</sup>

$$\rho_q = \left( \frac{\hbar \rho q}{2mc} \right)^{1/2} \quad (\text{A.7})$$

pour montrer que les fluctuations de densité gouvernent aussi bien l'interaction entre phonons que l'interaction entre phonons et quasi-particule  $\gamma$ . Dans les expressions (A.5) et (A.6), la dérivation  $\partial/\partial\rho$  de la relation de dispersion nue de la quasi-particule  $\gamma$  par rapport à la densité  $\rho$  du superfluide est effectuée à vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et potentiel d'interaction entre les atomes du superfluide fixés.

*Analyse des ordres  $> 2$  en  $\hat{V}$ .* Justifions le fait qu'à l'ordre dominant en température ( $q, q' = O(T) \rightarrow 0$  à  $\mathbf{k}$  fixé), on puisse limiter l'amplitude de diffusion (22) à l'ordre deux en  $\hat{V}$ . Le terme d'ordre  $n$  quelconque en  $\hat{V}$  est facile à écrire, c'est l'élément de matrice entre  $\langle f |$  et  $| i \rangle$  du produit de  $n$  opérateurs  $\hat{V}$  entre lesquels on intercale  $n - 1$  opérateurs  $G_0(z)$  (deux facteurs  $\hat{V}$  successifs sont toujours séparés par un seul facteur  $G_0$ ); ici,  $G_0(z) = (z - \hat{H}_0)^{-1}$  est la résolvante du hamiltonien sans interaction et  $z = E_i + i\eta$ ,  $\eta \rightarrow 0^+$ . Pour comprendre ce qui se passe, commençons par  $n = 3$  : la contribution  $\langle f | \hat{V} G_0(z) \hat{V} G_0(z) \hat{V} | i \rangle$  engendre de nombreux diagrammes après décomposition de  $\hat{V}$  en processus élémentaires comme dans l'équation (20), même en tenant compte de l'ordre de grandeur des éléments de matrice (les plus grands sont ceux  $\propto q^{1/2}$  de  $\hat{H}_3^{\phi\gamma}$ ) et des changements de parité du nombre de phonons (on ne peut prendre trois fois  $\hat{H}_3^{\phi\gamma}$  dans les facteurs  $\hat{V}$ ) pour éliminer les contributions sous-dominantes ou nulles. Mais dans chaque diagramme apparaît un vecteur d'onde de phonon interne  $\mathbf{q}''$  quelconque, non contraint par la conservation de la quantité de mouvement, et sur lequel il faut donc sommer. En effet, un facteur  $\hat{V}$  annihile le phonon incident  $\mathbf{q}$ , un facteur  $\hat{V}$  (peut-être le même) crée le phonon émergent  $\mathbf{q}'$ , donc l'un des trois facteurs  $\hat{V}$  crée ou annihile nécessairement un phonon de vecteur d'onde non contraint  $\mathbf{q}''$ . Nous aboutissons ainsi à la majoration très simple

$$\langle f | \hat{V} G_0(z) \hat{V} G_0(z) \hat{V} | i \rangle = O \left( \sum_{\mathbf{q}'' < \Lambda} \frac{(qq')^{1/2} q''}{\Delta E_1 \Delta E_2} \right) = O(T^2 (qq')^{1/2}) \quad (\text{A.8})$$

puisque (i) chaque dénominateur d'énergie est (à  $\mathbf{k}$  fixé) d'ordre un en les vecteurs d'onde des phonons donc est  $\approx \Lambda = O(T)$ , (ii) au numérateur, chaque absorption ou émission d'un phonon de nombre d'onde  $Q$  est accompagnée d'un facteur  $\rho_Q \propto Q^{1/2} = O(T^{1/2})$ , et (iii) la sommation sur le vecteur d'onde du phonon interne sort en facteur le volume  $\Lambda^3 = O(T^3)$  dans l'espace de Fourier. Dans le cas d'un ordre en  $\hat{V}$  impair quelconque  $n = 2s + 1$ , la conservation de la parité du nombre de phonons dans la transition  $| i \rangle \rightarrow | f \rangle$  impose qu'il y ait non pas  $2s + 1$  mais au moins  $2s + 2$  absorptions/émissions de phonons, donc au moins  $2s$  absorptions/émissions de phonons autres que le phonon incident  $\mathbf{q}$  et le phonon émergent  $\mathbf{q}'$  (chaque facteur  $\hat{V}$  absorbe ou émet au moins un phonon); il faut alors sommer sur au moins  $s$  phonons internes de vecteurs d'onde  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_s$ . Dans le cas d'un ordre pair  $n = 2s$ , il y a

49. En toute rigueur, il faudrait à ce stade utiliser dans  $\rho_q$  et dans  $\lambda$  l'équation d'état nue et la vitesse du son nue, qui dépendent de la coupure ultraviolette  $\Lambda$  introduite dans l'équation (20), voir l'annexe B de la référence [23].



pour les mêmes raisons au moins  $2s - 2$  absorptions/émissions de phonons autres que  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{q}'$ , et il faut sommer sur au moins  $s - 1$  phonons internes  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{s-1}$ . D'où la majoration de l'ordre  $n > 2$  en  $\hat{V}$ ,<sup>50</sup>

$$\langle f | \hat{V} [G_0(z) \hat{V}]^{n-1} | i \rangle = \begin{cases} O[(qq')^{1/2} T^{n-1}] & \text{si } n \text{ impair} \\ O[(qq')^{1/2} T^{n-3}] & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Cette majoration vaut pour une valeur générique  $\approx T$  de l'énergie complexe  $z$ . Dans le cas particulier  $z = E_i^{(0)} + i\eta$  qui nous intéresse, certains diagrammes d'ordre  $n > 2$  en  $\hat{V}$  comme ceux de la figure 3c sont en fait infinis et doivent être retirés de l'équation (A.9) pour qu'elle s'applique; ce problème est discuté dans le corps de l'article dans le paragraphe après l'équation (28).

*Analyse de l'ordre 2 en  $\hat{V}$ .* Il reste à justifier le fait qu'à l'ordre deux en  $\hat{V}$ , on puisse garder seulement les contributions (23) ou, si l'on préfère, les diagrammes de la figure 3b. Chaque contribution quadratique en  $\hat{V}$  contient au numérateur le produit de deux éléments de matrice, choisis parmi ceux de  $\hat{H}_3^{\phi\gamma} \propto T^{1/2}$ ,  $\hat{H}_4^{\phi\gamma} \propto T$ ,  $\hat{H}_3^{\phi\phi} \sim \hat{H}_5^{\phi\gamma} \propto T^{3/2}$ ,  $\hat{H}_4^{\phi\phi} \sim \hat{H}_6^{\phi\gamma} \propto T^2$ , etc (en incluant même le couplage de  $\gamma$  au cube et à la puissance quatrième des fluctuations de densité, et l'interaction à quatre phonons). Elle contient un dénominateur d'énergie linéarisable en les vecteurs d'onde des phonons donc  $\propto T$ . La contribution ne doit pas être un  $o(T)$ . On peut donc *a priori* prendre dans les facteurs  $\hat{V}$ : (i) deux fois  $\hat{H}_3^{\phi\gamma}$  (ce qui donne les termes  $\mathcal{T}_2$  et  $\mathcal{T}_3$  dans (24)), (ii) deux fois  $\hat{H}_4^{\phi\gamma}$  (rendu négligeable  $\approx (qq')^{1/2} T^3$  par sommation inévitable sur un vecteur d'onde interne), (iii) une fois  $\hat{H}_3^{\phi\gamma}$  et une fois  $\hat{H}_4^{\phi\gamma}$  (nul par non-conservation de la parité du nombre de phonons), (iv) une fois  $\hat{H}_3^{\phi\gamma}$  et une fois  $\hat{H}_3^{\phi\phi}$  (ce qui donne les termes  $\mathcal{T}_4$  et  $\mathcal{T}_5$  dans (24)), (v) une fois  $\hat{H}_3^{\phi\gamma}$  et une fois  $\hat{H}_5^{\phi\gamma}$  (rendu négligeable  $\approx (qq')^{1/2} T^3$  par sommation inévitable sur un vecteur d'onde interne).

*Matrice  $S$  entre états asymptotiques exacts.* Nous suivons la démarche de la référence [24], section B<sub>III</sub>.3, en la généralisant au cas où le phonon incident et émergent, et pas seulement la quasi-particule  $\gamma$ , sont habillés de phonons virtuels. Rappelons la définition des éléments de la matrice  $S$  entre les états asymptotiques exacts (29) :

$$\langle f | S | i \rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{iE_f t/2\hbar} \langle f | U(t/2, -t/2) | i \rangle e^{iE_i t/2\hbar} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{i(E_i + E_f)t/2\hbar} \int_{+\infty + i\eta}^{-\infty + i\eta} \frac{dz}{2i\pi} e^{-izt/\hbar} \langle f | G(z) | i \rangle \quad (\text{A.10})$$

où  $\eta \rightarrow 0^+$ ,  $E_{i,f}$  sont les énergies exactes (30) pour l'instant pas nécessairement égales,  $U(t_f, t_i)$  est l'opérateur d'évolution entre les instants  $t_i$  et  $t_f$  et  $G(z) = (z - \hat{H})^{-1}$  la résolvante du hamiltonien complet  $\hat{H}$ . En partant des relations évidentes (la composante purement  $\gamma$ -quasi-particulaire de  $\hat{H}$  commute avec l'opérateur purement phononique  $\hat{B}_q^\dagger$ ),

$$\hat{B}_q^\dagger(z - \hat{H}) - (z - \hat{H})\hat{B}_q^\dagger = [\hat{H}, \hat{B}_q^\dagger] = [\hat{V}_{\phi\gamma}, \hat{B}_q^\dagger] + [\hat{H}_{\phi\phi}, \hat{B}_q^\dagger] \quad (\text{A.11})$$

on introduit l'opérateur (32) avec  $\mathbf{Q} = \mathbf{q}$  comme suit,

$$\hat{B}_q^\dagger(z - \hat{H} - \hbar\omega_q) - (z - \hat{H})\hat{B}_q^\dagger = [\hat{V}_{\phi\gamma}, \hat{B}_q^\dagger] + \hat{\Delta}_q^\dagger \quad (\text{A.12})$$

on divise par  $z - \hat{H}$  à gauche et par  $z - \hat{H} - \hbar\omega_q$  à droite, et l'on fait agir sur l'état habillé  $|\gamma : \mathbf{k}\rangle$  pour obtenir

$$G(z) | i \rangle = \frac{1}{z - E_i} \left[ | i \rangle + G(z) \left( [\hat{V}_{\phi\gamma}, \hat{B}_q^\dagger] + \hat{\Delta}_q^\dagger \right) |\gamma : \mathbf{k}\rangle \right] \quad \text{puis} \quad \langle f | G(z) = \frac{1}{z - E_f} \left[ \langle f | + \langle \gamma : \mathbf{k}' | \left( [\hat{B}_{q'}, \hat{V}_{\phi\gamma}] + \hat{\Delta}_{q'} \right) G(z) \right] \quad (\text{A.13})$$

en procédant de même, ou par conjugaison hermitienne et remplacement de  $(z^*, \mathbf{q}, \mathbf{k})$  par  $(z, \mathbf{q}', \mathbf{k}')$ . Il reste à contracter la première identité dans (A.13) à gauche par  $\langle f |$  et à utiliser la seconde identité dans (A.13) pour obtenir

$$\langle f | G(z) | i \rangle = \frac{\langle f | | i \rangle}{z - E_i} + \frac{\langle \gamma : \mathbf{k}' | \hat{B}_{q'} \left( [\hat{V}_{\phi\gamma}, \hat{B}_q^\dagger] + \hat{\Delta}_q^\dagger \right) |\gamma : \mathbf{k}\rangle + \langle \gamma : \mathbf{k}' | \left( [\hat{B}_{q'}, \hat{V}_{\phi\gamma}] + \hat{\Delta}_{q'} \right) G(z) \left( [\hat{V}_{\phi\gamma}, \hat{B}_q^\dagger] + \hat{\Delta}_q^\dagger \right) |\gamma : \mathbf{k}\rangle}{(z - E_i)(z - E_f)} \quad (\text{A.14})$$

Dans l'espace libre  $L \rightarrow +\infty$  et aux temps longs, l'intégrale curviligne (A.10) est dominée par le résidu de l'intégrande en les pôles  $E_i$  et  $E_f$  de l'expression (A.14), sachant que l'élément de matrice de  $G(z)$  au numérateur n'a pas de pôle en ces points [24], et il reste au sens des distributions [24]  $\langle f | S | i \rangle = \langle f | | i \rangle - 2i\pi\delta(E_f - E_i)A_{fi}$  avec l'amplitude de transition cherchée (31) sur la couche d'énergie.

<sup>50</sup>. Pour  $n = 2$ , elle surestimerait le résultat réel  $O(qq')$  en ne tenant pas compte de la compensation dans l'expression (23) des contributions  $\mathcal{T}_2$  et  $\mathcal{T}_3$  à leur ordre dominant  $T^0$ .

*Diffusion d'un phonon instable.* Quand la branche acoustique du gaz a un départ convexe, le phonon incident  $\mathbf{q}$  est instable et se désintègre avec un taux  $\propto q^5$  en une paire de phonons, eux mêmes instables. Cette cascade de Beliaev rend la théorie de la matrice  $S$  inapplicable. L'idée salvatrice est alors de se limiter à un temps de diffusion  $t$  suffisamment long pour assurer une quasi-conservation de l'énergie non perturbée, mais suffisamment court pour éviter la désintégration de Beliaev, en formant des paquets d'onde incidents spatialement localisés par superposition linéaire d'ondes planes de vecteurs d'onde  $\mathbf{q}$  pour le phonon  $\phi$  et  $\mathbf{k}$  pour la quasi-particule  $\gamma$ , avec une distribution en amplitude gaussienne  $c(\mathbf{q}, \mathbf{k})$  très piquée autour des valeurs moyennes  $\mathbf{q}_0 = q_0 \hat{\mathbf{q}}_0$  et  $\mathbf{k}_0 = k_0 \hat{\mathbf{k}}_0$ , c'est-à-dire avec des largeurs  $\Delta q \ll q_0$  et  $\Delta k \ll k_0$  (on omet ici le problème de l'habillage des états asymptotiques et on suppose, comme nous y invite (3), que  $\Delta q \ll \Delta k$ ). Plus précisément, on prend comme état initial dans l'espace libre<sup>51</sup>

$$|\bar{i}\rangle_t = e^{-i\hat{H}_0(-t/2)/\hbar} \int \frac{d^3q d^3k}{(2\pi)^6} c(\mathbf{q}, \mathbf{k}) |\phi : \mathbf{q}, \gamma : \mathbf{k}\rangle \quad (\text{A.15})$$

Comme  $c(\mathbf{q}, \mathbf{k})$  est réelle, les paquets dans  $|\bar{i}\rangle$  seraient localisés dans l'espace des positions autour de l'origine des coordonnées (avec des largeurs  $1/\Delta q$  et  $1/\Delta k$ ) si l'on n'avait pas fait reculer le vecteur d'état dans le temps de  $t/2$  par évolution libre; ils sont alors localisés approximativement en  $-c\hat{\mathbf{q}}_0 t/2$  et  $-v_{k_0} \hat{\mathbf{k}}_0 t/2$ , donc bien séparés et « asymptotiquement libres » (sans interaction) si

$$v_{\text{rel}} t \gg \frac{1}{\Delta q} \quad \text{avec} \quad v_{\text{rel}} = |c\hat{\mathbf{q}}_0 - v_{k_0} \hat{\mathbf{k}}_0| \quad (\text{A.16})$$

la vitesse relative des deux paquets incidents. On fait évoluer  $|\bar{i}\rangle_t$  pendant une durée  $t$  (de l'instant  $-t/2$  à  $t/2$ ) avec le hamiltonien complet  $\hat{H}$ . L'état redevient libre puisque les paquets se sont séparés, leur recouvrement donc leur interaction ne durant qu'un temps  $\approx 1/(\Delta q v_{\text{rel}})$ . Il reste à le projeter pour analyse sur les ondes planes finales  $|f\rangle = |\phi : \mathbf{q}', \gamma : \mathbf{k}'\rangle$  d'énergie  $E_f^{(0)}$ . Après compensation du facteur de phase d'évolution libre de  $\langle f|$ , on aboutit à l'amplitude de diffusion effective

$$A_{\bar{i}}(t) \equiv \langle f| e^{i\hat{H}_0 t/2\hbar} e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\bar{i}\rangle_t \simeq \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} c(\mathbf{q}, \mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{q}' - \mathbf{q}) \left\{ \frac{A_{\bar{i}}(E_f^{(0)}) - A_{\bar{i}}(E_i^{(0)})}{E_f^{(0)} - E_i^{(0)}} \cos \frac{(E_i^{(0)} - E_f^{(0)})t}{2\hbar} - i [A_{\bar{i}}(E_f^{(0)}) + A_{\bar{i}}(E_i^{(0)})] \frac{\sin \frac{(E_i^{(0)} - E_f^{(0)})t}{2\hbar}}{E_i^{(0)} - E_f^{(0)}} \right\} \quad (\text{A.17})$$

Pour obtenir l'approximation au troisième membre de l'équation (A.17), nous avons remplacé l'opérateur d'évolution par son expression sous forme d'intégrale curviligne (A.10), utilisé la relation  $G(z) = G_0(z) + G_0(z)\hat{T}(z)G_0(z)$  pour faire apparaître la matrice  $T$  à l'énergie complexe  $z$ , fait l'approximation comme dans la référence [24] de garder dans la formule de Cauchy seulement les résidus de l'intégrande en les pôles  $E_i^{(0)}$  et  $E_f^{(0)}$  issus des facteurs  $G_0(z)$  encadrant  $\hat{T}(z)$ <sup>52</sup>, négligé la contribution du terme  $G_0(z)$  d'évolution libre sous la condition  $|\mathbf{q}' - \mathbf{q}_0| \gg \Delta q$ , et enfin posé  $A_{\bar{i}}(E) = \langle f|\hat{T}(E + i\eta)|i\rangle$  avec l'état  $|i\rangle \equiv |\phi : \mathbf{q}, \gamma : \mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{q}' - \mathbf{q}\rangle$  d'énergie  $E_i^{(0)}$  et  $\eta \rightarrow 0^+$ . Les préfacteurs du cosinus et du sinus cardinal sont des fonctions continues et bornées de  $E_i^{(0)}$ ; on peut les remplacer par leur valeur au centre du paquet d'ondes ( $E_i^{(0)} \simeq \bar{E}_i^{(0)}$ ) si leur échelle de variation  $E_{\text{pref}}$  satisfait à la condition (voir la note 53)

$$\frac{\hbar}{t} \gg \frac{\text{Var } E_i^{(0)}}{E_{\text{pref}}} \quad \text{avec} \quad E_{\text{pref}} \approx \hbar c q_0 \quad \text{et} \quad \text{Var } E_i^{(0)} \approx (\hbar c \Delta q)^2 \quad (\text{A.18})$$

51. En l'absence de boîte de quantification, on utilise la condition de normalisation des ondes planes  $\langle \mathbf{k}|\mathbf{k}'\rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ .

52. Dans l'approximation d'ordre deux en l'interaction,  $\hat{T}(z) \simeq \hat{V} + \hat{V}G_0(z)\hat{V}$ , qui suffit ici, il est facile d'inclure la contribution des pôles  $\epsilon_n$  de  $\langle f|\hat{T}(z)|i\rangle$ , ce qui ajoute entre les accolades de l'équation (A.17) la somme  $\sum_{n=1}^4 (\epsilon_n - E_i^{(0)})^{-1} (\epsilon_n - E_f^{(0)})^{-1} Z_n \exp[-it(\epsilon_n - \frac{E_i^{(0)} + E_f^{(0)}}{2})/\hbar]$ , où  $\epsilon_1 = \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)} = \epsilon_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}'}^{(0)}$ ,  $\epsilon_2 = \hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(0)} + \hbar\omega_{\mathbf{q}'}^{(0)} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}^{(0)}$ ,  $\epsilon_3 = \hbar\omega_{\mathbf{q}'}^{(0)} + \hbar\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{(0)} + \epsilon_{\mathbf{k}}^{(0)}$ ,  $\epsilon_4 = \hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(0)} + \hbar\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}^{(0)} + \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{(0)}$  (soit les énergies des états intermédiaires des diagrammes b2 à b5 de la figure 3) et les résidus de  $\langle f|\hat{T}(z)|i\rangle$  associés  $Z_n$  sont des fonctions régulières de  $\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{k}'$ . Si l'on prend soin d'exclure dans les directions d'observation du phonon émergent un cône autour de la direction  $\hat{\mathbf{q}}_0$  du phonon incident, c'est-à-dire d'imposer  $|\hat{\mathbf{q}}' \cdot \hat{\mathbf{q}}_0| < \chi$  avec  $\chi < 1$  fixé, pour éviter que le processus de Beliaev dans le terme  $\mathcal{T}_4$  ou celui de Landau dans  $\mathcal{T}_5$  soit résonnant, on trouve toujours que les différences d'énergie  $|\epsilon_n - E_i^{(0)}|$  et  $|\epsilon_n - E_f^{(0)}|$  sont approximativement supérieures à  $\hbar c q$  ou  $\hbar c q'$ , et l'on a toujours  $\hbar c q/2 \lesssim |\epsilon_n - (E_i^{(0)} + E_f^{(0)})/2|$ . La contribution des pôles de  $\langle f|\hat{T}(z)|i\rangle$  est donc une fonction oscillante du temps, que la moyenne sur  $\mathbf{q}$  écrase et rend négligeable par un facteur gaussien en temps  $\approx \exp[-(c\Delta q t)^2/2]$ , tout comme dans l'équation (A.19).

Ici  $\bar{E}_i^{(0)}$  et  $\text{Var } E_i^{(0)}$  sont la moyenne et la variance de  $E_i^{(0)} \simeq \hbar c q + \epsilon_{\mathbf{k}=\mathbf{k}'+\mathbf{q}-\mathbf{q}}$  pour  $\mathbf{q}$  distribué selon la loi gaussienne  $c(\mathbf{q}, \mathbf{k}' + \mathbf{q} - \mathbf{q})$ . Dans le calcul de la moyenne du cosinus et du sinus cardinal sur la variable  $\mathbf{q}$ , la même condition (A.18) permet de supposer que  $E_i^{(0)}$  aussi suit une loi gaussienne<sup>53</sup>, auquel cas

$$\left\langle \cos \frac{(E_i^{(0)} - E_f^{(0)})t}{2\hbar} \right\rangle_{\mathbf{q}} = \exp \left[ -t^2 \text{Var } E_i^{(0)} / 8\hbar^2 \right] \cos \frac{(\bar{E}_i^{(0)} - E_f^{(0)})t}{2\hbar} \quad (\text{A.19})$$

$$\left\langle \frac{\sin \frac{(E_i^{(0)} - E_f^{(0)})t}{2\hbar}}{E_i^{(0)} - E_f^{(0)}} \right\rangle_{\mathbf{q}} = \frac{(\pi/2)^{1/2}}{\Delta E_i^{(0)}} \exp \left[ -\frac{(E_f^{(0)} - \bar{E}_i^{(0)})^2}{2 \text{Var } E_i^{(0)}} \right] \text{Re } \Phi \left( \frac{\Delta E_i^{(0)} t}{2\hbar \sqrt{2}} + i \frac{|E_f^{(0)} - \bar{E}_i^{(0)}|}{\sqrt{2} \Delta E_i^{(0)}} \right) \quad (\text{A.20})$$

$$\simeq \begin{cases} \frac{(\pi/2)^{1/2}}{\Delta E_i^{(0)}} \exp \left[ -(E_f^{(0)} - \bar{E}_i^{(0)})^2 / 2 \text{Var } E_i^{(0)} \right] & \text{si } |E_f^{(0)} - \bar{E}_i^{(0)}| < t \text{Var } E_i^{(0)} / 2\hbar \\ \frac{\sin \frac{(\bar{E}_i^{(0)} - E_f^{(0)})t}{2\hbar}}{\bar{E}_i^{(0)} - E_f^{(0)}} \exp \left[ -t^2 \text{Var } E_i^{(0)} / 8\hbar^2 \right] & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

où  $\Delta E_i^{(0)}$  est l'écart-type (racine carrée de la variance) et  $\Phi(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z du \exp(-u^2)$  est la fonction erreur<sup>54</sup>. Choisissons par exemple  $\Delta q \propto \Delta k \propto q_0^3 \approx T^3$  (ce qui donne une précision suffisante sur  $q$ , voir la note 24) et un temps de diffusion  $t \propto q_0^{-4}$ , et faisons tendre  $q_0$  et la température du gaz vers zéro à  $k_0$  fixé. Alors les conditions (A.16) et (A.18) sont asymptotiquement vérifiées, et tout se passe comme si la matrice  $S$  était donnée par l'expression habituelle  $\langle f|S|i \rangle = \langle f|i \rangle - 2i\pi \langle f|\hat{T}(E_i^{(0)} + i\eta)|i \rangle \delta(E_f^{(0)} - E_i^{(0)})$  : c'est évident pour le premier cas de l'équation (A.21), que l'on peut retrouver par la substitution habituelle  $\sin(\epsilon t/2\hbar)/\epsilon \rightarrow \pi \delta(\epsilon)$ ; le second cas de (A.21) et l'équation (A.19) ne correspondent pas à un Dirac de conservation de l'énergie mais ceci importe peu car ils sont exponentiellement supprimés. Comme le temps de diffusion  $t$  est infiniment plus court que la durée de vie  $\approx q_0^{-5}$  des phonons incident et émergent, on peut à juste titre négliger leur instabilité de Beliaev, c'est-à-dire leur émission réelle plutôt que virtuelle de phonons, dans le calcul de l'amplitude de diffusion sur une quasi-particule  $\gamma$  à l'ordre dominant en  $q$ .

*Diffusion dans la matière.* Comme la diffusion du phonon  $\mathbf{q}$  sur la quasi-particule  $\gamma$  se produit en fait dans un gaz thermique de phonons, il semble incorrect, pour les applications de la section 4, de calculer l'amplitude de diffusion dans le vide et de ne pas tenir compte de l'émission stimulée des phonons internes des diagrammes b4 et b5 de la figure 3 dans les modes de vecteurs d'onde  $\mathbf{q} - \mathbf{q}'$  et  $\mathbf{q}' - \mathbf{q}$  déjà peuplés. À première vue, il faudrait donc corriger les deux derniers termes du résultat (23) comme suit :

$$\mathcal{T}_4 \xrightarrow{?} (1 + \bar{n}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}) \mathcal{T}_4 \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_5 \xrightarrow{?} (1 + \bar{n}_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}) \mathcal{T}_5 \quad (\text{A.22})$$

où les  $\bar{n}$  sont les nombres moyens d'occupation des modes. Mais, si les modes  $\mathbf{q} - \mathbf{q}'$  et  $\mathbf{q}' - \mathbf{q}$  sont déjà peuplés, il faut tenir compte du fait que des phonons de ces modes peuvent participer transitoirement à la diffusion (ils doivent rester en nombres égaux dans l'état initial et dans l'état final). Ceci introduit deux nouveaux diagrammes. Le premier, d'amplitude  $\mathcal{T}'_4 \bar{n}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}$ , décrit l'absorption d'un phonon  $\mathbf{q} - \mathbf{q}'$  par la quasi-particule  $\gamma$  de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  (ce qui la fait passer directement dans son état final  $\mathbf{k}'$ ), puis la désintégration de Beliaev du phonon incident  $\mathbf{q}$  en deux phonons  $\mathbf{q}'$  et  $\mathbf{q} - \mathbf{q}'$ , qui fournit le phonon final attendu et rétablit le mode  $\mathbf{q} - \mathbf{q}'$  dans son nombre d'occupation initial. Le second, d'amplitude  $\mathcal{T}'_5 \bar{n}_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}$ , décrit la fusion de Beliaev du phonon incident  $\mathbf{q}$  avec un phonon  $\mathbf{q}' - \mathbf{q}$  (ce qui fournit le phonon final  $\mathbf{q}'$ ), suivie de l'émission d'un phonon  $\mathbf{q}' - \mathbf{q}$  par la quasi-particule  $\gamma$  de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , ce qui la fait

53. Supposons pour simplifier que la quasi-particule  $\gamma$  est fortement subsonique,  $|v_{\mathbf{k}'}|/c \ll 1$ , et développons le déphasage pendant  $t$  en puissances des fluctuations  $\delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}$ ,  $[E_i^{(0)} - \bar{E}_i^{(0)}]t/\hbar \simeq ct \hat{\mathbf{q}}_0 \cdot \delta \mathbf{q} + O[ct(\delta q)^2/q_0]$ . Le terme linéaire a une distribution gaussienne; le  $O$  est non gaussien mais négligeable sous la condition (A.18). Inversement, si  $E_i^{(0)}$  est une variable gaussienne, il est facile d'obtenir la condition (A.18) de variation négligeable des préfacteurs dans (A.17), en supposant que ces derniers varient linéairement avec  $E_i^{(0)}$ .

54. On fait apparaître la fonction erreur en utilisant  $\sin x/x = \int_{-1}^1 du e^{iux}/2$  et en intervertissant les intégrations sur  $u$  et sur l'énergie. Les formes approchées dans (A.21) découlent du comportement asymptotique de la fonction erreur dans le premier quadrant : si  $z = \rho \exp(i\theta)$  et que  $\rho$  tend vers  $+\infty$  à  $\theta$  fixé, alors  $\Phi(z) \rightarrow 1$  si  $\theta \in [0, \pi/4[$  et  $\Phi(z) \sim -\exp(-z^2)/(\sqrt{\pi}z)$  si  $\theta \in ]\pi/4, \pi/2[$ .

passer directement dans son état final  $\mathbf{k}'$  et repeuple le mode  $\mathbf{q}' - \mathbf{q}$  à l'identique. Aucun de ces nouveaux diagrammes n'est connexe, et ce sont les seuls possibles à l'ordre dominant. La bonne correction à appliquer à (23) est donc

$$\mathcal{T}_4 \longrightarrow (1 + \bar{n}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'})\mathcal{T}_4 + \bar{n}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}\mathcal{T}'_4 \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_5 \longrightarrow (1 + \bar{n}_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}})\mathcal{T}_5 + \bar{n}_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}\mathcal{T}'_5 \quad (\text{A.23})$$

Sur l'équation (24), on constate que  $\mathcal{T}'_4$  ( $\mathcal{T}'_5$ ) a le même numérateur que  $\mathcal{T}_4$  ( $\mathcal{T}_5$ ), que son dénominateur d'énergie  $\epsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} + \hbar\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{(0)} - \epsilon_{\mathbf{k}'}^{(0)}$  ( $\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{(0)} + \hbar\omega_{\mathbf{q}'-\mathbf{q}}^{(0)} - \hbar\omega_{\mathbf{q}'}^{(0)}$ ) est en général sans rapport avec celui de  $\mathcal{T}_4$  ( $\mathcal{T}_5$ ), sauf sur la couche d'énergie (21) où il en est l'exact opposé et où  $\mathcal{T}'_4 = -\mathcal{T}_4$  ( $\mathcal{T}'_5 = -\mathcal{T}_5$ ). Les nombres d'occupation dans la forme corrigée (A.23) se compensent alors exactement,<sup>55</sup> et le résultat (23) établi dans le vide vaut aussi dans la matière.

## Annexe B. Calcul de la diffusion spatiale à basse température par le théorème de régression

L'équation (86) donne un équivalent à basse température du coefficient de diffusion spatiale de la quasi-particule  $\gamma$  dans un gaz de phonons. Dans le cas où la relation de dispersion  $\epsilon_k$  de la quasi-particule atteint son minimum en un nombre d'onde  $k_0 > 0$ , la justification qu'en fournit le texte principal, à l'aide d'un modèle stochastique de Langevin minimal, n'est pas pleinement convaincante. Nous présentons ici une démonstration basée sur le théorème de régression et sur un développement systématique à basse température de la solution de l'équation de Fokker-Planck correspondante. Nous justifions aussi l'expression (86) dans la zone de transition entre le cas  $k_0 \equiv$  et le cas  $k_0 > 0$ , qui doit faire l'objet d'un traitement à part.

*Théorème de régression.* La connaissance du coefficient de diffusion spatiale passe par celle de la fonction de corrélation  $C_{ij}(\tau)$  des coordonnées du vecteur vitesse dans l'état stationnaire, voir les équations (80,81,82,83). Par isotropie, nous avons limitons au calcul de  $C_{zz}(\tau)$ ,  $\tau \geq 0$ . Dans le cadre de Fokker-Planck, nous disposons alors du théorème de régression suivant :

$$C_{zz}(\tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\hbar} \frac{d\epsilon_k}{dk} \hat{k}_z \Pi(\mathbf{k}, \tau) \quad (\text{B.1})$$

où la distribution  $\Pi(\mathbf{k}, \tau)$  a évolué pendant  $\tau$  selon l'équation de Fokker-Planck (50) à partir de la condition initiale

$$\Pi(\mathbf{k}, 0) = \frac{1}{\hbar} \frac{d\epsilon_k}{dk} \hat{k}_z \Pi_0(k) \quad (\text{B.2})$$

avec  $\Pi_0(k)$  la solution stationnaire normalisée, invariante par rotation, de cette même équation (50), et  $\hat{k}_z = k_z/k$ . Comme  $\Pi(\mathbf{k}, \tau)$  est de moment cinétique un, porté par l'axe  $Oz$ , nous pouvons poser  $\Pi(\mathbf{k}, \tau) = \Pi_1(k, \tau)\hat{k}_z$  et obtenir l'équation du mouvement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \Pi_1(k, \tau) = & -\frac{2F(k)\Pi_1(k, \tau)}{\hbar k} - \frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial k} [F(k)\Pi_1(k, \tau)] + \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2}{\partial k^2} [D_{\parallel}(k)\Pi_1(k, \tau)] \\ & + \frac{1}{\hbar^2 k} \frac{\partial}{\partial k} \{ [4D_{\parallel}(k) - 2D_{\perp}(k)]\Pi_1(k, \tau) \} + \frac{1}{\hbar^2 k^2} [2D_{\parallel}(k) - 4D_{\perp}(k)]\Pi_1(k, \tau) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

L'équation (72) permettrait d'exprimer  $\Pi_0(k)$  en termes de la force moyenne  $F(k)$  et des coefficients de diffusion en impulsion  $D_{\parallel, \perp}(k)$ . Nous trouvons plus éclairant de l'écrire sous la forme  $\Pi_0(k) = \exp(-\beta\tilde{\epsilon}_k)/Z$ , où  $Z$  est un facteur de normalisation, et d'éliminer au contraire la force  $F(k)$  au profit de la relation de dispersion effective  $\tilde{\epsilon}_k$ . Comme nous l'apprend d'ailleurs la comparaison des équations (72,73), celle-ci ne diffère pas de la vraie relation de dispersion  $\epsilon_k$  avant l'ordre 4 en  $k - k_0$  :

$$\tilde{\epsilon}_k \underset{k \rightarrow k_0}{=} \epsilon_k + O(k - k_0)^4 \underset{k \rightarrow k_0}{=} \Delta_* + \frac{\hbar^2(k - k_0)^2}{2m_*} + \frac{\hbar^2(k - k_0)^3 b}{3m_*} + \frac{\hbar^2(k - k_0)^4 \ell^2}{4m_*} + O(k - k_0)^5 \quad (\text{B.4})$$

En d'autres termes, il ne faut croire aux prédictions tirées de l'équation de Fokker-Planck (une approximation de l'équation maîtresse (47) dans la limite (3)) que si elles mettent en jeu la masse effective  $m_*$  et la longueur  $b$ , communes

55. Une compensation similaire apparaît dans la référence [21].

à  $\tilde{\epsilon}_k$  et  $\epsilon_k$ , mais pas la longueur  $\ell$  ni les coefficients d'ordre supérieur dans le développement (B.4). Effectuons une dernière transformation : l'opérateur sur les fonctions de  $k$  défini par le second membre de l'équation (B.3) n'est pas autoadjoint, mais peut l'être rendu par le changement de fonction  $\Pi_1(k) = k^{-1} \exp(-\beta\tilde{\epsilon}_k/2)\psi(k)$ . Après intégration temporelle formelle, nous aboutissons pour  $\tau \geq 0$  à la belle écriture (le facteur 3 au dénominateur vient de l'intégration angulaire) :

$$C_{zz}(\tau) = \frac{\langle \psi_S | \exp(-\mathcal{H}_1 \tau) | \psi_S \rangle}{3\hbar^2 \int_0^{+\infty} dk k^2 e^{-\beta\tilde{\epsilon}_k}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\langle \psi_S | \phi_n \rangle|^2 e^{-\omega_n \tau}}{3\hbar^2 \int_0^{+\infty} dk k^2 e^{-\beta\tilde{\epsilon}_k}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathcal{H}_1 = -\frac{d}{dk} \frac{D_{//}(k)}{\hbar^2} \frac{d}{dk} + U_1(k) \\ \langle k | \psi_S \rangle = k \frac{d\tilde{\epsilon}_k}{dk} e^{-\beta\tilde{\epsilon}_k/2} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Nous avons introduit la décomposition spectrale du hamiltonien fictif  $\mathcal{H}_1$  autoadjoint pour le produit scalaire unidimensionnel  $\langle \phi_a | \phi_b \rangle = \int_0^{+\infty} dk \phi_a^*(k) \phi_b(k)$ , l'état propre  $|\phi_n\rangle$  de valeur propre  $\omega_n$  étant normalisé. Le potentiel vaut

$$U_1(k) = \frac{1}{\hbar^2} \left[ \frac{1}{4} D_{//}(k) \left( \beta \frac{d\tilde{\epsilon}_k}{dk} \right)^2 - \frac{1}{2} D_{//}(k) \beta \frac{d^2 \tilde{\epsilon}_k}{dk^2} - \frac{1}{2} \frac{dD_{//}(k)}{dk} \beta \frac{d\tilde{\epsilon}_k}{dk} - \frac{D_{//}(k)}{k} \beta \frac{d\tilde{\epsilon}_k}{dk} + \frac{1}{k} \frac{dD_{//}(k)}{dk} + \frac{2D_{\perp}(k)}{k^2} \right] \quad (\text{B.6})$$

Dans le cas  $k_0 > 0$ . Pour prendre la limite de basse température dans le cas  $k_0 > 0$ , nous effectuons un changement d'échelle adapté sur le vecteur d'onde et le temps en posant  $k - k_0 = xk_*$ ,  $\tau = \bar{\tau}/\Gamma$ , et donc  $\mathcal{H}_1 = \bar{\mathcal{H}}_1 \Gamma$ ,  $\omega_n = \bar{\omega}_n \Gamma$  et  $\phi_n(k) = k_*^{-1/2} \bar{\phi}_n(x)$ , avec le nombre d'onde thermique  $k_* = (m_* k_B T)^{1/2}/\hbar$  et le taux  $\Gamma$  donné par l'équation (88). Il reste à développer  $\bar{\mathcal{H}}_1$  en puissances de  $k_*$  à  $x$  fixé ( $x$  décrit  $\mathbb{R}$  dans cette limite), puis à traiter les ordres successifs par la théorie des perturbations :

$$\bar{\mathcal{H}}_1 = -\frac{d}{dx} \frac{D_{//}(k_0 + xk_*)}{D_{//}(k_0)} \frac{d}{dx} + \frac{\hbar^2 k_*^2}{D_{//}(k_0)} U(k_0 + xk_*) \underset{k_* \rightarrow 0}{x \text{ fixé}} \bar{\mathcal{H}}_1^{(0)} + \bar{\mathcal{H}}_1^{(1)} + \bar{\mathcal{H}}_1^{(2)} + \dots \quad (\text{B.7})$$

On aura besoin aussi de développer la fonction d'onde source à l'ordre sous-dominant et le dénominateur de  $C_{zz}(\tau)$  dans l'équation (B.5) à l'ordre dominant :

$$\langle k | \psi_S \rangle \underset{k_* \rightarrow 0}{x \text{ fixé}} \frac{\hbar^2 k_0 k_*}{m_*} e^{-\beta\Delta_* / 2} x e^{-x^2/4} \left[ 1 + x \left( \frac{k_*}{k_0} + k_* b \right) - \frac{1}{6} k_* b x^3 + O(k_*^2) \right], \quad \int_0^{+\infty} dk k^2 e^{-\beta\tilde{\epsilon}_k} \underset{k_* \rightarrow 0}{\sim} k_0^2 k_* e^{-\beta\Delta_*} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2/2} \quad (\text{B.8})$$

À l'ordre zéro en  $k_*$ , on tombe sur un hamiltonien d'oscillateur harmonique unidimensionnel réduit (masse égale à 1/2, constante de Planck réduite égale à 1, pulsation d'oscillation égale à 1) et de spectre  $\bar{\omega}_n^{(0)} = n$  :

$$\bar{\mathcal{H}}_1^{(0)} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad \text{avec} \quad \hat{a} = \frac{1}{2} x + \frac{d}{dx}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{2} x - \frac{d}{dx}, \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (\text{B.9})$$

À l'ordre dominant, la fonction d'onde source est donc proportionnelle à la fonction d'onde  $\bar{\phi}_1^{(0)}(x)$  du premier état excité de l'oscillateur harmonique. La contribution des états excités  $n > 0$  dans l'équation (B.5) est ainsi dominée par  $n = 1$  et l'on garde

$$C_{zz}^{n \neq 0}(\tau) \underset{k_* \rightarrow 0}{\sim} \frac{k_B T}{3m_*} e^{-\bar{\tau}} \quad (\text{B.10})$$

On justifie ainsi le premier terme entre crochets dans l'équation (85). La contribution de  $n = 0$  est plus délicate à obtenir. En effet, le recouvrement de  $\psi_S$  avec l'état fondamental  $\bar{\phi}_0$  est nul à l'ordre de  $\bar{\mathcal{H}}_1^{(0)}$ , comme la pulsation propre  $\omega_0$  de l'état fondamental, ce qui conduit à une forme indéterminée 0/0 après intégration de  $C_{zz}(\tau)$  sur le temps comme dans l'équation (83). Il faut aller à l'ordre un en  $k_*$  pour obtenir un recouvrement non nul,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_1^{(1)} &= k_* \frac{dD_{//}(k_0)}{D_{//}(k_0)} \left( -\frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} + \frac{1}{4} x^3 - x \right) + k_* b \left( \frac{1}{2} x^3 - x \right) - \frac{k_*}{k_0} x = \left( \frac{k_* \frac{dD_{//}(k_0)}{dk}(k_0)}{D_{//}(k_0)} + \frac{3}{2} k_* b \right) (\hat{a}^{\dagger 2} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^2) \\ &+ \frac{1}{2} k_* b (\hat{a}^{\dagger 3} + \hat{a}^3) + \left( \frac{1}{2} k_* b - \frac{k_*}{k_0} \right) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \implies |\bar{\phi}_0\rangle \underset{k_* \rightarrow 0}{=} |\bar{\phi}_0^{(0)}\rangle - \left( \frac{1}{2} k_* b - \frac{k_*}{k_0} \right) |\bar{\phi}_1^{(0)}\rangle - \frac{k_* b}{\sqrt{6}} |\bar{\phi}_3^{(0)}\rangle + O(k_*^2) \\ &\implies \frac{|\langle \psi_S | \phi_0 \rangle|^2}{3\hbar^2 \int_0^{+\infty} dk k^2 e^{-\beta\tilde{\epsilon}_k}} \underset{k_* \rightarrow 0}{\sim} \frac{k_B T}{3m_*} \left( \frac{2k_*}{k_0} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

et à l'ordre deux en  $k_*$  pour obtenir une pulsation propre non nulle dans l'état fondamental :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_1^{(2)} &= \frac{k_*^2 \frac{d^2 D_{//}(k_0)}{dk^2} \left[ -\frac{d}{dx} x^2 \frac{d}{dx} + \frac{1}{4} x^4 - \frac{3}{2} x^2 \right] + \frac{k_*^2 \frac{dD_{//}(k_0)}{dk} \left[ \frac{b}{2} (x^4 - 3x^2) + \frac{1-x^2}{k_0} \right] + \frac{1}{4} k_*^2 b^2 x^4 + \frac{1}{2} k_*^2 \ell^2 (x^4 - 3x^2)}{2D_{//}(k_0)} \\ &+ \frac{k_*^2}{k_0^2} (1 - k_0 b) x^2 + \frac{2k_*^2 D_{\perp}(k_0)}{k_0^2 D_{//}(k_0)} \implies \bar{\omega}_0 \underset{k_* \rightarrow 0}{\sim} \langle \bar{\phi}_0^{(0)} | \bar{\mathcal{H}}_1^{(2)} | \bar{\phi}_0^{(0)} \rangle + \sum_{n>0} \frac{|\langle \bar{\phi}_n^{(0)} | \bar{\mathcal{H}}_1^{(1)} | \bar{\phi}_0^{(0)} \rangle|^2}{-n} = \frac{2k_*^2 D_{\perp}(k_0)}{k_0^2 D_{//}(k_0)} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

sachant que  $\langle x^2 \rangle = 1$ ,  $\langle x^4 \rangle = 3$  et  $\langle \frac{d}{dx} x^2 \frac{d}{dx} \rangle = -3/4$  où la moyenne est prise dans  $|\bar{\phi}_0^{(0)}\rangle$ . On justifie ainsi le second terme entre crochets dans l'équation (85) et donc, au total, l'équivalent (86) du coefficient de diffusion spatiale<sup>56 57</sup>.

Entre les cas  $k_0 \equiv 0$  et  $k_0 > 0$ . Au point de transition entre ces deux cas, la masse effective  $m_*$  est infinie,  $1/m_* = 0$ , la relation de dispersion  $\epsilon_k$  varie quartiquement en nombre d'onde au voisinage de son minimum, et aucun des calculs du coefficient de diffusion spatiale présentés jusqu'ici dans ce travail ne s'applique. Pour raccorder les deux cas limites, il faut utiliser une approximation de degré 4 pour la relation de dispersion,

$$\epsilon_k \simeq \Delta_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} + \frac{\hbar^2 k^2}{4m} (kl)^2 \quad (\text{B.13})$$

où la longueur  $l$  est essentiellement constante mais où la variation de la masse effective  $m_{\text{eff}}$  en  $k = 0$  (à ne pas confondre avec celle  $m_*$  à l'endroit du minimum) décrit le passage d'une relation de dispersion atteignant son minimum en  $k = 0$  (cas  $1/m_{\text{eff}} > 0$ ) à une relation de dispersion atteignant son minimum en un nombre d'onde non nul (cas  $1/m_{\text{eff}} < 0$ ). On fait ensuite un grossissement autour du point de transition, en regardant dans l'espace des  $1/m_{\text{eff}}$  et des  $k$  à des échelles  $T^\alpha$  telles que les deux derniers termes de l'équation (B.13) soient du même ordre de grandeur  $\approx k_B T$ . Nous introduisons donc le nombre d'onde adimensionné  $\kappa$  et le paramètre sans dimension  $\delta$  qui pilote la transition :

$$\kappa = k \left( \frac{\hbar^2 l^2}{mk_B T} \right)^{1/4} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{m}{m_{\text{eff}}} \left( \frac{\hbar^2}{mk_B T l^2} \right)^{1/2} \quad (\text{B.14})$$

Il reste à passer à la limite  $T \rightarrow 0$  à  $\kappa$  et  $\delta$  fixés. On approxime la force moyenne et les coefficients de diffusion en impulsion par leur ordre dominant au point de transition, c'est-à-dire sous la forme réduite (53) par  $\mathcal{F}(k) \simeq -\gamma_0 e_k$  et

56. Il existe une façon rapide et élégante de retrouver ces résultats. En restreignant l'équation de Fokker-Planck dépendant du temps aux distributions invariantes par rotation, puis en appliquant le même changement de fonction qu'à  $\Pi_1(k)$ , on fait apparaître le hamiltonien fictif autoadjoint  $\mathcal{H}_0$ . Dans ce secteur isotrope, l'équation de Fokker-Planck admet une solution stationnaire non nulle  $\Pi_0$ . L'état fondamental  $|\psi_0\rangle$  de  $\mathcal{H}_0$  est donc connu,  $\psi_0(k) = \mathcal{N}_0 k \exp(-\beta \tilde{\epsilon}_k/2)$  avec  $\mathcal{N}_0 = [\int_0^{+\infty} dk k^2 \exp(-\beta \tilde{\epsilon}_k)]^{1/2}$ , et sa valeur propre est exactement nulle. Or, le calcul le montre, on a simplement  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0 + 2D_{\perp}(k)/(\hbar k)^2$ , si bien que  $\mathcal{H}_1$  diffère de  $\mathcal{H}_0$  par un terme du second ordre  $2k_*^2 D_{\perp}(k_0 + xk_*)/[D_{//}(k_0)(k_0 + xk_*)^2]$ . L'état fondamental de  $\mathcal{H}_1$  coïncide donc avec  $|\psi_0\rangle$  à l'ordre sous-dominant, et l'on a  $\langle \psi_S | \phi_0 \rangle \sim \langle \psi_S | \psi_0 \rangle$ ; au même ordre, on peut remplacer  $d\tilde{\epsilon}_k/dk$  par  $d\tilde{\epsilon}_k/dk$  dans  $\langle k | \psi_S \rangle$ . Une simple intégration par parties (il faut intégrer  $\frac{d\tilde{\epsilon}_k}{dk} \exp(-\beta \tilde{\epsilon}_k)$  et dériver  $k^2$ ), puis le remplacement des facteurs lentement variables  $k$  au numérateur et  $k^2$  au dénominateur par  $k_0$  et  $k_0^2$ , redonnent alors l'équivalent du recouvrement de l'équation (B.11). De même, à l'ordre dominant, la pulsation propre  $\omega_0$  de l'état fondamental de  $\mathcal{H}_1$  s'obtient en traitant l'écart de  $\mathcal{H}_1$  à  $\mathcal{H}_0$  au premier ordre de la théorie des perturbations,  $\omega_0 \sim \langle \psi_0 | 2D_{\perp}(k)/(\hbar k)^2 | \psi_0 \rangle = \int_0^{+\infty} dk 2D_{\perp}(k) \exp(-\beta \tilde{\epsilon}_k) / \int_0^{+\infty} dk (\hbar k)^2 \exp(-\beta \tilde{\epsilon}_k)$ . En approximant les facteurs lentement variables  $2D_{\perp}(k)$  et  $(\hbar k)^2$  par leur valeur en  $k_0$ , on retrouve l'équivalent de  $\omega_0$  donné dans l'équation (B.12).

57. Nous avons aussi vérifié avec succès la validité à basse température du coefficient de diffusion spatiale prédit par l'approximation de Fokker-Planck en résolvant numériquement l'équation maîtresse (47) pour le modèle simple  $\epsilon_k = \Delta_* + (\hbar^2/2m_*)[(k^2 - k_0^2)/2k_0]^2$  ( $m_* > 0, k_0 > 0$ ) et  $R_k(u, u', w) = (1 - \eta u^2)(1 - \eta u'^2)$ , dans lequel  $\gamma = \frac{32}{1575}(3\eta^2 - 10\eta + 15)(15\eta^2 - 42\eta + 35)$ ,  $\mathcal{D}_{\perp}(k_0) = \frac{32}{1575}(3\eta^2 - 10\eta + 15)(3\eta^2 - 14\eta + 35)$  et la force moyenne  $F(k_0)$  est non nulle à l'ordre  $T^{-9}$  (sauf si  $\eta = 0$ ). Le calcul utilise le théorème de régression quantique pour accéder à la fonction de corrélation de la vitesse, que l'on reporte ensuite dans l'expression (83) de  $\mathcal{D}^{\text{sp}}$ . Dans le secteur de moment cinétique nul, l'équation maîtresse s'écrit  $\partial_t \Pi_0(k, t) = -\gamma(k) \Pi_0(k, t) + \int_0^{+\infty} dk' \gamma_0(k' \rightarrow k) \Pi_0(k', t)$ ; en pratique, on assure la conservation de la probabilité totale en calculant numériquement tous les taux d'alimentation  $\gamma_0(k' \rightarrow k)$  puis en déduisant les taux de départ de la relation  $\gamma(k) = \int_0^{+\infty} dk' (k'/k)^2 \gamma_0(k \rightarrow k')$ . Dans le secteur de moment cinétique un, l'équation maîtresse s'écrit  $\partial_t \Pi_1(k, t) = -\gamma(k) \Pi_1(k, t) + \int_0^{+\infty} dk' \gamma_1(k' \rightarrow k) \Pi_1(k', t)$  (les taux de départ sont les mêmes). La microréversibilité impose  $k^2 \exp(\beta \epsilon_k) \gamma_n(k' \rightarrow k) = k'^2 \exp(\beta \epsilon_{k'}) \gamma_n(k \rightarrow k')$ ,  $n = 0$  ou  $1$ , ce qui permet de se ramener à des opérateurs intégraux à noyaux symétriques (numériquement avantageux) par le changement de fonction  $\Pi_n(k) = k^{-1} \exp(-\beta \epsilon_k/2) \psi_n(k)$ . L'expression (B.5) s'applique alors, pourvu que l'on y remplace  $\tilde{\epsilon}_k$  par  $\epsilon_k$  et  $-\mathcal{H}_1$  par l'opérateur intégral reliant  $\partial_t \psi_1$  à  $\psi_1$ .



$\mathcal{D}_\perp(k) \simeq \mathcal{D}_\parallel(k) \simeq \gamma_0$ , où  $\gamma_0$  est le coefficient de frottement réduit à la transition<sup>58</sup>. Il reste à introduire le temps réduit

$$\theta = t/t_0 \quad \text{avec} \quad t_0 \equiv \frac{\hbar}{mc^2} \frac{15}{\pi^5} \left( \frac{mc^2}{k_B T} \right)^{17/2} \frac{(\hbar \rho^{1/3}/mc)^6}{\gamma_0 m c l / \hbar} \quad (\text{B.15})$$

pour que la marche au hasard de la quasi-particule  $\gamma$  dans l'espace de Fourier soit décrite par un processus stochastique adimensionné universel à un paramètre  $\delta$  et de même bruit gaussien que l'équation (59),

$$d\mathbf{k} = -d\theta \mathbf{grad}_k \varepsilon(\mathbf{k}) + \sqrt{2d\theta} \boldsymbol{\eta} \quad \text{avec} \quad \varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \kappa^2 \delta + \frac{1}{4} \kappa^4 \quad (\text{B.16})$$

Pour en extraire le coefficient de diffusion spatiale au sens de l'équation (83), nous passons par le théorème de régression et l'équation de Fokker-Planck comme au début de cette [Annexe B](#) et obtenons (en posant  $\varepsilon' = d\varepsilon(\mathbf{k})/d\mathbf{k}$ )

$$\mathcal{D}^{\text{spa}} \stackrel{\delta \text{ fixé}}{\underset{T \rightarrow 0}{\sim}} \frac{\hbar}{m} \frac{\gamma_0^{-1} \Delta^{\text{spa}}(\delta)}{\frac{\pi^5}{15} \left( \frac{mc}{\hbar \rho^{1/3}} \right)^6 \left( \frac{k_B T}{mc^2} \right)^7} \quad \text{avec} \quad \Delta^{\text{spa}}(\delta) = \frac{\langle s | \hat{h}^{-1} | s \rangle}{3 \int_0^{+\infty} d\kappa \kappa^2 e^{-\varepsilon(\kappa)}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \hat{h} = -\frac{d^2}{d\kappa^2} + \frac{2}{\kappa^2} + \frac{1}{4} \varepsilon'^2 - \frac{1}{\kappa} \varepsilon' - \frac{1}{2} \varepsilon'' \\ \langle \kappa | s \rangle = \kappa \varepsilon' e^{-\varepsilon(\kappa)/2} \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Nous avons ici intégré formellement sur le temps la fonction de corrélation de la vitesse écrite comme dans l'équation (B.5), ce qui a fait apparaître l'inverse de l'opérateur hamiltonien fictif  $\hat{h}$ . Il se trouve que l'on sait déterminer analytiquement l'action de  $\hat{h}^{-1}$  sur le vecteur source  $|s\rangle$  (c'est facile à vérifier en faisant agir  $\hat{h}$  sur le résultat) :

$$\langle \kappa | \hat{h}^{-1} | s \rangle = \kappa^2 e^{-\varepsilon(\kappa)/2} \implies \Delta^{\text{spa}}(\delta) = \frac{\int_0^{+\infty} d\kappa \kappa^3 \varepsilon' e^{-\varepsilon(\kappa)}}{3 \int_0^{+\infty} d\kappa \kappa^2 e^{-\varepsilon(\kappa)}} \quad (\text{B.18})$$

Une simple intégration par parties au numérateur de (B.18) conduit alors au résultat remarquable  $\Delta^{\text{spa}}(\delta) \equiv 1$ ,<sup>59</sup> en accord parfait avec la prédiction (86), qui vaut donc partout dans la zone de transition entre les cas  $k_0 \equiv 0$  et  $k_0 > 0$ .

## Références

- [1] A. Nocolis, R. Penco, « [Mutual interactions of phonons, rotons and gravity](#) », Phys. Rev. B **97**, 134516 (2018).
- [2] Y. Castin, A. Sinatra, H. Kurkjian, « [Landau Phonon-Roton Theory Revisited for Superfluid He-4 and Fermi Gases](#) », Phys. Rev. Lett. **119**, 260402 (2017).
- [3] A.L. Gaunt, T.F. Schmidutz, I. Gotlibovych, R.P. Smith, Z. Hadzibabic, « [Bose-Einstein condensation of atoms in a uniform potential](#) », Phys. Rev. Lett. **110**, 200406 (2013).
- [4] B. Mukherjee, Zhenjie Yan, P.B. Patel, Z. Hadzibabic, T. Yefsah, J. Struck, M.W. Zwierlein, « [Homogeneous Atomic Fermi Gases](#) », Phys. Rev. Lett. **118**, 123401 (2017).
- [5] K. Hueck, N. Luick, L. Sobirey, J. Siegl, T. Lompe, H. Moritz, « [Two-Dimensional Homogeneous Fermi Gases](#) », Phys. Rev. Lett. **120**, 060402 (2018).
- [6] P.B. Patel, Zhenjie Yan, B. Mukherjee, R.J. Fletcher, J. Struck, M.W. Zwierlein, « [Universal Sound Diffusion in a Strongly Interacting Fermi Gas](#) », arXiv:1909.02555 (2019).
- [7] K.M. O'Hara, S.L. Hemmer, M.E. Gehm, S.R. Granade, J.E. Thomas, « [Observation of a strongly interacting degenerate Fermi gas of atoms](#) », Science **298**, 2179 (2002).
- [8] T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Khaykovich, K.M. Magalhães, S.J.J.M.F. Kokkelmans, G.V. Shlyapnikov, C. Salomon, « [Measurement of the interaction energy near a Feshbach resonance in a  \$^6\text{Li}\$  Fermi gas](#) », Phys. Rev. Lett. **91**, 020402 (2003).
- [9] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J.H. Denschlag, R. Grimm, « [Collective excitations of a degenerate gas at the BEC-BCS crossover](#) », Phys. Rev. Lett. **92**, 203201 (2004).
- [10] M.W. Zwierlein, C.A. Stan, C.H. Schunck, S.M.F. Raupach, A.J. Kerman, W. Ketterle, « [Condensation of pairs of fermionic atoms near a Feshbach resonance](#) », Phys. Rev. Lett. **92**, 120403 (2004).
- [11] S. Nascimbène, N. Navon, K.J. Jiang, F. Chevy, C. Salomon, « [Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas](#) », Nature **463**, 1057 (2010).

58. On vérifie en effet dans l'équation (40) que, pour la relation de dispersion (B.13) et pour une limite finie de  $d(m/m_{\text{eff}})/d\rho$  à la transition  $\delta = 0$ ,  $R_k(u, u', w) \rightarrow (1/2)(\check{\varepsilon}_{x,0} + w\check{\varepsilon}_{\rho,0})$  où  $\check{\varepsilon}_{x,0}$  et  $\check{\varepsilon}_{\rho,0}$  sont les valeurs en  $\delta = 0$  de  $\check{\varepsilon}_x$  et  $\check{\varepsilon}_\rho$  définis par l'équation (45). C'est bien ce qu'on obtient en prenant  $m/m_* = 0$  dans l'équation (46).

59. On l'aura compris, cette conclusion est indépendante de la forme particulière de la relation de dispersion réduite  $\varepsilon(\mathbf{k})$ .



- [12] M.J.H. Ku, A.T. Sommer, L.W. Cheuk, M.W. Zwierlein, « [Revealing the superfluid lambda transition in the universal thermodynamics of a unitary Fermi gas](#) », *Science* **335**, 563 (2012).
- [13] W. Ketterle, « Making, probing and understanding ultracold Fermi gases », section 2, in *Ultra-cold Fermi gases*, Cours de l'école de physique Enrico Fermi 2006 de Varenne, édité par M. Inguscio, W. Ketterle, C. Salomon (SIF, Bologne, 2007).
- [14] Y. Castin, A. Sinatra, H. Kurkjian, « [Erratum: Landau Phonon-Roton Theory Revisited for Superfluid He-4 and Fermi Gases \[Phys. Rev. Lett. \*\*119\*\*, 260402 \(2017\)\]](#) », *Phys. Rev. Lett.* **123**, 239904(E) (2019).
- [15] R. Combescot, M. Yu. Kagan, S. Stringari, « [Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover](#) », *Phys. Rev. A* **74**, 042717 (2006).
- [16] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, « [Concavity of the collective excitation branch of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover](#) », *Phys. Rev. A* **93**, 013623 (2016).
- [17] Y. Castin, I. Ferrier-Barbut, C. Salomon, « [La vitesse critique de Landau d'une particule dans un superfluide de fermions](#) », *Comptes Rendus Physique* **16**, 241 (2015).
- [18] L. Landau, I. Khalatnikov, « Teoriya vyazkosti Geliya-II », *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **19**, 637 (1949) [en anglais dans *Collected papers of L.D. Landau*, chapitre 69, p. 494-510, édité par D. ter Haar (Pergamon, New York, 1965)].
- [19] N. Lerch, L. Bartosch, P. Kopietz, « [Absence of Fermionic Quasiparticles in the Superfluid State of the Attractive Fermi Gas](#) », *Phys. Rev. Lett.* **100**, 050403 (2008).
- [20] R. Haussmann, M. Punk, W. Zwerger, « [Spectral functions and rf response of ultracold fermionic atoms](#) », *Phys. Rev. A* **80**, 063612 (2009).
- [21] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, « [Three-phonon and four-phonon interaction processes in a pair-condensed Fermi gas](#) », *Annalen der Physik* **529**, 1600352 (2017).
- [22] I.M. Khalatnikov, « Pogloshcheniye zvuka v geliu II », *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20**, 243 (1950); I.M. Khalatnikov, D.M. Chernikova, « [Relaxation phenomena in superfluid helium](#) », *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **49**, 1957 (1965).
- [23] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, « [Brouillage thermique d'un gaz cohérent de fermions](#) », *Comptes Rendus Physique* **17**, 789 (2016).
- [24] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, collection Savoirs Actuels (InterEditions/Éditions du CNRS, Paris, 1988).
- [25] D.T. Son, M. Wingate, « [General coordinate invariance and conformal invariance in nonrelativistic physics: Unitary Fermi gas](#) », *Ann. Physics* **321**, 197 (2006).
- [26] G. Bighin, L. Salasnich, P.A. Marchetti, F. Toigo, « [Beliaev damping of the Goldstone mode in atomic Fermi superfluids](#) », *Phys. Rev. A* **92**, 023638 (2015).
- [27] Y. Castin, A. Sinatra, H. Kurkjian, « [Le couplage de Landau phonon-roton revisité pour l'hélium 4 liquide et étendu aux gaz de fermions superfluides](#) », hal-01570314v3 (2019).
- [28] Y. Castin, « [Étalement de la phase et cohérence temporelle d'un gaz de fermions condensé par paires à basse température](#) », *Comptes Rendus Physique* **20**, 540 (2019).
- [29] P. Langevin, « Sur la théorie du mouvement brownien », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **146**, 530 (1908).
- [30] M. Marini, F. Pistolesi, G.C. Strinati, « [Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation: Analytic results for the crossover in three dimensions](#) », *Eur. Phys. J. B* **1**, 151 (1998).
- [31] A. Schirotzek, Y. Shin, C.H. Schunck, W. Ketterle, « [Determination of the superfluid gap in atomic Fermi gases by quasiparticle spectroscopy](#) », *Phys. Rev. Lett.* **101**, 140403 (2008).
- [32] Y. Nishida, D.T. Son, «  [\$\epsilon\$  Expansion for a Fermi gas at infinite scattering length](#) », *Phys. Rev. Lett.* **97**, 050403 (2006).
- [33] D.S. Petrov, C. Salomon, G.V. Shlyapnikov, « [Scattering properties of weakly bound dimers of fermionic atoms](#) », *Phys. Rev. A* **71**, 012708 (2005).
- [34] I.V. Brodsky, A.V. Klaptsov, M. Yu. Kagan, R. Combescot, X. Leyronas, « [Bound states of three and four resonantly interacting particles](#) », *Pis'ma v ZhETF* **82**, 306 (2005) [*JETP Letters* **82**, 273 (2005)].
- [35] G.V. Skorniakov, K.A. Ter-Martirosian, « [Three-body problem for short range forces. I. Scattering of low energy neutrons by deuterons](#) », *Zh. Eksp. Teor. Phys.* **31**, 775 (1957) [*Sov. Phys. JETP* **4**, 648 (1957)].
- [36] J. Levinsen, D.S. Petrov, « [Atom-dimer and dimer-dimer scattering in fermionic mixtures near a narrow Feshbach resonance](#) », *Eur. Phys. J. D* **65**, 67 (2011).