



HAL
open science

Remarques sur une somme liée à la fonction de Möbius

Régis de la Bretèche, François Dress, Gérald Tenenbaum

► **To cite this version:**

Régis de la Bretèche, François Dress, Gérald Tenenbaum. Remarques sur une somme liée à la fonction de Möbius. *Mathematika*, 2020, 66 (2), pp.416-421. 10.1112/mtk.12021 . hal-02890659

HAL Id: hal-02890659

<https://hal.science/hal-02890659v1>

Submitted on 12 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Remarques sur une somme liée à la fonction de Möbius

Régis de la Bretèche, François Dress & Gérald Tenenbaum

Abstract. For integer $n \geq 1$ and real $z \geq 1$, define $M(n, z) := \sum_{d|n, d \leq z} \mu(d)$ where μ denotes the Möbius function. Put $\mathcal{L}(y) := \exp\{(\log y)^{3/5}/(\log_2 y)^{1/5}\}$ ($y \geq 3$). We show that, for a suitable, explicit constant $L > 0$ and some constant $c > 0$, we have $S(x, z) = Lx + O(x/\mathcal{L}(3\xi)^c)$ uniformly for $x \geq 1$, $\xi \leq z \leq x/\xi$.

Keywords : Möbius function, average order, Selberg's sieve, Bombieri-Vinogradov theorem.

2010 Mathematics Subject Classification : 11A25, 11N37, 11N56.

1. Introduction

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x, z \in \mathbb{R}^+$, posons

$$M(n, z) := \sum_{d|n, d \leq z} \mu(d), \quad S(x, z) := \sum_{n \leq x} M(n, z)^2, \quad S(z) := \sum_{m, n \leq z} \frac{\mu(m)\mu(n)}{[m, n]}.$$

La somme $S(x, z)$ intervient dans divers problèmes arithmétiques, notamment le crible de Selberg [3], la méthode de Vaughan pour prouver le théorème de Bombieri-Vinogradov [9], et le problème de Goldbach ternaire — cf. [4], formule (5.6). La question des tailles normale ou maximale de $|M(n, z)|$ est également intéressante — voir en particulier [5], [6].

Nous avons trivialement

$$(1.1) \quad S(x, z) = xS(z) + O(z^2) \quad (x \geq 1, z \geq 1).$$

Pour $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$, définissons une fonction fortement multiplicative par la formule $f(n; s) := \prod_{p|n} |1 - p^{-s}|^2$. Il a été montré dans [2] que

$$(1.2) \quad S(z) = L + o(1) \quad (z \rightarrow \infty),$$

avec

$$L = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{f(p; i\tau) - 1}{p}\right) \frac{d\tau}{\tau^2}.$$

D'après [1], nous avons également, pour une constante $c > 0$ convenable,

$$(1.3) \quad S(z) = L + O(\mathcal{L}(z)^{-c}) \quad (z \geq 16)$$

avec $\mathcal{L}(z) := \exp\{(\log z)^{3/5}/(\log_2 z)^{1/5}\}$. Cette estimation ne sera pas utilisée dans la suite.

Il résulte en particulier de (1.1) et de (1.2) sous la forme faible $S(z) \ll 1$ que

$$(1.4) \quad S(x, z) \ll x + z^2 \quad (x \geq 1, z \geq 1).$$

La première motivation du présent travail consiste à préciser la majoration (1.4) lorsque $z^2 \gg x$. Nous montrons notamment que

$$(1.5) \quad S(x, z) \ll x \quad (x \geq 1, z \geq 1).$$

Nous pouvons établir le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Il existe une constante absolue $c > 0$ telle que, pour tous $\xi \geq 1$, $\xi \leq z \leq x/\xi$, nous ayons*

$$(1.6) \quad S(x, z) = Lx + O\left(\frac{x}{\mathcal{L}(3\xi)^c}\right).$$

Remarque. On déduit (1.3) de (1.2) et (1.6) en choisissant par exemple $x = z^3$.

2. Démonstration

Désignons par $k(n)$ le noyau sans facteur carré d'un entier n , par $\varphi(n)$ la valeur en n de l'indicatrice d'Euler, et posons

$$L(m) := \frac{\varphi(m)^2}{2\pi m^2 k(m)} \int_{\mathbb{R}} f(m; i\tau) \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(1 + \frac{f(p; i\tau)}{p}\right) \frac{d\tau}{\tau^2} \quad (m \geq 1).$$

Cette quantité est bien définie puisque l'intégrande est, pour chaque valeur de m , classiquement comparable à $1/|\zeta(1+i\tau)|^2$. Un calcul de routine permet de vérifier que

$$\sum_{m \geq 1} \frac{L(m)}{m} = L.$$

Posons

$$\psi(n) := \prod_{p|n} (p+1), \quad r(n) := \prod_{p|n} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{p}}\right) \quad (n \geq 1).$$

Le lemme suivant, adapté de l'une des approches développées dans [2], constitue l'ingrédient essentiel de la preuve. Nous utiliserons à plusieurs reprises la formule

$$(2.1) \quad \sum_{k \leq y} \mu(hk)^2 = \frac{6yh}{\pi^2 \psi(h)} + O\left(r(h)\sqrt{y}\right) \quad (h \geq 1, \mu(h)^2 = 1, y \geq 1)$$

établie dans [7] — formule (10.1).

Lemme 2.1. *Nous avons, uniformément pour $m \geq 1, y \geq 1$,*

$$(2.2) \quad T(y; m) := \frac{6}{\pi^2} \sum_{d, t \leq y} \frac{\mu(d)\mu(t)}{\psi([d, t, m])} = L(m) + O\left(\frac{1}{\mathcal{L}(y)^c \sqrt{\psi(m)}}\right),$$

où c est une constante positive convenable.

Démonstration. Il est aisé de constater que, pour chaque valeur de m , l'expression $T(y; m)$ tend vers une limite lorsque $y \rightarrow \infty$. En effet, notant $\psi_m(n) := \prod_{p|n, p \nmid m} (p+1)$, nous avons

$$(2.3) \quad \begin{aligned} T(y; m) &= \frac{6}{\pi^2 \psi(m)} \sum_{d, t \leq y} \frac{\mu(d)\mu(t)}{\psi_m(d)\psi_m(t)} \sum_{\substack{\delta | (d, t) \\ (\delta, m) = 1}} \delta \\ &= \frac{6}{\pi^2 \psi(m)} \sum_{\substack{\delta \leq y \\ (\delta, m) = 1}} \frac{\delta}{\psi(\delta)^2} \left(\sum_{d \leq y/\delta} \frac{\mu(d\delta)}{\psi_m(d)} \right)^2. \end{aligned}$$

Un argument standard d'intégration complexe implique que la somme intérieure en d est, par exemple, $\ll \psi(m)^{1/4} r(\delta) \mathcal{L}(2y/\delta)^{-c}$. En scindant la sommation extérieure selon les valeurs de $\lfloor y/\delta \rfloor$, on obtient alors, parallèlement au raisonnement tenu dans [2], la convergence souhaitée et la majoration

$$(2.4) \quad T(y; m) - \lim_{y \rightarrow \infty} T(y; m) \ll \frac{1}{\mathcal{L}(y)^c \sqrt{\psi(m)}}.$$

Pour la commodité du lecteur, indiquons quelques étapes de la preuve de cette estimation. Nous pouvons écrire

$$(2.5) \quad T(y; m) = \frac{6}{\pi^2 \psi(m)} \sum_{j \leq y^{1/4}} a_m(j, y) + O(R(y; m))$$

avec

$$a_m(j, y) := \sum_{\substack{y/(j+1) < \delta \leq y/j \\ (\delta, m)=1}} \frac{\delta \mu(\delta)^2}{\psi(\delta)^2} \left(\sum_{d \leq j} \frac{\mu(d\delta)}{\psi_m(d)} \right)^2 \ll \frac{\sqrt{\psi(m)}}{j \mathcal{L}(2j)^{2c}} \quad (j \leq y^{1/4}),$$

$$R(y; m) := \frac{1}{\psi(m)} \sum_{\substack{\delta \leq y^{3/4} \\ (\delta, m)=1}} \frac{\delta}{\psi(\delta)^2} \left(\sum_{d \leq y/\delta} \frac{\mu(d\delta)}{\psi_m(d)} \right)^2 \ll \frac{1}{\sqrt{\psi(m)} \mathcal{L}(y)^c}.$$

Pour évaluer le terme principal de (2.5), nous développons le carré et intervertissons les sommations dans l'expression de $a_m(j, y)$. Il vient

$$a_m(j, y) = \sum_{d, t \leq j} \frac{\mu(d)\mu(t)}{\psi_m(d)\psi_m(t)} \sum_{\substack{y/(j+1) < \delta \leq y/j \\ (\delta, dtm)=1}} \frac{\delta \mu(\delta)^2}{\psi(\delta)^2}.$$

La somme intérieure en δ peut être évaluée par la méthode usuelle d'intégration complexe en utilisant la majoration classique $\zeta(\frac{1}{2} + i\tau) \ll_\varepsilon 1 + |\tau|^{1/6+\varepsilon}$. Nous obtenons

$$\sum_{\substack{y/(j+1) < \delta \leq y/j \\ (\delta, dtm)=1}} \frac{\delta \mu(\delta)^2}{\psi(\delta)^2} = B \log \left(1 + \frac{1}{j} \right) \alpha(dtm) + O \left(\frac{r(dtm)j^{3/8}}{y^{3/8}} \right) \quad (j \leq y^{1/4}),$$

où l'on a posé

$$B := \prod_p \left(1 - \frac{3p+1}{p(p+1)^2} \right), \quad \alpha(n) := \prod_{p|n} \left(1 - \frac{p}{p^2+3p+1} \right) \quad (n \geq 1).$$

L'estimation (2.4) en découle ainsi que la majoration

$$\lim_{y \rightarrow \infty} T(y; m) = \frac{6B}{\pi^2 \psi(m)} \sum_{j \geq 1} \log \left(1 + \frac{1}{j} \right) \sum_{d, t \leq j} \frac{\alpha(dtm)\mu(d)\mu(t)}{\psi_m(d)\psi_m(t)} \ll \frac{1}{\sqrt{\psi(m)}}.$$

Il reste à identifier la limite apparaissant dans (2.4). À cette fin, nous observons que l'évaluation

$$(2.6) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 \pmod{h}}} \mu(n)^2 M(n, z)^2 = x \mu(h)^2 T(z; h) + O(z\sqrt{x}),$$

qui découle de (2.1), implique, via la formule de Plancherel

$$\int_0^\infty M(n, e^u)^2 e^{-2\sigma u} du = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(n; s) \frac{d\tau}{|s|^2} \quad (\sigma > 0),$$

que, pour $\sigma > 1/2$, $\mu(h)^2 = 1$,

$$x \int_0^\infty T(e^u; h) e^{-2\sigma u} du + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\sigma - 1/2}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 \pmod{h}}} \mu(n)^2 f(n; s) \frac{d\tau}{|s|^2} \sim x \lambda(h),$$

avec

$$\lambda(h) := \frac{\varphi(h)}{2\pi h^2} \int_{\mathbb{R}} f(h; s) \prod_{p \nmid h} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 + \frac{f(p; s)}{p} \right) \frac{d\tau}{|s|^2}.$$

En faisant tendre x vers l'infini, nous obtenons, toujours pour $\sigma > 1/2$, $\mu(h)^2 = 1$,

$$\int_0^\infty T(e^u; h)e^{-2\sigma u} du = \frac{\varphi(h)}{2\pi h^2} \int_{\mathbb{R}} f(h; s) \prod_{p \nmid h} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{f(p; s)}{p}\right) \frac{d\tau}{|s|^2}.$$

En notant que les deux membres sont prolongeables en fonctions analytiques de σ dans le demi-plan $\Re e \sigma > 0$ et en multipliant, comme dans [2], cette égalité par $1/\zeta(1 + 2\sigma)$, nous obtenons

$$\sigma \int_0^\infty T(e^u; m)e^{-\sigma u} du = L(m) + o(1) \quad (\sigma \rightarrow 0+),$$

après spécialisation $h = k(m)$. Compte tenu de (2.4), cela établit bien (2.2). \square

Nous sommes à présent en mesure de prouver le Théorème 1.1.

Lorsque $\xi \leq z \leq \sqrt{x}/\mathcal{L}(x)^{2c}$, en notant que l'on a identiquement $M(m, z) = M(k(m), z)$, nous pouvons écrire, grâce à (2.1),

$$S(x, z) = 1 + \sum_{m \leq x} \sum_{\substack{1 < k \leq x/m \\ k(m) | k}} \mu(k)^2 M(k, z)^2 = x \sum_{m \leq x} \frac{T(z; m)}{m} + O\left(\frac{x}{\mathcal{L}(x)^c}\right),$$

où le terme d'erreur peut être par exemple obtenu à l'aide d'une majoration de type Rankin. Il suffit alors d'appliquer (2.2) pour conclure dans ce cas compte tenu de la majoration triviale $L(m) \ll 1/\sqrt{k(m)}$.

Considérons ensuite le cas $\sqrt{x}\mathcal{L}(x)^{2c} < z \leq x/\xi$. Nous exploitons alors la symétrie des diviseurs d'un entier n autour de \sqrt{n} .

Notant $M^*(n, z) := \sum_{d|n, d < z} \mu(d)$, nous avons

$$\begin{aligned} (2.7) \quad S(x, z) - 1 &= \sum_{m \leq x} \sum_{\substack{z < k \leq x/m \\ k(m) | k}} \mu(k)^2 M^*(k, k/z)^2 \\ &= \sum_{m \leq x/z} \sum_{d, t \leq x/mz} \mu(d)\mu(t) \sum_{z \max(d, t)/H < k \leq x/mH} \mu(Hk)^2, \end{aligned}$$

où l'on a posé $H := [k(m), d, t]$, de sorte que $\mu(H)^2 = 1$.

Appliquons (2.1) avec $h = H$ pour évaluer la somme intérieure. La contribution du terme d'erreur de (2.1) au membre de droite de (2.7) est

$$(2.8) \quad \ll \sum_{m \leq x/z} \sum_{d, t \leq x/mz} r(H)\mu(d)^2\mu(t)^2 \sqrt{\frac{x}{mH}} \ll \frac{x^{3/2}}{z}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (2.9) \quad S(x, z) &= \frac{6z}{\pi^2} \sum_{m \leq x/z} \sum_{d, t \leq x/mz} \frac{\mu(d)\mu(t)}{\psi(H)} \int_{\max(d, t)}^{x/zm} dy + O\left(\frac{x^{3/2}}{z}\right) \\ &= z \sum_{m \leq x/z} \int_1^{x/mz} T(y; m) dy + O\left(\frac{x^{3/2}}{z}\right). \end{aligned}$$

La relation (2.2) permet à nouveau de conclure.

Il reste à examiner le cas $\sqrt{x}/\mathcal{L}(x)^{2c} < z \leq \sqrt{x}\mathcal{L}(x)^{2c}$. Nous pouvons supposer la constante c arbitrairement petite, et en particulier que, pour tout $T \geq 16$, la fonction zêta de Riemann n'a pas de zéro dans le rectangle $\{s = \sigma + i\tau : 1 - 2\beta(T) \leq \sigma \leq 1, |\tau| \leq T\}$, où l'on a posé $\beta(T) := c/\{(\log T)^{2/3}(\log_2 T)^{1/3}\}$. Il résulte alors de cette hypothèse que

$$(2.10) \quad \sum_{d \leq y} \frac{\mu(d\delta)}{d^s} \ll \frac{r(\delta)}{\mathcal{L}(y)^c} \quad \left(\delta \geq 1, \sigma > 1 - \beta(T), |\tau| \leq T := \mathcal{L}(y)^{5c}\right).$$

Cette majoration est établie par la méthode standard d'intégration complexe. Nous omettons les détails.

Grâce à la formule de Perron effective (cf., par exemple, [8], th. II.2.3), nous pouvons alors écrire, avec $\kappa := 1 + 1/\log x$, $T = \mathcal{L}(x)^{2c}$, $\lambda(\delta; s) = \mu(\delta)^2 \prod_{p|\delta} (1 - p^{-s})$,

$$\begin{aligned} S(x, z) &= \sum_{d, t \leq z} \mu(d)\mu(t) \left\lfloor \frac{x}{[d, t]} \right\rfloor \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \sum_{\delta \leq z} \frac{\lambda(\delta; s)}{\delta^s} \left(\sum_{d \leq z/\delta} \frac{\mu(\delta d)}{d^s} \right)^2 \zeta(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x(\log x)^4}{T}\right). \end{aligned}$$

Déplaçons alors le segment d'intégration jusque $\sigma = 1 - \beta(T)$, utilisons la majoration (2.10) pour estimer la contribution des $\delta \leq x^{1/4}$ (ce qui garantit que $\mathcal{L}(x)^{2c} \leq \mathcal{L}(z/\delta)^{5c}$), et employons la majoration

$$\begin{aligned} \sum_{x^{1/4} < \delta \leq z} \frac{\lambda(\delta; s)}{\delta^s} \left(\sum_{d \leq z/\delta} \frac{\mu(\delta d)}{d^s} \right)^2 \zeta(s) \frac{x^s}{s} &\ll \sum_{\delta > x^{1/4}} \frac{\lambda(\delta; 1/2) z^{2\beta(T)} x^{1-\beta(T)} \log T}{\beta(T)^2 \delta^{1+\beta(T)} (1 + |\tau|)} \\ &\ll \frac{z^{2\beta(T)} x^{1-5\beta(T)/4} \log T}{\beta(T)^3 (1 + |\tau|)} \ll \frac{x^{1-\beta(T)/5}}{1 + |\tau|} \end{aligned}$$

pour estimer la contribution des $\delta > x^{1/4}$. Le calcul du résidu en $s = 1$ découlant d'une simple interversion de sommations, nous obtenons, si la constante c est assez petite,

$$S(x, z) = xS(z) + O(x/\mathcal{L}(x)^c),$$

Cela achève la démonstration.

Bibliographie

- [1] M. Balazard, M. Naimi & Y.-F. Pétermann, Étude d'une somme arithmétique multiple liée à la fonction de Möbius, *Acta Arith.* **132.3** (2008), 245–298.
- [2] F. Dress, H. Iwaniec & G. Tenenbaum, Sur une somme liée à la fonction de Möbius, *J. reine angew. Math.* **340** (1983), 53–58.
- [3] S. Graham, An asymptotic estimate related to Selberg's sieve, *J. Number Theory* **10**, n° 1 (1978), 83–94.
- [4] H.A. Helfgott, The ternary Goldbach problem, <https://arxiv.org/pdf/1501.05438.pdf>.
- [5] H. Maier, On the Möbius function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **301**, n° 2 (1987), 649–664.
- [6] H.L. Montgomery & R.C. Vaughan, Mean values of multiplicative functions, *Period. Math. Hungar.* **43**, n°s 1-2 (2001), 199–214.
- [7] O. Robert & G. Tenenbaum, Sur la répartition du noyau d'un entier, *Indag. Math.* **24** (2013), 802–914.
- [8] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, quatrième édition, coll. Échelles, Belin, 2015, 592 pp
- [9] R.C. Vaughan, An elementary method in prime number theory, *Acta Arith.* **37** (1980), 111–115.

Régis de la Bretèche
 Institut de Mathématiques
 de Jussieu-PRG
 UMR 7586
 Université Paris Diderot-Paris 7
 Sorbonne Paris Cité,
 Case 7012, F-75013 Paris
 France
regis.de-la-breteche@imj-prg.fr

François Dress
 26, rue de Vouillé
 75015 Paris
 France
francois.dress@math.cnrs.fr

Gérald Tenenbaum
 Institut Élie Cartan
 Université de Lorraine
 BP 70239
 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex
 France
gerald.tenenbaum@univ-lorraine.fr