



**HAL**  
open science

# LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES PÉRIODIQUES, METHODE DE RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Arpad Török, Stoian Petrescu, Michel Feidt

► **To cite this version:**

Arpad Török, Stoian Petrescu, Michel Feidt. LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES PÉRIODIQUES, METHODE DE RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES. 2020. hal-02889819v1

**HAL Id: hal-02889819**

**<https://hal.science/hal-02889819v1>**

Preprint submitted on 5 Jul 2020 (v1), last revised 28 Jul 2020 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES PÉRIODIQUES, METHODE DE RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Arpad Török<sup>1</sup>, Stoian Petrescu<sup>2</sup>, Michel Feidt<sup>3</sup>

<sup>1</sup> PhD student, The Polytechnic University of Bucharest, Department of Engineering Thermodynamics, 313, Splaiul Independentei, 060042 Bucharest, Romania, e-mail: [arpi\\_torok@yahoo.com](mailto:arpi_torok@yahoo.com)

<sup>2</sup> Prof. Dr. Eng., Polytechnic University of Bucharest, Department of Engineering Thermodynamics, România

<sup>3</sup> Prof. Dr. Eng., L.E.M.T.A., U.R.A. C.N.R.S. 7563, Université de Lorraine Nancy 12, avenue de la Foret de Haye, 54516 Vandœuvre-lès-Nancy, France

**Résumé:** Le développement des fonctions de variables réelles en séries de Taylor et de Frobenius (séries entières lesquels sont constituées dans des bases nonorthogonales, nonpériodiques), en séries de Fourier sinusoïdales (des bases des fonctions orthogonales, périodiques), en séries de fonctions spéciales (des bases des fonctions orthogonales, nonpériodiques), etc est une procédé couramment utilisé pour résoudre une large gamme d'équations différentielles ordinaires (ODEs) et d'équations aux dérivées partielles (PDEs).

Dans cet article, basé sur une analyse approfondie des propriétés des séries de Fourier périodiques sinusoïdales (SFS), nous serons en mesure d'appliquer cette procédure à une catégorie beaucoup élargie d'ODEs (toutes les équations linéaires, homogènes et non homogènes à coefficients constants, une large catégorie d'équations linéaires et non linéaires à coefficients variables, systèmes d'ODEs, équations intégro-différentielles, etc.). Nous allons également étendre cette procédure et l'utiliser pour résoudre certains ODEs, sur des bases périodiques non orthogonales, représentées par des séries de Fourier périodiques non sinusoïdales (SFN).

**Mots clefs:** séries de Fourier sinusoïdales, séries de Fourier non sinusoïdales, bases indépendants, bases orthogonales, approximation des fonctions, équations différentielles

**Summary:** The development of functions of real variables in Taylor and Frobenius series (whole series which are formed in nonorthogonal, nonperiodic bases), in sinusoidal Fourier series (bases of orthogonal, periodic functions), in series of special functions (bases of orthogonal, nonperiodic functions), etc. is a commonly used method for solving a wide range of ordinary differential equations (ODEs) and partial differential equations (PDEs).

In this article, based on an in-depth analysis of the properties of periodic sinusoidal Fourier series (SFS), we will be able to apply this procedure to a much broader category of ODEs (all linear, homogeneous and non-homogeneous equations with constant coefficients, a large category of linear and non-linear equations with variable coefficients, systems of ODEs, integro-differential equations, etc.). We will also extend this procedure and we use it to solve certain ODEs, on non-orthogonal periodic bases, represented by non sinusoidal periodic Fourier series (SFN).

**Keywords:** sinusoidal Fourier series, non-sinusoidal Fourier series, independent bases, orthogonal bases, approximation of functions, differential equations

## 1. Introduction

Les méthodes de résolution des ODE, proposées ici, utilisent des résultats récemment obtenus [1] dans le domaine de l'analyse fonctionnelle, concernant le développement de fonctions variables réelles, définies sur un intervalle  $[-L, L]$ , en séries infinies de fonctions périodiques sur le même intervalle, formant des bases orthogonales, mais aussi non

orthogonales). Selon l'analyse harmonique (Fourier), toute fonction  $f(x)$ , périodique sur l'intervalle  $[-L, L]$ , qui satisfait aux conditions de Dirichlet, peut être développée en une somme infinie, connue dans la littérature sous le nom de série trigonométrique (pour laquelle, pour des raisons mises en évidence dans l'article [1], nous avons utilisé le nom de série sinusoïdale). Cette série est formée par les composantes d'une base biorthogonale complète, composée par la fonction unité  $1$ , les harmoniques fondamentales  $\sin(\pi x/L)$ -paire et  $\cos(\pi x/L)$ -impaire, avec la période  $2L$  et les harmoniques secondaires  $\sin(n\pi x/L)$  et  $\cos(n\pi x/L)$ , avec la période  $2L/n$ , pour  $n \in \mathbf{N}^+$ . Les coefficients de cette développement (coefficients de Fourier) peuvent être calculés à l'aide d'intégrales définies (formules d'Euler). Ce papier généralise cette affirmation en montrant que la fonction  $f(x)$  peut également être développée en séries périodiques non sinusoïdales (SFN), consistant en la somme infinie des composantes pondérées d'une base *complète*, non orthogonale: la fonction unitaire  $1$ , les quasi-harmoniques fondamentales  $g(x)$ -paire et  $h(x)$ -impaire, périodiques avec la période  $2L$ , avec valeur moyenne nulle sur l'intervalle de définition et les quasi-harmoniques secondaires, définies sur  $[-L, L]$ ,  $g_n(x)=g(nx)$  et  $h_n(x)=h(nx)$ , avec la période  $2L/n$ , pour  $n \in \mathbf{N}^+$ . Les quasi-harmoniques fondamentales  $g(x)$  et  $h(x)$  peuvent être toute fonction réelle, de variable réelle, qui admette sur l'intervalle  $[-L, L]$  des développements en série sinusoïdale. On obtient les coefficients  $A_n$  et  $B_n$  du développement en SFN de la fonction  $f(x)$ , à l'aide des relations algébriques entre les coefficients de Fourier des développements en SFS des fonctions  $f(x)$ ,  $g(x)$  et  $h(x)$ .

Ainsi, toute fonction  $f(x):[x_1, x_2] \rightarrow \mathbf{R}$   $T$ -périodique ( $T=x_2-x_1$ ), de l'espace  $L^2$  (c'est-à-dire, de carré intégrable), peut être représentée par la somme:

$$\tilde{f}(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\bar{g}_n(x) - g_0] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \bar{h}_n(x), \text{ où :}$$

$$f_0 = \frac{1}{T} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \text{ et } g_0 = \frac{1}{T} \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx \text{ sont les valeurs moyennes sur l'intervalle } [x_1, x_2],$$

$\bar{g}_n(x)$  et  $\bar{h}_n(x)$  ( $n=1, 2, 3, \dots, \infty$ ) sont des **Fourier-fonctions** (des fonctions continues, justement les développements en SFS des fonctions  $g(nx)$  et  $h(nx)$ , définis sur  $[-T/n, T/n]$ ).

À partir de ce résultat général, dans le travail [1] sont décrits aussi quelques situations particulières:

- $\tilde{f}(x) = f_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n [\bar{g}_n(x) - g_0]$ , où  $g(x)$  a tous les deux composants: le pair et l'impaire
- $\tilde{f}(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathcal{S}[g(x)]_L + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathcal{C}[g(x+L/2)]_L$  où la fonction  $g(x)$  est une fonction

de  $L^2$  définie sur l'intervalle  $[0, L/2]$ ,  $\mathcal{S}[g(x)]_L$  et  $\mathcal{C}[g(x+L/2)]_L$  sont les fonctions dénommées quasi-sinusoïdes, dérivés d'elle

- $\tilde{f}(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^0 \Phi_n(x) + B_n^0 \Psi_n(x)]$  où  $\Phi_n(x)$  et  $\Psi_n(x)$  sont des fonctions orthogonales,

générées par les Fourier-fonctions  $\bar{g}(x) - g_0$  et  $\bar{h}(x)$ , par un procédé d'orthogonalisation.

### 1.1. Propriétés des développements en séries de Fourier périodiques (le cas général)

Le développement en SFN d'une fonction  $f(x)$  est obtenu de son développement en SFS, par une redistribution et un regroupement des termes du développement, de manière à obtenir les développements en SFS des fonctions périodiques  $g(x)$ ,  $h(x)$  et des quasi-harmoniques  $g_n(x)$ ,  $h_n(x)$  correspondants. Par conséquent, ce développement bénéficie également des propriétés de convergence, de dérivabilité et d'intégrabilité, similaires à celles de SFS [1-9]. Donc:

▪ soit  $f(x)$  une fonction  $2L$ -périodique, continue dans l'intervalle  $[-L, L]$ . Son développement de Fourier  $f(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n h_n(x)$ , où  $g_0=0$ , sinusoidal ou non, convergent ou non, peut être intégré terme par terme, entre toutes limites d'intégration:

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx = C + f_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n G_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n H_n(x), \quad (1.1)$$

où  $G(x)$  et  $H(x)$  sont les primitives des  $g(x)$ , respectivement  $h(x)$ , et  $C$  est une constante d'intégration lequel dépende des coefficients du développement. Après les remplacements  $x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n G_n(x)$  (les fonctions  $x$  et  $G(x)$  sont impaires) et  $C = \sum_{n=1}^{\infty} B_n H'_n(0) + F(0)$ , résulte un développement en SFN de la primitive  $F(x)$ , en une base, le plus souvent différente de celle de la fonction  $f(x)$ .

▪ soit  $f(x)$  une fonction  $2L$ -périodique, continue dans l'intervalle  $[-L, L]$ , avec  $f(-L)=f(L)$  et avec la dérivée  $f'(x)$  lisse par portions dans cet intervalle. Le développement de Fourier, sinusoidal ou non, de la fonction  $f'(x)$ , peut être obtenu en dérivant terme par terme le développement de Fourier de la fonction  $f(x)$ . La série obtenue converge ponctuellement vers  $f'(x)$  en tous les points de continuité et vers  $[f'(x) + f'(-x)]/2$  en ceux de discontinuité.

$$\text{Si } f(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n h_n(x), \text{ alors: } \hat{f}'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n g'_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n h'_n(x) \quad (1.2)$$

Dans ce cas aussi, la base du développement en série non sinusoidal de la dérivée diffère de celle de la fonction  $f(x)$ .

La condition  $f(-L)=f(L)$  fait que le nombre des problèmes dans lesquels la formule (1.2) peut être utile est assez petit, mais elle peut être évitée si le saut à partir du point  $x=L$  (ainsi que tout autre saut du composant impair) est compensé par un saut dans la direction opposée (obtenu en soustrayant une autre fonction impaire qui fait un saut identique dans le même point). Dans l'exemple suivant, par ce procédé, la composante impaire  $f_o$  de la fonction  $f(x)$  est décomposée en une somme de la fonction différentiable  $f_{os}$  (pour laquelle  $f(-L)=f(L)$ ) et la fonction de rampe  $f_r = x \cdot f_o(L)/L \rightarrow f_{os} = f_o - f_r$ . Par conséquent:

$$\frac{d}{dx} f_o(x) = \frac{d}{dx} \left[ f_{os}(x) + \frac{f_o(L)}{L} x \right] = \frac{d}{dx} f_{os}(x) + \frac{f_o(L)}{L},$$

relation qui nous permet de trouver une expression pour le développement de la dérivée  $f'(x)$  de la fonction  $f(x)$ , pour toutes les catégories des fonctions qui satisfont les autres conditions. Le développement en SFN de la fonction  $f_{os} = f_o - f_r$  nous permet le calcul des coefficients du développement en série de la dérivée.

Le cas général, celui du développement des fonctions dans des bases périodiques non sinusoidales, met en évidence le fait que l'élément  $I=1$  de la base a un caractère particulier. Il fait partie de toutes les bases périodiques, il ne change pas lorsque les autres composantes de la base (de valeur moyenne nulle sur l'intervalle de définition) changent après l'intégration, ou après la dérivation. Son coefficient est calculé par une intégrale définie et non par des relations algébriques.  $I=1$  est une fonction paire, mais pour  $f_0=0$ , il reçoit simultanément un caractère impair aussi. Les dérivées et les primitives de toutes les fonctions paires (y compris la fonction  $I \cdot f_0 = f_0$ ) sont des fonctions impaires et, inversement, celles des fonctions impaires (y compris la fonction  $I \cdot 0 = 0$ ) sont des fonctions paires. En dérivant toute fonction paire  $f_0$  on obtient la fonction impaire  $0$  et vice versa, en intégrant la fonction impaire  $0$ , on obtient toute fonction paire  $f_0$  (la constante d'intégration)

## 1.2. Propriétés des développements en séries de Fourier sinusoidales

Comme dans le cas général, dans le cas des développements en SFS, sur l'intervalle  $[-L, L]$ , pour  $\omega_n = n\omega_0 = n\pi/L$ , parce que  $\bar{x} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega_n} \sin(\omega_n x)$ , nous pouvons écrire [9]:

$$\text{Pour } \bar{f}(x) = f_0 + \bar{f}_e + \bar{f}_o = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\omega_n x), \quad (1.3)$$

$$\text{on a: } f_o(L) = -f_o(-L), f_e(L) = f_e(-L), f_e(L) = \frac{f(L) + f(-L)}{2}, f_o(L) = \frac{f(L) - f(-L)}{2},$$

$$f(0) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

$$\bar{f}'(x) = \bar{\Phi}(x) = \Phi_0 + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_o = \Phi_0 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \cos(\omega_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot \sin(\omega_n x), \text{ dans lequel:} \quad (1.4)$$

$$\Phi_0 = \frac{f_o(L)}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left[ (-1)^{n+1} \omega_n b_n \right], \alpha_n = \omega_n \left( b_n + 2(-1)^n \frac{f_o(L)}{\omega_n L} \right), \beta_n = -a_n \omega_n, \Phi(0) = \Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

$$\left( \int_0^x f(x) dx \right)^{SFS} = \bar{F}(x) - F(0) = F_{00} + \bar{F}_e + \bar{F}_o = F_{00} \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(\omega_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(\omega_n x), \text{ dans lequel:}$$

$$F_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\omega_n}, A_n = -\frac{b_n}{\omega_n}, B_n = \frac{a_n}{\omega_n} + \frac{2(-1)^{n+1} f_o(L)}{\omega_n L}, F(0) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = F_0 - F_{00} \quad (1.5)$$

Également sont valables les relations:  $\bar{f}(x) = \int_0^x \bar{\Phi}(x) + \frac{f_o(L)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $f_0 = \frac{F_o(L)}{L}$  et

$$\int_a^b \bar{f}(x) dx = f_0(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (\sin \omega_n b - \sin \omega_n a) - b_n (\cos \omega_n b - \cos \omega_n a)}{n \omega_n} \quad (1.6)$$

Ainsi, nous avons obtenu une série de relations pour calculer les valeurs moyennes et les coefficients des développements des fonctions dérivées et primitives du premier rang, à partir des valeurs des coefficients du développement en SFS de la fonction  $f(x)$  et des valeurs de la fonction dans les points limites  $f(-L)$  et  $f(L)$ . Ces relations nous permettent également de calculer, pas à pas, les expressions des dérivées et des primitives de rang supérieur, après avoir calculé les valeurs de ces fonctions à la limite de l'intervalle, les valeurs moyennes et les valeurs des coefficients de leurs développements. Les nouvelles relations peuvent être utilisées pour résoudre les équations différentielles et intégrales-différentielles de rang supérieur, pour calculer des intégrales définies ou indéfinies, etc. A titre d'exemple, voici la dérivation et l'intégration du développement de la fonction  $f(x) = e^x$  pour l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  [8, 9]:

$$\bar{f}(x) = e^x = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos(nx) - \frac{2n \cdot \sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{1+n^2} \sin(nx) \right].$$

$$\Phi_0 = \frac{\sinh \pi}{\pi}, \alpha_n = n \left( -\frac{\sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{2n(-1)^n}{1+n^2} + 2(-1)^n \frac{\sinh \pi}{n \cdot \pi} \right) = \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{1+n^2}, \beta_n = -n \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{1+n^2},$$

$$F_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\omega_n} = \frac{2n \cdot \sinh \pi}{n \cdot \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2} = \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\pi}{\sinh \pi} \right) = \frac{\sinh \pi}{\pi} - 1, F_0 = \frac{\sinh \pi}{\pi} \quad (1.7)$$

$$A_n = \frac{-1}{n} \left( -\frac{2n \cdot \sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{1+n^2} \right), B_n = \frac{1}{n} \left[ \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{1+n^2} - 2(-1)^n \frac{\sinh \pi}{\pi} \right] = -\frac{2n \cdot \sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

$$\text{Donc: } \bar{\Phi}(x) = \left[ (e^x)' \right]^{SFS} = e^x \text{ et } \bar{F}(x) = \left( \int_0^x e^x dx \right)^{SFS} + F(0) = e^x$$

Pour obtenir (1.7), on part de  $\bar{f}(0)=1 = \frac{\sinh \pi}{\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \right] \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{\sinh \pi} - 1 \right)$

On peut le remarquer que pour  $f_0=0$  et  $f_0(L)=0$  (sans discontinuités de la composante impaire), à la fois l'intégration et la dérivation se font terme par terme:  $\alpha_n = b_n \omega_n$ ,  $\beta_n = -a_n \omega_n$ ,  $A_n = b_n / \omega_n$ ,  $B_n = -a_n / \omega_n$ . Si  $f_0(x)$  a des discontinuités aux extrémités de l'intervalle  $[-L, L]$  (ou à l'intérieur), elles provoqueront, lors de la dérivation, l'apparition d'une valeur moyenne  $\Phi_0 \neq 0$  et une modification en conséquence du composant  $\Phi_e$ . Lors de l'intégration, l'effet des discontinuités est transmis au composant impair  $F_o$ . Les dérivés de toutes les fonctions  $f(x)+C$  ont la même expression, et le retour à la fonction initiale, par l'intégration, est assuré par la relation  $F(0) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ , lequel pour  $C=0$  conduit à  $F(0)=0$ .

Sur l'axe réel, la fonction périodique impaire  $f(x)$ , discontinue aux extrémités de l'intervalle  $[-L, L]$  (Fig.1A), est la somme entre la fonction continue  $f_c(x)$  (Fig.1D) et la fonction «échelle»  $f_H(x)$  (une succession des « échelons» Heaviside négatifs) (Fig.1E). Les dérivés de ces fonctions sont les fonctions périodiques  $f'(x) = \Xi_{2\pi}(x+L) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2n\pi}(x+L)$  (peigne de Dirac, Fig.1B), dont le développement en SFS est  $\bar{\Xi} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(n\omega_0 x)$  [6], multiplié par le coefficient  $f_0(L)/L$  (Fig.1C). Les développements en SFS de ces deux dérivées sont donc divergents, mais leur somme est convergente.

Si la fonction  $f(x)$  est paire, la dérivation des sauts à l'intérieur de l'intervalle génère deux peigne de Dirac de signe opposé, qui s'annulent réciproquement, et si  $f(x)$  a des discontinuités finies dans un nombre fini des points dans l'intervalle  $[-L, L]$ , cela se reflète dans la position et l'amplitude des impulsions Dirac correspondantes.

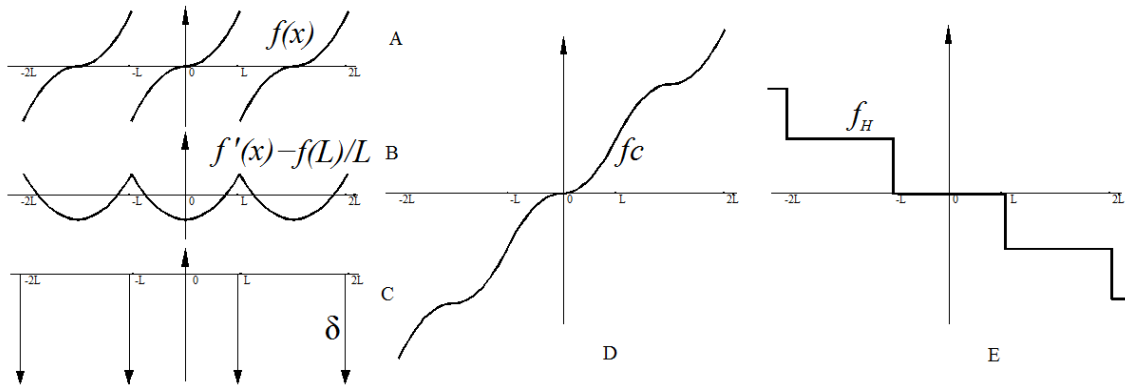


Fig.1. La dérivation du développement en SFS d'une fonction périodique avec des discontinuités

### 1.3. Le développement en série de Fourier du produit de deux quelconques fonctions périodiques

Sont connus les relations de calcul pour déterminer les coefficients du développement en SFS du produit  $p(x)q(x)$  de deux quelconques fonctions périodiques, de carré intégrable (qui fait que leur produit est aussi une fonction de ce type), définis sur l'intervalle  $[-L, L]$  [9]. Le calcul de ces coefficients est possible si les coefficients de Fourier du développement en série de chacune des deux fonctions sont connus: on doit calculer les intégrales définies du

type  $\int_{-L}^L p_e \cos \frac{n\pi x}{L} dx$  et  $\int_{-L}^L p_o \sin \frac{n\pi x}{L} dx$ . Si une certaine approximation est permis, le calcul peut être effectué par des méthodes numériques.

Dans le cas des ODEs, un ou tous les deux termes du produit  $p(x)q(x)$ , peuvent être même l'une des fonctions  $y(x)$ ,  $y'(x)$ ,  $y''(x)$ ,  $\int y(x)dx$ , etc, avec des coefficients de Fourier inconnus. Le remplacement de ces produits, lorsqu'ils apparaissent dans une équation différentielle, avec leur développement en série de Fourier, ou avec les sommes de Fourier  $S_N$  qui les rapproche, conduit à un système de  $2N+1$  ( $N \rightarrow \infty$ ) d'équations algébriques. On les résolvant, peuvent être trouvées les coefficients  $f_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$  de la série de Fourier du développement de la fonction  $y(x)$ . Pour

$$y(x) = y_0 + y_e + y_o = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \text{ et}$$

$$p(x) = p_0 + p_e + p_o = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

(où  $y_{e0}=p_{e0}=0$ ), les coefficients de développement en série du produit  $yp$  sont:

$$\begin{aligned} (yp)^{SFS} &= y_0 p_0 + (y_0 \bar{p}_e + p_0 \bar{y}_e + \bar{y}_e \bar{p}_e + \bar{y}_o \bar{p}_o) + (y_0 \bar{p}_o + p_0 \bar{y}_o + \bar{y}_e \bar{p}_o + \bar{y}_o \bar{p}_e) = \\ &= \bar{P}(x) = P_0 + \bar{P}_e + \bar{Q}_o = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin \frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \quad \text{où:} \quad (1.8)$$

$$P_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L (yp)^{SFS} dx = y_0 p_0 + \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \bar{y}_e \bar{p}_e dx + \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \bar{y}_o \bar{p}_o dx = y_0 p_0 + \frac{1}{2} \left( \sum_{l=1}^{\infty} A_l C_l + \sum_{l=1}^{\infty} B_l D_l \right) \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L (y_0 \bar{p}_e + p_0 \bar{y}_e + \bar{y}_e \bar{p}_e + \bar{y}_o \bar{p}_o) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{y_0}{L} \int_{-L}^L p_e \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{p_0}{L} \int_{-L}^L y_e \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \\ &+ \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left( \sum_{l=1}^{\infty} A_l \cos \frac{l\pi x}{L} \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left( \sum_{l=1}^{\infty} B_l \sin \frac{l\pi x}{L} \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &\rightarrow P_n = y_0 C_n + p_0 A_n + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} A_l (C_{n+l} + C_{|n-l|}) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} B_l [D_{n+l} + \text{sgn}(l-n) D_{|n-l|}] \end{aligned} \quad (1.10a)$$

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L (y_0 \bar{p}_o + p_0 \bar{y}_o + \bar{y}_e \bar{p}_o + \bar{y}_o \bar{p}_e) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{y_0}{L} \int_{-L}^L p_o \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{p_0}{L} \int_{-L}^L y_o \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \\ &+ \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left( \sum_{l=1}^{\infty} A_l \cos \frac{l\pi x}{L} \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left( \sum_{l=1}^{\infty} B_l \sin \frac{l\pi x}{L} \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &\rightarrow Q_n = y_0 D_n + p_0 B_n + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} A_l [D_{n+l} - \text{sgn}(l-n) D_{|n-l|}] - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} B_l (C_{n+l} - C_{|n-l|}) \end{aligned} \quad (1.10b)$$

Dans ces relations, nous avons considéré:  $A_0=B_0=C_0=D_0=0$  (pour  $l=n$ ). Les relations sont les mêmes que dans [9], dans lequel  $A_0=2y_0$  si  $C_0=2p_0$ , mais ici, nous avons choisi une autre méthode pour atteindre le résultat, en utilisant des calculs intermédiaires tels que:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \sum_{l=1}^{\infty} \left( A_l \cos \frac{l\pi x}{L} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \left( C_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \sum_{l=1}^{\infty} \left( A_l \cos \frac{l\pi x}{L} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{2} \left[ \cos \frac{(m-n)\pi x}{L} + \cos \frac{(m+n)\pi x}{L} \right] dx = \\ &= \int_{-L}^L \sum_{l=1}^{\infty} \left( A_l \cos \frac{l\pi x}{L} \right) \left[ \sum_{m=1}^{n-1} \frac{C_m}{2} \cos \frac{(m-n)\pi x}{L} + \frac{C_n}{2} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{C_m}{2} \cos \frac{(m-n)\pi x}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{2} \cos \frac{(m+n)\pi x}{L} \right] dx = \\ &= \frac{L}{2} \left( \sum_{l=1}^{n-1} A_l C_{n-l} + \sum_{l=1}^{\infty} A_l C_{l+n} + \sum_{l=n+1}^{\infty} A_l C_{l-n} \right) = \frac{L}{2} \sum_{l=1}^{\infty} A_l (C_{l+n} + C_{|l-n|}) \end{aligned}$$

De toute évidence, les formules suivantes sont également valables:

$$P_n = p_0 A_n + y_0 C_n + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} C_l (A_{n+l} + A_{|n-l|}) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} D_l (B_{n+l} + \text{sgn}(l-n) B_{|n-l|}) \quad (1.11)$$

$$Q_n = p_0 B_n + y_0 D_n + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} C_l (B_{n+l} - \text{sgn}(l-n) B_{|n-l|}) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} D_l (A_{n+l} - A_{|n-l|})$$

#### 1.4. Le calcul de certaines séries numériques infinies

Les coefficients  $P_n$  et  $Q_n$  des relations 1.9 et 1.10 contiennent, chacun, les expressions des séries numériques infinies, dont la somme peut être déterminée (si les coefficients  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  și  $D_n$  sont connus) par un volume, parfois important, de calculs. Entre chaque de ces séries infinies et le coefficient correspondant du développement en SFS du produit  $yp$ , il y a une relation directe, de sorte que la somme de série peut être déterminée en calculant le coefficient respectif. Par conséquent, si les calculs pour déterminer les coefficients de Fourier du produit  $yp$  sont moins volumineux, cette méthode de calcul devient une solution préférable pour le calcul de cette quantité. Pour illustrer cela, nous comparerons ces volumes de calcul pour les produits entre la fonction:

$$\bar{y}(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} 2L \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{et les fonctions:}$$

$$\bar{p}_1(x) = p_{1.0} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{1.n} \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} D_{1.n} \sin \frac{n\pi x}{L} = \bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} 2L \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{et}$$

$$\bar{p}_2(x) = p_{2.0} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2.n} \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} D_{2.n} \sin \frac{n\pi x}{L} = (x^2)^{SFS} = \frac{L^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L^2}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$\text{avec les coefficients: } y_0=0, A_n=0, B_n=2L \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}; p_{1.0}=0, C_{1.n}=0, D_{1.n}=2 \frac{L}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n}; p_{2.0}=\frac{L^2}{3},$$

$$C_{2.n}=\frac{4L^2(-1)^n}{n^2\pi^2}, D_{2.n}=0. \text{ On découle les coefficients des produits:}$$

$$\bar{P}_1 = P_{1.0} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{1.n} \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{1.n} \sin \frac{n\pi x}{L} = (yp_1)^{SFS} = (x^2)^{SFS} = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L},$$

$$P_2 = P_{2.0} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{2.n} \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{2.n} \sin \frac{n\pi x}{L} = (yp_2)^{SFS} = (x^3)^{SFS} = (-1)^{n+1} \left[ \frac{2L^3}{n\pi} - \frac{12L^3}{\pi^3 n^3} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Nous allons garder les significations précédemment attribuées:  $A_0=B_0=C_0=D_0=0$ . Conform avec 1.9–1.10:

$$P_{1.0} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{2L(-1)^{n+1}}{n\pi} \quad \text{Pour } y(x)=x: \rightarrow P_{1.0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^2}{\pi^2} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{2L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = p_{2.0} \quad (1.12)$$

$$P_{1.n} = \frac{B_n}{2} \frac{2L}{\pi} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} + \frac{2L}{2\pi} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} B_l \left[ \frac{(-1)^{n+l+1}}{n+l} + \text{sgn}(l-n) \frac{(-1)^{n-l+1}}{|n-l|} \right] = \frac{L}{\pi} \left[ -\frac{B_n}{2n} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} (-1)^{n+l} \frac{2lB_l}{n^2-l^2} \right] \quad (1.13)$$

$$\rightarrow P_{1.n} = \frac{L}{\pi} \left[ \frac{L(-1)^n}{n^2\pi} + \frac{4L}{\pi} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{l^2-n^2} \right] = (-1)^n \frac{L^2}{\pi^2} \left( \frac{1}{n^2} + 4 \frac{3}{4n^2} \right) = 4 \frac{(-1)^n L^2}{n^2\pi^2} = C_{2.n}$$

$$Q_{1.n} = \frac{L}{\pi} \left\{ y_0 \frac{2(-1)^{n+1}}{n} - \frac{A_n}{2n} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} A_l \left[ \frac{(-1)^{n+l+1}}{n+l} - \text{sgn}(l-n) \frac{(-1)^{n-l+1}}{|n-l|} \right] \right\} \quad (1.14)$$

$$\rightarrow Q_{1.n} = \frac{L}{\pi} \left\{ y_0 \frac{2(-1)^{n+1}}{n} - \frac{A_n}{2n} + 2n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} (-1)^{n+l+1} \frac{A_l}{n^2-l^2} \right\} = 0$$

$$P_{2.0} = y_0 \frac{L^2}{3} + \frac{2L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n A_n}{n^2} \quad \text{Pentru } y(x)=x: \rightarrow P_{2.0}=0 \quad (1.15)$$



$$P_{2,n} = y_0 \frac{4L^2 (-1)^n}{\pi^2 n^2} + \frac{A_n L^2}{3} + \frac{2L^2}{\pi^2} \left\{ \frac{A_n}{4n^2} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} A_l \left[ \frac{(-1)^{n+l}}{(n+l)^2} + \frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)^2} \right] \right\} \rightarrow P_{n,2}=0 \quad (1.16)$$

$$Q_{2,n} = \frac{L^2 B_n}{3} - \frac{2L^2}{\pi^2} \left\{ \frac{(-1)^{2n}}{4n^2} B_n + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} B_l \left[ \frac{(-1)^{n+l}}{(n+l)^2} - \frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)^2} \right] \right\} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow Q_{2,n} &= \frac{L^2}{3} \frac{2L(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{2L^2}{\pi^2} \left[ \frac{(-1)^{2n}}{4n^2} \frac{2L(-1)^{n+1}}{n\pi} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} (-1)^{2l+n+1} \frac{2L}{l\pi} \frac{4nl}{(n^2-l^2)^2} \right] = \\ &= \frac{2(-1)^{n+1} L^3}{3n\pi} - (-1)^{n+1} \frac{4L^3}{\pi^3} \left[ \frac{1}{4n^3} + 4n \left( \frac{11}{16n^4} - \frac{\pi^2}{12n^2} \right) \right] = (-1)^{n+1} \left( \frac{2L^3}{n\pi} - \frac{12L^3}{n^3 \pi^3} \right) \end{aligned}$$

Pour obtenir ces résultats, nous avons collecté des données de la littérature spécialisée [10]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{1}{l^2 - n^2} = \frac{3}{4n^2}, \quad \text{et pour } \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{1}{(l^2 - n^2)^2} = \frac{1}{4n^2} \left( \frac{11}{4n^2} - \frac{\pi^2}{3} \right) \text{ nous sommes partis de:}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l^2 - a^2)^2} = \frac{1}{2a^4} + \frac{\pi}{4a^3} \operatorname{ctg}(a\pi) + \frac{\pi^2}{4a^2} \operatorname{cosec}(a\pi), \quad \text{où } a \neq 0, 1, 2, \dots, \infty. \text{ Pour } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ si}$$

$a = n + \varepsilon \rightarrow n$ , c'est-à-dire  $\varepsilon \in \mathbb{R} \rightarrow 0$  et  $\sin(a\pi) = \sin(n\pi + \varepsilon\pi) = \sin(\varepsilon\pi) \rightarrow 0$ . Alors,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l^2 - a^2)^2} = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{1}{(l^2 - a^2)^2} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{4an} \left[ \frac{1}{(n-a)^2} - \frac{1}{(n+a)^2} \right]$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4n(n \pm \varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\pi}{4(n \pm \varepsilon)^3} \cot(\pm \varepsilon\pi) + \frac{\pi^2}{4(n \pm \varepsilon)^2} \operatorname{csc}(\pm \varepsilon\pi) = \frac{\pi^2}{12n^2} - \frac{1}{4n^4}$$

## 2. La solution d'une ODE, déterminée en calculant les coefficients de son développement en série de Fourier sinusoïdale

Pour résoudre les équations différentielles linéaires avec des coefficients  $a_i(x)$  variables, lorsque ces coefficients sont des fonctions analytiques au point  $x=x_0$ , on peut utiliser la méthode du développement en série de Taylor:  $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ , si  $x_0$  est un

point ordinaire, ou la méthode de Frobenius:  $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r}$ , si  $x_0$  est un point singulier

régulier [4, 5]. La méthode, qui permet de trouver une solution valide sur son disque de convergence de rayon  $R$ , est basée sur la propriété de dérivabilité terme par terme de ces séries et permet de trouver des relations de récurrence pour les coefficients de la série. C'est possible parce que la base sur laquelle la fonction-solution générale est développée est la même que la base sur laquelle sont développées ses dérivés aussi. Pour trouver les solutions particulières il faut savoir les valeurs de la fonction et de ses dérivées à un point de l'intervalle  $(-R, R)$ . Par cette méthode, la résolution d'équations différentielles est transformée en un problème d'algèbre, qui implique le plus souvent de trouver des formules de récurrence.

Étant donné que les SFS et les SFN aussi, jouissent de la propriété de la dérivabilité terme par terme, une méthode similaire à la méthode décrite peut être appliquée en utilisant ces nouveaux types de développements en série, dans les équations impliquant des fonctions périodiques de carré intégrable, définies sur un intervalle  $[-L, L]$ , si nous connaissons les conditions aux limites correspondantes.

La méthode de résolution des équations différentielles en déterminant les coefficients du développement en séries sinusoïdales ou non sinusoïdales de la fonction inconnue est une méthode particulièrement solide, applicable à tous les types d'équations différentielles et intégro-différentielles, linéaires et non linéaires, d'équations aux dérivées partielles, des systèmes de telles équations, quels que soient leur ordre et quels que soient la complexité des coefficients. Les conditions requises pour l'application de la méthode sont peu contraignantes et faciles à remplir, notamment pour les situations rencontrées en physique et en génie. La méthode peut être appliquée à des larges classes de telles équations, et encore plus, la même équation peut être résolue en utilisant plusieurs types de développement. La méthode peut également être facilement étendue aux fonctions du domaine complexe  $C$ .

Comme pour la méthode de développement en série entière, les opérations de dérivation et d'intégration effectuées sur ces développements en série sont transformées en opérations algébriques effectuées sur les coefficients du développement. Par conséquent, la résolution d'ODE se transforme en résolution d'équations algébriques. De toutes les bases utilisées comme support des développements, les plus avantageuses sont les sinusoïdes ( $I$ ,  $\cos(nx)$ ,  $\sin(nx)$ ), en raison de la facilité avec laquelle les coefficients du développement peuvent être calculés (les formules d'Euler), en raison de la vitesse de convergence élevée (ce qui les rend idéales pour les méthodes d'approximation numérique) et la relative facilité avec laquelle les équations algébriques résultantes peuvent être résolues (le degré de difficulté est dicté par l'ordre de l'équation et par le degré de non-linéarité de l'équation différentielle). Contrairement aux bases des puissances entières positives qui, par des dérivations répétées, "patinent" le long des éléments de la base (conduisant à la génération des chaînes récurrentes), les bases sinusoïdales "oscillent" entre les mêmes éléments, pairs et impairs, de la base, conduisant à des équations algébriques plus simples.

### 2.1. ODEs linéaires à coefficients *constants*

Comme nous l'avons trouvé dans la section précédente, sur l'intervalle  $[-L, L]$ , pour

$$\bar{y}(x) = y_0 + \bar{y}_e + \bar{y}_o = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \omega_n x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \omega_n x \quad (2.1)$$

$$\rightarrow \bar{y}'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ B_n \omega_n + 2(-1)^n \frac{y(L) - y(-L)}{2L} \right] \cos \omega_n x - \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \omega_n \sin \omega_n x + \frac{y(L) - y(-L)}{2L} \right) \quad (2.2)$$

$$\rightarrow \bar{y}''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( -A_n \omega_n^2 + 2(-1)^n \frac{y'_e(L)}{L} \right) \cos \omega_n x - \left( B_n \omega_n^2 + 2(-1)^n \omega_n \frac{y_o(L)}{L} \right) \sin \omega_n x \right] + \frac{y'_e(L)}{L} \quad (2.3)$$

$$\text{Aussi, } y_o(L) = L \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left[ (-1)^{n+1} \omega_n b_n \right] = 1/2 \cdot [y(L) - y(-L)] \quad (2.1a)$$

Plus loin, par des dérivations successives (à chaque dérivation, les coefficients de développement sont corrigés en tenant compte de l'existence des points de discontinuité) on retrouve les expressions des développements en série pour les dérivées d'ordre supérieur, lorsque sont connues leurs valeurs aux points à la limite de l'intervalle de définition. Par conséquent, la solution particulière  $y(x)$  de **toute** équation différentielle ordinaire linéaire avec des coefficients constants, homogène ou inhomogène, quel que soit l'ordre de l'équation, si elle est définie sur n'importe quel intervalle  $[-L, L]$ , ou équivalent, peut être déterminée si  $y(x)$  est de carré intégrable, en calculant les coefficients de son développement en série sinusoïdale, si les valeurs et ses dérivées sont connues aux points des extrémités de l'intervalle (conditions aux limites). Les solutions des équations peuvent être trouvées pour d'autres types de conditions aux limites aussi.

Pour illustrer cela, nous appliquerons la méthode dans le cas d'équations linéaires homogènes à coefficients constants, sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ , pour quelques équations simples:

**Exemple 2.1:  $y' = a$ ,** (2.4)

avec la condition à la limite  $y(0)=C$ . Pour l'intervalle choisi, on peut écrire:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ B_n n + 2(-1)^n \frac{y(\pi) - y(-\pi)}{2\pi} \right] \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} (-A_n n \sin nx) + \frac{y(\pi) - y(-\pi)}{2\pi} = a \quad (2.5)$$

$$\rightarrow A_n = 0, B_n = \frac{y(\pi) - y(-\pi)}{2\pi} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \frac{y(\pi) - y(-\pi)}{2\pi} = \frac{y_o(\pi)}{\pi} = a$$

Pour la valeur moyenne  $y_0$ , il n'y a aucun conditionnement, donc ça peut prendre n'importe quelle valeur  $K$ . Donc:

$$y(x) = a \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx + K = ax + K. \text{ Pour } y=0 \rightarrow y(0)=K=C.$$

Pour  $a=0 \rightarrow y(x)=K$

**Exemple 2.2:  $y' = ay$ ,** (2.6)

avec la condition à la limite  $y(\pi)=C$ . A partir des relations (2.2) et (2.6), on obtient:

$$ay_0 = \frac{y_o(\pi)}{\pi}, aB_n = -nA_n \rightarrow B_n = -nA_n / a, \text{ pour } n=1, 2, 3, \dots \infty \text{ et}$$

$$aA_n = -\frac{n^2}{a} A_n + 2(-1)^n \frac{y_o(\pi)}{\pi} \rightarrow A_n = 2 \frac{(-1)^n a}{n^2 + a^2} \frac{y_o(\pi)}{\pi} \rightarrow B_n = -2n \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} \frac{y_o(\pi)}{\pi} \text{ et donc:}$$

$$\bar{y}(x) = 2 \frac{y_o(\pi)}{\pi} \left[ \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a \cos nx - n \sin nx}{n^2 + a^2} \right] \quad (2.7)$$

On reconnaît ici, pour  $y_o(\pi) = \sinh a\pi$ , le développement en série de Fourier de la fonction  $y(x) = e^{ax}$ , pour lequel  $y(\pi) = e^{a\pi}$ , et pour  $y_o(\pi) = K \sinh a\pi$ , le développement en série de Fourier de la fonction  $y(x) = K \cdot e^{ax}$  (la solution générale), pour lequel  $y(\pi) = K e^{a\pi}$ , et  $y(-\pi) = K e^{-a\pi}$ .

En conclusion, pour  $y(\pi) = C \rightarrow K = C e^{-a\pi}$ , la solution particulière étant  $y(x) = C e^{a(x-\pi)}$ .

Pendant la résolution de l'équation, est apparue la contrainte  $aB_n = -nA_n$ . Cela signifie que  $A_n = 0$  impose  $B_n = 0$ , donc la solution ne peut pas avoir une seule composante (elle ne peut pas être seulement paire ou impaire). Ce fait est imposé même par la relation d'égalité (2.4). Donc  $f_o(\pi)/\pi \neq 0$ , par conséquent, toujours  $y_0 \neq 0$ .

**Exemple 2.3:  $y'' = a^2 y$ ,** avec  $y(\pi) = K_1$  et  $y'(\pi) = K_2$ . Parce que:

$$\bar{y}'(x) = \bar{y}'_e + \bar{y}'_o = \sum_{n=1}^{\infty} (-A_n n \sin nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ B_n n + 2(-1)^n \frac{y_o(\pi)}{\pi} \right] \cos nx + \frac{y_o(\pi)}{\pi} \quad (2.8)$$

$$\bar{y}'' = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( -A_n n^2 + 2(-1)^n \frac{y'_e(\pi)}{\pi} \right) \cos(nx) - \left( B_n n^2 + 2(-1)^n n \frac{y_o(\pi)}{\pi} \right) \sin(nx) \right] + \frac{y'_e(\pi)}{\pi} \quad (2.9)$$

et par l'égalité avec  $a^2 y$  on découvre que:

$$y_0 = \frac{y'_e(\pi)}{a^2 \pi}, A_n = 2 \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} \frac{y'_e(\pi)}{\pi} \text{ et } B_n = -2n \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} \frac{y_o(\pi)}{\pi}, \text{ donc}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{y'_e(\pi)}{a^2 \pi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} \left[ \frac{y'_e(\pi)}{\pi} \cos nx - n \frac{y_o(\pi)}{\pi} \sin nx \right] \quad (2.10)$$

Pour  $y_o(\pi) = \sinh(a\pi)$  et  $y'_e(\pi) = a \sinh(a\pi)$ , on reconnaît le développement en série de la fonction:  $\bar{y}(x) = \cosh(ax) + \sinh(ax) = e^{ax}$ . Mais, parce qu'il n'y a pas des contraintes entre les coefficients des deux composants (pairs et impairs), chacun d'eux peut être une solution:  $y_1 = \cosh(ax)$  et  $y_2 = \sinh(ax)$  (pour  $f_o(\pi) = 0$ , respectivement  $f'_e(\pi) = 0$ ). Par conséquent, la solution générale de l'équation est  $y(x) = C_1 \cosh(ax) + C_2 \sinh(ax)$ . La solution particulière résulte de:  $y(\pi) = C_1 \cosh(a\pi) + C_2 \sinh(a\pi) = K_1$  et  $y'(\pi) = a C_1 \sinh(a\pi) + a C_2 \cosh(a\pi) = K_2$

**Exemple 2.4:  $y'' = -a^2 y$**

De la relation (2.10), en remplaçant  $a^2$  avec  $-a^2$ , on a:

$$\bar{y}(x) = -\frac{y'_e(\pi)}{a^2\pi} + 2\frac{(-1)^n}{n^2 - a^2} \left[ \frac{y'_e(\pi)}{\pi} \cos nx - n \frac{y_o(\pi)}{\pi} \sin nx \right],$$

dans lequel, pour  $y_o(\pi) = \sin(a\pi)$  et  $y'_e(\pi) = -a \sin(a\pi)$  nous reconnaissons, pour  $a \notin \mathbb{Z}$ , le développement en série de la fonction:

$$\bar{y}(x) = \cos ax + \sin ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + 2\frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - a^2} \left[ \frac{a \sin a\pi}{\pi} \cos nx + n \frac{\sin a\pi}{\pi} \sin nx \right]$$

Par conséquent, la solution générale de cette équation est  $y(x) = C_1 \cos(ax) + C_2 \sin(ax)$ .

**Exemple 2.5:  $y'' + ay' + by = 0$**

En remplaçant dans l'équation la fonction inconnue et ses dérivées par leurs développements en SFS:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ -A_n n^2 + 2(-1)^n \frac{y'_e(\pi)}{\pi} + aB_n n + 2(-1)^n a \frac{y_o(\pi)}{\pi} + bA_n \right] \cos(nx) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -B_n n^2 - 2(-1)^n n \frac{y_o(\pi)}{\pi} - aA_n n + bB_n \right] \sin(nx) + \frac{y'_e(\pi)}{\pi} + a \frac{y_o(\pi)}{\pi} + by_0 = 0$$

Tous les coefficients de cette développement sont nuls:

$$y_0 = -\frac{y'_e(\pi) + ay_o(\pi)}{b\pi}, \quad B_n = A_n \frac{n^2 - b}{an} - \frac{2(-1)^n}{an} \left[ \frac{y'_e(\pi)}{\pi} + \frac{ay_o(\pi)}{\pi} \right], \quad A_n = -B_n \frac{n^2 - b}{an} - \frac{2(-1)^n}{a} \frac{y_o(\pi)}{\pi}$$

$$\rightarrow A_n = -A_n \left( \frac{n^2 - b}{an} \right)^2 + 2(-1)^n \frac{y'_e(\pi) + ay_o(\pi)}{an\pi} \frac{n^2 - b}{an} - 2(-1)^n \frac{y_o(\pi)}{a\pi}$$

$$A_n (n^4 + a^2 n^2 - 2bn^2 + b^2)\pi = 2(-1)^n [y'_e(\pi)(n^2 - b) + a(2n^2 - b)y_o(\pi)]$$

$$\rightarrow A_n = \frac{2(-1)^n [y'_e(\pi)(n^2 - b) - aby_o(\pi)]}{\pi \left[ n^2 + \frac{1}{2}(a^2 - 2b - a\Delta) \right] \left[ n^2 + \frac{1}{2}(a^2 - 2b + a\Delta) \right]} = \frac{2(-1)^n [y'_e(\pi)(n^2 - b) - aby_o(\pi)]}{\pi \left[ n^2 + \left( \frac{-a + \Delta}{2} \right)^2 \right] \left[ n^2 + \left( \frac{-a - \Delta}{2} \right)^2 \right]},$$

$$\text{où } \Delta = \sqrt{a^2 - 4b}. \text{ Nous noterons } \lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a + \Delta}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{-a - \Delta}{2}$$

$$B_n = -\left( B_n \frac{n^2 - b}{an} \right)^2 - \frac{2(-1)^n}{a} \frac{y_o(\pi)}{\pi} \frac{n^2 - b}{an} - \frac{2(-1)^n}{an} \left[ \frac{y'_e(\pi)}{\pi} + \frac{ay_o(\pi)}{\pi} \right]$$

$$B_n (n^4 + a^2 n^2 - 2bn^2 + b^2)\pi = 2(-1)^n n [y_o(\pi)(n^2 + a^2 - b) + any'_e(\pi)]$$

$$\rightarrow B_n = \frac{2(-1)^n n [y_o(\pi)(n^2 + a^2 - b) + ay'_e(\pi)]}{\pi \left[ n^2 + \left( \frac{-a + \Delta}{2} \right)^2 \right] \left[ n^2 + \left( \frac{-a - \Delta}{2} \right)^2 \right]} = \frac{2(-1)^n n [y_o(\pi)(n^2 + a^2 - b) + ay'_e(\pi)]}{\pi (n^2 + \lambda_1^2)(n^2 + \lambda_2^2)}$$

$$\text{Pour } y_{o,1}(\pi) = C_1 \sinh \frac{-a + \Delta}{2} \pi = C_1 \sinh(\lambda_1 \pi) \text{ et } y'_{e,1}(\pi) = C_1 \lambda_1 \sinh(\lambda_1 \pi) = \lambda_1 y_{o,1}(\pi):$$

$$y_{o,1} = -\frac{C_1 \lambda_1 y_{o,1}(\pi) + C_1 a y_{o,1}(\pi)}{b\pi} = -C_1 \frac{y_{o,1}(\pi) - a + \Delta + 2a}{\pi} = -C_1 \frac{y_{o,1}(\pi)}{\pi} \frac{4b}{2b(a - \Delta)} = C_1 \frac{\sinh(\lambda_1 \pi)}{\pi \lambda_1}$$

$$A_{n,1} = \frac{2(-1)^n C_1 \sinh(\lambda_1 \pi) [\lambda_1 (n^2 - b) - a \lambda_1 \lambda_2]}{\pi (n^2 + \lambda_1^2)(n^2 + \lambda_2^2)} = 2(-1)^n C_1 \frac{\sinh(\lambda_1 \pi)}{\pi} \frac{\lambda_1}{n^2 + \lambda_1^2}$$

$$B_{n,1} = \frac{2(-1)^n C_1 n \sinh(\lambda_1 \pi) (n^2 + a^2 - b + a \lambda_1)}{\pi (n^2 + \lambda_1^2)(n^2 + \lambda_2^2)} = 2(-1)^n C_1 \frac{\sinh(\lambda_1 \pi)}{\pi} \frac{n}{n^2 + \lambda_1^2},$$

$$\text{Et pour } y_{o,2}(\pi) = C_2 \sinh \frac{-a - \Delta}{2} \pi = C_2 \sinh(\lambda_2 \pi) \text{ et } y'_{e,2}(\pi) = C_2 \lambda_2 \sinh(\lambda_2 \pi) = \lambda_2 y_{o,2}(\pi):$$

$$y_{0,2} = C_2 \frac{\sinh(\lambda_2 \pi)}{\pi \lambda_2}, \quad A_{n,2} = 2(-1)^n C_2 \frac{\sinh(\lambda_2 \pi)}{\pi} \frac{\lambda_2}{n^2 + \lambda_2^2}, \quad B_{n,2} = 2(-1)^n C_2 \frac{\sinh(\lambda_2 \pi)}{\pi} \frac{n}{n^2 + \lambda_2^2}$$

Les deux solutions sont indépendantes. Par conséquent, la solution générale de l'équation est:

- pour  $a^2 > 4b$ :  $y(x) = C_1 \exp\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} x\right) + C_2 \exp\left(\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} x\right)$

- pour  $a^2 < 4b$ :  $y(x) = \exp\left(\frac{-a}{2} x\right) \left[ C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2} x\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2} x\right) \right]$

- pour  $a^2 < 4b$ :  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-a}{2}$ .  $y_1(x) = C_1 \exp\left(\frac{-a}{2} x\right)$  est une solution de l'équation. On peut

chercher une deuxième solution, sous la forme  $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ . Par la méthode de "la réduction de l'ordre" [4] on trouve pour  $u(x) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{L}$  la condition:

$$\bar{u}'' = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( -C_n n^2 + 2(-1)^n \frac{u_e'(\pi)}{\pi} \right) \cos(nx) - \left( D_n n^2 + 2(-1)^n n \frac{u_o(\pi)}{\pi} \right) \sin(nx) \right] + \frac{u_e'(\pi)}{\pi} = 0$$

$$\rightarrow \frac{u_e'(\pi)}{\pi} = 0, \quad -C_n n^2 + 2(-1)^n \frac{u_e'(\pi)}{\pi} = 0 \rightarrow C_n = 0, \quad D_n = 2(-1)^n \frac{u_o(\pi)}{n\pi} \rightarrow u(x) = C_1 x + C_2$$

On note que pour tous les ODE à coefficients constants, quel que soit le degré de l'équation, les coefficients de développement de la fonction inconnue sont fournis par une équation pour déterminer la valeur moyenne et une paire d'équations pour chaque harmonique du développement.

### Exemple 2.6: $y' = x$

Même dans le cas d'ODEs non homogènes à coefficients constants, il n'y a pas d'équations significativement plus difficiles à résoudre. Par exemple, si dans cette équation, sur l'intervalle  $[-L, L]$ , nous faisons les remplacements:

$$\bar{y}(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx \quad \text{et} \quad \bar{x} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad \text{on a:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-A_n n \sin nx) + \sum_{n=1}^{\infty} n \left[ B_n + 2(-1)^n \frac{y_o(\pi)}{n\pi} \right] \cos nx + \frac{y_o(\pi)}{\pi} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

$$\rightarrow y_0 = K \text{ (arbitraire)}, \quad y_o(\pi) = 0, \quad \rightarrow B_n + 2(-1)^n \frac{y_o(\pi)}{n\pi} = 0 \rightarrow B_n = 0 \text{ et } A_n = -2 \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$\text{On reconnaît le développement: } \frac{x^2}{2} = \frac{1}{6} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx \quad \rightarrow \quad y(x) = y_0 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6} = \frac{x^2}{2} + C$$

### Exemple 2.7: $y' = x^2$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-A_n n \sin nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ B_n n + 2(-1)^n \frac{y_o(\pi)}{\pi} \right] \cos nx + \frac{y_o(\pi)}{\pi} = \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$$

$$\rightarrow y_0 = K \text{ (arbitraire)}, \quad \rightarrow y_o(\pi) = \frac{\pi^3}{3}, \quad A_n = 0, \quad B_n = \frac{2(-1)^{n+1} \pi^2}{n} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3},$$

$$\rightarrow y(x) = y_0 + \left[ \frac{2(-1)^{n+1} \pi^2}{n} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right] \cos nx = \frac{x^3}{3} + C$$

## 2.2. ODE linéaires à coefficients variables

Une équation différentielle linéaire d'ordre  $m$  avec des coefficients variables, non homogènes, de la forme

$$f_m(x)y^{(m)} + \dots + f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x)$$

peut être résolu, sur l'intervalle  $[-L, L]$ , si  $y^{(i)}(x)$ ,  $f_i(x)$  et  $g(x)$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, m$ , sont des fonctions de carré intégrable, en déterminant les coefficients  $A_n$  et  $B_n$ ,  $n=1, 2, \dots, \infty$ , du développement en SFS de la fonction inconnu  $y(x)$ :

$$y(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \omega_n x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \omega_n x$$

si les valeurs de la fonction et de ses dérivées sont connues aux points situés aux extrémités de l'intervalle. Si nous ne connaissons pas leur valeur qu'à l'une de ces extrémités, la relation (2.1a) nous permet également de trouver l'autre. Si  $L$  est pris comme paramètre, des estimations peuvent être faites, si  $L \rightarrow \infty$ , pour toutes les valeurs sur l'axe réel pour lesquelles les conditions d'intégrabilité au carré sont remplies. À partir des relations (2.1)–(2.3) de la sous-section précédente, par dérivations successives, nous trouverons les expressions des développements en série pour les dérivées d'ordre supérieur (si leurs valeurs aux extrémités de l'intervalle de définition sont connues). En utilisant des relations similaires aux relations (1.9) et (1.10) antérieurement déterminées (relations pour les coefficients du produit des deux fonctions), ainsi que des relations déduites de la formule d'intégration par parties on peut obtenir des expressions (dépendantes de  $A_n$  et  $B_n$ ) pour les coefficients  $P_n$  et  $Q_n$  du développement en série pour les termes de la forme  $f_i(x)y^{(i)}$ , lesquelles sont introduits dans l'équation de base, simultanément avec l'expression du développement en série de la fonction  $g(x)$ . En simplifiant la relation résultante (regroupant les termes qui ont comme facteur commun l'un des éléments de la base du développement, y compris ici aussi la fonction unitaire  $1$ ), on obtient l'expression du développement en SFS d'une fonction de valeur identiquement nulle. Par conséquent, tous les coefficients de ce développement (expressions algébriques dans lesquelles apparaît les coefficients  $A_n$  et  $B_n$ ) sont nuls et donnent naissance à des relations (équations algébriques) qui permettent le calcul des inconnues  $A_n$ ,  $B_n$  et  $f_0$ . La méthode est similaire à celle dans laquelle ces termes sont déterminés en remplaçant la fonction  $y(x)$  par son développement en série de Taylor.

Les coefficients d'ordre  $N$ ,  $P_N$  et  $Q_N$ , des développements des produits  $f_i(x)y^{(i)}$  sont des séries numériques qui peuvent également contenir des quantités infinies de termes décroissants ou alternants décroissants. Lorsque ces sommes peuvent être calculées (elles peuvent être réduites à une somme finie de termes), on obtient des équations exactes, et en les résolvant, on obtient des valeurs exactes pour les coefficients du développement de la fonction inconnue  $y(x)$ . Pour cela, il est nécessaire que les coefficients du développement en SFS des fonctions  $f_i(x)$  puissent être calculés avec exactitude (les intégrales d'Euler que leur correspond puissent être calculées avec un nombre fini de termes). Au contraire, on peut limiter au premier  $N$ , le nombre de termes de ces séries. Ainsi,  $2N+1$  équations approximatives seront obtenues, avec  $2N+1$  variables inconnues, par la résolution desquelles sont obtenues des valeurs approximatives pour  $y_0$ ,  $A_n$  et  $B_n$ . Pour la fonction  $y(x)$  on obtienne une valeur approximée par la somme de Fourier  $S_N$ . Plus élevé est le nombre  $N$  de termes, meilleure est l'approximation.

Dans certains cas, les solutions des équations pour certains des coefficients peuvent être déduites en comparant les termes des équations avec les termes des développements en série de certaines fonctions connues, ce qui facilite la recherche de la solution globale.

Une situation fréquent est celle des équations à coefficients polynomiaux. Si les conditions aux limites sont données (les valeurs de la fonction inconnue  $y$  et de ses dérivées aux extrémités de l'intervalle considérée), elles sont suffisantes pour écrire les équations qui

déterminent les coefficients  $A_n$  și  $B_n$ . Si  $y(x)$ ,  $y^{(m)}(x)$ ,  $f_i(x)$  et  $g(x)$  sont des carré intégrable sur l'intervalle  $[-L, L]$ , les relations (1.12)–(1.17) et ceux qui peuvent en être dérivés, fournissent des relations de calcul pour tous les coefficients du développement en SFS des termes de ces équations. Voilà, par exemple, les relations calculées pour les termes des équations du premier et du second ordre, ayant des coefficients polynomiaux du premier et du deuxième degré. Si

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) &= y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \text{ atunci:} \\ (yx)^{SFS} &= \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} B_n + \frac{L}{\pi} \left[ -\frac{B_n}{2n} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} (-1)^{l+n} \frac{2lB_l}{n^2 - l^2} \right] \cos \frac{n\pi x}{L} + \\ &+ \frac{L}{\pi} \left[ y_0 \frac{2(-1)^{n+1}}{n} - \frac{A_n}{2n} + 2n(-1)^{n+1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{(-1)^l A_l}{n^2 - l^2} \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \\ (yx^2)^{SFS} &= L^2 \left[ \frac{y_0}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n A_n}{n^2 \pi^2} \right] + \frac{L^2}{\pi^2} \left[ \frac{4y_0(-1)^n}{n^2} + \frac{A_n(2\pi^2 n^2 + 3)}{6n^2} + 4 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} A_l (-1)^{n+l} \frac{(n^2 + l^2)}{(n^2 - l^2)^2} \right] \cos \frac{n\pi x}{L} + \\ &+ \frac{L^2}{\pi^2} \left[ \frac{B_n(2\pi^2 n^2 + 3)}{6n^2} + 8n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} (-1)^{n+l} \frac{lB_l}{(n^2 - l^2)^2} \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \\ (y'x)^{SFS} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n + \left[ \frac{A_n}{2} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} (-1)^{l+n} \frac{2l^2 A_l}{n^2 - l^2} \right] \cos \frac{n\pi x}{L} + \left[ -\frac{B_n}{2} + 2n(-1)^{n+1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{lB_l(-1)^l}{n^2 - l^2} \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \\ (y'x^2)^{SFS} &= \frac{y_0(L)L}{3} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n \pi B_n}{n} + \frac{2y_0(L)}{n^2} \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n y_0(L)(4\pi^2 n^2 + 30)}{6n^2 L} + \frac{B_n(2\pi^2 n^2 + 3)n\pi}{6n^2 L} + 4(-1)^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \left[ \frac{\pi B_l(-1)^l}{L} \frac{(n^2 + l^2)}{(n^2 - l^2)^2} + 2 \frac{y_0(L)}{L} \frac{(n^2 + l^2)}{(n^2 - l^2)^2} \right] \right\} \cos \frac{n\pi x}{L} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{\pi} \left[ \frac{-A_n(2\pi^2 n^2 - 3)}{6n} - 8n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} (-1)^{n+l} \frac{l^2 A_l}{(n^2 - l^2)^2} \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \\ (y''x)^{SFS} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{n\pi}{L} B_n + 2 \frac{y_0(L)}{L} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{B_n n \pi}{2L} + (-1)^n \frac{y_0(L)}{L} + (-1)^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} 2l^2}{n^2 - l^2} \left[ lB_l \frac{\pi}{L} - 2 \frac{y_0(L)}{L} \right] \right\} \cos \frac{n\pi x}{L} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{3(-1)^{n+1} y'_e(L)}{n\pi} + \frac{A_n n \pi}{2L} + 2n(-1)^{n+1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{l+1} A_l l^2 \pi}{n^2 - l^2} + 2 \frac{y'_e(L)}{\pi} \frac{1}{n^2 - l^2} \right] \right\} \sin \frac{n\pi x}{L} \\ (y''x^2)^{SFS} &= y'_e(L)L - 2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l A_l + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2(-1)^n \frac{y'_e(L) L^2 (2\pi^2 n^2 + 15)}{6\pi^2 n^2} - \frac{A_n(2\pi^2 n^2 + 3)}{6} + (-1)^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \left[ A_l (-1)^{l+1} \frac{4l^2 (n^2 + l^2)}{(n^2 - l^2)^2} + \frac{8L^2}{\pi^2} \frac{y'_e(L)}{L} \frac{(n^2 + l^2)}{(n^2 - l^2)^2} \right] \right\} \cos \frac{n\pi x}{L} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(2\pi^2 n^2 - 3)}{6\pi n} [-\pi n B_n - 2(-1)^n y_0(L)] - 8n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \left[ \frac{l^3 B_l (-1)^{l+1}}{(l^2 - n^2)^2} \right] - \frac{16nL}{\pi} \frac{y_0(L)}{L} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{(-1)^l l^2}{(l^2 - n^2)^2} \right\} \sin \frac{n\pi x}{L} \end{aligned}$$

Par exemple, une équation de type Euler, non homogène  $y''x^2 + ay'x + by = g(x)$ , après avoir utilisé ces relations et après le développement en SFS de la fonction

$$g(x) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \text{ conduit aux équations algébriques suivantes:}$$

$$y'_e(L)L - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n + a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n + by_0 = g_0 \rightarrow y_0 = \frac{1}{b}\left[g_0 - y'_e(L)L + (2-a)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n\right],$$

puis, pour chaque  $n \in \mathbf{N}^+$ :

$$\begin{aligned} & 2(-1)^n \frac{y'_e(L)}{L} \frac{L^2(2\pi^2 n^2 + 15)}{6\pi^2 n^2} - \frac{A_n(2\pi^2 n^2 + 3)}{6} + (-1)^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \left[ A_l (-1)^{l+1} \frac{4l^2(n^2 + l^2)}{(n^2 - l^2)^2} + \frac{8L^2}{\pi^2} \frac{y'_e(L)}{L} \frac{(n^2 + l^2)}{(n^2 - l^2)^2} \right] + \\ & + a \frac{A_n}{2} - a \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} (-1)^{l+n} \frac{2l^2 A_l}{n^2 - l^2} + bA_n = P_n \\ & \frac{(2\pi^2 n^2 - 3)}{6\pi n} \left[ -\pi m B_n - 2(-1)^n y_o(L) \right] - 8n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \left[ \frac{l^3 B_l (-1)^{n+l}}{(l^2 - n^2)^2} \right] - \frac{16nL}{\pi} \frac{y_o(L)}{L} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{(-1)^l l^2}{(l^2 - n^2)^2} + \\ & - a \frac{B_n}{2} + 2an(-1)^{n+1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{l B_l (-1)^l}{n^2 - l^2} + bB_n = Q_n \end{aligned}$$

### 2.3. ODEs non linéaires

La détermination de la solution en calculant les coefficients de son développement en série de Fourier sinusoïdale peut être aussi appliquée avec succès aux ODEs non linéaires, avec des non-linéarités polynomiales, des équations dont les termes ne contiennent pas que des puissances naturelles de l'inconnu, ses dérivés et leurs produits. Les coefficients de ces termes peuvent être constants, ou variables. À partir du développement

$$\bar{y}(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

les relations de type (2.2)–(2.3), déduites pour le calcul des coefficients de Fourier des dérivées de tout ordre et de type (1.9)–(1.10), pour le calcul des coefficients de Fourier du produit des deux certaines fonctions, suffisent pour convertir l'équation donnée en un système de  $2N+1$  équations algébriques ( $N \rightarrow \infty$ ), avec  $2N+1$  inconnues:  $y_0, A_1, A_2, \dots, A_N, B_1, B_2, \dots, B_N$ . Par exemple:

$$\begin{aligned} (y^2)^{SFS} &= y_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} (A_l^2 + B_l^2) + \left[ 2y_0 A_n + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} A_l (A_{n+l} + A_{|n-l|}) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} B_l (B_{n+l} - \text{sgn}(l-n) B_{|n-l|}) \right] \cos \frac{n\pi x}{L} + \\ & + \left[ 2y_0 B_n + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} A_l (B_{n+l} - \text{sgn}(l-n) B_{|n-l|}) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} B_l (A_{n+l} - A_{|n-l|}) \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \\ (yy')^{SFS} &= y_0 \frac{y_o(L)}{L} + 2y_0 A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ A_l \left[ \omega_{n+l} B_{n+l} + \omega_{|n-l|} B_{|n-l|} + 4(-1)^{l+n} \frac{y_o(L)}{L} \right] - B_l \left[ \omega_{n+l} A_{n+l} - \text{sgn}(l-n) \omega_{|n-l|} A_{|n-l|} \right] \right\} \cos \frac{n\pi x}{L} - \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ y_0 \omega_n A_n + \frac{y_o(L)}{L} B_n - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} A_l \left[ \omega_{n+l} A_{n+l} - \text{sgn}(l-n) \omega_{|n-l|} A_{|n-l|} \right] - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} B_l \left[ \omega_{n+l} B_{n+l} - \omega_{|n-l|} B_{|n-l|} \right] \right\} \sin \frac{n\pi x}{L} \\ (y^2)^{SFS} &= \frac{y_o(L)^2}{L^2} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \omega_l^2 A_l^2 + \omega_l^2 B_l^2 + 4(-1)^n B_l \frac{y_o(L)}{L} + 4 \frac{y_o(L)^2}{L^2} \right] + 2y_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \omega_n B_n + 2(-1)^n \frac{y_o(L)}{L} \right] \cos \frac{n\pi x}{L} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ \left[ \omega_l B_l + 2(-1)^l \frac{y_o(L)}{L} \right] \left[ -\omega_{n+l} B_{n+l} - \omega_{|n-l|} B_{|n-l|} + 4(-1)^{n+l} \frac{y_o(L)}{L} \right] + \omega_l A_l \left[ \omega_{n+l} A_{n+l} - \text{sgn}(l-n) \omega_{|n-l|} A_{|n-l|} \right] \right\} \cos \frac{n\pi x}{L} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -2y_0 \omega_n A_n + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \omega_l B_l + 2(-1)^l \frac{y_o(L)}{L} \right] \left[ -\omega_{n+l} A_{n+l} + \text{sgn}(l-n) \omega_{|n-l|} A_{|n-l|} \right] - \omega_l A_l \left[ \omega_{n+l} B_{n+l} - \omega_{|n-l|} B_{|n-l|} \right] \right\} \sin \frac{n\pi x}{L} \end{aligned}$$

On peut voir que pour obtenir les valeurs des coefficients de Fourier de l'inconnu  $y(x)$ , il est nécessaire de résoudre certaines équations algébriques du second ordre ou plus, si le



degré de non-linéarité augmente. On peut également remarquer que si, dans l'un des types d'équations analysés, les substitutions opérées pour résoudre l'équation sont faites en utilisant les sommes partiels  $S_N$  (avec  $2N+1$  termes) au lieu du développement entier (avec un nombre infini de termes), on obtienne une ODE approximative, l'approximation étant d'autant meilleure que le  $N$  est plus grand. Pour le résoudre, il faut résoudre un système de  $2N+1$  équations algébriques, problème pour lequel il existe des nombreux programmes de calcul électronique. Par conséquent, il est possible de développer un algorithme simple, universel et précis pour résoudre ces types d'ODEs.

### 3. Méthodes de résolution d'équations différentielles

Les exemples examinés dans la section précédente ont souligné qu'en remplaçant certains termes des ODE par leurs développements en SFS/SFN, l'équation initiale reste, ou peut devenir, linéaire. Dans le cas général, la fonction inconnue  $y(x)$  est remplacée par une somme infinie:

$$\hat{y}(x) = y_0 \cdot 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n R_n(x), \text{ sau } \hat{y}(x) = y_0 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n Q_n(x)$$

qui peut être écrit aussi  $y(x) = y_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n(x)$ , respectivement  $y(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_{en}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} y_{on}(x)$

Si tous les termes de l'équation donnée peuvent être remplacés par des combinaisons des fonctions  $R_n(x)$ , respectivement  $P_n(x)$  et  $Q_n(x)$ , une superposition d'équations indépendantes est obtenue qui, en raison de la linéarité de l'équation, est réduite à un système d'équations algébriques (les fonctions  $y_n(x)$ , respectivement  $y_{en}(x)$  et  $y_{on}(x)$  sont parfaitement déterminées en déterminant les coefficients  $C_n$ , respectivement  $A_n$  și  $B_n$ ).

Les exemples analysés (2.1-2.7) ont également mis en évidence le fait que cette méthode permet de déterminer, dans de nombreux cas, une solution exacte, exprimée sous une forme fermée. Dans des nombreuses autres situations (par exemple, pour les ODEs à coefficients variables), on obtienne des solutions exactes, exprimées sous une forme des sommes infinies de termes. Pour être utiles en pratique, ces formes peuvent être approximées en négligeant les termes les moins significatifs: **l'approximation de la solution**. La solution approximative est déterminée à tous les points de l'intervalle, sans interpolation requise, comme dans des nombreuses autres méthodes approximatives courantes.

Dans de nombreuses autres situations, pour résoudre l'équation, l'approximation du développement en série doit se faire **en avant** d'arriver à la solution exacte: l'impossibilité de résoudre le système d'équations algébriques de dimensions infinies, résulté par le traitement d'ODE, l'impossibilité de déterminer par des calculs analytiques les coefficients de Fourier, etc. On peut considérer que nous avons eu recours à une **approximation de la méthode**. Dans ces situations, on obtienne aussi une solution exprimée sous une forme fermée (une somme finie des premières  $2N+1$  harmoniques). Dans ce cas aussi, les valeurs de la solution sont parfaitement déterminées sur toute l'intervalle de définition.

Il existe également des situations dans lesquelles le remplacement des certains termes d'ODEs se fait par d'autres expressions qui les rapprochent, sur la base des critères empiriques, méthodologiques ou autres. Ce sont des méthodes **d'approximation de l'équation**. Dans la plupart des cas, cette approximation est faite en un nombre fini de points, la valeur de la solution aux points intermédiaires étant déterminée par interpolation.

#### 4. Solutions des ODEs, déterminées en calculant les coefficients de son développement en séries de Fourier non sinusoïdales

Dans l'article [1], en cours de publication, nous avons proposé une généralisation du développement en SFS des fonctions périodiques définies sur un intervalle  $[-L, L]$ , généralisation par laquelle nous avons remplacé la base sinusoïdale périodique (le nom usuel est base trigonométrique) avec une base non sinusoïdale, comprenant les fonctions suivantes: la fonction unité  $I$ , les quasi-harmoniques fondamentales  $g(x)$ -paire et  $h(x)$ -impaire, périodiques, avec la période  $2L$ , avec des valeurs moyenne nulles sur l'intervalle de définition et les quasi-harmoniques secondaires, définis sur  $[-L, L]$ ,  $g_n(x)=g(nx)$  et  $h_n(x)=h(nx)$ , avec la période  $2L/n$ , pour  $n \in \mathbf{Z}^+$ . Les quasi-harmoniques fondamentales  $g(x)$  et  $h(x)$ , définies sur l'intervalle  $[-L, L]$ , peuvent être toutes fonctions admettant des développements en série sinusoïdale, étendus sur l'axe réel, par des translations successives: pour tout  $x_R \in R$ , on définit la fonction  $K(x_R)=E[(x_R-x)/2L]$ , tel que pour chaque  $x_R \in R$  et chaque  $x \in [-L, L]$ , il y a les relations  $x_R=x+KT$  et  $g(x_R)=g(x_R-KT)=g(x)$ .  $E(x)=\lfloor x \rfloor =k$ , est la fonction **partie entière** ( $k$  est l'entier le plus proche inférieur ou égal à  $x$ , c'est à dire  $E(x) \leq x < E(x)+1$ . Dans la littérature anglaise, on utilise le nom de *floor function*). Les quasi-harmoniques secondaires sont obtenues par la dilatation de ces fondamentales:  $g_n(x)=g_n[x-2L \cdot E[(x+L)n/2L]]$ . La fonction  $g_n(x)$  reçoit sur l'intervalle  $[2L(2k-1)/n, 2L(2k+1)/n]$ , les mêmes valeurs que celles qu'il reçoit  $g(x)$  sur l'intervalle  $[-L, L]$ . Nous avons introduit pour cette fonction la notation simplifiée:

$$g_n(x)=G[-L/n < g(nx) > L/n]_n, \text{ où } n \in \mathbf{N}^+.$$

Les coefficients  $A_n$  et  $B_n$  du développement en SFN de la fonction  $f(x)$  sont obtenus au moyen des relations algébriques entre les coefficients de Fourier des développements en SFS des fonctions  $f(x)$ ,  $g(x)$  et  $h(x)$ .

L'article [1] mis en évidence un large éventail d'applications possibles de ce nouveau type de développement en série, en soulignant la diversité des solutions possibles pour chacun d'entre eux, illustrée par les différentes façons d'approximer les fonctions. Concernant la résolution des équations différentielles, dans la section précédente, nous avons analysé une nouvelle méthode de résolution, en remplaçant la fonction inconnue par son développement en SFS et en résolvant les équations algébriques résultantes. La méthode est également applicable aux développements en SFN, à condition qu'à travers les opérations de dérivation/intégration aucun élément d'une autre base de développement n'apparaisse (donc, seulement pour les bases composées des fonctions circulaires, hyperboliques, exponentielles). En utilisant cette méthode, peuvent également être capitalisés les avantages offerts par la possibilité d'utiliser des bases orthogonalisées, bien que cela implique un volume de calcul supplémentaire.

##### 4.1. Méthodes de résolution d'équations différentielles par l'approximation de la solution

Dans certains ODEs, il n'est pas nécessaire de remplacer tous les termes de l'équation différentielle par leurs développements en séries de Fourier sinusoïdales/non sinusoïdales. L'équation qui résulte par le remplacement seulement des certains termes, même lorsqu'elle n'est pas linéaire, peut conduire à une équation plus facile à résoudre que l'équation initiale, en utilisant des procédures classiques d'intégration/dérivation (la méthode est fréquemment appliquée dans la pratique actuelle par des techniques de linéarisation d'équations non linéaires). Nous illustrerons ces énoncés en résolvant une équation inhomogène très simple:

$$y'=x \tag{4.1}$$

avec la condition  $y(0)=y_0$

Nous sélectionnerons pour commencement une série des développements en série de Fourier [1], qui seront utiles:

$$\bar{x} = X[-L < x > L] = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (4.2)$$

$$(x^2)^{SFS} = X_e^2[-L > x^2 < L] = \frac{L^2}{3} - \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (4.3)$$

$$(1_o)^{SFS} = J[-L > -1 < 0 > 1 < L] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L} \quad (4.4)$$

$$(x^n)^{SFS} = X_e \left[ -L > -x - \frac{L}{2} < 0 > x - \frac{L}{2} < L \right] = -\frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{L} \quad (4.5)$$

A partir des deux premières relations, nous pouvons écrire les développements en séries non sinusoïdales:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= X[-L < x > L] = \frac{L}{2} \left( J_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} J_{2^n} \right) = \\ &= \frac{L}{2} J[-L > -1 < 0 > 1 < L] - \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[ -\frac{L}{2^n} > -1 < 0 > 1 < \frac{L}{2^n} \right]_{2^n} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} (x^2)^{SFN} &= X_e^2[-L > x^2 < L] = \frac{L^2}{3} + L \cdot X_{e1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{4^n} \cdot [X_e]_{2^n} = \\ &= \frac{L^2}{3} + L \left[ -L > -x - \frac{L}{2} < 0 > x - \frac{L}{2} < L \right]_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{4^n} \left[ -\frac{1}{2^n} > -2^n x - \frac{L}{2} < 0 > 2^n x - \frac{L}{2} < \frac{1}{2^n} \right]_{2^n} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pour l'intervalle  $[-L, L]$  le terme inhomogène de l'équation (4.1) peut être développé dans une série sinusoïdale, ou dans une série non sinusoïdale (pour la dernière variante les possibilités étant multiples), ce qui fait qu'en utilisant la notation réduite, on peut écrire:

$$(y')^{SFS} = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[ -\frac{L}{n} < \sin \frac{n\pi x}{L} > \frac{L}{n} \right]_n, \text{ respectiv} \quad (4.8)$$

$$(y')^{SFN} = \frac{L}{2} [-L < -1 > 0 < 1 > L] - \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[ -\frac{L}{2^n} < -1 > 0 < 1 > \frac{L}{2^n} \right]_{2^n} \quad (4.9)$$

Par intégration:

$$y + C = -\frac{2L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \left[ -\frac{L}{n} < \cos \frac{n\pi x}{L} > \frac{L}{n} \right]_n = \frac{1}{2} \left( X_e^2[-L > x^2 < L] - \frac{L^2}{3} \right) = \frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{6},$$

$$\begin{aligned} y + C &= \frac{L}{2} [-L < -x > 0 < x > L] - \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[ -\frac{L}{2^n} < -x > 0 < x > \frac{L}{2^n} \right]_{2^n} = \\ &= \frac{L}{2} \left( \left[ -L < -x - \frac{L}{2} > 0 < x - \frac{L}{2} > L \right] + \frac{L}{2} \right) - \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4^n} \left\{ \left[ -\frac{L}{2^n} < -2^n x - \frac{L}{2} > 0 < 2^n x - \frac{L}{2} > \frac{L}{2^n} \right]_{2^n} + \frac{L}{2} \right\} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( X_{e1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} [X_e]_{2^n} \right) + \frac{L}{2} \left( \frac{L}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{L^2}{3} \right) + \frac{L^2}{4} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{6} + \frac{L^2}{6} = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Dans tout les deux variantes, la solution particulière est  $y-y_0=x^2/2$ .

On remarque que la dérivée de la fonction paire  $y_e(x)$  est une fonction impaire qui peut être développée en série de fonctions impaires, avec la valeur moyenne nulle, avec la base  $h(x)$ :

$$y'_e(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n h_n(x)$$

L'intégration de cette relation de dérivation conduit à une relation pour le développement de la fonction paire  $y_e(x)$ , dans une base  $g(x)$  des fonctions paires, pour laquelle la valeur moyenne  $g_0$  peut être non nulle:

$$y_e(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (g - g_0)_n, \text{ où } y_0 = g_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad (4.10)$$

On remarque également que dans l'intervalle  $[-L, L]$ , chacune des équations (4.8) et (4.9) est obtenu par la superposition linéaire des sous-équations suivantes:

$$y'_n = \frac{2L}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}, \text{ respectivement } y'_0 = \frac{L}{2} J_1 \text{ et } y'_n = \frac{L}{2} \frac{1}{2^n} J_{2^n}, \text{ pour } n=1, 2, \dots, \infty$$

En résolvant ces équations partielles et en additionnant les solutions, nous obtenons les mêmes résultats que ceux obtenus en intégrant toute l'équation. Dans le cas présent, les dérivées  $y'_n(x)$  des solutions partielles  $y_n(x)$  sont même les harmoniques (ou quasi-harmoniques) du développement en une série connue de la fonction  $y'$ .

Par conséquent, la méthode peut être appliquée à toutes les équations dans lesquelles le développement en série d'un terme conduit à une équation linéaire représentée comme une superposition infinie d'équations partielles pour lesquelles la solution peut être trouvée par des méthodes de résolution classiques.

#### 4.2. La linéarisation de l'équation différentielle du pendule gravitationnel, en introduisant une somme infinie de fonctions rampe

Nous appliquerons la méthode de linéarisation des équations non linéaires à l'équation du **pendule gravitationnel**:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (4.11)$$

Dans une approche classique [13], l'équation est résolue par la méthode d'approximation de l'équation, en remplaçant  $\sin\theta \approx \theta$ , acceptable pour  $\theta \in [-\theta_1, \theta_1]$ , si  $\theta_1 \approx 0$ . Ici, nous allons essayer de trouver une solution exacte, valable pour tout l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ . Pour cela, nous allons recourir au développement en série non sinusoïdale du terme  $\sin\theta$ , la base du développement étant la fonction impaire

$$g_1(\theta) = X_0[-\pi < -\theta - \pi > -\pi/2 < \theta > \pi/2 < -\theta + \pi > \pi].$$

Le développement en série de Fourier de la fonction  $g_1(\theta)$  nous amène à:

$$\bar{g}_1(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(2n-1)\theta}{(2n-1)^2} \quad \text{dont les coefficients sont:}$$

$$d_1=4/\pi, d_2=0, d_3=-4/9\pi, d_4=0, d_5=4/25\pi, d_6=0, d_7=-4/49\pi, d_8=0, d_9=4/81\pi, d_{10}=0, d_{11}=-4/121\pi, d_{12}=0, \dots \text{ Pour la fonction } f(\theta)=\sin\theta, \text{ nous pouvons écrire:}$$

$$\sin \theta = \hat{f}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n g_n(\theta), \text{ dans lequel:}$$

$$B_1 = \frac{\pi}{4}, B_2 = 0, B_3 = \frac{\pi}{36}, B_4 = 0, B_5 = -\frac{\pi}{100}, B_6 = 0, B_7 = \frac{\pi}{196}, B_8 = 0, B_9 = 0, \dots$$

$$B_{2n-1} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}, B_{2n} = 0, \text{ mais } B_{n^2} = 0, \text{ pour } n=2, 3, \dots, \infty. \text{ On obtient l'équation linéaire:}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n g_n(\theta) = 0$$

laquelle, pour  $\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n$ , est la superposition linéaire des équations partielles:

$$\frac{d^2\theta_n}{dt^2} + \omega_0^2 B_n g_n(\theta_n) = 0, \text{ où } n=1, 2, 3, \dots, \infty \quad (4.12)$$

Si  $\theta(0)=\theta_0$ , et  $v_0=0$ , ces conditions initiales sont valables pour toutes les équations partielles:  
 $\theta_n(0)=\theta_0$ , et  $v_{0n}=0$ .

Si  $v_0 \neq 0$ , le problème donné est remplacé par un problème équivalent: nous considérons la vitesse angulaire initiale  $v_0$  imprimée sur le pendule, comme provenant de la transformation en énergie cinétique  $E_c=1/2 \cdot mv^2$  de la partie  $E_p=mg(h_e - h_0)$  de l'énergie potentielle du pendule de longueur  $l$ , située à une hauteur équivalente  $h_e$  (ce qui correspond à un angle équivalent  $\theta_e$ ). Ainsi, le problème initial est remplacé par celui dans lequel la vitesse angulaire initiale  $v_0$  est nulle et la position initiale est:

$$\theta_e = 2k\pi \pm \arccos\left(\cos\theta_0 - \frac{lv_0^2}{2g}\right) \quad (4.13)$$

Des valeurs  $k \neq 0$  apparaissent quand  $h_e > 2l$ . Pour ces cas, nous pouvons calculer  $v_\pi$ , la vitesse à laquelle le pendule traverse la position  $h=\pm\pi$ . Si  $\theta_e$  et  $\theta_0$  appartiennent à l'intervalle  $(-\pi, \pi)$ , les solutions partielles équivalentes  $\theta_n(t)$  ils auront tous, les conditions initiales:

$$\theta_n(0) = \theta_e \text{ si } \left. \frac{d\theta_n}{dt} \right|_{t=0} = 0, \text{ et pour } h_e > 2l: \theta_n(0) = \pi \text{ et } \left. \frac{d\theta_n}{dt} \right|_{t=0} = v_\pi \quad (4.14)$$

La résolution de ces  $n$  équations partielles nous amène à trouver les  $n$  réponses partielles du système aux ces  $n$  forces périodiques agissant sur le pendule. La somme de ces réponses est la solution de l'équation pour le problème équivalent. Cette trajectoire-solution  $\theta(t)$  passe par la position  $\theta_0$  à l'instant  $t_e$ . La solution au problème initial est  $\theta(t-t_e)=\sum\theta_n(t-t_e)$ . Les positions initiales  $\theta_n(t_e)$  et les vitesses initiales  $\theta_n'(t_e)$  des trajectoires particulières enregistrées lorsque le pendule équivalent passe par la position  $\theta_0$  sont les positions initiales et les vitesses initiales des problème partielles. De cette façon, l'énergie potentielle équivalente du pendule (correspondant à la vitesse initiale  $v_0$ ) est distribuée sur les composants partiels du système de forces total et transformée par chaque pendule équivalent selon sa propre spécificité, en énergie cinétique, résultant une vitesse angulaire initiale équivalente pour chaque équation partielle.

En raison des lois de conservation de l'énergie, la trajectoire du pendule, pour chaque système partiel de forces  $F_n$ , est symétrique par rapport à une position d'équilibre  $\theta_{mn}$  ( $\theta_0$  pour  $n=1$ ). Elle passe par les positions  $\theta_m - \theta_i$  avec les mêmes vitesses  $v_i$  avec lequel il passe à travers les positions  $\theta_m + \theta_i$ , et atteint la position maximale  $-\theta_e$  également à vitesse nulle. Si  $\theta_e > \pi$ , la vitesse équivalente  $v_\pi$  que correspond à la position  $\theta=\pi$  est égal à celui de la position  $\theta=-\pi$ . Pour les mêmes raisons, les trajectoires partielles avec des vitesses initiales  $\theta_e$  negative sont symétriques par rapport à l'axe  $\theta=0$  avec ceux dont la vitesse initiale  $\theta_e$  est positive.

De (4.12), pour  $n=1$ , on obtient l'équation partielle

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \omega_0^2 \frac{\pi}{4} g_1(\theta) = 0, \text{ où } g_1(\theta) = X_0[-\pi < -\theta - \pi > -\pi/2 < \theta > \pi/2 < -\theta + \pi > \pi],$$

qui se résout successivement, pour chaque sous-intervalle dans lequel la force exercée sur le pendule a une certaine loi de variation. Pour  $-\pi/2 < \theta_e < \pi/2$ , sur le sous-intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$  la force augmente uniformément d'une valeur négative à une valeur positive, l'équation est harmonique et la solution est:

$$\theta_1(t) = \theta_e \cos(\sqrt{\pi/4}\omega_0 t) \quad (4.15)$$

Pour  $-\pi < \theta_e < -\pi/2$ , l'équation partielle prend des formes différentes pour des sous-intervalles différents. Sur le sous-intervalle  $[\theta_e, -\pi/2]$  l'équation prend la forme:

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} - \omega_0^2 \frac{\pi}{4} \cdot (\theta_1 + \pi) = 0, \quad (4.16)$$

avec les conditions initiales:  $\theta_{1,0}=\theta_1(0) = \theta_e$  et  $v_{1,0} = \frac{d\theta_1}{dt}\Big|_{t=0} = 0$  et avec la solution:

$$\theta_1(t) = (\theta_e + \pi)ch(\sqrt{\pi/4} \cdot \omega_0 t) - \pi \quad (4.17)$$

$$v_1(t) = (\theta_e + \pi)\omega_0\sqrt{\pi/4}sh(\sqrt{\pi/4} \cdot \omega_0 t), \quad (4.18)$$

Les équations (4.16) et (4.18) permettent de trouver le moment  $t_{1,1}$  de commutation de la champ des forces, c'est-à-dire le moment où  $\theta_1 = -\pi/2$ , puis la vitesse angulaire du pendule à partir de ce moment:  $v_{1,1} = v_1(t_1) = (\theta_e + \pi)\omega_0\sqrt{\pi/4}sh(\sqrt{\pi/4} \cdot \omega_0 t_1)$ . Ces valeurs deviennent les conditions initiales de l'équation harmonique dans le sous-intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$ , valable pour  $t > t_{1,1}$ . La solution est:

$$\theta_1(t - t_{1,1}) = (\pi/2)\cos(\sqrt{\pi/4}\omega_0(t - t_{1,1})) + (v_{1,1}/\omega_0\sqrt{\pi/4})\sin(\sqrt{\pi/4}\omega_0(t - t_{1,1})) \quad (4.19)$$

Maintenant, de  $\theta_1(t) = 0$ , on peut calculer l'instant  $t_{1,2}$  du passage par le point d'équilibre. Plus loin, l'évolution du pendule est symétrique par rapport à ce point. Le pendule atteint la position  $\theta_1(t) = -\theta_e$  après le temps  $2t_{1,2}$  et continuera avec une trajectoire symétrique par rapport à l'axe  $t = 2t_{1,2}$ , pour arriver après un temps total  $t_i = 4t_{1,2}$  de nouveau en position  $\theta_1(t) = \theta_e$  et pour continuer une trajectoire périodique avec la période  $T = 4t_{1,2}$ .

La figure 2.a. montre graphiquement les solutions pour la première harmonique dans le cas des vitesses initiales nulles, pour des positions initiales supérieures et inférieures à  $-\pi/2$ , et la figure 2.b., pour des vitesses initiales non nulles.

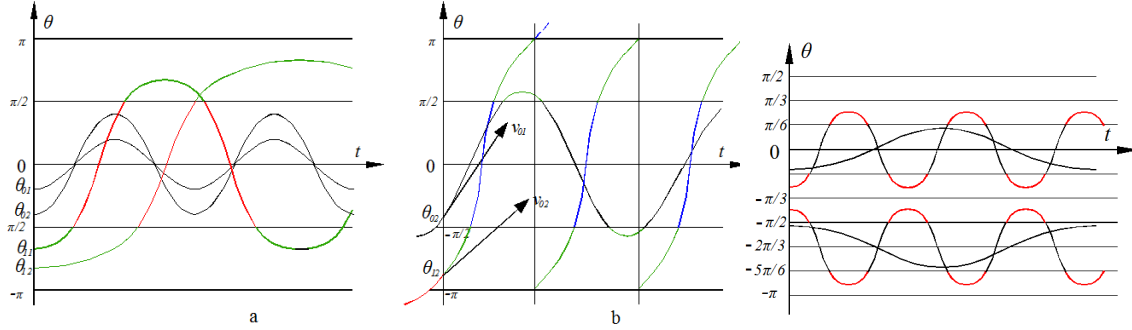


Fig.2. **a:** des solutions partielles de premier ordre pour  $v_0=0$ ,  $-\pi/2 < \theta_{01}$ ,  $\theta_{02} < 0$  et  $-\pi < \theta_{11}$ ,  $\theta_{12} < -\pi/2$ . **b:** pour  $v_0 \neq 0$  **c:** des solutions partielles de troisième ordre pour  $v_0=0$  si  $\theta_e < 0$

Pour  $n=3$  on a l'équation  $\frac{d^2\theta_3}{dt^2} + \omega_0^2 \frac{\pi}{4} \frac{1}{9} g_3(\theta) = 0$ , où

$$g_3(\theta) = X_0[-\pi/3 < 3(-\theta - \pi/3) > -\pi/6 < 3\theta > \pi/6 < 3(-\theta + \pi/3) > \pi/3]_3 = X_0[-\pi < -3\theta - 3\pi > -5\pi/6 < 3\theta + 2\pi > > -\pi/2 < -3\theta - \pi > -\pi/6 < 3\theta > \pi/6 < -3\theta + \pi > \pi/2 < 3\theta - 2\pi > 5\pi/6 < -3\theta + 3\pi > \pi]$$

Les conditions initiales de l'équation sont données par (4.14).

Pour  $v_0=0$ , si  $-\pi/6 < \theta_0 < \pi/6 \rightarrow g_3(\theta) = 3\theta$ , et la solution est:  $\theta_3(t) = \theta_0 \cos(\sqrt{\pi/12}\omega_0 t)$ ,

Pour  $v_0 \neq 0$ , si  $|\theta_e| = \sqrt{\theta_0^2 + (v_0 / \omega_0 \sqrt{\pi/12})^2} \leq \pi/6$ , alors

$$\theta_3(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{12}}\omega_0 t\right) + \frac{v_0}{\omega_0 \sqrt{\pi/12}} \sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{12}}\omega_0 t\right) = \theta_e \cos\left[\sqrt{\frac{\pi}{12}}\omega_0 t + \arctg\left(-v_0 / \theta_0 \omega_0 \sqrt{\frac{\pi}{12}}\right)\right]$$

Pour les autres sous-intervalles dans lesquels  $\theta_e$  peut être situé, la solution partielle est:

$$\theta_3(t) = (\theta_e - \theta_m)\cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{12}}\omega_0 t\right) - \theta_m, \text{ ou } \theta_3(t) = (\theta_e - \theta_m)ch\left(\sqrt{\frac{\pi}{12}}\omega_0 t\right) - \theta_m, \text{ comme la pente de la}$$

fonction  $g_3(\theta)$  est positif, respectivement négatif. Ici,  $\theta_m$  est le point médian de ce sous-intervalle et il a toujours le même signe que  $\theta_e$ .

Par conséquent, la cosinusoïde  $\theta_3(t)$  (ainsi que ceux d'ordre supérieur) est un mouvement oscillant vis à vis du point  $\theta_m$ , avec l'amplitude  $\theta_e - \theta_m$  (elle n'arrive jamais au point d'équilibre  $\theta=0$  ni dans  $\theta_0$ , s'il est en dehors du sous-intervalle). La cosinusoïde hyperbolique  $\theta_3(t)$  (ainsi que les quasi-cosinusoïdes de rang supérieur) décrit un mouvement divergent, d'éloignement de  $\theta_m$  (qui est un point d'équilibre instable).

La figure 2.c présente certaines de ces solutions partielles, pour différentes valeurs négatives de  $\theta_e$  ( $v_0=0$ ).

Pour  $n=5$ , l'équation partielle est  $\frac{d^2\theta_5}{dt^2} - \omega_0^2 \frac{\pi}{4} \frac{1}{25} g_5(\theta) = 0$ , où

$$g_5(\theta) = X_0[-\pi/5 < 5(-\theta-\pi) > -\pi/10 < 5\theta > \pi/10 < 5(-\theta+\pi) > \pi/5]_5$$

Elle est résolu de la même manière que les équations précédentes. Il convient de noter qu'en raison du coefficient négatif de cette quasi-harmonique, la position  $\theta=0$  est une d'équilibre instable. Pour  $-\pi/10 < \theta_e < \pi/10$ , la trajectoire du pendule est divergente.

La solution générale de l'équation équivalente est la somme de toutes les solutions partielles:  $\theta(t) = \sum \theta_n(t)$ . C'est aussi la solution exacte de l'équation donnée, exprimée comme une somme infinie de solutions partielles, chacune de ces solutions ayant des expressions différentes sur des sous-intervalles différents. Pour que cette solution soit pratiquement utile, nous ne retiendrons que les  $N$  premières solutions partielles (l'approximation de la solution). Le même résultat est atteint en approximant la méthode, si à partir du développement en SFN de la fonction  $\sin\theta$  on retient les premiers  $N$  termes.

Pour une certaine valeur  $t=t_e$ , la somme  $\theta(t) = \sum \theta_n(t)$  est nulle:  $\sum \theta_n(t_e) = 0$ . Comme le montre la Fig.3 (pour simplifier nous avons choisi le cas  $\theta_0=0$ ), à ce stade, chaque solution partielle a une valeur  $\theta_n(t_e) = \theta_{n0}$  et une vitesse  $v_n(t_e) = v_{n0}$ . Ce sont les conditions initiales pour les composantes de l'équation initiale.

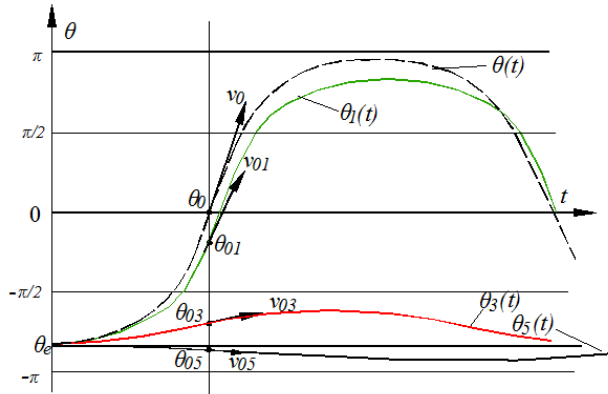


Fig.3. La solution générale et les solutions partielles d'ordre 1, 3 et 5 pour  $v_0 \neq 0$

#### 4.3. La linéarisation de l'équation différentielle du pendule gravitationnel, en introduisant une somme infinie de fonctions rectangulaires

Le développement en séries de Fourier non sinusoïdal que nous avons choisi pour la linéarisation de l'équation (4.11) est le plus proche de l'approche traditionnelle, mais ce n'est qu'une des nombreuses possibilités offertes par la méthode que nous proposons. Une autre solution intéressante est le remplacement dans l'équation de la fonction  $\sin\theta$  avec son développement en série infinie d'impulsions rectangulaires périodiques:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \Pi_n(\theta) = 0, \quad (4.20)$$

où la variable  $\theta$  peut avoir des valeurs dans l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ ,

$\Pi_1(\theta) = \Pi[-\pi(-1)\theta(1)\pi]$ , et  $\Pi_n(\theta) = \Pi[-\pi/n(-1)\theta(1)\pi/n]_n$ .

Comme dans l'approche précédente, les conditions initiales du problème équivalent sont:

$$\theta_0 = \theta(0) = \theta_e \quad \text{si} \quad v_0 = \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad (4.21)$$

où  $\theta_e$  est l'angle équivalent, correspondant à la hauteur équivalente  $h_e$ .

Soit  $B_n$  les coefficients du développement  $\sin \theta = \hat{f}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \Pi_n(\theta)$

Parce que  $\Pi_1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1}$ , les coefficients du développement de la fonction  $\sin \theta$  sont:

$$B_1 = \frac{\pi}{4}, B_2 = 0, B_3 = -\frac{\pi}{12}, B_4 = 0, B_5 = -\frac{\pi}{20}, B_6 = 0, B_7 = -\frac{\pi}{28}, B_8 = 0, B_9 = 0, B_{10} = 0, \dots$$

$$B_{2n-1} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{-1}{2n-1}, B_{2n} = 0, \text{ mais } B_{n^2} = 0, \quad \text{pour } n = 2, 3, \dots, \infty$$

Tous les coefficients, à l'exception de ce de la quasi-harmoniques fondamentales, sont négatifs. L'équation linéaire (4.20) est la superposition d'un nombre infini d'équations du type:

$$\frac{d^2\theta_n}{dt^2} = -\omega_0^2 B_n \Pi_n(\theta), \quad \text{où } n=1, 2, 3, \dots, \infty, \text{ avec les conditions initiales (4.21). Les solutions}$$

de ces équations, pour tout les sous-intervalles  $[t_k, t_{k+1}]$  dans lequel  $\Pi_n(\theta) = ct$  sont:

$$\theta_n(t) = -\omega_0^2 B_n \text{sgn} \Pi_{nk} (t-t_k)^2 / 2 + v_{0k} (t-t_k) + \theta_{0k}, \text{ pour } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots \quad (4.22)$$

où  $\text{sgn} \Pi_{nk}$  est le signe des fonctions  $\Pi_n(\theta)$  pour le sous-intervalle  $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ ,  $t_k$  sont les moments des commutations de la fonction  $\Pi_n(\theta)$ ,  $\theta_{0k}$  et  $v_{0k}$  sont les conditions initiales pour l'équation valable sur ce sous-intervalle (les valeurs finales du sous-intervalle précédent). La vitesse du pendule pour chaque système des forces est uniformément accélérée:

$$v_n(t) = -\text{sgn}(\Pi_n) B_n \omega_0^2 (t-t_k) + v_{0k}$$

Pou  $n=1$ , le point  $\theta=0$  c'est un point d'équilibre stable. Quelle que soit la position initiale du pendule, il tend à atteindre une position d'équilibre stable et oscille autour de cette position, décrivant une quasi-sinusoïde construite sur la base d'un polynôme du deuxième degré. Cette courbe aura les points d'inflexion situés sur l'axe  $\theta=0$ . Les oscillations auront l'amplitude  $\theta_e$  et

la période d'oscillation  $T_1 = 4\sqrt{8|\theta_e|/\pi\omega_0^2}$  (dependente de  $\theta_e$ ). Un pendule que départs de la

position  $\theta_{01} = \theta_e$  avec la vitesse  $v_{01} = 0$ , arrive après le temps  $t = T_1/4$  en la position  $\theta_1 = 0$  (où la force qui agit sur lui change de sens) avec la vitesse  $v_1 = -\omega_0 \sqrt{|\theta_e|} \pi/2$ . En raison de l'inertie,

le pendule continue de se déplacer vers la position  $\theta_1 = -\theta_e$ , où il arrive après le temp  $t = T_1/4$ , avec la vitesse  $v_1 = 0$ . Sous l'action du même système de forces, le pendule continue son mouvement dans la direction opposée et après un autre quart de période, il retrouve la position

$\theta_1 = 0$ , cette fois avec la vitesse  $v_1 = \omega_0 \sqrt{|\theta_e|} \pi/2$ . Après un nouveau changement de direction

de la force, après un autre quart de période, le pendule retrouve sa position  $\theta_1 = \theta_e$ , avec la vitesse  $v_1 = 0$ . Les oscillations continuent avec la période  $T_1$ . Avec les notations  $A = \pi\omega^2/8$  et

$T = \sqrt{8|\theta_e|/\pi\omega_0^2}$ , on a:

$$\theta_1(t) = X_1^2 = X^2 [0 * (\theta_e - At^2) * T^* (-\theta_e + A(t-T)^2) * 3T^* (\theta_e - A(t-3T)^2) * 4T]_1 \quad (4.23)$$

Si les conditions initiales changent:  $\theta_0 = \theta_e$  et  $v_1(0) \neq 0$ , la solution de l'équation change sa période, son amplitude et son déphasage initial.



La solution partielle d'ordre  $n$  de l'équation (4.20) aux conditions initiales (4.21) est également un polynôme quasi-sinusoïdal de deuxième degré: (4.24)

$$\theta_n(t) = X_n^2 = X^2 [0 * (-\theta_n + At^2/n) * Tn^{1/2} * (\theta_n - A(t - T/n)^2) * 3 n^{1/2} * (-\theta_n + A(t - 3T/n)^2) * 4T n^{1/2}]_n,$$

où  $\theta_n = \theta_e - \theta_m$ . Cette courbe a tous les points d'inflexion situés sur l'axe  $\theta = \theta_m$ . L'oscillation a l'amplitude  $\theta_e - \theta_m$  et la période d'oscillation  $T_n = 4\sqrt{2|\theta_e - \theta_m|/B_n \omega_0^2}$ .

Dans la figure 4.a, nous avons représenté, pour l'harmonique fondamentale, trois de ces solutions partielles, pour différentes valeurs de la position initiale équivalente  $\theta_e$ : deux pour  $\theta_e \in [-\pi, \pi]$  (ligne rouge) et un pour  $\theta_e \notin [-\pi, \pi]$  (ligne noire en pointillés); avec une ligne verte en pointillés, nous avons représenté la continuation fictive de la quasi-sinusoïde en dehors de l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .

La solution générale de l'équation équivalente est la somme de toutes les solutions partielles:  $\theta(t) = \Sigma \theta_n(t)$ . Une approximation de la solution est obtenue en additionnant les  $N$  premières solutions partielles, où  $N$  doit être suffisamment grand pour obtenir une erreur satisfaisante. Pour une valeur  $t = t_e$ , la somme est nulle:  $\Sigma \theta_n(t_e) = 0$ . Comme le montre la figure 4b, pour le moment  $t_e$ , chaque solution partielle fournit une valeur  $\theta_n(t_e) = \theta_{n0}$  et une vitesse  $v_n(t_e) = v_{n0}$ . Ce sont les conditions initiales des composantes de l'équation d'origine. La solution de l'équation est  $\theta(t) = \Sigma \theta_n(t - t_e)$ .

Avec les notations de (4.23) et (4.24) nous pouvons avancer une nouvelle expression pour le mouvement du pendule:

$$\theta(t) = \Sigma X_n^2, \text{ pour } t > t_e.$$

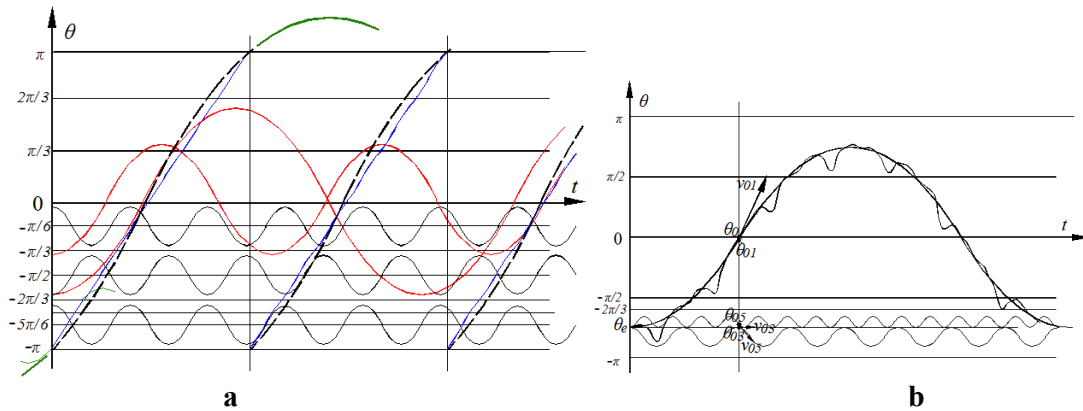


Fig.4. a: Des solutions partielles pour  $\theta_e < \pi$ : rang 1 (ligne rouge), rang 3 (ligne noire). Pour  $\theta_e > \pi$ : rang 1 (ligne pointillée), rang 3 (ligne bleue) b: solution générale

## 5. Conclusions

Nous avons essayé ici, à l'aide de quelques exemples simples, de prouver que la méthode de résolution des équations différentielles en déterminant les coefficients du développement en séries sinusoïdales ou non sinusoïdales de la fonction inconnue est une méthode particulièrement solide, applicable à tous les types d'équations différentielles et intégral-différentielles, linéaires et non linéaires, d'équations aux dérivées partielles, des systèmes de telles équations, quels que soient leur ordre et quels que soient la complexité des coefficients.

## 6. Bibliographic

- [1] Török A., Serii Fourier periodice nesinusoidale, lucrare în curs de redactare
- [2] Nagle R. K., Saff E. B., Snider A. D., Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems, 8th ed, 2012, Pearson Education, Inc.
- [3] O'Neil P. V., Advanced Engineering Mathematics, Seventh Edition, part 1, Cengage Learning, 2012, Publisher: Global Engineering: Christopher M. Shortt
- [4] Kreyszig E., Advanced Engineering Mathematics, 10-th edition, chapters 1, 2, 5, 6, 11, 12, John Wiley & Sons, Inc., 2011
- [5] Polyanin A. D., A. V. Manzhirov, Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists, Chapman & Hall/CRC Press, 2007
- [6] Polyanin A. D., A. V. Manzhirov, Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, CRC Press, 2003
- [7] Zwillinger D., CRC Standard Mathematical Tables and Formulae, 31st Edition, 2003, by CRC Press Company
- [8] Spiegel M. R., Mathematical Handbook of Formulas and Tables, Schaum's Outline Series, Schaum Publishing Co. 1st.ed. 1968, McGraw-Hill Book Company  
<https://archive.org/details/MathematicalHandbookOfFormulasAndTables>
- [9] Dourmashkin, Classical Mechanics: MIT 8.01 Course Notes, Chapter 23 Simple Harmonic Motion, pp 8,  
<http://web.mit.edu/8.01t/www/materials/modules/chapter23.pdf>
- [10] Jordan D. W., Smith P., Nonlinear Ordinary Differential Equations. An introduction for Scientists and Engineers, 4-th edition, Keele University, Oxford University Press, 2007,
- [11] Olver P. J., Equations Introduction to Partial Differential Equations, Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, Springer International Publishing Switzerland, 2014, 6056 ISSN - 2197 5604 (electronic)
- [12] Dourmashkin, Classical Mechanics: MIT 8.01 Course Notes, Chapter 23 Simple Harmonic Motion, pp 8,  
<http://web.mit.edu/8.01t/www/materials/modules/chapter23.pdf>
- [13] Tolstov G. P., Silverman R. A., Fourier Series, Courier Corporation, 1976
- [14] Al-Gwaiz M.A., Sturm-Liouville Theory and its Applications, Springer Undergraduate Mathematics Series ISSN 1615-2085, Springer-Verlag London Limited 2008