



HAL
open science

**Nouveau programme de Terminale : évaluation
numérique des incertitudes de mesures Partie 1 :
Concepts et méthodes**

David Boilley, Yoann Lallouet

► **To cite this version:**

David Boilley, Yoann Lallouet. Nouveau programme de Terminale : évaluation numérique des incertitudes de mesures Partie 1 : Concepts et méthodes. *Le Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie*, 2021, 115 (1033), pp.441-452. hal-02884883

HAL Id: hal-02884883

<https://hal.science/hal-02884883>

Submitted on 7 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Nouveau programme de Terminale : évaluation numérique des incertitudes de mesures

Partie 1 : Concepts et méthodes

Caen : 25 juin 2020

David BOILLEY

GANIL et Normandie Université / Unicaen - 14000 Caen

david.boilley@unicaen.fr

et **Yoann LALLOUET**

Lycée Malherbe - 14000 Caen

yoann.lallouet@ac-normandie.fr

Les incertitudes de mesure, désormais introduites progressivement dès la Seconde, occupent une place importante dans les nouveaux programmes de lycée, qui comportent aussi des capacités numériques. Une d'elles consiste à « simuler, à l'aide d'un langage de programmation, un processus aléatoire illustrant la détermination de la valeur d'une grandeur avec incertitudes-types composées. ». Le but de cet article est d'introduire les concepts liés à l'évaluation des incertitudes et de proposer des méthodes numériques applicables au lycée. Des exemples pour aborder progressivement les notions associées à ces nouvelles capacités seront publiés dans un autre article.

1. Introduction

Dans les nouveaux programmes de physique-chimie, on constate une progressivité dans les méthodes d'évaluation des incertitudes associées à une grandeur mesurée [1, 2]. En Seconde, l'incertitude associée au mesurage direct de la valeur d'une grandeur est estimée grâce à une approche statistique, autrement dit par une évaluation de type A. En Première, l'incertitude associée à la mesure directe de la valeur d'une grandeur peut également être estimée par une autre approche que l'approche statistique, c'est-à-dire par une évaluation de type B. Enfin, en Terminale, l'estimation de l'incertitude-type composée, associée à la valeur d'une grandeur qui n'est pas mesurée directement, complète la méthode d'analyse. Pour ce dernier cas de figure, la valeur de la grandeur d'intérêt est reliée aux grandeurs mesurées grâce à un modèle mathématique.

Ces différentes méthodes d'évaluation des incertitudes étaient déjà présentes dans l'ancien programme de Terminale et ont été abordées dans un précédent article [3]. Dans l'ancien programme, les incertitudes-types étaient évaluées grâce à une méthode analytique, c'est-à-dire par calculs, à l'aide d'une formule fournie par l'enseignant. Dans le nouveau programme de Terminale spécialité, une nouvelle méthode numérique de détermination des incertitudes-types composées vient compléter la méthode analytique. En pratique, elle peut être mise en œuvre grâce à l'utilisation d'un langage de programmation possédant un générateur de nombres aléatoires.

Les deux variantes complémentaires, analytique et numérique, pour l'estimation des incertitudes du nouveau programme de Terminale sont en accord avec les méthodes de référence décrites dans le GUM, le « Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure » [4], ainsi que dans deux de ses suppléments [5,6]. Ces normes de référence sont l'aboutissement d'un processus de standardisation des méthodes d'estimation des incertitudes initié par sept organismes internationaux dont le BIPM « Bureau International des Poids et Mesures » depuis les années 80. L'approche analytique est développée dans le GUM [4]. Le traitement numérique, s'appuyant sur des méthodes de type Monte-Carlo, est abordé dans les suppléments 1 et 2 du GUM [5,6]. De plus, une introduction générale au GUM et aux documents associés est également disponible [7]. En outre, il existe aussi la norme française AFNOR FD X 07-023 [8] qui explicite la mise en application du supplément 1 du GUM. Ces différents documents sont compliqués à comprendre et à utiliser. Cet article a donc pour but de proposer une initiation pas à pas qui est adaptée aux nouveaux programmes du lycée. Il est complété par un autre article qui présente des exemples applicables au lycée. Selon le BO [2], le langage de programmation conseillé est le Python, mais, souvent, un tableur, voire une calculatrice programmable peuvent aussi être utilisés.

2. Quelques notions

En métrologie, le terme « mesurage » a été introduit pour qualifier l'action de mesurer, à savoir le processus

consistant à obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur, selon le Vocabulaire international de métrologie (VIM) [9], car le terme « mesure » a plusieurs significations. On peut ainsi dire que l'on applique, par exemple, « *une mesure corrective à un mesurage* », sans ambiguïté sur le sens de l'expression.

Il convient ensuite de distinguer le « mesurande » et la « grandeur mesurée », qui sont deux notions différentes. Le mesurande est la grandeur à mesurer accompagnée de la description du phénomène, du corps ou de la substance dont la grandeur est une propriété. Ainsi, la vitesse du son, par exemple, dépend de la nature du gaz dans lequel il se propage. La grandeur, vitesse du son, doit donc être accompagnée des caractéristiques de ce gaz (composition, température et pression) pour constituer le mesurande.

Le mesurande doit être défini de façon suffisamment complète en rapport avec l'exactitude exigée. Ainsi, le GUM précise que « *si l'on doit déterminer la longueur nominale d'une barre d'acier de longueur un mètre au micromètre près, sa spécification doit comprendre la température et la pression auxquelles la longueur est définie. Le mesurande peut alors être spécifié comme, par exemple, la longueur de la barre à 25,00 °C et 101 325 Pa (avec, en plus, tout autre paramètre de définition jugé nécessaire, tel que la manière de supporter la barre). Cependant, si l'on ne doit déterminer la longueur de la barre qu'au millimètre près, sa spécification ne nécessitera pas la définition d'une température, ou d'une pression, ou de tout autre paramètre.* »

Si l'on répète plusieurs fois le mesurage d'un même mesurande, on peut obtenir des valeurs différentes. Dans ce contexte, on retient la moyenne de ces valeurs comme résultat de mesure. Si toutes les valeurs mesurées sont proches de la moyenne, on aura confiance dans le résultat obtenu. Inversement, si elles sont éloignées, on saura qu'il faudra manier ce résultat avec plus de précaution. Pour quantifier la dispersion des valeurs mesurées, c'est l'écart-type qu'il faut utiliser.

Les variations des valeurs obtenues peuvent être dues à des facteurs d'influence extérieurs, comme la température sur la longueur d'une barre métallique, ou peuvent être intrinsèques à la grandeur mesurée qui fluctue, comme l'activité d'une source radioactive.

Le VIM définit l'incertitude de mesure comme étant un « *paramètre non négatif qui caractérise la dispersion des valeurs attribuées à un mesurande* ». L'incertitude-type, quant à elle, est « *l'incertitude de mesure exprimée sous la forme d'un écart-type* ». Enfin, l'incertitude-type composée est « *l'incertitude-type obtenue en utilisant les incertitudes-types individuelles associées aux grandeurs d'entrée dans un modèle de mesure* ».

Il convient aussi de noter que « l'incertitude » n'est pas synonyme de « l'erreur ». Cette dernière est définie comme la « *différence entre la valeur mesurée d'une grandeur et une valeur de référence* ».

Comme le précise le GUM, en général, le résultat d'un mesurage est seulement une estimation de la valeur du mesurande et, de ce fait, est seulement complet lorsqu'il est accompagné par une expression de l'incertitude de cette estimation. De plus, l'estimation de cette incertitude doit suivre des règles générales, normalisées au niveau international.

Enfin, l'objectif de la classification en Type A et en Type B est d'indiquer les deux différentes manières d'évaluer les composantes de l'incertitude ; elle n'a pour but que de clarifier la présentation ; cette classification ne signifie pas qu'il existe une différence quelconque de nature entre les composantes résultant de ces deux types d'évaluation.

3. Evaluation de type A de l'incertitude

L'évaluation de type A de l'incertitude, effectuée à partir de la distribution statistique des valeurs provenant de séries de mesurages, est au programme de la Seconde. Problème : il y a plusieurs formules et fonctions possibles dans les calculatrices et les tableurs. Commençons donc par quelques rappels sur les outils statistiques utilisés lors des évaluations de type A pour déterminer les incertitudes-types.

L'écart-type expérimental obtenu à partir d'une évaluation statistique est noté s . Il est défini à partir de son carré, appelé la variance, pour laquelle il y a deux expressions mathématiques possibles. Celle à utiliser est

$$s^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

avec x_i , les valeurs obtenues et \bar{x} , leur moyenne. Il s'agit de l'estimateur de la variance. L'autre formule, avec n , le nombre de valeurs, à la place de $n-1$ au dénominateur, est pour quand n tend vers l'infini. Attention avec les calculatrices car les notations dépendent des fabricants ! La bonne touche est souvent indiquée s ou σ_{n-1} . Avec un tableur, la fonction =ECARTYPE donne bien s .

La deuxième difficulté est qu'il faut distinguer l'écart-type des valeurs et l'écart-type de la moyenne. En effet, si l'on considère l'exemple des notes de bac, pour une épreuve donnée, elles vont de 0 à 20. En revanche, si l'on regarde la moyenne obtenue par une classe, elle sera plus proche de 10. Il est peu probable qu'une classe ait une moyenne proche de 0 ou 20. Ainsi, la distribution des moyennes obtenue par plusieurs classes est plus étroite. D'où l'intérêt de choisir la moyenne comme résultat final d'un mesurage.

En travaux pratiques, si l'on retient la moyenne comme résultat final, il faut aussi choisir l'écart-type de la moyenne qui vaut

$$s(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{n}}s(x).$$

L'écart-type donné par la calculatrice doit encore être divisé par \sqrt{n} . Cela peut être simplement vérifié à l'aide d'un tableur, comme nous le montrons dans un second article.

En revanche, si l'on considère le cas d'un industriel qui fait une étude statistique des valeurs données par un échantillon d'instruments de mesure qui sortent de son usine, il lui faudra retenir $s(x)$, car un client choisit un seul appareil au hasard. L'appareil moyen n'existe pas.

Prenons un autre exemple pour comprendre la différence. Si dans une classe, les élèves mesurent la dureté d'une même eau et que l'on rassemble les résultats pour une étude statistique, prendre la moyenne permet de minimiser l'impact des facteurs influant le mesurage, en supposant qu'ils sont aléatoires. Et si l'on retient la moyenne comme valeur de la dureté de l'eau, il faudra retenir l'écart-type de la moyenne, $s(\bar{x})$.

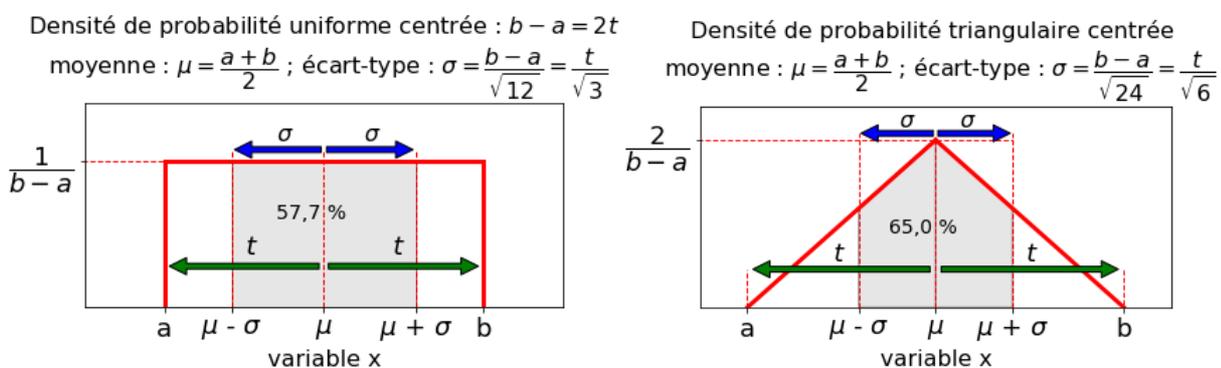
Mais si les élèves mesurent la dureté de différentes eaux, prélevées au préalable à la maison, par exemple, même avec un mesurage parfait, il y aura une dispersion des résultats. La valeur moyenne ne sert qu'à localiser l'intervalle de variation et, si l'on veut caractériser l'eau de la région, il faut retenir l'écart-type des valeurs, $s(x)$.

La grandeur mesurée est la même dans les deux cas, la dureté de l'eau, mais le mesurande n'est pas le même !

4. Evaluation de type B de l'incertitude

L'évaluation de type B de l'incertitude, qui comprend toutes les évaluations avec d'autres méthodes que les méthodes statistiques, se réduit essentiellement à l'incertitude de lecture dans le programme de Première. S'il n'y a aucune raison de privilégier une valeur plutôt qu'une autre dans un intervalle $[a, b]$, on suppose que la probabilité d'avoir la valeur x , est la même pour chaque point de cet intervalle et nulle en dehors. On parle alors de distribution rectangulaire ou uniforme sur l'intervalle. L'incertitude-type associée est égale à $u = (b - a)/\sqrt{12}$. Si cet intervalle a une longueur $b - a = 2t$, cette même incertitude-type s'écrit $u = t/\sqrt{3}$. Voir la figure 1. Cela peut être simplement vérifié à l'aide d'un tableur, comme nous le montrons dans un second article.

Figure 1 – Distributions de densité de probabilité couramment utilisées pour estimer les incertitudes de lecture



Ces formules sont utilisées pour estimer l'incertitude-type de lecture avec une échelle graduée. L'intervalle $b - a$ correspond alors à la plus petite graduation. Autre exemple, avec de la verrerie de classe B en chimie, l'incertitude-type due à l'étalonnage est $u = t/\sqrt{3}$, avec t , la tolérance.

Mais, avec de la verrerie jaugée de classe A, la convention est de donner plus de poids à la valeur nominale en choisissant une distribution triangulaire. L'incertitude associée est alors $u = t/\sqrt{6}$. Voir, par exemple, le Guide

européen QUAM d'Eurachem sur la quantification de l'incertitude [10] et la figure 1.

5. Détermination des incertitudes-types composées

On mesure rarement la grandeur d'intérêt. Pour connaître la surface d'un parallélépipède rectangle, par exemple, on mesure sa longueur et sa largeur. Quelle est l'incertitude sur la surface connaissant l'incertitude sur la longueur et la largeur ? C'est l'objet de la propagation de l'incertitude.

La formule de propagation de l'incertitude fait intervenir des dérivées partielles qui ne sont pas au programme du lycée. L'enseignant doit donc fournir la formule reliant l'incertitude de la grandeur de sortie (la surface S dans l'exemple précédent) avec celles des grandeurs d'entrée (la largeur ℓ et la longueur L dans l'exemple précédent) :

$$u^2(S) = \left(\frac{\partial S}{\partial \ell}\right)^2 u^2(\ell) + \left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)^2 u^2(L) = L^2 u^2(\ell) + \ell^2 u^2(L).$$

Le programme de Terminale propose aux élèves de simuler, à l'aide d'un langage de programmation, un processus aléatoire pour estimer l'incertitude-type composée. C'est cette deuxième méthode qui nous intéresse ici.

Dans la pratique, un langage de programmation est plus adapté qu'un tableur pour cette partie. Comme nous l'avons déjà évoqué, c'est le langage Python qui est conseillé par le BO [2] pour sa relative simplicité d'utilisation et ses bibliothèques. Il est aussi au programme de différents concours comme l'agrégation de sciences physiques. A noter qu'il existe aussi R, le logiciel libre destiné aux statistiques et à la science des données qui est très performant et bénéficie aussi d'un très grand nombre de bibliothèques disponibles.

5.1. Méthode

Pour simuler la dispersion des grandeurs d'entrée afin d'en déduire la dispersion de la grandeur de sortie, on procède par tirage aléatoire d'un grand nombre de valeurs, typiquement de l'ordre du million [5,6], pour chacune des grandeurs d'entrée. On calcule ensuite les valeurs correspondantes de la grandeur de sortie. Par exemple, si la grandeur de sortie est la surface d'un parallélépipède rectangle, les valeurs des grandeurs d'entrée longueur et largeur générées à chaque tirage permettent, par multiplication, de déterminer autant de valeurs de la grandeur de sortie surface. Puis, à partir de ces données numériques, on peut calculer une valeur moyenne et un écart-type pour la grandeur de sortie, qui correspondent respectivement à la valeur retenue et à son incertitude-type composée.

5.2. Mise en œuvre

5.2.1. Grandeurs d'entrée

Le tirage aléatoire des valeurs possibles pour les grandeurs d'entrée dépend des caractéristiques de leur distribution associée. Parmi les distributions les plus usuelles, les distributions uniformes et triangulaires sont, par exemple, utiles pour caractériser les incertitudes de lecture ou les incertitudes associées à la classe des appareils. La distribution normale ou gaussienne est à retenir quand on ne connaît que la valeur moyenne et l'écart-type.

5.2.2. Grandeur de sortie

Le but de la procédure de calcul est d'explorer toutes les valeurs qui peuvent être prises par la grandeur de sortie pour en déduire ses caractéristiques statistiques. Ce sont la moyenne et l'écart-type du grand nombre de valeurs obtenues pour la grandeur de sortie qui nous intéressent généralement. Mais on peut aussi tracer un histogramme de ces valeurs pour obtenir des indications sur leur distribution.

Pour la moyenne et l'écart-type, on peut utiliser les fonctions prédéfinies dans la bibliothèque numpy de Python [11]. Et pour tracer un histogramme, celles de la bibliothèque matplotlib [12].

Comme on cherche à quantifier la dispersion des valeurs prises par la grandeur de sortie, c'est bien l'écart-type des valeurs, $s(x)$, qu'il faut calculer, et pas l'écart-type de la moyenne.

5.3. Exemple simple

Considérons la constante de temps τ associée à la réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension. Cette

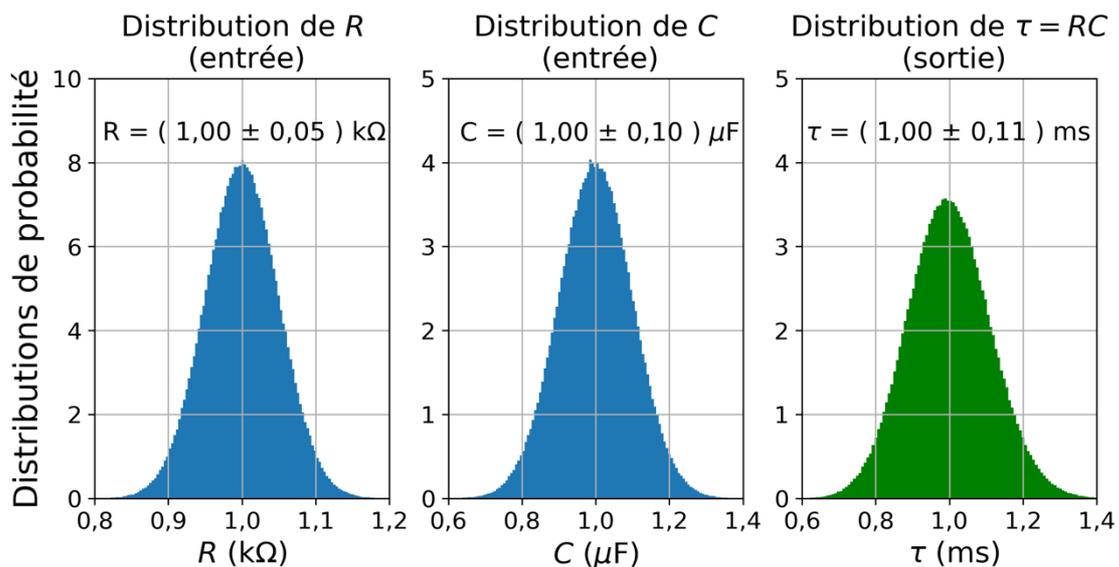
constante de temps est la grandeur de sortie du modèle. Les grandeurs d'entrée sont donc la résistance électrique, R , et la capacité du dipôle, C . Le modèle mathématique associé se caractérise par une relation linéaire entre la grandeur de sortie et les grandeurs d'entrée : $\tau = RC$.

Par hypothèse, on considère un profil gaussien pour les distributions de probabilités associées aux deux grandeurs d'entrée. C'est l'hypothèse généralement faite pour ce type de grandeurs d'entrée car les fabricants de composants électroniques fournissent le plus souvent uniquement les valeurs des grandeurs et les incertitudes-types relatives associées.

A l'aide d'un générateur de nombres aléatoire gaussien, on génère N valeurs de la résistance, R_i et de la capacité, C_i . Le supplément 1 du GUM préconise $N = 10^6$ tirages aléatoires, ce qui est difficilement atteignable avec un tableur, c'est pourquoi Python est privilégié. A noter que ce nombre N est à adapter en fonction de la précision voulue et du temps disponible pour effectuer la simulation. Mais on peut commencer aussi par aborder la méthode avec un tableur, sans atteindre une bonne précision statistique, comme le fait, par exemple, le Guide européen QUAM d'Eurachem sur la quantification de l'incertitude en chimie [10].

Pour chaque couple de valeurs d'entrée, on calcule la valeur de sortie correspondante, $\tau_i = R_i C_i$. La valeur moyenne et l'écart-type des N valeurs de τ , correspondent, respectivement, à la valeur à retenir et à son incertitude-type composée. On peut aussi tracer un histogramme des valeurs prises par R , C et τ . Voir la figure 2, obtenue avec Python.

Figure 2 – Estimation de la constante de temps τ et de son incertitude-type composée, obtenues par une méthode Monte-Carlo sous Python, à partir de la résistance R et de la capacité C et de leurs incertitudes-types respectives. Le nombre de tirages est $N = 10^6$.



Comparons les résultats de l'exemple de la figure 2 avec ceux obtenus par la méthode analytique. Comme la relation entre la grandeur de sortie et les grandeurs d'entrée est un produit, il est plus simple d'utiliser les incertitudes relatives. Ainsi,

$$\frac{u^2(\tau)}{\tau^2} = \frac{u^2(R)}{R^2} + \frac{u^2(C)}{C^2}.$$

L'application numérique donne $u(\tau) = 0,11$ ms, comme pour l'évaluation par la méthode Monte-Carlo.

Au-delà de la valeur moyenne et de l'écart-type, il est aussi possible de calculer l'intervalle de confiance sans recourir au facteur d'élargissement. Dans les anciens programmes, on devait utiliser les tables de Student, compliquées à comprendre et uniquement valables pour des incertitudes de type A. Les intervalles de confiance ne sont plus explicitement au programme du lycée, mais sont sous-jacents au critère de compatibilité entre une valeur mesurée et une valeur de référence qui figure dans le programme de la Terminale.

6. Comparaison à une valeur de référence

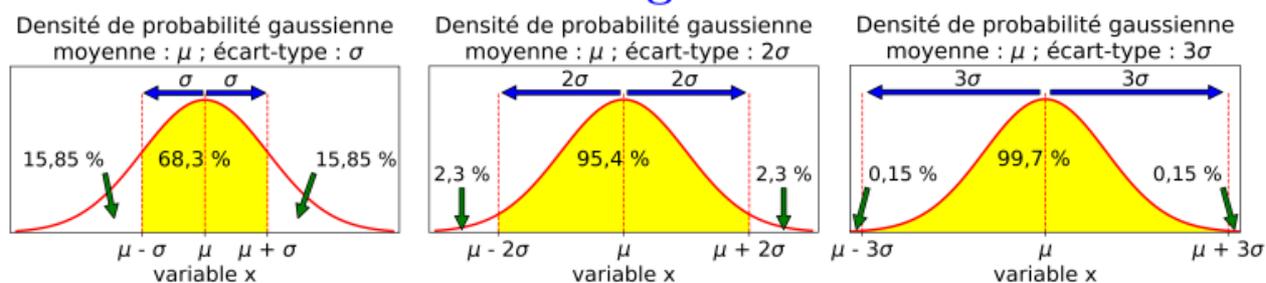
Les capacités exigibles du programme de Terminale requièrent de savoir comparer « le résultat d'une mesure m_{res} à une valeur de référence m_{ref} en utilisant le quotient $\frac{|m_{res}-m_{ref}|}{u(m)}$ où $u(m)$ est l'incertitude-type associée au résultat. » Cette capacité nécessite implicitement de connaître la distribution de probabilité des valeurs

possibles pour m_{res} . Pour la distribution normale, la proportion des valeurs comprises dans divers intervalles est donnée dans la figure 3.

Le nombre de valeurs comprises dans l'intervalle $[\mu - k\sigma; \mu + k\sigma]$ peut être obtenu numériquement en faisant un grand nombre de tirages aléatoires suivant une distribution gaussienne. Il suffit alors de le diviser par le nombre total de tirages pour retrouver les pourcentages indiqués sur la figure 3.

Figure 3 – Représentation de la distribution normale ou gaussienne et de la proportion d'évènements inclus dans l'intervalle $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ pour différentes valeurs du facteur d'élargissement k . L'intervalle $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ inclut 68,3% des valeurs, $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$, 95,4% et $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$, 99,7%.

Distribution gaussienne



En cas d'accord entre la valeur mesurée et la valeur de référence, $m_{res} - m_{ref}$ doit être proche de zéro, aux incertitudes près. Et l'incertitude-type sur cette différence vaut $u(m_{res} - m_{ref}) = \sqrt{u^2(m_{res}) + u^2(m_{ref})}$.

Le programme du lycée suppose implicitement que l'incertitude sur la valeur de référence est négligeable, voire nulle, et ne prend en compte que l'incertitude-type associée au résultat, notée $u(m)$. On gardera cette notation par la suite.

Si la distribution des valeurs possibles obtenues pour m_{res} est normale, on dira que m_{res} et m_{ref} sont compatibles si $(m_{res} - m_{ref})$ est dans l'intervalle $[-2u(m); +2u(m)]$, qui contient environ 95% des valeurs. Dans un tel cas, on a $\frac{|m_{res} - m_{ref}|}{u(m)} \leq 2$. Inversement, si $(m_{res} - m_{ref})$ n'est pas dans l'intervalle $[-3u(m); +3u(m)]$, qui contient 99,7% des valeurs, il est très peu probable que les valeurs soient compatibles. On rejette donc cette compatibilité. Ainsi, avec $\frac{|m_{res} - m_{ref}|}{u(m)} > 3$, les valeurs m_{res} et m_{ref} ne sont pas compatibles entre elles. Entre 2 et 3, c'est la zone grise où il est difficile de conclure : il est peu probable que les deux valeurs soient compatibles, mais on ne peut pas l'exclure. Le choix de la borne dépend de la question posée.

Si la comparaison a lieu pour vérifier le fonctionnement d'un appareil de mesure à partir d'un étalon, comme dans le cas d'une pesée par exemple, on retiendra comme critère de conformité $\frac{|m_{res} - m_{ref}|}{u(m)} \leq 2$. En revanche, dans le cadre d'un essai clinique pour tester un nouveau traitement, si m_{ref} correspond au nombre de patients guéris (ou décédés) en l'absence de traitement, on dira que le traitement est efficace si, pour le nombre de patients traités guéris (ou décédés), m_{res} , est très différent de m_{ref} . On exige que $\frac{|m_{res} - m_{ref}|}{u(m)} > 3$, voire plus, car, en dessous de 3, on ne peut pas exclure une fluctuation statistique.

Un exemple est présenté dans un second article.

REMERCIEMENTS

Y.L. remercie le GANIL pour son accueil.

BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

- [1] Programmes de physique-chimie, *programmes de seconde générale et technologique et de première générale*, arrêté du 17-1-2019, publication au BO spécial n°1 du 22 janvier 2019.
- [2] Programme de physique-chimie, *programme de terminale générale*, arrêté du 19-7-2019, publication dans le BO spécial n°8 du 25 juillet 2019.
- [3] D. Boilley et Y. Lallouet, « Introduction aux incertitudes de mesures », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*,

vol. 107, n° 955-956, pp 1-15, juin/juillet/août/septembre 2013.

- [4] JCGM 100:2008 (F), *Évaluation des données de mesure – Guide pour l’expression de l’incertitude de mesure*, première édition, septembre 2008.
- [5] JCGM 101:2008, *Évaluation des données de mesure – Supplément 1 du « Guide pour l’expression de l’incertitude de mesure » - Propagation de distributions par une méthode de Monte Carlo*, première édition, 2008.
- [6] JCGM 102:2011, *Évaluation des données de mesure – Supplément 2 du « Guide pour l’expression de l’incertitude de mesure » - Extension à un nombre quelconque de grandeurs de sortie*, première édition, Octobre 2011.
- [7] JCGM 104:2009, *Évaluation des données de mesure – Une introduction au « Guide pour l’expression de l’incertitude de mesure » et aux documents qui le concernent*, première édition, Juillet 2009.
- [8] FD X07-023, *Évaluation de l’incertitude de mesure par la méthode de Monte Carlo*, Norme AFNOR, 2^{em} tirage 2012-06-F, mai 2012.
- [9] JCGM 200:2012, *Vocabulaire international de métrologie – Concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM)*, 3^e édition
- [10] Guide EURACHEM / CITAC, *Quantifier l’Incetitude dans les Mesures Analytiques*, troisième édition
- [11] numpy.org
- [12] matplotlib.org