



HAL
open science

La fonction exponentielle : un modèle mathématique pour la biologie

David Sauzet, Thomas Hausberger

► **To cite this version:**

David Sauzet, Thomas Hausberger. La fonction exponentielle : un modèle mathématique pour la biologie. 2019. hal-02882823

HAL Id: hal-02882823

<https://hal.science/hal-02882823>

Submitted on 27 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Fiche d'identification

Discipline	Mathématiques
Titre de l'activité	La fonction exponentielle : un modèle mathématique pour la biologie
Niveau de la classe	Première générale, enseignement de spécialité
Objectifs d'apprentissages : connaissances et compétences	<p>Cette séquence a pour but d'introduire la fonction exponentielle en tant que modèle vérifiant une condition de croissance exprimée en tant qu'équation fonctionnelle (et non différentielle), après avoir discuté brièvement le modèle discret des suites géométriques, dans le contexte du passage du discret au continu.</p> <p>La fonction exponentielle est donc vue comme un modèle lié à un phénomène biologique.</p> <p>Le passage du discret au continu utilise l'approximation des irrationnels par des rationnels. Ce travail participe ainsi à la conceptualisation des nombres réels.</p> <p>Enfin, l'activité permet de travailler les TICE (usage d'un tableur) et l'algorithmique (programmation en Python), afin de développer des démarches expérimentales (modélisation et discussion de l'adéquation d'un modèle) et des aspects effectifs (approximation à une précision donnée).</p>
Durée	3 séances de 1h en classe (et un devoir à la maison en temps libre).
Matériel	Un ordinateur pour la première séance. Des salles de classe où le travail en groupes est facile en mettre en œuvre.
Programme	Suites géométriques, approximation de nombres réels. La fonction exponentielle : modéliser une croissance exponentielle, pour tous réels x et y , $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$, la fonction exponentielle est croissante et positive.
Mots-clés.	fonction exponentielle, suites géométriques, modélisation mathématique de phénomènes biologiques, équation fonctionnelle, approximation des réels par des rationnels, passage du discret au continu, algorithmique.
Résumé	<p><u>Première séance :</u> Étude d'un problème issu du domaine des Sciences est Vie de la Terre (croissance d'une population de levure). Utilisation d'un tableur, interprétation graphique, calcul de taux d'évolutions, repérage de la phase dite exponentielle. Recherche de suite modélisant le phénomène.</p> <p><u>Deuxième séance :</u> Passage du discret au continu. Approche graphique. Justification de la relation fonctionnelle modélisant la situation étudiée : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 f(x+y) = f(x)f(y)$</p> <p><u>Troisième séance :</u> Étude de la relation fonctionnelle sur des entiers, les multiples d'un réel donné, les rationnels puis extension aux nombres réels.</p>
Auteurs	David Sauzet, Thomas Hausberger Groupe Enseignement Scientifique IREM de Montpellier

Organisation de la séquence

Séance n°1	Effectif : 18	Matériel : ordinateur avec tableur	Durée : 2 fois 1h.
	<p>Modalités : 1 Séance de 1h, en demi-classe. Les élèves travaillent individuellement à la fois sur un support papier et sur l'ordinateur avec un logiciel de type Tableur. Entre chaque question, il faut prévoir une mise en commun au tableau, ce qui impose une certaine gestion de l'espace (visibilité du tableau ou vidéo-projection notamment).</p>		
Séance n°2	Effectif : 18	Matériel : une salle de classe qui se prête bien au travail en groupes	Durée : 2 fois 1h.
	<p>Modalités : 1 Séance de 1h, en demi-classe. Rappel des résultats de la première séance. Les élèves travaillent par groupe de 3 ou 4. Un rapporteur est désigné dans chaque groupe pour présenter les résultats. Confrontation des réponses proposées (chaque groupe aura présenté sa réponse, qui est une représentation graphique, éventuellement plusieurs).</p>		
Séance n°3	Effectif : 18	Matériel : Matériel : une salle de classe qui se prête bien au travail en groupes	Durée : 2 fois 1h.
	<p>Modalités : 1 Séance de 1h, en demi-classe. Rappel des résultats des deux premières séances. Les élèves travaillent par groupe de 3 ou 4 (les mêmes que la séance 2). Un autre rapporteur est désigné dans chaque groupe pour présenter les résultats. Pour chaque question, un des rapporteurs écrit sa réponse au tableau, laquelle est ensuite validée ou invalidée par les autres groupes. La fin de l'activité (partie V 3) fera l'objet d'un devoir maison.</p>		

Classe de première

La fonction exponentielle : un modèle mathématique pour la biologie

fiche élève n°1

Vous avez vu en seconde que l'on peut modéliser la trajectoire d'un projectile (ou la courbe dessinée par un jet d'eau) à l'aide d'un polynôme de degré deux (la fameuse parabole). Nous allons dans cette activité introduire une autre fonction de référence, très importante pour les mathématiques et qui trouve des applications dans différentes disciplines (en SVT, en SPC, etc.) : la fonction exponentielle.

On considère la situation expérimentale suivante : dans un laboratoire de biologie, des levures ont été mises en culture dans un milieu agité thermostaté (à température constante) non renouvelé. Les chercheurs mesurent la biomasse par diffraction optique toutes les quinze minutes. Les valeurs relevées ont été retranscrites dans le fichier *biomasse* du tableur.

En fait, les biologistes proposent un modèle (général, simplifié) de croissance des micro-organismes du type levures (ou bactéries) comportant quatre phases :

- Une phase de latence (taux de croissance égal à zéro),
- Une phase d'accélération (le taux de croissance augmente progressivement, jusqu'à atteindre une valeur maximale),
- Une phase de croissance rapide dite « exponentielle » (le taux de croissance est constant, de valeur maximale),
- Enfin une phase de décélération (le taux de croissance diminue progressivement).

Ces quatre phases sont une conséquence directe de la division cellulaire :

La division cellulaire est le mode de multiplication de toute cellule. Elle lui permet de se diviser en plusieurs cellules (deux le plus souvent).



I. Repérage des différentes phases.

1. Ouvrir le fichier *Biomasse* avec un tableur puis la feuille *biomasse1*. Sur cette feuille du tableur, créer la représentation du tableau par un nuage de points (sélectionner les colonnes A et B, puis « insertion graphique », « nuage de points »).

2. Peut-on retrouver graphiquement les 4 phases vues en SVT ?

3. Le taux de croissance d'une grandeur V entre deux mesures consécutives V_{initiale} et V_{finale} est défini par :

$$\frac{V_{\text{finale}} - V_{\text{initiale}}}{V_{\text{initiale}}}$$

Cette formule est utilisée en sciences, en économie et en gestion, etc...

Sur la feuille *biomasse1*, dans la colonne C, créer la colonne *taux de croissance* et la remplir.

4. Utiliser ces résultats ainsi que les définitions données en introduction pour déterminer les 4 phases et comparer avec les phases déterminées graphiquement.

Dans la suite, on s'intéresse maintenant uniquement à la phase dite « exponentielle »

II. Phase de croissance exponentielle : modèle discret

1. Rappeler sur quel intervalle de temps se déroule la croissance dite « exponentielle ».
2. Lors de cette phase, le taux de croissance est donc supposé « quasi-constant » : dans le modèle mathématique proposé par les biologistes, il est constant, de valeur C ; dans la réalité, il varie peu autour de la valeur C , ces variations traduisant les limites du modèle, lequel constitue une simplification de la réalité. Quelle valeur proposez-vous, en pourcentage arrondi à 10^{-2} , pour la constante C ?
3. On désire modéliser cette phase par une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ donnant la biomasse à partir du temps $t=60$ min, toutes les quinze minutes .
 - a) A quel type de suite correspond l'hypothèse d'un taux de croissance constant ?
 - b) Définissez la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ en précisant ses éléments caractéristiques.
 - c) On souhaite confronter cette modélisation aux valeurs relevées. Sur la feuille *biomasse2*, remplir les colonnes du tableau puis créer la représentation des trois dernières colonnes du tableau en nuage de points.
Peut-on considérer que le modèle de suite choisi est pertinent sur cette phase ?
4. Que pouvez-vous dire sur l'évolution de la population de levures toutes les 45 minutes pendant la phase exponentielle ? Quel calcul portant sur les éléments caractéristiques de la suite (u_n) permet d'étayer cette observation ?

Classe de première

La fonction exponentielle : un modèle mathématique pour la biologie

fiche élève n°2

III. Doublement d'une population au cours d'une période donnée : passage du discret au continu.

On se place, pour cette partie, dans un cadre plus théorique : une population (de levures ou autre) double toutes les heures à partir du temps $t = 0$.

La population à l'instant t (en heures) est noté $P(t)$. On a donc initialement une population $P(0)$.

1. Traduire mathématiquement la condition sur P donnée dans l'énoncé précédent. Que dire de la suite $(P(n))_{n \geq 0}$?

2. On se pose la question de savoir comment elle peut évoluer pendant chacune de ces heures, c'est-à-dire à l'allure de $P(t)$ en tant que fonction définie non plus sur \mathbb{N} mais sur \mathbb{R}^+ .

a. Proposer une représentation graphique pour la fonction $P(t)$.

Nous allons mettre en commun vos courbes et les tracer sur le tableau.

b. On considère maintenant (comme dans une division cellulaire) que, de plus, le doublement d'heure en heure a lieu peu importe le début de l'heure.

i) Traduire mathématiquement la condition.

ii) Les graphiques tracés au tableau respectent-ils tous cette condition ?

IV- Augmentation dans un même rapport sur des intervalles de temps égaux

On introduit cette fois une condition encore plus forte : on suppose que la population augmente toujours dans un même rapport sur des intervalles de temps égaux (en effet, le cycle de division cellulaire est de même durée pour chaque cellule).

Par conséquent, si on se donne des instants quelconques t_1 et t_2 , et un intervalle de temps quelconque Δt ,

on aura:
$$\frac{P(t_1 + \Delta t)}{P(t_1)} = \frac{P(t_2 + \Delta t)}{P(t_2)}$$

1. Montrer que cette condition est équivalente à : $\forall t \in \mathbb{R}, \forall \Delta t \in \mathbb{R}, \frac{P(t + \Delta t)}{P(t)} = \frac{P(\Delta t)}{P(0)}$

2. On pose $f = \frac{P}{P(0)}$ (cette nouvelle fonction constitue une « normalisation » de la fonction P : ses variations

sont les mêmes que la fonction P , mais elle vérifie de plus $f(0) = 1$).

Montrer que la condition se réécrit : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$

Classe de première

La fonction exponentielle : un modèle mathématique pour la biologie

fiche élève n°3

V- Étude de l'équation fonctionnelle (EF) $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 f(x+y) = f(x)f(y)$

On cherche maintenant à déterminer quelles sont les fonctions susceptibles de répondre à notre problème. Soit f une fonction non identiquement nulle qui vérifie l'équation fonctionnelle (EF).

1. Image des multiples d'un réel donné

a) Démontrer que $f(0)=1$.

b) Démontrer que f ne prend que des valeurs strictement positives.

c) Exprimer, pour tout entier naturel n , $f(n)$ en fonction de n et $f(1)$.

d) Soit n un entier naturel et x un réel quelconque. On pose $v_n = f(nx)$.

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

e) En déduire la formule explicite de v_n en fonction de n et x puis que, pour tout entier naturel n et tout réel x on a : $f(nx) = f(x)^n$.

2. Image d'un rationnel

On admet dans ce qui suit, que pour tout réel a strictement positif, l'équation $x^n = a$ admet une unique solution strictement positive que l'on appelle racine n -ième de a et qui se note $\sqrt[n]{a}$ ou bien $a^{\frac{1}{n}}$.

Pour p un entier relatif et q un entier naturel non nul, on pose alors $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

En fait, on peut démontrer que $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}$, de sorte que l'ordre d'application des puissances ou des racines n'intervient pas.

a) Soit p et q des entiers positifs (q non nul).

Exprimer $f\left(\frac{1}{q}\right)$ en fonction q et $f(1)$ puis en déduire l'expression de $f\left(\frac{p}{q}\right)$ en fonction de p , q et $f(1)$.

b) Quelle relation lie $f(x)$ et $f(-x)$ pour tout réel x ?

c) On note maintenant $f(1) = a$.

Écrire alors plus simplement l'expression de $f\left(\frac{p}{q}\right)$, où p est un entier relatif et q un entier naturel non nul.

3. Extension aux nombres réels :

Le but de cette partie est d'étudier la possibilité d'étendre à tous les réels cette fonction f .

Nous allons également voir que cette extension est nécessaire afin de répondre à des questions liées à notre problématique de croissance de population.

On rappelle que la population double toutes les heures d'où $f(1) = 2 = a$.

a) Variations de la fonction f .

i) Soit x_1 et x_2 deux nombres rationnels strictement positifs tels que $x_1 < x_2$. Démontrer que $f(x_1) < f(x_2)$.

ii) Quelle propriété sur f vient-on ainsi de démontrer ?

b) Temps de triplement de la population

On admet pour la suite que la fonction f est strictement croissante sur l'ensemble des réels positifs, c'est à dire $[0; +\infty[$.

On souhaite déterminer à quel moment t_3 la population triplera (par rapport à $t=0$).

- Traduire la condition « la population triple à l'instant t_3 » par une équation.
- Est-ce qu'il existe une solution à ce problème parmi les nombres rationnels ? Justifier votre réponse.
- Soit g une fonction strictement croissante sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Montrer que :
 $\forall (x,y) \in I, x < y \Rightarrow g(x) < g(y)$
- Donner un encadrement de t_3 par deux nombres décimaux, à 0,1 près. Justifier votre réponse.
- On souhaite écrire un programme permettant de calculer un encadrement de t_3 avec une précision quelconque P donnée en entrée ($0 < P < 1$).

On a écrit ci-dessous un algorithme à compléter :

```
ALGORITHME :  
  Lire P  
  A ← 0  
  B ← 2  
  Tant que (B-A) > P  
    X ←  $\frac{A+B}{2}$   
    Si (**) alors  
      A ← X  
    Sinon B ← X  
  Fin si  
  Fin Tant que  
  Afficher [A,B]
```

- Compléter la condition (**) afin que l'algorithme ci-dessus réponde au problème posé.
- Justifier que l'algorithme complété se termine toujours et que la réponse qu'il affiche est un encadrement convenable.
- Programmer l'algorithme en Python et l'utiliser pour calculer un encadrement de t_3 par deux nombres décimaux, à 10^{-4} près. On pourra noter que Python sait calculer 2^x , pour x rationnel : on utilise pour cela la même syntaxe que dans le cas des puissances entières (2^{**x}).

c) Image d'un réel quelconque

On cherche l'image par f du réel $\sqrt{2}$.

- Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de $\sqrt{2}$ par deux décimaux.
- En déduire un encadrement de $f(\sqrt{2})$.
- Proposer un encadrement de $f(\sqrt{2})$ à 10^{-4} près. Justifier la méthode utilisée.

Note :

On peut généraliser cette étude et ainsi définir $f(x) = 2^x$ sur l'ensemble des réels, ou plus généralement $f(x) = a^x$ (a réel strictement positif), en utilisant des encadrements de plus en plus fins de x par des rationnels, comme nous venons de l'effectuer pour $x = \sqrt{2}$.

Classe de première générale

La fonction exponentielle : un modèle mathématique pour la biologie

fiche professeur

Objectifs d'apprentissages:

Cette séquence a pour but d'introduire la fonction exponentielle en tant que modèle vérifiant une condition de croissance exprimée en tant qu'équation fonctionnelle (et non différentielle), après avoir discuté brièvement le modèle discret des suites géométriques, dans le contexte du passage du discret au continu.

La fonction exponentielle est donc vue comme un modèle lié à un phénomène biologique, dans l'esprit des programmes qui incitent à présenter les fonctions de référence comme des outils de modélisation, tout en établissant le lien avec les suites géométriques.

Le passage du discret au continu utilise l'approximation des irrationnels par des rationnels. Ce travail participe ainsi à la conceptualisation des nombres réels.

Enfin, l'activité permet de travailler les TICE (usage d'un tableur) et l'algorithmique (programmation en Python), afin de développer des démarches expérimentales (modélisation et discussion de l'adéquation d'un modèle) et des aspects effectifs (approximation à une précision donnée).

Présentation de la séquence :

Prérequis : Repères ; coordonnées d'un point ; nuage de points et représentation graphique ; utilisation basique d'un tableur ; notion de suite géométrique; coefficient multiplicateur; nombre rationnel/irrationnel ; irrationalité de la racine carrée de 2 ; algorithmique (boucle et branchements) ; rudiments de programmation en Python.

Durée : 3 séances de 1h en demi-groupe, la partie V 3 étant donnée en devoir maison.

Déroulement :

- Première séance (fiche élève n°1) :

Les élèves travaillent individuellement à la fois sur un support papier et sur l'ordinateur avec un logiciel de type Tableur. Entre chaque question, il faut prévoir une mise en commun au tableau, ce qui impose une certaine gestion de l'espace (visibilité du tableau ou vidéo-projection notamment).

- Seconde séance : (fiche élève n°2) :

Rappel des résultats de la première séance. Les élèves travaillent par groupe de 3 ou 4. Un rapporteur est désigné dans chaque groupe pour tracer les courbes à proposer.

- Troisième séance (fiche élève n°3) :

Rappel des résultats des deux premières séances. Les élèves travaillent dans les mêmes conditions que la deuxième séance. Un rapporteur différent de la séance 2 est désigné dans chaque groupe. En particulier, les rapporteurs devront présenter oralement et à tour de rôle leurs réponses.

Sur la Fiche 1

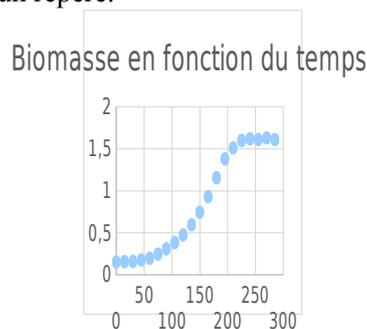
Partie I : Repérage des différentes phases

Son objectif est de déterminer la phase de croissance exponentielle en lien avec le contexte biologique décrit dans l'introduction. L'utilisation du tableur permet une approche à la fois calculatoire et quantitative (taux de croissance) ainsi qu'une approche graphique plus qualitative sur les différentes phases de croissance.

Une aide pourra être nécessaire pour les élèves non familiarisés avec le tableur et la lisibilité des graphiques peut varier en fonction des logiciels utilisés.

Question I.1 : Ici la seule difficulté consistera à sélectionner correctement les colonnes, puis le bon onglet dans le menu. L'expression « nuage de points » peut soulever quelques questions de la part des élèves : il s'agit de représenter chaque couple de données par un point dans un repère.

temps en min	X : biomasse en u
0	0,152
15	0,155
30	0,16
45	0,176
60	0,197
75	0,246
90	0,308
105	0,382
120	0,474
135	0,596
150	0,744
165	0,928
180	1,156
195	1,381
210	1,51
225	1,6
240	1,62
255	1,61
270	1,63
285	1,61



Question I.2 : Les 4 phases définies en SVT n'apparaissent pas de manière explicite. L'élève devrait proposer un découpage en 4 parties proche de 0- 50-150-200-285. Le professeur mène donc un débat entre élèves pour tenter d'harmoniser leurs propositions. Qu'il y ait consensus ou non, il propose alors une méthode (calcul des taux de croissances) pour valider les différentes phases.

Question I.3 :

Ces calculs font suite aux imprécisions qui peuvent être constatées à la question 2 et permettent de quantifier de manière plus précise la croissance de la biomasse observée.

Dans la case C3, on écrit la formule :

$$=(B3-B2)/B2$$

Le professeur veillera à ce que l'élève utilise bien la fonction « étirer vers le bas ».

	A	B	C
1	temps en min	X : biomasse en u	taux de croissance
2	0	0,152	
3	15	0,155	0,020
4	30	0,16	0,032
5	45	0,176	0,100
6	60	0,197	0,119
7	75	0,246	0,249
8	90	0,308	0,252
9	105	0,382	0,240
10	120	0,474	0,241
11	135	0,596	0,257
12	150	0,744	0,248
13	165	0,928	0,247
14	180	1,156	0,246
15	195	1,381	0,195
16	210	1,51	0,093
17	225	1,6	0,060
18	240	1,62	0,013
19	255	1,61	-0,006
20	270	1,63	0,012
21	285	1,61	-0,012
22			

Question I.4 : On attend ici un découpage plus précis qu'à la question 2, soit: 0-30-60-180-285. Ce découpage peut être toutefois discuté car le taux de variation varie plus fortement entre la 30^{ème} et la 45^{ème} minute qu'entre la 45^{ème} et la 60^{ème} minute. On pourra, d'une part, tenir compte de l'incertitude des mesures puis, d'autre part, revenir à l'observation graphique de la question 2 pour étayer le choix des phases.

Partie II : Phase de croissance exponentielle: modèle discret.

Question II.1 : Cette question permet de souligner qu'à partir de maintenant on ne s'intéresse plus qu'à cette phase. Réponse attendue : la croissance exponentielle se déroule sur l'intervalle [60;180].

Question II.2 : La réponse attendue est $C=0,25(=25\%)$, obtenue en arrondissant à 10^{-2} les valeurs du tableur. Les élèves pourraient avoir l'idée de faire une moyenne arithmétique des taux de croissances. On pourrait développer ce point délicat du choix de la constante C au moyen de la moyenne géométrique des coefficients multiplicateurs mais ce n'est l'objectif de cette séquence. Pour les notations, nous avons choisi de noter le taux de croissance C afin de ne pas réutiliser la variable t déjà utilisée pour le temps.

Question II.3.a) : Réponse attendue : l'hypothèse d'un taux de croissance constant correspond à une suite de type géométrique.

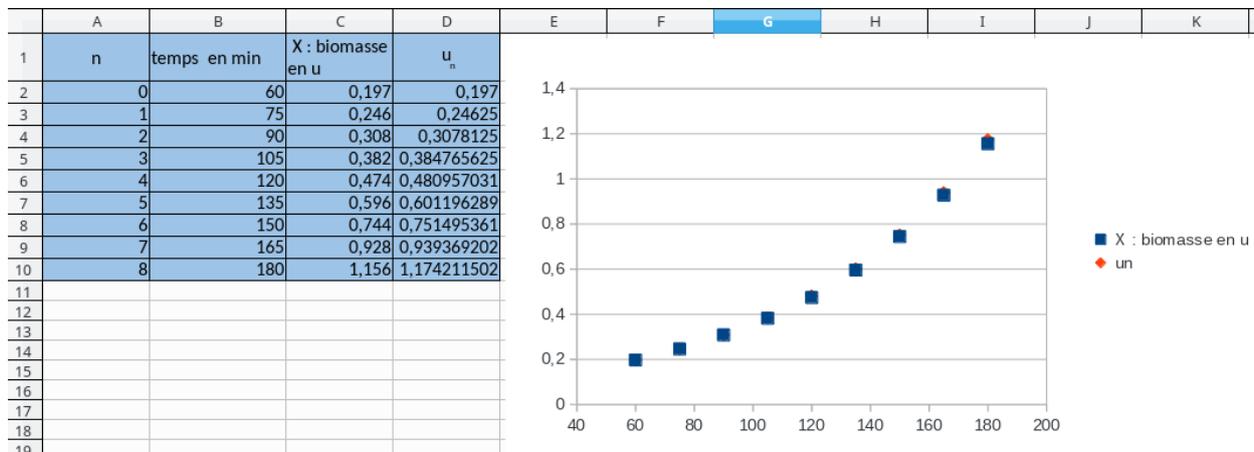
Le professeur devra peut être faire émerger les différents types de suites déjà étudiés (arithmétiques, géométriques), ainsi que le lien entre taux de croissance C et coefficient multiplicateur q (on a $C = q-1$).

Question II.3.b) : Réponse attendue : la suite est ainsi définie par son premier terme $u_0=0,197$ et sa raison $q = 1,25$.

Question II.3.c) :

On souhaite, ici, discuter l'adéquation du modèle avec les valeurs expérimentales relevées.

Réponse sur le tableur :



Selon le logiciel utilisé, les points de la première série peuvent être masqués par ceux de la deuxième série. La notion de pertinence d'un résultat devra peut-être faire l'objet d'un débat : cela veut-il dire que les points doivent se superposer parfaitement ?

Réponse attendue à la question posée : oui, cette modélisation paraît pertinente (et l'adéquation entre le modèle mathématique et les données expérimentales est particulièrement bonne).

Question II.4 :

Réponse attendue : On peut dire que la population de levures double toutes les 45 minutes.

Le professeur pourra proposer de calculer le quotient des valeurs.

Dans cette question, on introduit la partie suivante concernant le doublement de la population au cours d'une période donnée. La question du doublement peut faire écho à la demi-vie d'un élément radioactif.

Le doublement constaté sur la biomasse peut se justifier à l'aide d'un raisonnement sur la suite géométrique (u_n) .

En effet, pour passer d'un terme u_n au terme u_{n+3} , on multiplie par $1,25^3 \approx 1,95 \approx 2$.

Approfondissement éventuel :

Comment compléter ce nuage de points afin de représenter les valeurs intermédiaires (toutes les 7 min 30) théoriques, par exemple rajouter le point d'abscisse 67,5 ?

Sur la Fiche 2

Partie III : Doublement d'une population au cours d'une période donnée : passage du discret au continu.

Question 1 : Il faudra être vigilant aux quantificateurs, de plus, la notation t (et non n) peut induire l'élève en erreur car dans cette question, t ne prend que des valeurs entières.

La réponse attendue est : Pour tout entier naturel t , on a $P(t+1)=2P(t)$, ou bien sous forme intégralement symbolique : $\forall t \in \mathbb{N}, P(t+1)=2P(t)$. On peut donc en conclure que la suite $(P(n))_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de premier terme $P(0)$ et de raison 2

Question 2a. : Ici, un obstacle peut-être le fait qu'il n'y a pas de valeur numérique connue. Il faudra sans doute faire émerger la décision de prendre $P(0)$ comme unité sur l'axe des ordonnées.

En ce qui concerne les représentations graphiques, on peut s'attendre à ce qu'il y ait trois types de proposition (doublement synchrone : fig1, lignes brisées : fig2, courbe tracée à main levée : fig 3)

On peut noter que les trois réponses sont valides sur le plan théorique. Par exemple, on pourrait considérer que les levures doublent toutes au même moment (1^{er} cas).

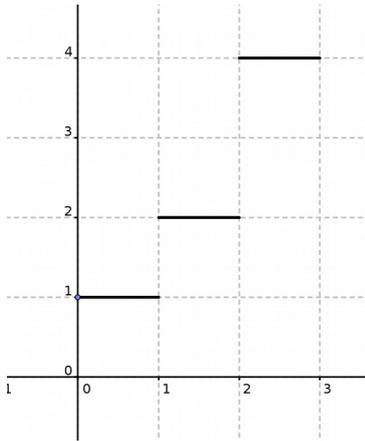


fig 1

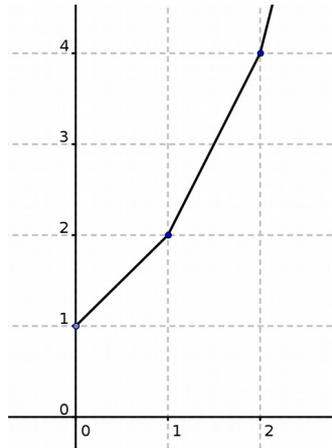


fig 2

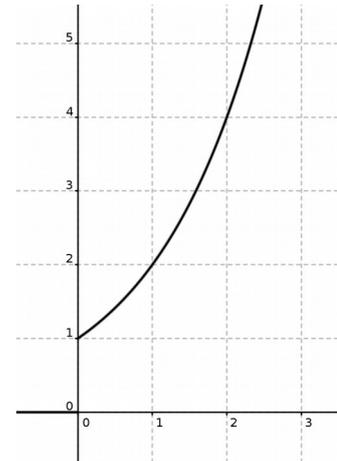


fig 3

Question 2b. (i) : Il s'agit ici de formaliser correctement la condition avec des quantificateurs : pour tout réel t positif ou nul, on a $P(t+1)=2P(t)$ (ou $\forall t \in \mathbb{R}^+, P(t+1)=2P(t)$).

Question 2b. (ii) : Pour les deux premières représentations graphiques, il est assez facile de justifier que cette condition est toujours respectée. On peut, par exemple, remarquer que les rectangles (les trapèzes) sont étirés en hauteur et que celle-ci double à chaque fois. Plus formellement, on pourra commencer par démontrer la propriété sur $[0,1]$ et argumenter que l'on peut raisonner de la même manière sur $[1,2]$, $[2,3]$, etc. (ce qui reflète le procédé de construction même des courbes).

Pour la troisième, en l'absence de définition explicite, il ne sera pas possible de justifier directement que la condition est respectée ou non. Cependant, on pourra éventuellement construire une ligne brisée de pas fixe sur $[0;1]$; en répétant ce pas sur le reste de la courbe, on peut reproduire le raisonnement et imaginer que cette ligne brisée finit par se confondre avec la courbe lorsque le pas se réduit. En d'autres termes, il s'agit d'approximer la courbe par une ligne polygonale et d'argumenter que la propriété est conservée par « passage à la limite ». Bien entendu, formaliser ces idées de façon rigoureuse est hors d'atteinte des élèves, de sorte que ces éléments n'auront pas valeur de preuve. On renverra les élèves à la fin de l'activité, laquelle vise à construire une telle fonction (la fonction exponentielle).

IV- Augmentation dans un même rapport sur des intervalles de temps égaux

Dans cette partie, après avoir expérimenté diverses formulations de la condition « la population augmente toujours dans un même rapport sur des intervalles de temps égaux », nous avons fait le choix d'écrire dans l'énoncé la formalisation correspondante:

$$\frac{P(t_1+\Delta t)}{P(t_1)} = \frac{P(t_2+\Delta t)}{P(t_2)}$$

En effet, formaliser cette expression nous a paru difficile d'une part, et d'autre part, ce n'est pas un objectif principal de notre activité.

Cette condition se justifie d'une part par le cycle de division cellulaire ; d'autre part, on introduit ici une caractéristique forte du phénomène exponentiel. Cette égalité sera d'ailleurs un point central pour la loi exponentielle (variable aléatoire réelle), laquelle modélise une durée de vie sans vieillissement et est introduite à l'aide de la définition d'une probabilité conditionnelle.

Question 1. : Cette question permet de conserver une seule variable t (en dehors de Δt)
On veut démontrer l'équivalence entre

$$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \Delta t \in \mathbb{R}, \quad \frac{P(t_1 + \Delta t)}{P(t_1)} = \frac{P(t_2 + \Delta t)}{P(t_2)} \quad (1)$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \Delta t \in \mathbb{R}, \quad \frac{P(t + \Delta t)}{P(t)} = \frac{P(\Delta t)}{P(0)} \quad (2)$$

(1) \Rightarrow (2)

En effet, il suffit de choisir $t_2 = 0$

(2) \Rightarrow (1)

Il suffit cette fois-ci d'écrire une fois (2) pour $t = t_1$, puis une autre fois pour $t = t_2$ et conclure par transitivité de l'égalité.

Question 2. :

Cette question permet de justifier l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$ qui est au cœur de notre problème.

Réponse attendue : on pose $t = x$ et $\Delta t = y$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \Delta t \in \mathbb{R}, \quad \frac{P(t + \Delta t)}{P(t)} = \frac{P(\Delta t)}{P(0)} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \frac{P(x+y)}{P(x)} = \frac{P(y)}{P(0)}$$

$$\text{Or } P(x+y) = \frac{P(y)P(x)}{P(0)} \Leftrightarrow \frac{P(x+y)}{P(0)} = \frac{P(x)P(y)}{P(0)P(0)} \Leftrightarrow f(x+y) = f(x)f(y)$$

On pourra conseiller de partir de l'égalité $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Sur la Fiche 3

V- Étude de l'équation fonctionnelle (EF) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 f(x+y) = f(x)f(y)$

1. Image des multiples d'un réel donné

Afin d'éviter un raisonnement par récurrence, on a fait le choix de faire intervenir une suite géométrique (fonction d'un paramètre x). On retrouve dans cette partie des raisonnements classiques sur la fonction exponentielle : absence de racine, signe constant.

Question 1.a. :

En prenant $y=0$ dans (EF), on trouve $f(x) = f(0)f(x)$ pour tout x réel. Comme f est non identiquement nulle, il existe au moins un x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$. On a $f(x_0) = f(0)f(x_0)$ d'où $f(0) = 1$ en simplifiant par $f(x_0)$.

Question 1.b. :

Pour prouver que f ne s'annule pas, on pourra suggérer de faire un raisonnement par l'absurde :

Prenons un réel quelconque x . Si f s'annule pour une certaine valeur y_0 , alors en posant $x - y_0 = z$, on a $f(x) = f(z + y_0) = f(z)f(y_0) = 0$, ce qui prouve que $f(x) = 0$ pour tout réel x . Or c'est impossible car f n'est pas identiquement nulle. On en déduit que f n'admet pas de racine.

On peut aussi utiliser la relation (EF) pour $y = -x$, ce qui donne $f(x)f(-x) = f(0) = 1$ et montrer ainsi directement que, pour tout réel x , $f(x) \neq 0$.

Pour la positivité, soit x un réel quelconque. On remarque facilement que $f(2x) = f(x)^2$ donc $f(2x)$ est positif, d'où l'idée de prendre $\frac{x}{2}$: on a $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0$.

Question 1.c. : Les élèves ont déjà démontré que $(P(n))_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison 2. Il est attendu qu'ils réinvestissent cette idée et montrent que $(f(n))_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $f(1)$ et de premier terme $f(0)=1$, d'où $f(n)=f(1)^n$. Certains élèves écrivent peut-être directement :

$$f(n) = f(1+1+\dots+1) = f(1) \times f(1) \times \dots \times f(1) = f(1)^n$$

sans davantage de justification, par une récurrence « implicite » (qui sera formalisée en Terminale).

Question 1.d. :

Soit x un réel fixé ; pour tout n un entier naturel non nul, on a :

$$v_{n+1} = f((n+1)x) = f(x+nx) = f(x) \times f(nx) = f(x) \times v_n$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $f(x)$ et de premier terme $v_0 = f(0) = 1$.

Question 1.e. :

De la formule $v_n = v_0 \times q^n$, on tire $v_n = f(0)f(x)^n = f(x)^n$ c'est à dire $f(nx) = f(x)^n$.

2. Image d'un rationnel

La fonction f étant bien définie sur les entiers ou bien plus généralement pour les multiples d'un réel donné, on affine maintenant cette étape par l'introduction des rationnels qui vont ensuite permettre d'encadrer les réels (une démarche classique pour la construction des réels) afin de définir f sur \mathbb{R} tout entier.

Question 2.a. :

$$f\left(\frac{1}{q}\right)^q = f\left(q \times \frac{1}{q}\right) = f(1) \text{ donc on a } f\left(\frac{1}{q}\right) = \sqrt[q]{f(1)} = f(1)^{\frac{1}{q}}. \text{ On en déduit : } f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p \times \frac{1}{q}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right)^p = f(1)^{\frac{p}{q}}.$$

Question 2.b. :

On a, pour tout réel x , $f(x)f(-x) = f(0) = 1$, d'où $f(-x) = \frac{1}{f(x)} = f(x)^{-1}$.

Question 2.c. :

Dans cette question, on soulignera le fait que le rationnel $\frac{p}{q}$ peut être négatif.

Réponse attendue : D'après la question 2a, lorsque p et q sont positifs (q non nul), on a $f\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}}$

De plus $f(x) = \frac{1}{f(-x)}$ pour tout réel x , donc si p est négatif, on a :

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{-p}{q}\right)} = \frac{1}{a^{\frac{-p}{q}}} = \frac{1}{(a^{1/q})^{-p}} = \left(\frac{1}{a^q}\right)^p = a^{p/q}.$$

Conclusion : pour tout entier relatif p et tout entier relatif q non nul, on a : $f\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}}$

3. Extension aux nombres réels :

Cette dernière partie peut être donnée en devoir à la maison. Cela signifie que les questions précédentes auront été corrigées. Il est recommandé que les élèves aient déjà rencontré un algorithme basé sur le principe de dichotomie.

Dans la suite de cette activité, nous avons le choix entre l'approche par la monotonie ou bien la continuité. Comme la continuité n'est pas au programme d'une part et que l'étude des variations d'une fonction représente une part importante des notions étudiées aussi bien en seconde qu'en première, nous avons choisi d'utiliser la monotonie. On pourra noter que l'hypothèse de croissance de la fonction f est vérifiée si l'on suppose la continuité. Ceci peut être démontré à partir de la question 3 a) et de la densité des nombres rationnels dans l'ensemble des nombres réels.

a) Variations de la fonction f .

Question 3.a.i) :

Si x_1 et x_2 sont deux nombres rationnels strictement positifs tels que $x_1 < x_2$, alors on peut écrire $x_2 = x_1 + h$ où h est encore un rationnel strictement positif. On a : $f(x_2) = f(x_1 + h) = f(x_1)f(h)$. Or, d'après le 2, $f(h) = a^h = 2^h$.

Notons $h = \frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers naturels non nuls. On a $2^h > 1$. En effet, si on avait $2^{\frac{p}{q}} \leq 1$ alors on aurait $2^p \leq 1^q = 1$ par croissance de la fonction x^q , ce qui est absurde. On en déduit que $f(x_1)f(h) > f(x_1)$ et par conséquent $f(x_1) < f(x_2)$.

Question 3.a.ii) :

On démontre ainsi que la fonction f est strictement croissante sur l'ensemble des rationnels positifs.

b) Temps de triplement de la population

Ce paragraphe constitue un prolongement de l'étude du temps de doublement. Il permet d'introduire l'extension aux nombres réels et de revoir la technique abordée en seconde pour démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$, par l'absurde. L'égalité $2^p = 3^q$ constitue également un problème abordé lors de l'étude de la gamme de Pythagore et de la quinte du loup en enseignement scientifique.

Question 3.b.i) :

On peut traduire cette nouvelle donnée par $f(t_3) = 3$ c'est à dire $2^{t_3} = 3$

Question 3.b.ii) :

Si t_3 était un rationnel, alors on pourrait noter $t_3 = \frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers naturels et q non nul. Ceci donnerait $2^{\frac{p}{q}} = 3$ ou encore $2^p = 3^q$. Le membre de gauche est pair tandis que celui de droite est impair, c'est donc impossible.

Question 3.b.iii) :

On ambitionne ici de faire la distinction entre la définition de croissance d'une fonction (qui n'est pas une équivalence) et la croissance stricte qui peut être définie par une équivalence.

Réponse attendue :

Soit g une fonction strictement croissante sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et soit $(x, y) \in I^2$. Si $x < y$, alors, par définition de la stricte croissance de g , on a $g(x) < g(y)$. Réciproquement, supposons que $g(x) < g(y)$ pour un couple $(x, y) \in I^2$. Si on avait $x \geq y$, alors, par croissance de g , on aurait $g(x) \geq g(y)$, ce qui est impossible.

Question 3.b.iv) :

Les élèves vont chercher, par tâtonnement, à la calculatrice en utilisant la touche x^y comme une boîte noire.

On trouve rapidement $1,5 < t_3 < 1,6$. On pourra alors demander comment justifier ce résultat car, par exemple, le calcul de $2^{1,6}$ ne peut se faire « à la main ».

On remarque à ce sujet que $2^{1,5} = 2^{\frac{3}{2}}$. D'autre part $2^3 = 8$ et $3^2 = 9$. De l'inégalité $2^3 < 3^2$ on tire $2^{\frac{3}{2}} < 3$ par un passage aux racines carrées (ou croissance stricte de la fonction x^2). Pour l'autre inégalité, on a $2^{1,6} = 2^{\frac{8}{5}}$. On utilise à nouveau la question précédente : montrer que $2^{\frac{8}{5}} > 3$ revient à montrer que $2^8 > 3^5$ par croissance stricte de la fonction x^5 , ce que l'on vérifie facilement.

Le fait que la fonction f est supposée strictement croissante sur \mathbb{R}^+ permet alors de justifier l'encadrement suivant, toujours d'après 3.b.iii) : $1,5 < t_3 < 1,6 \Leftrightarrow f(1,5) < f(t_3) < f(1,6) \Leftrightarrow f(1,5) < 3 < f(1,6)$.

Question 3.b.v) :

Voici l'algorithme complété :

```
ALGORITHME :
    Lire P
    A ← 0
    B ← 2
    Tant que (B-A)>P
        X ←  $\frac{A+B}{2}$ 
        Si  $(2^X - 3)(2^A - 3) > 0$  alors A ← X
           Sinon B ← X
    Fin si
    Fin Tant que
    Afficher [A,B]
```

La notion de limite n'est vue, en première, que de manière intuitive donc il n'est pas attendu ici de justification rigoureuse de l'arrêt de l'algorithme mais plutôt une réactivation de la notion de limite d'une suite.

Réponse attendue :

Lors de l'entrée dans la boucle Tant que, la longueur de l'intervalle [A;B] est 2. A chaque étape, la longueur de l'intervalle [A;B] est divisée par deux. Donc si on note, pour n entier naturel, l_n la longueur de l'intervalle [A;B] à l'étape n , la suite (l_n) est une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{1}{2}$. Par conséquent, sa limite en l'infini est égale à zéro, ce qui justifie que, pour toute valeur de P strictement positive donnée, on aura $l_n < P$ à partir d'un certain rang : de ce fait, l'algorithme s'arrêtera.

Programme en Python :

```
P=eval(input("Entrez la précision désirée"))
A=0
B=2
while (B-A)>P:
    X=(A+B)/2
    if (2**X-3)*(2**A-3)>0:
        A=X
    else:
        B=X
print(A)
print(B)
```

c)Image d'un réel quelconque

Question 3.c.i) :

La calculatrice permet de trouver rapidement un encadrement grâce à la valeur approchée qu'elle fournit. On pourra cependant noter que seul le passage aux carrés permet encore une fois de justifier cette inégalité sans utiliser la calculatrice comme une boîte noire.

Réponse attendue :

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

Question 3.c.ii) :

Cette question est laissée volontairement ouverte sur la précision du résultat pour laisser place à la discussion.

Une fois la précision voulue choisie, il faudra prendre la valeur par défaut à gauche et par excès à droite .

Réponse attendue :

Par croissance stricte de f , on en déduit que $f(1,41) < f(\sqrt{2}) < f(1,42)$, c'est à dire : $2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42}$

On peut proposer $2,65 < 2^{\sqrt{2}} < 2,68$ ou encore $2,657 < 2^{\sqrt{2}} < 2,676$ par exemple.

Question 3.c.iii) :

Dans cette question, on peut tester la fonction exposant réel de la calculatrice :

$$2,6651 < 2^{\sqrt{2}} < 2,6652$$

Cependant, on ne souhaite pas que l'élève l'utilise encore une fois comme une boîte noire. Justifier un tel encadrement nécessite de raffiner l'encadrement de $\sqrt{2}$, par tâtonnement, jusqu'à pouvoir en déduire, par la méthode précédente, un encadrement de $2^{\sqrt{2}}$ de la précision demandée. On pourrait demander aux élèves les plus aguerris d'écrire un programme Python automatisant cette démarche, pour une précision P donnée en entrée.