HAL
open science

Vers un modèle mathématique pour la croissance des micro-organismes

Jean-Pierre Robert, David Sauzet, Thomas Hausberger

To cite this version:

Jean-Pierre Robert, David Sauzet, Thomas Hausberger. Vers un modèle mathématique pour la croissance des micro-organismes. 2019. hal-02882821

HAL Id: hal-02882821

https://hal.science/hal-02882821v1

Submitted on 27 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Fiche d'identification

Discipline	Mathématiques
Titre de l'activité	Vers un modèle mathématique pour la croissance des micro-organismes
Niveau de la classe	Seconde générale
Objectifs d'apprentissages : connaissances et compétences	Cette séquence à pour but de modéliser une croissance exponentielle avec des outils mathématiques et des outils TICE au programme de la classe de seconde. Elle permet de travailler la compétence « modéliser » et d'initier les élèves à la notion de suite géométrique. Le travail mathématique a lieu dans un cadre numérique et graphique en utilisant le modèle des suites géométriques de manière élémentaire (coefficient multiplicateur d'un terme au terme suivant) sans parler de notion d'indice d'une suite.
Durée	2 séance de 1h en demi-classe.
Matériel	Un ordinateur par élève avec les logiciels suivants : Géogébra, LibreofficeCalc (ou équivalent)
Programme	Nombres et calculs : développer la pratique du calcul numérique. Manipuler les nombres réels. Les fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ permettent de modéliser des phénomènes continus. On peut confronter les élèves à des exemples de fonctions définies sur $\mathbb{N}$ pour modéliser des phénomènes discrets. La notation *u(n)* est alors utilisée. Les outils numériques sont mis à profit : - un logiciel de géométrie dynamique, pour la représentation graphique et l'utilisation de curseurs ; - le tableur ou la calculatrice, pour mettre en évidence l'aspect « programme de calcul » d'une suite ou fonction.
Mots-clés.	Croissance exponentielle, suites géométriques, modélisation mathématique de phénomènes biologiques, coefficient multiplicateur, taux de croissance.
Résumé	<u>Première séance :</u> Partie I :Étude d'un problème issu du domaine des Sciences est Vie de la Terre (croissance d'une population de levure). Utilisation d'un tableur, interprétation graphique, calcul de taux de croissance, repérage de la phase dite « exponentielle », courbe de tendance (ajustement exponentiel, le tableau étant utilisé comme « boîte noire »). Partie II :Recherche d'une suite géométrique modélisant le phénomène. <u>Deuxième séance :</u> Dans cette seconde modélisation discrète, on tente de réduire l'intervalle de temps et donner une formule pour le nombre de levures toutes les minutes. On opère d'abord par ajustement des paramètres à l'aide de curseurs dans un logiciel de géométrie dynamique et de la courbe de tendance, puis de façon algébrique par l'utilisation de la racine $n^{\text{ième}}$.
Auteurs	Jean-Pierre Robert, David Sauzet, Thomas Hausberger Groupe Enseignement Scientifique IREM de Montpellier

Organisation de la séquence

<table>
<tr><td rowspan="2">Séance n°1</td><td>Effectif : 18</td><td>Matériel : ordinateur avec tableur</td><td>Durée : 2 fois 1h.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Modalités :
1 Séance de 1h, en demi-classe.
Les élèves travaillent individuellement à la fois sur un support papier et sur l'ordinateur avec un logiciel de type Tableur. Entre chaque question, il faut prévoir une mise en commun au tableau, ce qui impose une certaine gestion de l'espace (visibilité du tableau ou vidéo-projection notamment).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Séance n°2</td><td>Effectif : 18</td><td>Matériel : ordinateur avec tableur et Géogébra</td><td>Durée : 2 fois 1h.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Modalités :
1 Séance de 1h, en demi-classe.
Rappel des résultats de la première séance.
Les élèves travaillent par groupe de 3 ou 4.
Un rapporteur est désigné dans chaque groupe pour présenter les résultats, notamment le calcul des raisons (question II 1 d) et l’ajustement des paramètres (question III 2 c).</td></tr>
</table>

Vers un modèle mathématique pour la croissance des micro-organismes

fiche élève

Il est courant, en sciences expérimentales, d'étudier l'évolution d'une grandeur en fonction du temps. On procède alors à des mesures de la grandeur, à différents instants, et l'on trace les points obtenus sur un même graphique. Parfois, on relie ces points afin d'obtenir une courbe.

Les mathématiques fournissent des outils pour exprimer comment évolue la grandeur : les fonctions de références comme les fonctions affines, la fonction carré, etc. sont autant de modèles mathématiques pour décrire les phénomènes. Quelle fonction permet d'ajuster au mieux les valeurs expérimentales ? Comment effectuer cet ajustement ? Ce sont de tels problèmes qu'il s'agit de résoudre lors de la modélisation mathématique.

Nous allons mener de telles démarches dans le cas de la croissance de micro-organismes : dans un laboratoire de biologie, des levures ont été mises en culture dans un milieu agité, maintenu à température constante et non renouvelé. Les chercheurs mesurent la biomasse toutes les quinze minutes. Les valeurs relevées ont été retranscrites dans le fichier *biomasse* du tableur.

Quel modèle mathématique proposer ? Les connaissances de biologie permettent d'orienter le choix du modèle. En effet, la croissance des micro-organismes a lieu par division cellulaire : lorsque les conditions sont optimales, chaque cellule se divise en deux cellules, au bout d'un temps donné (qui dépend uniquement du type de micro-organisme). Ceci amène les biologistes à postuler que le « taux de croissance » sera constant, pendant la phase de la croissance où ces conditions optimales sont réalisées.

Précisément, les biologistes postulent un modèle (général, simplifié) en quatre phases : une phase de latence (taux de croissance égal à zéro), une phase d'accélération (le taux de croissance augmente progressivement), une phase de croissance rapide dite « exponentielle » (le taux de croissance atteint une valeur maximale et constante), et enfin une phase de décélération (le taux de croissance diminue progressivement).

Nous allons étudier ce modèle et lui donner une formulation mathématique précise, en l'appliquant aux données du tableur.

I. Repérage des différentes phases.

1. Ouvrir le fichier *biomasse* du tableur puis la feuille *biomasse1* . Sur cette feuille du tableur, insérer la représentation du tableau par un nuage de points (sélectionner les colonnes A et B, puis « insertion graphique », « nuage de points»)
2. Comment pourrait-on retrouver les 4 phases vues en SVT sur le graphique ?
3. Le taux de croissance d'une grandeur entre deux mesures consécutives est défini par : $\frac{valeur\,2 - valeur\,1}{valeur\,1}$. Cette formule est utilisée en sciences, en économie et en gestion, etc.
   Compléter la colonne *taux de croissance* du tableau. Comparer avec les phases déterminées graphiquement. Sur quel intervalle de temps se déroule la croissance exponentielle ?
4. Compléter enfin le tableau *« phase de croissance exponentielle»,* puis insérer sa représentation graphique par un nuage de points. Enfin insérer une courbe de tendance avec la fonction qu'elle représente. (utiliser « afficher une courbe de tendance » ; « exponentielle » ; « ajouter l'équation de la courbe »)

II. La phase de croissance exponentielle d'un point de vue numérique.

1. Voici 4 suites de nombres :

Suite 1 : 2 ; 6 ; 18 ; 54 ; 162 ; 486 ; 1458 ; 4374
Suite 2 : 1 : 4 ; 16 ; 32 ; 50 ; 100
Suite 3 : 1 ; 1,5 ; 2,25 ; 3,75 ; 5,625 ; 8,4375 ; 12,65625
Suite 4 : 12 ; 6 ; 3 ; 1,5 ; 0,75 ; 0,375

a) Pour chacune de ces suites de nombres, peut-on trouver le prochain nombre ?
b) Proposez une notation pour le $n^{ième}$ terme de la suite.
c) Pour chacune des suites géométriques, comment peut-on écrire le 3ème nombre à partir du premier ? Le 5ème nombre à partir du premier ? Le dernier à partir du premier ? En déduire une formule qui permet d'écrire le nombre n° n en fonction du premier (n°0).
d) Vérifier cette formule sur les exemples de suites géométriques ci-dessus. On précisera d'abord la raison et le premier terme de chacune d'elles.
e) Soit la suite géométrique de premier terme 4 et de raison 5. Déterminer, grâce à la formule précédente, le terme n°6. Le neuvième terme.

2. Ouvrir la feuille *biomasse2* qui reprend les données relevées par les biologistes toutes les 15 minutes pendant la phase exponentielle.
   a) Le coefficient multiplicateur d'une grandeur entre deux mesures consécutives est défini par : $\frac{valeur\,2}{valeur\,1}$. Compléter la colonne *coefficients multiplicateurs*. Comparer ces résultats à ceux de la question I 3.
   b) Justifier que la phase de croissance exponentielle correspond à une suite « quasi-géométrique ». On prendra comme raison de la suite la moyenne de ces différents coefficients. (la calculer avec le tableur dans la cellule E2).
   c) Compléter alors le tableau *phase de croissance exponentielle : modèle suite géométrique*. Insérer dans le graphique le nuage de points de la suite géométrique et commenter ces résultats.

III. La phase de croissance exponentielle : vers un modèle continu

Nous avons vu au I que le tableur nous fournit une courbe de tendance dite exponentielle (ou ajustement exponentiel). D'autre part, d'après le II, il semble qu'une suite géométrique dont le terme n°n peut s'écrire sous la forme $a \times q^n$ (a étant le premier terme et q la raison) donne une formule pour les mesures toutes les 15 minutes. Nous voulons maintenant déterminer une formule qui donne des valeurs toutes les minutes et vérifier que ces points se situent sur la courbe de tendance.

1. Ouvrir le fichier Geogebra « biomasse ». Le nuage de points donné par l'expérience de biologie figure déjà sur le graphique (points de A à T) ainsi que la courbe de tendance exponentielle fournie par le tableur. Quelles remarques peut-on faire au regard de la courbe et du nuage de points?
2. On va maintenant définir la suite géométrique de premier terme b et de raison r dans le tableur, ainsi que sa représentation graphique. Cette suite donne des valeurs toutes les minutes.

a) b et r seront des paramètres variables. Nous allons les représenter grâce à deux curseurs. Cliquer sur

puis placer le curseur sur une zone libre du dessin (en haut à droite).
Dans l'onglet « Intervalle », choisir Nom : b ; min : 0 ; max : 0,2 ; incrément 0.001.
Modifier ensuite la longueur du curseur dans l'onglet « curseur ». Choisir une longueur de 400.
Faire de même pour le curseur r ; min : 1 ; max : 1,2 ; incrément : 0,001 ; Longueur de 400

b) Afficher le tableur de Geogebra (cliquer sur Affichage, puis Tableur). Dans la colonne C, insérer en C1 la formule : =b*r^A1. Tirer cette formule jusqu'à la ligne 20. On obtient la liste des termes de la suite géométrique. Sélectionner les colonnes A et C (touche CTRL enfoncée, cliquer sur A puis sur C). Clic droit « insérer liste de points » ; On obtient la liste des points qui représentent cette suite.

c) Faire alors varier les curseurs b et r de sorte d'ajuster au mieux les deux nuages de points. Donner les meilleures valeurs trouvées pour b et r. Commenter le résultat. Les paramètres b et r sont différents des paramètres a et q de la suite « quasi-géométrique » du II.2.b. Comment l'expliquer ?

3. Détermination numérique des coefficients b et r.

Dans cette partie, on va chercher à déterminer directement b et r par le calcul et donc justifier les valeurs trouvées ci-dessus grâce à la variation des curseurs de Geogebra.

a) Voici quatre tableaux incomplets qui présentent trois suites géométriques :

Numéro	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Terme			45		135				

Numéro	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Terme			24			192			

Numéro	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Terme		20				5120			

Numéro	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Terme			4,32				8,957952		

Déterminer la raison de chaque suite et compléter les tableaux. Faire une phrase pour décrire la procédure qui vous a permis de déterminer chacune des raisons.

b) Ouvrir le fichier *biomasse* du tableur puis la feuille *biomasse3*. Déterminer la raison de la suite géométrique en appliquant la même procédure qu'au a). Compléter la cellule C3. Déterminer le premier terme de la suite puis compléter la colonne E. Commenter.

Vers un modèle de croissance de micro-organismes

fiche professeur

<u>Présentation de la séquence</u> :

Prérequis : Repères ; coordonnées d'un point ; nuage de points et représentation graphique ; utilisation basique de Geogebra et d'un tableur.

La modélisation d'une croissance exponentielle n'est évidemment pas au programme de 2de. Pour qu'un élève de 2de comprenne ce phénomène, la séquence se déroule dans un cadre numérique et graphique en utilisant le modèle des suites géométriques de manière élémentaire (coefficient multiplicateur d'un terme au terme suivant) sans parler de notion d'indice.

Durée : 2 séances en demi-classe.

Déroulement :

I : Cette partie ne présente pas de difficulté particulière. Son objectif est de déterminer la phase de croissance exponentielle en l'objectivant grâce aux taux de croissance. Une aide pourra être nécessaire pour les élèves non familiarisés avec le tableur.

<u>Question 2</u> : Les 4 phases définies en SVT n'apparaissent pas de manière explicite. Le professeur mène donc un débat entre élèves pour tenter d'harmoniser leurs propositions. Qu'il y ait consensus ou non, il propose alors une méthode (calcul des taux de croissances) pour valider les différentes phases.

<u>Question 3</u> : Si la notion de taux de croissance a été vue par les élèves en économie (SES), le professeur peut enlever le rappel de définition et en appeler au souvenir des élèves. Dans tous les cas, il souligne l'intérêt de cet indicateur dont le signe, positif ou négatif, permet de déterminer la croissance ou la décroissance. Cela revient au même de calculer les rapports de termes consécutifs et repérer ainsi une suite géométrique (on le fera au paragraphe II)

<u>Question 4</u> : Les instructions données sur la fiche élève correspondent aux menus du logiciel Excel. Il s'agira bien sûr de les adapter selon le tableur utilisé en classe et de donner les coups de pouce nécessaires aux élèves non aguerris à son usage.

II : La présentation du modèle suite géométrique se veut la plus simple et intuitive ; elle doit permettre la mise en place de la formule de calcul du n^{ième} terme en fonction du premier que nous appelons le n°0 (le choix est fait de ne pas utiliser l'écriture indicée).

<u>Question 1 a)</u> : Le but est d'amener l'élève à rechercher une régularité dans le processus de calcul du terme suivant. On notera que la deuxième suite ne permettra pas de déterminer le terme suivant. Une présentation élémentaire et progressive, basée sur la reconnaissance ou non d'un coefficient multiplicateur constant doit permettre la mise en place de la définition : Chaque terme suivant est obtenu à partir du précédent en le multipliant par la raison (constante).

Question 1 b) :

Cette question doit permettre d'introduire la notation $u(n)$ préconisée dans le programme officiel lorsqu'il s'agit de modéliser des phénomènes discrets par des suites. Ces dernières sont donc vues comme des fonctions définies sur $\mathbb{N}$.

Question 1 c) :

On institutionnalisera la formule donnant le terme numéro n en fonction du terme numéro 0 : $u(n) = u(0).r^n$.

Question 1 d) et e) :

On vérifie ici que l'élève s'est bien approprié la formule précédente et est capable de l'appliquer sur un nouvel exemple (on pourra inciter l'élève à appliquer une procédure de contrôle qui consiste à calculer les termes successifs « à la main »).

Question 2 a) : Rechercher un coefficient multiplicateur constant revient à un taux de croissance constant (voir Question I.3). La relation taux de croissance = coefficient multiplicateur - 1 pourra être démontrée par les élèves qui sont à l'aise avec le calcul algébrique et pris en charge par le professeur au tableau pour les autres.

Question 2 b) : Le professeur peut demander si la suite est géométrique ; il commente alors le terme « quasi-géométrique », et indique le choix de la moyenne pour définir la raison de la nouvelle suite, sachant qu'ici la qualité de l'ajustement est très bonne (ce n'est pas la formule utilisée dans la théorie de l'ajustement exponentiel, c'est-à-dire la régression linéaire modulo passage au logarithme).

Question 2 c) : La définition et la formule générale étant maintenant connues, le professeur peut demander à l'élève de compléter l'une ou l'autre ou les deux colonnes du tableau *phase de croissance exponentielle : modèle suite géométrique*. La colonne G utilise la formule de définition et ne pose a priori pas de difficulté. La colonne I utilise la formule générale et présente deux difficultés : la compréhension de la numérotation (reprendre à ce sujet notre commentaire de la question III 2 c) ci-dessous), puis le problème technique du tableur avec l'introduction de $ pour bloquer les cellules E2 et I3 avant de « tirer » la formule inscrite en I4.

III : Le but de cette partie est à la fois d'éclairer la boîte noire de la courbe de tendance (les points d'abscisses entières forment une suite géométrique) et de donner une formule pour la croissance en fonction du temps (en nombre entier de minutes). L'expression générale en fonction du temps est hors programme en seconde, puisqu'elle fait intervenir l'exponentielle et le logarithme (sens de l'écriture $b.r^t$ lorsque t n'est plus un nombre entier mais un nombre réel).

On cherche d'abord graphiquement (questions 1 et 2) les valeurs des paramètres b et r qui donnent des points sur la courbe de tendance (laquelle ajuste les points expérimentaux quasi parfaitement) à l'aide de Geogebra. Ensuite (question 3), un travail progressif sur des suites numériques vise à développer les outils nécessaires pour que les élèves comprennent que la

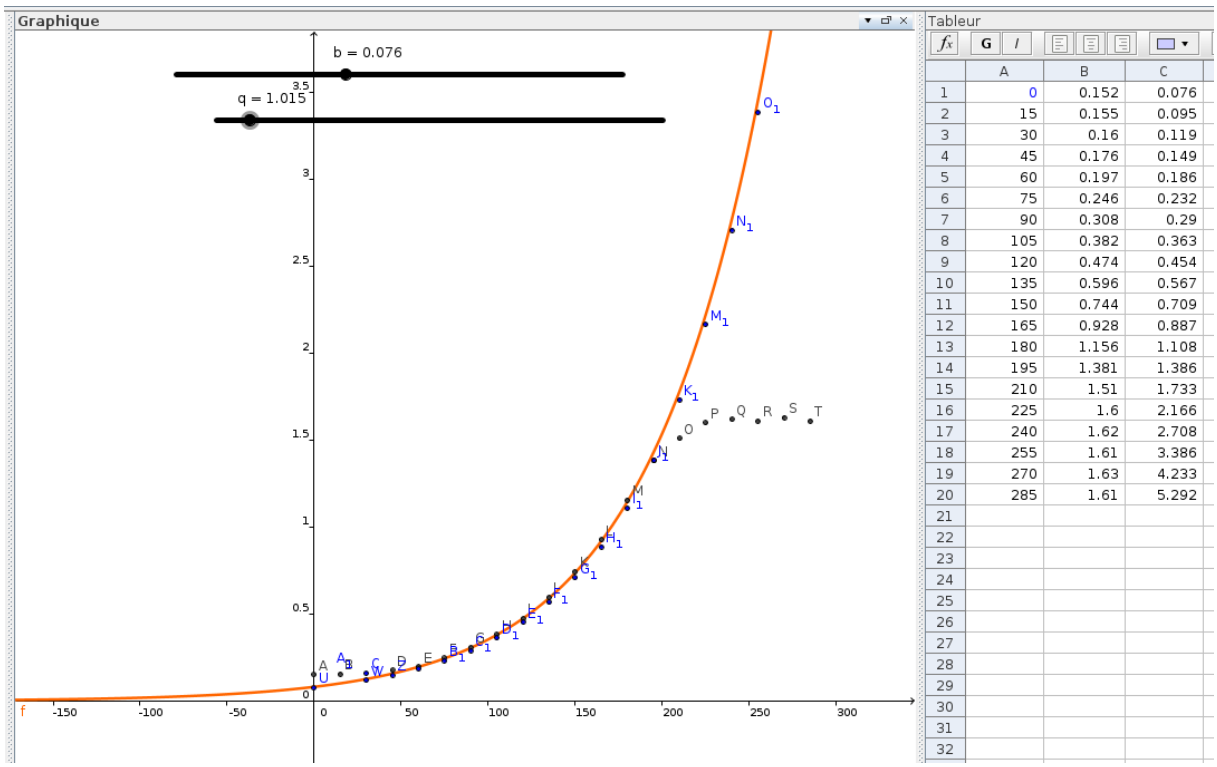
formule pour les valeurs toutes les minutes s'obtient en prenant la racine 15ème de la raison de la suite géométrique donnant les valeurs toutes les 15 minutes.

<u>Question 1</u> :

Réponse attendue : le modèle décrit apparemment bien la croissance des bactéries sur la phase exponentielle.

<u>Question 2 a)</u> : Pour simplifier la recherche, on a défini des intervalles qui permettent assez rapidement aux élèves de trouver un ajustement (selon les paramètres du curseur, l'incrément permet ou non un ajustement).

<u>Question 2 c)</u> : On remarque que les points de la suite géométrique se situent sur la courbe pour des valeurs de b et r convenables. Le professeur pourra attirer l'attention sur le fait que les paramètres b et r sont différents des paramètres a et q de la suite du II.2.b). Une stratégie d'ajustement possible consiste à régler d'abord b (en choisissant r = 1 et en faisant coïncider le premier point d'abscisse nulle avec le point correspondant de la courbe de tendance), puis à ajuster r pour que tous les autres points soient sur la courbe. Les élèves pourront alors prendre conscience du fait que la formule $a \times q^n$ qui donne le n^{ème} terme de la suite, noté $u(n)$, correspond aux valeurs toutes les 15 minutes et non toutes les minutes. Le symbole n correspond donc au numéro du terme de la suite et pas au temps en minutes. Si l'on adopte le point de vue fonctionnel sur les suites vues comme des fonctions dont la variable modélise une grandeur, il faut considérer dans ce cas que l'unité de temps n'est pas la minute mais 15 min. C'est la fonction $v(t) = b.r^t$ qui donne le nombre de levures en fonction du temps, pour des valeurs entières de t (en min).



	A	B	C
1	0	0.152	0.076
2	15	0.155	0.095
3	30	0.16	0.119
4	45	0.176	0.149
5	60	0.197	0.186
6	75	0.246	0.232
7	90	0.308	0.29
8	105	0.382	0.363
9	120	0.474	0.454
10	135	0.596	0.567
11	150	0.744	0.709
12	165	0.928	0.887
13	180	1.156	1.108
14	195	1.381	1.386
15	210	1.51	1.733
16	225	1.6	2.166
17	240	1.62	2.708
18	255	1.61	3.386
19	270	1.63	4.233
20	285	1.61	5.292
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			
31			
32			

Question 3 : Ce travail est plutôt réservé aux élèves qui veulent ou peuvent aller plus loin, la notion de racine $n^{ème}$ étant délicate et hors programme. Le professeur sera à même d'en juger.

Question 3 a) : Le but est de développer une technique permettant de calculer la raison et le premier terme d'une suite géométrique connaissant 2 termes quelconques. Ceci nécessite de calculer des racines $n^{ièmes}$. Encore une fois, la connaissance du coefficient multiplicateur entre les deux termes connus est la clé de la recherche pour retrouver la raison (extraction de racines carrées, puis cubiques etc…), puis pour compléter avec cette raison le tableau vers la gauche ou vers la droite. Cette question difficile demande une bonne maîtrise de la division et de la multiplication et la conceptualisation de la notion de racine $n^{ième}$. La calculatrice servira de boîte noire pour les calculs (en particulier pour le 4ème exemple). Une phrase simple et quasi-algorithmique peut ainsi clore la recherche : *Déterminer le coefficient multiplicateur qui fait passer du premier terme connu au second. Compter le nombre n de multiplications pour passer du premier terme connu au second. La raison est alors la racine $n^{ième}$ du coefficient multiplicateur.*

Réponses attendues pour la raison :

série 1 : $q=\sqrt{3}$

Série 2 : $q=\sqrt{2}$

Série 3 : $q=4$

Série 34: $q=1{,}2$

Question 3 b) : Penser à nouveau à l'importance du $ pour bloquer les valeurs constantes dans le tableur. L'élève doit remarquer et comprendre maintenant assez facilement la correspondance entre les deux suites (cellules rouges).