

# Sur l'origine du « Principe général » de Jean Le Rond D'Alembert

CHRISTOPHE SCHMIT

## Summary

This article intends to propose new hypotheses concerning the origin of the “Principe général” of mechanics of Jean Le Rond D'Alembert expressed in its *Traité de dynamique* in 1743. The examination of the statics of Pierre Varignon and its inheritance suggests that D'Alembert retains, through a case of oblique collision on a hard surface, a method of decomposition and equilibrium of forces which is close to its principle. On the other hand, this principle requires a definition of the equilibrium widely spread in the 17th and 18th centuries, D'Alembert seeming then more to innovate from an epistemological point of view than on a technical one. Finally, the determination of rules of collision based at the same time on decompositions of movements at the level of the center of mass and on appeal to a principle of relativity constitutes a know-how at the beginning of the 18th century which can be moved closer to methods developed by D'Alembert. These three aspects try then to replace the science of D'Alembert in a context by insisting on the essential role of the collisions of body and on that of the notion of equilibrium concerning the birth of its principle.

*Keywords* : Jean Le Rond D'Alembert; Pierre Varignon; Dynamics; Equilibrium; Principle of virtual work; Collision

## Contents

|  |    |
|--|----|
| 1. Introduction : le « Principe général » de D'Alembert.....                               | 1  |
| 1.1 Le principe et ses énoncés.....  | 1  |
| 1.2 Le principe : portée philosophique et historiographie.....                             | 5  |
| 2. La statique de Pierre Varignon.....   | 9  |
| 2.1 Le « principe general » de la <i>Nouvelle Mécanique</i> .....                          | 11 |
| 2.2 Décomposition de forces et collision oblique.....                                      | 12 |
| 3. La postérité d'une méthode.....   | 14 |
| 4. Equilibre et collisions au tournant des 17 <sup>e</sup> et 18 <sup>e</sup> siècles..... | 17 |
| 4.1 L'équilibre et ses concepts chez D'Alembert.....                                       | 17 |
| 4.2 L'équilibre et ses concepts au tournant des 17 <sup>e</sup> et 18 <sup>e</sup> s.....  | 20 |
| 4.2.1 E. Mariotte et C.-F. Milliet Dechaux.....  | 20 |
| 4.2.2 « Puissances » et vitesses virtuelles au début du 18 <sup>e</sup> s...               | 26 |
| 4.3 L'équilibre pour « simplifier le langage ».....  | 29 |
| 5. Centre de masse et collisions.....  | 32 |
| 5.1 La « réduction à l'équilibre » d'Antoine Parent.....                                   | 32 |
| 5.2 Centre de masse, choc et « Principe général ».....                                     | 34 |
| 6. Conclusion.....   | 37 |

## 1. Introduction : le « Principe général » de D'Alembert

### 1.1 *Le principe et ses énoncés*

Dans son *Traité de dynamique* de 1743, Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) énonce un « problème general » visant à déterminer le « Mouvement des Corps qui se choquent » ou celui « de ceux qui se tirent par des fils ou des verges inflexibles »<sup>1</sup> :

---

<sup>1</sup> Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique, dans lequel les Loix de l'Equilibre & du Mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre possible, & démontrées d'une manière*

« Soit donné un système de Corps disposés les uns par rapport aux autres d'une manière quelconque ; & supposons qu'on imprime à chacun de ces Corps un Mouvement particulier, qu'il ne puisse suivre à cause de l'action des autres Corps, trouver le Mouvement que chaque Corps doit prendre. »<sup>2</sup>

Sa « solution » consiste en une « Méthode générale »<sup>3</sup> ou « Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque »<sup>4</sup> :

« Décomposés les Mouvements  $a, b, c$  &c. imprimés à chaque Corps, chacun en deux autres  $\alpha, \beta ; b, \beta ; c, \chi ;$  &c. qui soient tels, que si l'on n'eût imprimé aux Corps que les Mouvements  $a, b, c$  &c. ils eussent pu conserver ces Mouvements sans se nuire réciproquement ; & que si on ne leur eût imprimé que les Mouvements  $\alpha, \beta, \chi, \text{ \&c.}$  le système fut demeuré en repos ; il est clair que  $a, b, c$  seront les Mouvements que ces Corps prendront en vertu de leur action. »<sup>5</sup>

Il détermine ainsi les mouvements finaux  $a, b, c$  &c. résultant de contraintes (contacts, liaisons) en s'appuyant sur une décomposition des sollicitations initiales connues ( $a, b, c$  &c.) en ces  $a, b, c$  &c. et d'autres composantes équilibrées ( $\alpha, \beta, \chi$  &c.) ; ces dernières permettent alors la résolution du problème car « le principe de l'équilibre est un des plus essentiels de la Mécanique, & on y peut réduire tout ce qui concerne le mouvement des corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque »<sup>6</sup>, comme l'illustre l'analyse de la collision de deux corps parfaitement durs.

Avec  $M$  et  $m$  les masses de mobiles qui « se viennent choquer directement en sens contraire », puis  $A, a$  et  $V, u$ , respectivement leurs vitesses initiales et finales, D'Alembert note tout d'abord « que les vitesses  $A, a$  peuvent être regardées comme composées des vitesses  $V \text{ \& } A-V, \text{ \& } u, a-u$  ». Ensuite, d'après le « Principe général »,  $V$  et  $u$  ne se « nuisent point l'une à l'autre ; donc elles doivent être égales & de même sens, donc,  $V=u$  » ; que les corps ne puissent pas « se nuire » après le choc signifie l'impossibilité d'une nouvelle interaction et, par ailleurs, cette condition jointe à l'absence de rebond (choc inélastique) implique un mouvement commun. Enfin, les vitesses «  $A-V, a-u$  se détruisent mutuellement » : « la masse  $M$  multipliée par la vitesse  $A-V$  doit être égale à la masse  $m$  multipliée par la vitesse  $a-u$ , ou  $a+u$  (parce que la vitesse  $-u$  qui est égale à  $V$  est en sens contraire de la vitesse  $a$  & qu'ainsi  $a-u$  est réellement  $a+u$ ) ». Suit la détermination de  $V$  en fonction des vitesses initiales à partir de l'équation  $M \times A - M \times V = m \times a + m \times V$ .<sup>7</sup>

---

nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque (Paris, 1743), 49.

<sup>2</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), art. 50, 50.

<sup>3</sup> *Ibid.*, 50.

<sup>4</sup> *Ibid.*, 49. Des trois types d'actions évoquées, l'impulsion, la traction et l'attraction, l'auteur écrit ne se « borner » dans ce livre qu'aux deux premières.

<sup>5</sup> *Ibid.*, art. 50, 51.

<sup>6</sup> J. Le Rond D'Alembert, article « Equilibre », dans *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société des gens de lettres*, Tome cinquième (Paris, 1755), 873a.

<sup>7</sup> J. Le Rond D'Alembert, article « Percussion », dans *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société des gens de lettres*, Tome douzième, (Neufchâtel, 1765), 331a. Le *Traité de dynamique* présente un exposé moins détaillé que cet article. Cf. D'Alembert (note 1), art. 125, 138.

Ce principe apparaît énoncé différemment dans d'autres traités.<sup>8</sup> Ainsi, par exemple, dans ses *Recherches sur la précession des équinoxes* de 1749, D'Alembert remplace l'équilibre de  $\alpha, \beta, \chi$  &c. par celui des composantes ( $a, b, c, \&c.$ ) opposées à ( $-a, -b, -c, \&c.$ ).<sup>9</sup> Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) s'appuie sur une telle reformulation afin d'établir, dans sa *Mécanique analytique*, sa « formule générale pour le mouvement d'un système de corps, animés par des forces quelconques ».<sup>10</sup> L'application du « principe des déplacements virtuels » au système  $\alpha, \beta, \chi$  &c. conduit à ce que E. Mach nomme la « seconde forme de théorème de D'Alembert »<sup>11</sup> ; avec ces « déplacements », E. Mach se réfère ici à ce que Lagrange nomme le « *Principe des vitesses virtuelles* » :

« On doit entendre par *vitesse virtuelle*, celle qu'un corps en équilibre est disposé à recevoir, en cas que l'équilibre vienne à être rompu ; c'est-à-dire la vitesse que ce corps prendrait réellement dans le premier instant de son mouvement ; & le Principe dont il s'agit consiste en ce que les puissances sont en équilibre quand elles sont en raison inverse de leurs vitesses virtuelles, estimées suivant les directions de ces puissances. »<sup>12</sup>

Lagrange en attribue la découverte à Galilée<sup>13</sup>, note que Wallis y recourt dans son étude des machines simples<sup>14</sup>, que Descartes énonce « un Principe [...], qui revient pour le fond à celui de Galilée »<sup>15</sup> et, enfin que Jean I Bernoulli « est le premier [...], qui ait aperçu [sa] grande généralité »<sup>16</sup> ; nous reviendrons, le long de cet article, sur ce principe. Les présentations actuelles de la « méthode générale » de D'Alembert associent généralement la réécriture du principe (telle qu'elle apparaît en 1749) avec les déplacements virtuels. Ainsi, en considérant un système de masses  $m_i$  liées entre elles, sans frottements, se voyant chacune soumise à une force totale  $\vec{F}_i$  décomposable en une action extérieure  $\vec{F}_i^a$  et une force de contrainte  $\vec{f}_i$  due à la liaison, il suit  $\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$

<sup>8</sup> Sur ce point, cf. Craig G. Fraser, « J. L. Lagrange's Early Contributions to the Principles and Methods of Mechanics », dans *Calculus and Analytical Mechanics in the Age of Enlightenment*, (Brookfield, 1997), 223-225.

<sup>9</sup> J. Le Rond D'Alembert, *Recherches sur la précession des équinoxes, et sur la nutation de l'axe de la Terre, dans le système newtonien*, dans *Œuvres Complètes*, Série I, Vol. 7 (Précession et nutation (1749-1752)), édité par Michelle Chapront-Touzé et Jean Souhay (Paris, 2006). Cf. l'article 37 (« Lemme IV »), 101-103, du second chapitre de ce livre, qui contient un tel énoncé du principe, ainsi que les commentaires des éditeurs, notes 86 à 89.

<sup>10</sup> Joseph-Louis Lagrange, *Mécanique analytique* (Paris, 1788), 191-196.

<sup>11</sup> Ernst Mach, *La mécanique, exposé critique de son développement* (trad. E. Bertrand), (Paris, 1925), 321.

<sup>12</sup> J.-L. Lagrange (note 10), 8. Lagrange en donne un énoncé plus général : « si un système quelconque de tant de corps ou points que l'on veut tirés, chacun par des puissances quelconques, est en équilibre, & qu'on donne à ce système un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque point parcourt un espace infiniment petit qui exprimera sa vitesse virtuelle ; la somme des puissances, multipliées chacune par l'espace que le point où elle est appliquée, parcourt suivant la direction de cette même puissance, sera toujours égale à zero, en regardant comme positifs les petits espaces parcourus sans le sens des puissances, & comme négatifs les espaces parcourus sans un sens opposé ». *Ibid.*, 10-11.

<sup>13</sup> *Ibid.*, 8.

<sup>14</sup> *Ibid.*, 9.

<sup>15</sup> *Ibid.*

<sup>16</sup> *Ibid.*, 11.

, avec  $\vec{p}_i$  la quantité de mouvement de  $m_i$ , soit  $\vec{F}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{0}$ . Les deux premiers termes de cette dernière relation correspondent alors à des forces équilibrées et le recours au principe des vitesses virtuelles (aussi dénommé travaux virtuels) à l'ensemble du système conduit à  $\sum_i (\vec{F}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt}) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ , avec  $\delta\vec{r}_i$  les déplacements virtuels imposés à chaque corps et compatibles avec les liaisons, expression pouvant aussi s'écrire  $\sum_i (\vec{F}_i^a - \frac{d\vec{p}_i}{dt}) \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ . Or, les forces de liaisons ne travaillant pas,  $\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$  (1). Ainsi,  $\sum_i (\vec{F}_i^a - \frac{d\vec{p}_i}{dt}) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$  (2), cette relation se voyant généralement appelée le principe de D'Alembert.<sup>17</sup>

L'équation (1) correspond à la « seconde forme de théorème de D'Alembert » de E. Mach, soit à la nullité du travail des forces de liaisons ; (2) combine l'équilibre entre des « forces fictives » ou « d'inertie » ( $-\frac{d\vec{p}_i}{dt}$ ) et les « forces données » ( $\vec{F}_i^a$ )<sup>18</sup> (la version de 1749 du principe) avec des déplacements virtuels. Or, D'Alembert n'énonce pas sa « méthode » en 1743 sous les formes (1) et/ou (2), et l'exemple de collision rapporté ci-dessus témoigne qu'il ne soumet pas les quantités équilibrées  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\chi$ , &c. à un mouvement de type  $\delta\vec{r}$  ; il égale des mouvements (ou forces) opposés et non des grandeurs homogènes à des travaux virtuels.

Un passage du *Traité* rapproche cependant l'usage du principe de la formulation (1). Ainsi, D'Alembert écrit que sa démonstration, sous différentes hypothèses<sup>19</sup>, du « principe de la conservation des forces vives »<sup>20</sup>

« dépend de ce Principe, que quand des puissances se font équilibre, les vitesses des points où elles sont appliquées, estimées suivant la direction de ces puissances, sont en raison inverse de ces mêmes puissances. Ce Principe est

<sup>17</sup> C'est ainsi que Herbert Goldstein définit le principe dans son ouvrage référence *Classical mechanics* (New Delhi, 2000 (2<sup>nd</sup> éd.)), 18. L. Landau et E. Lifchitz nomment le « principe de D'Alembert » une « méthode » qui « consiste essentiellement à écrire pour chacun des corps d'un système les équations  $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{f}$ ,  $\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum \vec{r} \wedge \vec{f}$  », avec  $\vec{r}$  les rayons vecteurs des points d'application des forces,  $\vec{P}$  la quantité de mouvement du système,  $\vec{M}$  son moment cinétique, et  $\vec{f}$  l'ensemble des forces appliquées sur les corps comprenant aussi celle de « réaction » (issues des liaisons). Cf. Lev Landau et Evgueni Lifchitz, *Mécanique* (Moscou, 1982 (4<sup>ème</sup> éd.)), 188. Ces auteurs s'éloignent davantage de l'énoncé de D'Alembert que ne le fait H. Goldstein.

<sup>18</sup> Pour ces appellations, cf. Paul Appell, Samuel Dautheville, *Précis de mécanique rationnelle* (Paris, 1924 (3<sup>ème</sup> éd.)), 504. Pour l'équation (2), les auteurs notent que « la somme des travaux des forces d'inertie et des forces données est nulle », *ibid.*, 506.

<sup>19</sup> D'Alembert donne de ce principe « sinon une démonstration générale pour tous les cas, au moins les Principes suffisants pour trouver la démonstration dans chaque cas particulier » : aussi raisonne-t-il sur des corps « regardés comme des points » ou des masses finies reliés par des fils ou des verges inflexibles ou bien encore sur le choc de corps élastiques. Cf. J. Le Rond D'Alembert (note 1), art. 155-171, 169-182.

<sup>20</sup> La force vive d'un système est égale à la somme des produits des masses de chaque corps par le carré de leurs vitesses. La force vive d'un mobile vaut le double de son énergie cinétique.

reconnu depuis long-tems par les Geomètres pour le Principe fondamental de l'équilibre. »<sup>21</sup>

D'Alembert recourt donc au principe des vitesses virtuelles. En effet, sans détailler son raisonnement<sup>22</sup>, dans le cas de deux points reliés par une verge rigide soumis à des vitesses imprimées représentées par « les lignes infiniment petites AK, BD » (Figure 1), il décompose celles-ci en, respectivement, (AL, AN) et (BC, BM) où AL, BC représentent les vitesses finales (avec  $AB=LC$  la longueur de la verge) et AN, BM celles détruites ; en vertu du principe,  $A \times AN = B \times BM$ .

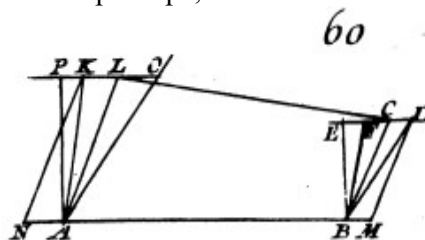


Figure 1 : D'Alembert (note 1), Planche III, Fig. 60

D'Alembert établit alors l'égalité  $A \times AL^2 + B \times BD^2 = A \times AK^2 + B \times BC^2$ , soit la conservation des forces vives, en s'appuyant sur  $A \times PL \times KL = B \times CE \times CD$ . Il obtient cette dernière grâce à  $PL = CE$  (ces quantités correspondent aux projections des vitesses finales AL et BC le long de AB) et  $A \times AN = B \times BM$  (avec  $KL = AN$  et  $CD = BM$ ). Or, cette relation s'identifie au principe des vitesses virtuelles : les mouvements perdus  $A \times KL$  et  $B \times CD$  s'équilibrent et ne travaillent donc pas suivant le déplacement  $PL (=CD)$ .<sup>23</sup>

### 1.2 Le principe : portée philosophique et historiographie

Le principe repose sur la combinaison de trois « lois générales du mouvement & de l'équilibre des Corps »<sup>24</sup> à savoir « la force d'inertie, le mouvement composé, & l'équilibre ».<sup>25</sup> D'Alembert les dénomme aussi « principes » ou « théorèmes », ce dernier vocable illustrant alors une des spécificités du *Traité* : il leur confère le statut de lois nécessaires en les démontrant par un recours au principe de raison suffisante et à partir « de la considération seule du Mouvement, envisagé de la manière la plus simple & la plus claire ».<sup>26</sup> Or, estime-t-il, « tout ce que nous voyons bien distinctement dans le Mouvement d'un Corps, c'est qu'il parcourt un certain espace, & qu'il emploie un certain temps à le parcourir »<sup>27</sup> et D'Alembert de proscrire les « forces inhérentes au Corps au Mouvement »<sup>28</sup>, qualifiées d'« êtres obscurs & métaphysiques »<sup>29</sup>, dans le

<sup>21</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), art. 172, 182.

<sup>22</sup> Pour cette démonstration, cf. C. G. Fraser, « D'Alembert's Principle : The Original Formulation and Application in Jean D'Alembert's *Traité de dynamique* (1743) (Part two) », dans C. G. Fraser (note 8), 155-158.

<sup>23</sup> *Ibid.*, 158. Cf. aussi C. G. Fraser, « J. L. Lagrange's Early Contributions to the Principles and Methods of Mechanics », dans C. G. Fraser (note 8), 222-223.

<sup>24</sup> Titre de la « Première partie » du *Traité de dynamique*. Cf. J. Le Rond D'Alembert (note 1), 3.

<sup>25</sup> *Ibid.*

<sup>26</sup> *Ibid.*, Préface, xvj. Pour un examen détaillé de ces démonstrations, cf. Alain Firode, *La dynamique de D'Alembert* (Montréal/Paris, 2001), 85-116.

<sup>27</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), Préface, xvj.

<sup>28</sup> *Ibid.*

<sup>29</sup> *Ibid.*

souci « d'applanir l'abord »<sup>30</sup> de la mécanique ; il énonce alors « avoir détourné la vûe de dessus les *causes motrices*, pour n'envisager uniquement que le Mouvement qu'elles produisent »<sup>31</sup>. Dès lors, le « Principe général » n'est pas « philosophiquement neutre »<sup>32</sup>, et « la dynamique au sens de D'Alembert [peut] ainsi laisser de côté toute question de *causalité* ».<sup>33</sup>

Par ailleurs, les trois principes conduisent « à la solution de tous les Problèmes où l'on considère le mouvement d'un Corps en tant qu'il peut être altéré par un obstacle impénétrable & mobile » ou « insurmontable »<sup>34</sup> et toute la mécanique « peut [en] être déduite ».<sup>35</sup> Ainsi, outre la clarification souhaitée, la dynamique<sup>36</sup> se voit unifiée autour d'un seul principe qui permet d'en « reculer » les limites en l'appliquant « à de nouveaux usages »<sup>37</sup>, soit de « perfectionner & d'augmenter » cette science puisque « les Géomètres [...] n'ont résolu jusqu'à présent qu'un très petit nombre de Problèmes de ce genre, & seulement dans des cas particuliers ».<sup>38</sup> Dépasant alors le cadre restreint d'une mécanique du point matériel de type newtonienne, la dynamique des corps rigides de D'Alembert ne repose plus sur des résolutions au « cas par cas » suivant les « circonstances particulières » d'un problème, comme chez ses prédécesseurs ou contemporains, mais raisonne « sur les données les plus générales du problème ».<sup>39</sup>

Selon Lagrange, D'Alembert offre donc « une méthode directe & générale pour résoudre, ou du moins pour mettre en équations tous les problèmes de Dynamique que l'on peut imaginer ».<sup>40</sup> Il note cependant que la « difficulté » de déterminer les « forces détruites » et les « loix d'équilibre entre ces forces » rend « souvent cette application embarrassante & pénible » et associe pour sa part ce principe avec celui des « vitesses virtuelles ».<sup>41</sup>

Lagrange ouvre la seconde partie de sa *Méchanique analitique* par une section intitulée « *Sur les différens Principes de la Dynamique* » qui développe une histoire de cette science. L'auteur y suggère une hypothèse concernant l'origine de la « méthode générale » de D'Alembert. Résumant les travaux de Jacques Bernoulli (1654-1705) portant que la question du centre d'oscillation de pendules composés<sup>42</sup>, il écrit que celui-ci en donne « la première solution directe & rigoureuse [...] qui mérite d'autant plus l'attention des Géomètres, qu'elle contient le germe de ce Principe de Dynamique, qui est devenu si fécond entre les mains de M. d'Alembert ».<sup>43</sup> Lagrange se réfère ici à un mémoire de Bernoulli de 1703<sup>44</sup> dans lequel les corps ne peuvent pas suivre « en

---

<sup>30</sup> *Ibid.*, Préface, iv.

<sup>31</sup> *Ibid.*, Préface, xvj.

<sup>32</sup> Cf. A. Firode (note 26), 9 et 132-134.

<sup>33</sup> Michel Paty, *D'Alembert ou la raison physico-mathématique au siècle des Lumières* (Paris, 1998), 90. Pour une analyse de cette question de la causalité chez D'Alembert, cf. A. Firode (note 26), 35-65 et Véronique Le Ru, *Jean Le Rond D'Alembert philosophe* (Paris, 1994), 77-106.

<sup>34</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), Préface, xv.

<sup>35</sup> *Ibid.*, art. 1, 3.

<sup>36</sup> D'Alembert note que ce terme « est fort usité aujourd'hui parmi les Savans, pour signifier la Science du Mouvement des Corps, qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque ». *Ibid.*, Préface, xxijj.

<sup>37</sup> *Ibid.*, Préface, iv.

<sup>38</sup> *Ibid.*, Préface, xxijj-xxiv.

<sup>39</sup> M. Paty (note 33), 93.

<sup>40</sup> J.-L. Lagrange (note 10), 179.

<sup>41</sup> *Ibid.*, 180-181.

<sup>42</sup> Il s'agit de trouver la longueur d'un pendule simple isochrone à un autre composé.

<sup>43</sup> J.-L. Lagrange (note 10), 176.

<sup>44</sup> Jacques Bernoulli, « Démonstration générale du centre de Balancement ou d'Oscillation, tirée de la nature du Levier », Lettre du 15 mars 1703, dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*.

entier » les mouvements imposés par la gravité « à cause de leur liaison » : « il [Bernoulli] conçoit les mouvemens imprimés comme composés de ceux que les corps peuvent prendre, & d'autres mouvemens qui doivent être détruits, & en vertu desquels le pendule doit demeurer en équilibre. Le problème se trouve ainsi ramené aux principes de la Statique »<sup>45</sup> ; plus particulièrement, « à l'équilibre du levier », poursuit-il quelques pages plus loin, en ajoutant qu'« il étoit réservé à M. d'Alembert d'envisager ce principe [de Bernoulli] d'une manière générale, & de lui donner toute la simplicité & la fécondité dont il pouvoit être susceptible ».<sup>46</sup>

E. Mach se fait plus affirmatif quant à cette dette contractée par D'Alembert à l'égard des méthodes développées par des prédécesseurs pour résoudre ce genre de problème.<sup>47</sup> Selon David Speiser, la solution de Bernoulli constitue le fondement de la dynamique des corps rigides dont D'Alembert s'inspire<sup>48</sup>. Pour sa part, M. Paty estime que la « découverte » du principe par D'Alembert « fut probablement occasionnée par la réflexion sur un problème particulier avec lequel il se trouvait aux prises, qui lui donna l'idée d'une propriété générale, suggérée par un rapprochement avec une situation qui se prêtait à une telle généralisation (le « pendule composé », série de pendules simples reliés entre eux par des tiges rigides ».<sup>49</sup> Enfin, Olivier Darrigol, tout en remarquant que l'origine du principe demeure inconnue, note qu'elle pourrait provenir de réflexions sur le pendule composé<sup>50</sup>.

Cette hypothèse se voit confortée par le fait que D'Alembert, après sa résolution du problème dans son *Traité* de 1743, se réfère à Jean Bernoulli (1667-1748) et Leonhard Euler (1707-1783) : il s'inscrit alors dans une tradition d'études qu'il n'ignore pas et compare sa méthode.

---

*Année M. DCC. III. Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année. Tirés des Registres de cette Académie* (Paris, 1720 (2<sup>ème</sup> éd.)), 78-84.

<sup>45</sup> J.-L. Lagrange (note 10), 176-177. Pour une analyse de ce mémoire de Bernoulli, cf. Christiane Vilain, « La question du 'centre d'oscillation' de 1703 à 1743 », *Physis*, Vol. XXXVII (2000), 444-450.

<sup>46</sup> J.-L. Lagrange (note 10), 179-180.

<sup>47</sup> E. Mach (note 11), 316-317 : « les recherches sur le centre d'oscillation, dont s'occupèrent presque tous les contemporains et les successeurs les plus marquants de Huyghens, conduisirent à des remarques simples que d'Alembert rassembla enfin en les généralisant dans le théorème qui porte son nom ».

<sup>48</sup> David Speiser, « Die Grundlegung der Dynamik des starren Körpers durch Jacob Bernoulli », dans *Der ausbau des calculus durch Leibniz und die brüder Bernoulli* (Stuttgart, 1989), 82-98.

<sup>49</sup> M. Paty (note 33), 94. L'auteur suggère aussi une autre hypothèse. Remarquant qu'avant la publication du *Traité de dynamique* en 1743, D'Alembert écrivit plusieurs mémoires (non publiés) relatifs à des problèmes de mécanique des fluides, il suppose que « sans doute l'enfoncement des corps solides dans les fluides lui aura-t-il suggéré un rapprochement avec le problème du pendule composé, lui donnant l'idée de son principe, par l'annulation des mouvements virtuels correspondants aux actions compensées en sens opposés, équivalents aux liaisons pour les solides », *ibid.*, 102. Propos semblables dans M. Paty, « Les recherches actuelles sur D'Alembert. A propos de l'édition de ses *Œuvres Complètes* », dans *Analyse et dynamique, études sur l'œuvre de D'Alembert*, édité par Alain Michel et Michel Paty (Laval, 2002), 50-51. L'auteur ne détaille cependant pas cette thèse dans chacune de ces deux références.

<sup>50</sup> Olivier Darrigol, *Worlds of flow. A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl* (Oxford, 2005), 12.

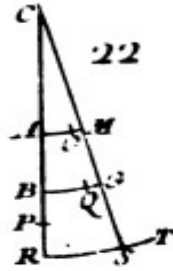


Figure 2 : D'Alembert (note 1), Planche II, Fig. 22

Sans développer sa démonstration<sup>51</sup>, D'Alembert recherche le mouvement du système comprenant des corps A, B, R etc. reliés à une verge pouvant tourner autour de C lorsque les masses se voient « imprimer » des vitesses qui leurs feraient décrire sans les liaisons « dans des tems égaux les lignes infiniment petites AO, BQ, RT » (Figure 2). Il résout alors AO, BQ, RT en (AM, -MO), (BG, -GQ) et (RS, ST), où les premières composantes correspondent aux vitesses effectives, les secondes à celles détruites par la verge. L'application du principe conduit au repos du levier soumis aux seuls mouvements  $-A \times MO$ ,  $-B \times GQ$  et  $R \times ST$ , soit à l'équation  $A \times MO \times AC + B \times GQ \times BC = R \times ST \times CR$  (3). A partir de celle-ci, de la connaissance de AO, BQ, RT (vitesses données), de celle des longueurs AC, BC, RC et en posant  $RS = x$  inconnue en fonction de laquelle D'Alembert exprime MO, GQ et ST, il détermine x la vitesse de R, ce qui permet aussi de trouver celle de A et celle B.<sup>52</sup>

Dans le Corollaire II de cette proposition, D'Alembert reformule la relation (3). Elle devient  $A \times (AM - AO) \times CA + B \times (BG - BQ) \times CB + R \times (RT - RS) \times CR$ , soit  $A \times AM \times CA + B \times BG \times CB + R \times RS \times CR = A \times AO \times CA + B \times BQ \times CB + R \times RT \times CR$  (4) ; ainsi « les puissances A.AM, B.BG, R.RS, doivent être équipollentes aux puissances A.AO, B.BQ, R.RT. »<sup>53</sup> Autrement dit, D'Alembert procède à cette application du principe précédemment évoquée (cf. 1.1 *Les énoncés du principe*) dans laquelle il équilibre des forces initiales avec des forces effectives. Par ce biais, il retrouve alors le raisonnement utilisé par Jean Bernoulli<sup>54</sup> tout en soulignant la généralité de sa propre méthode.<sup>55</sup> Il note aussi que L. Euler, dans son traitement du problème du centre d'oscillation<sup>56</sup>, s'appuie sur le fait que « les puissances R.RS, B.BG, A.AM doivent être équivalentes aux puissances R.RT, B.BQ, A.AO » tout en ajoutant qu'il « n'a point démontré ce Principe, qui, présenté de cette manière, n'est peut-être pas, en effet, si facile à démontrer. »<sup>57</sup>

<sup>51</sup> Cf. une analyse dans C. Vilain (note 45), 456-459.

<sup>52</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), art. 73, 69-70.

<sup>53</sup> *Ibid.*, art. 75, 70.

<sup>54</sup> Jean I Bernoulli, « Nouvelle Theorie du Centre d'Oscillation, contenant une Regle pour le déterminer dans les Pendules composés ou balançans non-seulement dans le vuide, mais aussi dans les liqueurs ; laquelle Regle est appuyée sur un fondement plus sûr qu'aucun qu'on ait publié jusqu'ici par rapport à cette matiere », dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année M. DCC. XIV. Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année. Tirés des Registres de cette Académie* (Paris, 1717), 208-230.

<sup>55</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), art. 75, 71. Pour une analyse de la méthode de Jean I Bernoulli, cf. C. Vilain (note 45), 448-450.

<sup>56</sup> Leonhard Euler, « De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexibilium. Methodus nova et facilis », dans *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Tomus VII. Ad Annos 1734-1735* (Petropoli, 1740), 99-121.

<sup>57</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), art. 75, 72. Pour la démonstration de L. Euler, cf. C. Vilain (note 45), 464-465. E. Mach souligne que « Hermann (*Phoronomia*, 1716) et Euler (*Comment. de l'Académie de St. Pétersbourg*, anc. série, vol. VII, 1740) ont employé le théorème sous cette forme qui



En somme, D'Alembert « simplifie » la technique de Bernoulli et « fonde » celle d'Euler.<sup>58</sup> Il reproche à ce dernier la « manière » de « présenter » une méthode qui serait selon lui déficiente en ce sens qu'elle n'en dévoile pas le caractère démonstratif. Or, l'équation (3), contrairement à (4), rend manifeste la loi de l'équilibre de quantités détruites par les liaisons, laquelle sous-tend l'énoncé du « Principe général » et contribue à sa démonstration. O. Darrigol remarque alors qu'une possible origine du principe tiendrait de cette « nouvelle philosophie du mouvement » où l'équilibre permet de déterminer l'état d'un système mécanique sans recourir à un « obscur » concept de force.<sup>59</sup> Pour sa part, C. G. Fraser juge que « D'Alembert appears to have derived the idea for his principle from the mechanics of impact, a subject which figures prominently in his discussion of the foundations of dynamics. »<sup>60</sup>

Ces deux derniers commentaires évoquant l'importance de l'équilibre et celle des collisions quant à la genèse du principe de D'Alembert constituent le point de départ de la présente étude qui vise à proposer de nouvelles hypothèses sur l'origine de cette « méthode ». Cet article n'entend pas réfuter la thèse de M. Paty (cf. note 49), ou bien encore celle couramment développée se fondant sur la mise en évidence d'une communauté de pratiques dans le traitement du problème du centre d'oscillation offert par D'Alembert et des prédécesseurs ou contemporains. Il s'agit plutôt de proposer d'autres pistes de réflexions en établissant qu'une recherche sur l'origine de ce « Principe général » doit aussi s'appuyer sur la statique de Varignon et sur l'examen des études de collisions basées sur une loi d'équilibre définie par le principe des vitesses virtuelles.

Trois axes d'analyse guident ce travail. Le premier porte sur la statique de Varignon et sur sa postérité (§§ 2 et 3). Le second dresse un panorama du rapport entre collisions et science de l'équilibre au tournant des 17<sup>e</sup> et 18<sup>e</sup> siècles afin de mieux inscrire la science de D'Alembert dans son contexte (§ 4). Le dernier (§ 5) s'intéresse à une technique requise pour établir les règles des chocs inélastiques et élastiques comparée à celle utilisée par D'Alembert.

## 2. La statique de Pierre Varignon

Selon D'Alembert, « l'ouvrage le plus étendu que nous ayons sur la *statique*, est la *nouvelle mécanique* de M. Varignon, imprimée à Paris en 1725, en deux volumes *in-4°*. Dès l'année 1687 l'auteur avoit donné un ouvrage sur ce même sujet avec le titre *projet d'une nouvelle mécanique* ». <sup>61</sup> Fontenelle (1657-1757) rapporte que le *Projet* de 1687<sup>62</sup> valut à Pierre Varignon (1654-1722) l'estime de ses pairs et une reconnaissance académique, celui-ci se voyant nommé, dès 1688, à l'Académie Royale des Sciences et au Collège Mazarin.<sup>63</sup> La publication de 1687 semble motivée par un souci de

---

ne diffère pas essentiellement de celle de D'Alembert ». Cf. E. Mach (note 11), 321. Jacob Hermann examine le mouvement du pendule composé dans sa *Phoronomia, sive de Viribus et Motibus corporum solidorum et fluidorum* (Amsterdam, 1716), 101-110. Voir C. Vilain (note 45), 450-451.

<sup>58</sup> C. Vilain (note 45), 459.

<sup>59</sup> O. Darrigol (note 50), 12-14.

<sup>60</sup> C. G. Fraser, « D'Alembert's Principle : The Original Formulation and Application in Jean D'Alembert's *Traité de dynamique* (1743) (Part one) », dans C. G. Fraser (note 8), 33.

<sup>61</sup> J. Le Rond D'Alembert, article « Statique », dans *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société des gens de lettres*, Tome quinzième, (Neufchastel, 1765), 496b

<sup>62</sup> Pierre Varignon, *Projet d'une nouvelle mécanique avec un Examen de l'opinion de M. Borelli, sur les propriétés des Poids suspendus par des Cordes* (Paris, 1687).

<sup>63</sup> Bernard Le Bovier de Fontenelle, « Eloge de M. Varignon », dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année 1722. Avec les Mémoires de Mathématiques & de Physiques pour la même Année* (Paris, 1724), 139-140 : « La nouvelle Méchanique fut reçûë de tous les Geometres avec

généralité : les études classiques des machines simples reposent sur la loi du levier, les savants s’y voyant contraints « parce que leurs principes n’avoient pas assez d’étendue pour en pouvoir démontrer les propriétés indépendamment les unes des autres ». <sup>64</sup> Varignon oppose alors Archimède (et les « autres ») à Descartes et Wallis <sup>65</sup>, jugeant les principes de ces derniers plus « étendus » et « convainquants ». Malgré tout, ils n’« éclairent » pas plus que ceux des prédécesseurs car « ces Auteurs se sont tous plus attachés à prouver la nécessité de l’équilibre qu’à montrer la manière dont il se fait ». <sup>66</sup> Varignon entend alors « chercher l’équilibre lui-même dans sa source, ou pour mieux dire ; dans sa génération ». <sup>67</sup> Une telle recherche s’opère en suivant « la voye des mouvemens composez » ou encore « le concours d’action » des « forces » ou « puissances » ; le mot « force » renvoie en 1687 soit à un simple mouvement soit implique « un effort sur », Varignon évoquant ainsi l’« impression » de la pesanteur ou, plus généralement, celle « de quelque autre force ». <sup>68</sup> Si le concept n’apparaît pas explicitement défini, figure en germe ce que cet auteur n’aura de cesse de développer par la suite : faire essentiellement de la dynamique. <sup>69</sup> Dans sa *Nouvelle Mécanique* de 1725 <sup>70</sup>, Varignon conçoit l’action d’une « puissance » sur le modèle de l’impulsion de corps durs en se référant implicitement à la force motrice imprimée de la Loi II des *Principia* de Newton (cf. *infra*, 4.2.2 « Puissances » et vitesses virtuelles au début du 18<sup>e</sup> siècle) : sa statique reposant sur « le concours d’action » semble alors assujettie à une dynamique. <sup>71</sup>

Pour autant, bien que cette circonstance soit marginale dans l’ouvrage, la pratique conjointe d’une décomposition de forces et d’une loi d’équilibre intervient dans des cas de chocs de corps durs. Si la philosophie générale de la *Nouvelle Mécanique* consiste en une réduction de la statique à une dynamique, ce livre offre aussi une possible

---

applaudissement ; & elle valut à son Auteur deux places considerables, l’une de Geometre dans cette Academie en 1688, l’autre de Professeur de Mathematiques au College Mazarin ».

<sup>64</sup> P. Varignon (note 62), Préface (non paginée). Les « principes » jusqu’à lors utilisés prouvent qu’ils ne peuvent servir « tout au plus, qu’à démontrer que *l’équilibre se trouve toujours dans le levier auquel sont appliquez deux poids qui sont entr’eux en raison réciproque des distances de leurs lignes de direction à son point d’appui* ».

<sup>65</sup> L’absence de généralité des principes, « c’est peut être ce qui a porté M. Descartes, & M. Wallis a prendre une autre route ; quoi qu’il en soit, ce n’a pas été sans succes, puisque celle qu’ils ont suivie, conduit également à la connoissance des usages de chacune de ces machines, sans être obligé de les faire dépendre l’une de l’autre ; outre qu’elle a mené M. Wallis beaucoup plus loin qu’aucun Auteur, que je sçache, n’eût encore été de ce côté-là », *ibid.*, Préface. La « dépendance » dénoncée consiste à recourir au levier pour déterminer les conditions d’équilibre dans les autres machines. Les principes de Descartes et Wallis correspondent à celui des vitesses virtuelles (cf. *supra* 1.1 *Le principe et ses énoncés*). Sur ce principe chez Descartes, cf. 4.2.1 E. Mariotte et C.-F. Milliet Dechaies ; pour Wallis, cf. John Wallis, *Mechanica : sive, De Motu, Tractacus Geometricus*, 3 vol. (Londres, 1670-1671), I, Caput II, Prop. VII à Prop. VIII, 39-41.

<sup>66</sup> P. Varignon (note 62), Préface.

<sup>67</sup> *Ibid.*, Préface. « Il faut entrer dans la génération de l’équilibre pour y voir en soi, & pour y reconnoître les propriétés que tous les autres principes ne prouvent, tout au plus, que par nécessité de conséquence ».

<sup>68</sup> *Ibid.*, Préface.

<sup>69</sup> Concernant l’application du calcul différentiel et intégral leibnizien à la dynamique newtonienne, cf. Michel Blay, *La naissance de la mécanique analytique. La science du mouvement au tournant des XVII<sup>e</sup> et XVIII<sup>e</sup> siècles* (Paris, 1992).

<sup>70</sup> Pierre Varignon, *Nouvelle Mécanique ou Statique. Dont le projet fut donné en M.DC.LXXXVI*, 2 vol. (Paris, 1725).

<sup>71</sup> Cf. E. Mach (note 11), 44 : « la statique est pour lui [Varignon] un cas particulier de la dynamique » ; il a « toujours à l’esprit le problème général de dynamique et [...] il limite volontairement sa recherche au cas d’équilibre » offrant alors une « statique dynamique ».

ouverture en direction du processus inverse<sup>72</sup>. Dans une perspective dalembertienne, la lecture proposée de la science de Varignon se porte ici sur ce second volet.

### 2.1 Le « principe general » de la Nouvelle Mécanique

Quel principe guide la statique de Varignon ? Les livres de 1687 et 1725 proposent un examen des conditions d'équilibre sur les machines simples par le biais d'un principe « principe general », identifiable au parallélogramme des forces. Varignon énonce que :

« quel que soit le nombre des forces ou des puissances quelconques, dirigées comme l'on voudra, qui agissent à la fois sur un même corps, ou ce corps ne se remuera point du tout, ou il n'ira que par un seul chemin, & suivant une ligne qui sera la même que si au lieu d'être ainsi poussé, pressé, ou tiré par toutes ces puissances à la fois, ce corps ne l'étoit suivant la même ligne, & en même sens que par une seule force ou puissance équivalente ou égale à la résultante du concours de toutes celles-là. »<sup>73</sup>

Un premier corollaire introduit l'opposition à la résultante des « puissances » soit, finalement, l'équilibre des forces, par un appel à l'« Axiome 3 »<sup>74</sup> que complète la « Définition V »<sup>75</sup> : si un corps

« n'étoit pressé, poussé ou tiré que par une seule force, un obstacle invincible, ou du moins une résistance égale à cette force, opposé à ce corps dans la direction de cette même force, l'arrêteroit (*ax. 3.*) tout court ; [...] Donc aussi un obstacle invincible, ou du moins une résistance égale à la force résultante du concours d'action de tant d'autres quelconques qu'on voudra, & dirigées comme l'on voudra, opposé dans la direction de cette force résultante au corps, sur lequel agissent toutes celles-là, l'arrêtera tout court, & soutiendra ainsi sur lui toutes ces forces ou puissances en équilibre entr'elles. »<sup>76</sup>

Varignon entend alors développer une méthode pour « mettre en équilibre entr'elles tant de forces ou de puissances quelconques qu'on voudra, qui dirigées à volonté, agissent toutes à la fois sur un même corps. »<sup>77</sup> En effet,

---

<sup>72</sup> Il ne faudrait pas lire le traité de Varignon comme un projet de réduction de la dynamique à une statique, les cas de collisions de corps n'apparaissent que marginaux dans cet ouvrage.

<sup>73</sup> P. Varignon (note 70), I, 6-7. Puisque D'Alembert fait du livre de 1725 un ouvrage référence et qu'il contient des exemples de collisions qui importent pour notre étude, nous nous appuyons sur cette édition beaucoup plus ample que celle de 1687 pour présenter les principes de la statique de Varignon.

<sup>74</sup> Dans cet axiome, Varignon énonce qu'un « un corps [...] pressé, poussé, ou tiré tout à la fois par deux forces égales, & directement opposées [...] doit rester immobile, c'est-à-dire, en repos, sans autre obstacle que la contrariété de ces forces qui se détruisent, ou s'empêchent également l'une l'autre, chacune soutenant l'autre toute entière ». *Ibid.*, Axiome III, 5.

<sup>75</sup> Cette définition stipule que « deux ou plusieurs forces sont dites *en Equilibre* entr'elles, lorsqu'agissant l'une contre l'autre, ou contre un obstacle commun, elles ne l'emportent ni l'une sur l'autre, ni sur cet obstacle ; c'est-à-dire, lorsque tout demeure en repos, nonobstant l'action de ces forces ou puissances l'une contre l'autre, ou contre l'obstacle qui les arrête, & qu'on appelle *Appui* ». *Ibid.*, Définition V, 4.

<sup>76</sup> *Ibid.*, Corollaire I, 7.

<sup>77</sup> *Ibid.*, 8.

« il n’y a plus qu’à trouver, suivant quelle ligne elles doivent s’accorder à le pousser, ou à le tirer toutes ensemble, si on veut lui opposer dans cette ligne un obstacle absolument invincible ; & avec quelle force, si dans cette ligne on ne veut lui en opposer qu’un d’une résistance égale à cette résultante du concours d’action de tout ce qu’il y en a qui agissent sur lui. »<sup>78</sup>

Réciproquement, l’équilibre requiert une telle force<sup>79</sup>, et « ce théorème & ses corollaires servent de fondement à toute la mécanique de M. Varignon. »<sup>80</sup> Sur cette base, il retrouve ainsi les propositions classiques donnant les conditions d’équilibre sur les machines simples soit, par exemple, pour le levier, la proportion inverse des poids aux longueurs des bras.<sup>81</sup>

## 2.2 Décompositions de forces et collision oblique

Varignon énonce alors, au début de son livre, sous la forme du « Lemme III », une loi de composition applicable à un corps quelconque, sans pesanteur, soumis à deux forces : EFGH « parcourra la diagonale AD du parallélogramme BC [...] par le concours d’action de ces deux puissances E, F, dans le même tems que séparément elles lui auroient fait parcourir les côtes correspondans AC, AB, de ce parallélogramme »<sup>82</sup> (Figure 3). Suivent alors trois autres constats :

– le corps « reçoit de chacune des puissances E, F, deux impressions à la fois » soit, pour la seule puissance E, « deux impressions suivant AQ, AN, dont les forces sont à cette puissance E, comme ces côtes AQ, AN du parallélogramme NQ sont à la diagonale AC »<sup>83</sup> ;

– ce que E « emploie de force, ou fait d’effort suivant AD sur ce corps EFGH, est à ce que la puissance F en fait sur lui suivant la même ligne, pour ou contre, comme AQ, est à AP »<sup>84</sup> ;

– « le surplus de force suivant AN, AM, des puissances E, F, se détruit ou s’empêche toujours mutuellement. »<sup>85</sup>

---

<sup>78</sup> *Ibid.*, 8.

<sup>79</sup> *Ibid.*, Corollaire II, 7-8.

<sup>80</sup> J. Le Rond D’Alembert, article « Composition de mouvement », dans *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société des gens de lettres*, Tome troisième (Paris, 1753), 770b et l’article « Force mouvante », *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société des gens de lettres*, Tome septième (Paris, 1757), 120a : « pour calculer le cas de l’équilibre, il suffit d’employer le principe de la composition & de la décomposition des forces. Il faut pour cela prolonger d’abord, s’il est nécessaire, les directions de deux forces quelconques, & chercher celle qui en résulte ; ensuite chercher la résultante de cette dernière & d’une troisième force, & ainsi de suite, jusqu’à ce qu’on soit arrivé à une dernière force, qui doit ou être = 0, ou au moins passer par un point fixe, pour qu’il y ait équilibre. En effet, si cette dernière force qui résulte de la réunion de toutes les autres, n’étoit pas égale à zéro, ou ne passoit pas par un point fixe dont la résistance anéantit son action, il n’y auroit pas d’équilibre, comme on le suppose, puisque cette force produiroit alors quelque mouvement. Ce principe de la réduction de toutes les forces à une seule, renferme toute la Statique, & on peut en voir l’application aux articles des différentes machines » ; D’Alembert cite Varignon quelques lignes avant ce paragraphe.

<sup>81</sup> Cf. P. Varignon (note 70), I, 305-320.

<sup>82</sup> *Ibid.*, Lemme III, 28. A correspond au centre de masse du corps. AC et AB représentent les intensités de E et F.

<sup>83</sup> *Ibid.*, 27. Le raisonnement vaut pour F avec les composantes AP, AM.

<sup>84</sup> *Ibid.*, 27-28.

<sup>85</sup> *Ibid.*, 28.

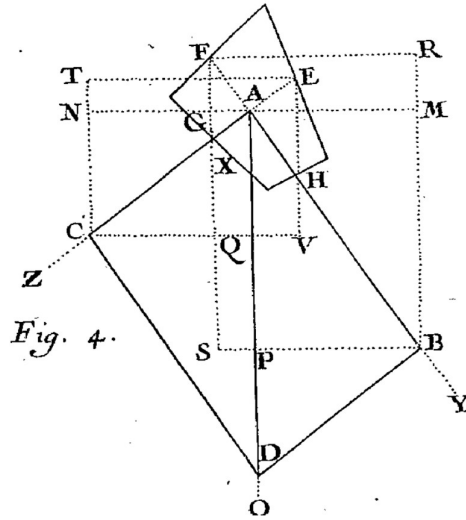


Figure 3 : P. Varignon (note 70), I, Planche 1, Fig. 4, 92

La résultante des « actions » des forces est alors la somme des composantes AQ et AP de E et F le long de AD. Le mouvement initial (par exemple, celui issu de la force E) peut ainsi se concevoir comme renfermant une puissance détruite (AN) et une autre participant au mouvement final (AQ) ; le Corollaire VII de ce lemme rend compte d'une telle pratique.

Varignon y suppose (Figure 4) « un corps dur A sans pesanteur, poussé par une seule force ou puissance E suivant ED, oblique à un plan dur & immobile GH. »<sup>86</sup> Ce mobile, rencontrant le plan en C, est « poussé [...] de même que s'il l'étoit par le concours de deux puissances ou forces dirigées suivant les côtes AC, AB, du parallélogramme rectangle BC, lesquelles fussent à la puissance E comme ces côtes sont à la diagonale AD de ce parallélogramme. »<sup>87</sup> Directement opposé à la force suivant AC, le « plan [...] recevrait & soutiendrait (Ax. 3.) tout le coup [de celle-ci], sans en rien recevoir ni soutenir de la seconde. » Varignon conclut que, d'une part, le corps « poussé » par la force E suivant AD frappe « le plan GH d'une force qui seroit à celle-là, comme AC à AD » et, d'autre part, que le mobile « couleroit après cela de C vers H suivant CH de la force qui lui resteroit seule & toute entière suivant AB, laquelle seroit à la force E, comme AB, ou CD est à AD. »<sup>88</sup> La réaction AC du plan de mur joue ici le rôle de la force AM du Lemme III (cf. *supra*) et « détruit » la composante orthogonale du mouvement incident.

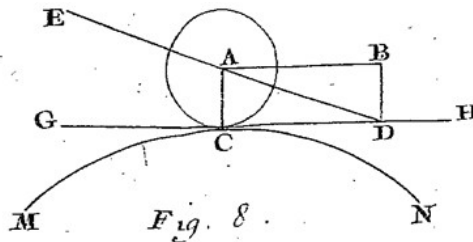


Figure 4 : P. Varignon (note 70), I, Planche 1, Fig. 8, 92

<sup>86</sup> *Ibid.*, Corollaire VII, 35.

<sup>87</sup> *Ibid.*

<sup>88</sup> *Ibid.*

Le Corollaire VIII traite d'un choc normal à un plan : pour qu'un corps « poussé ou tiré » demeure au repos sur la surface qu'il percute, « il faut qu'il le soit suivant la perpendiculaire à ce plan en un point où il le touche » et, réciproquement, subissant cette poussée ou traction perpendiculairement au plan, il « doit (*Ax. 3.*) demeurer au repos, n'ayant (*Hyp.*) que cette impression ou force perpendiculaire, à laquelle la force invincible du plan est alors directement opposée. »<sup>89</sup>

Dans ces deux cas, Varignon recourt à l'Axiome III qui stipule qu'un corps soumis à des forces « égales, & directement opposées », donc qui « se détruisent », reste « en repos », celles-ci étant dites en « équilibre ».<sup>90</sup> Dès lors, l'issue d'une collision oblique repose sur une décomposition du mouvement initial qui renferme à la fois le mouvement final et celui que l'obstacle équilibre.

### 3. La postérité d'une méthode

Une analyse semblable de ces deux chocs apparaît chez d'autres auteurs inspirés par Varignon. Ainsi, en 1722, Jean-Jacques Dortous de Mairan (1678-1771) s'appuie sur ce Corollaire VIII pour déterminer l'issue d'une collision sous les hypothèses du Corollaire VII : il équilibre alors la composante orthogonale d'une sphère percutant un plan avec la réaction de cette surface. Il évoque des « Elémens de Statique » pour justifier ses décompositions de forces, or celles-ci ne deviennent vraiment systématiques dans cette science qu'avec Varignon.<sup>91</sup> L'académicien Joseph Privat de Molières (1677-1742) en 1734<sup>92</sup>, les pères Thomas Le Seur (1703-1770) et François Jacquier (1711-1788) dans leurs commentaires des *Principia* de Newton de 1739<sup>93</sup> et Jean-François Trabaud en 1741<sup>94</sup> reconduisent ces mêmes exemples ainsi que les méthodes développées par Varignon.

<sup>89</sup> *Ibid.*, Corollaire VIII, 35-36.

<sup>90</sup> *Ibid.*, cf. Axiome III, 5 et Définition V, 4 (cf. *supra* notes 74 et 75).

<sup>91</sup> Jean-Jacques Dortous de Mairan, « Recherches physico-mathématiques sur la reflexion des corps », dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année 1722. Avec les Memoires de Mathematiques et de Phisique, pour la même Année* (Paris, 1724), 8-10. B. Le Bovier de Fontenelle signe l'approbation à la publication de la *Nouvelle Mécanique* de Varignon après examen du livre par, entre autres, J.-J. Dortous de Mairan (Cf. *Registres des Procès Verbaux de l'Académie Royale des Sciences*, séance du 6 décembre 1724, tome 43, f°357). Notons, par ailleurs, que le volume de l'année 1722 de l'*Histoire de l'Académie* est édité en 1724.

<sup>92</sup> Joseph Privat de Molières, *Leçons de Phisique, Concernant les Elémens de la Phisique, déterminés par les seules Loix des Mécaniques. Expliquées au Collège Royal de France*, 4 vol. (Paris, 1734-1739), I, Proposition XIV, 60-64 (choc direct) et Proposition XV, 64-76 (choc oblique). Molières ne mentionne pas Varignon.

<sup>93</sup> Thomas Le Seur et François Jacquier, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. Auctore Isaaco Newtono. Perpetuis Commentariis illustrata*, 3 vol. (Genève, 1739-1742), I, note 51, 31. Les auteurs évoquent explicitement la mécanique de Varignon (*ibid.*, note 49, 30). Ils donnent aussi un petit précis de statique basée sur des compositions et résolutions de forces (*ibid.*, note 41-44, 26-27) en invitant à consulter W. J. s'Gravesande (*ibid.*, note 44, 27). Ce dernier étudie l'équilibre de trois puissances et les relations entre ces dernières et les sinus des angles du triangle qu'elles forment suivant la méthode développée par Varignon en 1687, cf. Willem Jacob's Gravesande, *Physices elementa mathematica, experimentatis confirmata. Sive introductio ad philosophiam newtonianam*, 2 vol. (Leyde, 1725 (2<sup>nd</sup>e éd.)), I, 49-50 ; cf. P. Varignon (note 62), 7-14 pour cette relation et son application aux poids suspendus par des cordes. En 1742, s'Gravesande écrit à propos du « triangle de *Varignon* » avoir considéré « dans les Editions précédentes [...] un point en repos, tiré par trois puissances, & donné la démonstration de *Varignon* (16) ». Cf. W. J. 's Gravesande, *Elemens de physique demontrez mathematiquement et confirmez par des experiences ; ou introduction a la philosophie newtonienne*, 2 vol., (Leyde, 1746 (trad. de la 3<sup>ème</sup> éd. de 1742)), I, xx-xxi. La note (16) renvoie à « Projet d'une Nouvelle Mechan. Lemme 3. & prob. p. 23 ».

<sup>94</sup> Jean-François Trabaud, *Principes sur le mouvement et l'équilibre, pour servir d'introduction aux Mécaniques & à la Phisique* (Paris, 1741), art. 173-179, 68-69. Trabaud cite de nombreuses fois la

A l'exception de J.-J. Dortous de Mairan, ces auteurs écrivent des traités généraux de mécanique et proposent la séquence de rédaction suivante : 1° composition, décomposition et équilibre de forces<sup>95</sup> ; 2° chocs direct et oblique avec, pour ce dernier, la résolution en deux composantes, une détruite et l'autre égalant le mouvement final ; 3° mouvement d'un corps sur des plans contigus.<sup>96</sup> Cette dernière étude apparaît chez P. Varignon dans des mémoires de 1693 et 1704 : il entend apporter un correctif à Galilée qui « a insinué » que « la vitesse d'un corps qui passe d'un plan à un autre, [est] la même au concours de ces plans suivant la direction de l'un & de l'autre ». <sup>97</sup> P. Varignon, le premier, dès 1693, récuse cette affirmation.<sup>98</sup> Revenant sur ce sujet en 1704 il établit, en assimilant une courbe à un polygone d'un nombre infini de côtés, que chaque angle provoque une perte de vitesse du deuxième ordre par rapport à la vitesse finie du mobile. Malgré tout, la perte n'excède pas un infiniment petit du premier ordre pour toute la courbe et Varignon en conclut que celle-ci « n'apportera par sa courbure aucun obstacle à la proportion de la vitesse de ce corps »<sup>99</sup> ; ainsi, à chaque instant, le mouvement respecte la loi de chute libre (des vitesses proportionnelles aux racines des hauteurs de chute). Fontenelle note alors que « le grand principe que M. Varignon emploie, c'est celui des Mouvements composés, sur lequel il a autrefois fondé toute sa Mécanique » : à chaque discontinuité, le corps conservant la direction du plan précédant percute obliquement le suivant, son mouvement se composant ainsi « de deux autres [...] ; l'un perpendiculaire, & l'autre parallèle » à cette nouvelle surface, ce premier étant détruit.<sup>100</sup> Ce type d'étude repose donc sur le Corollaire VII de la *Nouvelle Mécanique*. J. Privat de Molières, T. Le Sueur et F. Jacquier et J.-F. Traubaud reconduisent la méthode et les conclusions de Varignon (cf. *supra* note 96) ; il en est de même pour la Marquise du Châtelet.<sup>101</sup>

---

« nouvelle Mécanique » de Varignon, dans laquelle ce dernier « déduit les propriétés de toutes les machines simples ou élémentaires, en leur appliquant immédiatement le principe des mouvements composés », *ibid.*, art. 84, 324.

<sup>95</sup> J. Privat de Molières (note 92), I, Proposition V à Proposition XII, 21-55 ; T. Le Sueur et F. Jacquier (note 93), notes 33 à 44, 24-27 ; J.-F. Traubaud (note 94), art. 152-201, 59-78.

<sup>96</sup> J. Privat de Molières (note 92), Proposition I, 77-86 ; T. Le Sueur et F. Jacquier (note 93), note 83, 47 ; J.-F. Traubaud (note 94), art. 186-199, 193-194.

<sup>97</sup> P. Varignon, « Des poids qui tombent ou qui montent le long de plusieurs plans contigus », 31 décembre 1693, dans *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. Depuis 1666 jusqu'à 1699*. Tome X (Paris, 1730), 440. Cf. Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche interno a due nuove scienze*, in *Le opere di Galileo Galilei*, 20 vol. (Firenze, 1890-1909), VIII, Theorema X, 228-229.

<sup>98</sup> B. le Bovier de Fontenelle, « Sur les vitesses des corps mus suivant des courbes », dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année MDCCIV. Avec les Mémoires de Mathématiques & de Physique, pour la même Année. Tirés des Registres de cette Académie* (Paris, 1745), 105 : « M. Varignon démontra en 1693 que cette proportion de Galilée [appliquée aux plans contigus], admise jusque-là par tous les Géomètres, étoit fautive ». Que Varignon, le premier, corrige ce théorème galiléen, tel est le témoignage apporté par Gabrielle Emilie Le Tonnelier de Breteuil, Marquise du Châtelet, *Institutions physiques* (Paris, 1742), note du § 437, 372-375.

<sup>99</sup> Cf. P. Varignon, « Manière de discerner les vitesses des corps mûs en lignes courbes », dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année MDCCIV. Avec les Mémoires de Mathématiques & de Physique, pour la même Année. Tirés des Registres de cette Académie* (Paris, 1745), 293-294.

<sup>100</sup> B. Le Bovier de Fontenelle (note 98), 106-107.

<sup>101</sup> 's Gravesande affirme que le mouvement sur les plans contigus respecte la loi de chute libre. Cf. Willem Jacob's Gravesande, *Physices elementa mathematica, experimentatis confirmata. Sive introductio ad philosophiam newtonianam*, 2 vol. (Leyde, 1725 (2<sup>nd</sup>e éd.)), 63-64. En 1740, la Marquise du Châtelet soutient une thèse identique. Cf. Gabrielle Emilie Le Tonnelier de Breteuil, Marquise du Châtelet, *Institutions de physique* (Paris, 1740), § 438 et § 439, 351-352. Dans la seconde édition de ce livre, elle revient longuement sur cette conclusion en précisant que la lecture du Mémoire de 1693 de Varignon est l'élément déterminant sa correction : à chaque discontinuité la perte de vitesse correspond à un infiniment petit du deuxième ordre. Cf. Marquise du Châtelet (note 98), § 437 à § 439, 367-375.

Or, la séquence de rédaction évoquée ci-dessus figure aussi dans la première partie du *Traité de dynamique* : D'Alembert traite « Du Mouvement composé » au chapitre II<sup>102</sup>, les chocs directs et obliques<sup>103</sup> puis le mouvement le long des surfaces courbes<sup>104</sup> figurant au chapitre III, soit immédiatement avant la section intitulée « De l'équilibre »<sup>105</sup> qui précède l'énoncé du « Principe général ».

D'Alembert connaît les écrits des différents auteurs précédemment mentionnés. Ainsi, dans son *Traité*, il évoque la démonstration de la loi du levier de la *Nouvelle Mécanique* de P. Varignon.<sup>106</sup> Il renvoie aussi au livre de J.-F. Traubaud « pour le détail des différentes Machines dont on fait mention d'ordinaire dans la Statique ».<sup>107</sup> Par ailleurs, alors jeune académicien, il se réfère au mémoire de Dortous de Mairan de 1722.<sup>108</sup> Durant ses années de formation, D'Alembert livre un commentaire de l'édition des *Principia* des pères T. Le Seur et F. Jacquier, manuscrit figurant à la Bibliothèque de l'Institut.<sup>109</sup> Enfin, dans l'article *Mouvement* de l'*Encyclopédie*, le livre de la Marquise du Châtelet figure parmi les ouvrages que D'Alembert invite à consulter.<sup>110</sup> Par ailleurs, concernant Varignon, quarante articles de l'*Encyclopédie* se réfèrent explicitement à cet auteur et parmi les trente quatre que D'Alembert signe ou cosigne, dix-huit portent sur la « Mécanique » regroupant la « statique », la « dynamique » ou l'« hydraulique » suivant les désignants utilisés.<sup>111</sup> Parmi ceux-ci, l'entrée « Mécanique » reprend une partie du contenu de la « Préface » du *Traité de dynamique* dans laquelle on peut lire l'extrait suivant :

« Comme le Mouvement d'un Corps qui change de direction, peut être regardé comme composé du Mouvement qu'il avoit d'abord & d'un nouveau Mouvement qu'il a reçu, de même le Mouvement que le Corps avoit d'abord peut être regardé comme composé du nouveau Mouvement qu'il a pris, & d'un autre qu'il a perdu. Delà il s'ensuit que les loix du Mouvement changé par quelques obstacles que ce

---

<sup>102</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), art. 21 à 26, 22-30.

<sup>103</sup> *Ibid.*, art. 29, 32 (choc direct) et art. 30, 32-33 (choc oblique).

<sup>104</sup> *Ibid.*, art. 31 à 37, 33-37. Sans détailler le raisonnement de D'Alembert, notons qu'il critique la manière dont « on démontre d'ordinaire [...] que la perte totale [de vitesse] n'est qu'infiniment petite du premier [ordre] » (*ibid.*, art. 37, 36) ; il refuse d'assimiler la courbe à un polygone et réfute cette conclusion (le mobile ne perd pas de vitesse).

<sup>105</sup> *Ibid.*, art. 38 à 49, 37-48.

<sup>106</sup> *Ibid.*, art. 47, 46-47.

<sup>107</sup> *Ibid.*, art. 49, 48 : « je me contente, n'ayant là-dessus rien de nouveau à dire, de renvoyer mes Lecteurs aux Livres qui en traitent, & particulièrement à l'Ouvrage de M. Traubaud qui a paru l'année dernière, & qui a pour titre : *Principes sur le Mouvement & l'Equilibre* ; Ouvrage où cette matière & plusieurs autres sont traitées avec exactitudes & avec clartés ».

<sup>108</sup> Jean Le Rond D'Alembert, « Du mouvement d'un corps qui s'enfonce dans un fluide ou essai d'une nouvelle théorie de la Réfraction des corps solides », texte lu les 12, 15, 19, 22, 26, 29 juillet et 2 août 1741, dans *Registres des Procès-Verbaux de l'Académie Royale des Sciences*. Tome 60, 369 : concernant les différentes théories relatives à la réfraction, D'Alembert estime « que nous avons la-dessus d'excellents morceaux, entre autres deux mémoires de Mr de Mairan, imprimées parmi ceux de l'Académie en 1722 & 1723 ».

<sup>109</sup> Manuscrits 2033 (fol. 23r<sup>o</sup> à 30v<sup>o</sup>) et 2467 (fol. 235r<sup>o</sup> au fol. 242v<sup>o</sup>) intitulés « Remarques sur quelques endroits des Principes de Newton ». Pour un examen de ces documents, voir François De Gandt, « Les études newtoniennes du jeune D'Alembert », *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, 38 (2005), 177-190.

<sup>110</sup> J. Le Rond D'Alembert, article « Mouvement », dans *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société des gens de lettres*. Tome dixième (Neufchatel, 1765), 840b : « on peut lire les chapitres xj. & xij. des *Institutions physiques* de madame du Châtelet, dont nous avons extrait une partie de cet article ».

<sup>111</sup> Cf. Christophe Schmit, « Les articles de mécanique de l'Encyclopédie, ou D'Alembert lecteur de Varignon », *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, 46 (2011), 169-199.



puisse être, dépendent uniquement des loix du Mouvement détruit par ces mêmes obstacles. Car il est évident qu'il suffit de décomposer le Mouvement qu'avoit le Corps avant la rencontre de l'obstacle, en deux autres Mouvements, tels, que l'obstacle ne nuise point à l'un, & qu'il anéantisse l'autre. *Par-là, on peut nonseulement démontrer les loix du Mouvement changé par des obstacles insurmontables, les seules qu'on ait trouvées jusqu'à présent par cette Méthode ; on peut encore déterminer dans quel cas le Mouvement est détruit par ces mêmes obstacles. A l'égard des loix du Mouvement changé par des obstacles qui ne sont pas insurmontables en eux-mêmes, il est clair par la même raison, qu'en général il ne faut pour déterminer ces loix, qu'avoir bien constaté celles de l'équilibre.* »<sup>112</sup>

La « Méthode » à laquelle D'Alembert se réfère, d'après le résumé qu'il en donne, correspond à son principe : il reconnaît ainsi, par cette phrase en italiques, l'usage de ce dernier lors de collisions obliques contre des « obstacles insurmontables » avant l'édition du *Traité* de 1743. Un tel témoignage suggère alors quelle importance la statique de Varignon, s'appuyant sur ces décompositions de forces et semblant influencer différents auteurs dans la période 1720-1740, peut avoir dans la genèse du « Principe général ».

#### 4. Equilibre et collisions au tournant des 17<sup>ème</sup> et 18<sup>ème</sup> siècles

La présente section s'attache à la notion d'équilibre et aux concepts qu'elle mobilise au tournant des XVII<sup>e</sup> et XVIII<sup>e</sup> siècles. Elle vise à dévoiler des identités conceptuelles et méthodologiques entre des savants de cette période et D'Alembert afin de mieux ancrer le savoir et le savoir-faire de celui-ci dans un contexte. Il s'agit finalement de s'interroger sur les raisons pour lesquelles la collision mobilise la statique et de quelle manière ; le principe des vitesses virtuelles semble tout à la fois pourvoyeur de concepts et justifier ce recours à l'équilibre lors du choc. Cette approche repose sur deux sous-parties abordant les définitions de l'équilibre, des « puissances » etc. dans les œuvres de D'Alembert puis dans celles de prédécesseurs et contemporains.

##### 4.1 L'équilibre et ses concepts chez D'Alembert

Dans son *Traité de dynamique*, D'Alembert établit la « loi générale de l'équilibre des Corps »<sup>113</sup> sous la forme d'un théorème impliquant une collision de deux mobiles indéformables :

« Si deux Corps dont les vitesses sont dans les raisons inverses de leurs masses, ont des directions opposées, de telle manière que l'un ne puisse se mouvoir sans déplacer l'autre, il y aura équilibre entre ces deux Corps. »<sup>114</sup>

Trois autres passages du *Traité* évoquent une telle loi :

« deux puissances égales & directement opposées se font équilibre »<sup>115</sup> ;

---

<sup>112</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), Préface, xiiij-xiv. Nous mettons ici en italiques une phrase qui ne figure pas comme telle dans cette citation.

<sup>113</sup> *Ibid.*, Préface, xiv.

<sup>114</sup> *Ibid.*, art. 39 p. 37.

<sup>115</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), art. 43 p. 42.

« tous les Geomètres conviennent, que deux Corps dont les directions sont opposées, se font équilibre quand leurs masses sont en raison inverse des vitesses avec lesquelles ils tendent à se mouvoir »<sup>116</sup> ;

« tout le monde convient qu'il y a équilibre entre deux Corps quand les produits de leurs masses par leurs vitesses virtuelles, c'est-à-dire par les vitesses avec lesquelles ils tendent à se mouvoir, sont égaux de part & d'autre. Donc dans l'équilibre, le produit de la masse par la vitesse, ou, ce qui est la même chose, la quantité de Mouvement peut représenter la force. »<sup>117</sup>

Deux articles de l'*Encyclopédie* apportent des compléments terminologiques concernant les quantités dites équilibrées. Ainsi, à l'entrée « Equilibre », D'Alembert précise que « pour que deux corps ou deux forces se fassent *équilibre*, il faut que ces forces soient égales, & qu'elles soient directement opposées l'une à l'autre », l'équilibre entre deux mobiles s'obtenant « lorsque leurs directions sont exactement opposées, & que leurs masses sont entr'elles en raison inverse des vitesses avec lesquelles ils tendent à se mouvoir » ; il évoque, quelques lignes plus loin, des « vitesses *de tendance* »<sup>118</sup>. Dans l'article « Force », il note que « M. Leibnitz convient que la *force* morte est comme le produit de la masse par la vitesse *virtuelle*, c'est-à-dire avec laquelle le corps tend à se mouvoir, suivant l'opinion commune. Ainsi, pour que deux corps qui se choquent ou qui se tirent directement, se fassent équilibre, il faut que le produit de la masse par la vitesse *virtuelle* soit le même de part & d'autre. Or en ce cas, la *force* de chacun de ces deux corps est une *force* morte, puisqu'elle est arrêtée tout-à-la-fois & comme en son entier par une *force* contraire. Donc dans ce cas, le produit de la masse par la vitesse doit représenter la *force*. »<sup>119</sup>

Fidèle à sa critique des forces (cf. *supra* 1.2 *Le principe : portée philosophique et historiographie*), D'Alembert définit les puissances par les effets qu'elles provoquent. Celles-ci agissent les unes sur les autres par l'entremise des corps qu'elles tendent à mouvoir et, leur action « n'est autre chose que l'action même des Corps animés par les vitesses qu'elles leur donnent » ; dès lors, « on ne doit donc entendre par l'action des puissances, & par le terme même de puissance [...] que le produit d'un Corps par sa vitesse ou par sa force accélératrice. »<sup>120</sup>

Par ailleurs, se fondant sur le caractère continu ou discontinu de l'action, D'Alembert introduit deux types de « forces mortes » venant spécifier les sens attachés aux « forces » et « vitesses *de tendances* » des citations précédentes.<sup>121</sup> Ainsi, les « unes cessent d'exister dès que leur effet est arrêté », cas illustré par la collision de corps durs de même quantité mouvement, et les autres « périssent & renaissent à chaque instant »,

---

<sup>116</sup> *Ibid.*, Préface, xiv.

<sup>117</sup> *Ibid.*, Préface, xix.

<sup>118</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 6), 873a

<sup>119</sup> J. Le Rond D'Alembert, article « Force », dans *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société des gens de lettres*, Tome septième (Paris, 1757), 112b-113a.

<sup>120</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), art. 43, 42.

<sup>121</sup> L'article « Force » contient des « réflexions sur les forces mortes, & leurs différentes especes » guidées par des lectures des écrits de Leibniz et le Mémoire de 1726 de Jean I Bernoulli (voir *infra*). Cf. J. Le Rond D'Alembert (note 119), 116b. D'Alembert reproduit la définition de la force morte de Leibniz : « Supposons, dit M. Leibnitz, un corps pesant appuyé sur un plan horizontal. Ce Corps fait un effort pour descendre ; & cet effort est continuellement arrêté par la résistance du plan ; de sorte qu'il se réduit à une simple tendance au mouvement. M. Leibnitz appelle cette force & les autres de même nature, *forces mortes* », *ibid.*, 112b.

comportement de la pesanteur et des ressorts ; sans obstacle, les premières produisent une « vitesse finie », alors que les secondes, correspondant aux « *forces accélératrices* ou *retardatrices* »<sup>122</sup>, ne génèrent « d'abord qu'une vitesse infiniment petite » avant d'exercer « leur plein & entier effet. »<sup>123</sup> Ces deux types de « forces mortes », qui englobent tous les types d'actions possibles (impulsions, accélérations), s'identifient alors aux « puissances ». L'équilibre résulte ainsi d'un antagonisme de « forces mortes », les « vitesses *de tendances* » des mobiles se dénommant aussi « vitesses virtuelles ».

La puissance, la force morte et le produit d'une masse par une vitesse virtuelle apparaissent comme synonymes. La « quantité de Mouvement » renvoie aussi au « moment ». D'une manière générale, ce dernier correspond à la « quantité » ou « grandeur » du mouvement et s'estime par la « quantité de matière » ou la « masse ou [le] poids » et « la longueur de la ligne que le mobile décrit » ; une égalité de moments survient lorsque sur un levier équilibré les corps décrivent « des lignes en raison réciproque de leur masse. »<sup>124</sup> L'article « Moment » introduit les « quantités de matière » et les « vitesses » des corps.<sup>125</sup>

Cet exemple du levier apparaît aussi dans l'article « Mécanique ». L'auteur note que la configuration dans laquelle des « corps ou leurs masses, sont en raison réciproques de leurs distances de l'appui », soit en raison réciproque des « lignes ou arcs de cercle » parcourus en temps égaux, confère d'égales « quantités de mouvement » ou des « momens » égaux. Il poursuit en introduisant les puissances : « si l'on fait ensorte que la puissance ou la force, ne puisse agir sur la résistance ou le poids, ou les vaincre actuellement sans que dans cette action les vitesses de la puissance & du poids soient réciproques à leur masse, alors le mouvement deviendra absolument impossible. »<sup>126</sup> L'évocation des « vitesses de la puissance » suggérerait une application du principe des vitesses virtuelles mais celui-ci se voit substitué par la définition de l'équilibre requérant l'égalité de quantités de mouvement. En somme, le « moment » souffre d'une difficulté dimensionnelle, l'équilibre sur le levier implique ici des puissances identiques là où le lecteur s'attend à une combinaison de celles-ci avec leurs déplacements virtuelles.

Cette difficulté apparaît chez Etienne Bézout (1730-1783) et Charles Bossut (1730-1814), disciples de D'Alembert, ou bien encore chez J.-F. Traubaud en 1741.<sup>127</sup>

---

<sup>122</sup> *Ibid.*, 116b : « les forces mortes [...] deviennent des forces accélératrices ou retardatrices, lorsqu'elles sont en pleine liberté de s'exercer ; car leur action continuée, ou accélère le mouvement, ou le retarde, si elle agit en sens contraires ».

<sup>123</sup> *Ibid.*

<sup>124</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 110), 834a-834b.

<sup>125</sup> J. Le Rond D'Alembert, article « Moment », dans *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société des gens de lettres*. Tome dixième (Neufchatel, 1765), 633b.

<sup>126</sup> J. Le Rond D'Alembert, article « Mécanique », dans *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société des gens de lettres*. Tome dixième (Neufchatel, 1765), 223a-223b.

<sup>127</sup> Sur le recours à une quantité de mouvement (produit masse-vitesse) dans l'explication de l'équilibre sur une machine par E. Bézout et C. Bossut, cf. Thomas L. Hankins, *Jean D'Alembert and the Enlightenment* (Oxford, 1970), 203-204. De telles remarques valent pour J.-F. Traubaud. Ce dernier remarque que lorsque deux poids suivent la proportion inverse des longueurs des bras de levier, « ils tendent à être mûs avec des quantitez égales de mouvement ». Les vitesses sont comme les arcs décrits par les extrémités des bras et dans le même rapport que leurs longueurs, ainsi elles « sont entr'elles réciproquement comme les poids ou leurs masses ; donc les quantitez de mouvement sont égales », voir J.-F. Traubaud (note 94), art. 19, 293. Il note encore que les poids « sont sollicités à prendre des quantitez égales de mouvement, ou tendent à être mûs avec des forces égales » (*ibid.*, art. 32, 300) ; que « puisque

T. L. Hankins évoque alors une « confusion » entre travail et quantité de mouvement.<sup>128</sup> Sans discuter la pertinence du terme, il convient cependant de noter que D'Alembert, dans le *Traité de dynamique*, énonce une « Loi générale de l'équilibre » impliquant des « puissances [...] entr'elles réciproquement comme les vitesses, estimées suivant la direction de ces puissances », loi dont « dépend la démonstration de la conservation des forces vives »<sup>129</sup>. Or, l'examen de cette dernière révèle que D'Alembert se réfère ici au principe des vitesses virtuelles (cf. *supra*, 1.1 *Le principe et ses énoncés*) ; cette « confusion » n'apparaît donc pas si inéluctable dans le *Traité de dynamique*.<sup>130</sup>

Il existe ainsi deux lois d'équilibre dans ce livre. Une perspective historique plus ample suggère que si « confusion » il y a, celle-ci n'est pas spécifique à D'Alembert. Pour des auteurs de la seconde moitié du 17<sup>e</sup> siècle, l'identité des concepts mobilisés lors de l'étude des machines simples ou lors des chocs légitime que ceux-ci soit du ressort d'une science de l'équilibre. La dynamique de D'Alembert s'enracine ainsi dans une pratique au sein de laquelle la détermination des règles de collision procède d'une application du principe des vitesses virtuelles : celui-ci justifie l'évocation d'un équilibre et définit ce que D'Alembert nomme puissances, moments ou forces mortes. Ce qui suit examine cette extension du domaine d'application d'un principe statique à la percussion.

#### 4.2 L'équilibre et ses concepts au tournant des 17<sup>e</sup> et 18<sup>e</sup> siècles

##### 4.2.1 E. Mariotte et C.-F. Milliet Dechales

Dans différents traités, les pères Edme Mariotte (1620-1684) et Claude-François Milliet Dechales (1621-1678) énoncent une loi de l'équilibre impliquant deux mobiles de même quantité de mouvement. L'examen de tels travaux informe sur les origines de cette pratique.

Selon Mariotte, dans la Règle II de son *Traité du mouvement des eaux*, si deux corps « sans ressort de même matière » se choquent « horizontalement & directement » avec « leurs vitesses [...] réciproques à leurs grosseurs, au moment du choc ils feront équilibre »<sup>131</sup> ; ou bien encore, lors d'un choc inélastique impliquant deux mouvements contraires et égaux, les mobiles « s'arrêteront l'un l'autre, & demeureront sans mouvement », une inégalité des mouvements entraînant un mouvement commun<sup>132</sup>, ce

---

les quantités de mouvement sont égales, les vitesses sont dans la raison réciproque des masses », ou que « les poids sont dans la raison des masses » (*ibid.*, art. 33, 300).

<sup>128</sup> T. L. Hankins (note 127), 203-204.

<sup>129</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), art. 49, 47.

<sup>130</sup> T. L. Hankins (note 127), 203-204 : « D'Alembert was particularly vulnerable, because his mechanics of hard-body impact and his denial of forces led him to measure all mechanical effects by change of momentum-even in statics where the momentum could only be 'virtual'. The result was an almost inevitable confusion between work and momentum ».

<sup>131</sup> Edme Mariotte, *Traité du mouvement des eaux & des autres corps fluides* (Paris, 1686), Règle II, 76. Cette « grosseur » s'identifie à une quantité de matière, Mariotte précisant que des corps d'une même matière « ont leurs poids proportionnés aux quantités de leurs matières » et utilisant dans cette Règle II le poids des corps, *ibid.* Par pesanteur d'un corps, Mariotte entend « son volume, avec une certaine solidité ou condensation des parties de sa matière, qui est vray-semblablement la cause de sa pesanteur » ; il note que « l'on appellera tousiours la quantité de mouvement d'un corps, le produit de son poids par sa vitesse, soit qu'il aille de haut en bas, ou de bas en haut, ou horizontalement, &c. », cf. E. Mariotte, *Traité de la percussion ou chocq des corps. Dans lequel les principales Regle du mouvement, contraires à celles que M<sup>r</sup> DESCARTES, ou quelques autres Modernes ont voulu établir, sont démontrées par leur veritables Causes* (Paris, 1673), Proposition IV, 33-34.

<sup>132</sup> E. Mariotte, *Traité de la percussion ou chocq des corps. Dans lequel les principales Regle du mouvement, contraires à celles que M<sup>r</sup> DESCARTES, ou quelques autres Modernes ont voulu établir, sont démontrées par leur veritables Causes* (Paris, 1673), Proposition VI, 38.

qui est « presque la mesme chose » que ce qui se produit dans la science des machines.<sup>133</sup> Les règles des collisions élastiques s'obtiennent par l'intermédiaire des collisions inélastiques : les corps allant conjointement, Mariotte fait jouer le « ressort » de chaque mobile qui restitue des vitesses de rejaillissement en proportion inverses aux poids des corps, Mariotte notant dans cette circonstance qu'il se fait à nouveau « une espèce d'équilibre. »<sup>134</sup>

Ce « presque la même chose » suggère que la science du choc s'élabore par analogie avec celle des machines. Pourtant, le rôle que Mariotte fait jouer au principe de l'équilibre tiré de la statique dans la collision laisse apparaître une identité de concepts d'une science à l'autre. Il s'appuie ainsi sur ce qu'il qualifie de « principe universel de la mécanique » identifiable à celui des vitesses virtuelles :

« lors-que deux poids ou deux autres puissances sont disposées en sorte que l'une ne puisse se mouvoir qu'elle ne fasse mouvoir l'autre, si l'espace que doit parcourir un des poids selon sa direction propre & naturelle, est à l'espace que doit parcourir l'autre en même temps selon sa direction propre & naturelle, reciproquement comme ce dernier poids est au premier ; il se fera équilibre entre les deux poids ; mais si l'un des poids est en plus grande raison à l'autre, il le forcera. »<sup>135</sup>

Ce dernier fonde l'égalité de moments statiques de poids ou puissances sur une balance<sup>136</sup> ou sur une roue. Dans ce dernier exemple, Mariotte substitue à l'équilibre de poids sur la machine des corps en mouvements venant se percuter.

---

<sup>133</sup> *Ibid.*, Proposition VI, 41. Dans un « Avertissement », Mariotte écrit que « ce principe d'expérience ou règle de la nature, & cette conséquence sont presque la mesme chose que ces principes de Mécanique ; les corps dont les poids & les distances sont reciproques en une balance, font équilibre ; & s'ils font équilibre, leurs poids & leurs distances sont reciproques » car « la cause naturelle de l'équilibre de deux corps qui ont leurs poids & leurs distances reciproques, procede de ce qu'ils sont disposez à se mouvoir avec des visteses reciproques à leurs poids ; celui dont la distance est sous-double, ne pouvant descendre que l'autre qui est supposé peser la moitié moins, ne s'esleve avec une vistesse deux fois plus grande ». Aussi, Mariotte conclut que « le principe de Mécanique, que les poids égaux en des distances inégales pesent inégalement, se doit entendre lors que ces poids sont mis ensemble d'un costé & d'autre de la balance ; puis que les forces de pesanteur qu'ils ont en ces distances differentes, procedent de ce qu'ils sont disposez à se mouvoir avec des visteses differentes ». *Ibid.*, 40-44.

<sup>134</sup> E. Mariotte, *Traité de la percussion ou choc des corps*, dans *Œuvres de M. Mariotte de l'Académie Royale des Sciences*, 2 vol. (Paris, 1740), I, Proposition XV, 29. Cette expression n'apparaît pas dans l'édition de 1673.

<sup>135</sup> Edme Mariotte, *Traité du mouvement des eaux & des autres corps fluides* (Paris, 1686), 85.

<sup>136</sup> Pour la balance, Mariotte entend prouver « facilement le principe de mécanique, qui a été mal prouvé par Archimede, par Galilée, & par plusieurs Auteurs ; sçavoir, que lors qu'en une balance les poids sont reciproques à leurs distances du centre de la balance, ils font équilibre ». Il suppose une balance équilibrée BAC, de point d'appui A, avec  $AC=4AB$  et les poids  $B=4C$  : si B « l'emporte », il décrit un arc et fait mouvoir C quatre fois plus vite. Or, sous ces hypothèses, « les quantitez de mouvement de ces deux corps seroient égales, & une quantité de mouvement auroit forcé une qui luy seroit égale ; ce qui est impossible » puisque la Règle II (cf. note 131) prévoit un équilibre pour une telle égalité : la collision sert ainsi à fonder la proportion jusqu'alors reconnue entre les bras d'un levier et les poids. Cf. E Mariotte (note 135), 77-78.

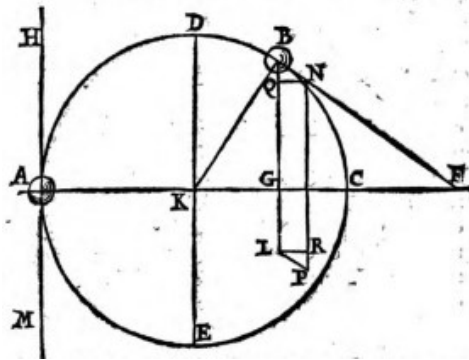


Figure 5 : E. Mariotte (note 131), p. 82

Mariotte considère l'équilibre sur une roue (Figure 5), avec les poids  $B=2A$ , BK élevée de  $60^\circ$  sur l'horizon, trace la tangente BF en B, rencontrant en F l'horizontale AK prolongée ; « le plan BF sera élevé de 30 degrés, & la perpendiculaire BG ne sera plus que la moitié de BF ». Le mouvement de B se fait « au commencement selon la tangente BF », mais ne s'avance vers le centre de la terre que de la verticale BG. De son côté, A s'en éloigne et « sera disposé à aller deux fois plus vite [...] que le poids B ». Puisque FB, BG sont dans le même rapport que AK, KG, « le poids B fera le même effet à l'égard du poids A, que s'il étoit en G » ; autrement dit, les moments statiques par rapport à K du poids B situé en B ou en G sont les mêmes. Mariotte considère alors que « si AK est la mesure de la vitesse de A », KG représentera celle de B ; puisque  $AK=2KG$ , « le poids A sera réciproquement au poids B comme KG, à KA, & par la 2 & 3 Règle, ces poids ainsi disposés feront équilibre. »<sup>137</sup>

Le choc justifie alors l'égalité de moments ; le principe des vitesses virtuelles, à la base de cette Règle II, fonde aussi bien la statique que la science des chocs. Machines ou collisions, les concepts requis à l'examen de l'équilibre s'avèrent identiques, le poids du corps et sa vitesse pour chacune des deux sciences, une vitesse assimilable à une tendance : Mariotte évoque un « commencement de mouvement » et utilise aussi des distances de déplacements « indéfiniment petites. »<sup>138</sup> Les quantités impliquées se nomment alors « poids » ou « volume, avec une certaine solidité ou condensation des parties de [...] matière » du corps<sup>139</sup>, puis « quantité de mouvement », « puissance de mouvement »<sup>140</sup>, ces deux dernières entraînant des « poussées » des corps l'un sur l'autre<sup>141</sup> ou encore une « puissance » ou « force » du choc dont les aplatissements de boules de glaise rendent compte de l'intensité.<sup>142</sup>

Pour sa part, Dechales fait jouer au principe statique cartésien dans l'établissement de ses règles des collisions des corps dits « à ressort » un double rôle : d'une part, il permet de définir un concept d'action intervenant lors du choc et, d'autre part, l'identité des actions justifie l'équilibre. Dechales énonce, tout d'abord, « un Axiome de la mécanique », à savoir qu'« il faut plus de force pour produire une

<sup>137</sup> E. Mariotte (note 135), Règle III, 82-83. Cette Règle III stipule que l'évaluation de la « force » de poids sur une machine repose sur la prise en compte de leurs vitesses verticales, *ibid.*, 79.

<sup>138</sup> *Ibid.*, 84.

<sup>139</sup> E. Mariotte (note 132), Proposition IV, 33.

<sup>140</sup> *Ibid.*, Proposition IV, 31.

<sup>141</sup> *Ibid.*, Proposition II, 23. Pour cette « poussée » : « si un corps étant en mouvement est poussé par un autre corps selon la même ligne de direction, ou selon une autre, le corps poussé prendra un mouvement qui dépendra des deux causes & sera composé du premier mouvement & du second, tant à l'égard de sa direction, qu'à l'égard de sa vitesse ».

<sup>142</sup> *Ibid.*, Proposition III, 25-28.

plus grande quantité de mouvement », et que « c'est la mesme chose de mouvoir le poids d'une livre de deux pieds, ou de mouvoir un pied, le poids de deux livres »<sup>143</sup> ; il nomme « quantité de mouvement » le produit du « corps » (un poids) par « l'espace » parcouru ou sa « vitesse ».<sup>144</sup> Cette dernière maxime correspond au principe cartésien et, là où Descartes évoque une « action », « un effort » ou une force à « deux dimensions », elle définit pour Dechales une force de compression.<sup>145</sup> En effet, il écrit que si une puissance susceptible de produire une quantité de mouvement met un corps « en ressort », celui-ci restitue ce même mouvement lequel mesure alors sa force<sup>146</sup> ; par ailleurs, ce corps comprimé repousse un plus grand que celui à l'origine de sa compression en lui restituant une moindre vitesse, les quantités de mouvement du plus petit et du plus grand étant égales.<sup>147</sup>

Dechales en vient alors à la collision de corps à ressort sur un « corps ferme » (inamovible et dur) : « si les pesanteurs des corps qui choquent un corps immobile sont reciproques à leurs vitesses les chocs seront égaux »<sup>148</sup>, autrement dit les compressions identiques et, par conséquent, « les chocs ont mesme raison que les moments, ou les forces des corps ont mesme raison que les quantitez de mouvement. »<sup>149</sup> Finalement, le « moment », dénommé aussi « puissance »<sup>150</sup>, s'associe à une quantité de mouvement sans pour autant que l'auteur se coupe de l'idée d'une production de ce mouvement car il s'agit ici de déterminer « quel mouvement du corps choquant doit servir de mesure à la force du ressort » laquelle correspond à la compression du mobile.<sup>151</sup>

Dechales examine ensuite à la collision de deux mobiles aux vitesses en proportion inverse des pesanteurs. Pour des boules « molles » ou « inflexibles », les « quantitez [de mouvement] seront par consequent égales, & les momens des deux corps seront aussi égaux, il y aura donc Equilibre. »<sup>152</sup> Pour des corps « à ressort », l'auteur préconise « pour mesure du ressort, le cas auquel les vitesses estoient

---

<sup>143</sup> Claude-François Milliet Dechales, *Traitté du mouvement local, et du ressort. Dans lequel, leur Nature, & leurs Causes, sont curieusement recherchées, & où les Loix qu'ils observent dans l'acceleration & les pendules, & encore dans la percussion & la reflexion des corps, sont solidement établies* (Lyon, 1682), Proposition seconde, 76-77.

<sup>144</sup> *Ibid.*, Proposition seconde, 76.

<sup>145</sup> Descartes écrit que l'équilibre sur les machines « n'est fondé que sur un seul principe, qui est que la mesme force qui peut lever un poids, par exemple, de cent livres a la hauteur de deux pieds, en peut aussy lever un de 200 livres, la hauteur d'un pied », voir la lettre à C. Huygens du 5 octobre 1637, dans *Œuvres de Descartes*, éditées par Charles Adam et Paul Tannery, 12 vol. (Paris, 1996), I, 435-436. Dans ce courrier, Descartes évoque « l'action nécessaire pour produire » le déplacement du poids. Il précise à Mersenne qu'il prend en compte un « commencement du mouvement » (*ibid.*, II, Lettre à Mersenne du 13 juillet 1638, 229) et que l'« action » ou « force » a « toujours deux dimensions » car combinant un poids avec un déplacement (*ibid.*, II, Lettre à Mersenne du 12 septembre 1638, 353).

<sup>146</sup> C.-F. Milliet Dechales (note 143), Proposition seconde, 76. Concernant cette restitution d'une même quantité de mouvement, l'auteur note que « si on a esté obligé d'employer la force d'un poids d'une livre qui descend deux pieds, il [le ressort] n'aura pas plus de force qu'il en faut pour porter le poids d'une livre à la hauteur de deux pieds », *ibid.*, Proposition première, 74

<sup>147</sup> *Ibid.*, Proposition seconde, p. 77-78 : car « il faut autant de force pour donner la vitesse de quatre degrez à un corps d'une livre, que pour produire celle de deux degrez dans le corps de deux livres ». Cette force du ressort requiert indifféremment déplacement ou vitesse et Dechales mobilise tout à la fois les principes statiques cartésien et galiléen.

<sup>148</sup> *Ibid.*, Corollaire I de la Proposition dixième, 101.

<sup>149</sup> *Ibid.*, Proposition dixième, 100.

<sup>150</sup> *Ibid.*, Proposition huitième, 97.

<sup>151</sup> *Ibid.*

<sup>152</sup> *Ibid.*, Proposition dix-huitième, 139. Dechales établit la quasi intégralité de ses règles de chocs inélastiques par le biais de changement de référentiel (le recours à un navire sur lequel s'opère le choc qu'observe un personnage sur la berge) avec pour collision référence celle d'un mobile allant contre un corps au repos (*ibid.*, Proposition seizième, 129-131) et non ce choc conduisant à un équilibre.

reciproques aux corps, parce que pour lors l'on a l'Equilibre »<sup>153</sup> ; systématiquement, par le biais d'un changement de référentiel, il se ramène à ce cas de figure.<sup>154</sup>

Or, Dechales écrit que si « les corps & les vitesses sont reciproques, les percussions seront égales : donc il n'y aura point de raison que l'une l'emporte sur l'autre »<sup>155</sup>. Il existe ainsi *des* percussions, et non *une* percusion, et l'auteur compare deux « forces » dont les intensités, qui correspondent aux « quantités de mouvement » ou « moments » respectifs des corps, s'évaluent par le choc sur un obstacle fixe soit par les « moments » ou « quantités de mouvement » susceptibles de produire une compression ou que le « ressort » restitue. Bien que l'action du « ressort » recèle une teneur dynamique, la collision ne repose pas pour autant sur une égalité entre une action et une réaction. J. Wallis rend explicitement compte de cette situation en mesurant la « force d'un choc » par la somme des quantités de mouvement perdus, soit ce que perdent deux mouvements initiaux.<sup>156</sup> Le cadre général de ce type d'étude demeure une confrontation de forces et, pour Dechales, leur égalité, d'après la mesure que donne le principe cartésien, permet de conclure, en vertu du même principe, qu'il y aura dans ce cas un équilibre.

Assimilable à une simple quantité de mouvement, le « moment » s'identifie aussi à un effort. Outre Descartes, les références implicites à Galilée informent sur l'origine d'un tel concept, notamment lorsque Dechales introduit le « moment de descente » à l'aide de corps s'équilibrant et liés à un système mécanique.<sup>157</sup>

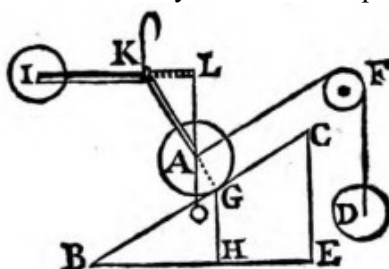


Figure 6 : C.-F. Milliet Dechales (note 143), 336.

Ainsi, (Figure 6) en attachant D tel que  $\frac{A}{D} = \frac{BC}{CE}$  (1), D équilibre A. En effet, Dechales note qu' « il y a Equilibre entre deux poids, lors que la reciprocation, entre leur grandeur, & leur mouvement perpendiculaire se rencontre » ; or, posant  $BG=CE$ , il suit  $\frac{BC}{BG} = \frac{CE}{GH}$ , qui combinée avec (1) donne la relation d'équilibre,  $\frac{A}{D} = \frac{CE}{GH}$ <sup>158</sup> : A sur le plan incliné et D possèdent alors le même « moment ». Or, « si le poids A, tomboit

<sup>153</sup> *Ibid.*, Proposition dix-neuvième, 437.

<sup>154</sup> Remarquons que selon Dechales, ce ne sont pas les vitesses de rejaillissement qui suivent la proportion inverse des poids, mais les quantités de mouvement, *ibid.*, Proposition sixième, 88-89 et Proposition treizième, 414-415. Seules ses règles de collisions impliquant des poids égaux s'avèrent alors exactes.

<sup>155</sup> *Ibid.*, Proposition dix-huitième, 139.

<sup>156</sup> « Ictus magnitudo æquipollet duplo momenti ablati in directè impingentium (si quod fit) fortiori ». Cf. John Wallis (note 65), III, Prop. V, 666.

<sup>157</sup> C.-F. Milliet Dechales (note 143), Proposition vingt-et-unième, 336 : « Le moment d'un corps, qui est posé sur un plan incliné, au moment du même corps, qui descend perpendiculairement, à même raison que la perpendiculaire au plan incliné ».

<sup>158</sup> *Ibid.*, Proposition vingt-et-unième, 337. GH « mesure le mouvement perpendiculaire du poids A » lorsque « A, monteroit de B, en G », comme CE mesure celui de D lorsqu'il « descendroit de C en E ».



aussi perpendiculairement, son moment auroit mesme raison à celui de D, que le poids A au poids D » soit, par hypothèse, que BC à CE, et il suit que le rapport des moments de A perpendiculairement et sur le plan (équivalant à celui de D) suit le rapport de BC à CE.<sup>159</sup> Dechales passe ainsi d'un « moment » combinant poids et déplacements aux moments de A et D dans la proportion de ces poids.<sup>160</sup> Il en vient ensuite à la proportion entre les vitesses le long du plan et de la verticale pour un même poids. Elles doivent suivre le rapport des moments « car le mobile qui a des forces doubles, doit se mouvoir avec une double vitesse ». En effet, « faisant abstraction de toute autre force estrangere, je ne puis avoir autre mesure de son mouvement [du corps], que ses forces pour se mouvoir, c'est à dire son moment : donc les mouvemens qu'il produit quand il tombe perpendiculairement, & quand il descend sur un plan incliné, sont en même raison que les momens. »<sup>161</sup> Tout comme les moments (proposition précédente), les mouvements, donc les vitesses, suivent alors la proportion de la longueur à la hauteur.<sup>162</sup> « La force pour se mouvoir » ou le « moment » s'identifie à un mouvement (parce que le corps à une vitesse double son mouvement est double donc aussi sa force), mais celui-ci est aussi « produit », Dechales notant que « le corps produit au commencement de son mouvement » des vitesses<sup>163</sup> ou que, sur un plan incliné, « il possède un moment déterminé [...] ; & dans un premier temps ce moment produira un mouvement. »<sup>164</sup> Or, il importe de souligner que parmi plusieurs hypothèses, le « ressort de l'air » rend compte du mouvement accéléré des graves.<sup>165</sup> Le moment (producteur du mouvement dans la chute libre) et la force de compression s'identifient alors l'une à l'autre.

#### 4.2.2 « Puissances » et vitesses virtuelles au début du 18<sup>e</sup> siècle

Des auteurs plus contemporains à D'Alembert remplacent des puissances statiques équilibrées par des chocs de corps. Dans sa *Nouvelle Mécanique*, Varignon définit la « force » ou « puissance » (qu'il représente dans les planches de ce livre par des mains qui tirent les cordes) par ce que « l'Agent imprime » au corps suivant sa direction et non ce que « l'Agent pourroit avoir », l'exemple d'un choc de corps durs précisant cette conception : un mobile possède une « force » dont il cède une partie lors

<sup>159</sup> *Ibid.*, Proposition vingt-et-unième, 337-338.

<sup>160</sup> Un raisonnement semblable mène Galilée de l'équilibre d'un corps G posé sur un plan incliné FA de hauteur FC et retenu par un corps H suspendu verticalement le long de FC au « moment de descente : « possiamo assertivamente affirmare, che quando debba seguire l'equilibrio, cioè la quiete tra essi mobili, i momenti, le velocità, o le lor propensioni al moto, cioè gli spazii che da loro si passerebbero nel medesimo tempo, devono rispondere reciprocamente alle loro gravità, secondo quello che in tutti i casi de' movimenti mecanici si dimostra [...] l'impeto o momento parziale del G per la perpendicolare FC, starà come il peso H al peso G, cioè, per la costruzione, come essa perpendicolare FC, elevazione dell'inclinata, alla medesima inclinata FA ». Cf. Galileo Galilei (note 97), 217.

<sup>161</sup> C.-F. Milliet Dechales (note 143), Proposition vingt-deuxième, 340.

<sup>162</sup> Cf. Galilée (note 97), 148.

<sup>163</sup> C.-F. Milliet Dechales (note 143), Proposition vingt-deuxième, 340.

<sup>164</sup> *Ibid.*, Proposition vingt-troisième, 341.

<sup>165</sup> Les propriétés de chute de corps s'établissent à partir de l'idée que « la cause qui fait se mouvoir immédiatement les corps pesans, quand ils tombent, s'augmente également », que cette cause se rapporte au ressort de l'air ou au « mouvement pris pour un estre permanent », ou aux « percussions réitérées » (*ibid.*, Proposition treizième, 209). Concernant l'action du « ressort de l'air », la pesanteur produit dans un premier temps un mouvement déterminé « par lequel l'air ayant été condensé & mis en ressort, peut continuer le mesme mouvement, produisant sans un second temps un mouvement égal, mais la pesanteur estant presente, pourra produire autant de mouvement dans ce second temps » ; ressort et pesanteur produisent alors dans ce second temps « un mouvement double du premier » et donc « un double ressort », dont il faut à nouveau associer l'effet à la pesanteur pour produire dans un troisième temps un mouvement triple du premier. *Ibid.*, Proposition dixième, 193-194. Les vitesses alors augmentent « uniformement, & également », *ibid.*, Proposition dixième, 197.

d'une impression sur un autre au repos, la quantité cédée mesurant la « force motrice » ou « puissance motrice » du corps au repos ainsi que celle dans « l'Agent ».<sup>166</sup> Puissance ou force concernent tout autant une quantité de mouvement que l'action/l'impulsion engendrant la variation de mouvement.

La substitution de puissances équilibrées sur une machine par des « tendances », simples mouvements empêchés dans l'instant du choc se retrouve chez l'académicien des sciences Jacques d'Allonville de Louville (1671-1732)<sup>167</sup>, J.-J. Dortous de Mairan<sup>168</sup>, ou encore J.-F. Traubaud. Ce dernier définit l'équilibre par le biais d'une force s'opposant à la résultante de deux « puissances » qu'il remplace par « des forces instantanées ou simplement motrices », à savoir des impulsions de corps durs, circonstance dans laquelle « l'équilibre ne durera qu'un instant » ; ce raisonnement vaut aussi pour des accélérations, celles-ci ne procédant que d'une succession à chaque instant de « forces simplement motrices. »<sup>169</sup> Des « tendances », mouvements empêchés s'équilibrant dans l'instant, remplacent alors les puissances. Chez la

<sup>166</sup> P. Varignon (note 70), 9-10.

<sup>167</sup> Voulant établir que la force d'un corps en mouvement se mesure par sa quantité de mouvement et non sa force vive, Louville utilise « le principe des mouvemens composez qui est la clef de toutes les Méchaniques ». Il imagine trois boules (A, B, C) de même masse heurtant simultanément une boule D au repos, leurs lignes de directions formant deux à deux un angle de 120° et passant par le centre de D. D « étant également poussé de toutes parts », les « trois puissances » font des « efforts » et s'équilibrent. Cf. Jacques d'Allonville de Louville, « Démonstration d'un principe de Méchanique, qui est que la force des Corps en mouvemens, sont entre elles en raison composée de leur masses et de leurs vitesses, ou comme les produits de leurs masses par leurs vitesses », dans *Registres des Procès Verbaux de l'Académie Royale des Sciences*, année 1721, tome 40, f° 43v-f°44v.

<sup>168</sup> Mairan note que « la simple tendance & le mouvement actuel peuvent être comparés dans leurs compositions & leurs décompositions [...] & en ce que l'analogie des forces en équilibre, ou en action, est la même de part & d'autre ». Trois « puissances » tirant ou poussant un point P se voient alors remplacées par trois « mobiles » heurtant simultanément P. Cf. J.-J. Dortous de Mairan, « Dissertation sur l'estimation & la mesure des forces motrices des corps », dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année MDCCXXVIII. Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même année. Tirés des Registres de cette Académie* (Paris, 1753), 39. L'« analogie » tient à cette identité de composition/décomposition affectant les corps mobiles ou les puissances statiques, mais elle repose aussi sur une identité d'action : la tendance, l'instantanéité, constitue le véritable moment de l'évaluation de la force motrice pour Mairan et, conséquemment, que les actions durent (puissances statiques équilibrées) ou n'existent que dans l'instant (collision de corps durs) le modèle du choc de corps durs fournit le moyen de définir l'action en toute généralité ; seul l'instant et, corrélativement, la tendance, comptent dans l'évaluation de la force motrice. Ainsi, la « réduction » du mouvement accéléré en uniforme (un corps parcourt uniformément le double de l'espace qu'il aurait franchit dans le même temps sous l'effet de la gravité, avec pour vitesse celle acquise en fin de cette chute) « ne peut rien changer à la quantité de force qui réside dans un corps à l'instant où il va se mouvoir, quel que doive être ce mouvement, retardé ou uniforme. Car en imaginant la force motrice toujours la même, il ne s'agit, pour rendre uniforme le mouvement qu'elle alloit produire, ou que l'on considère dans cet instant, que d'ôter les résistances, les impulsions de la pesanteur, par exemple, ou les obstacles quelconques, qui pouvoient l'arrêter sur son chemin, ou la consumer peu à peu [...] Ce qui est tout à fait étranger à la force que l'on cherche à connoître, & ne sauroit par conséquent rien ôter ni ajouter à la mesure de sa quantité considérée en elle-même », *ibid.*, 11. Dès lors, « la communication [du mouvement] dans les corps flexibles & à ressort ne nous fera plus [...] conclure une autre valeur pour cette force [motrice] que dans les corps inflexibles & sans ressort », *ibid.*, 36.

<sup>169</sup> J.-F. Traubaud (note 94), art. 182 et 183, 70-71. La puissance se définit comme « tout ce qui peut mouvoir un corps » et, à ce titre, « un corps en mouvement est une puissance » (*ibid.*, art. 104, 38). La « force d'une puissance est l'action qu'elle exerce ou l'effort qu'elle fait pour mouvoir, on la prend fort souvent pour la puissance même » (*ibid.*, art. 105, 38). Appliquée à un corps, la puissance « produit le mouvement par une seule impulsion » ou bien « elle renouvelle son action » : dans le premier cas, le « mouvement est uniforme » et « la puissance est appelée simplement motrice ou force instantanée » ; dans le second, elle est « force accélératrice » et, cette dernière, considérée dans l'instant, s'identifie à la première (*ibid.*, art. 108, 38).

Marquise du Châtelet, les puissances équilibrées deviennent égalités de forces mortes (« simples tendances au mouvement »<sup>170</sup>) conçues comme produit d'une masse par une « vitesse virtuelle ou élémentaire ».<sup>171</sup> Notons, pour ce dernier auteur, que l'action des puissances s'avère essentiellement continue.<sup>172</sup>

Le « moment », la « puissance », ou la « quantité de mouvement » intervenants lors de l'équilibre correspondent alors aux deux types de « forces mortes » définies par D'Alembert, qu'il s'agisse de celle impliquant un choc de corps durs ou celle apparentée à une accélération. Par ailleurs, Mariotte et Dechales suggèrent la raison pour laquelle le choc puisse entrer dans le giron d'une science de l'équilibre : ils procèdent à une extension du domaine d'application du principe des vitesses virtuelles aux collisions, laquelle leur permet aussi de définir des concepts dynamiques identifiables à ceux requis dans les machines simples.

Jean I Bernoulli pourrait tout à la fois résumer le processus de genèse d'une dynamique en même temps qu'illustrer la mise sous tutelle de cette dernière par une science de l'équilibre. Dans une lettre à Varignon du 26 janvier 1717, que celui-ci insère dans son traité de 1725, il énonce le principe des vitesses virtuelles :

« en tout équilibre de forces quelconques, en quelque maniere qu'elles soient appliquées les unes sur les autres, ou médiatement ou immédiatement ; la somme des Energies affirmatives sera égale à la somme des Energies negatives prises affirmativement. »<sup>173</sup>

Cette « Energie » correspond au produit d'une force par sa « vitesse virtuelle » associée, ce « petit mouvement » qu'on « imprime à tout le système de ces forces [...] soit parallele à soi-même suivant une direction quelconque, soit autour d'un point fixe quelconque. »<sup>174</sup>

Dans ses Mémoires participant aux prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris des années 1724 et 1726 portant, respectivement, sur les règles des collisions inélastiques et élastiques, Bernoulli énonce une semblable définition de la vitesse virtuelle<sup>175</sup> tout en la concevant aussi comme « l'élément de vitesse que chaque corps gagne ou perd d'une vitesse déjà acquise, dans un tems infiniment petit suivant sa direction. »<sup>176</sup> Dans son premier sens, elle relève d'un déplacement infinitésimal

---

<sup>170</sup> Marquise du Châtelet (note 98), § 519, p. 422. Forces dénommées aussi « forces pressantes » exemplifiées par l'action d'un poids sur une table ou celle d'un ressort comprimé (*ibid.*, § 522, 422-423) et dont l'action « est à tout moment reproduite » (*ibid.*, § 527, 424).

<sup>171</sup> *Ibid.*, § 537, 429. Pour un corps au repos équilibrant une « puissance », la mesure de sa force consiste en le produit de sa masse par cette vitesse élémentaire nommée aussi « vitesse initiale » à savoir celle qu'il possède « si cette puissance, qui [le] retient, venoit à faire quelque mouvement », *ibid.* La comparaison de deux puissances repose sur celle de leurs actions sur des masses qu'elles « poussent avec un incrément de vitesse » (*ibid.*, § 540, 428) et « dans l'équilibre des puissances, les forces mortes sont en raison composée des masses, & de leur vitesse virtuelle » (*ibid.*, § 547, 430).

<sup>172</sup> En vertu du « principe de la continuité » de Leibniz (§ 15 p. 35-36), tous « les Corps ont un degré d'élasticité ».

<sup>173</sup> P. Varignon (note 70), II, 174.

<sup>174</sup> *Ibid.*, 175.

<sup>175</sup> Jean Bernoulli, « Discours sur les loix de la communication du mouvement, qui a mérité les Eloges de l'Académie Royale des Sciences aux années 1724. & 1726. & qui a concouru à l'occasion des Prix distribuez dans lesdites années », dans *Recueil des pieces qui ont remporté les prix de l'Academie Royale des Sciences, depuis leurs fondation jusqu'à présent. Avec quelques pieces qui ont été composées à l'occasion de ces Prix. Tome premier. Qui contient les Pieces depuis 1720 jusqu'en 1727* (Paris, 1732), 19 : « j'appelle vitesses virtuelles, celles que deux ou plusieurs forces acquierent, quand on leur imprime un petit mouvement ; ou si ces forces sont déjà en mouvement ».

<sup>176</sup> *Ibid.*, 19.

permettant d'établir des conditions d'équilibre ; dans le second, elle s'identifie à une variation que provoque une action, définition faisant écho à celle de la « force morte » qui est « celle que reçoit un corps sans mouvement, lorsqu'il est sollicité & pressé de se mouvoir, ou à se mouvoir plus ou moins vite, lorsque le corps est déjà en mouvement. »<sup>177</sup>

Cette ambiguïté concernant ce déplacement transparait dans l'analyse des collisions élastiques. Bernoulli rappelle son principe sous une forme moins générale :

« deux agens sont en équilibre, ou ont des momens égaux. Lorsque leur force absolus sont en raison reciproque de leurs vitesses virtuelles, soit que les forces qui agissent l'une sur l'autre soient en mouvement, ou en repos, c'est un principe ordinaire de Statique & Mechanique. »<sup>178</sup>

Il écrit ensuite l'« employer » afin « de faire voir la maniere dont le mouvement se produit par la force d'une pression qui agit sans interruption, & sans autre opposition que celle qui vient de l'inertie des mobiles ». L'auteur suppose alors deux masses A et B en repos entre lesquelles il place un ressort bandé. Celui-ci fait un effort égal de part et d'autre et

« il est visible que chacun de ses [sic] corps opposera au mouvement du ressort par son inertie, une resistance proportionnelle à sa masse. Il faut donc, en vertu de l'hypothese prise de la Mechanique, que les deux efforts opposez du ressort, étant égaux, la force de l'inertie qui est en A, soit à la force de l'inertie qui est en B ; ou que la masse A soit à la masse B en raison reciproque, de ce que la vitesse virtuelle du corps B, est à la vitesse virtuelle du corps A. »<sup>179</sup>

Bernoulli procède ainsi à une double substitution : le déplacement et les forces requis par le principe statique deviennent, lors du choc, les changements des vitesses et les forces d'inertie elles-mêmes proportionnées aux masses<sup>180</sup>.

---

<sup>177</sup> *Ibid.*, 19. Un ressort placé entre deux masses fixes agit sous la forme d'une « force morte », mais en l'absence de fixité, le ressort agit et « en se dilatant accelere la vitesse de ces corps ».

<sup>178</sup> *Ibid.*, 20.

<sup>179</sup> *Ibid.* Voir aussi Isaac Newton, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, 2 vol. (Paris, 1759 (trad. de la 3<sup>ème</sup> éd. par la Marquise du Châtelet)), Scholie, 33 : « de même que les corps qui se choquent se font équilibre, quand leurs vitesses sont réciproquement comme leurs forces d'inertie (*ut vires insitae* :) les puissances qui agissent dans la mécanique se contrebalancent & détruisent leurs efforts mutuels quand leurs vitesses dans la direction des forces sont réciproquement comme ces forces ».

<sup>180</sup> Cette substitution des poids par les masses dans des principes statiques figure aussi chez P. Varignon, « Regles du mouvement en général », 31 décembre 1692, dans *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699*, tome X (Paris, 1730), 227 : les « forces » (ce que Descartes nommait l'« action », cf. *supra* note 145) deviennent proportionnelles aux mouvements produits. Varignon puise chez Galilée un concept de moment conçu comme un « effort » de la pesanteur proportionnée à la quantité de mouvement créée : il note qu'« il est démontré dans toutes les statique (sic) que les premiers efforts (*momenta*) des poids M & N suivant la direction des plans f & h, sur lesquels on les suppose, sont ak/f & bl/h [f, h représentent les longueurs et k, l les hauteurs des plans, a et b les pesanteurs de M et N lors d'une chute libre] & que c'est tout ce qui leur reste de leur pesanteur, la résistance de ces plans soutenant le surplus. On peut donc regarder ici ces corps comme sans pesanteur, & comme poussez seulement le long de ces plans par des forces », cf. P. Varignon, « Application de la regle generale des movemens accelerez à toutes les hypothèses possibles d'accélérations ordonnées dans la chute des corps », 30 juin 1693, dans *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699*, tome X (Paris, 1730), 355-356. L'effort/moment de la pesanteur appartient à une classe plus générale (la force) poussant un corps, soit une masse, et les forces mentionnées dans la dernière phrase ci-dessus se voient proportionnées aux vitesses produites, « puisque dans chaque corps les forces

#### 4.3 L'équilibre pour « simplifier le langage »

L'académicien des sciences Antoine Parent (1666-1716) semble se montrer conscient de la difficulté d'appliquer directement ce principe de statique à la collision. Partant d'un équilibre sur une balance (avec A, B deux poids et C le point d'appui) dont rend compte l'égalité de la combinaison des poids avec leurs déplacements « insensibles » ( $A\alpha$ ,  $B\beta$ ), l'auteur s'interroge sur la manière dont il convient d'appliquer ce « principe » aux chocs.<sup>181</sup> Il note que

« si l'on veut appliquer ce principe au chocq horizontal des corps solides [...], il faudra prendre le produit de B par sa vitesse naturelle pour les solides [...], c'est-à-dire la force de B & la multiplier par  $B\beta$ , & appeler ce solide l'effort de B ; & prendre le produit de A par sa vitesse naturelle, c'est-à-dire la force de A, & la multiplier par  $A\alpha$  & appeler ce second solide la resistance de A, & supposant que BC soit à AC, comme la force de A est à celle de B, conclure delà que ces deux solides étant égaux, la resistance en A seroit égale à l'effort en B, & qu'ainsi B ne pourroit pas mouvoir A & réciproquement, car je ne vois point d'autre moyen que celui-là. »<sup>182</sup>

Les grandeurs impliquées devraient alors associer quantité de mouvement (force) avec des déplacements insensibles ( $B\beta$  et  $A\alpha$ ) ceux-là même convoqués pour l'équilibre sur la balance. Une telle pratique semble cependant détruire « l'équilibre du choc direct [...], puisqu'il ne faut autre chose pour ce dernier, qu'une égalité entre les forces, c'est-à-dire entre les simples produits des masses par les vitesses sensibles & naturelles ou par leurs quarrés dans les fluides. C'est ce qui meriteroit bien, ce me semble, l'application des Sçavans. »<sup>183</sup> Parent laisse cependant la question en l'état, son étude du choc reposant sur l'équilibre de quantités de mouvement égales (voir *infra* 5).

La limite d'applicabilité de l'équilibre pour la collision prend une autre forme chez P. S. Régis : il existe sur les machines une continuité des actions entraînant un équilibre, à savoir « un repos purement respectif », alors même que dans l'instant du choc les forces cessent.<sup>184</sup>

Dans l'article « Equilibre », D'Alembert évoque une difficulté semblable à celle rapportée par Régis :

---

sont à chaque instant comme les vitesses qu'elles causent » (voir P. Varignon, « Regles des mouvemens accelerez suivant toutes les proportions imaginables d'accélération ordonnées », 31 mai 1693, dans *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699*, tome X (Paris, 1730), 340). Les principes statiques permettent ici à Varignon de conférer à la force sa dimension dynamique en la proportionnant à la quantité de mouvement créée.

<sup>181</sup> Antoine Parent, *Essais et recherches de mathématique et physique*, 3 vol. (Paris, 1713), II, 361-364.

<sup>182</sup> *Ibid.*, 365.

<sup>183</sup> *Ibid.*, 366.

<sup>184</sup> Régis nomme les mouvements « *Mechaniques*, [ceux] qui regardent la pesanteur respective des corps, & qui diffèrent des mouvemens naturels, en ce que ceux-ci sont indépendans les uns des autres, ou s'ils en dépendent, ils ne sont pas opposez comme font les mouvemens mécaniques ; ce qu'il faut bien remarquer pour éviter de tomber dans l'erreur où sont ceux qui confondent ces mouvemens, & qui disent que quand des corps égaux se choquent avec des forces égales & opposées, ils doivent demeurer en équilibre, c'est à dire, en repos, car c'est proprement abuser du mot d'*Equilibre*, qui est à la verité un repos, mais un repos purement respectif ». Cf. Pierre-Sylvain Régis, *Cours Entier de Philosophie, ou Système Général selon les Principes de M. Descartes, contenant la Logique, la Métaphysique, la Physique, et la Morale*, 3 vol. (Amsterdam, 1691), I, Dix-septième règle, 386.

« Au reste on ne devoit à la rigueur employer le mot *équilibre*, que pour désigner le repos de deux puissances ou deux corps qui sont dans un état d'effort continuel, & continuellement contre-balancé par un effort contraire, en sorte que si un des deux efforts contraires venoit à cesser ou à être diminué, il s'ensuivroit du mouvement. Ainsi deux poids attachés aux bras d'une balance sont en *équilibre* dans le sens proprement dit : car ces deux poids agissent sans cesse l'un contre l'autre, & si vous diminuez un des poids, la balance sera en mouvement. Au contraire deux corps égaux & durs qui se choquent en sens opposés avec des vitesses égales, détruisent à la vérité leurs mouvemens, mais ne sont pas proprement en *équilibre*, parce que l'effort réciproque des deux corps est anéanti par le choc ; après l'instant du choc ces deux corps ont perdu leur tendance même au mouvement, & sont dans un repos absolu & respectif, en sorte que si on ôtoit un des corps, l'autre resteroit en repos sans se mouvoir. Cependant pour généraliser les idées, & simplifier le langage, nous donnons dans cet article le nom d'*équilibre* à tout état de deux puissances ou forces égales qui se détruisent, soit que cet état soit instantané, soit qu'il dure aussi long-tems qu'on voudra. »<sup>185</sup>

Mentionner un équilibre lors d'un choc tiendrait alors d'une généralisation et d'une commodité de langage. Cette convention n'a cependant rien de neutre. En effet, ce propos fait écho à l'usage des mots « force » ou « *Dynamique* » dans le *Traité* : D'Alembert précise garder le premier terme pour « éviter les circonlocutions »<sup>186</sup> et recourir au second parce qu'il « est fort usité aujourd'hui parmi les Savans »<sup>187</sup>. Il s'agit, en somme, de se faire comprendre par une communauté de savants quant aux concepts utilisés. Si D'Alembert refuse une physique de type causale, la force pouvant renvoyer à ce qu'il nomme des « êtres obscurs & Métaphysiques »<sup>188</sup>, celle-ci devient légitime en mécanique à partir du seul moment où elle prend le statut de simple définition, celle d'un effet (un mouvement) qui la vide alors de toute portée autre que mathématique. Si les concepts utilisés par D'Alembert (puissances, moments etc.) ne diffèrent pas de ceux de contemporains, l'originalité revendiquée tient à cet aspect épistémologique. Ainsi, il reconnaît que tous les « Geomètres » conviennent de la loi de l'équilibre, mais ajoute qu'« il n'est peut-être pas facile de démontrer cette loi en toute rigueur, & d'une manière qui ne renferme aucune obscurité ; aussi la plupart des Geomètres ont-ils mieux aimé la traiter d'axiôme, que de s'appliquer à la prouver »<sup>189</sup> ; et s'il estime que les théorèmes de statique sont démontrés avec « moins de précision » qu'il ne le fait ceci tient à ce « qu'on n'y donne pas communément une notion du mot *puissance* aussi nette » que la sienne<sup>190</sup>.

Ainsi, les écrits de Mariotte, Dechales et Bernoulli renseignent sur l'origine de cette loi de l'équilibre que D'Alembert applique aux collisions : elle procède du principe des vitesses virtuelles, celui-là même auquel D'Alembert recourt pour établir

<sup>185</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 6), 874b.

<sup>186</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), Préface, xxv.

<sup>187</sup> *Ibid.*, Préface, xxij.

<sup>188</sup> *Ibid.*, Préface, xvj.

<sup>189</sup> *Ibid.*, Préface, xiv. Cf. aussi J. Le Rond D'Alembert (note 6), 873a.

<sup>190</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), art. 43, 43. Cf. aussi J. Le Rond D'Alembert (note 6), 873a-873b : « Aussi n'avons nous presque aucun ouvrage de Méchanique, où la proposition dont il s'agit soit prouvée avec l'exactitude qu'elle exige. La plupart se contentent de dire que la force d'un corps est le produit de sa masse par sa vitesse, & que quand ces produits sont égaux, il doit y avoir *équilibre*, parce que les forces sont égales ; ces auteurs ne prennent pas garde que le mot de *force* ne présente à l'esprit aucune idée nette, & que les Méchaniciens même sont si peu d'accord là-dessus, que plusieurs prétendent que la force est le produit de la masse par le carré de la vitesse ».

la conservation des forces vives (cf. 1.1 *Le principe et ses énoncés*). Il précise, par ailleurs, après cette démonstration, que ce

« Principe de l'équilibre [...] peut toujours se démontrer facilement ; car, ou les puissances sont égales & directement opposées, ou elles sont appliquées à des bras de Levier différens, ou enfin la force résultante de ces puissances passe par quelque obstacle fixe & insurmontable [...] Tout ce que nous avons dit ci-dessus est, ce me semble, suffisant pour démontrer les deux premiers cas. »<sup>191</sup>

Cette évocation d'une égalité de « puissances opposées » correspond à la loi d'équilibre impliquant deux mobiles de même quantité de mouvement : D'Alembert conçoit donc pouvoir « démontrer » le principe des vitesses virtuelles par une collision de corps. Ceci reviendrait, finalement, à remplacer les poids ou puissances par des masses et les déplacements virtuels par ceux provoqués par l'action, soit procéder à la double substitution rencontrée chez Jean I Bernoulli.

L'association de ce principe avec des changements de référentiels permet à A. Parent de développer une méthode pour déterminer des règles du choc non sans lien avec le « principe général » de D'Alembert.

## 5. Centre de masse et collisions

### 5.1 *La « réduction à l'équilibre » d'Antoine Parent*

Publiés en 1700, les *Elémens de Méchanique* d'Antoine Parent s'ouvrent par l'exposé d'une méthode permettant de déterminer les règles de collisions consistant à « rappeler tous les chocs à l'équilibre ou de les en déduire par des témoins auxiliaires ».<sup>192</sup> Largement répandu, ce recours à un changement de référentiels (ce en quoi consiste l'appel à des « témoins auxiliaires ») apparaît bien avant cette publication<sup>193</sup> ; quelques années plus tard, dans son *Discours* de 1724 et 1726, il permet à J. I Bernoulli de déterminer une « Regle generale » des chocs élastiques.<sup>194</sup> Il semble cependant qu'il faille créditer Parent de s'appuyer sur cette pratique pour proposer, en 1713, une analyse de la collision basée sur des décompositions de mouvements incidents proches de celles développées par D'Alembert. Avant d'aborder cet aspect, il convient d'examiner la technique proposée en 1700.

Parent procède à une « reduction de toutes les differentes especes de chocs directs au seul équilibre ».<sup>195</sup> La « loy de l'équilibre » requiert, lors d'une percussion, des

---

<sup>191</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), art. 172, 183.

<sup>192</sup> A. Parent, *Elémens de Méchanique et de Physique, où l'on donne géométriquement les principes du choc & des équilibres entre toute sorte de corps. Avec l'explication naturelle des machines fondamentales* (Paris, 1700), Préface (non paginée).

<sup>193</sup> Concernant sa méthode, Parent croit au moment de l'édition de ce livre « que ce fût une chose tout à-fait nouvelle ». Or, il recourt à la méthode du bateau de Huygens et si les œuvres posthumes de celui-ci ne paraissent qu'en 1703 (*Christiani Hugenii Opuscula Posthuma* (Leyde, 1703)), J. Wallis ((note 156), III, Proposition VIII à Proposition XIV, 669-676 pour des corps durs), C.-F. Milliet Dechaes (voir *supra*) et Mariotte pour la seule étude des collisions obliques (voir, notamment, E. Mariotte (note 132), Proposition I, 179-185), en firent déjà usage. Ce qu'évoque Parent quelques pages plus loin en ajoutant que « le peu de progresz qu'on a fait jusqu'icy dans la connoissance du choc, me pourroit faire croire que la maniere d'en faire application n'a pas encore été connuë puisqu'encore aujourd'huy plusieurs Auteurs celebres ont leurs principes particuliers, & sont si peu d'accord entr'eux », A. Parent (note 192), Préface.

<sup>194</sup> Jean I Bernoulli (note 175), 24-27.

<sup>195</sup> A. Parent (note 192), 40.

masses dans la proportion inverse des vitesses des corps.<sup>196</sup> Dans cette configuration, les chocs inélastiques conduisent au repos ; les collisions élastiques, à une restitution des vitesses initiales car, de « forces égales », les mobiles se comportent l'un pour l'autre comme « un obstacle solide » et « donc chacun doit retourner à sa vitesse naturelle ». <sup>197</sup> Parent s'appuie sur cette loi qui permet l'obtention du « resultat de tous les chocs possibles des mêmes corps sans équilibre ». <sup>198</sup>

En quoi consiste cette « réduction » ? A partir de trois types de collisions de deux corps de masses A et B (mouvements de même sens, de sens opposés, un corps immobile), Parent « divise la distance AB en C, ensorte que  $AC|CB||B|A$ , ou que le produit de A par AC soit égal au produit de B par BC ; c'est-à-dire ensorte que si A & B, partant en même temps des lieux où ils sont, venoient se choquer en C ils eussent des forces égales, & pendant le mouvement de A vers B, je divise continuellement la distance des deux dans la même proportion reciproque de ces corps ». <sup>199</sup> C définit donc le centre de masse du système et si les vitesses incidentes des mobiles suivent la proportion énoncée, les corps se percutent avec des « force égales », configuration correspondant à la « loy d'équilibre ». Le tableau suivant résume différents cas de chocs en décomposant les vitesses initiales au niveau de C (voir Figure 7 ci-dessous) :

|  | Vitesse de A  | Vitesse de B |
|--|---------------|--------------|
| A rattrape B et le choque en D   | $AD=AC+CD$    | $BD=BC+CD$   |
| A et B ont des mouvements de sens contraires, le choc se produit en d situé entre A et B | $Ad=AC+Cd$    | $Bd=BC+Cd$   |
| A choque B en repos et $B=D=d$   | $AD=AB=AC+CD$ | $BD=0=BC+CD$ |

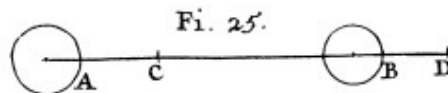


Figure 7 : A. Parent, *Elémens de Méchanique et de Physique*, d'après Fig. 25

En supposant « un plan auxiliaire qui se meuve de A vers B de la même vitesse que C, à l'égard de ce plan C aura été immobile » ; pour un observateur situé sur ce référentiel, les vitesses de A et B seront AC et BC, puisque Cd ou CD correspondent à la vitesse du centre de masse. Les corps se choquent alors « d'égales forces » au niveau de C<sup>200</sup> et le changement de référentiels n'affectant pas la vitesse respective des corps, il ne modifie pas l'issue de l'interaction mécanique.

Les collisions inélastiques conduisent à un repos par rapport au plan auxiliaire, soit une vitesse commune CD (ou Cd) pour le système des deux corps par rapport à un repère absolu ne participant pas au mouvement de C. Pour les chocs élastiques, il suffit

<sup>196</sup> Parent ne définit pas le concept de masse, mais utilise cette grandeur dans son évaluation de la force/quantité de mouvement : « on ne doit [...] avoir égard qu'à la masse & à la vitesse des corps pour estimer leur force », *ibid.*, 12.

<sup>197</sup> *Ibid.*, 59.

<sup>198</sup> *Ibid.*, 19. Pour l'égalité des « forces » ou « momens » lors de l'équilibre, *ibid.*, 15-16.

<sup>199</sup> *Ibid.*, 40-41.

<sup>200</sup> *Ibid.*, 40-42. Une variante consiste à laisser ce plan immobile et mouvoir celui supportant les deux corps avec une vitesse DC ou dC.



de composer les vitesses de restitution (égales à CA et CB) avec celle du centre de masse du système afin de déterminer les mouvements finaux.<sup>201</sup>

L'artifice des changements de repères, avec pour vitesse relative celle du centre de masse, permet de définir une décomposition de mouvement particulière, les mouvements initiaux des corps donnant lieu à des mouvements équilibrés (en C) et communs (pour des chocs inélastiques, avec la vitesse de C).

En 1713, s'appuyant sur « deux principes », à savoir, que « *dans toutes sortes de choqs, les corps se choquent avec équilibre, & se séparent de même* »<sup>202</sup>, Parent, systématiquement, décompose les mouvements des mobiles en combinant ce qu'il nomme un mouvement « commun » avec un autre « d'équilibre ». Ainsi définit-il

« les mouvemens *Supposez* ou *Vrais*, comme par exemple, AD, BD, & les mouvemens *Feints*, sçavoir, un mouvement CD *Commun* à tous les corps, à l'égard duquel ils sont indifferens entre eux (puisque deux corps qui vont de même vitesse ne sçauroient se choquer) ; & deux autres mouvemens AC, BC que j'appelle *Mouvemens d'équilibre*, parce que faisant abstraction du mouvement *commun*, ces deux corps font effectivement équilibre entre eux, en se choquant en C avec les vitesses AC, BC, à cause que ces vitesses ont été faites réciproques à leurs masses ; Desorte que ce *Mouvement commun* tient icy le même lieu que le mouvement parallèle, qui dans les choqs obliques se conserve tout entier ; & le *Mouvement d'équilibre* fait le même effet que les mouvemens perpendiculaires, qui contiennent une oposition entiere ; & je ne crois point qu'on puisse imaginer de résolution plus parfaite du mouvement qu'en deux autres, dont l'un est tout-à-fait indifferant, & l'autre tout-à-fait opposé : toute autre résolution étant encore résoluble en celle-cy. »<sup>203</sup>

Ne reposant plus sur la mobilité d'un plan auxiliaire, cette « résolution » y gagne ainsi en généralité. A l'issue de chocs inélastiques, les mobiles ne possèdent plus que la vitesse commune BC car « les mouvemens d'équilibre AC, BC doivent se détruire l'un l'autre, puisqu'ils sont égaux & contraires. »<sup>204</sup> Quant aux corps élastiques, ils doivent « s'aplatir également » jusqu'à annulation de la vitesse respective, moment où ils tendent à suivre le comportement de corps inélastiques : il suffit alors ajouter ou soustraire à cette vitesse commune celles des rejaillissements (AC et BC) de chacun des deux mobiles pour déterminer l'état final du système. Bien qu'une telle pratique apparaisse déjà chez Mariotte<sup>205</sup>, Parent insiste davantage sur une décomposition

---

<sup>201</sup> Pour les chocs de deux corps « à ressort parfait », *ibid.*, 58-65.

<sup>202</sup> A. Parent (note 181), II, 760. L'expérience justifie ce premier point, montrant « les corps mous, omogenes & de même figure qui se rencontrent de quelque maniere que ce soit, sont également aplatis par le choq » ; elle valide le second, car « quand un ressort mis entre deux corps vient à se bander, il les écarte en leur donnant des vitesses réciproques à leurs masses, c'est-à-dire, des forces égales », *ibid.*

<sup>203</sup> *Ibid.*, 762-763. Voir le tableau précédent pour les décompositions.

<sup>204</sup> *Ibid.*, 764.

<sup>205</sup> Mariotte propose une technique comparable à celle de Parent. Que deux boules A et B (Figure 8 ci-dessous) se heurtent en D avec pour vitesses AD et BD, ou entre en collision en C, centre de gravité, avec des vitesses AC et BC, la vitesse respective demeure identique et, dans les deux cas, les mobiles subissent une même compression. Puisque, lors du choc en C, les vitesses de rebond suivent la proportion inverse des poids, cette proportion vaut aussi pour tous types de collisions. Mariotte donne alors une méthode géométrique de construction des vitesses finales illustrée ici dans le seul cas de mouvements initiaux de sens opposés. Soient A, B, deux corps parfaitement élastiques de vitesses AD, BD ; C le centre de gravité ; CD=CE. Après le choc, EA et EB représenteront les vitesses de A et B.

systématique d'un mouvement initial en un mouvement équilibré et un autre participant au mouvement final.

## 5.2 Centre de masse, choc et « Principe général »

D'Alembert fait aussi reposer son « principe général » sur la combinaison d'une décomposition avec une loi d'équilibre ; celui-ci lui permet, dans son *Traité de dynamique*, de déterminer des « Propriétés du centre de gravité commun de Plusieurs Corps. »<sup>206</sup> Pour Parent, un tel point revêt un caractère essentiel car il justifie l'usage des « *Mouvements d'équilibre* » et fonde ainsi sa méthode. Or, dans la démonstration d'une de ces « propriétés », D'Alembert décompose des mouvements initiaux au niveau du centre de masse<sup>207</sup>, ce qui permet alors de rapprocher son principe de la technique développée par Parent.

Ainsi, dans son « Theorème I », D'Alembert énonce que « l'état de Mouvement ou de repos du centre de gravité de plusieurs Corps, ne change point par l'action mutuelle de ces Corps entr'eux, pourvu que le système soit entièrement libre, c'est-à-dire qu'il ne soit assujéti à se mouvoir autour d'aucun point fixe. »<sup>208</sup> Il décompose les mouvements  $a, b, c$  etc., imprimés aux corps A, B, C etc. en  $a, b, c$  etc. et  $\alpha, \beta, \chi$  etc. ; inversement,  $a, b, c$  etc. se composent de  $a, b, c$  etc. et  $-\alpha, -\beta, -\chi$  etc. Le mouvement du centre de masse, en supposant les corps animés de  $a, b, c$  etc., ou en les supposant d'abord mus avec  $a, b, c$ , etc. et ensuite avec  $-\alpha, -\beta, -\chi$  etc. etc. ne diffère pas<sup>209</sup>. Selon le « principe », les corps soumis à  $-\alpha, -\beta, -\chi$  etc. demeurent au repos car ces composantes s'équilibrent : ceci conduit à l'équation  $-\alpha - \beta - \chi$  etc. = 0 puisque, par hypothèse, le système ne comporte pas de point fixe.<sup>210</sup> Ainsi, par la prise en compte des seuls  $-\alpha - \beta - \chi$  etc. « le chemin du centre de gravité est zero. »<sup>211</sup> Par conséquent,

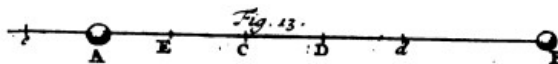


Figure 8 : E. Mariotte (note 132), Fig. 13

Sans « ressorts », les corps iraient avec la vitesse commune CD. Or, les vitesses de rejaillissements sont CA et CB. Ajouter CD ou EC à cette dernière donne une vitesse finale EB pour B ; soustraire cette quantité à CA donne EA pour A. Cf E. Mariotte (note 132), Proposition XV, 96-97 et Proposition XIX, 115-122.

<sup>206</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), 52.

<sup>207</sup> D'Alembert note que le « *centre de gravité* devrait plutôt [...] s'appeler *centre de masses* », expression qu'il attribue à « M. Daniel Bernoulli ; *Traité du flux & reflux*, Chap. I », tout en précisant conserver le premier terme pour se « conformer à l'usage reçu ». *Ibid.*, art. 51, 53.

<sup>208</sup> *Ibid.*, art. 64, 63.

<sup>209</sup> *Ibid.* D'Alembert établit cette proposition cinématique dans le Lemme IV, lui-même reposant sur les trois précédents. Le premier Lemme détermine le mouvement du centre de masse pour des corps animés de mouvements rectilignes uniformes parallèles entre eux (*ibid.*, art. 53, 54). Dans le second, D'Alembert décompose les mouvements uniformes de directions quelconques des corps en composantes parallèles (respectivement, pour simplifier, selon des directions horizontales et verticales) dont les résultantes donnent le mouvement du centre selon chaque direction ; composées, le mouvement du centre s'ensuit (*ibid.*, art. 54, 55-56). Le Lemme III énonce la conservation du mouvement du centre lors un déplacement global du système n'affectant ni les directions ni les vitesses des corps (*ibid.*, art. 56, 56-57). Enfin, le Lemme IV généralise le second en ne supposant plus des décompositions parallèles entre elles (*ibid.*, art. 57, 57-58).

<sup>210</sup> *A contrario*, des forces de directions quelconques dont la résultante non nulle passe par le point d'appui équilibrent une balance.

<sup>211</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), art. 64, 63. D'Alembert fait appel au Lemme V. Dans ce dernier, des corps A, B, C etc. joints ensemble forment un système sans point fixe et se voient imprimer les vitesses M, N, P etc. tels « qu'en vertu de ces Mouvements ils soient en équilibre » ; D'Alembert montre que si ces corps suivent librement M, N, P etc. le centre de gravité demeure au repos. En

« le chemin du centre de gravité est le même quand les Corps ont les Mouvements  $a, b, c, \&c.$  que s'ils suivoient les Mouvements  $a, b, c, \&c.$  qu'on leur a imprimés. »<sup>212</sup>

En adaptant une telle démonstration à une collision inélastique de deux mobiles A et B, avec  $a, b$  les mouvements incidents et  $a, b$  les mouvements finaux, d'après le « principe général »  $-\alpha - \beta = 0$  soit, comme l'écrit D'Alembert, « le chemin du centre de gravité est zéro ». D'après cette dernière précision, l'égalité  $-\alpha = \beta$ , soit l'équilibre requis par le principe, définit aussi le « centre de gravité » du système ; Parent écrirait qu'il s'agit là d'un « *Mouvement d'équilibre* ». Autrement dit, si D'Alembert ne s'appuie pas, comme Parent, sur ce centre pour résoudre des mouvements initiaux, et s'il ne prend donc pas pour préalable l'équilibre au niveau de ce point, les décompositions requises par son principe conduisent aux « *Mouvements d'équilibre* » et à un mouvement « *commun* » (qui correspond dans cet exemple à la vitesse finale de A et B égale à celle du centre de masse) de Parent. Un autre passage du *Traité de dynamique* permet à nouveau de rapprocher le principe de D'Alembert de la méthode de Parent.

Si D'Alembert établit les règles du choc inélastique (voir partie I), il n'énonce, dans son « Lemme XI », qu'une méthode pour déterminer celles de corps à « ressort » :

« si tant de Corps qu'on voudra viennent se choquer de manière, qu'en les supposant parfaitement durs & sans ressort, ils demeurent tous en repos après le choc ; je dis que s'ils sont à ressort parfait, ils retourneront en arriere chacun avec les vitesses qu'il avoit avant le choc. »<sup>213</sup>

L'effet du « ressort » restitue « en sens contraire à chaque Corps le Mouvement qu'il a perdu par l'action des autres »<sup>214</sup> et « on déduit aisément les Loix du Mouvement des Corps élastiques » à partir de celles des « Corps durs ». <sup>215</sup> D'Alembert n'évoque, ici, que le cas de quantités de mouvement égales et opposées ; la généralisation de ce Lemme prend la forme d'un « Corollaire » conséquence de l'énoncé précédent :

« Donc, si tant de Corps durs qu'on voudra se choquent à la fois, & que  $a, b \&c.$  soient leurs vitesses avant le choc, qui soient changées après le choc en  $a, b, \&c.$  alors regardant les vitesses  $a, b \&c.$  comme composées des vitesses  $a, \alpha$  ;  $b, \beta$  ; les vitesses de ces mêmes Corps après le choc, seront composées des vitesses  $a, -\alpha$  ;  $b, -\beta$  ;  $\&c.$  »<sup>216</sup>

---

décomposant  $M(m, m'), N(n, n'), Q(q, q')$  etc. avec  $m, n, q$  etc. parallèles entre elles et à une direction K et  $m', n', q'$  etc. parallèles entre elles et à une direction Q, la vitesse du centre de gravité sera, suivant K,  $\frac{A.m + B.n + C.q...}{A + B + C...}$  (1) et, suivant Q,  $\frac{A.m' + B.n' + C.q'...}{A + B + C...}$  (2). La condition d'équilibre impose, en l'absence de point fixe, que  $A.M + B.N + C.Q$  etc. = 0, ce qui donne deux équations obtenues pour les composantes selon K et Q ; celles-ci revenant à évaluer les numérateurs de (1) et (2) à zéro, il s'ensuit que le centre de gravité reste au repos. *Ibid.*, art. 60, 58-60.

<sup>212</sup> *Ibid.*, art. 64, 63.

<sup>213</sup> *Ibid.*, art. 136, 144.

<sup>214</sup> *Ibid.*

<sup>215</sup> *Ibid.*, art. 137, 144.

<sup>216</sup> *Ibid.* Dans la seconde édition de 1758 de son livre, D'Alembert ajoute « (dans le cas où ils seront élastiques) » immédiatement après « les vitesses de ces mêmes corps après le choc ». Cf. J. Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique* (Paris, 1758), art. 168, 218.

Donnons deux exemples permettant d'illustrer cette pratique. En notant A et B les masses de deux corps,  $A \times a = B \times b$  correspond à la configuration du « Lemme XI » : sous l'hypothèse inélastique le choc conduit au repos, soit à  $a=b=0$ , et  $-\alpha = -a$  et  $-\beta = -b$  sont les vitesses finales après l'effet du « ressort ». Si  $A \times a \neq B \times b$ , le « principe général » permet de déterminer la vitesse commune V de A et B supposés durs :  $V = \frac{A \times a - B \times b}{A + B}$  (voir partie I), égale à  $a=b$ , à laquelle il faut ensuite ajouter les vitesses de rebonds  $-\alpha, -\beta$ <sup>217</sup> ; dans cette application du principe, l'équilibre correspondrait à l'égalité  $A \times \alpha = B \times \beta$ , celle-là même qui définit le centre de gravité dans la démonstration du « Théorème I ». Dans les deux cas,  $a=b$  s'identifient à la vitesse de A et B avant leur rejaillissement soit, finalement, à celle du centre de masse du système : D'Alembert résout alors  $a, b$  en  $a, b$ , les vitesses dans l'hypothèse des corps durs, avec  $a=b=V$  qui correspond au mouvement « commun » ou « feint » de Parent, et en  $\alpha, \beta$  les vitesses des mouvements « d'équilibre » de Parent.

Par ailleurs, cette généralisation le « Lemme XI » sous la forme de son « Corollaire » repose sur un sous-entendu, à savoir un recours implicite à un principe de relativité : en effet, ceci revient à présupposer que, nul ou non, le mouvement du système, celui défini par la vitesse V et qui correspond au mouvement « commun », n'affecte pas l'interaction mécanique.<sup>218</sup>

Ainsi, non seulement D'Alembert développe une méthode rencontrée chez des prédécesseurs (Mariotte, Parent) revenant à s'appuyer sur un intermédiaire inélastique pour les collisions élastiques, mais son principe le conduit aussi, d'après le « Théorème I », à une décomposition au niveau du centre de masse associée implicitement, ce dont témoignent le « Lemme XI » et son « Corollaire », avec le « mouvement feint » de Parent. Ce dernier postule un principe de relativité qui donne son fondement, en 1713, à sa décomposition en mouvements « commun » et « d'équilibre ». *A contrario*, D'Alembert, par son principe, retrouve l'équilibre au niveau du centre de gravité ainsi que la possibilité que le mouvement du système n'affecte pas le choc<sup>219</sup> ; en somme, il établit les présupposés de Parent.

Dès lors, si les règles des chocs comme les « propriétés du centre de gravité » sont connues, l'enjeu, pour D'Alembert, tient davantage à cette ambition de les démontrer par l'usage d'un principe dont la vocation est « d'applanir l'abord » de la mécanique, de « donner à ses fondemens toute la solidité convenable », d'en « éclairer l'entrée ».<sup>220</sup> Leur lecture, confrontée aux travaux de Parent, sans prétendre que D'Alembert s'en inspire, suggère un rapprochement entre un principe de relativité combiné à une pratique de l'équilibre au niveau du centre de masse avec son « principe général ».

## 6. Conclusion

L'importance du choc des corps dans la première partie du *Traité de dynamique* (cf. C. G. Fraser (note 60), 33) et, plus généralement, dans la mécanique au tournant des 17<sup>e</sup> et 18<sup>e</sup> siècles, suggère que cet objet d'études puisse ne pas être étranger à l'origine du « Principe général » de D'Alembert. L'examen de la statique de Pierre

<sup>217</sup> Dans l'article « Percussion », D'Alembert détaille les règles de collisions élastiques. Cf. Jean Le Rond D'Alembert (note 7), 333b-334a.

<sup>218</sup> L'usage d'un principe de relativité apparaît, notamment, dans la démonstration du théorème du « Mouvement composé ». Cf. J. Le Rond D'Alembert (note 1), art. 21, 22-24.

<sup>219</sup> Le « Théorème I » conduit, d'une part, à formuler que « le chemin du centre de gravité est zéro » et, d'autre part, à affirmer que l'action mutuelle des corps ne modifie pas son mouvement.

<sup>220</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), Préface, iv.

Varignon basée sur des décompositions et équilibres de forces et, plus particulièrement, les analyses que cet auteur offre de la collision oblique, lesquelles figurent aussi dans plusieurs mémoires et ouvrages des années 1720 à 1740<sup>221</sup>, semblent conforter cette idée : D'Alembert reconnaît dans ce type de choc une application de son principe. D'autre part, s'appuyant sur des décompositions de mouvements incidents au niveau du centre de masse et sur un principe de relativité, la technique utilisée par Antoine Parent pour établir des règles de collision s'avère proche de la « Méthode générale » de D'Alembert au point de paraître l'anticiper.

Par ailleurs, la loi de l'équilibre énoncée par D'Alembert, jointe à des réflexions sur la causalité, n'est sans doute pas étrangère à la genèse de la « Méthode générale ». Comme le note A. Firode, outre l'hypothèse de la question du centre d'oscillation, « l'invention de ce théorème [le principe de D'Alembert] semble également devoir être rattachée aux préoccupations plus proprement philosophiques de son auteur concernant les notions de force ou de cause », D'Alembert proposant « une représentation tout à fait inhabituelle de la causalité mécanique »<sup>222</sup>. Ainsi, un corps lors du choc ne produit pas un nouveau mouvement sur un mobile mais « c'est désormais le mouvement initial que le corps possède avant sa rencontre avec un autre corps qui est envisagé, d'un point de vue mathématique, comme un mouvement composé comprenant à la fois le mouvement final et le mouvement perdu » ; par leurs actions les corps « ne se transmettent rien : ils se privent des mouvements qui sont mutuellement incompatibles », cette destruction s'identifiant à un équilibre<sup>223</sup>. Avec D'Alembert, l'affirmation suivant laquelle une collision de corps de quantités de mouvements égales produit un équilibre devient une loi démontrée à partir de sa seule conception du mouvement. Celle-ci repose sur le concept d'espace qui joint à l'impenétrabilité définit ce que D'Alembert nomme « un Corps »<sup>224</sup>, et sur celui de temps : espace et temps font partis des « notions les plus claires »<sup>225</sup> de la mécanique, celles « sur lesquelles s'accordent intuitivement et primitivement tous les esprits »<sup>226</sup>. La loi de l'équilibre ainsi établie rend inutile le recours aux « puissances » et participe alors de cette « nouvelle philosophie du mouvement » évoquée par O. Darrigol (cf. 1.2 *Le principe : portée philosophique et historiographie*) comme source possible du « Principe général » : en somme, celui-ci répondant à l'intention d'élaborer une mécanique sans force se verrait déterminé par ce refus d'une physique de type causale.

Tout en souscrivant à cette thèse, la partie 4 de cet article (*Equilibre et collisions au tournant des 17<sup>e</sup> et 18<sup>e</sup> siècles*) vise à inscrire la pratique de l'équilibre de D'Alembert dans un contexte historique afin d'en déterminer les racines. La loi de l'équilibre paraît ainsi relever d'une utilisation du principe des vitesses virtuelles dont le cadre d'application excède le domaine des machines simples. Ce principe devient

---

<sup>221</sup> Notamment dans des manuels. Les *Leçons de physique* de Privat de Molières portent pour sous titre « *Expliquées au Collège Royal de France* » et son auteur prétend y « démontrer les Elémens de la Physique » en précisant que « ces Leçons n'ont été composées que pour instruire les Commençans ». Cf. J. Privat de Molières (note 92), xij et xiv. J.-F. Traubaud écrit que le « but » de son ouvrage « n'est pas de traiter les matieres à fond, ni de dire tout, mais d'assembler des vérités qui soient comme fondamentales, d'établir des principes, de les déduire avec clarté, & de les mettre dans un ordre qui soit à la portée des Commençans », à savoir des « Ecoliers qui font leur Physique dans les Colleges », cf. J.-F. Traubaud (note 94), vi-vij. Ainsi la séquence de rédaction associant des compositions/décompositions de forces, la collision oblique de corps durs, le mouvement sur des plans contigus ressortit aux « Eléments » de mécanique.

<sup>222</sup> A. Firode (note 26), 132.

<sup>223</sup> *Ibid.*

<sup>224</sup> J. Le Rond D'Alembert (note 1), 1

<sup>225</sup> *Ibid.*, Préface, iv.

<sup>226</sup> Véronique Le Ru, *Jean Le Rond D'Alembert philosophe* (Paris, 1994), 31.

alors pourvoyeur de concepts dynamiques et l'identité entre la force ou le travail rencontrée chez certains auteurs<sup>227</sup>, identité d'autant plus évidente que dans des raisonnements se basant sur la théorie des proportions les masses peuvent se substituer aux poids, semble légitimer que la collision soit du ressort de la statique. En ce sens, par le biais de cette loi de l'équilibre, le principe des vitesses virtuelles fonde ainsi le « Principe général ».<sup>228</sup>

---

<sup>227</sup> Il ne s'agit pas de prétendre que les auteurs évoqués utilisent le concept de travail : nous utilisons ce terme simplement pour signifier que les grandeurs physiques correspondent d'un point de vue dimensionnel à ce concept.

<sup>228</sup> Sans toutefois que ce principe se réduise à celui des vitesses virtuelles, cf. 1.1 *Le principe et ses énoncés*.