



HAL
open science

Classification de relations d'inférence non-monotone : la prudence et les propriétés de déduction

Claudette Cayrol, Marie-Christine Lagasquie-Schiex

► To cite this version:

Claudette Cayrol, Marie-Christine Lagasquie-Schiex. Classification de relations d'inférence non-monotone : la prudence et les propriétés de déduction. [Rapport de recherche] 94-49, IRIT - Institut de recherche en informatique de Toulouse. 1994. hal-02881255

HAL Id: hal-02881255

<https://hal.science/hal-02881255>

Submitted on 25 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification de relations d'inférence
non-monotone :
la prudence et les propriétés de déduction

Claudette CAYROL
Marie-Christine LAGASQUIE-SCHIEX

Rapport IRIT / 94.49. R

Novembre 1994

Classification de relations d'inférence non-monotone : la prudence et les propriétés de déduction

Claudette Cayrol
Marie-Christine Lagasquie-Schiex
Institut de Recherche en Informatique de Toulouse
Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex
FRANCE

e-mail : {testemal, lagasq}@irit.fr

Résumé

Ce rapport présente des travaux de recherche menés à l'IRIT ("équipe Intelligence Artificielle et Robotique – Communication, Décision, Raisonnement"). Il s'agit de la suite d'une première étude présentée dans le rapport [CLS93] portant sur la complexité de certains processus d'inférence non-monotone sur une base de croyances E ordonnée ou pas et pouvant être initialement inconsistante.

Dans ce second rapport, nous continuons par deux études, une portant sur la prudence de processus d'inférence non-monotone et l'autre sur les propriétés de déduction de ces mêmes processus.

Ces processus sont construits de façon identique à celle décrite dans le rapport [CLS93] : combinaison d'un mécanisme de génération d'ensembles de croyances consistants issus de E et pouvant être ordonnés ou pas (ce mécanisme est noté m) et d'un principe d'inférence p . On obtient ainsi une relation d'inférence du type $(E, <) \vdash^{p,m} \Phi$.

Nous définissons ensuite une nouvelle relation d'inférence non monotone du type : $\Psi \vdash_{E, <}^{p,m} \Phi$.

Nous étudions alors la prudence puis les propriétés de déduction de telles relations.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Les définitions de la relation d'inférence non-monotone	4
2.1	La première définition	4
2.2	La seconde définition	5
2.3	Caractérisation des sous-ensembles préférés dans la première définition	5
2.3.1	Mécanisme de génération T	5
2.3.2	Mécanisme de génération S	6
2.3.3	Mécanisme de génération INCL	7
2.3.4	Mécanisme de génération BO	9
2.3.5	Mécanisme de génération CAR	13
2.3.6	Mécanisme de génération LEX	15
2.3.7	Mécanisme de génération E*	16
2.4	Comparaison des deux définitions	17
2.5	Quelle définition allons-nous utiliser ?	20
3	La prudence	22
4	État de l'art sur les propriétés de déduction	26
4.1	Les propriétés de Kraus, Lehmann et Magidor et leur sémantique	26
4.1.1	Le système C	27
4.1.2	Le système CL	29
4.1.3	Le système P	30
4.1.4	Le système CM	32
4.1.5	Le système M	34
4.1.6	Conclusion sur les travaux de Kraus, Lehmann et Magidor	35
4.2	Les propriétés de Gärdenfors et Makinson et leur sémantique	35
4.2.1	Les propriétés de Gärdenfors et Makinson	36
4.2.2	Le cas des ensembles "d'expectations"	37
4.2.3	Le cas des ordres "d'expectations"	39

5	Les résultats sur les propriétés de déduction	41
5.1	Les résultats déjà existants et leurs incidences	41
5.1.1	UNI-INCL, UNI-LEX, UNI-BO	41
5.1.2	UNI-E* et EXI-E*	43
5.1.3	Conclusion sur les résultats déjà existants	44
5.2	Les nouveaux résultats	45
5.2.1	La supra-classicité	45
5.2.2	La réflexivité	46
5.2.3	La préservation de la consistance	46
5.2.4	La conditionnalisation faible	46
5.2.5	Le OU	47
5.2.6	La monotonie rationnelle	48
5.2.7	L'équivalence logique gauche	51
5.2.8	L'affaiblissement droit	51
5.2.9	La coupure	52
5.2.10	La monotonie prudente	53
5.2.11	La cumulativité	55
5.2.12	Le ET	57
5.2.13	La monotonie rationnelle faible	58
5.3	Conclusion sur les résultats	60
6	La synthèse des résultats	63
6.1	Remarques sur les propriétés de déduction	63
6.1.1	Les similarités	63
6.1.2	Les différences	64
6.1.3	Lien avec les classifications existantes	64
6.1.4	Choix en fonction d'un ensemble de propriétés	65
6.2	Prudence et propriétés de déduction	65
6.3	Complexité, prudence et propriétés de déduction	66
6.3.1	La complexité	67
6.3.2	La prudence	67
6.3.3	Les propriétés de déduction	70
6.3.4	Les trois points de vue à la fois	70
6.4	Conclusion générale	77
	Bibliographie	78

Chapitre 1

Introduction

Nous retrouvons dans ce document le thème abordé dans le rapport [CLS93] : le raisonnement dans des systèmes à bases de croyances, plus particulièrement dans les situations où :

- la base de croyances peut être inconsistante,
- les informations qui sont dans la base sont incertaines.

Nous avons donc 2 motivations :

- pouvoir traiter les inconsistances éventuelles, ce qui nous amène à établir des préférences entre les informations afin de gérer les conflits,
- pouvoir rendre compte d'un fait incontestable : toutes les informations n'ont pas la même importance (par exemple, on peut faire intervenir un degré de certitude).

On parlera alors de paradigme des “croyances et préférences” constitué d'une base de croyances E et d'une relation notée $<$ sur les éléments de E , dite relation de préférence. Le couple $(E, <)$ est aussi appelé base de croyances stratifiée.

Il existe actuellement de nombreux formalismes proposés pour traiter ces problèmes. Ceux qui nous intéressent ici se ramènent tous à l'exploitation des sous-bases consistantes et éventuellement d'un ordre sur ces sous-bases, le but évident étant de continuer à pouvoir utiliser les mécanismes de la logique classique sur des parcelles de croyances cohérentes puisqu'on ne peut plus le faire sur la totalité des croyances, devenue incohérente.

D'autre part, nous nous situons dans un cadre syntaxique (“syntax-based” en anglais—voir [Neb91]), par opposition au cadre sémantique proposé par Gärdenfors et Makinson dans [Gär91, GM94].

Le but de ce document est donc de faire une synthèse de ces formalismes. Cette synthèse va s'effectuer au travers des relations d'inférence définies par les divers formalismes en utilisant la méthode décrite par [PL92] qui consiste à séparer le mécanisme de production des sous-bases consistantes de croyances (et éventuellement ordonnées), des principes gérant les conflits. Dans [CLS93], cette méthode ainsi que les mécanismes de production des sous-bases consistantes et les principes d'inférence utilisés ont été longuement décrits et nous ont amenés à définir 21 relations d'inférence du type $(E, <) \vdash^{p,m} \Phi$:

	Sous-bases consistantes sans ordre	Sous-bases consistantes avec ordre "BEST-OUT"	Thèses sans ordre	Thèses avec ordre basé sur l'inclusion	Thèses avec ordre basé sur la cardinalité	Thèses avec ordre lexicographique	Extensions Logique des défauts sans ordre
UNI	UNI-S		UNI-T				UNI-E*
EXI	EXI-S		EXI-T				EXI-E*
ARG	ARG-S		ARG-T				ARG-E*
UNI-PREF		UNI-BO		UNI-INCL	UNI-CAR	UNI-LEX	
EXI-PREF		EXI-BO		EXI-INCL	EXI-CAR	EXI-LEX	
ARG-PREF		ARG-BO		ARG-INCL	ARG-CAR	ARG-LEX	

Légende du tableau : Nous trouvons en colonne, les différents mécanismes de définition d'un ensemble de sous-ensembles consistants de E noté P^E et d'un ordre sur P^E et nous avons en ligne, les différents principes d'inférence considérés.

Rappelons rapidement que les mécanismes de génération utilisés ici sont définis par différents chercheurs :

- voir [Bre89, Cay90, Cay92, CRS92, DLP91] pour les thèses avec l'ordre basé sur l'inclusion,
- voir [BCD⁺93] pour les thèses avec l'ordre basé sur la cardinalité ou l'ordre lexicographique,
- voir [BCD⁺93, DLP91] pour les sous-bases consistantes avec l'ordre "BEST-OUT",
- voir [Rei80] pour les extensions de la logique des défauts¹,
- quant aux notions de sous-bases consistantes et de thèses, elles ont été très souvent utilisées dans la littérature. Nous rappelons ici les principales définitions : soit E un ensemble fini non vide de formules,
 - les sous-bases consistantes A de E sont les sous-ensembles de E consistants au sens de la logique classique ;
 - une sous-base A de E est une sous-base consistante maximale pour l'inclusion (sous-base maximale consistante) de E ssi :
 - A est une sous-base consistante,
 - il n'existe pas de sous-base consistante de E contenant strictement A ;
 - les sous-bases de E maximales consistantes seront aussi appelées thèses de E .

Ce rapport est structuré de la manière suivante :

1. à partir d'une relation du type $(E, <) \sim^{p,m} \Phi$ liant un ensemble $(E, <)$ et une formule Φ , nous définissons une nouvelle relation d'inférence non-monotone liant 2 formules Ψ et Φ dans un contexte $(E, <)$ donné : $\Psi \sim_{E, <}^{p,m} \Phi$; nous étudions et comparons deux définitions possibles d'une telle relation :

- $\Psi \sim_{E, <}^{p,m} \Phi$ ssi $(\Psi \oplus (E, <)) \sim^{p,m} \Phi$,
- $\Psi \sim_{E, <}^{p,m} \Phi$ ssi $(E, <) \sim^{p,m} (\Psi \rightarrow \Phi)$;

¹Nous ne nous intéresserons dans le cadre de cette étude qu'au cas des défauts super-normaux (les défauts super-normaux sont des défauts normaux sans pré-requis, donc de la forme " : b_i/b_i ") puisque, dans ce cas là, il existe un lien entre ce mécanisme et celui de Brewka (voir [Bre89]). Nous noterons ce mécanisme E* pour le distinguer du cas général noté E.

puis nous en choisissons une sur laquelle nous allons effectuer notre étude ;

2. étude de la prudence (cautiousness) (cf. [PL92]) des relations d'inférence $\Psi \sim_{E, <}^{p, m} \Phi$ correspondant à la définition choisie ;
3. état de l'art concernant les propriétés de déduction (synthèse des articles [KLM90, Gär91, GM94]) ;
4. étude de la relation d'inférence $\Psi \sim_{E, <}^{p, m} \Phi$ correspondant à la définition choisie du point de vue des propriétés de déduction vérifiées parmi l'ensemble des propriétés définies par [Gär91, GM94, KLM90] ;
5. conclusion de l'étude et perspectives.

Le but de cette synthèse est de compléter, du point de vue de la prudence et des propriétés de déduction vérifiées, le répertoire de formalismes initialisé du point de vue de la complexité dans [CLS93].

Nous avons donc 3 points de vue à synthétiser :

- la prudence ;
- la complexité de calcul ;
- les propriétés de déduction.

Ainsi, nous espérons arriver à mieux comprendre les différents formalismes étudiés et nous pourrions préciser davantage les intérêts de la relation d'inférence choisie par rapport à un contexte d'utilisation donné. Par exemple, quelle relation est la plus appropriée dans le contexte d'une application de diagnostic avec des hypothèses de panne ordonnées, dans le cas de connaissances hiérarchiques, dans un contexte de fusion de bases de connaissances.

Chapitre 2

Les définitions de la relation d'inférence non-monotone

Dans toute la suite, nous étudions la définition d'une relation d'inférence non-monotone du type $\Psi \sim_{E, <}^{p, m} \Phi$ avec :

- E : la base initiale (ensemble de formules propositionnelles) supposée finie,
- $<$: ordre entre les formules de E ,
- p : principe d'inférence,
- m : mécanisme de définition de sous-ensembles consistants de E avec un ordre entre ces sous-ensembles induit de $<$,
- Ψ et Φ : formules de la logique propositionnelle.

Nous ne redéfinissons pas les divers mécanismes m , ni les divers principes p . Nous renvoyons le lecteur à [CLS93].

2.1 La première définition

Définition 2.1.1 $\Psi \sim_{E, <}^{p, m} \Phi$ ssi $(\Psi \oplus (E, <)) \sim^{p, m} \Phi$

L'opérateur \oplus peut être défini de différentes manières.

Définition 2.1.2 Soit $(E, <)$ une base de croyances propositionnelle stratifiée ou pas et Ψ une formule propositionnelle, $(\Psi \oplus (E, <)) = (E \cup \{\Psi\}, <')$, avec l'ordre $<'$ étendant l'ordre $<$ en rajoutant une première strate à E ne contenant que Ψ ¹.

Cette définition 2.1.2 représente le point de vue de la révision de connaissances selon lequel la formule rajoutée est systématiquement conservée. Nous nous inspirons ici des travaux sur la révision menés entre autres par Nebel (cf. [Neb91]). Cette définition est la plus connue et la plus utilisée. C'est celle que nous exploiterons principalement dans cette étude.

Rappelons que le cadre syntaxique, dans lequel nous définissons nos relations d'inférence non-monotone, nous oblige à considérer la formule Ψ rajoutée comme un tout indivisible (elle est acceptée ou rejetée en intégralité) et ceci même si Ψ est une conjonction de formules².

Par contre, en s'éloignant du point de vue de la révision, on peut définir de nouveaux opérateurs \oplus .

¹C'est-à-dire que Ψ est strictement préférée à toute autre formule de E .

²Cette remarque aura son importance dans un certain nombre de démonstrations présentées dans ce rapport.

Définition 2.1.3 Soit $(E, <)$ une base de croyances propositionnelle, stratifiée ou pas, et Ψ une formule propositionnelle, $(\Psi \oplus (E, <)) = E \cup \{\Psi\}$, ensemble dans lequel toutes les formules sont de même priorité.

La sémantique de cette définition 2.1.3 repose sur le fait suivant : ce n'est pas parce qu'on rajoute une nouvelle information Ψ à nos croyances, que Ψ est plus fiable que les autres croyances de notre base. Cette définition pourra être utilisée pour les relations d'inférence non-monotone n'exploitant pas l'ordre existant entre les formules de la base E .

On peut aussi considérer que l'opérateur \oplus consiste à rajouter une information en précisant comment classer cette nouvelle croyance par rapport au reste de la base. Cela revient à insérer Ψ dans E soit en créant une strate spécifique pour Ψ , soit en plaçant Ψ dans une strate déjà existante, ce qui signifie qu'il faut mettre l'ordre $<$ à jour. Cette possibilité est complexe à mettre en œuvre et ne sera pas exploitée ici.

2.2 La seconde définition

Définition 2.2.1 $\Psi \sim_{E, <}^{p, m} \Phi$ ssi $(E, <) \vdash^{p, m} (\Psi \rightarrow \Phi)$

Cette définition présente l'avantage d'éviter de calculer de nouveaux sous-ensembles préférés. Travailler avec une nouvelle formule Ψ peut alors se faire à partir des sous-ensembles préférés de E . Ce n'est pas le cas avec la définition 2.1.1 dans laquelle on définit un nouvel ensemble $\Psi \oplus E$.

2.3 Caractérisation des sous-ensembles préférés dans la première définition

Pour chaque mécanisme de génération m , nous cherchons à caractériser les sous-ensembles m -préférés de $(\Psi \oplus (E, <))$ par rapport aux sous-ensembles m -préférés de $(E, <)$.

2.3.1 Mécanisme de génération T

L'ordre $<$, s'il existe, n'intervient pas dans le mécanisme de génération T ; en conséquence, nous notons la base E au lieu de $(E, <)$.

Quant à l'opérateur \oplus , il peut correspondre soit à la définition 2.1.3, soit à la définition 2.1.2. Or, dans le second cas, on veut absolument prendre en compte le fait que la formule rajoutée est la plus prioritaire. Le mécanisme INCL est alors le seul mécanisme qui nous intéresse. Donc, la définition 2.1.2 sera étudiée comme étant un cas particulier du théorème 2.3.3 et pour le mécanisme T, on obtient un seul théorème de caractérisation (2.3.1) correspondant à la définition 2.1.3.

Rappelons que les sous-ensembles préférés de E par le mécanisme T sont les thèses de E .

Théorème 2.3.1 Les thèses de $E \cup \{\Psi\}$ sont :

- soit des thèses Y de E ssi Y est inconsistante avec Ψ ,
- soit de la forme $\{\Psi\} \cup Y$ avec :
 - $Y \subseteq E$,
 - Y consistante avec Ψ ,
 - Y est maximale pour l'inclusion parmi les sous-bases Ψ -consistantes de E .

Preuve : Une thèse est un sous-ensemble consistant maximal pour l'inclusion. D'autre part, l'opérateur \oplus correspond à l'union. Par conséquent, un sous-ensemble Y' consistant maximal pour l'inclusion de $E \cup \{\Psi\}$ peut être :

- soit un sous-ensemble Y consistant maximal pour l'inclusion de E à condition que Y soit inconsistant avec Ψ (sinon Y' n'est pas maximal),
- soit l'union de Ψ avec une sous-base Y ; par construction, cette Y est incluse dans E et consistante avec Ψ ; Y est-elle maximale pour l'inclusion parmi les sous-bases de E consistantes avec Ψ ? la démonstration se fait en deux étapes :
 - condition suffisante : soit l'ensemble $Y' = \{\Psi\} \cup Y$ avec $Y \subseteq E$, Y consistante avec Ψ et Y maximale pour l'inclusion parmi les sous-bases de E consistantes avec Ψ alors Y' est maximale pour l'inclusion pour $\Psi \oplus E$, c'est donc une thèse de E' ;
 - condition nécessaire : soit Y' une thèse de $\Psi \oplus E$, alors Y' est de la forme $\{\Psi\} \cup Y$ avec $Y \subseteq E$, Y Ψ -consistante ; raisonnons par l'absurde et supposons que Y ne soit pas maximale pour l'inclusion parmi les sous-bases de E consistantes avec Ψ ; il existe alors $Z \subseteq E$ maximale pour l'inclusion parmi les sous-bases de E Ψ -consistantes telle que $Y \subset Z \Rightarrow \{\Psi\} \cup Y \subset \{\Psi\} \cup Z \Rightarrow \{\Psi\} \cup Y$ n'est pas une thèse de $E' \Rightarrow$ contradiction avec l'hypothèse Y' thèse de $\Psi \oplus E$.

Proposition 2.3.1 *Il y a au moins autant de thèses dans $E \cup \{\Psi\}$ que dans E .*

Preuve : D'après le théorème 2.3.1, chaque thèse Y de E sert à construire une thèse de $E \cup \{\Psi\}$ et les thèses ainsi construites sont différentes les unes des autres puisque les Y de E sont distinctes deux à deux. On obtient donc au moins autant de thèses préférées dans $E \cup \{\Psi\}$ que dans E .

Exemple : Soit la base $E = \{\rightarrow p, p \rightarrow o, p \rightarrow (\neg v), o \rightarrow v, o \rightarrow a\}$ et la formule $\Psi = (a \rightarrow v)$. On a 4 thèses dans E :

$Y_1 =$	$Y_2 =$	$Y_3 =$	$Y_4 =$
$\{\rightarrow p,$	$\{\rightarrow p,$	$\{\rightarrow p,$	$\{p \rightarrow o,$
$p \rightarrow o,$	$p \rightarrow o,$	$p \rightarrow (\neg v),$	$p \rightarrow (\neg v),$
$p \rightarrow (\neg v),$	$o \rightarrow v,$	$o \rightarrow v,$	$o \rightarrow v,$
$o \rightarrow a\}$	$o \rightarrow a\}$	$o \rightarrow a\}$	$o \rightarrow a\}$
Y_1 est Ψ -	Y_2 est	Y_3 est	Y_4 est
inconsistante.	Ψ -consistante.	Ψ -consistante.	Ψ -consistante.

Dans $E' = E \cup \{\Psi\}$, on a 5 thèses :

$Y'_1 = Y_1 =$	$Y'_2 =$	$Y'_3 =$	$Y'_4 =$	$Y'_5 =$
$\{\rightarrow p,$	$Y_2 \cup \{\Psi\} =$	$Y_3 \cup \{\Psi\} =$	$Y_4 \cup \{\Psi\} =$	$S \cup \{\Psi\} =$
$p \rightarrow o,$	$\{\rightarrow p,$	$\{\rightarrow p,$	$\{p \rightarrow o,$	$\{\rightarrow p,$
$p \rightarrow (\neg v),$	$p \rightarrow o,$	$p \rightarrow (\neg v),$	$p \rightarrow (\neg v),$	$p \rightarrow o,$
$o \rightarrow a\}$	$o \rightarrow v,$	$o \rightarrow v,$	$o \rightarrow v,$	$p \rightarrow (\neg v),$
	$o \rightarrow a,$	$o \rightarrow a,$	$o \rightarrow a,$	$a \rightarrow v\}$
	$a \rightarrow v\}$	$a \rightarrow v\}$	$a \rightarrow v\}$	avec S une
				partie de Y_1

2.3.2 Mécanisme de génération S

Ici aussi, comme pour le mécanisme T, l'opérateur \oplus correspond soit à la définition 2.1.3, soit à la définition 2.1.2. Or, dans le second cas, on veut absolument prendre en compte le fait que

la formule rajoutée est la plus prioritaire. Ceci ne correspond à aucun des mécanismes qui nous intéressent. Donc, la définition 2.1.2 ne sera pas étudiée et pour le mécanisme S, on obtient un seul théorème de caractérisation (2.3.2) correspondant à la définition 2.1.3.

Théorème 2.3.2 *Les sous-bases consistantes de $E \cup \{\Psi\}$ sont :*

- soit Y , quelle que soit Y sous-base consistante de E ,
- soit de la forme $\{\Psi\} \cup Y$ ssi Y est une sous-base consistante de E consistante avec Ψ .

Exemple : Soit la base E suivante : $E = \{\rightarrow a, ab \rightarrow, a \rightarrow b\}$. Posons $\Psi = \neg a$. Il y a 7 sous-bases consistantes dans E , dont 4 consistantes avec Ψ .

$Y_1 = \emptyset$ Y_1 est Ψ -consistante	$Y_2 = \{\rightarrow a\}$ Y_2 est Ψ -inconsistante	$Y_3 = \{\rightarrow a, ab \rightarrow\}$ Y_3 est Ψ -inconsistante	$Y_4 = \{\rightarrow a, a \rightarrow b\}$ Y_4 est Ψ -inconsistante
$Y_5 = \{ab \rightarrow, a \rightarrow b\}$ Y_5 est Ψ -consistante	$Y_6 = \{ab \rightarrow\}$ Y_6 est Ψ -consistante	$Y_7 = \{a \rightarrow b\}$ Y_7 est Ψ -consistante	

Dans $E' = \{\Psi\} \cup E$, on a 11 sous-bases consistantes (7 + 4).

$Y'_1 = Y_1 = \emptyset$	$Y'_2 = Y_2 = \{\rightarrow a\}$	$Y'_3 = Y_3 = \{\rightarrow a, ab \rightarrow\}$	$Y'_4 = Y_4 = \{\rightarrow a, a \rightarrow b\}$
$Y'_5 = Y_5 = \{ab \rightarrow, a \rightarrow b\}$	$Y'_6 = Y_6 = \{ab \rightarrow\}$	$Y'_7 = Y_7 = \{a \rightarrow b\}$	$Y'_8 = \{a \rightarrow\}$
$Y'_9 = \{a \rightarrow, ab \rightarrow, a \rightarrow b\}$	$Y'_{10} = \{a \rightarrow, ab \rightarrow\}$	$Y'_{11} = \{a \rightarrow, a \rightarrow b\}$	

2.3.3 Mécanisme de génération INCL

La base de croyances étant stratifiée, seule la définition 2.1.2 de l'opérateur \oplus présente un intérêt. Rappelons que les sous-ensembles préférés de E par le mécanisme INCL sont les thèses de E préférées pour l'inclusion (appelées thèses incl-préférées). On obtient ainsi le théorème 2.3.3.

Théorème 2.3.3 *Les thèses de $\Psi \oplus E$ incl-préférées sont de la forme $\{\Psi\} \cup S$ avec :*

- $S \subseteq E$,
- S consistante avec Ψ ,
- S incl-préférée parmi les sous-bases de E consistantes avec Ψ .

Preuve : La démonstration se fait en deux étapes (c'est une généralisation d'une partie de la démonstration du théorème 2.3.1). La base E est stratifiée de la manière suivante : $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$ avec E_i la strate numéro i de E et $E_0 = \{\Psi\}$.

- condition suffisante : soit l'ensemble $Y = \{\Psi\} \cup S$ avec $S \subseteq E$, S consistante avec Ψ et S incl-préférée parmi les sous-bases de E consistantes avec Ψ , montrons par l'absurde que Y est incl-préférée dans $\Psi \oplus E$; si ce n'est pas le cas alors il existe $Z \subseteq \Psi \oplus E$ telle que Z est incl-préférée à Y ; c'est-à-dire, si on en revient à la définition (voir dans [CLS93]) : $\exists i, 0 \leq i \leq n$, tel que $Y_i \subset Z_i$, et $\forall j < i, Y_j = Z_j$; or $Y = \{\Psi\} \cup S \Rightarrow Y_0 \neq \emptyset \Rightarrow i \geq 1$ et $Z_0 = \{\Psi\} \Rightarrow \exists i, 1 \leq i \leq n$, tel que $S_i = Y_i \subset Z_i$, et $\forall j < i, Y_j = Z_j$ ce qui voudrait dire que S n'est pas incl-préférée parmi les sous-bases Ψ -consistantes, donc contradiction.
- condition nécessaire : soit Y une thèse incl-préférée de $\Psi \oplus E$, alors Y est de la forme $\{\Psi\} \cup S$ avec $S \subseteq E$, S Ψ -consistante ; raisonnons par l'absurde et supposons que S ne soit pas incl-préférée parmi les sous-bases de E consistantes avec Ψ ; il existe alors $Z \subseteq E$ incl-préférée parmi les sous-bases de E Ψ -consistantes telle que Z est incl-préférée à S ; c'est-à-dire, si on en revient à la définition (voir dans [CLS93]) : $\exists i, 1 \leq i \leq n$, tel que $S_i \subset Z_i$, et $\forall j < i, S_j = Z_j$; ceci implique que $Z \cup \{\Psi\}$ est incl-préférée à $S \cup \{\Psi\} = Y$, ce qui est contradiction avec l'hypothèse de départ.

Proposition 2.3.2 *Il y a au moins autant de thèses incl-préférées dans $\Psi \oplus E$ que de thèses incl-préférées consistantes avec Ψ dans E .*

Preuve : D'après le théorème 2.3.3, le nombre de thèses incl-préférées de $\Psi \oplus E$ est égal au nombre de S incl-préférées parmi les sous-bases de E Ψ -consistantes. Parmi ces S , on retrouve toutes les thèses incl-préférées dans E consistantes avec Ψ . Donc il y a au moins autant de thèses incl-préférées dans $\Psi \oplus E$ que de thèses incl-préférées consistantes avec Ψ dans E .

Remarque : Chaque thèse incl-préférée de E inconsistante avec Ψ permet de trouver au moins un sous-ensemble S satisfaisant les conditions du théorème 2.3.3. En effet, soit Y une thèse incl-préférée de E inconsistante avec Ψ , il suffit d'appliquer l'algorithme suivant :

1. $X \leftarrow \{\Psi\}$
2. pour chaque strate i de Y faire
3. déterminer $X_i \subseteq Y_i$ maximal pour l'inclusion et X -consistant
4. $X \leftarrow X \cup X_i$
5. $S \leftarrow X \setminus \{\Psi\}$

Cependant, chaque thèse incl-préférée de E inconsistante avec Ψ peut permettre de trouver plusieurs S . Par exemple, la thèse incl-préférée Y inconsistante avec Ψ suivante permet de trouver deux sous-ensembles S_1 et S_2 .

$$\begin{array}{l}
 Y \text{ est : } \left| \begin{array}{c} b \\ \hline c \quad d \quad c \rightarrow (\neg\Psi) \\ \hline e \end{array} \right. \\
 \\
 S_1 \text{ est : } \left| \begin{array}{c} b \\ \hline c \quad d \\ \hline e \end{array} \right. \\
 \\
 S_2 \text{ est : } \left| \begin{array}{c} b \\ \hline d \quad c \rightarrow (\neg\Psi) \\ \hline e \end{array} \right.
 \end{array}$$

De même, un même sous-ensemble S peut être issu de plusieurs thèses incl-préférées de E inconsistantes avec Ψ . Par exemple, la base E suivante admet deux thèses incl-préférées toutes inconsistantes avec $\Psi = a$ et il n'existe qu'un seul S issu de ces deux thèses :

$$\begin{array}{l}
 E \text{ est : } \left| \begin{array}{c} (\neg a) \wedge b \quad (\neg a) \wedge (\neg b) \\ \hline c \end{array} \right. \\
 \\
 S \text{ est : } \left| c \right.
 \end{array}$$

Exemple : Soient la formule $\Psi = (a \rightarrow v)$ et la base E suivante :

$$\frac{\begin{array}{c} \rightarrow p \\ p \rightarrow o \end{array}}{p \rightarrow (\neg v)} \quad \frac{\begin{array}{c} o \rightarrow v \end{array}}{o \rightarrow a}$$

Les 2 thèses incl-préférées de E sont :

$$\begin{array}{c|c} Y_1 = & Y_2 = \\ \{ \rightarrow p, & \{ \rightarrow p, \\ p \rightarrow o, & p \rightarrow o, \\ p \rightarrow (\neg v), & o \rightarrow v, \\ o \rightarrow a \} & o \rightarrow a \} \\ Y_1 \text{ est } \Psi\text{-} & Y_2 \text{ est} \\ \text{inconsistante.} & \Psi\text{-consistante.} \end{array}$$

Dans $E' = \Psi \oplus E$, on a 2 thèses incl-préférées :

$$\begin{array}{c|c} Y'_1 = & Y'_2 = \\ \{ \Psi \} \cup S = & Y_2 \cup \{ \Psi \} = \\ \{ a \rightarrow v, & \{ a \rightarrow v, \\ \rightarrow p, & \rightarrow p, \\ p \rightarrow o, & p \rightarrow o, \\ p \rightarrow (\neg v) \} & o \rightarrow v, \\ \text{avec } S \text{ une} & o \rightarrow a, \\ \text{partie de } E & a \rightarrow v \} \end{array}$$

2.3.4 Mécanisme de génération BO

Dans ce mécanisme de génération issu de l'ordre "Best-Out", on repère le numéro de la strate la plus prioritaire à partir de laquelle se produit une inconsistance ; dans E , ce numéro sera noté $amax$ et dans $E' = \Psi \oplus E$, il sera noté $amax2$.

D'autre part, comme pour le mécanisme INCL et pour les mêmes raisons (voir section 2.3.3), la seule définition de \oplus utilisée sera la définition 2.1.2.

On a alors les propriétés suivantes :

Propriété 2.3.1 L'ensemble $N(E) = \cup_{i=1, \dots, amax-1} E_i$ appelé le noyau de E est consistant.

Propriété 2.3.2 $\forall Y$, sous-base bo-préférée de E , $Y = N(E) \cup S$ avec $S \subset E_{amax} \cup \dots \cup E_n$ et S noyau-consistant.

Quelle que soit la formule Ψ que l'on rajoute en première strate à E pour constituer E' , on se retrouve dans un des 4 cas suivants :

1. soit l'apparition de Ψ provoque une inconsistance dans une strate i de E' plus prioritaire que celle pointée par le $amax$ de E , on obtient la figure 2.1 et on en conclut que $amax2$ est égal à i .
2. soit l'apparition de Ψ provoque une inconsistance dans une strate i de E' moins prioritaire que celle pointée par le $amax$ de E , on obtient la figure 2.2 et on en conclut que $amax2$ est égal à $amax$.

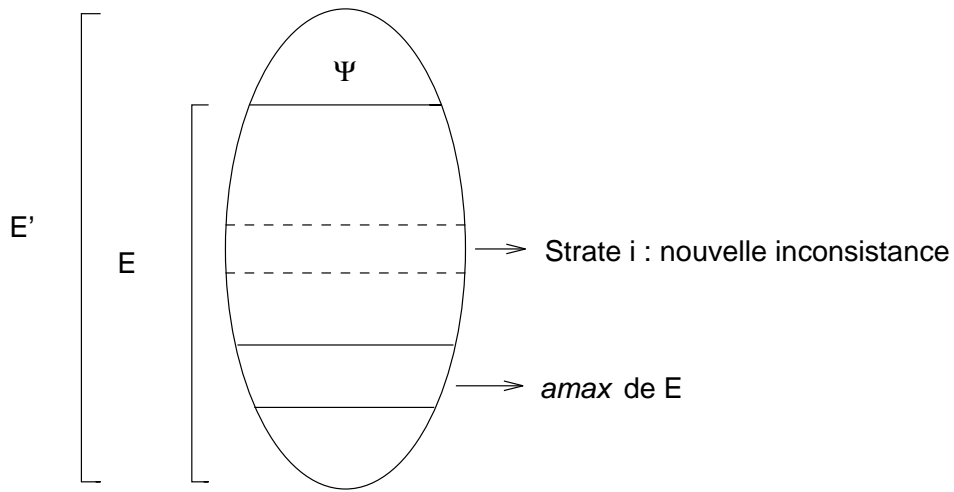


Figure 2.1: Inconsistance avant la strate *amax*

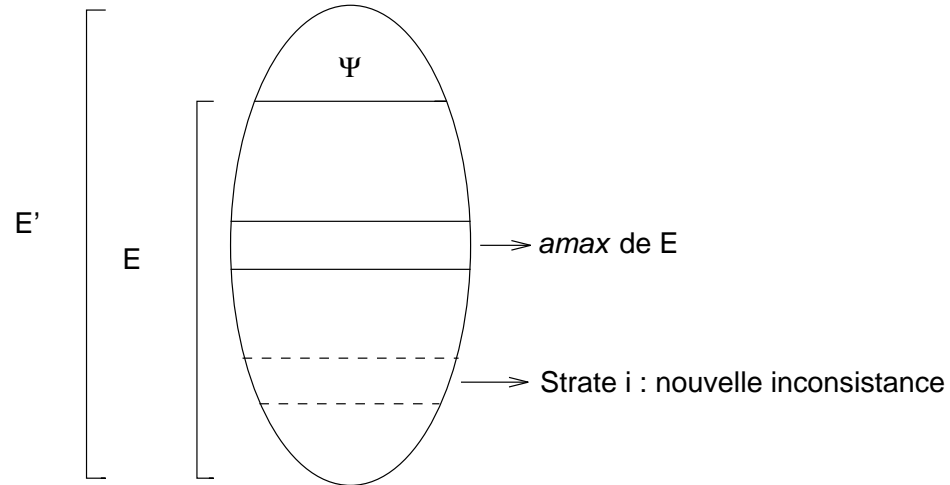


Figure 2.2: Inconsistance après la strate *amax*

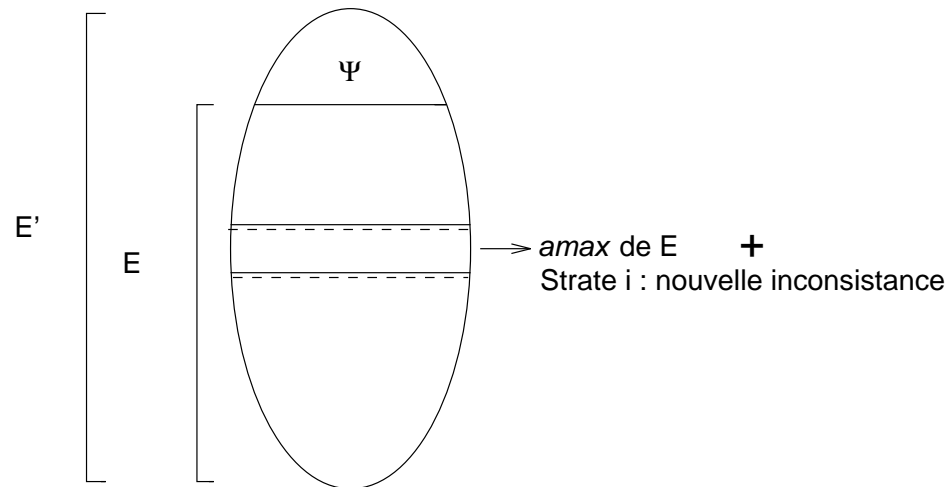


Figure 2.3: Inconsistance dans la strate *amax*

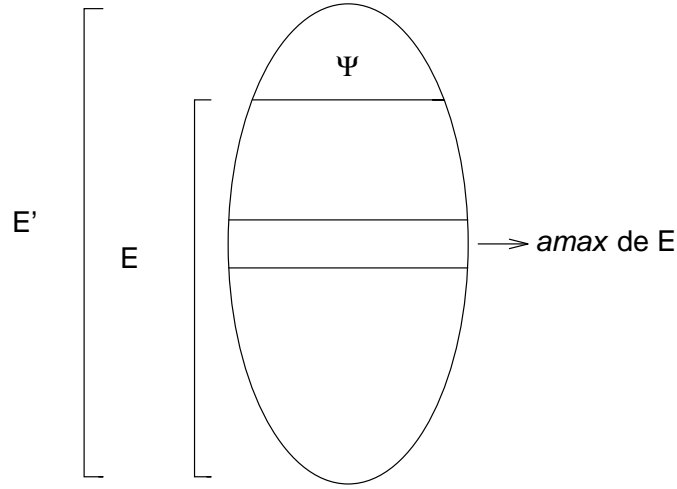


Figure 2.4: Pas de nouvelle inconsistance

3. soit l'apparition de Ψ provoque une inconsistance dans l'ancienne strate amax de E , on obtient la figure 2.3 et on en conclut que $\text{amax}2$ est égal à amax .
4. soit l'apparition de Ψ ne provoque aucune nouvelle inconsistance, on obtient la figure 2.4 et on en conclut que $\text{amax}2$ est égal à amax .

On constate donc que, dans tous les cas, $\text{amax}2 \leq \text{amax}$. On obtient le théorème de caractérisation suivant :

Théorème 2.3.4 Les sous-bases bo-préférées de $E' = \Psi \oplus E$ sont définies par :

- soit $\text{amax}2 = \text{amax}$: les seules sous-bases bo-préférées de E' sont de la forme $Y' = \{\Psi\} \cup Y$ avec Y sous-base bo-préférée de E Ψ -consistante³ ; on a alors autant de Y' que de Y Ψ -consistantes ;
- soit $\text{amax}2 < \text{amax}$: les seules sous-bases bo-préférées de E' sont de la forme $Y' = \{\Psi\} \cup Z$ où Z est un sous-ensemble de E Ψ -consistant et tel que $N(E') \subseteq Z$.

On a alors la propriété suivante :

Propriété 2.3.3 $\text{amax}2 < \text{amax} \Rightarrow \forall Y$ une sous-base bo-préférée de E , Y est Ψ -inconsistante.

Preuve : $\forall Y$, sous-base bo-préférée de E , $Y = N(E) \cup S$ avec $S \subset E_{\text{amax}} \cup \dots \cup E_n$ et S noyau-consistant ; or, si $\text{amax}2 < \text{amax}$, alors $\{\Psi\} \cup N(E)$ inconsistant ; donc $N(E)$ Ψ -inconsistant ; donc $\forall Y$, Y est Ψ -inconsistante.

Rappelons aussi quelques propriétés données dans [BCD⁺ 93] :

Propriété 2.3.4 Parmi les sous-bases bo-préférées de E , on trouve les sous-bases incl-préférées de E .

Propriété 2.3.5 Les sous-bases bo-préférées de E sont les sous-bases consistantes de E contenant $N(E)$ ($N(E) = \cup_{i=1, \dots, \text{amax}-1} E_i$).

³En effet, $\text{amax}2 = \text{amax} \Rightarrow N(E') = \{\Psi\} \cup N(E) \Rightarrow Y' = N(E') \cup S' = \{\Psi\} \cup N(E) \cup S' = \{\Psi\} \cup Y$ avec Y Ψ -consistante.

Propriété 2.3.6 Soit $\text{amax}(\Psi)$ l'indice maximal tel que $\cup_{i=1, \dots, \text{amax}(\Psi)-1} E_i$ soit Ψ -consistant, alors les sous-bases de E qui sont bo-préférées parmi les sous-bases Ψ -consistantes de E sont les sous-bases consistantes contenant $\cup_{i=1, \dots, \text{amax}(\Psi)-1} E_i$.

On en déduit la propriété suivante :

Propriété 2.3.7 Les sous-bases bo-préférées de $\Psi \oplus E$ sont exactement de la forme $\{\Psi\} \cup S$ avec $S \subseteq E$ sous-base bo-préférée parmi les sous-bases Ψ -consistantes de E .

Preuve : On détermine $N(\Psi \oplus E) = \{\Psi\} \cup (\cup_{i=1, \dots, \text{amax}(\Psi)-1} E_i)$; or, par définition, $\text{amax}(\Psi \oplus E)$ correspond exactement à $\text{amax}(\Psi)$ l'indice maximal tel que $\cup_{i=1, \dots, \text{amax}(\Psi)-1} E_i$ soit Ψ -consistant ; donc en utilisant les propriétés 2.3.5 et 2.3.6, on obtient que $N(\Psi \oplus E) = \{\Psi\} \cup (\cup_{i=1, \dots, \text{amax}(\Psi)-1} E_i)$, d'où la propriété annoncée.

Exemple : Nous retrouvons ici les deux cas présentés ci-dessus.

- Soit la base E suivante composée de 3 strates :

$$E = \begin{array}{l} \{ \rightarrow p, \\ p \rightarrow o, \\ \hline p \rightarrow (\neg v), \\ o \rightarrow v, \\ \hline o \rightarrow a \} \end{array}$$

Ici, $\text{amax} = 2$. Posons $\Psi = a \rightarrow v$. Les 6 sous-bases bo-préférées de E sont :

$$\begin{array}{l} Y_1 = \\ \{ \rightarrow p, \\ p \rightarrow o \} \end{array} \left| \begin{array}{l} Y_2 = \\ \{ \rightarrow p, \\ p \rightarrow o, \\ p \rightarrow (\neg v) \} \end{array} \right| \begin{array}{l} Y_3 = \\ \{ \rightarrow p, \\ p \rightarrow o, \\ o \rightarrow v \} \end{array} \left| \begin{array}{l} Y_4 = \\ \{ \rightarrow p, \\ p \rightarrow o, \\ o \rightarrow v, \\ o \rightarrow a \} \end{array} \right| \begin{array}{l} Y_5 = \\ \{ \rightarrow p, \\ p \rightarrow o, \\ p \rightarrow (\neg v), \\ o \rightarrow a \} \end{array} \left| \begin{array}{l} Y_6 = \\ \{ \rightarrow p, \\ p \rightarrow o, \\ o \rightarrow a \} \end{array} \right.$$

avec Y_5 qui est Ψ -inconsistante et les autres qui sont Ψ -consistantes.

On a alors $\text{amax}(\Psi \oplus E) = \text{amax}$ et les 5 sous-bases bo-préférées de E' sont :

$$\begin{array}{l} Y'_1 = \\ \{\Psi\} \cup Y_1 = \\ \{ a \rightarrow v, \\ \rightarrow p, \\ p \rightarrow o \} \end{array} \left| \begin{array}{l} Y'_2 = \\ \{\Psi\} \cup Y_2 = \\ \{ a \rightarrow v, \\ \rightarrow p, \\ p \rightarrow o, \\ p \rightarrow (\neg v) \} \end{array} \right| \begin{array}{l} Y'_3 = \\ \{\Psi\} \cup Y_3 = \\ \{ a \rightarrow v, \\ \rightarrow p, \\ p \rightarrow o, \\ o \rightarrow v \} \end{array} \left| \begin{array}{l} Y'_4 = \\ \{\Psi\} \cup Y_4 = \\ \{ a \rightarrow v, \\ \rightarrow p, \\ p \rightarrow o, \\ o \rightarrow v, \\ o \rightarrow a \} \end{array} \right| \begin{array}{l} Y'_5 = \\ \{\Psi\} \cup Y_5 = \\ \{ a \rightarrow v, \\ \rightarrow p, \\ p \rightarrow o, \\ o \rightarrow a \} \end{array}$$

- Soit la base E suivante composée de deux strates :

$$E = \begin{array}{l} a \\ \hline \neg v \\ a \rightarrow o \\ o \rightarrow v \end{array}$$

Ici, $\text{amax} = 2$. Posons $\Psi = a \rightarrow v$. Les 3 sous-bases bo-préférées de E sont :

$$\begin{array}{l} Y_1 = \\ \{ a, \\ \neg v \} \end{array} \left| \begin{array}{l} Y_2 = \\ \{ a, \\ \neg v, \\ a \rightarrow o \} \end{array} \right| \begin{array}{l} Y_3 = \\ \{ a, \\ \neg v, \\ o \rightarrow v \} \end{array}$$

On a alors $\text{amax}2 = 1 < \text{amax}$ et les 11 sous-bases bo-préférées de E' sont :

$Y'_1 =$ $\{ a \rightarrow v \}$	$Y'_2 =$ $\{ a \rightarrow v,$ $a \}$	$Y'_3 =$ $\{ a \rightarrow v,$ $a,$ $a \rightarrow o \}$	$Y'_4 =$ $\{ a \rightarrow v,$ $a,$ $o \rightarrow v \}$	$Y'_5 =$ $\{ a \rightarrow v,$ $a,$ $a \rightarrow o,$ $o \rightarrow v \}$	$Y'_6 =$ $\{ a \rightarrow v,$ $\neg v \}$
$Y'_7 =$ $\{ a \rightarrow v,$ $\neg v,$ $a \rightarrow o \}$	$Y'_8 =$ $\{ a \rightarrow v,$ $\neg v,$ $o \rightarrow v \}$	$Y'_9 =$ $\{ a \rightarrow v,$ $a \rightarrow o \}$	$Y'_{10} =$ $\{ a \rightarrow v,$ $a \rightarrow o,$ $o \rightarrow v \}$	$Y'_{11} =$ $\{ a \rightarrow v,$ $o \rightarrow v \}$	

2.3.5 Mécanisme de génération CAR

Les sous-ensembles préférés de E par le mécanisme CAR sont les thèses de cardinalité maximale. Notons n le cardinal des thèses car-préférées de E .

Quant à l'opérateur \oplus , il peut correspondre soit à la définition 2.1.3, soit à la définition 2.1.2. Or, dans le second cas, on veut absolument prendre en compte le fait que la formule rajoutée est la plus prioritaire. Le mécanisme LEX est alors le seul mécanisme qui nous intéresse. Donc, la définition 2.1.2 sera étudiée comme étant un cas particulier du théorème 2.3.6 et pour le mécanisme CAR, on obtient un seul théorème de caractérisation (2.3.5) correspondant à la définition 2.1.3.

Théorème 2.3.5 Les thèses car-préférées Y' de $E \cup \{\Psi\}$ sont caractérisées par une seule des situations suivantes :

1. soit $Y' = Y$ ($|Y'| = n$) lorsque :
 - Y est une thèse car-préférée de E inconsistante avec Ψ ,
 - il n'existe pas de thèse de E qui soit Ψ -consistante (le cas 2 ne se produit pas) ;
2. soit $Y' = \{\Psi\} \cup Y$ ($|Y'| = n + 1$) lorsque Y est une thèse de E consistante avec Ψ , et ce cas masque les cas 1 et 3 ;
3. soit $Y' = \{\Psi\} \cup S$ ($|Y'| = n$) lorsque :
 - le cas 2 ne se produit pas,
 - S est une sous-base de E consistante avec Ψ telle que $|S| = n - 1$.

Preuve : Une sous-base car-préférée est un sous-ensemble consistant maximal pour la cardinalité. Remarquons que les sous-bases car-préférées de E ont toutes le même cardinal noté n . D'autre part, l'opérateur \oplus correspond à l'union. Par conséquent, un sous-ensemble Y' consistant maximal pour la cardinalité de $E \cup \{\Psi\}$ peut être :

- (cas 1) soit un sous-ensemble Y' consistant maximal pour la cardinalité de E à condition que Y' soit inconsistent avec Ψ (sinon Y' n'est pas maximal pour la cardinalité puisque non maximal pour l'inclusion) et qu'il n'existe pas de sous-ensemble Y consistant maximal pour la cardinalité de E et Ψ -consistant (sinon Y' n'est pas maximal pour la cardinalité, puisque $|Y \cup \{\Psi\}| > |Y'|$, voir cas 2) ; dans ce cas le cardinal des car-préférées de $\Psi \oplus E$ est n ;
- soit l'union de Ψ avec un sous-ensemble S ; par construction, ce S est inclus dans E et consistant avec Ψ ; on a alors deux cas :
 - (cas 2) S est maximal pour la cardinalité parmi les sous-bases de E consistantes avec Ψ : soit l'ensemble $Y' = \{\Psi\} \cup S$ avec $S \subseteq E$, S consistante avec Ψ et S maximal pour la cardinalité parmi les sous-bases de E consistantes avec Ψ alors $|Y'| = n + 1$; raisonnons par l'absurde en supposant que Y' n'est pas car-préférée, ceci implique qu'il existe Z' telle $|Z'| > |Y'|$; on a alors deux cas possibles :

- soit Z' contient Ψ et alors il existe un sous-ensemble Z de E tel que $|Z| > n$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que n est le cardinal maximal des sous-ensembles de E ;
- soit Z' ne contient pas Ψ et alors Z' est un sous-ensemble de E tel que $|Z'| > n$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que n est le cardinal maximal des sous-ensembles de E ;

Ce cas exclut bien-sûr les cas 1 et 3 puisque ici les car-préférées de $\Psi \oplus E$ ont pour cardinal $n + 1$ alors que dans tous les autres cas ce cardinal est de n .

- (cas 3) S n'est pas maximal pour la cardinalité parmi les sous-bases de E consistantes avec Ψ : il y a deux cas possibles :
 - soit $|S| < n - 1$: $|S \cup \{\Psi\}| < n$ et alors $\forall Y$ sous-base car-préférée de E , $|S \cup \{\Psi\}| < |Y|$; sachant que les Y Ψ -consistantes donneront d'après le cas 2 des Y' car-préférées de cardinalité $n + 1$ et, si ce cas ne se produit pas, alors les Y Ψ -inconsistantes donneront d'après le cas 1 des Y' car-préférées de cardinalité n , donc un sous-ensemble S de E Ψ -consistant de cardinalité $< n - 1$ ne peut donner une sous-base car-préférée de $\Psi \oplus E$;
 - soit $|S| = n - 1$: $|S \cup \{\Psi\}| = n$ et alors si le cas 2 ne se produit pas (il n'existe pas de Y sous-base car-préférée de E Ψ -consistante) l'ensemble $Y' = S \cup \{\Psi\}$ a une cardinalité maximale de n comme les sous-bases car-préférées de $\Psi \oplus E$ obtenues par le cas 1, et les Y' ainsi définies sont aussi des car-préférées de $\Psi \oplus E$.

Propriété 2.3.8 S'il existe des Y thèses car-préférées de E qui sont Ψ -consistantes :

- alors il y a autant de thèses car-préférées dans $E \cup \{\Psi\}$ que de thèses car-préférées de E Ψ -consistantes ;
- sinon il y a plus de thèses car-préférées dans $E \cup \{\Psi\}$ que de thèses car-préférées de E .

Exemple : Soit la base $E = \{\rightarrow p, p \rightarrow o, p \rightarrow (\neg v), o \rightarrow v, o \rightarrow a\}$ et la formule $\Psi = (a \rightarrow v)$. On a 4 thèses car-préférées dans E :

$Y_1 =$	$Y_2 =$	$Y_3 =$	$Y_4 =$
$\{ \rightarrow p,$	$\{ \rightarrow p,$	$\{ \rightarrow p,$	$\{ p \rightarrow o,$
$p \rightarrow o,$	$p \rightarrow o,$	$p \rightarrow (\neg v),$	$p \rightarrow (\neg v),$
$p \rightarrow (\neg v),$	$o \rightarrow v,$	$o \rightarrow v,$	$o \rightarrow v,$
$o \rightarrow a\}$	$o \rightarrow a\}$	$o \rightarrow a\}$	$o \rightarrow a\}$
Y_1 est Ψ -	Y_2 est	Y_3 est	Y_4 est
inconsistante.	Ψ -consistante.	Ψ -consistante.	Ψ -consistante.

Dans $E' = E \cup \{\Psi\}$, on a 3 thèses car-préférées (ici, c'est le cas numéro 2 qui se produit) :

$Y'_1 =$	$Y'_2 =$	$Y'_3 =$
$Y_2 \cup \{\Psi\} =$	$Y_3 \cup \{\Psi\} =$	$Y_4 \cup \{\Psi\} =$
$\{ \rightarrow p,$	$\{ \rightarrow p,$	$\{ p \rightarrow o,$
$p \rightarrow o,$	$p \rightarrow (\neg v),$	$p \rightarrow (\neg v),$
$o \rightarrow v,$	$o \rightarrow v,$	$o \rightarrow v,$
$o \rightarrow a,$	$o \rightarrow a,$	$o \rightarrow a,$
$a \rightarrow v\}$	$a \rightarrow v\}$	$a \rightarrow v\}$

Autre exemple : La base E est la même que celle de l'exemple ci-dessus, on a donc les mêmes thèses car-préférées pour E . Par contre, on choisit $\Psi = ((a \rightarrow v) \wedge o \wedge (\neg v))$. Les 4 thèses car-préférées de E sont toutes Ψ -inconsistantes, ce sont donc les cas 1 et 3 qui se produisent. On obtient 5 thèses car-préférées pour E' :

- $Y'_1 = Y_1$,
- $Y'_2 = Y_2$,
- $Y'_3 = Y_3$,
- $Y'_4 = Y_4$,
- $Y'_5 = \Psi \cup \{\rightarrow p, p \rightarrow o, p \rightarrow (\neg v)\}$.

Remarque : Nous travaillons dans un cadre “syntax-based” donc, bien que la formule Ψ soit un ensemble de trois clauses, elle est considérée comme une seule croyance.

2.3.6 Mécanisme de génération LEX

Les sous-ensembles préférés de E par le mécanisme LEX sont les thèses de E préférées lexicographiquement.

Pour les mêmes raisons que celles évoquées pour le mécanisme INCL, la seule définition utilisée pour l'opérateur \oplus est la définition 2.1.2. On obtient ainsi le théorème 2.3.6.

Théorème 2.3.6 Les thèses de $\Psi \oplus E$ lex-préférées sont de la forme $\{\Psi\} \cup S$ avec S une sous-base de E consistante avec Ψ telle que S est lex-préférée parmi les sous-bases Ψ -consistantes de $(E, <)$.

Preuve : La démonstration se fait en deux étapes. La base E est stratifiée de la manière suivante : $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$ avec E_i la strate numéro i de E et $E_0 = \{\Psi\}$.

- condition suffisante : soit l'ensemble $Y = \{\Psi\} \cup S$ avec $S \subseteq E$, S consistante avec Ψ et S lex-préférée parmi les sous-bases de E consistantes avec Ψ , montrons par l'absurde que Y est lex-préférée dans $\Psi \oplus E$; si ce n'est pas le cas alors il existe $Z \subseteq \Psi \oplus E$ telle que Z est lex-préférée à Y ; c'est-à-dire, si on en revient à la définition (voir dans [CLS93]) : $\exists i, 0 \leq i \leq n$, tel que $|Y_i| < |Z_i|$, et $\forall j < i$, $|Y_j| = |Z_j|$;
or $Y = \{\Psi\} \cup S \Rightarrow Y_0 \neq \emptyset \Rightarrow i \geq 1$ et $Z_0 = \{\Psi\} \Rightarrow \exists i, 1 \leq i \leq n$, tel que $|S_i| = |Y_i| < |Z_i|$, et $\forall j < i$, $|Y_j| = |Z_j|$ ce qui voudrait dire que S n'est pas lex-préférée parmi les sous-bases Ψ -consistantes, donc contradiction.
- condition nécessaire : soit Y une thèse lex-préférée de $\Psi \oplus E$, alors Y est de la forme $\{\Psi\} \cup S$ avec $S \subseteq E$, S Ψ -consistante ; raisonnons par l'absurde et supposons que S ne soit pas lex-préférée parmi les sous-bases de E consistantes avec Ψ ; il existe alors $Z \subseteq E$ lex-préférée parmi les sous-bases de E Ψ -consistantes telle que Z est lex-préférée à S ; c'est-à-dire, si on en revient à la définition (voir dans [CLS93]) : $\exists i, 1 \leq i \leq n$, tel que $|S_i| < |Z_i|$, et $\forall j < i$, $|S_j| = |Z_j|$; ceci implique que $Z \cup \{\Psi\}$ est lex-préférée à $S \cup \{\Psi\} = Y$, ce qui est contradiction avec l'hypothèse de départ.

Propriété 2.3.9 S'il existe des Y thèses lex-préférées de E qui sont Ψ -consistantes alors le nombre de thèses lex-préférées dans $\Psi \oplus E$ est égal au nombre de thèses lex-préférées de E Ψ -consistantes.

Exemple : Soient la formule $\Psi = (a \rightarrow v)$ et la base E suivante :

$$\frac{\frac{\rightarrow p}{p \rightarrow o}}{p \rightarrow (\neg v)} \quad \frac{o \rightarrow v}{o \rightarrow a}$$

Les 2 thèses lex-préférées de E sont :

$$\begin{array}{l|l} Y_1 = & Y_2 = \\ \{ \rightarrow p, & \{ \rightarrow p, \\ p \rightarrow o, & p \rightarrow o, \\ p \rightarrow (\neg v), & o \rightarrow v, \\ o \rightarrow a \} & o \rightarrow a \} \\ Y_1 \text{ est } \Psi\text{-} & Y_2 \text{ est} \\ \text{inconsistante.} & \Psi\text{-consistante.} \end{array}$$

Dans $E' = \Psi \oplus E$, on a 1 thèse lex-préférée (c'est le cas 1 qui se produit) :

$$\begin{array}{l} Y'_1 = \\ Y_2 \cup \{\Psi\} = \\ \{ a \rightarrow v, \\ \rightarrow p, \\ p \rightarrow o, \\ o \rightarrow v, \\ o \rightarrow a \} \end{array}$$

Autre exemple : La base E est inchangée. On prend pour $\Psi = \neg o$. Les deux thèses lex-préférées de E sont désormais toutes les deux Ψ -inconsistantes, c'est donc le cas 2 qui se produit. On obtient ainsi 2 thèses lex-préférées pour E' :

$$\begin{array}{l|l} Y'_1 = & Y'_2 = \\ \{ \neg o, & \{ \neg o, \\ \rightarrow p, & p \rightarrow o, \\ p \rightarrow (\neg v), & p \rightarrow (\neg v), \\ o \rightarrow v, & o \rightarrow v, \\ o \rightarrow a \} & o \rightarrow a \} \end{array}$$

2.3.7 Mécanisme de génération E^*

Ici, l'opérateur \oplus consiste à rajouter la formule Ψ à l'ensemble des prémisses W sans modifier l'ensemble des défauts D . Donc $E' = (W', D)$ avec $W' = \{\Psi\} \cup W$. On obtient ainsi le théorème de caractérisation 2.3.7⁴.

Théorème 2.3.7 Les extensions de $\Psi \oplus E$ sont caractérisées par une seule des situations suivantes :

1. soit W' est inconsistant, la seule extension possible est alors inconsistante (ce cas ne présente bien-sûr aucun intérêt pour nous !);

⁴Rappelons que nous ne nous intéressons qu'au cas des défauts super-normaux.

2. soit W' est consistant et on peut alors garder l'arbre de recherche des extensions de E et recalculer les conclusions de chaque branche :

État de la branche de l'arbre de E	Résultat sur la construction de l'arbre pour E'
inconsistance extension Y	inconsistance extension Y' de $E' = Cn(Y \cup \{\Psi\})^a$ lorsque Y est Ψ -consistante
échec car certaines hypothèses sur l'extension n'ont pas été vérifiées	peut-être une solution si la seule hypothèse manquante est satisfaite par le fait : " $\Psi \in$ l'extension"

On a ainsi deux cas possibles pour Y' :

- soit $Y' = Cn(Y \cup \{\Psi\})$ lorsque Y est Ψ -consistante,
- soit $Y' = Cn(S \cup \{\Psi\})$ lorsque S est le résultat d'une branche dont l'hypothèse manquante était " $\Psi \in$ l'extension".

Preuve : Il suffit de se ramener au mécanisme de fabrication des extensions décrit par Reiter dans [Rei80] pour se rendre compte que le rajout de la prémisse Ψ à l'ensemble W ne peut se traduire que par les 3 cas donnés dans le théorème 2.3.7.

Propriété 2.3.10 Si W' est consistant alors le nombre d'extensions de (W', D) est supérieur ou égal au nombre d'extensions Ψ -consistantes de (W, D) .

Exemple : Soit la base $E = (W, D)$ avec :

- $W = \{\rightarrow p, p \rightarrow o\}$,
- $D = \{ : p \rightarrow (\neg v) / p \rightarrow (\neg v), : o \rightarrow v / o \rightarrow v, : o \rightarrow a / o \rightarrow a \}$

et la formule $\Psi = (a \rightarrow v)$. On obtient 2 extensions pour E à l'aide de l'arbre de recherche de la figure 2.5. Parmi ces extensions, seule Y_1 est Ψ -consistante.

Puis, pour E' on prolonge l'arbre de recherche pour obtenir le résultat présenté dans la figure 2.6, c'est-à-dire les deux extensions Y'_1 et Y'_2 . On retrouve alors Y_1 dans Y'_1 (c'est le cas où $Y' = Cn(Y \cup \{\Psi\})$). Par contre, l'extension Y_2 de E qui était Ψ -inconsistante n'apparaît plus parmi les extensions de E' . Quant à l'extension Y'_2 , elle correspond au cas où $Y' = Cn(S \cup \{\Psi\})$.

2.4 Comparaison des deux définitions

Dans cette section, nous cherchons à établir des liens entre les deux définitions proposées pour une relation de conséquence (définitions 2.1.1 et 2.2.1 avec l'opérateur \oplus correspondant à la définition 2.1.2).

Ces liens dépendent étroitement du principe p et du mécanisme de génération m .

Théorème 2.4.1 Si $p = UNI$ alors $\forall m \in \{INCL, LEX, BO, E^*\}$,

$$(\Psi \oplus (E, <)) \vdash^{p,m} \Phi \Rightarrow (E, <) \vdash^{p,m} (\Psi \rightarrow \Phi)$$

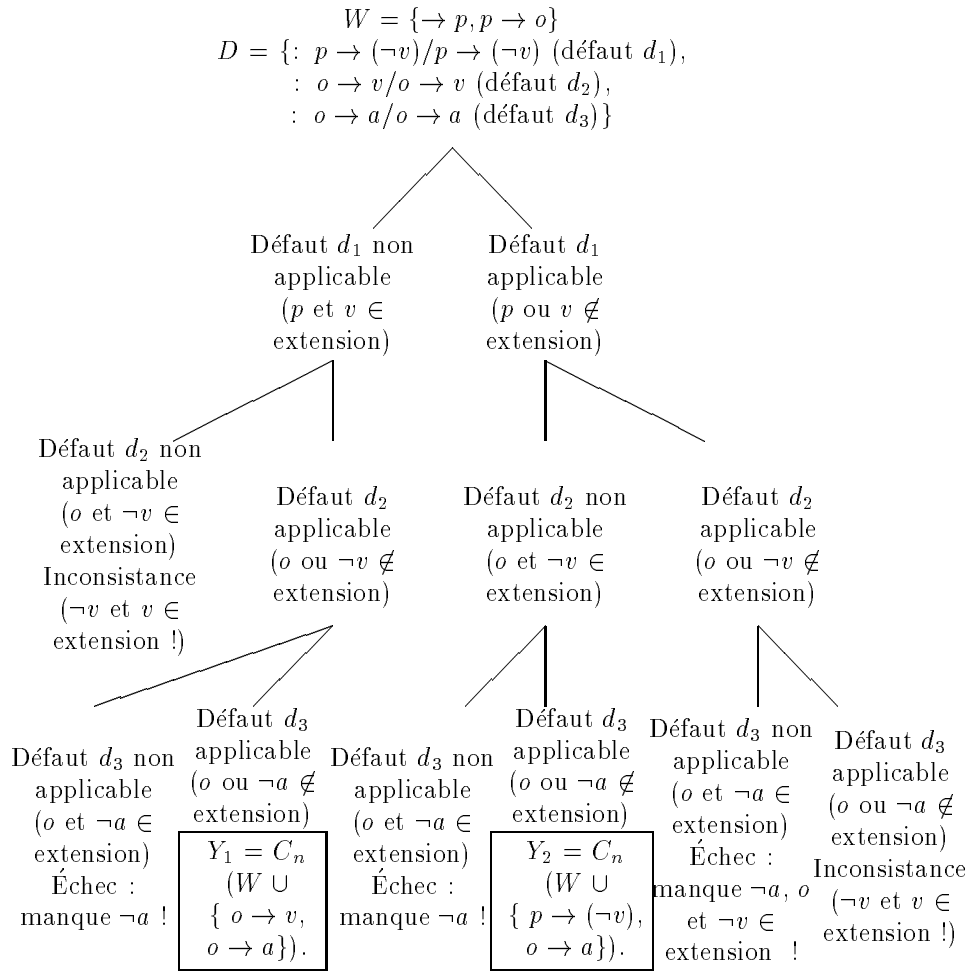


Figure 2.5: Arbre de recherche des extensions de E

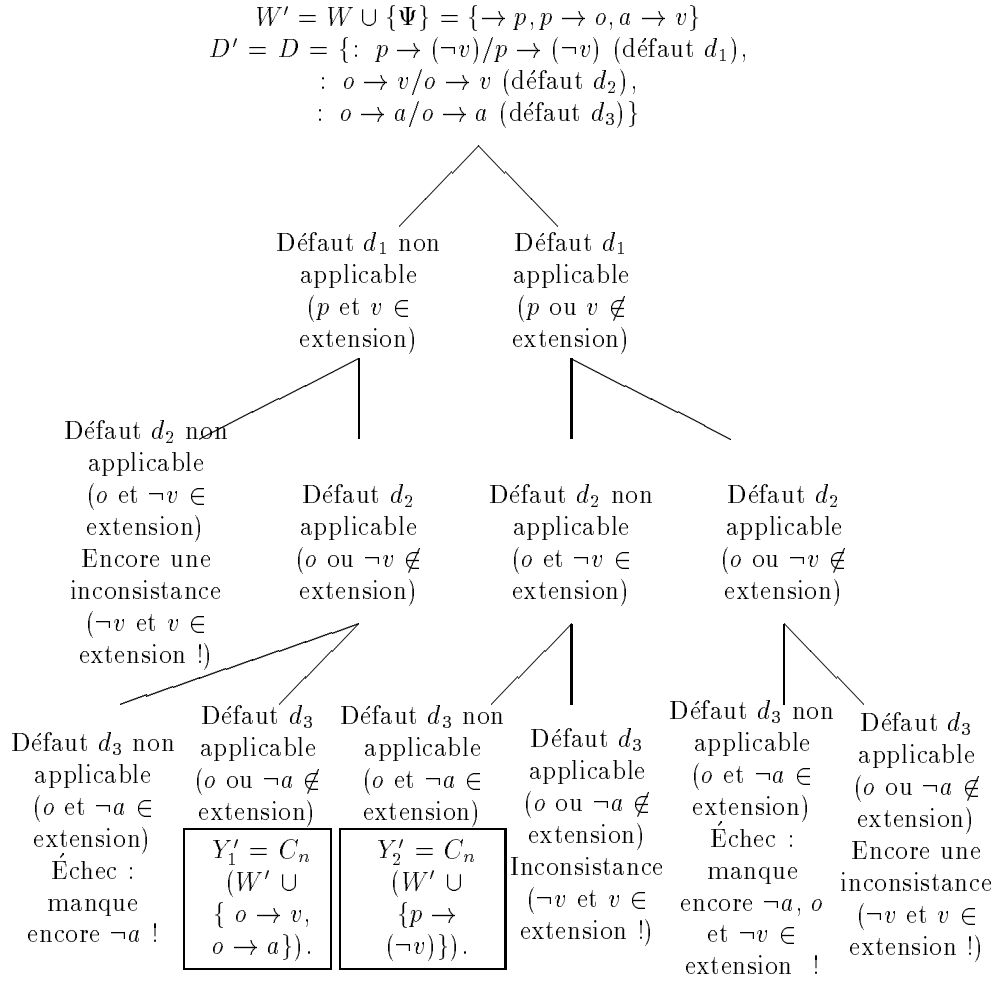


Figure 2.6: Arbre de recherche des extensions de $\Psi \oplus E$

La démonstration de ce théorème repose sur la propriété suivante :

Propriété 2.4.1 Pour tout mécanisme $m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, $\forall Y$ sous-base m -préférée de E , si Y est Ψ -consistante alors $Y \cup \{\Psi\}$ est une sous-base m -préférée de $\Psi \oplus E$.

Preuve de la propriété : La preuve est donnée pour chaque mécanisme m par le théorème de caractérisation correspondant (voir les théorèmes 2.3.3, 2.3.4, 2.3.6 et 2.3.7).

Preuve du théorème :

Prenons comme hypothèse que $p = UNI$ et que $(\Psi \oplus (E, <)) \sim^{p,m} \Phi$. Cela implique que $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\Psi \oplus E$, $Y' \vdash \Phi$.

Étudions maintenant les sous-bases m -préférées de E notées Y . On a alors deux cas possibles :

- soit Y est Ψ -consistante et alors la propriété 2.4.1 s'applique et on sait que $Y' = Y \cup \{\Psi\}$ est une sous-base m -préférée de $\Psi \oplus E$, donc d'après notre hypothèse $Y \cup \{\Psi\} \vdash \Phi$, donc avec le théorème de la déduction $Y \vdash (\Psi \rightarrow \Phi)$;
- soit Y est Ψ -inconsistante et alors $Y \vdash (\neg\Psi)$, donc trivialement $Y \vdash (\Psi \rightarrow \Phi)$.

Ainsi, quelles que soient les sous-bases m -préférées de E , elles infèrent toutes $(\Psi \rightarrow \Phi)$, donc $(E, <) \sim^{\forall,m} (\Psi \rightarrow \Phi)$

Ce théorème correspond au fait que les relations UNI - m vérifient la propriété de conditionnalisation faible (voir les articles [Gär91, GM94] et la section 4.2 de ce document).

La réciproque de ce théorème est en général fautive (voir tous les exemples fournis dans la section 2.3 dans lesquels on constate que toutes les sous-bases m -préférées de $\Psi \oplus E$ ne sont pas forcément issues des sous-bases m -préférées de E).

Toutefois, nous avons identifié un cas où les deux définitions sont équivalentes ;

Théorème 2.4.2 $\forall m \in \{INCL, LEX, BO, E^*\}$, prenons une base E telle que toutes les sous-bases m -préférées de E sont Ψ -consistantes, alors si $p = UNI$ on a

$$(E, <) \sim^{p,m} (\Psi \rightarrow \Phi) \Rightarrow (\Psi \oplus (E, <)) \sim^{p,m} \Phi.$$

Preuve : L'opérateur \oplus correspondant à la définition 2.1.2, par construction, $\forall m \in \{INCL, LEX, BO\}$, toutes les sous-bases m -préférées de $\Psi \oplus E$ sont de la forme $Y' = Y \cup \{\Psi\}$ avec Y sous-base m -préférée de E et dans le cas où $m = E^*$, on sait que $Y' = C_n(Y \cup \{\Psi\})$ avec Y extension de E . D'autre part, par hypothèse, on sait que pour un m donné, $\forall Y$ sous-base m -préférée de E , $Y \vdash (\Psi \rightarrow \Phi)$, donc avec le théorème de déduction $Y \cup \{\Psi\} \vdash \Phi$. On en conclut que $\forall Y'$, $Y' \vdash \Phi$

2.5 Quelle définition allons-nous utiliser ?

Nous avons choisi d'utiliser la définition 2.1.1, avec l'opérateur \oplus donné par la définition 2.1.2, pour les raisons suivantes :

- c'est une définition bien connue dans la littérature et qui reflète particulièrement bien le point de vue de la révision ;
- et, dans certains cas, elle est plus générale que la définition 2.2.1 (voir le théorème 2.4.1).

Désormais, nous étendons nos définitions des relations d'inférence p - m à ce type de relation tout en gardant les anciennes notations.

Définition 2.5.1 Soit une base $(E, <)$ éventuellement ordonnée, soit p un principe d'inférence, soit m un mécanisme de génération, la relation d'inférence p - m est définie par l'ensemble des couples (Ψ, Φ) tels que $\Psi \vdash_{E, <}^{p, m} \Phi$ avec $\Psi \sim_{E, <}^{p, m} \Phi$ correspondant aux définitions 2.1.1 et 2.1.2, c'est-à-dire :

$$\Psi \vdash_{E, <}^{p, m} \Phi \text{ ssi } (\Psi \oplus (E, <)) \vdash^{p, m} \Phi \text{ avec } (\Psi \oplus (E, <)) = (E \cup \{\Psi\}, <'),$$

l'ordre $<'$ étendant l'ordre $<$ en rajoutant une première strate à E ne contenant que Ψ .

Remarque : La définition 2.5.1 signifie que nous nous plaçons du point de vue de la révision. Nous cessons donc de nous intéresser aux mécanismes de sélection T , S et CAR puisqu'ils ne prennent pas du tout en compte ni la stratification de E , ni la position particulière de Ψ .

Avec cette définition 2.5.1, on a la propriété suivante :

Propriété 2.5.1 $\forall m \in \{BO, INCL, LEX\}$, les sous-bases m -préférées de $\Psi \oplus E$ sont exactement de la forme $\{\Psi\} \cup S$ avec $S \subseteq E$ sous-base m -préférée parmi les sous-bases Ψ -consistantes de E .

Chapitre 3

La prudence

Dans ce chapitre, nous réalisons une taxonomie semblable à celle présentée par Pinkas et Loui dans [PL92]. En effet, nous étudions du point de vue de la prudence les principes UNI, EXI et ARG qui sont déjà traités dans [PL92], mais, alors que Pinkas et Loui les ont classés sans préciser les mécanismes de génération, nous nous attachons à raffiner une partie de leur schéma en introduisant l'impact de quelques mécanismes de génération sur la prudence des relations d'inférence non-monotone.

Pour construire cette classification, nous utilisons les propriétés suivantes :

Propriété 3.0.2 Soit Y une sous-base incl-préférée de E alors Y est aussi une thèse de E .

Preuve : Par définition d'une sous-base incl-préférée.

Propriété 3.0.3 Soit Y une thèse de E alors Y est aussi une sous-base consistante de E .

Preuve : Par définition d'une thèse.

Propriété 3.0.4 Soit Y une sous-base car-préférée de E alors Y est aussi une thèse de E .

Preuve : Par définition d'une sous-base car-préférée.

Propriété 3.0.5 Soit Y une sous-base lex-préférée de E alors Y est aussi une sous-base incl-préférée de E .

Preuve : Voir dans [BCD⁺ 93].

Propriété 3.0.6 Soit Y une sous-base incl-préférée de E alors Y est aussi une sous-base bo-préférée de E .

Preuve : Voir dans [BCD⁺ 93].

Propriété 3.0.7 Soit Y une sous-base bo-préférée de E alors il existe Y' sous-base maximale consistante de E telle que Y est incluse dans Y' .

Preuve : Voir dans [BCD⁺ 93].

Propriété 3.0.8 Soient la base E et la théorie super-normale correspondante (W, D) , soit Y une sous-base incl-préférée de E alors $C_n(Y)$ est une extension de (W, D) .

Preuve : Voir dans [Bre89].

Propriété 3.0.9 Soient la base E et la théorie super-normale correspondante (W, D) , soit Y une extension de (W, D) alors il existe Y' sous-base incl-préférée de E telle que $Y = C_n(Y')$.

Preuve : Voir dans [Bre89].

Grâce à toutes ces propriétés, on prouve que :

- $E \vdash^{\forall, B^o} \Phi$
 \Rightarrow (lien numéro 22 sur la figure 3.1)
 $E \vdash^{\forall, In} \Phi$
 \Leftrightarrow (lien numéro 26 sur la figure 3.1)
 $E \vdash^{\forall, E^*} \Phi$
 \Rightarrow (lien numéro 25 sur la figure 3.1)
 $E \vdash^{\forall, Lex} \Phi$
- $E \vdash^{\forall, S} \Phi$
 \Rightarrow (lien numéro 20 sur la figure 3.1)
 $E \vdash^{\forall, T} \Phi$
 \Rightarrow (lien numéro 23 sur la figure 3.1)
 $E \vdash^{\forall, Car} \Phi$
 \Rightarrow (lien numéro 24 sur la figure 3.1)
 $E \vdash^{\forall, Lex} \Phi$
- $E \vdash^{\forall, T} \Phi$
 \Rightarrow (lien numéro 21 sur la figure 3.1)
 $E \vdash^{\forall, In} \Phi$
- $E \vdash^{\exists, Lex} \Phi$
 \Rightarrow (lien numéro 35 sur la figure 3.1)
 $E \vdash^{\exists, In} \Phi$
 \Leftrightarrow (lien numéro 36 sur la figure 3.1)
 $E \vdash^{\exists, E^*} \Phi$
 \Rightarrow (lien numéro 32 sur la figure 3.1)
 $E \vdash^{\exists, B^o} \Phi$
- $E \vdash^{\exists, Lex} \Phi$
 \Rightarrow (lien numéro 34 sur la figure 3.1)
 $E \vdash^{\exists, Car} \Phi$
 \Rightarrow (lien numéro 33 sur la figure 3.1)
 $E \vdash^{\exists, T} \Phi$
 \Rightarrow (lien numéro 30 sur la figure 3.1)
 $E \vdash^{\exists, S} \Phi$
- $E \vdash^{\exists, In} \Phi$
 \Rightarrow (lien numéro 31 sur la figure 3.1)
 $E \vdash^{\exists, T} \Phi$
- $E \vdash^{\exists, B^o} \Phi$
 \Rightarrow (lien numéro 37 sur la figure 3.1)
 $E \vdash^{\exists, T} \Phi$

D'autre part, $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E\}$, on sait que :

- $E \vdash^{\forall, m} \Phi$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (\text{liens numéros } 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 \text{ sur la figure } 3.1) \\
&E \sim^{A,m} \Phi \\
&\Rightarrow (\text{liens numéros } 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \text{ sur la figure } 3.1) \\
&E \sim^{\exists,m} \Phi. \\
&\blacksquare E \sim^{A,In} \Phi \\
&\Leftrightarrow (\text{lien numéro } 16 \text{ sur la figure } 3.1) \\
&E \sim^{A,E^*} \Phi
\end{aligned}$$

On peut ainsi représenter les liens de prudence entre toutes nos relations (voir figure 3.1) sachant que la notion de prudence se définit de la façon suivante :

Rappel 3.0.1 Une formule Φ est déduite de E par la relation d'inférence non-monotone R ssi $E \sim^R \Phi$.

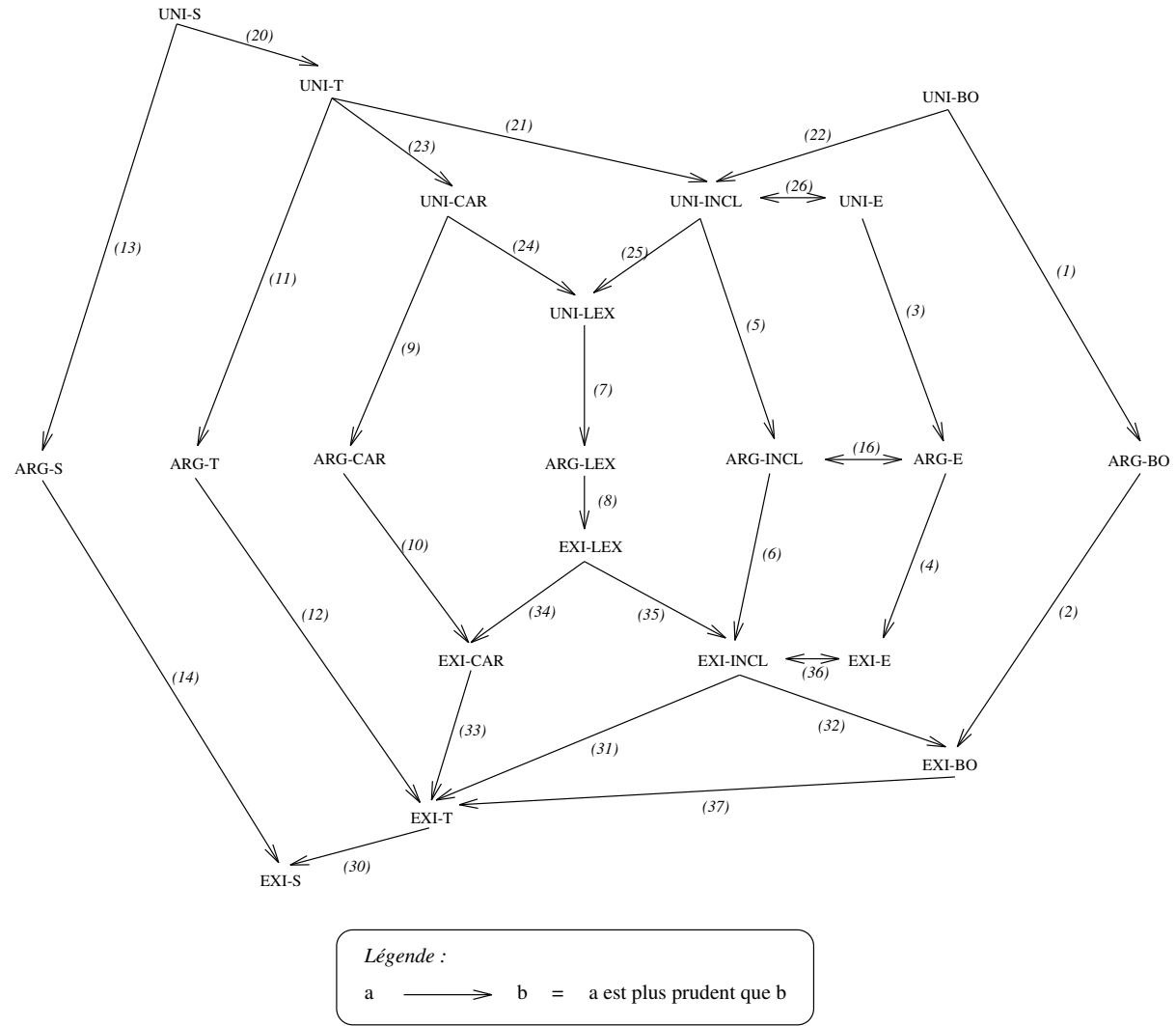
Définition 3.0.2 Soit une base de croyances E , soient R_1 et R_2 deux relations d'inférence non-monotone, on dit que R_1 est plus prudente que R_2 ssi l'ensemble des formules déduites de E par R_1 est inclus dans l'ensemble des formules déduites de E par R_2 .

Remarques :

- La relation “est plus prudente que” est une relation transitive¹. Toutefois, tous les liens de prudence n'ont pas été tracés dans la figure 3.1 afin d'alléger le schéma.
- La définition donnée ici est celle utilisée dans [Bra93]. On peut aussi trouver dans [PL92] une définition plus générale dans laquelle on considère une relation de conséquence comme un ensemble de couples de formules.
- Les relations UNI-T, EXI-T et ARG-T ont déjà été comparées du point de vue de la prudence dans [BDP93].

¹En effet, la relation “est plus prudente que” est construite à partir de la relation d'inclusion qui est transitive.

Figure 3.1: Liens de prudence entre les relations d'inférence non-monotone



Chapitre 4

État de l’art sur les propriétés de déduction

Nous savons comment définir des relations d’inférence non-monotone (voir par exemple dans [CLS93] et dans le chapitre 2 de ce document). Il reste alors une question essentielle : “Quelles sont les propriétés que doit vérifier une relation d’inférence non-monotone afin de définir un raisonnement non-monotone “acceptable” et que recouvre cette notion d’“acceptabilité” ?”.

Les principaux papiers abordant ce sujet sont [KLM90, LM92, Gär91, GM94] et nous allons présenter un ensemble de propriétés de déduction issues de ces articles avec la sémantique associée.

4.1 Les propriétés de Kraus, Lehmann et Magidor et leur sémantique

Dans [KLM90], Kraus, Lehmann et Magidor proposent une classification des relations d’inférence non-monotone, qu’ils appellent relations de conséquence. Le langage L utilisé est un ensemble de formules propositionnelles et fermé pour les connecteurs propositionnels classiques ($\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$). On suppose aussi que l’hypothèse de compacité est vérifiée.

Définition 4.1.1 Un langage L est compact ssi $\forall a$ conséquence logique d’un ensemble $A \subseteq L$, alors $\exists A'$ sous-ensemble fini de A tel que a soit conséquence logique de A' .

On a ainsi la propriété suivante :

Propriété 4.1.1 (Propriété de compacité) Un ensemble de formules est consistant si tous ses sous-ensembles finis le sont.

Définition 4.1.2 Soit le langage L , soient Ψ et Φ , 2 formules de L , on a alors :

- $\Psi \vdash \Phi$ est appelée assertion conditionnelle (ou plus simplement assertion), cela signifie “si on a Ψ alors on a normalement Φ ” ou “ Φ est une conséquence plausible de la formule Ψ ” ; on dira que Φ est un fait plausible ;
- Ψ est alors appelée l’antécédent de l’assertion ;
- Φ est appelée le conséquent de l’assertion.

Définition 4.1.3 Les relations de conséquence sont des ensembles d’assertions conditionnelles.

Avec le langage L , nous définissons une sémantique à l'aide d'un ensemble de mondes U et une relation binaire de satisfaction entre les mondes et les formules. L'ensemble U est l'univers de référence. On peut considérer que les mondes sont des interprétations au sens de la logique classique.

Remarquons que la sémantique des différentes relations d'inférence étudiées s'appuie sur la notion de modèle, elle-même utilisant la notion d'état et que Kraus, Lehmann et Magidor ne donnent pas de définition formelle de cette dernière.

Définition 4.1.4 Un modèle est un triplet $(S, l, <)$ dans lequel S est un ensemble d'états, l est une fonction de S dans 2^U qui permet à chaque état de pointer sur un ensemble de mondes non vide et $<$ est une relation binaire sur S .

Le terme "modèle" est ambigu dans le sens où il possède un sens bien précis en logique classique qui n'est pas celui utilisé ici. Nous avons toutefois gardé cette terminologie parce qu'elle est celle de Kraus, Lehmann et Magidor, et donc par là-même facilite la lecture de cette section et sa mise en relation avec l'article cité.

Nous remarquons aussi que la relation l permet de définir un état comme étant un ensemble de mondes, donc un ensemble d'interprétations.

La relation de conséquence définie par un modèle $W = (S, l, <)$ est notée \models_w et est définie par :

Définition 4.1.5 $A \models_w B$ ssi pour tout état $s \in S$ minimal pour $<$ satisfaisant A , s satisfait aussi B .

Nous allons maintenant passer en revue les différents systèmes proposés par Kraus, Lehmann et Magidor ainsi que les sémantiques correspondantes. Un "système" est défini par un ensemble donné de propriétés et correspond donc à l'ensemble des relations de conséquence vérifiant les dites propriétés. La construction de ces systèmes se fait par ajout successif de propriétés les rendant de plus en plus puissants.

Intuitivement, un système sera de plus en plus puissant ssi il est défini par un ensemble de propriétés de déduction de plus en plus important, donc ssi les relations de conséquence associées contiennent de plus en plus d'assertions conditionnelles¹. Remarquons que cette notion de puissance peut donc se définir de manière tout à fait formelle.

4.1.1 Le système C

Présentons d'abord le plus faible : le système C.

Définition 4.1.6 Une relation de conséquence sera dite relation de conséquence cumulative ssi elle est fermée pour les règles de déduction suivantes :

- propriété de réflexivité : $\alpha \vdash \alpha$,
- équivalence logique gauche : $\frac{\models \alpha \leftrightarrow \beta ; \alpha \vdash \gamma}{\beta \vdash \gamma}$,
- affaiblissement droit ("right weakening") : $\frac{\models \alpha \rightarrow \beta ; \gamma \vdash \alpha}{\gamma \vdash \beta}$,
- coupure : $\frac{\alpha \vdash \beta ; \alpha \wedge \beta \vdash \gamma}{\alpha \vdash \gamma}$,
- monotonie prudente : $\frac{\alpha \vdash \beta ; \alpha \vdash \gamma}{\alpha \wedge \beta \vdash \gamma}$.

¹En effet, plus une relation de conséquence vérifie de propriétés de déduction, plus le nombre de couples la composant est important.

Cette relation de conséquence est notée : \vdash_c .

La signification intuitive de ces propriétés est la suivante :

- la réflexivité signifie que toute formule peut être déduite d'elle-même ;
- l'équivalence logique gauche indique que des formules équivalentes doivent avoir les mêmes conséquences ;
- l'affaiblissement droit stipule que les conséquences logiques de faits plausibles sont aussi des faits plausibles ;
- la coupure exprime les conditions dans lesquelles on peut se passer de fait plausible pour déduire de nouveaux faits plausibles ;
- la monotonie prudente est une forme restrictive de la monotonie.

Définition 4.1.7 Le système logique correspondant à la classe des relations de conséquence cumulatives est appelé système C.

4 nouvelles propriétés sont dérivées des règles de déduction précédentes :

- propriété de l'équivalence : $\frac{\alpha \vdash \beta ; \beta \vdash \alpha ; \alpha \vdash \gamma}{\beta \vdash \gamma}$,
- propriété du ET : $\frac{\alpha \vdash \beta ; \alpha \vdash \gamma}{\alpha \vdash \beta \wedge \gamma}$,
- propriété du MPC (modus Ponens) : $\frac{\alpha \vdash \beta \rightarrow \gamma ; \alpha \vdash \beta}{\alpha \vdash \gamma}$,
- propriété numéro 9 de Kraus, Lehmann, Magidor : $\frac{\alpha \vee \beta \vdash \alpha ; \alpha \vdash \gamma}{\alpha \vee \beta \vdash \gamma}$.

Théorème 4.1.1 L'utilisation des règles de déduction du système C rend équivalentes les 3 règles suivantes :

- propriété de la monotonie : $\frac{\models \alpha \rightarrow \beta ; \beta \vdash \gamma}{\alpha \vdash \gamma}$
- propriété EHD ("easy half deduction") : $\frac{\alpha \vdash \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \wedge \beta \vdash \gamma}$
- propriété de la transitivité : $\frac{\alpha \vdash \beta ; \beta \vdash \gamma}{\alpha \vdash \gamma}$

À partir du moment où l'on renonce à la monotonie, il faut aussi renoncer aux 2 autres.

Kraus, Lehmann et Magidor présentent aussi la propriété de la contraposition :

$$\frac{\alpha \vdash \beta}{\neg \beta \vdash \neg \alpha}$$

Théorème 4.1.2 La propriété de contraposition implique la propriété de monotonie.

Nous allons maintenant présenter la sémantique correspondant au raisonnement cumulatif (système C).

Définition 4.1.8 Un modèle cumulatif est un triplet $(S, l, <)$ dans lequel S est un ensemble d'états, l est une fonction de S dans 2^U qui permet à chaque état de pointer sur un ensemble de mondes non vide et $<$ est une relation binaire sur S satisfaisant la condition de régularité (voir les définitions 4.1.9 et 4.1.10). La relation de conséquence induite par un tel modèle est notée : \models_c .

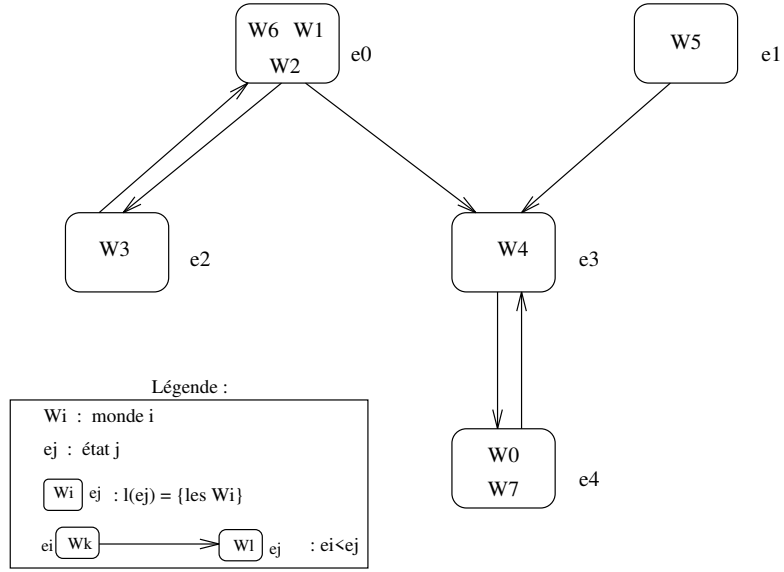


Figure 4.1: Exemple d'un modèle cumulatif

Définition 4.1.9 Soient $P \subseteq U$ et $<$ une relation binaire sur U , on dira que P est un ensemble régulier² ssi $\forall t \in P$, soit t est minimal pour P , soit $\exists s$ minimal pour P tel que $s < t$.

Définition 4.1.10 La relation $<$ du modèle $(S, l, <)$ vérifie la condition de régularité ssi $\forall A \in L$ (A est une formule), l'ensemble des états satisfaisant A est régulier (donc borné inférieurement pour la relation $<$).

Remarquons que ces définitions sont très générales et délicates à mettre en œuvre. En particulier, il est difficile de vérifier la condition de régularité pour une relation binaire quelconque, même quand l'ensemble des états est fini. Pour pouvoir effectuer cette vérification sans trop de difficulté, il faut que la relation $<$ soit définie comme un ordre partiel.

Kraus, Lehmann et Magidor obtiennent ainsi le théorème de représentation 4.1.1.

Théorème de représentation 4.1.1 Soient Ψ et Φ deux formules du langage L , $\Psi \sim_c \Phi \Leftrightarrow$ il existe un modèle cumulatif définissant une relation \models_c telle que $\Psi \models_c \Phi$.

Ce théorème signifie que les relations de conséquence définies à l'aide de modèles cumulatifs respectent toutes les propriétés du système C . De même, il existe un modèle cumulatif tel qu'une relation cumulative (définie à l'aide des propriétés du système C) soit équivalente à la relation de conséquence définie avec ce modèle cumulatif.

Le système C reste toutefois un système encore trop faible pour être représentatif d'un raisonnement non-monotone puissant.

4.1.2 Le système CL

En rajoutant des propriétés au système C , on obtient le système CL (système C avec boucles - "loop" en anglais) :

Définition 4.1.11 Le système CL est bâti à partir du système C et de la propriété de la boucle :

² "smooth" en anglais.

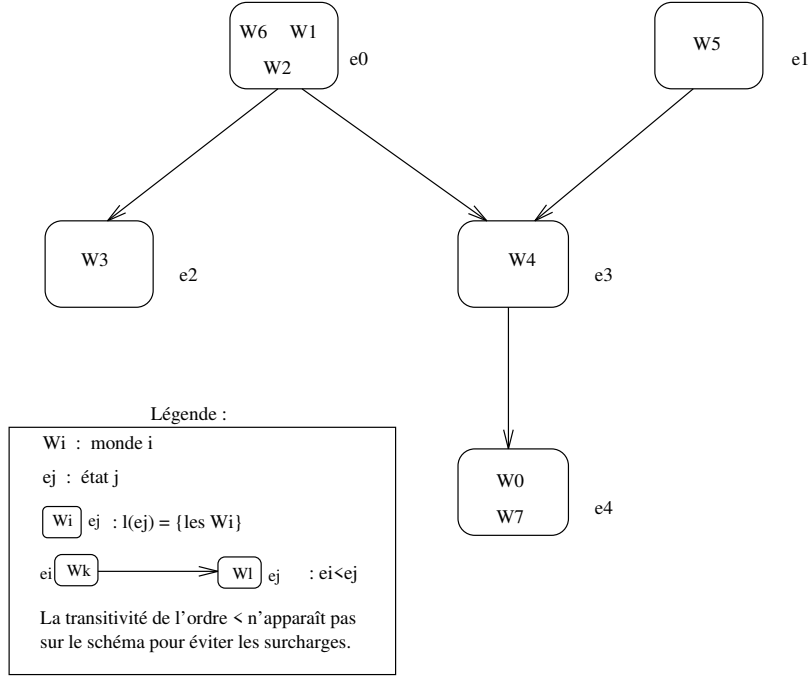


Figure 4.2: Exemple d'un modèle cumulatif ordonné

$$\frac{\alpha_0 \sim \alpha_1 ; \alpha_1 \sim \alpha_2 ; \dots ; \alpha_{k-1} \sim \alpha_k ; \alpha_k \sim \alpha_0}{\alpha_0 \sim \alpha_k}$$

Ce système définit une relation de conséquence notée : \sim_{cl} .

À partir de la propriété ci-dessus, on peut en déduire une autre appelée propriété numéro 15 de Kraus, Lehmann, Magidor :

$$\frac{\alpha_0 \sim \alpha_1 ; \alpha_1 \sim \alpha_2 ; \dots ; \alpha_{k-1} \sim \alpha_k ; \alpha_k \sim \alpha_0}{\alpha_i \sim \alpha_j, \forall i, j = 0, \dots, k}$$

La sémantique associée à ce nouveau système CL est identique à celle décrite pour le système C, en utilisant cette fois des modèles cumulatifs ordonnés.

Définition 4.1.12 Un modèle cumulatif ordonné est un modèle cumulatif pour lequel la relation $<$ est un ordre strict partiel. Il définit une relation de conséquence notée : \models_{cl} .

Comme dans le cas cumulatif, Kraus, Lehmann, Magidor obtiennent alors le théorème de représentation 4.1.2.

Théorème de représentation 4.1.2 Soient Ψ et Φ deux formules du langage L , $\Psi \sim_{cl} \Phi \Leftrightarrow$ il existe un modèle cumulatif ordonné définissant une relation \models_{cl} telle que $\Psi \models_{cl} \Phi$.

4.1.3 Le système P

De la même façon, Kraus, Lehmann et Magidor ont défini le système P (P pour préférence) :

Définition 4.1.13 Le système P est bâti à partir du système C et de la propriété du OU :

$$\frac{\alpha \vdash \gamma ; \beta \vdash \gamma}{\alpha \vee \beta \vdash \gamma}$$

Ce système définit une relation de conséquence notée : \vdash_p .

Il est plus puissant que le système CL et surtout il permet de traiter les disjonctions de formules. On dira alors qu'une relation de conséquence respectant le système P est une relation de conséquence préférentielle. À partir de la propriété ci-dessus et de certaines des propriétés du système C, on peut en déduire de nouvelles propriétés :

- propriété S : $\frac{\alpha \wedge \beta \vdash \gamma}{\alpha \vdash \beta \rightarrow \gamma}$
- propriété D : $\frac{\alpha \wedge \neg \beta \vdash \gamma ; \alpha \wedge \beta \vdash \gamma}{\alpha \vdash \gamma}$
- propriété numéro 19 de Kraus, Lehmann, Magidor : $\frac{\alpha \vdash \gamma ; \beta \vdash \mu}{\alpha \vee \beta \vdash \gamma \vee \mu}$
- propriété numéro 20 de Kraus, Lehmann, Magidor : $\frac{\alpha \vee \gamma \vdash \gamma ; \alpha \vdash \beta}{\gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}$
- propriété numéro 21 de Kraus, Lehmann, Magidor : $\frac{\alpha \vee \beta \vdash \alpha ; \beta \vee \gamma \vdash \beta}{\alpha \vee \gamma \vdash \alpha}$
- propriété numéro 22 de Kraus, Lehmann, Magidor : $\frac{\alpha \vee \beta \vdash \alpha ; \beta \vee \gamma \vdash \beta}{\alpha \vdash \gamma \rightarrow \beta}$

La sémantique de ce système repose sur des modèles préférentiels.

Définition 4.1.14 Un modèle préférentiel est un modèle cumulatif ordonné dans lequel la fonction l fait pointer chaque état vers un monde unique (et non plus vers un ensemble de mondes). Il définit une relation de conséquence notée : \models_p .

Kraus, Lehmann, Magidor obtiennent alors le théorème de représentation 4.1.3.

Théorème de représentation 4.1.3 Soient Ψ et Φ deux formules du langage L , $\Psi \vdash_p \Phi \Leftrightarrow$ il existe un modèle préférentiel définissant une relation \models_p telle que $\Psi \models_p \Phi$.

P peut-il être considéré comme un système convenable pour faire du raisonnement non-monotone ? Il semblerait que l'on ne puisse ajouter aucune autre règle de type déductif (permettant de déduire de nouvelles assertions). On peut par contre rajouter des règles d'un autre type, celles qui déduisent de l'absence d'une assertion l'absence d'une autre assertion :

- propriété de la rationalité de la négation : $\frac{\alpha \wedge \gamma \not\vdash \beta ; \alpha \vee \neg \gamma \not\vdash \beta}{\alpha \not\vdash \beta}$
- propriété de la rationalité disjonctive : $\frac{\alpha \not\vdash \gamma ; \beta \not\vdash \gamma}{\alpha \vee \beta \not\vdash \gamma}$
- propriété de la monotonie rationnelle : $\frac{\alpha \wedge \beta \not\vdash \gamma ; \alpha \not\vdash \neg \beta}{\alpha \not\vdash \gamma}$

Cette propriété de la monotonie rationnelle est présentée aussi par Gärdenfors et Makinson dans [Gär91, GM94] mais sous une autre forme.

Lehmann et Magidor ont donc poursuivi leurs investigations sur les relations d'inférence préférentielle en définissant la notion de relation d'inférence rationnelle (voir [LM92]).

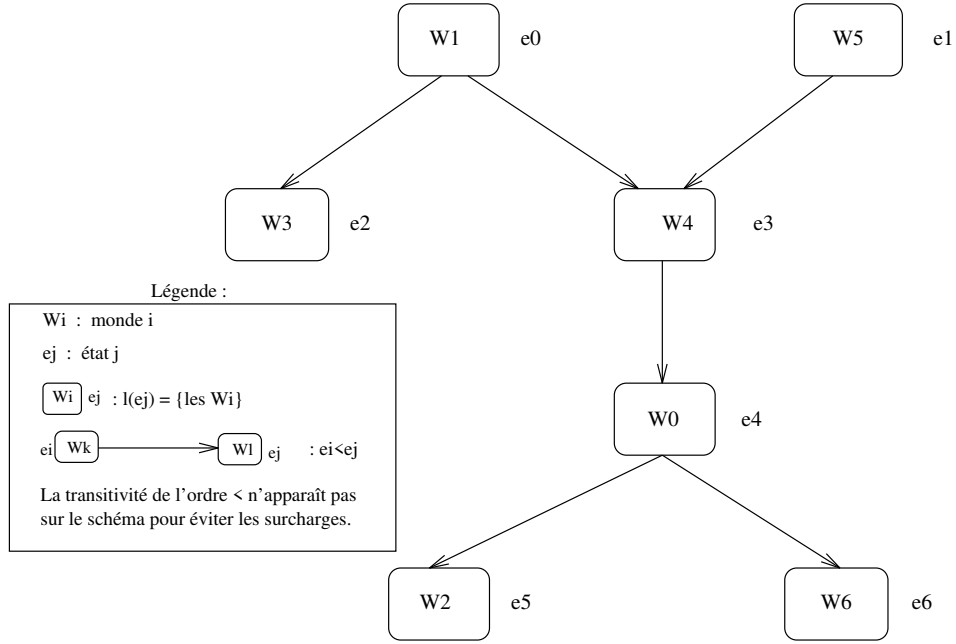


Figure 4.3: Exemple d'un modèle préférentiel

Définition 4.1.15 Une relation d'inférence rationnelle est une relation vérifiant les propriétés du système P et la propriété de monotonie rationnelle. Ce système, appelé système R , définit une relation de conséquence notée : \sim_r .

La sémantique correspondante s'appuie sur la notion de modèle rangé. Ces modèles sont des modèles préférentiels particuliers.

Définition 4.1.16 Un modèle préférentiel $(S, l, <)$ est appelé modèle rangé ssi la relation $<$ est définie de la manière suivante : il existe un ensemble totalement ordonné Ω (représenté par la relation $<_\Omega$) et une fonction R de S dans Ω telle que : $\forall (s, t)$ un couple d'états de S , $s < t$ ssi $R(s) <_\Omega R(t)$. Il définit une relation de conséquence notée : \models_r .

Lehmann et Magidor obtiennent alors le théorème de représentation 4.1.4.

Théorème de représentation 4.1.4 Soient Ψ et Φ deux formules du langage L , $\Psi \sim_r \Phi \Leftrightarrow$ il existe un modèle rangé définissant une relation \models_r telle que $\Psi \models_r \Phi$.

Or, quand on calcule l'ensemble des formules issu d'une relation d'inférence rationnelle, on constate que cet ensemble n'est pas unique. Lehmann et Magidor résolvent ce problème en proposant un mode de sélection d'un ensemble particulier, qu'ils appellent la fermeture rationnelle. La construction de cet ensemble se fait à l'aide d'une fonction qui associe à chaque formule du langage un nombre entier positif symbolisant l'"exceptionnalité" de la formule. La base de croyances est ainsi stratifiée (voir l'algorithme de définition de cette fonction dans [LM92]).

La sémantique de cette relation d'inférence rationnelle particulière repose alors sur un modèle rangé particulier dont la définition est donnée dans [LM92].

4.1.4 Le système CM

Puis, Kraus, Lehmann et Magidor introduisent le système CM issu du système C en rajoutant les règles de monotonie, EHD , transitivité déjà présentées dans le théorème 4.1.1. Le système obtenu

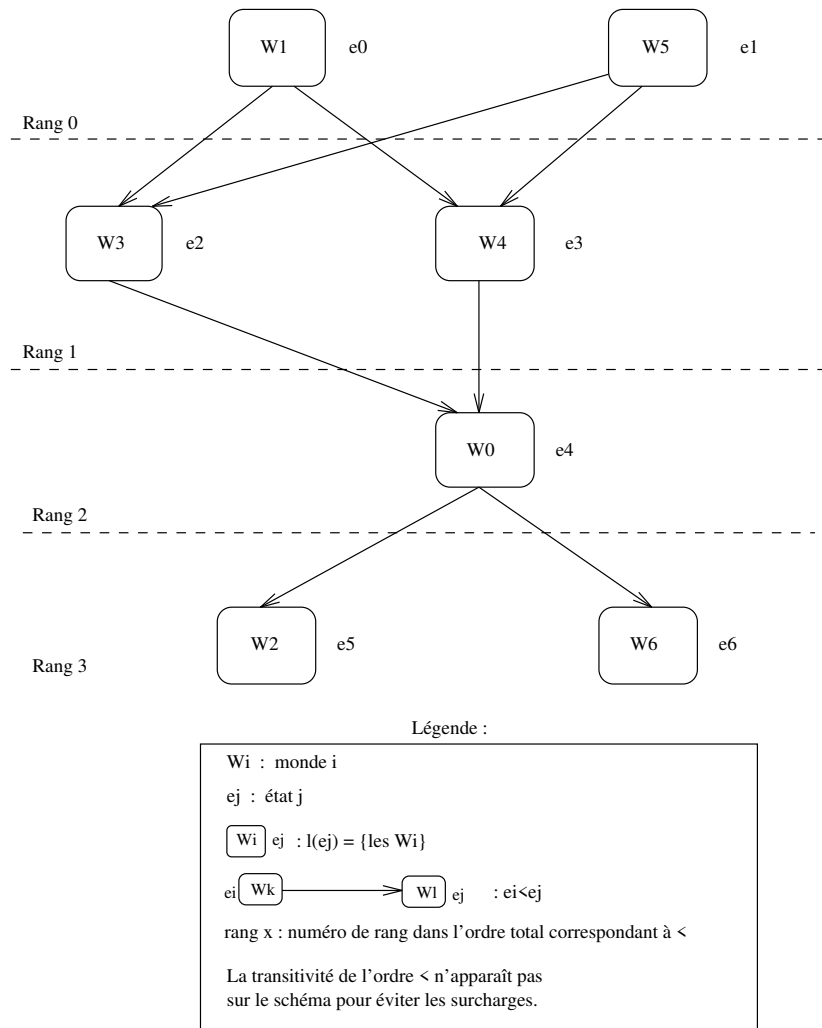


Figure 4.4: Exemple d'un modèle rangé

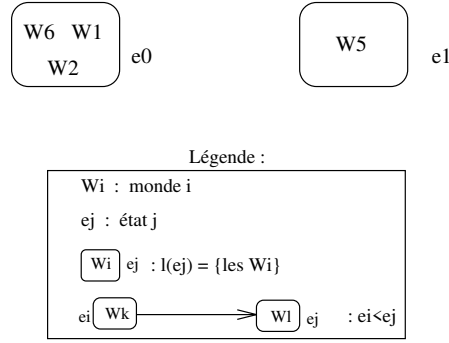


Figure 4.5: Exemple d'un modèle simplement cumulatif

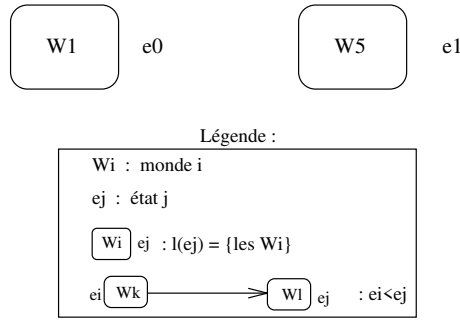


Figure 4.6: Exemple d'un modèle simplement préférentiel

est plus puissant que le système C mais incomparable avec le système P et induit une relation de conséquence notée \vdash_{cm} . Cette relation est appelée relation de conséquence cumulative monotone. La sémantique de ce système repose sur des modèles simplement cumulatifs.

Définition 4.1.17 Un modèle simplement cumulatif est un modèle cumulatif dont la relation binaire $<$ est vide. Il définit une relation de conséquence notée \models_{cm} .

Kraus, Lehmann, Magidor obtiennent ainsi le théorème de représentation 4.1.5.

Théorème de représentation 4.1.5 Soient Ψ et Φ deux formules du langage L , $\Psi \vdash_{cm} \Phi \Leftrightarrow$ il existe un modèle simplement cumulatif définissant une relation \models_{cm} telle que $\Psi \models_{cm} \Phi$.

4.1.5 Le système M

Pour finir, ils introduisent le système M issu du système C en rajoutant la règle de contraposition déjà présentée dans le théorème 4.1.1. Le système obtenu est plus puissant que les systèmes CM et P et induit une relation de conséquence notée \vdash_m . Cette relation est appelée relation de conséquence monotone. La sémantique de ce système repose sur des modèles simplement préférentiels.

Définition 4.1.18 Un modèle simplement préférentiel est un modèle préférentiel dont la relation binaire $<$ est vide. Il définit une relation de conséquence notée \models_m .

Kraus, Lehmann, Magidor obtiennent ainsi le théorème de représentation 4.1.6.

Théorème de représentation 4.1.6 Soient Ψ et Φ deux formules du langage L , $\Psi \vdash_m \Phi \Leftrightarrow$ il existe un modèle simplement préférentiel définissant une relation \models_m telle que $\Psi \models_m \Phi$.

4.1.6 Conclusion sur les travaux de Kraus, Lehmann et Magidor

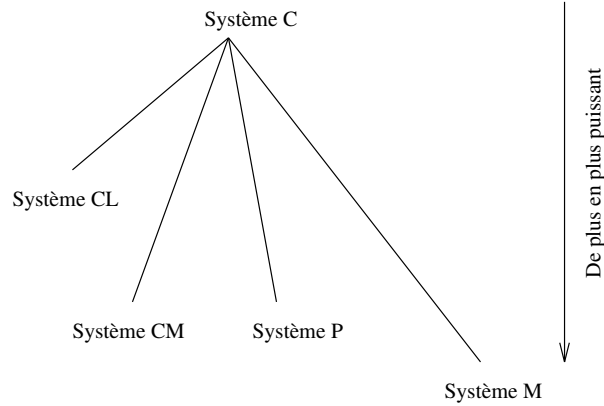
Kraus, Lehmann et Magidor ont ainsi défini 5 familles de modèles et les relations de conséquence associées. Chaque famille est caractérisée par un système logique. Ces systèmes ne sont pas équivalents. Ils sont récapitulés dans le tableau 4.1 et représentés par ordre de puissance sur la figure 4.7.

Propriétés de déduction	Système	Relation de conséquence issue du système	Modèle	Relation de conséquence issue du modèle
Les propriétés de base : <ul style="list-style-type: none"> ■ réflexivité, ■ équivalence logique gauche, ■ affaiblissement droit, ■ coupure, ■ monotonie prudente. 	C	\vdash_c	cumulatif	\models_c
Les propriétés de base et la boucle.	CL	\vdash_{cl}	cumulatif ordonné	\models_{cl}
Les propriétés de base et le OU.	P	\vdash_p	préférentiel	\models_p
Les propriétés de base plus le OU et la monotonie rationnelle.	R	\vdash_r	rangé	\models_r
Les propriétés de base plus la monotonie, l'EHD et la transitivité.	CM	\vdash_{cm}	simplement cumulatif	\models_{cm}
Les propriétés de base et la contraposition.	M	\vdash_m	simplement préférentiel	\models_m

Tableau 4.1: Les systèmes de Kraus, Lehmann et Magidor – Récapitulation et sémantique.

4.2 Les propriétés de Gärdenfors et Makinson et leur sémantique

Gärdenfors et Makinson ont exploré les différentes voies dans lesquelles le concept d'“expectation” peut être utilisé pour faire un raisonnement non-monotone. L'idée est que, lors d'un raisonnement, on utilise des informations dans lesquelles on croit fermement mais aussi des informations attendues ou espérées (ce que l'on nomme en anglais : les “expectations”). Un tel concept peut prendre plusieurs formes : les ensembles d'“expectations”, et les ordres d'“expectations”. D'un côté, les “expectations” peuvent donc être considérées comme des propositions exprimées avec le même langage que les croyances certaines. Ainsi on peut parler d'ensembles d'“expectations” et utiliser ces ensembles pour définir une nouvelle relation d'inférence non-monotone : $\alpha \vdash \beta$ ssi β est impliqué logiquement par α avec les ensembles d'“expectations” (le plus possible d'“expectations” qui soient



Remarque : les systèmes CM et P sont incomparables.

Figure 4.7: Les systèmes de Kraus, Lehmann et Magidor – Classement par ordre de puissance.

consistantes avec α). De l'autre côté, les expectations peuvent être considérées comme un ordre entre des propositions, en particulier celles en lesquelles on ne croit pas fermement : $\alpha \sim \beta$ ssi β est impliqué logiquement par α avec toutes les propositions qui sont suffisamment bien attendues à la lumière de α . Le problème technique est bien-sûr de savoir définir le "suffisamment bien attendues". Ces 2 idées sont liées et reviennent à peu-près au même.

Remarquons avant toute chose que Gärdenfors et Makinson se placent systématiquement dans une optique de révision, ce qui signifie que leur ensemble de départ est en général consistant et que c'est l'ajout d'une nouvelle croyance qui amène l'inconsistance.

Gärdenfors et Makinson se basent sur les hypothèses suivantes. Le langage utilisé L est propositionnel et fermé pour les 4 connecteurs logiques. Il n'y aura aucun rajout de règle par défaut, d'opérateur modal, etc. Toutes les "expectations" seront exprimées avec L . Le langage ainsi utilisé est supposé compact, comme chez Kraus, Lehmann et Magidor.

4.2.1 Les propriétés de Gärdenfors et Makinson

Gärdenfors et Makinson proposent les propriétés suivantes.

Définition 4.2.1 Une relation \sim est une relation d'inférence non-monotone ssi elle possède les 4 propriétés suivantes :

- la supra-classicité : $\frac{\alpha \vdash \beta}{\alpha \sim \beta}$,
- l'équivalence logique gauche : $\frac{\models \alpha \leftrightarrow \beta ; \alpha \sim \gamma}{\beta \sim \gamma}$,
- l'affaiblissement droit ("right weakening") : $\frac{\models \alpha \rightarrow \beta ; \gamma \sim \alpha}{\gamma \sim \beta}$,
- le ET : $\frac{\alpha \sim \beta ; \alpha \sim \gamma}{\alpha \sim \beta \wedge \gamma}$.

Remarques :

- La supra-classicité implique la propriété de réflexivité.
- L'affaiblissement droit avec le ET et la compacité de \vdash impliquent la propriété de fermeture :

$$\frac{\alpha \sim \beta_i \text{ pour tout } \beta_i \in B ; B \vdash \gamma}{\alpha \sim \gamma}$$

Définition 4.2.2 On appelle ensemble des postulats de base l'ensemble suivant de propriétés :

- les 4 propriétés servant à la définition d'une relation d'inférence non-monotone,
- la conditionnalisation faible : $\frac{\alpha \sim \beta}{\sim \alpha \rightarrow \beta}$,
- la monotonie rationnelle faible : $\frac{\not\sim \neg \alpha ; \sim \alpha \rightarrow \beta}{\alpha \sim \beta}$,
- la préservation de la consistance : $\frac{\alpha \sim \perp}{\alpha \vdash \perp}$ (avec \perp représentant la contradiction).

Définition 4.2.3 On appelle ensemble étendu des postulats l'ensemble suivant de propriétés :

- les postulats de base,
- la cumulativité : $\frac{\alpha \sim \beta ; \beta \vdash \alpha}{\alpha \sim \gamma \Leftrightarrow \beta \sim \gamma}$,
- le OU : $\frac{\alpha \sim \gamma ; \beta \sim \gamma}{\alpha \vee \beta \sim \gamma}$,
- la monotonie rationnelle : $\frac{\alpha \sim \gamma ; \alpha \not\sim \neg \beta}{\alpha \wedge \beta \sim \gamma}$.

Remarques :

- La rationalité disjonctive est une conséquence de l'ensemble étendu de postulats.
- La cumulativité, avec les postulats de base, est équivalente à la coupure plus la monotonie prudente (voir la propriété 5.2.1 explicitant le lien entre toutes ces propriétés).
- La cumulativité, avec les postulats de base, est équivalente à la réciprocity :

$$\frac{\alpha \sim \beta ; \beta \sim \alpha}{\alpha \sim \gamma \Leftrightarrow \beta \sim \gamma}$$

- Le OU, avec les postulats de base, est équivalent à la conditionnalisation :

$$\frac{\alpha \wedge \beta \sim \gamma}{\alpha \sim \beta \rightarrow \gamma}$$

- La monotonie rationnelle s'exprime ici de manière différente mais elle est équivalente à celle de Kraus, Lehmann, Magidor.

4.2.2 Le cas des ensembles “d’expectations”

Nous notons Δ un ensemble de formules de L jouant le rôle d'un ensemble d'expectations³, et nous rappelons les définitions suivantes données dans [Gär91, GM94] :

Définition 4.2.4 Un ensemble D est un sous-ensemble maximal de Δ qui ne peut impliquer logiquement α ssi :

1. $D \subseteq \Delta$,

³Ici, les expectations correspondent exactement à la notion de croyances.

2. $\alpha \notin C_n(D)$,
3. $\alpha \in C_n(D')$ pour tout D' tel que $D \subset D' \subseteq \Delta$.

L'ensemble de tous les sous-ensembles maximaux de Δ ne pouvant impliquer α est noté $\Delta \perp \alpha$.

Pour vérifier si $\alpha \sim \beta$, nous allons utiliser $\Delta \perp \neg \alpha$. Toutefois, il subsiste un problème important : en général l'ensemble $\Delta \perp \neg \alpha$ n'est pas un singleton. Comment choisir entre tous les ensembles maximaux ? Pour cela, on rajoute une fonction de sélection S_Δ qui dépend de Δ . Cette fonction prend en argument l'ensemble de tous les ensembles maximaux et elle renvoie les ensembles préférés.

Remarquons que $\Delta \perp \neg \alpha$ est l'ensemble des sous-ensembles de Δ maximaux α -consistants.

Définition 4.2.5 Une opération d'inférence expectative $C_{\Delta,S}$ est définie pour tout $\alpha \in L$ par l'équation⁴ :

- $C_{\Delta,S}(\alpha) = \cap \{C_n(\{\alpha\} \cup D) \mid D \in S(\Delta \perp \neg \alpha)\}$ avec Δ un ensemble non vide d'expectations et S une fonction de sélection ;
- $C_{\Delta,S}$ est dite fermée quand $\Delta = C_n(\Delta)$;
- $C_{\Delta,S}$ est dite générée avec consistance quand Δ est consistant.

On définit donc $\alpha \sim_{\Delta,S} \beta$ par $\beta \in C_{\Delta,S}(\alpha)$ (c'est-à-dire β est impliqué logiquement par l'union de α et des sous-ensembles de Δ maximaux α -consistants préférés).

Remarques :

- L'approche par ensembles d'expectations est une approche prudente, donc correspond à ce que nous appelons le principe UNI.
- Dans le cas où Δ est fermé pour la déduction ($\Delta = C_n(\Delta)$), pour tout α et pour tout $D \in S(\Delta \perp \neg \alpha)$ les ensembles $C_n(\{\alpha\} \cup D)$ peuvent être vus comme des interprétations, des mondes dans lesquels α est vrai. On rejoint ainsi la terminologie de Shoham et ses modèles préférés (voir [Sho87]).

Gärdenfors et Makinson obtiennent ainsi le théorème de représentation 4.2.1.

Théorème de représentation 4.2.1 Une relation d'inférence non-monotone \sim satisfait les postulats de base ssi il existe une relation d'inférence expectative fermée et générée avec consistance $\sim_{\Delta,S}$ telle que $\alpha \sim \beta$ ssi $\alpha \sim_{\Delta,S} \beta$ pour tous α et β de L .

Si on impose des restrictions à la fonction de sélection S , on obtient une relation d'inférence vérifiant d'autres propriétés que celles apparaissant dans les postulats de base.

Prenons, par exemple, la condition (SC) suivante :

Définition 4.2.6 La condition (SC) est :

$$\text{si } S(\Delta \perp \neg \alpha) \subseteq \Delta \perp \neg \beta \subseteq \Delta \perp \neg \alpha \text{ alors } S(\Delta \perp \neg \beta) = S(\Delta \perp \neg \alpha).$$

Cette condition signifie intuitivement : si les sous-bases α -consistantes préférées sont des sous-bases β -consistantes, elles-même étant des sous-bases α -consistantes, alors les sous-bases β -consistantes préférées sont les sous-bases α -consistantes préférées.

Gärdenfors et Makinson obtiennent ainsi le théorème de représentation 4.2.2.

⁴Dans une optique de révision, Δ est l'ensemble initial et α est la formule avec laquelle on révisé.

Théorème de représentation 4.2.2 Une relation d'inférence non-monotone \vdash satisfait les postulats de base et la propriété de cumulativité ssi il existe une relation d'inférence expectative fermée et générée avec consistance $\vdash_{\Delta, S}$ vérifiant la condition (SC) telle que $\alpha \vdash \beta$ ssi $\alpha \vdash_{\Delta, S} \beta$ pour tous α et β de L .

Un autre cas possible pour restreindre la fonction S est l'utilisation de préférences dans la définition de S .

Définition 4.2.7 Une fonction de sélection S est relationnelle sur Δ ssi il existe une relation \preceq sur les sous-ensembles de Δ telle que $\forall \alpha$ avec α qui n'est pas une contradiction, on a :

$$S(\Delta \perp \neg \alpha) = \{D \in \Delta \perp \neg \alpha \text{ tel que } D \preceq D' \text{ pour tout } D' \in \Delta \perp \neg \alpha\}.$$

S est dite relationnelle transitivement ssi S est relationnelle en utilisant une relation transitive \preceq .

Gärdenfors et Makinson obtiennent ainsi le théorème de représentation 4.2.3.

Théorème de représentation 4.2.3 Une relation d'inférence non-monotone \vdash satisfait l'ensemble étendu des postulats de base ssi il existe une relation d'inférence expectative fermée, générée avec consistance et relationnelle transitivement $\vdash_{\Delta, S}$ telle que $\alpha \vdash \beta$ ssi $\alpha \vdash_{\Delta, S} \beta$ pour tous α et β de L .

4.2.3 Le cas des ordres “d’expectations”

Bien qu'il soit possible de trouver des théorèmes de représentation, l'utilisation des fonctions de sélection comme mécanisme pour générer des inférences non-monotones n'est pas satisfaisant dans le cadre du calcul de ces inférences. Il est en effet très coûteux de calculer les ensembles $\Delta \perp \neg \alpha$. De plus, la définition fonctionnelle de la fonction S n'est en général pas disponible.

Gärdenfors et Makinson ont donc proposé d'utiliser des ordres sur les formules de Δ . Ces ordres sont destinés à représenter les divers degrés de certitude des formules. L'ordre expectatif va concerner toutes les formules, nous n'avons plus besoin d'isoler un ensemble d'expectations. On va donc travailler à partir de (L, \leq) et $\alpha \leq \beta$ signifiera que β est au moins autant attendu, espéré que α .

Cette relation d'ordre possède les propriétés suivantes :

- la transitivité : si $\alpha \leq \beta$ et $\beta \leq \gamma$ alors $\alpha \leq \gamma$ (propriété E_1),
- la dominance : si $\alpha \vdash \beta$ alors $\alpha \leq \beta$ (propriété E_2),
- la conjonctivité : pour tous α et β , $\alpha \leq \alpha \wedge \beta$ ou $\beta \leq \alpha \wedge \beta$ (propriété E_3).

Remarque : ces trois conditions impliquent que l'ordre est total.

Définition 4.2.8 \vdash est une relation d'inférence expectative comparative ssi il existe un ordre \leq satisfaisant les 3 propriétés E_1 à E_3 et tel que la condition $(C\vdash)$ soit vérifiée :

$$\alpha \vdash \gamma \text{ ssi } \gamma \in C_n(\{\alpha\} \cup \{\beta \text{ tel que } \neg \alpha < \beta\}).$$

Remarque la condition $(C\vdash)$ peut aussi s'exprimer de la façon suivante : $\alpha \vdash \gamma$ ssi, soit $\alpha \vdash \gamma$, soit il existe $\beta \in L$ tel que $\alpha \wedge \beta \vdash \gamma$ et $\neg \alpha < \beta$.

Gärdenfors et Makinson obtiennent alors le théorème de représentation 4.2.4.

Théorème de représentation 4.2.4 \vdash est une relation d'inférence non-monotone sur L satisfaisant l'ensemble étendu des postulats ssi \vdash est une relation d'inférence expectative comparative.

Le lien entre cette approche utilisant les ordres expectatifs et les modèles préférés de Shoham (cf [Sho87]) est le suivant :

Théorème 4.2.1 Pour tout ordre expectatif, on peut trouver un modèle préférentiel adéquat tel que l'inférence expectative soit identique à l'inférence issue de ce modèle, et vice-versa.

Avec la définition suivante d'un modèle préférentiel adéquat :

Définition 4.2.9 Soit le triplet $M = (S, \models, \sqsubset)$ avec S un ensemble non vide d'états, \models une relation de satisfaction entre les éléments de S et les formules de L , et \sqsubset une relation entre états. M est un modèle préférentiel adéquat ssi il vérifie les 4 propriétés suivantes :

1. la classicité : $\forall s \in S$ et $\alpha, \beta \in L$,
 - $s \models \neg\alpha$ ssi $s \not\models \alpha$, et
 - $s \models \alpha \wedge \beta$ ssi $s \models \alpha$ et $s \models \beta$;
2. l'extension : pour tout α consistant au sens de C_n , il existe un $s \in S$ tel que $s \models \alpha$;
3. basé sur une relation de préférence \sqsubset qui est irréflexive, transitive et rangée (donc totale : si $s \sqsubset t$ et $t' \not\sqsubset t$ alors $s \sqsubset t'$) ;
4. limité de manière finie : c'est à dire que pour toute formule α qui est satisfaite par un état non préféré, il existe un état préféré qui la satisfait.

Gärdenfors et Makinson donnent alors un théorème récapitulatif :

Théorème 4.2.2 Soit \vdash une relation entre des formules de L , les 4 conditions suivantes sont équivalentes :

1. \vdash est déterminée par $\vdash_{\Delta, S}$ une relation d'inférence expectative, transitivement relationnelle, générée avec consistance et fermée ;
2. \vdash est déterminée par un ordre expectatif \leq sur L en utilisant la condition $(C \vdash)$;
3. \vdash est déterminée par un modèle préférentiel adéquat ;
4. \vdash satisfait les propriétés de supra-classicité, équivalence logique gauche, ET, cumulativité, OU, monotonie rationnelle et préservation de la consistance.

Chapitre 5

Les résultats sur les propriétés de déduction

Notre cadre formel est un langage propositionnel, noté L , et une base E de croyances exprimées dans ce langage L . Nous avons d'autre part un ordre entre les formules de E noté $<$.

Dans ce chapitre, nous étudions les propriétés vérifiées par les relations d'inférence non-monotone telles que nous les avons définies dans le chapitre 2 de ce document et dans [CLS93].

Nous avons choisi de nous intéresser uniquement aux relations d'inférence $\sim_{E, <}^{p, m}$ de manière à respecter exactement la terminologie des propriétés telles qu'elles ont été définies par Kraus, Lehmann, Magidor, Gärdenfors et Makinson. Ce faisant, les seules relations présentant un intérêt sont celles utilisant la stratification (donc celles construites avec les mécanismes BO , $INCL$, LEX , E – ou E^*). Toutefois, il est possible d'utiliser une définition restreinte des propriétés dans lesquelles interviennent uniquement la relation $\sim^{p, m}$ et non plus la relation $\sim_{E, <}^{p, m}$. Dans ce cadre là, on peut alors traiter aussi les relations d'inférence définies avec les mécanismes T , S et CAR ¹.

Pour notre part, nous nous limiterons aux relations $\sim_{E, <}^{p, m}$ avec $p \in \{UNI, EXI, ARG\}$ et $m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$. Certains de ces résultats ont été démontrés par d'autres chercheurs. Nous allons les présenter dans une première section. Puis, nous donnerons nos propres résultats en complément dans une seconde section.

5.1 Les résultats déjà existants et leurs incidences

Les travaux de Kraus, Lehmann et Magidor [KLM90], ainsi que ceux de Gärdenfors et Makinson [GM94] fournissent la totalité des résultats concernant les relations d'inférence définies à partir du principe UNI . En effet, tous les théorèmes de représentation se ramènent à l'utilisation d'une approche sceptique : il existe un modèle d'un type particulier tel que toutes les interprétations vérifient une propriété donnée.

5.1.1 UNI-INCL, UNI-LEX, UNI-BO

En utilisant ces théorèmes, Benferhat, Cayrol, Dubois, Lang et Prade ont démontré les résultats suivants :

¹C'est l'option choisie par les auteurs de [BDP93, Ben94] ; ils démontrent ainsi que :

- la relation ARG-T vérifie la propriété d'affaiblissement droit définie par $\frac{\vDash \alpha \rightarrow \beta ; E \sim \alpha}{E \sim \beta}$;
- la relation ARG-T ne vérifie pas la propriété du ET définie par $\frac{E \sim \beta ; E \sim \gamma}{E \sim \beta \wedge \gamma}$.

- *UNI-INCL est une relation d'inférence préférentielle (voir [BCD⁺ 93, Ben94]).*
- *UNI-LEX est une relation d'inférence rationnelle (voir [BCD⁺ 93, Ben94]).*
- *UNI-BO est une relation d'inférence quasiment rationnelle, puisque la relation d'inférence issue de la logique possibiliste, et notée \vdash_{π} , est quasiment rationnelle (voir [Ben94]) et qu'il a été démontré dans [BCD⁺ 93] que $\vdash^{Bo} \Leftrightarrow \vdash_{\pi}$. La dénomination de "quasiment rationnelle" vient du fait que Benferhat et ses collègues n'utilisent pas la forme classique des propriétés de supra-classicité et de réflexivité mais une forme restreinte. En effet, ils ont choisi comme convention le principe appelé "Nihil ex Absurdo", c'est-à-dire qu'en présence d'une inconsistance, ils choisissent de ne rien déduire² ; ceci les amène donc à définir les propriétés de déduction suivantes :*

- *propriété de réflexivité restreinte : si $\alpha \neq \perp$ alors $\alpha \vdash \alpha$,*
- *la supra-classicité restreinte : si $\alpha \neq \perp$ alors $\frac{\alpha \vdash \beta}{\alpha \vdash \beta}$.*

On dit alors qu'une relation d'inférence est quasiment rationnelle quand elle vérifie la monotonie rationnelle, la réflexivité restreinte et toutes les propriétés du système P excepté la réflexivité classique.

Toutes ces démonstrations s'articulent autour de la reconnaissance d'un modèle particulier permettant de définir la relation d'inférence étudiée, puis de l'application du théorème de représentation correspondant.

Nous avons aussi les résultats suivants :

- *UNI-INCL vérifie les propriétés de : supra-classicité, équivalence logique gauche, affaiblissement droit, ET, conditionnalisation faible, préservation de la consistance, cumulativité, OU et ne vérifie pas les propriétés de monotonie rationnelle et de monotonie rationnelle faible (voir [BCD⁺ 93]).*
- *UNI-LEX vérifie les propriétés de : supra-classicité, équivalence logique gauche, affaiblissement droit, ET, conditionnalisation faible, préservation de la consistance, cumulativité, OU, monotonie rationnelle et monotonie rationnelle faible (voir [BCD⁺ 93]) ; UNI-LEX vérifie donc les postulats étendus de Gärdenfors et Makinson (voir [GM94]).*
- *UNI-BO vérifie les propriétés de : supra-classicité restreinte, équivalence logique gauche, affaiblissement droit, ET, préservation de la consistance, OU, monotonie rationnelle et monotonie rationnelle faible (voir [BCD⁺ 93, Ben94]). La conditionnalisation faible et la cumulativité n'apparaissent pas dans ces résultats. Toutefois, la conditionnalisation faible est prouvée à la fois par :*
 - *le théorème 2.4.1,*
 - *une propriété donnée dans [BDP92] qui dit que la propriété de conditionnalisation est impliquée soit par les propriétés d'équivalence logique gauche, d'affaiblissement droit, du ET, du OU, de la monotonie rationnelle, de la réflexivité restreinte et du Nihil ex Absurdo, soit par les propriétés d'équivalence logique gauche, d'affaiblissement droit, du ET, du OU, de la monotonie prudente, de la réflexivité ; or la conditionnalisation faible est un cas particulier de la conditionnalisation.*

Remarquons que les relations UNI-INCL, UNI-BO et UNI-LEX ne sont pas définies de manière identique dans [BCD⁺ 93] et dans le rapport présent. Toutefois, la propriété 2.5.1 permet de se rendre compte que les deux définitions sont équivalentes et que l'on peut donc utiliser les résultats présentés dans [BCD⁺ 93] dans le cadre de ce rapport.

²L'autre principe utilisé en général consiste à dire qu'en présence d'une inconsistance, on choisit de tout déduire.

5.1.2 UNI-E* et EXI-E*

Dans [Bra93], Brass étudie un sous-ensemble de la logique des défauts (mécanisme E^*) : les défauts super-normaux. Ceci correspond au cas particulier du mécanisme INCL sur une base de croyances possédant deux strates. Quatre principes sont invoqués dans ce travail dont les principes UNI et EXI.

Ainsi, Brass a démontré que :

- UNI-E*, dans le cas des défauts super-normaux, vérifie les propriétés suivantes :
 - la réflexivité,
 - l'affaiblissement droit,
 - l'équivalence logique gauche,
 - le ET,
 - le OU.
- EXI-E*, dans le cas des défauts super-normaux, vérifie les propriétés suivantes :
 - la réflexivité,
 - l'affaiblissement droit,
 - l'équivalence logique gauche.

Pour prouver que UNI-E* est préférentielle, dans le cas des défauts super-normaux, il suffit de prouver qu'elle vérifie les propriétés de coupure et de monotonie prudente.

Théorème 5.1.1 Dans le cas des défauts super-normaux, la relation UNI-E* vérifie la propriété de la coupure (si $\alpha \vdash \beta$ et $\alpha \wedge \beta \vdash \gamma$ alors $\alpha \vdash \gamma$).

Preuve : On part des hypothèses $\alpha \vdash \beta$ et $\alpha \wedge \beta \vdash \gamma$.

La première hypothèse implique que $\forall Y$ extension de $T = (W \cup \{\alpha\}, D)$, $Y \vdash \beta$; or les extensions sont fermées pour la conséquence logique, donc $\beta \in Y$.

La seconde hypothèse implique que $\forall Y'$ extension de $T' = (W \cup \{\alpha, \beta\}, D)$, $Y' \vdash \gamma$; or les extensions Y' de T' sont construites à partir de T comme suit :

- soit $Y' = Cn(Y \cup \{\beta\})$ ssi Y est β -consistante,
- soit $Y' = Cn(S \cup \{\beta\})$ ssi S est le résultat d'une branche dont l'hypothèse manquante était " $\beta \in$ l'extension".

Or, on sait que $\forall Y, \beta \in Y$, donc le premier cas revient à dire que $\forall Y, \exists Y'$ telle que $Y' = Y$. Et on sait que $\forall Y', Y' \vdash \gamma$; donc $\forall Y, Y \vdash \gamma$ et on en conclut que $\alpha \vdash \gamma$.

Théorème 5.1.2 Dans le cas des défauts super-normaux, la relation UNI-E* vérifie la propriété de monotonie prudente (si $\alpha \vdash \beta$ et $\alpha \vdash \gamma$ alors $\alpha \wedge \beta \vdash \gamma$).

Preuve : On sait (voir [Bre89]) que, dans le cas d'une théorie des défauts super-normale $T = (W, D)$, les extensions obtenues correspondent exactement aux thèses incl-préférées obtenues sur la base E composée de deux strates $E_1 = W$ et $E_2 = \{\text{les conséquents des défauts de } D\}$.

Or, on sait que la relation UNI-INCL vérifie la monotonie prudente puisqu'elle est préférentielle.

On a donc : si $\forall Y$ thèse incl-préférée de $\alpha \oplus E$, $Y \vdash \beta$ et $Y \vdash \gamma$ alors $\forall Y'$ thèse incl-préférée de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$, $Y' \vdash \gamma$.

Sachant que les Y thèses incl-préférées de $\alpha \oplus E$ sont exactement les extensions de $\alpha \oplus T = (W \cup \{\alpha\}, D)$ et que les Y' thèses incl-préférées de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$ sont exactement

les extensions de $(\alpha \wedge \beta) \oplus T = (W \cup \{\alpha, \beta\}, D)$, on déduit que la relation UNI-E* vérifie la propriété de monotonie prudente³.

Contre exemple pour la monotonie rationnelle. Ici aussi, le contre exemple donné dans [Ben94] pour UNI-INCL peut s'appliquer :

La théorie des défauts T est la suivante :

- $W = \{a, b \rightarrow ; a \rightarrow c\}$,
- $D = \{ : \rightarrow a / \rightarrow a ; : \rightarrow b / \rightarrow b ; : c \rightarrow / c \rightarrow \}$.

On obtient ainsi 2 extensions :

- $Y_1 = C_n(\{a, b \rightarrow ; a \rightarrow c ; \rightarrow a\})$;
- $Y_2 = C_n(\{a, b \rightarrow ; a \rightarrow c ; \rightarrow b ; c \rightarrow\})$;

Toutes ces extensions infèrent la formule $a \vee (\neg c)$ et il existe une extension qui n'infère pas $\neg c$. Posons :

- $\alpha = \text{VRAI}$,
- $\beta = c$,
- $\gamma = a \vee (\neg c)$.

On a ainsi $\alpha \sim \gamma$ et $\alpha \not\sim (\neg \beta)$.

Si on rajoute la formule β à la base E on obtient $(\alpha \wedge \beta) \not\sim \gamma$, car il existe une extension de $\beta \oplus E$ qui n'infère pas γ (l'extension $Y = C_n(\{a, b \rightarrow ; a \rightarrow c ; \rightarrow b ; \rightarrow c\})$).

Théorème 5.1.3 Dans le cas des défauts super-normaux, la relation UNI-E* est préférentielle et non rationnelle.

Contre exemple dans le cas des défauts normaux. Prenons la théorie suivante :

- $W = \{\}$,
- $D = \{ : a/a ; (a \vee b) : (\neg a)/(\neg a) \}$.

Il est facile de voir sur cette théorie, que la relation UNI-E* ne vérifie pas la monotonie prudente. En effet, cette théorie admet une seule extension $Y = C_n\{a\}$. Cette extension permet d'inférer les formules a et $a \vee b$. Posons :

- $\alpha = \text{VRAI}$,
- $\beta = a \vee b$,
- $\gamma = a$.

On a ainsi $\alpha \sim \gamma$ et $\alpha \sim \beta$.

Si on rajoute la formule β à la base E on obtient $(\alpha \wedge \beta) \not\sim \gamma$, car il existe maintenant deux extensions pour $\beta \oplus E$: $Y_1 = C_n\{a\}$ et $Y_2 = C_n\{\neg a, b\}$ avec Y_2 qui n'infère pas γ .

5.1.3 Conclusion sur les résultats déjà existants

Dans les tableaux 5.1 et 5.2, nous donnons tous les résultats obtenus sur les relations UNI et sur EXI-E* dans cette section et dans la section 2.4. Le tableau 5.1 permet de se situer par rapport aux travaux de Kraus, Lehmann et Magidor (voir [KLM90]) et le tableau 5.2 permet de se situer par rapport aux travaux de Gärdenfors et Makinson (voir [GM94]).

³Ce type de démonstration peut aussi être utilisé pour prouver que UNI-E* vérifie la coupure.

Relations d'inférence	Propriétés
UNI-BO	système P (sauf la réflexivité) + réflexivité restreinte + monotonie rationnelle + conditionnalisation faible
UNI-INCL	système P + conditionnalisation faible
UNI-LEX	système P + monotonie rationnelle + conditionnalisation faible
UNI-E* (super-normaux)	système P + conditionnalisation faible
EXI-E* (super-normaux)	réflexivité + affaiblissement droit + équivalence logique gauche

Tableau 5.1: Propriétés des relations UNI par rapport à Kraus, Lehmann et Magidor.

Relations d'inférence	Propriétés
UNI-BO	postulats de base (sauf supra-classicité) + supra-classicité restreinte + monotonie rationnelle + OU
UNI-INCL	postulats étendus sauf monotonie rationnelle et monotonie rationnelle faible
UNI-LEX	postulats étendus
UNI-E* (super-normaux)	affaiblissement droit + équivalence logique gauche + ET + OU
EXI-E* (super-normaux)	affaiblissement droit + équivalence logique gauche

Tableau 5.2: Propriétés des relations UNI par rapport à Gärdenfors et Makinson.

5.2 Les nouveaux résultats

Ces nouveaux résultats sont présentés propriété par propriété avec à chaque fois les preuves correspondant aux différents cas.

5.2.1 La supra-classicité

Rappelons que la propriété de supra-classicité se définit par $\frac{\alpha \vdash \beta}{\alpha \sim \beta}$

Théorème 5.2.1 $\forall p \in \{UNI, EXI, ARG\}, \forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, vérifie la propriété de supra-classicité.

Preuve :

- Pour UNI : (pour $m = INCL$ ou LEX , voir aussi section 5.1) si $\alpha \vdash \beta$ alors $\forall S$ sous-ensemble de E α -consistant, $S \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, donc d'après les théorèmes, 2.3.4, 2.3.3, 2.3.6 et 2.3.7, on a $\alpha \sim^{\forall, m} \beta \forall m$.
- Pour EXI : si $\alpha \vdash \beta$ alors, d'après le cas précédent, $\alpha \sim^{\forall, m} \beta \forall m$, donc $\alpha \sim^{\exists, m} \beta \forall m$.
- Pour ARG : si $\alpha \vdash \beta$ alors $\alpha \not\vdash (\neg\beta)$ donc $\forall S$ sous-ensemble de E α -consistant, $S \cup \{\alpha\} \not\vdash (\neg\beta)$, et avec le fait que $\alpha \sim^{\exists, m} \beta \forall m$, on obtient que $\alpha \sim^{A, m} \beta \forall m$.

5.2.2 La réflexivité

Rappelons que la propriété de réflexivité se définit par $\alpha \sim \alpha$

Théorème 5.2.2 $\forall p \in \{UNI, EXI, ARG\}, \forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, vérifie la propriété de réflexivité.

Preuve :

- Pour *UNI* : (pour $m = INCL, LEX$ ou E^* , voir aussi section 5.1) on sait que la relation vérifie la supra-classicité donc d'après [Gär91, GM94] elle vérifie aussi la réflexivité.
- Pour *EXI* et *ARG* : (pour $EXI-E^*$, voir aussi section 5.1) idem *UNI*.

5.2.3 La préservation de la consistance

Rappelons que la propriété de préservation de la consistance se définit par $\frac{\alpha \sim \perp}{\alpha \vdash \perp}$

(avec \perp représentant la contradiction)

Théorème 5.2.3 $\forall p \in \{UNI, EXI, ARG\}, \forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, vérifie la propriété de préservation de la consistance.

Preuve :

- Pour *UNI* : (pour $m = BO, INCL$ ou LEX , voir aussi section 5.1) $\forall m, \alpha \sim^{\forall, m} \perp \Leftrightarrow \forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E, Y' \vdash \perp \Leftrightarrow \forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E, Y'$ est inconsistante ; or, vu la définition des Y' (voir section 2), ceci n'est possible que lorsque la formule α est inconsistante, donc $\alpha \vdash \perp$.
- Pour *EXI* : idem *UNI*.
- Pour *ARG* : idem *UNI*.

5.2.4 La conditionnalisation faible

Rappelons que la propriété de conditionnalisation faible se définit par $\frac{\alpha \sim \beta}{\sim \alpha \rightarrow \beta}$

Théorème 5.2.4 $\forall p \in \{UNI, EXI, ARG\}, \forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, vérifie la propriété de conditionnalisation faible.

Preuve :

- Pour *UNI* : voir théorème 2.4.1 et pour $m = BO, INCL$ ou LEX , voir aussi section 5.1.
- Pour *EXI* : $\forall m, \alpha \sim^{\exists, m} \beta \Rightarrow \forall m, \exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \beta$; par définition (voir section 2) les Y' ne peuvent avoir que deux formes possibles :
 - soit $Y' = \{\alpha\} \cup Y$ avec Y sous-base m -préférée de E ; alors on peut appliquer le théorème de la déduction et on obtient : $\exists Y$ sous-base m -préférée de E telle que $Y \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

- soit $Y' = \{\alpha\} \cup S$ avec S sous-ensemble de E qui n'est pas une sous-base m -préférée de E ; S est donc issu d'une sous-base Y m -préférée de E inconsistante avec $\alpha \Rightarrow$ il existe Y sous-base m -préférée de E telle que $Y \vdash (\neg\alpha) \Rightarrow$ il existe Y sous-base m -préférée de E telle que $Y \vdash (\neg\alpha) \vee \beta \Rightarrow$ il existe Y sous-base m -préférée de E telle que $Y \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$
- Pour $ARG : \forall m, \alpha \sim^{A,m} \beta \Rightarrow \forall m, \exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \beta$ et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E, Y' \not\vdash (\neg\beta)$; grâce à la démonstration de la propriété de conditionnalisation faible pour les relations d'inférence EXI - m , on sait déjà que " $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \beta \Rightarrow \exists Y$ sous-base m -préférée de E telle que $Y \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ " ; raisonnons par l'absurde en supposant que $\neg (\forall Y$ sous-base m -préférée de $E, Y \not\vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta))$; ceci implique que $\exists Y$ sous-base préférée de E telle que $Y \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \exists Y$ sous-base m -préférée de E consistante avec α telle que $Y \cup \{\alpha\} \vdash \neg\beta \Rightarrow \exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \neg\beta \Rightarrow$ contradiction avec l'hypothèse " $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E Y' \not\vdash (\neg\beta)$ "

5.2.5 Le OU

Rappelons que la propriété du OU se définit par $\frac{\alpha \vdash \gamma ; \beta \vdash \gamma}{\alpha \vee \beta \vdash \gamma}$

Rappel 5.2.1 Pour $p = UNI, \forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, vérifie la propriété du OU.

Preuve : Voir section 5.1.

Théorème 5.2.5 $\forall p \in \{EXI, ARG\}, \forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, ne vérifie pas la propriété du OU.

Preuve :

- Pour EXI : Il suffit de prendre un contre-exemple ; soit la base E suivante :

$$\frac{\left| \begin{array}{c} x, \alpha \rightarrow \gamma \quad \beta \rightarrow \gamma, x \\ \hline \rightarrow x \quad x \rightarrow \end{array} \right|}{\rightarrow x}$$

Le calcul des sous-bases m -préférées de E nous fournit les résultats suivants :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = \{x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y_2 = \{x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de E , on trouve⁴ :
 - $Y_1 = \{x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y_2 = \{x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = C_n(\{x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y_2 = C_n(\{x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\})$;

pour $\alpha \oplus E$, on obtient :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont :
 - $Y'_1 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$ et

⁴Nous citons ici, parmi les sous-bases BO-préférées de E , les sous-bases maximales consistantes (voir la propriété 2.3.3). Remarquons alors que si ces sous-bases n'infèrent pas une formule alors aucune autre sous-base BO-préférée n'infèrera cette formule. Cette remarque s'applique très souvent dans les contre-exemples concernant le mécanisme BO, elle ne sera donc pas répétée.

- $Y'_2 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
 - pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$, on trouve :
 - $Y'_1 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y'_2 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
 - pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont :
 - $Y'_1 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y'_2 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\})$;
- pour $\beta \oplus E$, on obtient :
- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de $\beta \oplus E$ sont :
 - $Y''_1 = \{\rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y''_2 = \{\rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
 - pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de $\beta \oplus E$, on trouve :
 - $Y''_1 = \{\rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y''_2 = \{\rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
 - pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de $\beta \oplus E$ sont :
 - $Y''_1 = C_n(\{\rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y''_2 = C_n(\{\rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\})$;
- pour $(\alpha \vee \beta) \oplus E$, on obtient :
- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de $(\alpha \vee \beta) \oplus E$ sont :
 - $Y'''_1 = \{\rightarrow \alpha, \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y'''_2 = \{\rightarrow \alpha, \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
 - pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de $(\alpha \vee \beta) \oplus E$, on trouve :
 - $Y'''_1 = \{\rightarrow \alpha, \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y'''_2 = \{\rightarrow \alpha, \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
 - pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de $(\alpha \vee \beta) \oplus E$ sont :
 - $Y'''_1 = C_n(\{\rightarrow \alpha, \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y'''_2 = C_n(\{\rightarrow \alpha, \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\})$;
- $\forall m$, on constate que :
- $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \gamma$ (les Y'_1) ;
 - $\exists Y''$ sous-base m -préférée de $\beta \oplus E$ telle que $Y'' \vdash \gamma$ (les Y''_2) ;
 - $\nexists Y'''$ sous-base m -préférée de $(\alpha \vee \beta) \oplus E$ telle que $Y''' \vdash \gamma$.
- Pour ARG : le contre exemple appliqué au cas EXI s'applique ici aussi et, $\forall m$, on constate que :
 - $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \gamma$ (les Y'_1) et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, $Y' \not\vdash (\neg \gamma)$;
 - $\exists Y''$ sous-base m -préférée de $\beta \oplus E$ telle que $Y'' \vdash \gamma$ (les Y''_2) et $\forall Y''$ sous-base m -préférée de $\beta \oplus E$, $Y'' \not\vdash (\neg \gamma)$;
 - $\nexists Y'''$ sous-base m -préférée de $(\alpha \vee \beta) \oplus E$ telle que $Y''' \vdash \gamma$ et $\forall Y'''$ sous-base m -préférée de $(\alpha \vee \beta) \oplus E$, $Y''' \not\vdash (\neg \gamma)$.

5.2.6 La monotonie rationnelle

Rappelons que la propriété de monotonie rationnelle se définit par $\frac{\alpha \vdash \gamma ; \alpha \not\vdash \neg \beta}{\alpha \wedge \beta \vdash \gamma}$

Rappel 5.2.2 Quel que soit $m \in \{INCL, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone UNI- m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, ne vérifie pas la propriété de monotonie rationnelle.

Preuve : Voir section 5.1.

Rappel 5.2.3 Quel que soit $m \in \{BO, LEX\}$, la relation d'inférence non-monotone UNI - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, vérifie la propriété de monotonie rationnelle.

Preuve : Voir section 5.1.

Théorème 5.2.6 Pour $p = EXI$, quel que soit $m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, vérifie la propriété de monotonie rationnelle.

Preuve : Elle utilise le lemme suivant :

Lemme 5.2.1 $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$ un mécanisme de sélection, soient α et β deux formules, soit Y une sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ qui est β -consistante alors $Y \cup \{\beta\}$ est une sous-base m -préférée de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$

Preuve du lemme :

- Pour $m = INCL$ ou LEX , d'après les théorèmes de caractérisation 2.3.3 et 2.3.6, on sait que $Y = \{\alpha\} \cup S$ avec $S \subseteq E$, S α -consistant et S m -préférée parmi les sous-bases de E α -consistantes ; sachant que Y est β -consistante, on obtient que S est $\alpha \wedge \beta$ -consistant, donc S est m -préférée parmi les sous-bases de E $\alpha \wedge \beta$ -consistantes ; en effet, si ne n'était pas le cas, on aurait un sous-ensemble S' m -préférée à S qui serait $\alpha \wedge \beta$ -consistant, donc α -consistant et donc S ne serait pas m -préférée parmi les sous-bases α -consistantes.
- Pour $m = BO$, d'après le théorème de caractérisation 2.3.4, on sait que $Y = \{\alpha\} \cup S$ avec $S \subseteq E$, S α -consistant et $N(\alpha \oplus E) \subseteq S$; sachant que Y est β -consistante, on obtient que S est $\alpha \wedge \beta$ -consistant et que $N(\alpha \oplus E)$ est $\alpha \wedge \beta$ -consistant ; donc $N((\alpha \wedge \beta) \oplus E) = N(\alpha \oplus E)$ et $Y \cup \{\beta\}$ est une sous-base préférée de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$.
- Pour $m = E^*$, comme nous nous restreignons au cas des défauts supernormaux, nous pouvons utiliser la propriété donnée dans [Bre89] qui prouve, dans ce cas là, qu'il est toujours possible de trouver une stratification de la base permettant d'obtenir les mêmes résultats avec le mécanisme $INCL$ que ceux obtenus avec le mécanisme E^* ; nous posons ainsi E la base stratifiée composée des deux strates E_0 et E_1 avec $E_0 = W$ consistant et $E_1 = \{\text{les conséquents de chaque défaut de } D\}$; nous savons donc qu'à chaque Y sous-base $incl$ -préférée de $\alpha \oplus E$ correspond une extension Y_E de $(W \cup \{\alpha\}, D)$ telle que $Y_E = C_n(Y)$; donc si Y_E est β -consistante alors Y est β -consistante ; sachant que la propriété est vraie pour $INCL$, on obtient que $Y \cup \{\beta\}$ est $incl$ -préférée de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$, donc $Y_E \cup \{\beta\}$ est une extension de $(\alpha \wedge \beta) \oplus (W, D)$.

$\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, $\alpha \vdash \gamma$ et $\alpha \not\vdash (\neg\beta) \Rightarrow \exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y \vdash \gamma$ et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, $Y' \not\vdash (\neg\beta)$, donc toutes les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont β -consistantes $\Rightarrow \exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \cup \{\beta\} \vdash \gamma$; or par le lemme 5.2.1, $Y' \cup \{\beta\}$ est une sous-base m -préférée de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E \Rightarrow \exists Y''$ sous-base m -préférée de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$ telle que $Y'' \vdash \gamma \Rightarrow (\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$

Théorème 5.2.7 Pour $p = ARG$, quel que soit $m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, ne vérifie pas la propriété de monotonie rationnelle.

Preuve : Il suffit de prendre un contre-exemple ; soit la base E suivante :

$$\left| \begin{array}{cc} x, \alpha \rightarrow \gamma & \beta, \gamma \rightarrow x \\ \hline \rightarrow x & x \rightarrow \end{array} \right|$$

$\forall m$, le calcul des sous-bases m -préférées de E nous fournit les résultats suivants :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = \{x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y_2 = \{x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de E , on trouve :
 - $Y_1 = \{x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y_2 = \{x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = C_n(\{x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y_2 = C_n(\{x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\})$;

pour $\alpha \oplus E$, on obtient :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont :
 - $Y'_1 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y'_2 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$, on trouve :
 - $Y'_1 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y'_2 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont :
 - $Y'_1 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y'_2 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\})$;

pour $(\alpha \wedge \beta) \oplus E^5$, on obtient :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$ sont :
 - $Y''_1 = \{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y''_2 = \{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$, on trouve :
 - $Y''_1 = \{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y''_2 = \{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$ sont :
 - $Y''_1 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y''_2 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\})$;

$\forall m$, on constate que :

- $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \gamma$ (les Y'_1) et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, $Y' \not\vdash (\neg \gamma)$;
- $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, $Y' \not\vdash (\neg \beta)$;
- $\exists Y''$ sous-base m -préférée de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$ telle que $Y'' \vdash \gamma$ (les Y''_1) et $\exists Y''$ sous-base m -préférée de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$ telle que $Y'' \vdash (\neg \gamma)$ (les Y''_2).

⁵Rappelons que nous nous situons dans un cadre syntaxique. Ceci implique que la formule $\alpha \wedge \beta$ est un tout indivisible, même si elle s'exprime sous la forme des deux clauses $\rightarrow \alpha$ et $\rightarrow \beta$.

5.2.7 L'équivalence logique gauche

Rappelons que la propriété d'équivalence logique gauche se définit par $\frac{\models \alpha \leftrightarrow \beta ; \alpha \sim \gamma}{\beta \sim \gamma}$

Théorème 5.2.8 $\forall p \in \{UNI, EXI, ARG\}, \forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, vérifie la propriété d'équivalence logique gauche.

Preuve :

- Pour *UNI* : voir section 5.1.
- Pour *EXI* : (pour *EXI-E**, voir aussi section 5.1) on sait que $\alpha \sim \gamma \Leftrightarrow \exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \gamma$;
or, $\forall m$ Y' est de la forme $S \cup \{\alpha\}$ avec S un sous-ensemble de E m -préférée parmi les sous-ensembles α -consistants ;
d'autre part, on sait que α est équivalent à β , donc $\forall S$ sous-ensemble de E m -préférée parmi les sous-ensembles α -consistants, S est aussi un sous-ensemble de E m -préférée parmi les sous-ensembles β -consistants, donc $S \cup \{\beta\}$ est une sous-base m -préférée de $\beta \oplus E$;
donc $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \gamma \Rightarrow \exists S$ sous-ensemble de E m -préférée parmi les sous-ensembles α -consistants tel que $S \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$; or, α est équivalent à β , donc $S \cup \{\alpha\}$ et $S \cup \{\beta\}$ ont exactement les mêmes conséquences logiques $\Rightarrow \exists S$ sous-ensemble de E m -préférée parmi les sous-ensembles β -consistants tel que $S \cup \{\beta\} \vdash \gamma \Rightarrow \exists Y''$ sous-base m -préférée de $\beta \oplus E$ telle que $Y'' \vdash \gamma$
- Pour *ARG* : on applique le même raisonnement que pour *EXI* ;
on sait que, α étant équivalent à β , $\forall S, S \cup \{\alpha\}$ et $S \cup \{\beta\}$ ont exactement les mêmes conséquences logiques, on obtient que :
 $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \gamma$ et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E, Y' \not\vdash \neg \gamma \Rightarrow \exists Y''$ sous-base m -préférée de $\beta \oplus E$ telle que $Y'' \vdash \gamma$ et $\forall Y''$ sous-base m -préférée de $\beta \oplus E, Y'' \not\vdash \neg \gamma$.

5.2.8 L'affaiblissement droit

Rappelons que la propriété d'affaiblissement droit se définit par $\frac{\models \alpha \rightarrow \beta ; \gamma \vdash \alpha}{\gamma \vdash \beta}$

Théorème 5.2.9 $\forall p \in \{UNI, EXI, ARG\}, \forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, vérifie la propriété d'affaiblissement droit.

Preuve :

- Pour *UNI* : voir section 5.1.
- Pour *EXI* : (pour *EXI-E**, voir aussi section 5.1) on sait que $\models \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \vdash \alpha \rightarrow \beta$; on sait aussi que $\gamma \vdash \alpha \Leftrightarrow \exists Y'$ sous-base m -préférée de $\gamma \oplus E$ telle que $Y' \vdash \alpha$; donc $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\gamma \oplus E$ telle que $Y' \vdash \beta$
- Pour *ARG* : on sait que $\models \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \vdash \alpha \rightarrow \beta$; on sait aussi que $\gamma \vdash \alpha \Leftrightarrow \exists Y'$ sous-base m -préférée de $\gamma \oplus E$ telle que $Y' \vdash \alpha$ et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\gamma \oplus E, Y' \not\vdash (\neg \alpha)$; donc $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\gamma \oplus E$ telle que $Y' \vdash \beta$ et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\gamma \oplus E, Y' \not\vdash (\neg \beta)$ (ce dernier point se prouve en raisonnant par l'absurde car s'il existe Y' sous-base m -préférée de $\gamma \oplus E$ telle que $Y' \vdash \neg \beta$ alors il existe aussi Y' sous-base m -préférée de $\gamma \oplus E$ telle que $Y' \vdash \neg \alpha$, puisque $\models \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \models \neg \beta \rightarrow \neg \alpha$).

5.2.9 La coupure

Rappelons que la propriété de la coupure se définit par $\frac{\alpha \vdash \beta ; \alpha \wedge \beta \vdash \gamma}{\alpha \vdash \gamma}$

Rappel 5.2.4 Pour $p = \text{UNI}$, $\forall m \in \{\text{BO}, \text{INCL}, \text{LEX}, \text{E}^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, vérifie la propriété de la coupure.

Preuve : voir section 5.1.

Théorème 5.2.10 $\forall p \in \{\text{EXI}, \text{ARG}\}$, $\forall m \in \{\text{BO}, \text{INCL}, \text{LEX}, \text{E}^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, ne vérifie pas la propriété de la coupure.

Preuve :

- Pour EXI : il suffit de prendre un contre exemple ; posons la base E suivante :

$$\left| \begin{array}{cc} x, \alpha \rightarrow \beta & \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x \\ \hline \rightarrow x & x \rightarrow \end{array} \right|$$

$\forall m$, le calcul des sous-bases m -préférées de E nous fournit les résultats suivants :

- $\forall m \in \{\text{INCL}, \text{LEX}\}$ les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y_2 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = \text{BO}$, parmi les sous-bases m -préférées de E , on trouve :
 - $Y_1 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y_2 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = \text{E}^*$, les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = C_n(\{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y_2 = C_n(\{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\})$;

pour $\alpha \oplus E$, on obtient :

- $\forall m \in \{\text{INCL}, \text{LEX}\}$ les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont :
 - $Y'_1 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y'_2 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = \text{BO}$, parmi les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$, on trouve :
 - $Y'_1 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y'_2 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = \text{E}^*$, les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont :
 - $Y'_1 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y'_2 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\})$;

pour $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$, on obtient :

- $\forall m \in \{\text{INCL}, \text{LEX}\}$ les sous-bases m -préférées de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$ sont :
 - $Y''_1 = \{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y''_2 = \{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = \text{BO}$, parmi les sous-bases m -préférées de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$, on trouve :
 - $Y''_1 = \{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y''_2 = \{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = \text{E}^*$, les sous-bases m -préférées de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$ sont :
 - $Y''_1 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y''_2 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha, \beta \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\})$;

$\forall m$, on constate que :

- $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \beta$ (les Y'_1) ;
 - $\exists Y''$ sous-base m -préférée de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$ telle que $Y'' \vdash \gamma$ (les Y''_2) ;
 - $\nexists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \gamma$.
- Pour ARG : le contre exemple appliqué au cas EXI s'applique ici aussi et, $\forall m$, on constate que :
- $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \beta$ (les Y'_1) et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, $Y' \not\vdash (\neg\beta)$;
 - $\exists Y''$ sous-base m -préférée de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$ telle que $Y'' \vdash \gamma$ (les Y''_2) et $\forall Y''$ sous-base m -préférée de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$, $Y'' \not\vdash (\neg\gamma)$;
 - $\nexists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \gamma$ et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, $Y' \not\vdash (\neg\gamma)$.

5.2.10 La monotonie prudente

Rappelons que la propriété de la monotonie prudente se définit par $\frac{\alpha \vdash \beta ; \alpha \vdash \gamma}{\alpha \wedge \beta \vdash \gamma}$

Rappel 5.2.5 Pour $p = UNI$, $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, vérifie la propriété de la monotonie prudente.

Preuve : voir section 5.1.

Théorème 5.2.11 Pour $p = EXI$, $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, ne vérifie pas la propriété de la monotonie prudente.

Preuve : Il suffit de prendre un contre exemple ; posons la base E suivante :

$x, \alpha \rightarrow \beta$	$\alpha \rightarrow \gamma, x, \beta$
$\beta \rightarrow x$	
$\rightarrow x$	$x \rightarrow$

$\forall m$, le calcul des sous-bases m -préférées de E nous fournit les résultats suivants :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x, \beta ; \beta \rightarrow x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y_2 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x, \beta ; \beta \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de E , on trouve :
 - $Y_1 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x, \beta ; \beta \rightarrow x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y_2 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x, \beta ; \beta \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = C_n(\{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x, \beta ; \beta \rightarrow x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y_2 = C_n(\{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x, \beta ; \beta \rightarrow x ; x \rightarrow\})$;

pour $\alpha \oplus E$, on obtient :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont :
 - $Y'_1 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x, \beta ; \beta \rightarrow x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y'_2 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x, \beta ; \beta \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;

- pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$, on trouve :
 - $Y'_1 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x, \beta ; \beta \rightarrow x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y'_2 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x, \beta ; \beta \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont :
 - $Y'_1 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x, \beta ; \beta \rightarrow x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y'_2 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x, \beta ; \beta \rightarrow x ; x \rightarrow\})$;

pour $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$, on obtient :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ la sous-base m -préférée de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$ est :
 - $Y''_1 = \{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x, \beta ; \beta \rightarrow x ; \rightarrow x\}$
- pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$, on trouve :
 - $Y''_1 = \{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x, \beta ; \beta \rightarrow x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y''_2 = \{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x, \beta ; \beta \rightarrow x\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$ sont :
 - $Y''_1 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x, \beta ; \beta \rightarrow x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y''_2 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x, \beta ; x \rightarrow\})$;

$\forall m$, on constate que :

- $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \beta$ (les Y'_1) ;
- $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \gamma$ (les Y'_2) ;
- $\nexists Y''$ sous-base m -préférée de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$ telle que $Y'' \vdash \gamma$.

Théorème 5.2.12 Pour $p = ARG$, $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, ne vérifie pas la propriété de la monotonie prudente.

Preuve : Il suffit de prendre un contre exemple ; posons la base E suivante :

$$\left| \begin{array}{ccc} x, \alpha \rightarrow \beta & x, \alpha \rightarrow \gamma & \beta, \gamma \rightarrow x \\ \hline \rightarrow x & x \rightarrow & \end{array} \right|$$

$\forall m$, le calcul des sous-bases m -préférées de E nous fournit les résultats suivants :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y_2 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de E , on trouve :
 - $Y_1 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y_2 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = C_n(\{x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y_2 = C_n(\{x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\})$;

pour $\alpha \oplus E$, on obtient :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont :
 - $Y'_1 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y'_2 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$, on trouve :
 - $Y'_1 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\}$,

- $Y'_2 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont :
 - $Y'_1 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y'_2 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\})$;

pour $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$, on obtient :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ la sous-base m -préférée de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$ est :
 - $Y''_1 = \{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\}$
 - $Y''_2 = \{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$, on trouve :
 - $Y''_1 = \{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y''_2 = \{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$ sont :
 - $Y''_1 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y''_2 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \gamma ; \beta, \gamma \rightarrow x ; x \rightarrow\})$;

$\forall m$, on constate que :

- $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \beta$ (les Y'_1) et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, $Y' \not\vdash \neg \beta$;
- $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \gamma$ (les Y'_2) et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, $Y' \not\vdash \neg \gamma$;
- $\exists Y''$ sous-base m -préférée de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$ telle que $Y'' \vdash \gamma$ (les Y''_1) et $\exists Y''$ sous-base m -préférée de $(\alpha \wedge \beta) \oplus E$ telle que $Y'' \vdash \neg \gamma$ (les Y''_2).

5.2.11 La cumulativité

Rappelons que la propriété de cumulativité se définit par $\frac{\alpha \sim \beta ; \beta \vdash \alpha}{\alpha \sim \gamma \Leftrightarrow \beta \sim \gamma}$

Avant toute chose, nous donnons d'abord la démonstration de la propriété 5.2.1 présentée dans [GM94].

Propriété 5.2.1 Les propriétés de coupure, monotonie prudente, équivalence logique gauche et supra-classicité impliquent la propriété de cumulativité.

Soient α et β , deux formules telles que $\alpha \sim \beta$ et $\beta \vdash \alpha$.

- supposons que $\alpha \sim \gamma$; avec $\alpha \sim \beta$ et la monotonie prudente, on obtient que $\alpha \wedge \beta \sim \gamma$; d'autre part, on sait que $\beta \vdash \alpha \Rightarrow \vdash \beta \rightarrow \alpha \Rightarrow \vdash (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \beta$; donc en appliquant l'équivalence logique gauche, on obtient que $\beta \sim \gamma$;
- supposons que $\beta \sim \gamma$; avec $\beta \vdash \alpha$ et la supra-classicité, on obtient que $\beta \sim \alpha$; donc avec $\alpha \sim \beta$ et $\beta \sim \gamma$, on obtient $(\alpha \wedge \beta) \sim \gamma$; puis en appliquant la coupure, on obtient que $\alpha \sim \gamma$;

Théorème 5.2.13 Pour $p = UNI$, quel que soit $m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, vérifie la propriété de cumulativité.

Preuve : (pour $m = INCL$ ou LEX , voir aussi la section 5.1) Quel que soit $m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, on utilise la propriété 5.2.1. En effet, dans ce cas-là, toutes les propriétés nécessaires sont vérifiées (voir sections 5.2.1, 5.2.7, 5.2.9, 5.2.10). On peut donc en conclure que la propriété de cumulativité est vérifiée.

Théorème 5.2.14 Pour $p = EXI$, quel que soit $m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, ne vérifie pas la propriété de cumulativité.

Preuve : On sait grâce à [GM94] que la propriété de cumulativité est équivalente aux propriétés de coupure et de monotonie prudente quand les postulats de base sont vérifiés. Or, pour $p = EXI$, $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, tous ces postulats de base sont vérifiés (voir sections 5.2.1, 5.2.7, 5.2.8, 5.2.12, 5.2.4, 5.2.3, 5.2.13), alors que les propriétés de coupure et de monotonie prudente ne sont pas vérifiées (voir sections 5.2.9, 5.2.10). Donc la propriété de cumulativité n'est pas vérifiée.

Théorème 5.2.15 Pour $p = ARG$, $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, ne vérifie pas la propriété de la cumulativité.

Preuve : Il suffit de prendre un contre exemple ; posons la base E suivante :

$$\left| \begin{array}{cc} x, \alpha \rightarrow \delta & \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x \\ \hline \rightarrow x & x \rightarrow \end{array} \right|$$

et posons $\beta = \delta \wedge \alpha$.

$\forall m$, le calcul des sous-bases m -préférées de E nous fournit les résultats suivants :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = \{x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y_2 = \{x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de E , on trouve :
 - $Y_1 = \{x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y_2 = \{x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = C_n(\{x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y_2 = C_n(\{x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\})$;

pour $\alpha \oplus E$, on obtient :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont :
 - $Y'_1 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y'_2 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$, on trouve :
 - $Y'_1 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y'_2 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont :
 - $Y'_1 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y'_2 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\})$;

pour $\beta \oplus E$, on obtient :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de $\beta \oplus E$ sont :
 - $Y''_1 = \{\rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y''_2 = \{\rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de $\beta \oplus E$, on trouve :
 - $Y''_1 = \{\rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$,

- $Y_2'' = \{\rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de $\beta \oplus E$ sont :
 - $Y_1'' = C_n(\{\rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y_2'' = C_n(\{\rightarrow \beta ; x, \alpha \rightarrow \delta ; \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\})$;

$\forall m$, on constate que :

- $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \beta$ (les Y_1') et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, $Y' \not\vdash (\neg \beta)$;
- $\beta \vdash \alpha$;
- $\exists Y''$ sous-base m -préférée de $\beta \oplus E$ telle que $Y'' \vdash \gamma$ (les Y_2'') et $\forall Y''$ sous-base m -préférée de $\beta \oplus E$, $Y'' \not\vdash (\neg \gamma)$;
- $\nexists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \gamma$ et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, $Y' \not\vdash (\neg \gamma)$.

5.2.12 Le ET

Rappelons que la propriété du ET se définit par $\frac{\alpha \vdash \beta ; \alpha \vdash \gamma}{\alpha \vdash \beta \wedge \gamma}$

Théorème 5.2.16 $\forall p \in \{EXI, ARG\}, \forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, ne vérifie pas la propriété du ET.

Preuve :

- Pour EXI : Il suffit de prendre un contre-exemple ; soit la base E suivante :

$$\frac{\begin{array}{|l} x, \alpha \rightarrow \beta \quad \alpha \rightarrow \gamma, x \\ \hline \rightarrow x \quad x \rightarrow \end{array}}{}{}$$

$\forall m$, le calcul des sous-bases m -préférées de E nous fournit les résultats suivants :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y_2 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de E , on trouve :
 - $Y_1 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y_2 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = C_n(\{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y_2 = C_n(\{x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\})$;

pour $\alpha \oplus E$, on obtient :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont :
 - $Y_1' = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y_2' = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$, on trouve :
 - $Y_1' = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y_2' = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont :
 - $Y_1' = C_n(\{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y_2' = C_n(\{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \alpha \rightarrow \gamma, x ; x \rightarrow\})$;

$\forall m$, on constate que :

- $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \beta$ (les Y'_1) ;
- $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \gamma$ (les Y'_2) ;
- $\nexists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash (\beta \wedge \gamma)$.
- Pour ARG : le contre exemple appliqué au cas EXI s'applique ici aussi et, $\forall m$, on constate que :
 - $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \beta$ (les Y'_1) et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, $Y' \not\vdash (\neg\beta)$;
 - $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \gamma$ (les Y'_2) et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, $Y' \not\vdash (\neg\gamma)$;
 - $\nexists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \beta \wedge \gamma$.

Théorème 5.2.17 Pour $p = \text{UNI}$, $\forall m \in \{\text{BO}, \text{INCL}, \text{LEX}, \text{E}^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, vérifie la propriété du ET.

Preuve : (pour $m = \text{BO}$, INCL ou LEX , voir aussi section 5.1) La propriété du ET est dérivée des propriétés du système C (voir [KLM90]). Or, pour $p = \text{UNI}$, $\forall m \in \{\text{BO}, \text{INCL}, \text{LEX}, \text{E}^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m vérifie toutes ces propriétés (voir section 5.1). Elle vérifie donc aussi la propriété du ET.

5.2.13 La monotonie rationnelle faible

Rappelons que la propriété de monotonie rationnelle faible se définit par $\frac{\vdash (\alpha \rightarrow \beta) ; \not\vdash \neg\alpha}{\alpha \vdash \beta}$

Propriété 5.2.2 $\forall p \in \{\text{UNI}, \text{EXI}, \text{ARG}\}$, $\forall m \in \{\text{BO}, \text{INCL}, \text{LEX}, \text{E}^*\}$, si la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 vérifie la propriété de monotonie rationnelle, alors elle vérifie aussi la propriété de monotonie rationnelle faible.

Preuve : La monotonie rationnelle faible est un cas particulier de la monotonie rationnelle ; soit la propriété de monotonie rationnelle exprimée sous la forme suivante :

$$\frac{P \vdash R ; P \not\vdash \neg Q}{(P \wedge Q) \vdash R}$$

posons $P = \text{VRAI}$, $Q = \alpha$, $R = \alpha \rightarrow \beta$, on obtient alors :

$$\frac{\vdash (\alpha \rightarrow \beta) ; \not\vdash \neg\alpha}{\alpha \vdash (\alpha \rightarrow \beta)}$$

or :

- pour $p = \text{UNI}$, $\alpha \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, $Y' \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, $Y' \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, or toutes les Y' sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont de la forme $\{\alpha\} \cup S$ avec S un sous-ensemble de E , donc $Y' = Y' \cup \{\alpha\}$; on a donc $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, $Y' \vdash \beta \Rightarrow \alpha \vdash \beta$;
- pour $p = \text{EXI}$, $\alpha \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, or toutes les Y' sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont de la forme $\{\alpha\} \cup S$ avec S un sous-ensemble de E , donc $Y' = Y' \cup \{\alpha\}$; on a donc $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \beta \Rightarrow \alpha \vdash \beta$;

- pour $p = ARG$, $\alpha \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, $Y' \not\vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, Y' consistante avec $\neg\alpha \vee \beta$, or toutes les Y' sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont consistantes avec α et de la forme $\{\alpha\} \cup S$ avec S un sous-ensemble de E , donc $Y' = Y' \cup \{\alpha\}$; on a donc $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \beta$ et $\forall Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, Y' consistante avec $\beta \Rightarrow \alpha \vdash \beta$

Théorème 5.2.18 Pour $p = UNI$, quel que soit $m \in \{BO, LEX\}$ et pour $p = EXI$, quel que soit $m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, vérifie la propriété de monotonie rationnelle faible.

Preuve : (voir aussi section 5.1) C'est une simple application de la propriété 5.2.2, puisque dans tous ces cas les relations d'inférence non-monotone vérifient la monotonie rationnelle.

Théorème 5.2.19 Pour $p = UNI$, $\forall m \in \{INCL, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, ne vérifie pas la propriété de monotonie rationnelle faible.

Preuve : (pour $m = INCL$, voir aussi section 5.1) Il suffit de donner un contre exemple⁶ ; soit la base E suivante :

$$\left| \begin{array}{ccc} a, b \rightarrow & & a \rightarrow c \\ \hline \rightarrow a & \rightarrow b & c \rightarrow \end{array} \right|$$

On obtient ainsi :

- pour $m = INCL$, les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = \{a, b \rightarrow ; a \rightarrow c ; \rightarrow a\}$;
 - $Y_2 = \{a, b \rightarrow ; a \rightarrow c ; \rightarrow b ; c \rightarrow\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = C_n\{a, b \rightarrow ; a \rightarrow c ; \rightarrow a\}$;
 - $Y_2 = C_n\{a, b \rightarrow ; a \rightarrow c ; \rightarrow b ; c \rightarrow\}$;

$\forall m$, les sous-bases m -préférées infèrent la formule $c \rightarrow a$ et il existe une sous-base m -préférée qui n'infère pas $\neg c$. Posons :

- $\alpha = c$,
- $\beta = a$.

On a ainsi $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ et $\not\vdash (\neg\alpha)$.

$\forall m$, si on rajoute la formule α à la base E , on obtient $\alpha \not\vdash \beta$, car il existe au moins une sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ qui n'infère pas β (la sous-base m -préférée contenant $\{a, b \rightarrow ; a \rightarrow c ; \rightarrow b ; \rightarrow c\}$).

Théorème 5.2.20 Pour $p = ARG$, quel que soit $m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, la relation d'inférence non-monotone p - m , définie à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2, ne vérifie pas la propriété de monotonie rationnelle faible.

Preuve : Il suffit de prendre un contre-exemple ; soit la base E suivante :

⁶Celui utilisé pour prouver que UNI-INCL ne vérifie pas la monotonie rationnelle convient parfaitement (voir dans [Ben94]).

$$\left| \frac{x, \alpha \rightarrow \beta \quad \beta \rightarrow x}{\rightarrow x} \quad \frac{\beta \rightarrow x}{x \rightarrow} \right|$$

$\forall m$, le calcul des sous-bases m -préférées de E nous fournit les résultats suivants :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; \beta \rightarrow x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y_2 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; \beta \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de E , on trouve :
 - $Y_1 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; \beta \rightarrow x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y_2 = \{x, \alpha \rightarrow \beta ; \beta \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de E sont :
 - $Y_1 = C_n(\{x, \alpha \rightarrow \beta ; \beta \rightarrow x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y_2 = C_n(\{x, \alpha \rightarrow \beta ; \beta \rightarrow x ; x \rightarrow\})$;

pour $\alpha \oplus E$, on obtient :

- $\forall m \in \{INCL, LEX\}$ les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont :
 - $Y'_1 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \beta \rightarrow x ; \rightarrow x\}$ et
 - $Y'_2 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \beta \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = BO$, parmi les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$, on trouve :
 - $Y'_1 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \beta \rightarrow x ; \rightarrow x\}$,
 - $Y'_2 = \{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \beta \rightarrow x ; x \rightarrow\}$;
- pour $m = E^*$, les sous-bases m -préférées de $\alpha \oplus E$ sont :
 - $Y'_1 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \beta \rightarrow x ; \rightarrow x\})$ et
 - $Y'_2 = C_n(\{\rightarrow \alpha ; x, \alpha \rightarrow \beta ; \beta \rightarrow x ; x \rightarrow\})$;

$\forall m$, on constate que :

- $\nexists Y$ sous-base m -préférée de E telle que $Y \vdash (\neg \alpha)$, donc $\nVdash \neg \alpha$;
- $\exists Y$ sous-base m -préférée de E telle que $Y \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ (les Y_1) et $\forall Y$ sous-base m -préférée de E , $Y \nVdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$, donc $\vdash (\alpha \rightarrow \beta)$;
- $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$ telle que $Y' \vdash \beta$ (les Y'_1) et $\exists Y'$ sous-base m -préférée de $\alpha \oplus E$, $Y' \vdash (\neg \beta)$ (les Y'_2), donc $\alpha \nVdash \beta$.

5.3 Conclusion sur les résultats

Tous les résultats rappelés et démontrés dans cette section sont récapitulés dans les tableaux 5.3 et 5.4.

La synthèse de ces résultats fait l'objet du chapitre 6.

PROPRIÉTÉS	Système P						monotonie rationnelle
	réflexivité	équivalence logique gauche	affaiblissement droit	coupure	monotonie prudente	OU	
UNI-BO	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣
UNI-INCL	♣	♣	♣	♣	♣	♣	◇
UNI-LEX	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣
UNI-E*	♣	♣	♣	♣	♣	♣	◇
EXI-BO	♣	♣	♣	◇	◇	◇	♣
EXI-INCL	♣	♣	♣	◇	◇	◇	♣
EXI-LEX	♣	♣	♣	◇	◇	◇	♣
EXI-E*	♣	♣	♣	◇	◇	◇	♣
ARG-BO	♣	♣	♣	◇	◇	◇	◇
ARG-INCL	♣	♣	♣	◇	◇	◇	◇
ARG-LEX	♣	♣	♣	◇	◇	◇	◇
ARG-E*	♣	♣	♣	◇	◇	◇	◇

Tableau 5.3: Récapitulatif des résultats du point de vue de Kraus, Lehmann et Magidor (♣ = propriété vérifiée, ◇ = propriété non vérifiée)

PROPRIÉTÉS	Postulats étendus de AGM									
	Postulats de base									
	supra-classicité	équivalence logique gauche	affaiblissement droit	ET	monotonie rationnelle faible	conditionnalisation faible	préservation de la consistance	cumulativité	monotonie rationnelle	OU
UNI-BO	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣
UNI-INCL	♣	♣	♣	♣	◇	♣	♣	♣	◇	♣
UNI-LEX	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣
UNI-E*	♣	♣	♣	♣	◇	♣	♣	♣	◇	♣
EXI-BO	♣	♣	♣	◇	♣	♣	♣	◇	♣	◇
EXI-INCL	♣	♣	♣	◇	♣	♣	♣	◇	♣	◇
EXI-LEX	♣	♣	♣	◇	♣	♣	♣	◇	♣	◇
EXI-E*	♣	♣	♣	◇	♣	♣	♣	◇	♣	◇
ARG-BO	♣	♣	♣	◇	◇	♣	♣	◇	◇	◇
ARG-INCL	♣	♣	♣	◇	◇	♣	♣	◇	◇	◇
ARG-LEX	♣	♣	♣	◇	◇	♣	♣	◇	◇	◇
ARG-E*	♣	♣	♣	◇	◇	♣	♣	◇	◇	◇

Tableau 5.4: Récapitulatif des résultats du point de vue de Gärdenfors et Makinson (♣ = propriété vérifiée, ◇ = propriété non vérifiée)

Chapitre 6

La synthèse des résultats

Ce chapitre est composé de trois parties :

- quelques remarques sur les résultats concernant les propriétés de déduction ;
- la synthèse des deux points de vue sur les relations d'inférence non-monotone étudiés dans ce rapport : la prudence (voir chapitre 3) et les propriétés de déduction (voir chapitre 5) ;
- puis nous ajouterons à cette synthèse le point de vue de la complexité présenté dans [CLS93].

6.1 Remarques sur les propriétés de déduction

Dans cette section, nous allons nous attacher à identifier des liens entre les divers résultats présentés.

Ces liens sont de différents types :

- les similarités ;
- les différences ;
- comment se situer par rapport aux classifications existantes (celles proposées dans [KLM90] ou dans [GM94]) ?
- quelle relation d'inférence non-monotone choisir quand on veut un ensemble de propriétés donné ?

Rappelons que tous les résultats de cette section sont donnés par rapport à un ensemble de propriétés que nous nous sommes fixées (voir la liste de ces propriétés dans le chapitre 5).

6.1.1 Les similarités

Propriété 6.1.1 $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, les relations d'inférence $EXI-m$ définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 vérifient toutes le même ensemble de propriétés.

Propriété 6.1.2 $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, les relations d'inférence $ARG-m$ définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 vérifient toutes le même ensemble de propriétés.

Propriété 6.1.3 $\forall m \in \{INCL, E^*\}$, les relations d'inférence $UNI-m$ définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 vérifient toutes le même ensemble de propriétés.

Propriété 6.1.4 $\forall m \in \{BO, LEX\}$, les relations d'inférence $UNI-m$ définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 vérifient toutes le même ensemble de propriétés.

6.1.2 Les différences

Propriété 6.1.5 $\forall m \in \{BO, LEX\}$, les relations d'inférence *EXI-m* définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 ne vérifient aucune propriété de plus¹ que les relations d'inférence *UNI-m* définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2.

Propriété 6.1.6 $\forall m \in \{INCL, E^*\}$, les relations d'inférence *EXI-m* définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 vérifient uniquement deux propriétés de plus que les relations d'inférence *UNI-m* définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 : la monotonie rationnelle et la monotonie rationnelle faible.

Propriété 6.1.7 $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, les relations d'inférence *ARG-m* définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 ne vérifient aucune propriété de plus que les relations d'inférence *UNI-m* définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2.

Propriété 6.1.8 $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, les relations d'inférence *ARG-m* définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 ne vérifient aucune propriété de plus que les relations d'inférence *EXI-m* définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2.

Propriété 6.1.9 $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, les relations d'inférence *EXI-m* définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 vérifient uniquement deux propriétés de plus que les relations d'inférence *ARG-m* définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 : la monotonie rationnelle et la monotonie rationnelle faible (les *EXI-m* sont donc plus près des postulats de base de [GM94] que les *ARG-m*, il ne leur manque que le *ET* !).

6.1.3 Lien avec les classifications existantes

Les classifications existantes sont celles proposées dans [KLM90] ou dans [GM94].

La classification de Kraus, Lehmann et Magidor

Propriété 6.1.10 $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, les relations d'inférence *EXI-m* et *ARG-m* définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 induisent des systèmes encore plus faibles que le système *C* (système le plus faible présenté dans [KLM90]).

Propriété 6.1.11 $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, les relations d'inférence *UNI-m* définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 correspondent au système *P* de [KLM90]. Ce sont des relations d'inférence préférentielles.

Propriété 6.1.12 $\forall m \in \{BO, LEX\}$, les relations d'inférence *UNI-m* définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 correspondent au système *P* de [KLM90] plus la monotonie rationnelle. Ce sont des relations d'inférence rationnelles.

La classification de Gärdenfors et Makinson

Propriété 6.1.13 $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, les relations d'inférence *UNI-m* définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 sont des relations d'inférence non-monotone au sens de [GM94].

Propriété 6.1.14 $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, les relations d'inférence *EXI-m* et *ARG-m* définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 ne sont pas des relations d'inférence non-monotone au sens de [GM94] (il manque le *ET*).

¹Ce qui ne veut pas dire que les relations *EXI-m* vérifient toutes les propriétés des *UNI-m*.

Propriété 6.1.15 $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, les relations d'inférence UNI- m définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 vérifient l'ensemble des postulats de base de [GM94].

Propriété 6.1.16 $\forall m \in \{INCL, E^*\}$, les relations d'inférence UNI- m définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 ne vérifient pas l'ensemble étendu des postulats de [GM94].

Propriété 6.1.17 $\forall m \in \{BO, LEX\}$, les relations d'inférence UNI- m définies à l'aide des définitions 2.1.1 et 2.1.2 vérifient l'ensemble étendu des postulats de [GM94]. Ce sont des relations d'inférence comparatives.

6.1.4 Choix en fonction d'un ensemble de propriétés

Propriété 6.1.18 Pour respecter toutes les propriétés du système C de [KLM90], il faut au moins une relation du type UNI- m , $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$.

Propriété 6.1.19 Pour respecter toutes les propriétés du système P de [KLM90], il faut au moins une relation du type UNI- m , $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$.

Propriété 6.1.20 Pour respecter toutes les propriétés du système P de [KLM90] et la monotonie rationnelle, il faut au moins une relation du type UNI- m , avec $m \in \{BO, LEX\}$.

Propriété 6.1.21 Pour respecter tous les postulats de base de [GM94], il faut au moins une relation du type UNI- m , $\forall m \in \{BO, LEX\}$.

Propriété 6.1.22 Pour respecter tous les postulats étendus de [GM94], il faut au moins une relation du type UNI- m , avec $m \in \{BO, LEX\}$.

Rappelons aussi les résultats déjà existants.

Propriété 6.1.23 (voir [BCD⁺93]) L'ensemble des relations UNI-LEX est exactement l'ensemble des relations comparatives².

Propriété 6.1.24 (voir [BCD⁺93]) L'ensemble des relations UNI-INCL est strictement inclus dans l'ensemble des relations préférentielles et contient strictement l'ensemble des relations comparatives.

Les résultats de [BCD⁺93] nous permettent de représenter les relations UNI-LEX et UNI-INCL dans le schéma 6.1.

6.2 Prudence et propriétés de déduction

Le lien entre la prudence et les propriétés a déjà été exploré par Brass en ce qui concerne les relations UNI- E^* et EXI- E^* (voir [Bra93]).

Ainsi, il donne les théorèmes 6.2.1 et 6.2.2.

Théorème 6.2.1 La relation UNI- E^* est la plus prudente, parmi les relations d'inférence définies sur le même mécanisme de génération d'extensions que UNI- E^* , qui vérifie les propriétés de réflexivité, affaiblissement droit, équivalence logique gauche, ET, OU et CWA.

²C'est-à-dire les relations définies par l'ensemble étendu des postulats de Gärdenfors et Makinson.

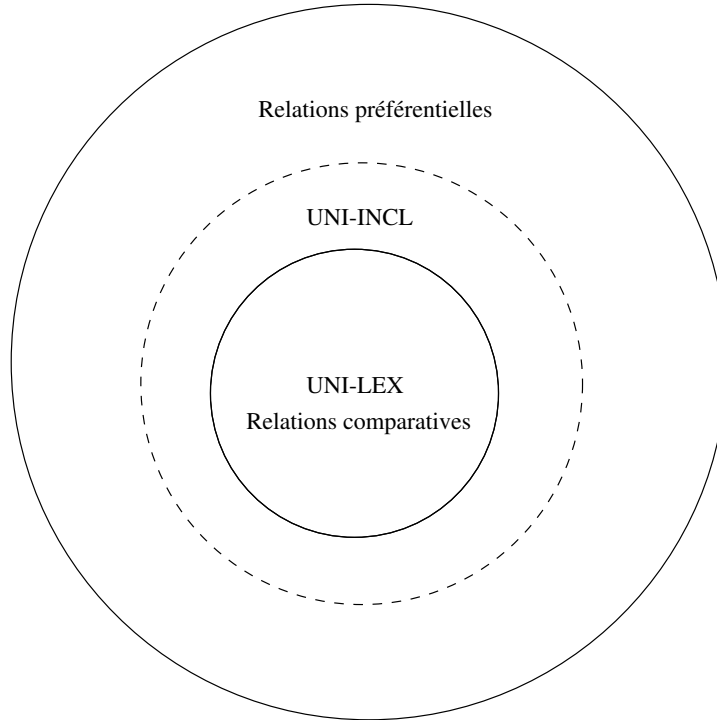


Figure 6.1: Lien entre les relations UNI (point de vue des propriétés)

Théorème 6.2.2 *La relation $EXI-E^*$ est la plus prudente, parmi les relations d'inférence définies sur le même mécanisme de génération d'extensions que $EXI-E^*$, qui vérifie les propriétés de réflexivité, affaiblissement droit, CLC , DA , CWA et IMD .*

Les propriétés CWA , CLC , DA et IMD sont définies dans [Bra93] et sont liées pour la plupart au formalisme des défauts.

Ces théorèmes prouvent que la relation d'inférence étudiée R_P est à la fois saine et complète pour l'ensemble de propriétés de déduction donné P : R_P vérifie P et $\forall R$, une relation d'inférence définie sur le même mécanisme de génération d'extensions que R , si R vérifie P alors R_P est plus prudente que R .

Il nous est difficile de fournir le même type de résultats puisque nous manipulons plusieurs sortes de mécanismes de génération et que les sous-bases ainsi générées ne sont pas toujours comparables.

Toutefois, le théorème 6.2.3, qui est une version affaiblie de ce type de résultat, est directement issu des résultats du chapitre 5.

Théorème 6.2.3 *La relation $UNI-BO$ est la plus prudente, parmi les relations d'inférence $p-m$ avec $p \in \{UNI, EXI, ARG\}$ et $m \in \{BO, INCL, LEX, E^*\}$, qui vérifie l'ensemble des propriétés de déduction du système P et l'ensemble des postulats étendus.*

6.3 Complexité, prudence et propriétés de déduction

Dans cette section nous allons tenter de confronter les différents points de vue sur les relations d'inférence non-monotone. Pour cela, nous exprimons chaque point de vue sous la forme d'un pré-ordre partiel (voir les tableaux 6.1 pour la complexité, 6.2 et 6.3 pour la prudence (deux conventions différentes), 6.4 pour les propriétés) puis nous faisons la synthèse de ces tableaux en un tableau

unique 6.5 ou 6.6 (suivant la convention choisie pour la prudence) qui peut se représenter sous forme d'un graphe.

La technique utilisée est celle de Pareto :

Définition 6.3.1 Soit (R_1, \dots, R_n) un ensemble de n relations d'ordre ou de pré-ordre, soient X et Y deux objets à comparer dans le cadre des n relations, on dira que X est Pareto-supérieur à Y (noté $X > Y$) ssi $\forall i, XR_iY$ et $\exists j, XR_jY$ et on n'a pas YR_jX .

6.3.1 La complexité

Nous présentons dans le tableau 6.1 la relation de pré-ordre entre les relations d'inférence induite par les résultats de complexité donnés dans [CLS93].

	UNI-BO	EXI-BO	ARG-BO	UNI-INCL	EXI-INCL	ARG-INCL	UNI-LEX	EXI-LEX	ARG-LEX	UNI-E*	EXI-E*	ARG-E*
EXI-BO	<											
ARG-BO	<	<										
UNI-INCL	<	<	>									
EXI-INCL	<	=	>	NC								
ARG-INCL	<	<	=	<	<							
UNI-LEX	=	>	>	>	>	>						
EXI-LEX	<	=	>	>	=	>	<					
ARG-LEX	<	<	=	<	<	=	<	<				
UNI-E*	<	<	>	=	<	>	<	<	>			
EXI-E*	<	=	>	>	=	>	<	=	>	NC		
ARG-E*	<	<	=	<	<	=	<	<	=	<	<	

Légende : soient X et Y des relations d'inférence,

- " $X = Y$ " \leftrightarrow X et Y ont la même complexité,
- " $X > Y$ " \leftrightarrow X a une meilleure complexité que Y (donc $Y < X$).

Tableau 6.1: Relation de pré-ordre entre les relations d'inférence non-monotone (point de vue de la complexité)

6.3.2 La prudence

Pour le point de vue de la prudence, on utilise le graphe 3.1 afin de définir la relation de pré-ordre présentée dans les tableaux 6.2 et 6.3.

Nous avons choisi de tester deux conventions différentes :

- l'élément le meilleur du point de vue de la prudence est celui qui est le plus prudent (voir tableau 6.2) ;
- l'élément le meilleur du point de vue de la prudence est celui qui est le moins prudent (voir tableau 6.3).

$X \setminus Y$	UNI-BO	EXI-BO	ARG-BO	UNI-INCL	EXI-INCL	ARG-INCL	UNI-LEX	EXI-LEX	ARG-LEX	UNI-E*	EXI-E*	ARG-E*
EXI-BO	<											
ARG-BO	<	>										
UNI-INCL	<	>	NC									
EXI-INCL	<	>	NC	<								
ARG-INCL	<	>	NC	<	>							
UNI-LEX	<	>	NC	<	>	NC						
EXI-LEX	<	>	NC	<	>	NC	<					
ARG-LEX	<	>	NC	<	>	NC	<	>				
UNI-E*	<	>	NC	=	>	>	>	>	>			
EXI-E*	<	>	NC	<	=	<	<	<	<	<		
ARG-E*	<	>	NC	<	>	=	NC	NC	NC	<	>	

Légende : soient X et Y des relations d'inférence,

- " $X = Y$ " \leftrightarrow X et Y sont de même prudence,
- " $X > Y$ " \leftrightarrow X est plus prudente que Y (donc $Y < X$),
- " $X \text{ NC } Y$ " \leftrightarrow X et Y ne sont pas comparables.

Tableau 6.2: Relation de pré-ordre entre les relations d'inférence non-monotone (point de vue de la prudence – convention 1)

$X \setminus Y$	UNI-BO	EXI-BO	ARG-BO	UNI-INCL	EXI-INCL	ARG-INCL	UNI-LEX	EXI-LEX	ARG-LEX	UNI-E*	EXI-E*	ARG-E*
EXI-BO	>											
ARG-BO	>	<										
UNI-INCL	>	<	NC									
EXI-INCL	>	<	NC	>								
ARG-INCL	>	<	NC	>	<							
UNI-LEX	>	<	NC	>	<	NC						
EXI-LEX	>	<	NC	>	<	NC	>					
ARG-LEX	>	<	NC	>	<	NC	>	<				
UNI-E*	>	<	NC	=	<	<	<	<	<			
EXI-E*	>	<	NC	>	=	>	>	>	>	>		
ARG-E*	>	<	NC	>	<	=	NC	NC	NC	>	<	

Légende : soient X et Y des relations d'inférence,

- " $X = Y$ " \leftrightarrow X et Y sont de même prudence,
- " $X > Y$ " \leftrightarrow X est moins prudente que Y (donc $Y < X$),
- " X NC Y " \leftrightarrow X et Y ne sont pas comparables.

Tableau 6.3: Relation de pré-ordre entre les relations d'inférence non-monotone (point de vue de la prudence – convention 2)

6.3.3 Les propriétés de déduction

Pour le point de vue des propriétés de déduction, on utilise les tableaux 5.3 et 5.4 afin de définir la relation de pré-ordre présentée dans le tableau 6.4.

	UNI-BO	EXI-BO	ARG-BO	UNI-INCL	EXI-INCL	ARG-INCL	UNI-LEX	EXI-LEX	ARG-LEX	UNI-E*	EXI-E*	ARG-E*
EXI-BO	<											
ARG-BO	<	<										
UNI-INCL	<	NC	>									
EXI-INCL	<	=	>	NC								
ARG-INCL	<	<	=	<	<							
UNI-LEX	=	>	>	>	>	>						
EXI-LEX	<	=	>	NC	=	>	<					
ARG-LEX	<	<	=	<	<	=	<	<				
UNI-E*	<	NC	>	=	NC	>	<	NC	>			
EXI-E*	<	=	>	NC	=	>	<	=	>	NC		
ARG-E*	<	<	=	<	<	=	<	<	=	<	<	

Légende : soient X et Y des relations d'inférence,

- " $X = Y$ " \mapsto X et Y ont les mêmes propriétés (par rapport à l'ensemble de propriétés que nous nous sommes fixé),
- " $X > Y$ " \mapsto X a les mêmes propriétés que Y plus quelques autres (donc $Y < X$),
- " X NC Y " \mapsto X et Y ne sont pas comparables.

Tableau 6.4: Relation de pré-ordre entre les relations d'inférence non-monotone (point de vue des propriétés)

6.3.4 Les trois points de vue à la fois

Les trois points de vue réunis peuvent être représentés :

- soit par le tableau 6.5 et le graphe 6.2 qui sont construits à partir des tableaux 6.1, 6.2 et 6.4 ;
- soit par le tableau 6.6 et le graphe 6.3 qui sont construits à partir des tableaux 6.1, 6.3 et 6.4.

Remarquons que le choix d'une convention pour l'échelle de la prudence a un impact non négligeable sur le résultat final.

L'analyse des résultats obtenus met en évidence trois points particuliers :

- l'excellence de la relation UNI-BO pour chaque critère étudié dans le cas de la convention numéro 1 pour la prudence (le plus prudent est le meilleur),

$X \preceq Y$	UNI-BO	EXI-BO	ARG-BO	UNI-INCL	EXI-INCL	ARG-INCL	UNI-LEX	EXI-LEX	ARG-LEX	UNI-E*	EXI-E*	ARG-E*
EXI-BO	<											
ARG-BO	<	NC										
UNI-INCL	<	NC	NC									
EXI-INCL	<	>	NC	NC								
ARG-INCL	<	NC	NC	<	NC							
UNI-LEX	<	>	NC	NC	>	NC						
EXI-LEX	<	>	NC	NC	>	NC	<					
ARG-LEX	<	NC	NC	<	NC	NC	<	NC				
UNI-E*	<	NC	NC	=	NC	>	NC	NC	>			
EXI-E*	<	>	NC	NC	=	NC	<	<	NC	NC		
ARG-E*	<	NC	NC	<	NC	=	NC	NC	NC	<		NC

Légende : soient X et Y des relations d'inférence,

- " $X = Y$ " \mapsto X et Y sont équivalentes,
- " $X > Y$ " \mapsto X est meilleure que Y (donc $Y < X$),
- " X NC Y " \mapsto X et Y ne sont pas comparables.

Tableau 6.5: Relation de pré-ordre entre les relations d'inférence non-monotone (les trois points de vue à la fois – convention 1 pour la prudence)

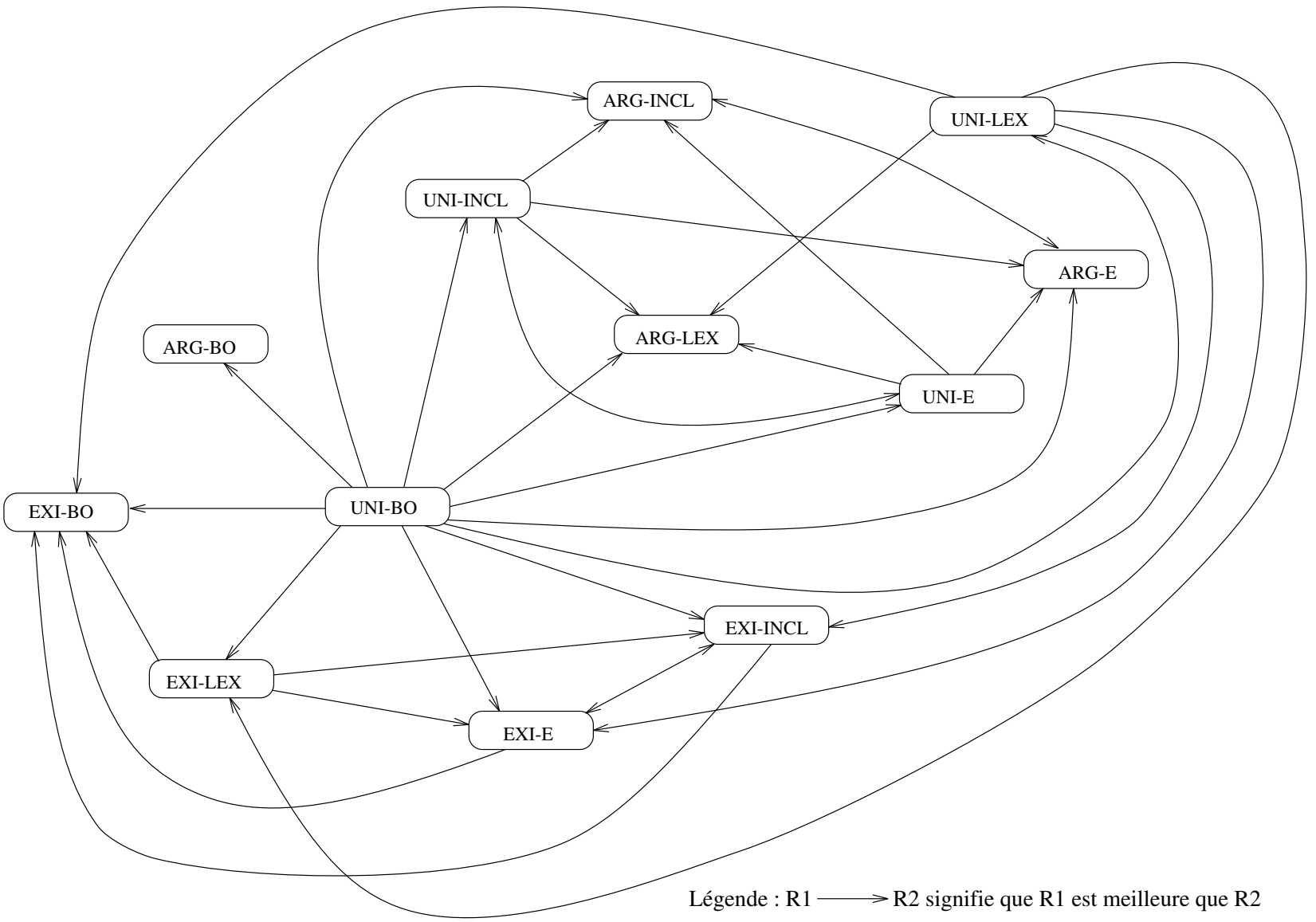


Figure 6.2: Graphe de la relation de pré-ordre entre les relations d'inférence non-monotone (les trois points de vue à la fois – convention 1 pour la prudence)

$X \backslash Y$	UNI-BO	EXI-BO	ARG-BO	UNI-INCL	EXI-INCL	ARG-INCL	UNI-LEX	EXI-LEX	ARG-LEX	UNI-E*	EXI-E*
EXI-BO	NC										
ARG-BO	NC	<									
UNI-INCL	NC	NC	NC								
EXI-INCL	NC	<	NC	NC							
ARG-INCL	NC	<	NC	NC	<						
UNI-LEX	>	NC	NC	>	NC	NC					
EXI-LEX	NC	<	NC	NC	<	NC	NC				
ARG-LEX	NC	<	NC	NC	<	NC	NC	<			
UNI-E*	NC	NC	NC	=	NC	NC	<	NC	NC		
EXI-E*	NC	<	NC	NC	=	>	NC	>	>	NC	
ARG-E*	NC	<	NC	NC	<	=	NC	NC	NC	NC	<

Légende : soient X et Y des relations d'inférence,

- " $X = Y$ " \mapsto X et Y sont équivalentes,
- " $X > Y$ " \mapsto X est meilleure que Y (donc $Y < X$),
- " X NC Y " \mapsto X et Y ne sont pas comparables.

Tableau 6.6: Relation de pré-ordre entre les relations d'inférence non-monotone (les trois points de vue à la fois – convention 2 pour la prudence)

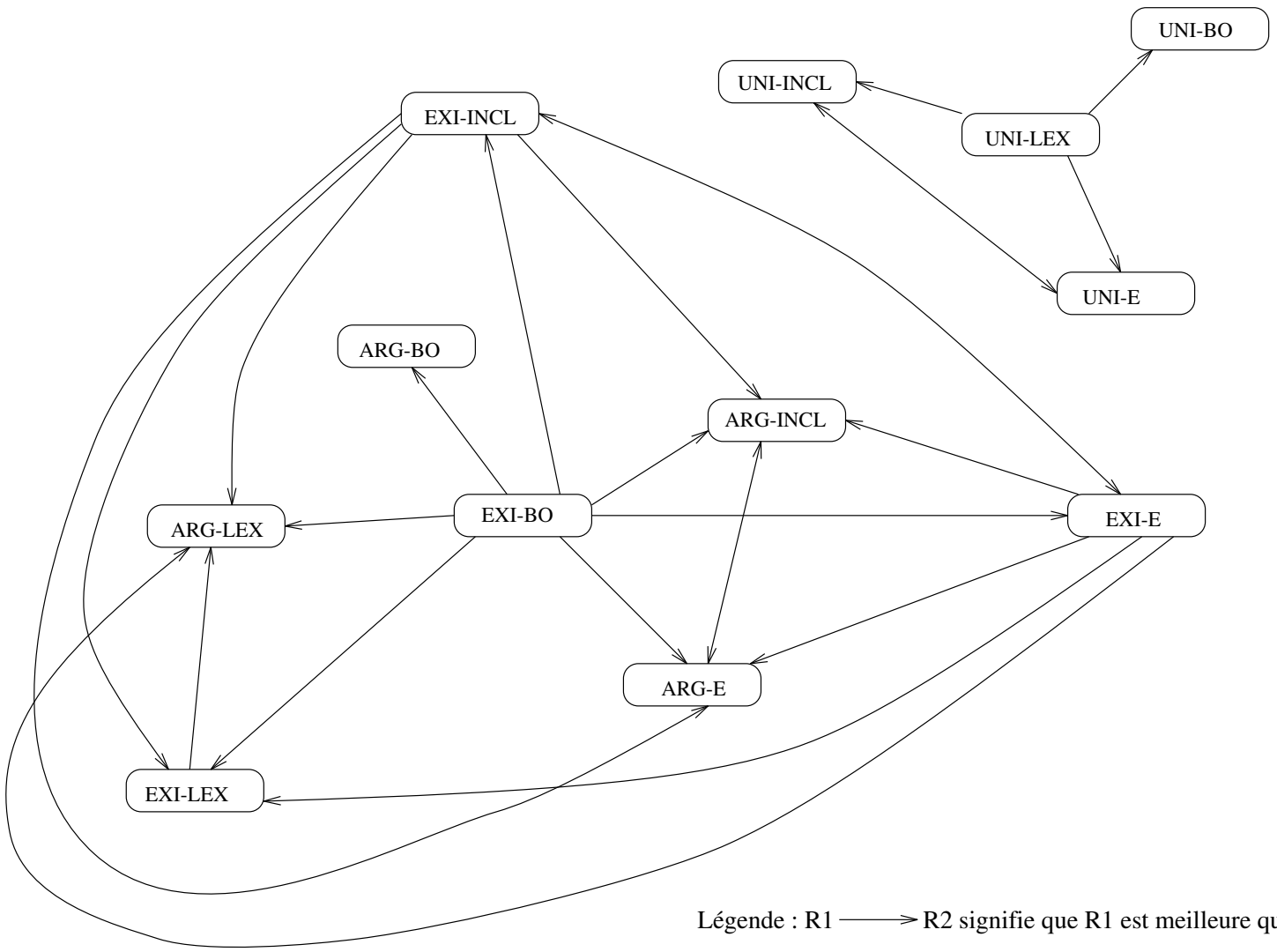


Figure 6.3: Graphe de la relation de pré-ordre entre les relations d'inférence non-monotone (les trois points de vue à la fois – convention 2 pour la prudence)

- l'absence de relation globale, prenant en compte les trois critères, entre les relations UNI-m et les autres relations dans le cas de la convention numéro 2 pour la prudence (le moins prudent est le meilleur),
- la médiocrité des relations ARG-m, $\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E\}$, dans les deux conventions choisies.

La relation UNI-BO (convention 1)

L'ensemble des résultats obtenus, avec la convention numéro 1 pour la prudence, semble indiquer que la relation UNI-BO est la meilleure quel que soit le point de vue pris en compte :

- sa complexité est la meilleure que ce soit dans le cas général ou dans les cas particuliers étudiés (voir [CLS93]) ;
- elle vérifie toutes les propriétés étudiées ;
- elle est la plus prudente des relations utilisant la stratification de la base de croyances, donc la meilleure de ce point de vue quand on choisit la convention 1.

Malheureusement, on sait aussi que cette relation présente un inconvénient majeur appelé l'effet de noyade (voir [BCD⁺93]) : on ne peut pas UNI-BO-inférer de conclusions à l'aide de formules situées dans une strate inférieure à celle où se produit l'inconsistance.

L'exemple classique du pingouin permet d'illustrer ce problème :

Si on a la base E suivante :

E_1	$\rightarrow P$ $P \rightarrow O$	titi est un pingouin un pingouin est un oiseau
E_2	$P \rightarrow \neg V$ $O \rightarrow V$	un pingouin ne sait pas voler un oiseau sait voler
E_3	$O \rightarrow A$	un oiseau a des ailes

Dans ce cas là, les sous-bases bo-préférées sont :

$\left \begin{array}{l} \rightarrow P \\ P \rightarrow O \\ P \rightarrow \neg V \\ O \rightarrow A \end{array} \right $	$\left \begin{array}{l} \rightarrow P \\ P \rightarrow O \\ P \rightarrow \neg V \end{array} \right $	$\left \begin{array}{l} \rightarrow P \\ P \rightarrow O \end{array} \right $	$\left \begin{array}{l} \rightarrow P \\ P \rightarrow O \\ O \rightarrow V \\ O \rightarrow A \end{array} \right $	$\left \begin{array}{l} \rightarrow P \\ P \rightarrow O \\ O \rightarrow V \end{array} \right $
---	--	--	--	---

On constate que $E \not\models^{\forall, B^o} A$ alors que la formule $O \rightarrow A$ n'est pour rien dans l'inconsistance de la base E .

Nous notons alors que la propriété de monotonie rationnelle, qui avait été définie afin de résoudre le problème de la non-pertinence (voir [LM92]), n'y réussit donc pas complètement ; en effet, l'effet de noyade qui est un cas particulier de la non-pertinence est toujours présent alors que UNI-BO vérifie la monotonie rationnelle.

Les bons résultats obtenus pour UNI-BO signifient donc qu'aucun des critères étudiés ne prend en compte cet aspect de la relation. Nous en concluons que l'ensemble des propriétés définissant une relation rationnelle et l'ensemble des postulats étendus ne suffisent pas à juger de la valeur d'une relation d'inférence non-monotone. Il faudrait trouver une nouvelle propriété qui garantirait la résolution du problème de non-pertinence, donc éviterait le problème de la noyade.

L'absence de relation globale entre les UNI- m et les autres (convention 2)

Cette absence provient du fait que la relation de pré-ordre issue de la convention numéro 2 pour la prudence va à l'encontre de la relation de pré-ordre issue des propriétés. Nous nous retrouvons donc avec deux critères contradictoires qui définissent deux ensembles de relations d'inférence incomparables.

Elle prouve bien l'importance du choix des relations de pré-ordre correspondant à chaque critère et composant la relation de pré-ordre globale.

Les relations ARG- m

Commençons par remarquer que les propriétés GM, tout comme les propriétés KLM ont été écrites au départ dans l'optique d'une sémantique liée aux modèles, donc pour des relations du type UNI.

Il n'est donc pas étonnant que ce soient les relations UNI- m ($\forall m \in \{BO, INCL, LEX, E\}$) qui obtiennent les meilleurs résultats de ce point de vue.

D'un autre côté, il nous semble que, sur l'échelle de la prudence, les extrêmes sont irréalistes :

- *le principe UNI est trop exigeant, donc trop pessimiste ;*
- *le principe EXI n'est pas suffisamment exigeant, donc trop optimiste.*

Nous nous trouvons donc devant le dilemme suivant :

- *les relations UNI- m vérifient tout un ensemble de propriétés intéressantes mais sont trop prudentes ;*
- *les relations ARG- m ne vérifient pas suffisamment de propriétés intéressantes (propriétés définies au départ pour les UNI) mais ce sont des moyens termes intéressants du point de vue de la prudence (voir papiers sur l'argumentation [EGFK93, SL92, Cay94]) ;*
- *les relations EXI- m vérifient à peine plus de propriétés que les ARG- m mais ne sont pas assez prudentes.*

Ainsi, les résultats négatifs obtenus sur les relations du type ARG- m nous semblent devoir être nuancés par les faits suivants :

- *les ARG- m sont étudiées à l'aide d'un ensemble de propriétés définies au départ pour d'autres types de relations ; une des perspectives de travail intéressantes serait donc de définir un nouveau jeu de propriétés non lié à la sémantique des modèles et qui, par là-même serait utilisable pour différents principes p (par exemple, $p = UNI, EXI$ ou ARG) ; nous pourrions ainsi comparer les relations UNI- $m, EXI- $m, ARG- m d'une manière un peu plus objective ;$$*
- *les ARG- m , qui se situent au milieu de l'échelle de la prudence, apportent un plus très net du point de vue du réalisme de la relation d'inférence non-monotone ; malheureusement cet aspect positif est aussi un inconvénient du point de vue de la complexité de calcul.*

Pour illustrer l'intérêt des relations ARG- m , reprenons l'exemple utilisé pour présenter le problème de la noyade dans le cas de UNI-BO. On constate que $E \vdash^{A, B_0} A$ alors que l'on a $E \not\vdash^{\forall, B_0} A$. La simple utilisation d'une conséquence argumentative, sans changer le mécanisme de génération, permet de résoudre le problème de la noyade.

D'autre part, notons qu'il existe de plus en plus d'approches du raisonnement non-monotone utilisant la notion d'argumentation (voir par exemple [EGFK93, SL92] pour des travaux récents sur ce sujet). Dans ces travaux, on considère en général qu'une conclusion est inférée si les arguments qui la supportent "ont plus de poids" que les arguments qui la contrent. Il existe un lien entre ces approches utilisant l'argumentation et les relations d'inférence non-monotone dans le cadre d'une

base de croyances non stratifiée (voir [Cay94])³. Cela nous semble être une raison supplémentaire pour continuer à étudier et à classifier les relations d'inférence non-monotone se rapprochant de tels principes.

6.4 Conclusion générale

Cette étude nous a permis de présenter un cadre général pour les relations d'inférence non-monotone, dans lequel nous pouvons :

- comparer ces relations à travers différents points de vue, et ce faisant,
- mieux comprendre les différents formalismes présentés.

Désormais, nous sommes plus aptes à préciser les intérêts de la relation d'inférence choisie par rapport à un contexte d'utilisation donné. Par exemple, dans un contexte de diagnostic reposant sur l'utilisation de modèles et basé sur la consistance⁴, nous choisirons en priorité une relation du type UNI-LEX, qui vérifie un ensemble de propriétés intéressant et dont la complexité est la plus faible possible ; dans un contexte de connaissances hiérarchiques, nous éviterons la relation UNI-BO à cause du problème de la noyade ; dans un contexte de fusion de bases de connaissances, nous préférons les relations ARG-m qui savent prendre en compte différents points de vue dans l'élaboration d'un raisonnement.

Cette étude peut être prolongée dans différentes directions :

- découverte d'une nouvelle propriété caractérisant l'absence de l'effet de noyade,
- définitions de propriétés caractérisant les relations de type EXI ou ARG,
- définition d'une échelle de "réalisme" dans laquelle la relation d'inférence la meilleure serait celle dont le réalisme serait le plus significatif (la relation ne serait ni trop optimiste en évitant la déduction de trop de formules, ni trop pessimiste en inférant suffisamment de formules) ; ainsi, nous pourrions comparer les principes UNI, EXI et ARG de manière différente et, à notre avis, meilleure qu'en utilisant l'échelle de la prudence.

Toutes ces directions de recherche visent à définir de nouveaux outils de mesure permettant de comparer de plus en plus finement les relations d'inférence.

³Par contre, à notre connaissance, il n'existe pas de travaux sur ce sujet dans le cadre d'une base de croyances stratifiée.

⁴Un diagnostic basé sur la consistance est une sous-base maximale consistante ; les formules absentes de cette sous-base correspondent aux composants en panne. Dans cette approche, si on utilise le maximum de cardinalité pour sélectionner une sous-base, on minimise le nombre de composants en panne.

Bibliographie

- [BCD⁺93] Benferhat (Salem), Cayrol (Claudette), Dubois (Didier), Lang (Jérôme) et Prade (Henri). – *Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment*. In : Proc. of the 13th IJCAI, éd. par Bajcsy (Ruzena). pp. 640–645. – Chambéry, France, 1993.
- [BDP92] Benferhat (Salem), Dubois (Didier) et Prade (Henri). – *Representing default rules in possibilistic logic*. In : Proc. of the 3rd KR, éd. par Allen (J.), Fikes (R.) et Sandewall (E.). pp. 671–684. – Cambridge, MA, 1992.
- [BDP93] Benferhat (Salem), Dubois (Didier) et Prade (Henri). – *Argumentative inference in uncertain and inconsistent knowledge bases*. In : Proc. of the 9th UAI, éd. par Heckerman (David) et Mamdani (Abe). pp. 411–419. – Washington, DC, 1993.
- [Ben94] Benferhat (Salem). – *Raisonnement non-monotone et traitement de l'inconsistance en logique possibiliste*. – Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (I.R.I.T.), 118, route de Narbonne 31062 Toulouse cedex. France, Thèse de PhD, Université Paul Sabatier, février 1994.
- [Bra93] Brass (Stefan). – *On the semantics of supernormal defaults*. In : Proc. of the 13th IJCAI, éd. par Bajcsy (Ruzena). pp. 578–583. – Chambéry, France, 1993.
- [Bre89] Brewka (Gerhard). – *Preferred subtheories : An extended logical framework for default reasoning*. In : Proc. of the 11th IJCAI, éd. par Sridharan (N.S.). pp. 1043–1048. – Detroit, MI, 1989.
- [Cay90] Cayrol (Claudette). – *Assumption-Based Reasoning : A Uniform Framework for Non-Monotonic Reasoning*. – Rapport de recherche n° 90-29R, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (I.R.I.T.), novembre 1990.
- [Cay92] Cayrol (Claudette). – *Un modèle logique général pour le raisonnement révisable*. Revue d'Intelligence Artificielle, vol. 6, n° 3, 1992, pp. 255–284.
- [Cay94] Cayrol (Claudette). – *Inférence non-monotone syntaxique et argumentation dans une base inconsistante de croyances*. – Rapport de recherche n° 94-25R, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (I.R.I.T.), juillet 1994.
- [CLS93] Cayrol (Claudette) et Lagasque-Schiex (Marie-Christine). – *Comparaison de relations d'inférence non-monotone : étude de complexité*. – Rapport de recherche n° 93-23R, France, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (I.R.I.T.), septembre 1993.
- [CRS92] Cayrol (Claudette), Royer (Véronique) et Saurel (Claire). – *Management of preferences in assumption-based reasoning*. In : Advanced methods in AI. Lecture notes in computer science 682, éd. par Yager (R.) et Bouchon (B.), pp. 13–22. – Springer Verlag, 1992. Extended version in Technical Report IRIT-CERT, 92-13R (University Paul Sabatier Toulouse).

- [DLP91] Dubois (Didier), Lang (Jérôme) et Prade (Henri). – *Inconsistency in possibilistic knowledge bases - to live or not to live with it*. In : Fuzzy logic for the Management of Uncertainty, éd. par Zadeh (L.A.) et Kacprzyk (J.), pp. 335-351. – Wiley and sons, 1991.
- [EGFK93] Elvang-Goransson (M.), Fox (J.) et Krause (P.). – *Dialectic reasoning with inconsistent information*. In : Proc. of the 9th UAI, éd. par Heckerman (David) et Mamdani (Abe). pp. 114-121. – Washington, DC, 1993.
- [Gür91] Gärdenfors (Peter). – *Nonmonotonic inferences based on expectations: A preliminary report*. In : Proc. of the 2nd KR, éd. par Allen (J.), Fikes (R.) et Sandewall (E.). pp. 585-590. – Cambridge, MA, 1991.
- [GM94] Gärdenfors (Peter) et Makinson (David). – *Nonmonotonic inference based on expectations*. Artificial Intelligence, vol. 65, 1994, pp. 197-245.
- [KLM90] Kraus (Sarit), Lehmann (Daniel) et Magidor (Menachem). – *Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics*. Artificial Intelligence, vol. 44, 1990, pp. 167-207.
- [LM92] Lehmann (Daniel) et Magidor (Menachem). – *What does a conditional knowledge base entail ?* Artificial Intelligence, vol. 55, 1992, pp. 1-60.
- [Neb91] Nebel (Bernhard). – *Belief revision and default reasoning: Syntax-based approaches*. In : Proc. of the 2nd KR, éd. par Allen (J.A.), Fikes (R.) et Sandewall (E.). pp. 417-428. – Cambridge, MA, 1991.
- [PL92] Pinkas (Gadi) et Loui (Ronald P.). – *Reasoning from inconsistency : A taxonomy of principles for resolving conflict*. In : Proc. of the 3rd KR, éd. par Allen (J.A.), Fikes (R.) et Sandewall (E.). pp. 709-719. – Cambridge, MA, 1992.
- [Rei80] Reiter (Raymond). – *A logic for default reasoning*. Artificial Intelligence, vol. 13, n° 1-2, 1980, pp. 81-132.
- [Sho87] Shoham (Yoav). – *Nonmonotonic logics: Meaning and utility*. In : Proc. of the 10th IJCAI, éd. par Dermott (John Mac). pp. 388-393. – Milan, Italy, 1987.
- [SL92] Simari (G.R.) et Loui (R.P.). – *A mathematical treatment of defeasible reasoning and its implementation*. Artificial Intelligence, vol. 53, 1992, pp. 125-157.