



HAL
open science

Électromagnétisme et optique géométrique, Polytech Nancy 2A, Correction du TD1 2019/2020 : Autour des équations de Maxwell

J Ledig

► **To cite this version:**

J Ledig. Électromagnétisme et optique géométrique, Polytech Nancy 2A, Correction du TD1 2019/2020 : Autour des équations de Maxwell. École d'ingénieur. France. 2020. hal-02880069

HAL Id: hal-02880069

<https://hal.science/hal-02880069>

Submitted on 24 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Correction TD1 2019-2020

J. Ledig

Électromagnétisme et optique géométrique – Polytech 2A

Mercredi 18 mars 2020

Dans ce TD, nous allons travailler avec les équations de Maxwell. Elles sont au nombre de 4 et sont à **connaître par cœur** ! Côté champ électrique :

Équations de Maxwell

Maxwell – Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

Maxwell – Faraday :

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

Dans ce TD, nous allons travailler avec les équations de Maxwell. Elles sont au nombre de 4 et sont à **connaître par cœur** ! Côté champ magnétique :

Équations de Maxwell

Maxwell – Thompson :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3)$$

Maxwell – Ampère :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Côté potentiels :

Liens entre potentiels et champs

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (5)$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (6)$$

V est le potentiel électrique. C'est une grandeur scalaire. Contrairement au potentiel vecteur \vec{A} qui est...un vecteur !

Exercice 1

Question 1, partie 1

Correction TD1
2019-2020

J. Ledig

Introduction

Exercice 1

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Exercice 2

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Question 5

Question 6

On considère un métal composés d'électrons se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans une matrice d'ions fixes. Les électrons sont soumis à un champ électromagnétique, et on néglige les forces de frottements. Le PFD devient :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (7)$$

de manière générale dans le vide $B \simeq E/c$ et comme $v \ll c$ on néglige la force de Lorentz.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} \quad (8)$$

Exercice 1

Question 1, partie 2

Correction TD1
2019-2020

J. Ledig

Introduction

Exercice 1

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Exercice 2

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Question 5

Question 6

On a donc :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} \quad (9)$$

La densité de courant est $\vec{J} \equiv qn\vec{v}$, avec n la densité d'électrons dans le métal (qui est une constante du temps). On multiplie (9) par qn pour faire apparaître $d\vec{J}/dt$ à gauche :

$$\boxed{\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{nq^2}{m}\vec{E}} \quad (10)$$

La variation temporelle de \vec{J} est proportionnelle au champ électrique appliqué.

Exercice 1

Question 2, partie 1

Correction TD1
2019-2020

J. Ledig

Introduction

Exercice 1

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Exercice 2

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Question 5

Question 6

On souhaite trouver le lien entre \vec{J} et \vec{A} . On va donc partir de l'équation (10) qui lie \vec{J} et \vec{E} . Utilisons la loi de Maxwell Faraday :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\vec{\text{rot}} \left(\frac{m}{nq^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \right) = -\frac{m}{nq^2} \vec{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \right) \quad (11)$$

or $\vec{B} \equiv \vec{\text{rot}} \vec{A}$:

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \vec{\text{rot}} \vec{A}}{\partial t} = -\frac{m}{nq^2} \vec{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \right) \quad (12)$$

Exercice 1

Question 2, partie 2

Correction TD1
2019-2020

J. Ledig

Introduction

Exercice 1

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Exercice 2

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Question 5

Question 6

Les dimensions temporelles et spatiales sont indépendantes, on peut donc, en vertu du théorème de Schwartz, changer l'ordre des dérivées (i.e. $\partial_t \vec{\text{rot}} = \vec{\text{rot}} \partial_t$) :

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{\text{rot}} \vec{A}}{\partial t} = -\frac{m}{nq^2} \frac{\partial \vec{\text{rot}} \vec{J}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\vec{J} = -\frac{nq^2}{m} \vec{A}} \quad (13)$$

Les potentiels sont toujours définis à une constante (scalaire ou vectorielle) près. Afin de fixer ces constantes, nous pouvons utiliser des jauges. Utilisons par exemple la jauge de Coulomb :

$$\text{div} \vec{A} = 0 \quad (14)$$

Exercice 1

Question 2, partie 3

Correction TD1
2019-2020

J. Ledig

Introduction

Exercice 1

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Exercice 2

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Question 5

Question 6

$$0 = \operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \left(-\frac{m}{nq^2} \vec{J} \right) \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad (15)$$

Or, d'après l'équation de conservation de la charge,

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (16)$$

Or, comme nous sommes dans un métal, $\rho = 0$ donc automatiquement nous avons $\operatorname{div} \vec{J} = 0$. Il en suit que $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. La jauge n'est donc pas choisie, elle est fixée par les équations du système. L'équation (13) n'est donc pas invariante par changement de jauge.

Exercice 1

Question 3, partie 1

Correction TD1
2019-2020

J. Ledig

Introduction

Exercice 1

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Exercice 2

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Question 5

Question 6

On souhaite établir l'équation différentielle régissant l'extension spatiale de \vec{B} . Partons de l'équation de Maxwell Ampère stationnaire :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \equiv \mu_0 \vec{J} \quad (17)$$

On remplace \vec{J} par son expression donnée par l'équation de London, (13) :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = -\mu_0 \frac{nq^2}{m} \vec{A} \quad (18)$$

On prend le rotationnel de cette équation afin de faire apparaître le Laplacien. Pour rappel : $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{X} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{X} - \Delta \vec{X} \forall \vec{X}$.

$$-\frac{\mu_0 n q^2}{m} \operatorname{rot} \vec{A} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{grad} \operatorname{div} B - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B} \quad (19)$$

Puisque d'après Maxwell – Thompson $\operatorname{div} \vec{B} = 0$. Ainsi, en se rappelant que $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$:

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0 n q^2}{m} \vec{B} = \frac{\vec{B}}{\Lambda_L} \quad (20)$$

Le Laplacien est une dérivé seconde en espace. Sa dimension est donc une longueur à la puissance -2 . Par identification, Λ_L est donc une longueur.

Exercice 1

Question 3, partie 3

Correction TD1
2019-2020

J. Ledig

Introduction

Exercice 1

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Exercice 2

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Question 5

Question 6

- Pour passer à l'application numérique, il faut calculer n qui est le nombre d'électrons par unité de volume. On nous donne la masse volumique d'aluminium ρ_{Al} .
- Pour avoir le nombre d'atome d'Al par unité de volume :

$$n_{\text{Al}} = \rho_{\text{Al}} \times N_A / M_{\text{Al}} = 6,02 \times 10^{28} \text{ atomes/m}^3.$$
- Sachant qu'il y a 3 électrons par atome d'Al, $n = 3n_{\text{Al}} = 1,8 \times 10^{29}$ électrons/m³.

$$\Lambda_L = \sqrt{\frac{m}{nq^2\mu_0}} = 12,5 \text{ nm} \quad (21)$$

Si les électrons sont appariés, la formule de Λ_L est modifiée pour la masse, charge et densité de paires : $m_p = 2m_e$, $q_p = 2q_e$, $n_p = n_e/2$. $\Rightarrow \Lambda_{L,p} = \Lambda_{L,e}$.

Exercice 1

Question 4, partie 1

 Correction TD1
2019-2020

J. Ledig

Introduction

Exercice 1

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Exercice 2

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Question 5

Question 6

Considérons un cube d'aluminium de côté $2a$ et plongé dans un champ magnétique homogène $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$. A une dimension (z est l'axe vertical, x l'axe horizontal) :

$$\frac{dB_z}{dx} = \frac{B_z}{\Lambda_L^2} \quad (22)$$

La solution est de la forme :

$$B_z(x) = Ae^{-x/\Lambda_L} + Be^{x/\Lambda_L} \quad (23)$$

Conditions aux bords du cube :

$$\begin{cases} B_z(-a) = B_0 \\ B_z(+a) = B_0 \end{cases} \quad (24)$$

Exercice 1

Question 4, partie 2

Correction TD1
2019-2020

J. Ledig

Introduction

Exercice 1

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Exercice 2

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Question 5

Question 6

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ae^{a/\Lambda_L} + Be^{-a/\Lambda_L} = B_0 \\ Ae^{-a/\Lambda_L} + Be^{a/\Lambda_L} = B_0 \end{cases} \quad (25)$$

Une solution à ce système est $A = B$. Ainsi :

$$B_z(x) = 2A \cosh\left(\frac{x}{\Lambda_L}\right) \quad (26)$$

Enfin, comme

$$B_z(a) = 2A \cosh\left(\frac{a}{\Lambda_L}\right) \equiv B_0 \Leftrightarrow A = \frac{B_0}{2 \cosh(a/\Lambda_L)} \quad (27)$$

D'où :

$$\vec{B} = \frac{\cosh(x/\Lambda_L)}{\cosh(a/\Lambda_L)} \vec{B}_0 \quad (28)$$

Exercice 1

Question 4, partie 3

Correction TD1
2019-2020

J. Ledig

Introduction

Exercice 1

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Exercice 2

Question 1

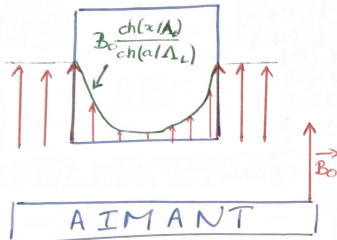
Question 2

Question 3

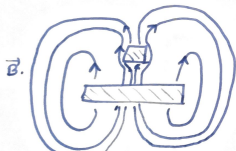
Question 4

Question 5

Question 6



referment ($\text{div } \vec{B}' = 0$), elles doivent contourner le métal.
C'est ce qui le fait léviter.



C'est le principe de la lévitation
magnétique des métaux
supraconducteurs.

Δ_L est l'épaisseur de peau.
C'est la distance de pénétration
des lignes de champ \vec{B} dans
le métal en question.

Les lignes de champ ne pénètrent
pas, ou très peu le métal, et
donc, pour que les lignes se

Nous allons nous pencher ici sur les équations de Maxwell-Proca (voir poly). Ces équations font apparaître un paramètre μ . D'après l'équation (2) du poly sait que $[\text{div } \vec{E}] = [\mu^2 V]$. Or $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, ainsi :

$$[\mu^2] = [\text{div } \overrightarrow{\text{grad}}] = [\Delta] = \frac{1}{L^2} \quad (29)$$

μ est donc l'inverse d'une longueur.

Prenons la divergence de l'équation (3) :

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \operatorname{div} \vec{E}}{\partial t} - \mu^2 \operatorname{div} \vec{A}$$

$$\vec{0} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \mu^2 V \right) - \mu^2 \operatorname{div} \vec{A}$$

$$\vec{0} = \mu_0 \left(\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \operatorname{div} \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$$

Le premier terme est l'équation de continuité et vaut 0. On trouve donc :

$\operatorname{div} \vec{A} + \partial_t V / c^2 = \vec{0}$. La jauge de Lorentz est donc imposée ! Les équations ne sont pas invariantes par changement de jauge.

En absence de sources, les équations deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \\ \operatorname{div} \vec{E} = -\mu^2 V \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} - \mu^2 \vec{A} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad (30)$$

Pour établir l'équation des ondes, il faut calculer le double rotationnel de \vec{E} ou \vec{B} .
Calculons $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}$.

Exercice 2

Question 3, partie 2

Correction TD1
2019-2020

J. Ledig

Introduction

Exercice 1

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Exercice 2

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Question 5

Question 6

$$\begin{aligned}
 \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} &= -\partial_t \vec{\text{rot}} \vec{B} \\
 \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} &= -\partial_t \left(\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} - \mu^2 \vec{A} \right) \\
 \vec{\text{grad}} (-\mu^2 V) - \Delta \vec{E} &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu^2 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\
 \Leftrightarrow \Delta \vec{E} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu^2 \left(-\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu^2 \vec{E}$$

(31)

est l'équation de propagation de l'onde électromagnétique.

Exercice 2

Question 4, partie 1

Correction TD1
2019-2020

J. Ledig

Introduction

Exercice 1

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Exercice 2

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Question 5

Question 6

A retenir!!

Pour obtenir la relation de dispersion d'une onde électromagnétique (OEM), il faut tout d'abord établir l'équation de propagation de l'onde (soit pour \vec{E} soit pour \vec{B}), puis injecter la solution sous forme d'onde plane. Au final cela revient à remplacer ∂_t par $-i\omega$ et ∂_x par ik .

Si on cherche une solution de la forme $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t)}$ alors la dérivée temporelle est :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t)} = -i\omega \vec{E} \quad (32)$$

De la même façon le gradient est :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{r}} = i\vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t)} = i\vec{k} \cdot \vec{E} \quad (33)$$



Exercice 2

Question 4, partie 2

Correction TD1
2019-2020

J. Ledig

Introduction

Exercice 1

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Exercice 2

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Question 5

Question 6

L'équation de propagation devient alors :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu^2 \vec{E} \Rightarrow -k^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} + \mu^2 \vec{E}$$

D'où la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu^2$$

(34)

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu^2} \quad (35)$$

- La vitesse de phase $v_\varphi \equiv \omega/k$ se calcule facilement :

$$v_\varphi = \frac{c\sqrt{k^2 + \mu^2}}{k} = c\sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{k}\right)^2} \quad (36)$$

- La vitesse de groupe $v_g = d\omega/dk$ est alors :

$$v_g = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} \quad (37)$$

Astuce : si nous prenons la différentielle de la relation de dispersion, nous trouvons $2kdk = 2\omega d\omega/c^2$, d'où on tire $d\omega/dk$.

$$\begin{cases} v_{\varphi} &= c \sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{k}\right)^2} \\ v_g &= \frac{c^2}{v_{\varphi}} \end{cases} \quad (38)$$

- Nous remarquons que la vitesse de phase surpasse la vitesse de la lumière.
- Cela ne pose pas de problème physique lié à la causalité, puisque la phase ne transporte ni information, ni énergie.
- L'énergie est transportée à la vitesse de groupe, qui elle vérifie bien $v_g < c$.



Exercice 2

Question 5

Correction TD1
2019-2020

J. Ledig

Introduction

Exercice 1

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Exercice 2

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Question 5

Question 6

Déterminons maintenant la masse du photon dans la théorie de Proca. En relativité, l'énergie d'une particule de masse m s'écrit $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$. En parallèle, l'énergie du photon est quantifiée par sa fréquence puisque $E = \hbar\omega$.

D'une part :

$$E^2 = \hbar^2\omega^2 = \hbar^2(c^2k^2 + c^2\mu^2) \quad (39)$$

D'autre part :

$$E^2 = m_\phi^2c^4 + p^2c^2 \quad (40)$$

D'où :

$$m_\phi = \frac{\hbar\mu}{c} \quad (41)$$

Exercice 2

Question 6, partie 1

Correction TD1
2019-2020

J. Ledig

Introduction

Exercice 1

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Exercice 2

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Question 5

Question 6

- L'onde se déplace à la vitesse de groupe, v_g .
- Cette vitesse dépend de la longueur d'onde du photon.
- Le photon parcourt la distance L en un temps $t = L/v_g$.

L'intervalle de temps entre les deux réceptions est :

$$\Delta t = |t_2 - t_1| = \frac{L}{c^2} |v_{\varphi_2} - v_{\varphi_1}| = \frac{L}{c} \left| \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{k_2^2}} - \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{k_1^2}} \right| \quad (42)$$

Or, $k = 2\pi/\lambda$, ainsi :

$$\Delta t = \frac{L}{c} \left| \sqrt{1 + \frac{\lambda_2^2 \mu^2}{4\pi^2}} - \sqrt{1 + \frac{\lambda_1^2 \mu^2}{4\pi^2}} \right| \quad (43)$$

Exercice 2

Question 6, partie 2 et question 7

Correction TD1
2019-2020

J. Ledig

Introduction

Exercice 1

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Exercice 2

Question 1

Question 2

Question 3

Question 4

Question 5

Question 6

$$\Delta t = \frac{L}{c} \left| \sqrt{1 + \frac{\lambda_2^2 \mu^2}{4\pi^2}} - \sqrt{1 + \frac{\lambda_1^2 \mu^2}{4\pi^2}} \right| \quad (44)$$

On suppose que $\lambda\mu \ll 1$ et sachant $(1 + \epsilon)^\alpha = 1 + \alpha\epsilon + o(\epsilon^2)$, on trouve :

$$\Delta t \simeq \frac{L\mu^2}{8\pi^2 c} |\lambda_2^2 - \lambda_1^2| \quad (45)$$

A.N. : Comme $\Delta t \leq 10^{-3}$ s, on tire de cette équation que le paramètre de Proca vérifie $\mu \leq 2,28 \text{ m}^{-1}$. En injectant la valeur limite dans l'équation de la masse du photon, (41), on trouve : $m_\phi = 7,6 \times 10^{-43}$ kg.... mille milliards de fois plus léger que l'électron. Ce n'est pas mesurable expérimentalement !