



HAL
open science

Électromagnétisme et optique géométrique, Polytech Nancy 2A, Correction du TD2 2019/2020 : La polarisation des ondes électromagnétiques

J. Ledig

► **To cite this version:**

J. Ledig. Électromagnétisme et optique géométrique, Polytech Nancy 2A, Correction du TD2 2019/2020 : La polarisation des ondes électromagnétiques. École d'ingénieur. France. 2020. hal-02880058

HAL Id: hal-02880058

<https://hal.science/hal-02880058>

Submitted on 24 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Correction TD2 2019-2020

J. Ledig

Électromagnétisme et optique géométrique – Polytech 2A

Mercredi 25 mars 2020

Déf. : Une onde est la déformation d'un milieu matériel ou non au cours du temps.

Ex. : Une corde de guitare, une vague, le sons, la lumière.

Caractéristique : Une onde possède une vitesse (fonction des paramètres du milieu), une direction de propagation et une direction de déformation.

- Pour une corde de guitare, l'onde se propage suivant l'axe de la corde, mais la déformation se fait dans la direction perpendiculaire : on parle d'**onde transversale**.
- Pour le sons, les couches d'air oscillent dans la même direction que la propagation (un peu comme un ressort) : on parle alors d'**onde transversale**.

- Mathématiquement, une onde est une fonction de l'espace et du temps : $\vec{F}(\vec{r}, t)$.
- Une onde obéit à **l'équation des ondes** dont la forme la plus générale est l'équation de D'Alembert :

$$\Delta \vec{F} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2}$$

où Δ est le Laplacien.

- Une solution de cette équation est une fonction périodique :

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = F_0 \times \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) \vec{u}_D$$

- F_0 est **l'amplitude de l'onde**.
- \vec{k} est le **vecteur d'onde**, il donne la direction de propagation de l'onde.
Exemple : si notre corde est posée sur l'axe des x , alors $\vec{k} = k_x \vec{u}_x$. La norme de k est liée à la *longueur d'onde* : $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$.
- ω est **la pulsation** de l'onde, et sa *fréquence* est $\nu = \omega/2\pi$.
- φ est le **déphasage** de l'onde... dans la vraie vie on n'a pas forcément toujours exactement un cosinus ou un sinus !
- \vec{u}_D est le **vecteur de déformation**. Pour la corde de tout à l'heure posé sur l'axe des x et qu'on excite dans la direction y , la déformation sera suivant l'axe $\vec{u}_D = \vec{u}_y$.

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = F_0 \times \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) \vec{u}_D$$

- Expression lourde à manipuler mathématiquement.
- Nécessite la connaissance des formule de trigonométries (qui sait simplifier $\cos(a + b)$ ou $\cos(a) \cos(b)$?)
- On peut alors passer en notation complexe pour faciliter les calculs (l'exponentielle d'une somme c'est le produit des exponentielles et inversement) :

$$\underline{\vec{F}} = F_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi)} \vec{u}_D \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \text{Re}(\underline{\vec{F}})$$

- Dans ce TD nous allons voir les caractéristiques d'une onde électromagnétique (OEM).
- Une OEM possède une direction de propagation, qui est suivant le vecteur d'onde \vec{k} .
- Et une direction d'excitation suivant le **vecteur de polarisation** $\vec{u}_p \perp \vec{k}$.

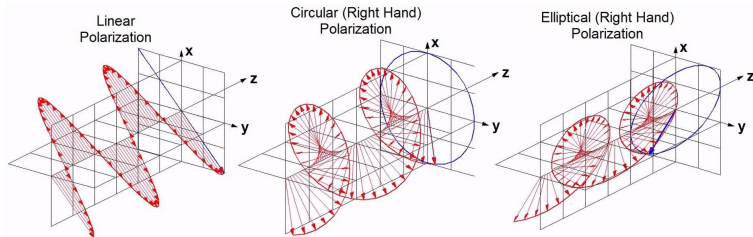
Vectoriellement une OEM s'écrit (en approximation d'onde plane) :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \vec{u}_p e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)} \quad (1)$$

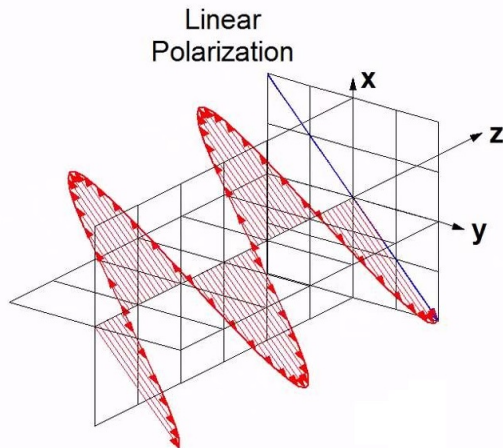
La vitesse de l'onde est alors $v_\varphi = \omega/k$.

Il existe 3 types de polarisations. Si la propagation se fait dans la direction z , (càd $\vec{k} = k\vec{e}_z$), alors sa polarisation peut être définie grâce au rapport :

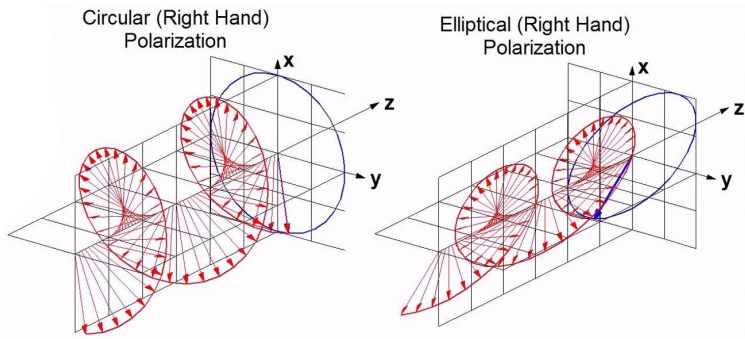
$$\frac{E_y}{E_x} = K \times e^{i\varphi}$$



- Polarisation rectiligne : $\underline{E}_y/\underline{E}_x$ est un réel, $K \in \mathbb{R}$ et $\varphi = 0$: $\underline{E}_y = K\underline{E}_x$.

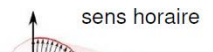
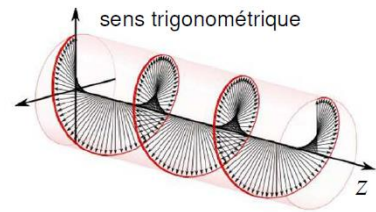
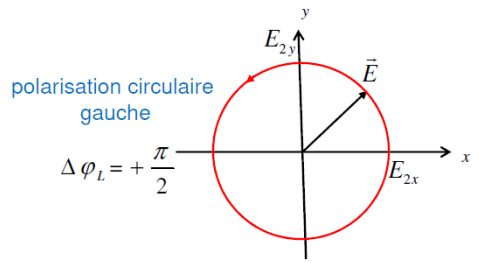


- Polarisation circulaire : $\underline{E}_y/\underline{E}_x$ est un réel, $K \in \mathbb{R}$ et $\varphi = \pm\pi/2$.
- Polarisation elliptique où K et φ sont quelconques.



- Pour une polarisation circulaire le signe du déphasage donne le sens de la polarisation.

$$\underline{E}_y = e^{\pm i\pi/2} \underline{E}_x$$



Def. : Un polariseur P est un *filtre* optique qui ne laisse passer que la composante du champ électrique colinéaire à son axe, noté \vec{u}_P .

Ex. : Si l'axe du polariseur est suivant l'axe des x alors seulement la composante E_x traversera le polariseur.

- Aussi, si une onde n'est pas polarisée, un polariseur la *polarise* suivant son axe.

Ainsi, une onde non polarisée \vec{E}_0 passant à travers un polariseur P_1 ressortira suivant :

$$\vec{E}_1 = \left(\vec{E}_0 \cdot \vec{u}_{P_1} \right) \vec{u}_{P_1} = E_{01} \vec{u}_{P_1}$$

On a donc :

$$\vec{E}_1 = E_{01} \vec{u}_{P_1}$$

On envoie cette OEM à travers un polariseur P_2 . On note θ l'angle entre les axes de P_1 et P_2 . Que devient le champ en sortie ?

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= (\vec{E}_1 \cdot \vec{u}_{P_2}) \vec{u}_{P_2} \\ &= (E_{01} \vec{u}_{P_1} \cdot \vec{u}_{P_2}) \vec{u}_{P_2} \\ &= (E_{01} \cos \theta) \vec{u}_{P_2} \end{aligned}$$

L'amplitude transmise est donc $E_{02} = E_{01} \cos \theta$.

On a donc :

$$\underline{E}_{02} = \underline{E}_{01} \cos \theta$$

Définition

L'intensité d'une OEM est donnée, en notation complexe, par la relation :

$$I = \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^*$$

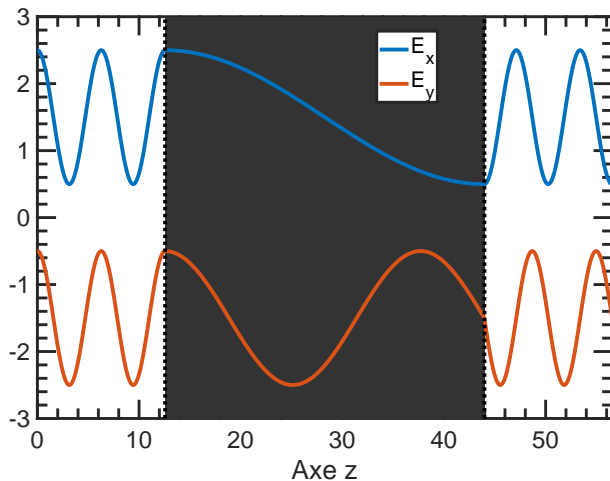
où * désigne le complexe conjugué.

Ainsi :

$$I_t = |\underline{E}_{01}|^2 \cos^2 \theta$$

Loi de Malus

- Une lame (ou cristal) est généralement un milieu **anisotrope**, c'ad que les directions ne sont pas équivalents.
- Un cristal **biréfringent** possèdent deux axes, perpendiculaires entre eux, x et y , et perpendiculaire à la direction de propagation z .
- Chaque composante du champ électrique va avoir son propre mode de propagation dans le cristal : cela permet de changer la polarisation de l'onde. L'onde suivant x aura comme vitesse $v_x = c/n_x$ et la composante suivant y , $v_y = c/n_y$, avec n l'indice optique de l'axe.
- Le vecteur d'onde de chaque composante doit être pondéré de l'indice optique associé : $k_x = k_0 n_x = \omega n_x / c$.



L'onde arrivant sur la lame est :

$$\vec{E}_1 = E_{01}(\vec{r}, t)\vec{u}_{P_1}$$

Sachant que le polariseur P_1 est incliné à 45° par rapport à la lame, l'angle entre \vec{u}_x ou \vec{u}_y et \vec{u}_{P_1} est de 45° . Ainsi les composantes sont :

$$\begin{cases} E_x &= \vec{E}_1 \cdot \vec{u}_x = E_{01} \vec{u}_{P_1} \cdot \vec{u}_x = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} \\ E_y &= \vec{E}_1 \cdot \vec{u}_y = E_{01} \vec{u}_{P_1} \cdot \vec{u}_y = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Et donc :

$$\vec{E}_1 = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} (\vec{u}_x + \vec{u}_y)$$

- L'onde sortant du polariseur est :

$$\vec{E}_1(z, t) = \frac{E_{01}(z, t)}{\sqrt{2}} (\vec{u}_x + \vec{u}_y)$$

- L'onde arrivant sur le cristal en $z = 0$ est :

$$\vec{E}_1(z, t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} \left(e^{i(k_0 z - \omega t)} \vec{u}_x + e^{i(k_0 z - \omega t)} \vec{u}_y \right) = (e^{-i\omega t} \vec{u}_x + e^{-i\omega t} \vec{u}_y)$$

- Une fois dans le cristal, chaque composante *fait sa vie*, et à la sortie on a :

$$\vec{E}_1(e, t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} \left(e^{i(k_0 n_x e - \omega t)} \vec{u}_x + e^{i(k_0 n_y e - \omega t)} \vec{u}_y \right)$$

- On avait :

$$\underline{\vec{E}}_1(\mathbf{e}, t) \equiv \underline{\vec{E}}_2(t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} \left(e^{i(k_0 n_x e - \omega t)} \vec{u}_x + e^{i(k_0 n_y e - \omega t)} \vec{u}_y \right)$$

- A la sortie de la lame, il y a un déphasage entre les deux composantes,

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{e^{i(k_0 n_y e - \omega t)}}{e^{i(k_0 n_x e - \omega t)}} = e^{ik_0(n_y - n_x)e} \equiv e^{i\Delta\varphi}$$

- Le déphasage entre les deux composantes doit être de $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ pour que l'OEM en sortie soit polarisé circulairement. Cela revient à vérifier que :

$$\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad n_y = n_x \pm \frac{\pi}{2k_0 e} = n_x \pm \frac{c\pi}{2\omega e}$$

- Vérifions que l'onde de sortie décrit bien un cercle dans le plan (x, y) si $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, càd si $n_y = n_x \pm \frac{\pi}{2k_0e}$:

Pour E_x :

$$\underline{E}_x(e, t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} e^{i(k_0 n_x e - \omega t)} \Rightarrow E_x(e, t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} \cos(k_0 n_x e - \omega t)$$

Pour E_y :

$$\underline{E}_y(e, t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} e^{i(k_0 n_y e - \omega t)} \Rightarrow E_y(e, t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} \cos(k_0 n_y e - \omega t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} \cos\left(k_0 n_x e - \omega t \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

On a :

$$\begin{cases} E_x(e, t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} \cos(k_0 n_x e - \omega t) \\ E_y(e, t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} \cos\left(k_0 n_x e - \omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

L'équation d'un cercle étant $X^2 + Y^2 = R^2$, on a :

$$\begin{aligned} E_x^2 + E_y^2 &= \frac{E_{01}^2}{2} \left[\cos^2(k_0 n_x e - \omega t) + \cos^2\left(k_0 n_x e - \omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= \frac{E_{01}^2}{2} \left[\cos^2(k_0 n_x e - \omega t) + \sin^2(k_0 n_x e - \omega t) \right] = \frac{E_{01}^2}{2} \end{aligned}$$

Rappel : $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ d'où $\cos(a \pm \pi/2) = \mp \sin(a)$.

Résumons

- Une lame quart-d'onde ou $\lambda/4$ est un cristal biréfringent permettant de transformer une OEM polarisée rectilignement en une OEM polarisée circulairement.
- Cette transformation se fait grâce à l'ajout d'un déphasage entre les composantes du champ électrique incident. Le déphasage doit valoir $\pi/2$.
- Pourquoi quart d'onde ? Parce qu'il faut vérifier la relation

$$n_y = n_x \pm \frac{\pi}{2k_0e} = n_x \pm \frac{\lambda}{4e}.$$

- Le champ incident est maintenant une OEM polarisée circulairement vers la droite. Cela veut donc dire que,

$$\frac{E_{1y}}{E_{1x}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

- A l'entrée de la lame on a donc :

$$\vec{E}_1(z, t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} \left(e^{i(k_0 z - \omega t)} \vec{u}_x + e^{i(k_0 z - \omega t - \frac{\pi}{2})} \vec{u}_y \right)$$

- A la sortie de la lame :

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_1(e, t) = \vec{E}_2 &= \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} \left(e^{i(k_0 n_x e - \omega t)} \vec{u}_x + e^{i(k_0 n_y e - \omega t - \frac{\pi}{2})} \vec{u}_y \right) \\
 &= \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} e^{i(k_0 n_x e - \omega t)} \left(\vec{u}_x + e^{i(\pm \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2})} \vec{u}_y \right) \\
 &= \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} e^{i(k_0 n_x e - \omega t)} (\vec{u}_x \pm \vec{u}_y)
 \end{aligned}$$

Or on a toujours $n_y = n_x \pm \frac{\pi}{2k_0 e}$

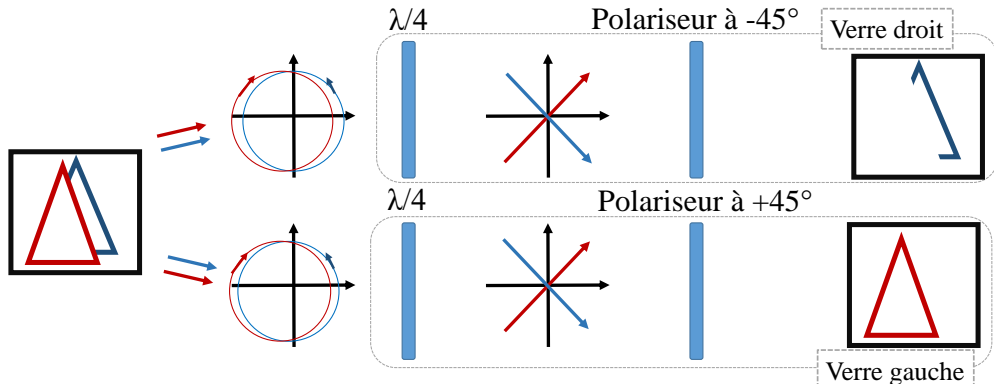
- L'onde de sortie est une OEM polarisée rectilignement.
- Si la lame quart d'onde est $-\pi/2$, \vec{E}_2 est polarisé rectilignement à -45° .

Résumons (màj)

- Une lame quart-d'onde ou $\lambda/4$ est un cristal biréfringent permettant de transformer une OEM polarisée rectilignement en une OEM polarisée circulairement.
- Cette transformation se fait grâce à l'ajout d'un déphasage entre les composantes du champ électrique incident. Le déphasage doit valoir $\pi/2$.
- Pourquoi quart d'onde ? Parce qu'il faut vérifier la relation

$$n_y = n_x \pm \frac{\pi}{2k_0e} = n_x \pm \frac{\lambda}{4e}.$$
- L'inverse est aussi vraie : une OEM polarisée circulairement à droite est transformée en OEM polarisé rectilignement à -45° (pour une OEM polarisée circulairement à gauche, ce sera $+45^\circ$).

- A la sortie de la lame quart d'onde, notre onde polarisée circulairement à droite est transformée en OEM polarisée rectilignement à -45° .
- Ainsi, l'ajout d'un polariseur à $+45^\circ$ à la sortie de la lame $\lambda/4$ va éteindre le signal (cf. loi de Malus) car polarisation de l'onde est perpendiculaire à l'axe du polariseur.
- Avec initialement une OEM polarisée circulairement à gauche, le déphasage initial est de $+\pi/2$, et l'onde de sortie est donc déphasée de $-\pi/2 + \pi/2 = 0$: Polarisation rectiligne à $+45^\circ$.



Etape 3: chaque verre est composé d'une lame quart d'onde et d'un polariseur

- Utiliser une OEM polarisée rectilignement nécessiterait au spectateur de garder la tête **PARFAITEMENT** à la verticale pendant tout le film (le film Avatar dure plus de 2h30).