



HAL
open science

Comment promouvoir la réflexion épistémologique dans la formation des enseignants de mathématiques ? Une approche mixte didactique et philosophique

Gabriel Pallarès, Thomas Hausberger, Anne Roy

► To cite this version:

Gabriel Pallarès, Thomas Hausberger, Anne Roy. Comment promouvoir la réflexion épistémologique dans la formation des enseignants de mathématiques ? Une approche mixte didactique et philosophique. *Éducation & Didactique*, 2021, 15 (1), pp.23-48. 10.4000/educationdidactique.8103 . hal-02879650

HAL Id: hal-02879650

<https://hal.science/hal-02879650>

Submitted on 26 Dec 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comment promouvoir la réflexion épistémologique dans la formation des enseignants de mathématiques ? Une approche mixte didactique et philosophique.

How to promote epistemology in the training of pre-service mathematics teachers? A didactical and philosophical mixed approach.

Gabriel Pallarès¹, Thomas Hausberger² & Anne Roy³

Résumé : Nous présentons dans cet article une expérimentation didactique faisant intervenir deux cadres théoriques, la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) et l'Approche Didactique et Philosophique en Mathématiques (ADPM). Cette expérimentation a été effectuée auprès d'un groupe de futurs enseignants de mathématiques du secondaire français dans le contexte d'un cours de didactique et d'épistémologie portant sur l'introduction du calcul littéral. Les résultats obtenus suggèrent la pertinence méthodologique et didactique de cette approche mixte et soulignent l'illusion de transparence de la variable chez les enseignants en formation initiale, dont la plupart ne repère pas les obstacles liés à l'indéterminée dans les situations d'enseignement-apprentissage.

Abstract : We present in this paper an experiment involving two theoretical frameworks: the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) and the Didactic and Philosophical Approach in Mathematics (DPAM). This experiment was applied to a group of pre-service secondary school mathematics teachers in France in the context of a course in didactics and epistemology of mathematics on the introduction of literal calculus. The results obtained suggest the methodological and didactic relevance of this mixed approach and underline the illusion of transparency of the variable among teacher students, who for most of them didn't identify the obstacles related to the indeterminate in teaching-learning situations.

Mots-clés : Formation des enseignants, Epistémologie, Algèbre élémentaire, Approche didactique et philosophique des mathématiques, Théorie anthropologique du didactique.

Introduction

La formation des maîtres nord-américaine et européenne en enseignement primaire et secondaire a fait l'objet de plusieurs réformes institutionnelles depuis les dernières décennies. Bien que celles-ci se soient exprimées différemment dans chaque pays occidental, elles ont remis en question la qualité de l'enseignement dispensé dans les universités. Plusieurs ouvrages ont toutefois mis en lumière que l'adoption d'une posture réflexive (Gueudet et Trouche, 2011, p. 61 ; Tupin et Lenoir, 2012 ; Perrenoud, 1998) et une connaissance accrue de l'épistémologie des savoirs (Astolfi, 2011 ; Chevallard & Cirade, 2011 ; Moyon, 2012) s'avèrent être des éléments clés pour améliorer la qualité de la formation à l'enseignement. Dans cette perspective, nous convenons que la formation didactique des enseignants du secondaire a besoin de dispositifs d'enseignement qui permettent d'assurer une réflexion épistémologique dans les cours de didactique des mathématiques. Pour répondre à cette nécessité, différents modules d'histoire et d'épistémologie ont ainsi vu le jour dans les cursus de formation des enseignants de sciences (Bernard et al., 2008 ; Hausberger, 2015).

1Université de Montpellier, laboratoire LIRDEF (EA 3749, UM-UPVM), gabriel.pallares.math@gmail.com [Faculté d'Education, 2 place Marcel Godechot, BP 4152, 34092 Montpellier Cedex 5, FRANCE]

2Université de Montpellier, laboratoire IMAG (UMR CNRS-UM 5149), équipe DEMa

3Université du Québec à Trois Rivières, LIPTIIC, anne.roy@uqtr.ca, Département des sciences de l'éducation, 3351, boul. des Forges, C.P. 500, Trois-Rivières, (Québec) G9A 5H7, CANADA.

Nous posons comme postulat méthodologique⁴ que l'union de l'Approche Didactique et Philosophique en Mathématiques (ADPM, Roy, 2010) et de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD, Bosch & Gascon 2014), initiée par Chevallard, peut servir de levier pour former des futurs enseignants en mathématiques à l'épistémologie. L'ADPM met l'emphase sur la construction du sens des savoirs mathématiques en visant particulièrement le développement d'une pensée réflexive chez le futur enseignant relativement à ses représentations épistémologiques des mathématiques, tandis que la TAD apporte des outils méthodologiques à la démarche didactique de l'ADPM. Selon des expérimentations effectuées dans des cours universitaires avec des futurs enseignants du primaire, Roy (2005) souligne notamment qu'une réflexion épistémologique en communauté de recherche philosophique sur des concepts mathématiques permet d'approfondir des savoirs mathématiques, tout en contribuant à développer des habiletés de pensée réflexive, ce qui sera décrit plus loin dans le texte. Des premières expérimentations menées par deux des auteurs dans le cadre de la formation initiale des enseignants de mathématiques du secondaire (Hausberger et Roy, 2018), suggèrent un lien entre les niveaux de réflexivité des étudiants et leur compréhension du contenu épistémologique étudié (la notion de preuve). En outre, l'ADPM a permis une meilleure compréhension de la notion de preuve par les étudiants les plus réflexifs, notamment la dimension explicative des preuves que l'on souhaite favoriser dans les situations d'enseignement-apprentissage. Autrement dit, nous posons comme postulat méthodologique qu'amener les futurs enseignants de mathématiques du secondaire à développer de meilleures habiletés de pensée à propos des savoirs mathématiques, en lien avec la formation à l'épistémologie, les prépare à une meilleure pratique enseignante, de par les relations qu'entretiennent la didactique et l'épistémologie des mathématiques (Artigue 1990).

Le principal objectif de cet article est donc de montrer en quoi un dispositif de formation, élaboré en croisant ADPM et TAD, peut promouvoir la réflexion épistémologique de futurs enseignants de mathématiques au secondaire en prenant pour exemple des contenus de didactique et épistémologie de l'algèbre. Nous allons tout d'abord présenter ces contenus et enjeux d'apprentissage, puis nous décrirons le croisement des deux cadres théoriques utilisés dans cette expérimentation, ce qui permettra de raffiner nos questions de recherche. Nous présenterons ensuite le protocole de recherche et développerons les différentes analyses des données recueillies, menées à l'aide d'outils théoriques issus de l'ADPM et de la TAD. Nous terminerons par une discussion des résultats soulevant les forces et les limites de ce nouveau dispositif en formation à l'enseignement des mathématiques au secondaire.

Objectifs d'apprentissage et premières questions de recherche

La littérature en didactique de l'algèbre souligne l'importance de la dialectique arithmétique/algèbre et des démarches de modélisation lorsqu'il s'agit de mettre en évidence les raisons d'être des expressions algébriques au début de l'enseignement du calcul littéral (Assude et al., 2012). Des situations d'enseignement-apprentissage pour introduire la lettre comme symbole mathématique, telles que celle présentée dans l'annexe 1a (récupérée de Bardini, 2008) ou la situation des carrés bordés (Coppé et al., 2016), sont apparues dans les manuels ou ont été développées plus avant en tant qu'ingénieries de recherche. Coppé et al. (2016) illustrent bien la richesse de ce type d'activité, décrivant dans l'analyse *a priori* une pluralité de techniques possibles, d'où résultent différentes expressions algébriques produites qui peuvent être comparées en mobilisant les règles de l'algèbre. L'exemple présenté en annexe 1a est plus simple : les questions orientent vers la technique de décomposition du nombre recherché en la somme $(n+1) + (n+2) = 2n+3$ (cercles du haut et cercles du bas pris séparément), ce qui n'engage pas la distributivité.

4 Selon Van der Maren (1995) le *postulat méthodologique* est parfois présenté comme hypothèse méthodologique. On ne sait pas à l'avance s'il donnera quelque chose, mais on doit provisoirement l'admettre comme valable pour au moins l'essayer (p. 192).

Pour autant, Coppé et al. soulignent l'importance de dégager des conditions qui permettent une bonne utilisation de la situation des carrés bordés par les enseignants et posent, plus largement, le problème de la diffusion des situations issues de la recherche. Contrairement à l'intention première de la situation d'enseignement-apprentissage de l'annexe 1a (issue d'un manuel), les chercheurs concluent que « ce problème ne peut pas être proposé comme une première activité, il doit être replacé dans une progression d'apprentissage en termes de types de tâches et de techniques utilisant, par exemple, des programmes de calcul⁵ » (loc. cit., p. 62). En d'autres termes, un mauvais usage de ce type de situations génère un *obstacle didactique*, au sens de Brousseau (1983). Se greffe également, dans le cas de telles situations d'introduction de la lettre, un *obstacle épistémologique*. Les travaux de Bardini (2008, voir également 2003) illustrent bien cet obstacle : Bardini s'appuie sur les analyses épistémologiques de Serfati (1999), lequel a documenté les difficultés épistémologiques liées au statut et à l'usage de la lettre dans les expressions algébriques. Ainsi, depuis son introduction dans les mathématiques, que l'on peut faire remonter à Viète (à la différence de l'inconnue qui trouve ses sources chez Diophante et n'était pas désignée par une lettre), les différents emplois et diverses généralisations de la lettre en algèbre (variable, paramètre, indéterminée) ont amené d'importantes difficultés conceptuelles, notamment l'apparente contradiction d'un « donné arbitraire mais fixé ». L'histoire des mathématiques nous rappelle que ce problème fut au cœur d'une controverse entre Frege et Russell : si Russell pensait pouvoir saisir cette contradiction en se plaçant dans un registre rhétorique (Russell, 1903), où la variable a « toujours une valeur quelconque prise dans l'ensemble » (Russell, 1908), Frege considérait ce problème comme y étant irréductible, pointant le problème de la dénomination d'un « nombre variable » et avançant que de tels « nombres indéterminés » désignés par la lettre x ou n n'existent simplement pas (Frege, 1904 ; voir également l'annexe 1b). Bardini (2008) fait ensuite le lien avec le contexte d'enseignement-apprentissage : elle présente (voir annexe 1c) une retranscription des échanges entre des élèves et l'enseignant, lors de la réalisation de l'activité présentée dans l'annexe 1a. Les élèves se heurtent au problème de la désignation de la lettre n dans l'expression « figure n° n ». Pour tenter de faire sens de ce signe, ces derniers affectent la variable d'une valeur donnée : la dialectique arithmétique/algèbre ne fonctionne pas, parce que la conception d'un donné en tant que valeur fixée (relativement à ce qui est inconnu et à déterminer) s'oppose à la nouvelle connaissance, celle d'un donné arbitraire exprimant la généralité (la lettre en tant qu'indéterminée). Le professeur a beau poser la question d'un « nombre de cercles d'un terme quelconque », donc remplacer la lettre par une locution du type « quel que soit le numéro de la figure », cette remédiation sémiotique se révèle sans effet. Ceci vient confirmer le statut d'obstacle épistémologique, par sa présence récurrente dans l'histoire et les situations de classe. Pour résumer, l'enjeu d'apprentissage est un point crucial d'épistémologie et didactique de l'algèbre, repéré dans la littérature de recherche. Il s'agit d'amener les futurs enseignants à bien saisir un double obstacle : l'obstacle épistémologique de la lettre en tant que « donné arbitraire mais fixé » et l'obstacle didactique, visible dans les manuels et les pratiques de classe, qui se produit lorsque la lettre est introduite de façon « abrupte » (comme c'est le cas dans l'annexe 1a, utilisée comme activité d'entrée dans le calcul littéral). En d'autres termes, il s'agit de dissiper la potentielle *illusion de transparence* (Artigue, 1990, p. 245) des étudiants quant à la notion de variable, ce qui passe par une prise de conscience des obstacles sous-jacents. Nous avons choisi cet objectif d'apprentissage d'une part parce qu'il nous paraît emblématique de l'apport de l'épistémologie aux analyses didactiques, d'autre part par la possibilité qui nous est offerte de mener avec les étudiants un questionnement philosophique sur la lettre en algèbre en s'appuyant sur la pensée de Frege. En outre, nous proposerons aux étudiants (futurs enseignants du secondaire) de travailler le corpus composé des documents de l'annexe 1.

Nos premières questions de recherche, à raffiner, sont alors les suivantes : les étudiants (lesquels ont déjà rencontré en cours de didactique les notions d'obstacle épistémologique et didactique) sont-ils capables de saisir les dimensions problématiques (épistémologique et didactique) d'une telle introduction de la lettre ? Comment orchestrer une discussion fertile, en classe, du texte de Frege,

de façon à favoriser la réflexion des étudiants sur les savoirs mathématiques et en particulier le statut épistémologique de la lettre en algèbre ?

L'ADPM et la TAD : un croisement de deux cadres théoriques pour les analyses et l'ingénierie didactiques.

Nous présentons dans cette partie les deux cadres théoriques de notre étude : d'une part l'ADPM qui contient les fondements de notre approche pédagogique pour la formation des enseignants de second degré en didactique et épistémologie des mathématiques, d'autre part la TAD qui offre des outils méthodologiques pour renforcer la dimension didactique de l'ADPM. Nous discutons des apports de chaque cadre et le bien-fondé de la forme de "networking" (Bikner-Ahsbals et Prediger, 2010) qui est mise en oeuvre. Nous terminons par la reformulation de nos questions de recherche.

L'ADPM : apports de la discussion à visée philosophique et définition de la pensée réflexive

L'Approche Didactique et Philosophique en Mathématiques (ADPM), introduite par Roy (2005, 2010), est inspirée des fondements socioconstructivistes et pragmatistes de l'approche « *Philosophie pour enfants adaptée aux mathématiques (PPEM)* » conçue par Daniel, Lafortune, Pallascio et Sykes (1996). À l'instar de la PPEM, l'ADPM vise à faire l'éducation mathématique par une maïeutique socratique, mais en se plaçant dans le contexte de la formation enseignante. Elle se pratique par des discussions à visée philosophique (DVP) et une réflexion critique sur des questions que se pose le futur enseignant à propos de l'éducation mathématique. Par exemple, comment aborder la notion d'infini pour faire comprendre aux élèves du secondaire la différence entre les nombres entiers et les nombres irrationnels. L'ADPM donne, entre autres, l'opportunité à l'étudiant de questionner sa vision des savoirs mathématiques. Elle met l'emphase sur la construction du sens, ce qui engage les membres du groupe étudiant « à poser des questions pertinentes, à y réfléchir par eux-mêmes et à en discuter au moyen du dialogue philosophique entre pairs — ce qu'on nomme la communauté de recherche » (Roy, 2005). En fait, la communauté de recherche philosophique est l'élément central pour amener la réflexivité au sein du discours. La notion de réflexivité dont il est question ici émerge, d'une part, des travaux de Matthew Lipman (1995) sur la pensée complexe (*higher order thinking*), laquelle représente la symbiose de la pensée critique et de la pensée créative en y incluant une pensée responsable (*caring thinking*) et une pensée métacognitive et, d'autre part, du modèle d'Ernest (1991). L'intérêt de la notion de réflexivité étudiée par Roy (2005) est qu'elle porte non seulement sur le contenu de la pensée en lien avec des aspects mathématiques, mais également sur la forme langagière de la pensée, et ce, à travers ces modes de pensée. Autrement dit, en utilisant la notion de réflexivité, nous reconnaissons l'importance conjuguée du contenu des savoirs mathématiques intégrés par les étudiants, dans leurs dimensions logique, pragmatique, humaine et sociale, ainsi que la forme langagière du discours qui se manifeste en différentes habiletés de pensée développées lors des situations d'enseignement-apprentissage en mathématiques. L'ADPM mise entre autres sur le questionnement philosophique et didactique pour amener les futurs enseignants à devenir réflexifs. L'aspect philosophique s'actualise selon trois processus de recherche proposés par Matthew Lipman (1995) : recherche de critères, autocorrection et sensibilité au contexte. Ces processus s'opérationnalisent en fonction des quatre modes de pensée en diverses habiletés de pensée. L'aspect didactique se concentre sur le contenu mathématique et sur la forme des habiletés de pensée qui indiquent le niveau de réflexivité, observées à travers le discours (voir les tableaux de synthèse dans Roy, 2005 pour plus de détails) pour en mesurer l'évolution au cours des apprentissages. La communauté de recherche philosophique place les futurs enseignants dans une praxis pédagogique qui leur permet de s'engager dans un dialogue philosophique pour participer collectivement à la reconstruction du discours personnel et social. Dans l'ADPM, le dialogue est alors pris selon son sens étymologique, c'est un *dia logos* où l'on pense avec l'autre. Le dialogue se fait alors dans une perspective d'action en vue d'améliorer la compréhension d'un concept commun tout en visant le développement

d'habiletés de pensée réflexive. Pour analyser la réflexivité des habiletés de pensée et évaluer leur évolution au long de l'expérimentation, nous avons utilisé la typologie des styles de pensée de Roy (2017, 2010, 2008, 2005). Toutefois, seulement une partie de cette typologie a été utilisée dans le cadre de la présente recherche, avec un focus sur la forme langagière du discours uniquement. En effet, les objectifs d'apprentissage, en l'occurrence des contenus ciblés de didactique et épistémologie de l'algèbre, diffèrent de ceux de Roy qui visait une éducation mathématique et didactique plus globale des enseignants du premier degré dans un paradigme socio-constructiviste. Nous avons donc développé d'autres outils d'analyse du contenu. Ces éléments seront précisés plus bas lorsque nous détaillerons la méthodologie d'analyse des données recueillies. Enfin, sur la base de travaux précédents (Hausberger et Roy, 2016 ; Roy, 2010, 2008, 2005 ; Roy, Lechasseur et Michel 2014), nous considérons que l'utilisation de l'ADPM pourrait être une voie prometteuse pour développer des habiletés de pensée réflexive chez les étudiants en enseignement des mathématiques au secondaire.

Apports de la TAD : « paradigme du questionnement du monde » et modélisation de l'enquête sous forme de question-gramme.

A l'instar de l'ADPM, les développements récents de la TAD (Bosch & Gascon 2014), initiée par Chevallard, mettent en avant un « art du questionnement » à travers une « pédagogie de l'enquête ». Le point de départ est le constat, sur la base d'une analyse historique et épistémologique de l'enseignement secondaire (Chevallard 2012), que l'institution scolaire a tendance à « monumentaliser » les savoirs en perdant de vue leurs raisons d'être, au cours du processus de transposition didactique. De façon métaphorique, un apprenant visite ces savoirs avec déférence comme un monument qui a perdu une part importante de sa fonctionnalité et que l'on honore uniquement « formellement ». Afin d'outiller l'action didactique dans ses efforts pour quitter le paradigme monumentaliste dominant, la TAD a élaboré un modèle pour le chercheur autour de la notion de *Parcours d'Étude et de Recherche* (PER, Chevallard 2005). Ces travaux s'inscrivent également dans le cadre de l'*Inquiry-based science education* que prônent les politiques éducatives actuelles (European Commission, 2007). Le modèle du PER a pour ambition, d'une part, de décrire et d'évaluer la qualité et l'autonomie du travail des apprenants, d'autre part, de saisir la dynamique entre les phases d'enquête autour de questions que l'on se pose et les phases d'étude des « savoirs officiels » qui fournissent des éléments de réponse. D'une façon générale, une question initiale appelle à la construction de réponses partielles ou à la mobilisation de réponses déjà construites, qui sont à déconstruire à partir de connaissances disponibles afin de produire de nouvelles réponses en faisant émerger de nouvelles questions. Tous ces éléments sont résumés de façon synthétique sous la forme du schéma herbartien (Chevallard 2012), lequel est muni de différentes dialectiques dont celle des questions et des réponses, sur laquelle nous nous focaliserons dans la suite de notre étude. Enfin, Winslow, Matheron et Mercier (2013) proposent une représentation des PER sous forme d'arbre, les « *SRC-diagrams* » que nous traduisons par le terme « *question-gramme* ». Nous exposerons plus loin la méthodologie d'élaboration d'un question-gramme et donnerons des exemples, issus de notre expérimentation.

Croisement des deux cadres théoriques : une modalité de “networking”

Bikner-Ahsbabs et Prediger (2010) distinguent différents niveaux de « *networking* » (mise en réseau) des théories didactiques. Détailler ces différents niveaux, organisés en paires de niveaux et généralement présentés sous forme d'échelle quantifiant le degré d'intégration des théories entre elles, dépasse le cadre de cet article. Ce sont autant de stratégies différentes pour la recherche en didactique. Nous nous concentrerons sur la paire qui nous concerne : coordonner/combiner (*coordinating/combining*), pour laquelle Bikner-Ahsbabs et Prediger donnent des définitions précises. *Coordonner* signifie qu'un cadre conceptuel a été construit, *a minima* (donc sans pour autant constituer un nouveau cadre théorique, ce qui conduirait à une autre paire), pour intégrer les différentes théories alors que *combiner* se limite à une juxtaposition des théories selon certains

aspects. Dans le premier cas, les théories sont complémentaires et cohérentes tandis que dans le second elles peuvent présenter des aspects contradictoires.

La TAD et l'ADPM possèdent des aspects contradictoires. Par exemple, la notion de « style de pensée » revendique une dimension psychologique (voire idéologique) que la TAD évacue dans sa notion de « rapport à un objet de savoir » (Chevallard, 2003). Là où la TAD s'efforce de saisir la dynamique cognitive à travers l'acquisition des pratiques (*praxis*) et des discours (*logos*) qui s'y rattachent, au sein de l'institution concernée, l'ADPM se centre sur l'évolution du discours des individus au cours des interactions sociales. La notion de réflexivité exprime ainsi une qualité particulière du *logos*, dans de multiples dimensions qui fondent la typologie des styles de pensée, mais sans souligner les déterminations praxiques de ce logos. Or la relation praxis-logos est constitutive de la TAD, laquelle envisage toute activité humaine sous l'aune du développement et de la transmission de praxéologies.

Différents arguments ont motivé le projet de combiner des apports de la TAD et de l'ADPM dans des rapports de complémentarité. D'une part, la nature particulière du savoir qui constitue l'enjeu didactique (des éléments d'épistémologie des mathématiques) est cohérente avec la praxis pédagogique de l'ADPM. En effet, l'épistémologie s'apparente à un examen critique des procédés de la science, que les épistémologues développent et partagent à travers la lecture de textes, leur commentaire, et le débat d'idées. Nous rejoignons ici le point de vue praxéologique de la TAD. D'autre part, nous soutenons le point de vue que cette praxis pédagogique gagne à être outillée par la TAD. En effet, un des enjeux de l'ADPM est de susciter le dialogue. L'enseignant doit donc doser son agir, entre le rôle de transmetteur de connaissances et celui de médiateur pédagogique. Dans le cas des PER, on dit que l'enseignant adopte la posture de « directeur de l'étude ». A l'instar des PER, la maïeutique socratique que vise l'ADPM est fondée sur un processus dialectique entre questions et réponses au sein du système didactique de la classe. Nous faisons l'hypothèse méthodologique que la modélisation d'une DVP par un PER, avec le question-gramme comme outil didactique, fournit une piste prometteuse pour aider l'enseignant à guider les étudiants dans une démarche de co-construction du sens lorsque les savoirs visés ou questionnés, par exemple le symbolisme du calcul littéral en formation des enseignants, font intervenir un réseau complexe de notions qui sont reliées (dans notre cas, aux notions de variable, inconnue, paramètre, indéterminée, etc.), à la fois dans leur usage culturel et dans la façon dont ils sont appris et enseignés. La complexité de la DVP en communauté de recherche nécessite alors une analyse didactique et épistémologique préalable assez fine que le question-gramme permet de conduire et de structurer. Enfin, la TAD offre à travers ses différents niveaux d'analyse (chronogenèse, topogenèse et mésogenèse, que nous détaillerons plus loin en présentant la méthodologie de notre recherche) et les différentes dialectiques de l'étude (Chevallard, 2001) des outils pour analyser le processus d'étude instauré par l'ADPM et par là exercer un regard critique sur le dispositif pédagogique. De fait, nous utiliserons partiellement ces outils dans cette recherche : pour une première approche, nous nous sommes concentrés sur la dialectique des questions et des réponses et l'usage des question-grammes.

Reformulation des questions de recherche

Nous nous proposons de tester cette hypothèse de recherche dans le cadre de la formation des enseignants en didactique et épistémologie de l'algèbre autour des enjeux d'apprentissage présentés ci-dessus. Cette étude permettra en définitive d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes. Un dispositif de DVP outillé par la TAD et en particulier par les question-grammes est-il pertinent pour transmettre des éléments d'épistémologie en lien avec la didactique de l'algèbre ? Un tel dispositif permet-il aux futurs enseignants d'affiner leurs analyses didactiques de tâches mathématiques et de mieux percevoir d'éventuels obstacles épistémologiques ou didactiques ? En outre, l'approche pédagogique de l'ADPM réussit-elle à faire développer aux étudiants des habiletés de pensée, au sens où elle amènerait les futurs enseignants à accroître leur degré de

réflexivité sur les analyses qu'ils sont capables de produire ? Quel impact a-t-elle au niveau de la compréhension de la variable chez le futur enseignant de mathématiques du secondaire ? En d'autres termes, notre cas d'étude permet-il d'étayer l'hypothèse selon laquelle le niveau de réflexivité est corrélé avec l'aptitude des étudiants à mener des analyses épistémologiques sur des savoirs mathématiques ? Ceci viendrait renforcer la pertinence d'une pratique pédagogique telle que l'ADPM dans la formation en épistémologie des futurs enseignants, des recherches antérieures ayant mis en évidence que l'ADPM est susceptible de favoriser le développement d'habiletés réflexives sur le moyen terme (Roy et al. 2016, 2014).

Enfin, cette étude permettra de documenter les problèmes suscités spécifiquement par le calcul littéral, lesquels, s'ils sont bien connus en didactique de l'algèbre du point de vue des élèves, sont peu étudiés au niveau des conceptions des enseignants.

Protocole expérimental

Le protocole s'est déroulé en trois temps, ce qui a représenté environ 2 heures de cours. Dans un premier temps, l'activité d'introduction au calcul littéral (voir annexe 1a) a été présentée à 25 étudiants préparant le concours d'enseignant de mathématiques du secondaire français (première année de master, âgés de 24 ans en moyenne), au sein d'un cours de didactique et épistémologie de l'arithmétique et de l'algèbre. Nous avons demandé aux étudiants de réaliser, en dyade (11 groupes de deux et un groupe de trois), une brève analyse didactique *a priori* de cette activité, destinée à l'introduction du calcul littéral, ce qui est enseigné dans les collèges français à des élèves de 4^{ème} (13-14 ans). L'expérimentation ayant été mise en place en mars, au milieu du second semestre de formation, les étudiants étaient déjà familiers avec l'exercice et savaient qu'ils devaient notamment étudier les modes de résolution de l'activité par un élève et mettre en lumière les potentiels obstacles. Ceci a constitué une forme de pré-test. Dans un second temps, un extrait de Frege (1904) (annexe 1b) a été lu en classe. Les étudiants ont ensuite participé à une DVP autour de la question « Qu'est-ce qu'une variable ? ». Cette DVP a duré 50 minutes. Nous avons choisi cette question pour les raisons suivantes : d'une part, elle incite à questionner les acceptions usuelles du terme de « variable », en distinguant notamment inconnue et paramètre ; d'autre part, elle rejoint la question, problématique, du sens et de la désignation de la lettre et devrait donc conduire, en appui sur le texte de Frege, à la mise en évidence de l'obstacle épistémologique mentionné ci-dessus. Lors de la DVP, le rôle de l'animateur (le premier auteur de cet article) a consisté, outre la régulation de la discussion (partage de la parole), à effectuer des relances en incitant les étudiants à expliciter leur pensée (donc à tenter de promouvoir une réflexivité), et parfois à apporter quelques éléments théoriques comme des précisions sur le contexte historique du questionnement de Frege ou sur certains objets mathématiques (les notions de variables libres et liées en logique mathématique ont par exemple été évoquées). L'animateur s'efforçait donc de produire une maïeutique, dans la tradition socratique, en se gardant bien de donner son propre point de vue ou de prendre la posture d'un enseignant qui institutionnalise un savoir. De plus, cette DVP a été préparée en amont par l'élaboration d'un question-gramme *a priori* cherchant, sans prétendre à l'exhaustivité, à prévoir le déroulement de la discussion, c'est-à-dire les réponses à la portée des étudiants et les possibles interventions de l'animateur. Cette préparation a ainsi pu servir d'appui à l'animateur lors de la conduite de la DVP. Ce question-gramme *a priori* est donné en annexe 2. Il a été, par la suite, comparé à un question-gramme *a posteriori* (annexe 3) retraçant la discussion effective telle qu'elle s'est déroulée (voir méthodologie d'analyse ci-dessous).

Après la DVP, les dyades d'étudiants ont revisité leurs premiers écrits, autour de la question « Après cette discussion, voulez-vous ajouter quelque chose à votre analyse *a priori* ? », qui a fait l'objet d'un second écrit. Ce dernier constitue le second relevé de données. Dans ce second écrit, nous nous attendons à une meilleure prise en compte de l'obstacle épistémologique, qui ne peut que difficilement être pensé par les étudiants lors du premier écrit, avant la discussion.

Dans un troisième temps, l'extrait de transcription d'échanges entre un enseignant et des élèves lors d'une mise en oeuvre de l'activité en classe (annexe 1c) a été présenté aux étudiants. Il a ensuite été

demandé aux dyades d'étudiants d'effectuer, sur la base de cet extrait et de leurs réflexions *a priori*, une analyse *a posteriori* de l'activité, dans le sens d'une analyse critique de cette dernière eu égard aux difficultés des élèves. Ceci a constitué le troisième relevé.

Enfin, signalons que notre dispositif de formation comprend une dernière phase d'institutionnalisation par l'enseignant (le second auteur de cet article) des contenus épistémologiques et didactiques travaillés (voir objectifs d'apprentissage, ci-dessus).

Analyse de la DVP

La DVP, entièrement enregistrée, a été retranscrite. Dans ce qui suit, nous allons rendre compte du contenu de la DVP, illustrer la méthodologie d'élaboration des question-grammes et présenter les analyses que ces derniers nous permettent d'effectuer.

Méthodologie

Rappelons tout d'abord comment un PER (dans notre cas, la DVP) est modélisé en un question-gramme, selon la méthodologie proposée par Winslow et al. (2013). A partir de la question initiatrice Q sont distinguées des *sous-questions* Q_i dont les réponses constituent des réponses partielles à Q et des *questions dérivées* Q_j^* motivées par des Q_j (ou par des réponses aux Q_j) mais qui ne répondent pas aux Q_j , même partiellement. Les réponses sont notées A_k et, tout comme les sous-questions et questions dérivées, elles sont reliées par une flèche aux questions dont elles sont issues, d'où la représentation diagrammatique, en général non linéaire et « buissonnante ». Un code de couleur est également introduit afin de mettre en évidence la topogenèse, c'est-à-dire le rôle, la place occupée par chacun des acteurs du système didactique : un élément (question ou réponse) apparaît sur fond noir s'il est introduit dans le milieu par l'enseignant, en blanc par les étudiants, et il est grisé s'il provient d'une forme d'interaction ou de collaboration entre les deux. Le question-gramme peut être construit *a priori*, avant l'expérimentation en classe d'un PER, où il s'agit d'explorer le potentiel d'une question génératrice dans un milieu didactique donné, ou bien *a posteriori*, où l'on pourra observer la trajectoire de l'étude, son ampleur, sa topogenèse, et comparer les résultats obtenus aux prédictions. En tant qu'outil didactique, le question-gramme est ainsi susceptible de revêtir différentes fonctions : en tant qu'outil de recherche, il permet l'analyse et l'évaluation d'un dispositif de formation modélisable sous forme de PER, par une forme de validation interne basée sur la comparaison entre les analyses *a priori* et *a posteriori* ; en tant qu'outil d'enseignement et de formation, il facilite également le travail de conception du dispositif, notamment la construction du milieu (choix de la question génératrice et des médias servant à la documentation des élèves lors de l'enquête ou réflexion sur les rétroactions de l'enseignant par exemple) de façon à ce que les étudiants développent les connaissances visées (on parle alors de PER finalisé).

Préparation de la DVP et question-gramme *a priori* (voir annexe 2)

La DVP mise en oeuvre au sein de la séquence visait à aider les étudiants, futurs enseignants, à prendre conscience de l'obstacle épistémologique représenté par la notion de variable. En utilisant le texte de Frege comme point de départ à la discussion, nous visions, dans une démarche philosophique, à inciter les étudiants à questionner leurs propres habiletés de pensée par rapport aux mathématiques, c'est-à-dire à vérifier leur réflexivité sur leur emploi de la variable. L'objectif final de la DVP (symbolisé par la dernière question Q^* « Quelles implications didactiques sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire ? ») était de les questionner, avant la présentation des retours des élèves (annexe 1c), sur le lien entre les implicites de leurs savoirs mathématiques quant à la variable et les difficultés que pouvaient rencontrer les élèves face à cette notion. Suivant ces objectifs, le question-gramme *a priori* a ainsi été construit dans le but de prévoir le déroulement de la DVP suivant les réponses des étudiants, en leur permettant de s'appropriier le texte, de

questionner leurs habiletés de pensée par rapport aux mathématiques, et d'en discuter avant d'être confrontés aux réactions d'élèves. A de nombreuses reprises, nous avons préféré des réponses non-expertes (comparativement à celles de l'épistémologue), l'objectif n'étant pas de simuler de façon exhaustive les réponses possibles aux questions que nous avons anticipées, mais bien de prévoir les réponses possibles de la part des étudiants. Nous avons ainsi parfois décomposé certaines questions ou réponses en sous-questions ou sous-réponses afin de rendre l'enjeu théorique plus accessible aux étudiants.

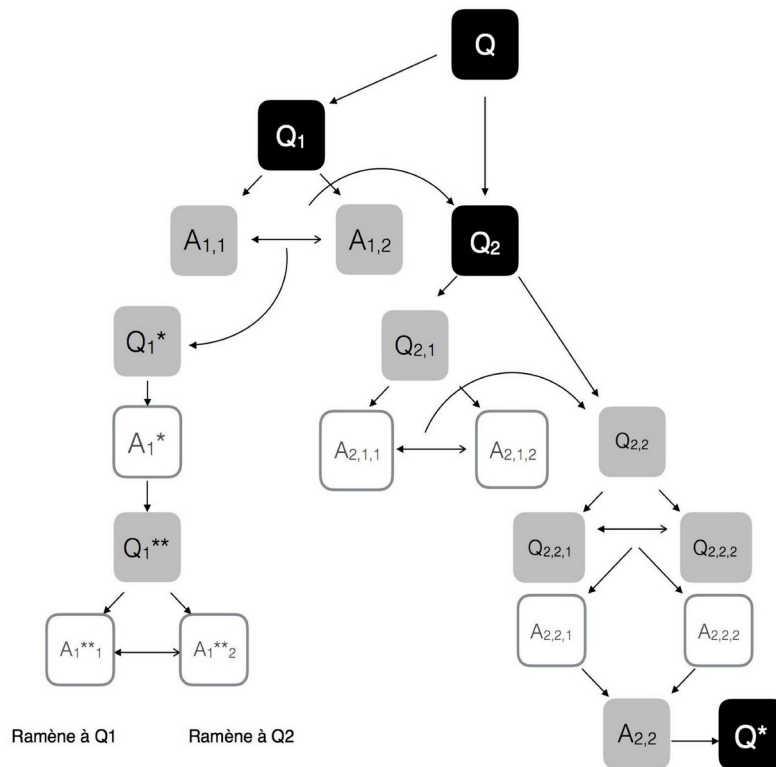


Figure 1 : Question-gramme a priori de la discussion

La question initiale Q était « Qu'est-ce qu'une variable ? ». Deux sous-questions de Q , notées Q_1 (« Dans quel contexte voit-on apparaître ce qu'on qualifie habituellement de "variable" ? ») et Q_2 (« En quoi la variable renvoie-t-elle à l'indétermination et à la généralité ? »), étaient prévues à la charge de l'animateur dans l'analyse *a priori*. La question Q_1 visait à anticiper de potentielles difficultés à débiter la discussion, les étudiants pouvant être intimidés par l'aspect « théorique » du texte de Frege et de la question Q . Nous avons prévu deux réponses à Q_1 , à savoir $A_{1,1}$ (« Pour représenter, dénoter un objet indéterminé ») et $A_{1,2}$ (« Pour représenter, dénoter un caractère de généralité »). Ces réponses étaient pensées pour être co-construites avec l'animateur et à l'aide du texte. Elles visaient à assurer que les étudiants aient bien identifié les deux dimensions d'indétermination et de généralité de la variable dès le début de la DVP pour pouvoir ensuite relancer les échanges dans la discussion. La question Q_2 visait à explorer ces dimensions de la variable, et représentait l'objectif réel pour poursuivre la DVP vers la question Q^* . Elle était ainsi laissée à la charge de l'animateur dans notre analyse *a priori*. Nous avons néanmoins inclus la question Q_1^* (« Les lettres ont-elles toutes le même statut ? ») et les questions et réponses suivantes pour anticiper les questions des étudiants quant à un emploi différencié (ou non) des termes « variable », « paramètre » et « indéterminée ». Pour poursuivre la DVP dans la direction souhaitée (Q^*), il nous fallait de plus anticiper un retour à la question Q_2 depuis les réponses $A_{1,1}^{**}$ et $A_{1,2}^{**}$ (respectivement « Inconnue et paramètre comme concepts relatifs au domaine de l'algèbre,

totallement distincts de la variable qui est liée au cadre fonctionnel », et « Inconnue et paramètre inclus dans le concept plus large de “variable”, au sens de la lettre dans les écritures mathématiques »). Nous avons inclus la question $Q_{2,1}$ (« Quels sont les liens entre indétermination, généralité et notion de variable en dehors du cadre de l’algèbre élémentaire ? ») et ses réponses $A_{2,1,1}$ et $A_{2,1,2}$ en considérant que, pour les étudiants, la notion de « variable » ne serait pas différenciée selon les domaines. Cette notion peut alors renvoyer à plusieurs domaines des mathématiques, dont les probabilités (réponse $A_{2,1,1}$), abondamment étudiées en dernière année de licence. Afin de laisser l’opportunité aux étudiants de discuter les questions qui font sens pour eux, nous avons décidé d’inclure ces questionnements possibles dans le question-gramme *a priori*. De fait, la question $Q_{2,2}$ (« En quoi la variable, en désignant quelque chose de général/indéterminé par un symbole, peut-elle présenter des difficultés ? »), au cœur du texte de Frege, arrive assez tard dans notre question-gramme *a priori*. Cela permet d’anticiper les difficultés des étudiants à cerner l’enjeu du texte et le besoin d’un retour sur les notions abordées *via* notamment le traitement de Q_1^* et Q_1^{**} (« Quels liens et différences entre variable, paramètre et inconnue ? »). Les réponses à $Q_{2,2}$, soit $A_{2,2,1}$ (« Les difficultés qui entourent la variable sont le “prix à payer” de l’efficacité mathématique ») et $A_{2,2,2}$ (« Présence d’importantes difficultés conceptuelles qu’il est nécessaire de traiter ») visaient à guider les étudiants vers Q^* . Nous n’attendons pas de réponse à cette dernière question : à ce stade de notre protocole expérimental, l’enjeu se situe au niveau de la formulation d’une question qui renvoie au problème de l’introduction de la lettre en situation d’enseignement-apprentissage et traduit une prise de conscience nouvelle, laquelle ouvre sur un travail didactique. Elle fait écho à la question qui sera posée pour le second écrit réflexif : « Après cette discussion, voulez-vous ajouter quelque chose à votre analyse *a priori* ? ».

Déroulement de la DVP et question-gramme a posteriori (voir annexe 3)

Le question-gramme *a posteriori* présenté dans l’annexe 3 a été constitué à partir de la retranscription des données vidéos récoltées pendant la DVP. Nous attirons l’attention du lecteur sur l’absence de référence au contexte (analyse *a priori* ou DVP effective) dans les notations des question-grammes. Les symboles qui dénotent questions et réponses auront donc une autre sémantique dans ce paragraphe que dans le précédent. Nous n’avons pas réussi à faire émerger une notation unifiée qui favorise la comparaison ultérieure des question-grammes *a priori* et *a posteriori*. Afin de délimiter les différentes questions et réponses, nous avons isolé des unités thématiques selon les sujets abordés par les étudiants et nous avons noté les réponses en fonction de leur apport dans la discussion et non en fonction du temps qui leur a été accordé. Par exemple, la réponse d’étudiant A_3 (« Un objet qui varie : “ça prend un nombre déterminé, mais on ne sait pas lequel” ») a été moins longuement traitée que A_1 (« Un objet dénotant la généralité ») et A_2 (« Un objet dénotant l’indétermination »), qui ont nécessité un retour sur le texte et l’aide de l’animateur pour en faciliter l’explicitation. Cependant, la réponse A_3 , en rapprochant implicitement les caractères indéterminé et inconnu, a fait réagir certains étudiants, stimulant le dialogue et contribuant donc (indirectement) à l’émergence de la question Q_1 (« Quelle est la différence entre la variable et l’inconnue ? »), de sa réponse $A_{1,1}$ (« La généralité de la variable la démarque de l’inconnue ») et de l’ensemble $\{Q_1^* ; A_1^*\}$ (« Quelle est la différence entre “inconnu” et “indéterminé” ? » et « L’“inconnue” peut être déterminée par le contexte dans lequel on la rencontre »).

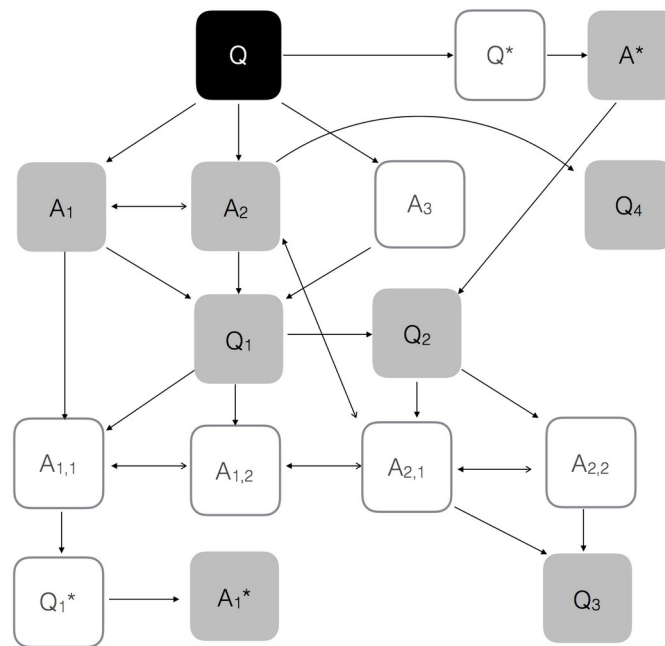


Figure 2 : Question-gramme a posteriori de la discussion

La question Q^* (« Dans quels domaines se situent les difficultés relatives à la variable ? Au niveau didactique ? De la pratique mathématique ? »), qui concernait les retombées didactiques de ces questionnements autour de la variable, est apparue beaucoup plus tôt et de manière plus spontanée que ce que nous avons prévu. La réponse A^* (« Bien que ces questions aient des applications didactiques, les problèmes de Frege étaient antérieurs et relevaient des fondements et de la pratique mathématique ») a été brièvement traitée. Afin de ne pas « court-circuiter » la discussion et permettre aux étudiants de bien s'approprier les concepts, l'animateur a néanmoins préféré renvoyer les étudiants à la question Q_2 (« Quelle est la différence entre la variable et le paramètre ? »). Cette question avait été évoquée par un étudiant avant Q^* mais n'était que peu traitée jusque-là. C'est ce renvoi par l'animateur qui justifie la notation de Q_2 en gris dans notre question-gramme. Comme nous l'avions anticipé, les étudiants ont du mal à hiérarchiser et différencier les différents contextes d'usage de la notion de « variable ». Ils ont ainsi porté une attention marquée sur les différents contextes d'apparition de la notion de variable, mobilisant le cadre algébrique ($A_{2,1}$, « Notion de "paramètre" comme cas particulier de celle de "variable" »), le cadre fonctionnel ($A_{2,2}$, « Notion de "paramètre" comme distincte de "variable" dans le cadre fonctionnel ») mais aussi le cadre de l'algorithmique (A_3). Cependant, la question Q_3 (« Quelles sont les points communs et différences entre la "variable" considérée dans le cadre algébrique d'une part et fonctionnel d'autre part ? »), qui a émergé de $A_{2,1}$ et $A_{2,2}$, a semblé avoir une résonance très faible chez les étudiants, y compris chez celui qui a contribué à amener la question, lequel n'a pas su apporter d'élément de réponse. Malgré les demandes d'explicitation de la part de l'animateur, les étudiants ont en effet développé les réponses $A_{2,1}$ et $A_{2,2}$ et leur interaction sans explicitement formuler de réponse à Q_3 . En outre, durant ce passage de la DVP, les étudiants ont développé toutes les réponses aux questions déjà formulées, notamment en les mettant en relation. A nouveau, cela peut renvoyer à leurs difficultés à clairement délimiter et hiérarchiser les concepts. Aucune idée saillante ne nous permettant de délimiter d'item à ajouter à notre question-gramme, nous avons représenté ce passage de la DVP par des flèches entre les différentes questions et réponses abordées par les étudiants pour représenter les liens effectués entre les différentes notions. Après la discussion autour de Q_2 et l'élaboration de

liens chez les étudiants entre les divers concepts abordés, un retour au texte par un étudiant soulève une autre sous-question à Q prévue dans notre analyse *a priori*. Cette sous-question Q_4 (« Comment représenter l'indéterminé ? ») est plus proche de la problématique de Frege car relative à la variable comme représentation de l'indéterminé. Elle est ainsi codée en gris dans le question-gramme car provenant du texte. Cette question ne se verra cependant pas apporter de véritable réponse car très peu traitée par les étudiants.

Comparaison des deux question-grammes : analyses chronogénétiques et topogénétiques

La DVP autour de la question « Qu'est-ce qu'une variable ? » visait notamment à clarifier avec les étudiants les différents statuts de la lettre dans le calcul littéral, tout en mettant en évidence les aspects d'indétermination et de généralité de la variable, lesquelles permettent de comprendre l'obstacle épistémologique de l'indéterminée en tant que donné général, arbitraire mais fixé. Même si les connaissances visées ont été visitées lors de la discussion, elles n'ont pas toutes été traitées avec la profondeur attendue : les étudiants se sont surtout focalisés sur les définitions de « paramètre », « inconnue » et « variable », au détriment de la discussion des aspects paradoxaux de l'indéterminée mis en avant par Frege. En effet, ces définitions et les distinctions entre ces notions semblaient poser fortement problème à la classe, traduisant un important manque de recul épistémologique sur la pratique mathématique.

En outre, la discussion a été beaucoup moins structurée que prévu : les étudiants revenaient très fréquemment sur des concepts déjà abordés pour faire des liens entre les différents concepts et les différentes questions. Le question-gramme *a posteriori* (en annexe 3) apparaît de ce fait beaucoup plus « compact » que le question-gramme *a priori* (annexe 2). Les étudiants ne pouvant parvenir à un consensus sur les définitions à donner aux différentes notions, les questions restaient « ouvertes » et les étudiants mettaient alors à profit la connexité des sujets abordés lors de la discussion pour passer de l'un à l'autre. Pour remédier à ce problème, il aurait été profitable d'effectuer, après le traitement de chaque sous-question lorsque le besoin s'en faisait ressentir, une institutionnalisation afin de clore certains sujets pour mieux en explorer d'autres. Néanmoins, la comparaison des question-grammes *a priori* et *a posteriori* montre que l'animateur n'a pas eu à introduire de lui-même de questions ou réponses pour maintenir active la discussion et n'a eu qu'à rebondir sur les réponses des étudiants : le question-gramme *a posteriori* ne présente aucun autre item dû uniquement à l'animateur (codés en noir). Les étudiants ont aussi posé par eux-mêmes des questions qui n'avaient pas été prévues, par exemple la question Q^* des domaines où la notion de variable est problématique. Cette nouvelle question et sa réponse semblent avoir permis aux étudiants de prendre conscience de l'enjeu didactique et épistémologique de la question génératrice de la DVP. L'implication des étudiants, plus importante que prévu (moins d'items noirs et plus de gris/blancs dans le diagramme *a posteriori*), montre la réussite de la dévolution de cette question initiatrice. Le rôle de l'animateur reste néanmoins primordial : la majorité des contenus de la discussion ont été guidés par ses demandes d'explicitations (codées en gris).

Analyse des écrits des étudiants

Les trois ensembles d'écrits recueillis ont fait l'objet d'une double analyse sur la forme et le contenu du discours. Rappelons que ces écrits sont les deux analyses *a priori* et l'analyse *a posteriori* réalisées par les étudiants. En cours de didactique, l'analyse *a priori* a été menée en mettant en avant deux tâches principales : anticiper les réponses justes ou erronées des élèves ; expliciter les causes des erreurs (ce qui conduit à mentionner des conceptions erronées, des obstacles ontogénétiques, épistémologiques et/ou didactiques). L'analyse *a posteriori* reprend alors la seconde tâche, avec un focus sur l'interprétation des erreurs effectivement commises, tout en posant une nouvelle question : celle du contraste entre les effets attendus et ceux produits, donc la pertinence de la situation d'enseignement-apprentissage.

Analyse de la forme: les niveaux de réflexivité par la typologie adaptée de l'ADPM

Pour la forme du discours, qui renvoie à notre question de recherche à propos des habiletés de pensée réflexive, une partie de la typologie des différents styles de pensée réflexive de Roy (2005) a été utilisée. Nous avons adapté cette typologie selon le public et la tâche d'analyse didactique visée. En particulier, la pensée *a-réflexive*, exprimée sous la forme d'énoncés uniquement affirmatifs, n'a pas été retenue, car semblant incompatible avec la tâche d'analyse (ce qui a été confirmé *a posteriori* : aucun écrit d'étudiant ne s'est révélé relever d'une pensée a-réflexive). De plus, nous avons pris le parti de coder un écrit comme relevant d'une habileté de pensée supérieure dès lors qu'un de ses indicateurs est présent au moins une fois dans l'écrit. Nos analyses étayaient donc la capacité à accéder à des modes de pensée de réflexivité croissante et non la maîtrise d'une qualité de discours. Voici l'adaptation qui a été faite pour les besoins de l'étude :

- La pensée *non-réflexive* s'exprime sous forme d'énoncés uniquement descriptifs de la situation. Le discours descriptif se formule alors avec des observations factuelles, où on ne retrouve pas de fondements scientifiques. Par exemple, on considérera comme descriptif un écrit présentant simplement les procédures-élèves possibles.
- Les étudiants ayant une pensée *pré-réflexive* s'expriment principalement par des énoncés explicatifs. Le discours de type explicatif se concentre alors sur les relations d'une situation donnée, mettant l'accent sur les causes (des difficultés d'élèves) ou les objectifs (de l'activité).
- Les pensées *quasi-réflexive* et *réflexive* de Roy ont été regroupées en une seule classe⁶ que nous nommons *réflexive* : le discours est alors constitué d'énoncés justificatifs. Par opposition à une explication, nous considérons ici la justification comme un discours visant à soutenir une thèse (un autre énoncé auquel il est lié). Le but d'une justification est de convaincre par un argument (accepté dans le champ de la didactique ou plus naïf) du bien-fondé de l'énoncé défendu. Un discours justificatif peut par exemple comporter des locutions comme « parce que » ou « en effet ».

Avant la discussion, dix dyades sur douze présentaient dans leur écrit un style de pensée *pré-réflexif* et deux y présentaient des habiletés *réflexives*. Voici un extrait d'un écrit de type *pré-réflexif* donné initialement par la dyade 12, avec un discours explicatif focalisé sur les objectifs de l'activité :

On est en présence d'un exercice sur une suite arithmétique, et on recherche à faire les élèves employer le calcul littéral.

La première question invite les élèves à trouver le nombre de cercles à la 6e étape, en ayant pour modèle les trois premières. Ils doivent donc soit trouver la règle générale permettant de passer d'une figure à la suivante, soit représenter cette évolution. Comme le nombre de figures à représenter est petit, on suppose qu'ils vont opter pour le dessin. La séparation de l'étude en étude de la rangée supérieure puis inférieure nous semble superflue. [...]

Pour ceux qui n'auraient pas pensé à utiliser les lettres, l'énoncé les invite explicitement à le faire.

Après la DVP, une dyade a proposé un écrit non-réflexif, six dyades ont rédigé un écrit pré-réflexif et cinq dyades ont présenté une pensée réflexive. Voici un extrait du second écrit de la dyade 9, qui présente dans ce second écrit des habiletés réflexives, avec plusieurs « en effet » justificatifs :

Au collège, l'introduction au calcul littéral est toujours un obstacle. En effet, la lettre (ici "n") est un objet très abstrait au départ. Il est prévisible qu'il sera plus facile de raisonner sur 6 ou 11 que sur n. En effet, les élèves rencontrent des

⁶ Nous avons regroupé ces deux niveaux en un seul car les critères de démarcation entre réflexif et quasi-réflexif proposés par Roy s'appuient essentiellement sur le fond du discours (relativement au paradigme socio-constructiviste) ; cette distinction est donc difficilement transposable à notre contexte.

paramètres, des variables et des inconnues sans même en concevoir la distinction clairement, pour eux il s'agit de lettres, et le sens mathématique qu'il y a derrière n'est pas évident. [...]

L'unique écrit non-réflexif, proposé après la discussion, provient de la dyade 6. Cette dernière propose ici une simple description du changement de statut de la lettre, sans explicitation ni explication supplémentaire :

Dans les 2 premières questions le numéro de la figure est un paramètre (fixé) et le nombre de cercles une inconnue. Tandis que dans les 2 dernières questions, en passant à la généralisation, le numéro de la figure change de rôle pour devenir une variable.

A titre de comparaison, nous donnons ci-dessous le premier écrit proposé par cette même dyade 6. Nous avons considéré cet écrit comme pré-réflexif. En effet, les étudiants y ont produit un discours explicatif, essentiellement focalisé sur les objectifs de l'activité. Ils n'ont en revanche pas abordé les potentielles difficultés d'élèves à réaliser les tâches demandées. Ces éléments sont donc attendus au niveau du second écrit. Il est délicat d'étayer des éléments qui viennent éclairer cette baisse apparente du niveau de réflexivité : une hypothèse serait que toute l'attention des étudiants a été mobilisée par l'application des distinctions conceptuelles introduites lors de la DVP et dont la compréhension est encore fragile (la dyade crée la notion de "paramètre fixé").

**) Les parties a et b sont des cas particuliers dont l'étude sert à pousser l'élève à émettre une conjecture pour le cas général demandé aux questions c et d.*

**) On cherche à leur faire travailler l'écriture d'une expression littérale de manière algébrique (en fonction de n).*

Le cadre numérique des 2 premières questions leur sert de base pour faire la transition avec l'algébrique.

**) Certains élèves dessineront sûrement toutes les figures jusqu'à la 6 avant de voir le lien direct entre le numéro de la figure et le nombre de cercles associés. Pour les faire jusqu'à la 11 ce sera certainement plus compliqué et laborieux et [ils] voudront trouver un truc plus rapide.*

**) La subdivision des questions permet une meilleure appréhension du problème. Pour chaque partie (sup ou inf) [de la figure] la relation avec le numéro de la figure est plus évident[e] (on ajoute 2 ou 1) alors que pour le tout il y a deux opérations (x^2 et $+3$).*

La figure 3 ci-après résume et regroupe l'évolution des styles de pensée des étudiants au cours de l'expérimentation. On peut y voir l'évolution du niveau de réflexivité de la classe et la construction d'une pensée réflexive dans les écrits des étudiants. La proportion d'écrits réflexifs reste cependant faible jusqu'à la fin de l'activité.

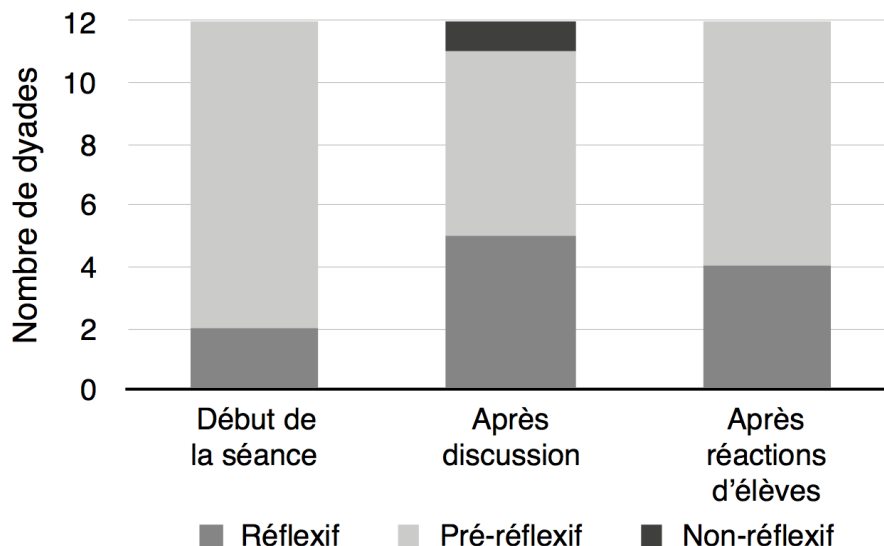


Figure 3 : Evolution de la réflexivité

Analyse du contenu selon la typologie NED

Pour répondre à la question de l'apprentissage des contenus épistémologiques et didactiques par les étudiants, le *contenu* des écrits a été analysé à partir d'une typologie spécifique à l'étude de l'activité proposée, que nous nommons typologie *NED*.

- Nous notons *N* une *analyse non critique*, c'est-à-dire une analyse où les étudiants ne présentent pas de recul sur l'activité. Dans l'analyse *a priori* (écrits 1 et 2), une analyse *N* ne relèvera pas d'erreurs possibles, de difficultés, ne critiquera pas la façon dont l'activité est construite ou présentée. Une analyse *a priori* non-critique voit le plus souvent la variable comme transparente pour les élèves et n'évoque pas de difficulté potentielle. Dans l'analyse *a posteriori* (écrit 3, après présentation des réactions d'élèves), une telle analyse se restreint à discourir sur les difficultés rencontrées sans faire de lien avec la situation d'introduction de la variable. Nous coderons *N* une analyse ne renvoyant à aucun des autres types d'analyse présentés ci-dessous.
- Nous notons *E* une *analyse épistémologique*, c'est-à-dire une analyse témoignant d'un recul par rapport à la connaissance visée (la notion de variable), en lien ou non avec son apprentissage. L'analyse épistémologique peut se référer aux difficultés conceptuelles relatives à la variable en relation avec ses dimensions d'indétermination et de généralité, à savoir les problèmes de représentation, de référence ou de conceptualisation. Lorsque le lien avec l'apprentissage est effectué, ceci revient à identifier l'obstacle épistémologique (Brousseau, 1983) sous-jacent à l'indéterminée en algèbre.
- Nous notons *D* une *analyse didactique*, c'est-à-dire témoignant d'un recul des étudiants par rapport à la façon dont l'activité est construite et menée pour que les élèves atteignent les apprentissages visés. Une telle analyse peut par exemple mettre en avant la formulation des questions, le rôle de l'enseignant ou l'insertion de l'activité dans un curriculum. Ceci peut conduire à identifier l'obstacle « strictement » didactique (Brousseau, 1983), lié aux modalités d'enseignement de la notion d'indéterminée (au niveau de l'entrée dans le calcul littéral) et non à une difficulté intrinsèque à la notion.
- Enfin, une analyse *épistémo-didactique*, notée *ED*, est un écrit regroupant analyses didactique et épistémologique.

Les analyses *E* et *D* sont raffinées en fonction de l'utilisation par la dyade d'étudiants de cadres épistémologiques ou didactiques ; nous distinguons ainsi :

- E_1 et D_1 renvoient à des analyses outillées respectivement par des cadres épistémologiques (texte de Frege, référence aux quantificateurs...) ou didactiques (notions d'obstacle, de variable didactique, de contrat, de prérequis...). C'est le plus souvent dans ces cas qu'une reformulation de l'énoncé peut être proposée par les étudiants.
- E_0 et D_0 renvoient au contraire à des analyses « naïves », ne mobilisant pas de cadres épistémologiques ou didactiques, avec l'utilisation d'un vocabulaire moins précis : « blocage », « raisonnement », « confusion », « concret », « compliqué »...
- Une équipe d'étudiants présentant une analyse *ED* peut ne mobiliser de cadres que pour l'une de ces deux dimensions, voire aucune. On distingue donc E_0D_0 , E_0D_1 , E_1D_0 , et E_1D_1 .

En particulier, nous escomptons une augmentation du nombre d'analyses comportant une composante de type E_1 à l'issue de la DVP.

Nous avons en outre noté spécifiquement par une étoile * (E^* ou D^*) si l'analyse produite par les étudiants témoigne d'une prise en compte des obstacles épistémologique ou didactique. Nous n'attendons pas de référence explicite aux notions d'obstacle, car nous supposons en effet ces

connaissances théoriques du champ de la didactique comme étant mobilisables (par le formateur, dans un dialogue avec la classe) mais non directement disponibles par les étudiants en autonomie, au niveau d'une première année de Master de formation des enseignants. Pour noter l'analyse comme prenant en compte l'obstacle, nous attendons des étudiants qu'ils identifient l'usage de la lettre en tant que désignant un donné arbitraire mais fixé (obstacle épistémologique) au sein d'un dispositif didactique inapproprié à son introduction (obstacle didactique) comme étant des *causes* des difficultés des élèves, dans l'état actuel de leurs connaissances. Le dénombrement des réponses non étoilées nous permet ainsi de quantifier la potentielle illusion de transparence qu'ont les étudiants quant à la notion de variable.

Enfin, les niveaux de réflexivité ont été croisés avec la typologie NED de façon à tester notre hypothèse selon laquelle le niveau de réflexivité est corrélé avec l'aptitude à conduire des analyses épistémologiques des savoirs mathématiques. Malgré les forts liens entre forme et fond dans les discours, nous avons volontairement cherché à distancier le plus possible les analyses NED de l'étude de la réflexivité afin de pouvoir mettre en évidence d'éventuelles corrélations.

Les résultats quant à l'analyse du contenu sont présentés dans le tableau 1 ci-après. Celui-ci résume l'évolution du contenu des écrits des étudiants. On peut y voir l'évolution générale du groupe-classe, depuis des analyses majoritairement axées sur les aspects didactiques avant la DVP, en passant par des analyses plutôt focalisées sur les aspects épistémologiques après la DVP, pour finir avec des analyses dispersées, prenant diversement en compte ces deux aspects, à la fin du dispositif. Les nombres entre parenthèses dans le tableau 1 correspondent au nombre de dyades ayant relevé un des obstacles dans leur analyse (analyse E_1^* ou D_1^*).

Plus spécifiquement, avant la discussion, une part importante d'étudiants - neuf dyades sur douze - a proposé une analyse *didactique* D de l'activité (quatre écrits D_0 , cinq écrits D_1 dont un D_1^*), tandis que seules deux dyades ont présenté une analyse *épistémologique* (deux E_0). En outre, la dyade 6 a proposé une analyse *non-critique* N . A titre d'exemple, l'écrit proposé initialement par la dyade 12 (voir ci-dessus) a été codé comme une analyse D_0 par la phrase « La séparation de l'étude en étude de la rangée supérieure puis inférieure nous semble superflue ». Voici en outre un extrait de l'écrit de la dyade 4, qui a proposé dès le premier écrit une analyse D_1^* , mettant en lumière l'obstacle didactique dans l'activité :

[...] Enfin, désigner par n un entier dès l'activité d'introduction retire l'idée principale que doivent découvrir les élèves. Les questions c et d agissent comme des facteurs confusants alors que l'idée d'introduire une lettre dans des calculs devrait être présentée comme une solution au problème et donc comme un apport positif.

Après la DVP, comme attendu, les dyades ont produit des analyses prenant bien plus en compte les considérations épistémologiques relatives à la variable dans l'activité (onze sur douze), avec un écrit E_0 , cinq écrits E_1 (dont un E_1^*), quatre écrits E_1D_0 et un E_1D_1 . La dyade 6 a conservé une analyse N dans le second écrit (sa production est retranscrite plus haut).

Voici un extrait de l'écrit de la dyade 3, qui a proposé après la DVP une analyse E_1D_0 :

[...] Dans un certain sens, le n est fixé, les élèves ne perçoivent pas forcément le caractère "variable". On ne trouve pas dans les questions c) et d) des expressions comme « pour n importe quel n », « quel que soit n ». S'agissant d'une activité introductive, il s'agirait alors pour le professeur de bien mettre l'accent sur le fait que les propriétés énoncées aux questions c) et d) sont vraies pour n importe quelle valeur de n . [...]

Nous avons codé cet écrit E_1 notamment par la présence du « pas », souligné par les étudiants, qui indique le manque dans l'activité d'une formulation adaptée aux enjeux épistémologiques (deux sont présentées à titre d'exemple par les étudiants). De même, la dernière phrase de cet extrait met l'accent sur le rôle de l'enseignant, sans toutefois mobiliser de cadre didactique ou de vocabulaire spécifique, nous avons donc aussi codé ce passage D_0 .

Après la présentation des réactions d'élèves, les étudiants ont fourni des analyses très variées, cinq d'entre-elles étant épistémo-didactiques. Nous avons ainsi compté deux écrits E_0 , deux écrits E_1

(dont un E_1^*), un écrit D_0 , deux écrits D_1^* , un écrit E_0D_0 , deux écrits E_1D_0 et deux écrits E_1D_1 (dont 1 $E_1^*D_1$ et 1 $E_1D_1^*$). Même si aucune dyade ne parvient à identifier simultanément l'obstacle épistémologique et l'obstacle didactique, cela représente cinq dyades prenant en compte au moins un des deux obstacles dans l'activité. Voici par exemple un extrait du troisième écrit de la dyade 9, qui a proposé une analyse E_1^* :

Comme cela était prévisible, les élèves ont beaucoup de mal à concevoir n comme un nombre quelconque. [...] ils s'imaginent qu'un nombre déterminé se cache derrière ce n . [...] On est toujours ramené à ce problème que la lettre peut jouer des rôles différents, que les élèves ne perçoivent pas. [...]

Niveau de l'analyse	Début de la séance : première analyse a priori	Après discussion : seconde analyse a priori	Après présentation des réactions d'élèves : analyse a posteriori
N	1 dyade	1 dyade	Aucune dyade
E_0	2 dyades	1 dyade	1 dyade
E_1 (dont E_1^*)	Aucune dyade	5 dyades (1)	3 dyades (1)
D_0	4 dyades	Aucune dyade	1 dyade
D_1 (dont D_1^*)	5 dyades (1)	Aucune dyade	2 dyades (2)
E_0D_0	Aucune dyade	Aucune dyade	1 dyade
E_1D_0 (dont $E_1^*D_0$)	Aucune dyade	4 dyades (0)	2 dyades (0)
E_1D_1 (dont $E_1^*D_1$ / dont $E_1D_1^*$)	Aucune dyade	1 dyade (0 / 0)	2 dyades (1 / 1)

Tableau 1 : Evolution des contenus des écrits sur la séance

Croisements des niveaux de réflexivité et de la typologie NED

Les résultats quant au croisement des deux analyses sont présentés dans le tableau 2 ci-dessous. Celui-ci retrace le suivi de chaque dyade, selon les deux types d'analyse (la réflexivité et le contenu selon la typologie NED). On peut y voir que les dyades ayant produit les meilleures analyses, c'est-à-dire mobilisant les cadres théoriques (E_1 et D_1) ou prenant en compte un obstacle (E_1^* et D_1^*), sont généralement les dyades ayant présenté des habiletés réflexives d'ordre supérieur dans au moins un des trois écrits. Les habiletés réflexives et leur évolution semblent donc en partie liées avec la progression des analyses. Nous remarquons par exemple que la dyade 6 est la seule à avoir produit un écrit non-réflexif (après la discussion) mais aussi la seule à avoir produit des écrits non-critiques quant à l'activité (avant et après la discussion). Reprenons ici le second écrit de la dyade 6, à la fois non-critique et non-réflexif :

Dans les 2 premières questions le numéro de la figure est un paramètre (fixé) et le nombre de cercles une inconnue. Tandis que dans les 2 dernières questions, en passant à la généralisation, le numéro de la figure change de rôle pour devenir une variable.

Outre représenter une simple description du changement de statut de la lettre, il n'y a dans cet écrit très court aucune verbalisation d'une dimension problématique de ce changement pour l'apprentissage ou l'enseignement de la notion de variable, ou pour la mise en place de cette activité en classe. En outre, parmi les cinq dyades à avoir relevé un des deux obstacles de l'activité, quatre ont montré dans au moins un des écrits une pensée réflexive : trois (dyades 4, 10 et 12) au moins dans le dernier écrit et une (dyade 9) dans le second, où elle avait déjà mis en lumière l'obstacle

repris ensuite dans l'écrit suivant. La qualité de l'analyse de la dyade 9 dans le second écrit peut d'ailleurs expliquer son apparente "baisse de réflexivité" dans le troisième écrit : l'analyse de la dyade 9, codée E_1^* dès le second écrit, a été confirmée par les réactions d'élèves. La dyade 9 a ainsi, dans le troisième écrit, fourni des énoncés explicatifs de ces réactions, à la lumière de l'analyse qui avait été proposée dans leur écrit précédent. En revanche, la dyade 2, qui n'a pas manifesté d'habiletés de pensée réflexive dans ses écrits au cours de la séance, a produit après les réactions d'élèves une analyse $E_1^*D_1$ dont voici un extrait :

Comme attendu, les élèves ont du mal à comprendre la signification de "n" et sa signification dans le cas indéterminé. [...] Lorsque l'enseignant tente de les amener à modéliser le problème à l'aide de la variable indéterminée, les élèves se retrouvent face à un obstacle : « E2 figure n ? Il n'y a pas de figure n. »

On pourrait guider l'activité en insistant sur l'aspect algorithmique du problème. Pour ce faire, il faudrait [que les élèves] explicitent la formule de passage d'une figure à l'autre à travers la rédaction d'un algorithme explicite

L'écrit est explicatif, et se focalise sur les causes de difficulté (« la signification de "n" ») et les objectifs de l'activité (« modéliser le problème »). Le dernier paragraphe de l'extrait est à ce titre éclairant, en présentant *comment* « insist[er] sur l'aspect algorithmique du problème » (explication), mais pas *pourquoi* le faire (justification). En revanche, leur analyse est codée $E_1^*D_1$: la première moitié de l'extrait (jusqu'à la citation d'élève) renvoie pour nous à une analyse E_1^* , la seconde à une analyse D_1 .

Ecrit	Avant discussion		Après discussion		Après présentation des réactions d'élèves	
	Réflexivité	Contenu NED	Réflexivité	Contenu NED	Réflexivité	Contenu NED
Dyade 1	Pré-R	E_0	Pré-R	E_1	Pré-R	D_0
Dyade 2	Pré-R	D_1	Pré-R	E_1D_1	Pré-R	$E_1^*D_1$
Dyade 3	Pré-R	D_0	Pré-R	E_1D_0	R	E_1
Dyade 4	Pré-R	D_1^*	R	E_1	R	$E_1D_1^*$
Dyade 5	Pré-R	D_1	Pré-R	E_1	Pré-R	E_0D_0
Dyade 6	Pré-R	N	Non-R	N	Pré-R	E_0
Dyade 7	Pré-R	D_0	Pré-R	E_1D_0	Pré-R	E_1D_0
Dyade 8	R	E_0	R	E_1D_0	Pré-R	E_1D_0
Dyade 9	Pré-R	D_0	R	E_1^*	Pré-R	E_1^*
Dyade 10	Pré-R	D_1	R	E_1	R	$E_0D_1^*$
Dyade 11	R	D_1	Pré-R	E_1D_0	Pré-R	E_1
Dyade 12	Pré-R	D_0	R	E_0	R	D_1^*

Tableau 2 : Suivi de chaque dyade selon les deux analyses

Discussion des résultats

Tout d'abord, le *question-gramme* comme proposé par Winslow et al. (2013) se révèle être un outil d'analyse et de conception efficace pour les DVP. Comme l'a montré notre étude chronogénétique et topogénétique, la comparaison entre les question-grammes *a priori* et *a posteriori* nous a permis d'identifier des points d'achoppement de la discussion et de proposer des pistes d'évolutions du dispositif, ce qui souligne la pertinence d'une modélisation d'une DVP par un question-gramme. Cet outil présente cependant des limitations en l'état, par exemple pour saisir la dynamique de la DVP lorsque les étudiants reviennent sur un concept mathématique déjà évoqué pour l'approfondir. En fait, l'ordre et le temps de traitement des différents contenus de la discussion n'apparaissent pas. À cet effet, nous avons tenté de rester proches de la méthodologie initialement proposée par ces auteurs en utilisant des doubles flèches pour mettre en valeur les mises en relation effectuées par les étudiants. Une autre possibilité, peut-être davantage ergonomique, serait d'augmenter la taille graphique d'un item en fonction de son temps de traitement par la classe.

Notre adaptation de la typologie de Roy a permis de souligner que la tâche d'analyse didactique induit, ainsi que nous l'avions supposé, un discours au moins pré-réflexif chez les étudiants. Le discours réflexif reste cependant encore diffus et mal assuré chez les étudiants, qui produisent le plus souvent des écrits d'ordre pré-réflexif. Par ailleurs, nous n'avons observé qu'un faible gain de réflexivité dans les manifestations des habiletés de pensée des futurs enseignants au cours de l'expérimentation, c'est-à-dire sur un court terme. Cela est cohérent avec la littérature préexistante, les études menées sur les DVP ayant en général corrélé ce gain à l'ordre du moyen terme (Roy, et al. (2016, 2014). Le léger gain observé pourrait s'expliquer par le choix des documents : le texte de Frege fournit des distinctions conceptuelles qui favoriseraient les interprétations et donc le discours justificatif alors que la perplexité des étudiants face à la variable, difficulté passée en général inaperçue des étudiants dans leur analyse *a priori*, produirait une forme de conflit cognitif à même de favoriser une augmentation de réflexivité.

Pour ce qui est du croisement des analyses sur la forme (réflexivité) et sur le fond (contenu), il est possible, à la lumière de nos analyses, de proposer une hypothèse selon laquelle le niveau de réflexivité présenté par les étudiants dans leurs écrits a un lien avec leur compréhension de la tâche d'analyse didactique *a priori* et *a posteriori*. En effet, l'objectif visé d'une analyse didactique comme celle que nous avons proposée est, par une démarche de compréhension et d'analyse, de dépasser la simple description de la tâche donnée aux élèves. Outre une analyse mathématique, l'analyse *a priori* en appelle à une certaine connaissance des phénomènes didactiques et à la fonction prédictive des théories didactiques : les régularités observées dans les phénomènes d'enseignement-apprentissage permettent de faire des prédictions. L'analyse *a posteriori* vise quant à elle à interpréter les phénomènes observés en prenant du recul grâce à l'épistémologie et aux concepts de la didactique, de façon à fournir des facteurs explicatifs. Les justifications des thèses et hypothèses avancées sont ainsi fondées sur les cadres théoriques et les résultats antérieurs de la recherche. On voit ainsi que l'analyse didactique *a priori* autant que celle *a posteriori* nécessite un discours de type explicatif et justificatif, donc des niveaux élevés de réflexivité, au niveau de l'identification des causes des erreurs et des difficultés. Des écrits explicatifs ou justificatifs, c'est-à-dire plus réflexifs que simplement descriptifs, sont donc plus pertinents. Parallèlement, il est naturel de considérer que la qualité du contenu de l'analyse didactique dépend de la compréhension du contenu d'apprentissage : si les étudiants ont compris les enjeux au niveau de la variable, leur analyse sera de meilleure qualité. Dans les deux cas, il s'agit bien d'une compréhension des enjeux, d'une part de la tâche (quels enjeux de l'analyse didactique pour les enseignants ?) et d'autre part

des contenus visés par la tâche (quels enjeux didactiques à introduire la notion de variable ?). Bien entendu, ces enjeux sont très liés, comme en témoignent les styles de pensée réflexive chez les dyades ayant fourni les meilleures analyses : une analyse pertinente présentera à la fois une plus grande réflexivité et une meilleure compréhension des notions. La mise en place d'un discours explicatif indique en effet une appropriation des concepts didactiques de conception erronée et d'obstacle, dans l'action, *en acte* comme dirait Vergnaud (1990). Faire évoluer le niveau de réflexivité en un discours justificatif nécessite une forme prédicative de la connaissance des phénomènes didactiques, en l'occurrence une discussion des obstacles épistémologique et didactique à travers leurs caractéristiques, c'est-à-dire leur prise en compte en tant que tels. On comprend ainsi qu'à ce stade de l'apprentissage des théories didactiques un niveau réflexif des analyses didactiques soit encore peu observé chez les futurs enseignants.

Comme on peut s'y attendre, les niveaux de réflexivité et la qualité conceptuelle des analyses ne s'avèrent cependant pas complètement équivalentes : des décalages peuvent ainsi se manifester, comme ceux représentés par la dyade 2 et dans une moindre mesure la dyade 12. En effet, la dyade 2 semble avoir compris les contenus visés par la séquence d'enseignement, mais aborde la tâche d'analyse didactique en termes de simple explication. A l'inverse, la dyade 12, présentant pourtant une pensée réflexive dès le second écrit, pourrait proposer une analyse plus pertinente si elle avait mieux compris et mobilisé les contenus épistémologiques visés dans la séquence.

Au niveau des contenus, les faibles résultats obtenus dans le premier écrit chez des étudiants pourtant déjà familiers de la didactique et de l'épistémologie des mathématiques (environ 6 mois de formation avant notre séance) exposent la *forte illusion de transparence à propos du calcul littéral*. En effet, avant la DVP, seules deux dyades sur douze mentionnaient les aspects épistémologiques pouvant représenter un frein à l'apprentissage de la variable. De même, au niveau didactique, moins de la moitié des dyades mobilisait une notion didactique dans le but d'analyser la dimension problématique de l'activité proposée aux élèves ; seulement une dyade a rapidement décelé l'obstacle didactique de l'introduction de la variable dans l'activité. Même si la DVP a permis aux étudiants d'explorer plus avant la notion de variable et de leur fournir des outils (presque tous ont mobilisé des éléments précis de la discussion), seule une dyade a identifié l'obstacle épistémologique après la DVP, pourtant axée sur les difficultés épistémologiques que pouvait apporter la notion de variable ; l'illusion de transparence apparaît ainsi comme très tenace. Ce n'est qu'après les réactions d'élèves que les étudiants ont mis en lien aspects épistémologiques et didactiques (fort taux d'analyses *ED*) et que plusieurs dyades ont repéré un des obstacles dans l'activité (trois dyades supplémentaires repèrent un obstacle).

Un travail réflexif semble alors nécessaire dans la formation des enseignants de mathématiques : le niveau initial du groupe quant à cette activité, tant du point de vue réflexif que conceptuel, était plutôt faible. En cela, notre dispositif apparaît prometteur, permettant une amélioration de la réflexivité comme une meilleure compréhension des obstacles de l'activité présentée. Cependant, la trop faible identification des obstacles épistémologique et didactique d'une part, et la grande variabilité dans la qualité des analyses produites par les étudiants d'autre part renvoient à une nécessité d'amélioration globale du dispositif. À ce titre, nous suggérons notamment la *nécessité d'une institutionnalisation* au cours de la discussion : on peut faire l'hypothèse que de telles phases, parfois demandées explicitement par les étudiants (voir annexe 2, questions Q^* et Q_1^*), permettraient d'obtenir de meilleurs résultats au moins au niveau des contenus épistémologiques sur lesquels porte la discussion. Nous avons pris le parti de limiter le plus possible l'apport de l'animateur pour rester proche de la démarche des discussions inscrites dans le cadre de l'ADPM. Toutefois, à la suite de notre expérimentation, des phases d'institutionnalisation, au cours desquelles l'animateur reprend la posture du professeur, semblent nécessaires pour faire des mises au point sur les contenus épistémologiques comme la distinction entre inconnue, variable et indéterminée, la construction de l'indéterminée et l'obstacle inhérent. Une telle mise au point sur ces contenus complexes permettrait peut-être de « débloquer » certaines étapes de la DVP. Ces éléments d'institutionnalisation auraient alors pu correspondre à différentes réponses de la question Q^* « Quelles implications didactiques sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire ? » du question-

gramme *a priori* (annexe 2), objectif de la séquence. En ce sens, l'institutionnalisation ne constitue pas un processus didactique qui va à l'encontre des principes de l'ADPM ; cependant, il s'agit alors de marquer le changement de contrat au sein du système didactique, par exemple par des locutions comme « Je vais vous communiquer le point de vue des épistémologues : ces derniers s'accordent à dire que... ». Enfin, il s'avère important et opportun de conclure notre séquence d'apprentissage par une explicitation des deux types d'obstacle de cette activité, en relation avec les caractéristiques générales de ces obstacles selon Brousseau : même si la quasi-totalité des dyades a considéré simultanément ou successivement les aspects épistémologiques et didactiques, rien ne permet d'affirmer, dans les écrits, que la distinction entre les deux obstacles soit opérée par les étudiants. Comme nous l'avions anticipé, les notions d'obstacle épistémologique et didactique ne figurent pas parmi les connaissances didactiques disponibles.

Il convient enfin de mentionner les limites de cette recherche. Outre les limitations déjà évoquées dues aux représentations sous forme de question-gramme, il faut noter que cette étude est localisée sur une seule classe. Il serait nécessaire d'expérimenter sur un échantillon plus vaste pour consolider nos résultats. Un travail similaire, réalisé sur un temps plus long, permettrait aussi de mesurer la stabilité de l'amélioration de la réflexivité et l'apprentissage des contenus sur le long terme.

Conclusion générale et perspectives

Notre dispositif, fondé sur l'ADPM en tant que praxis pédagogique et renforcé du point de vue didactique par les outils de la TAD, a permis de mettre en évidence une augmentation à court terme des habiletés réflexives des étudiants en lien avec une meilleure compréhension des obstacles à l'enseignement de la notion de variable. Ceci vient conforter notre hypothèse sur la pertinence d'enseigner la didactique et l'épistémologie des mathématiques à travers une approche qui favorise le questionnement et le développement d'une pensée réflexive et critique. En outre, cette approche est cohérente et entre en résonance avec la conception générale de l'épistémologie en tant que science dédiée à l'étude réflexive et critique des conditions de production des savoirs.

L'usage des question-grammes a permis, dans certaines limites, de favoriser la médiation des connaissances épistémologiques, d'une part, et d'analyser la qualité de la DVP, d'autre part, à travers l'étude de sa chronogenèse et de sa topogenèse. Il s'agit là d'une première approche : la modélisation sous forme de PER offre d'autres outils que nous nous proposons d'exploiter dans des prolongements de ce travail. Nous pensons notamment à la dialectique de l'individuel et du collectif (Bosch, 2017) pour approfondir les interactions entre réflexion individuelle des étudiants et discussion en classe, ainsi que la dialectique des médias et des milieux (Chevallard, 2008) pour étudier la dynamique de la DVP lorsque l'animateur intervient en introduisant, sous différentes formes (document, complément d'information, etc.), des éléments d'épistémologie des mathématiques dans le milieu. En effet, le dispositif pédagogique expérimenté montre des faiblesses du point de vue de sa mésogenèse (constitution du milieu) : le texte de Frege (unique média) s'avère insuffisant pour établir un rapport au savoir (pour utiliser les termes de la TAD) stabilisé chez les étudiants, à l'issue du processus d'étude, ce qui vient renforcer la nécessité de l'institutionnalisation. A contrario, l'on peut faire l'hypothèse qu'une dialectique fertile des médias et des milieux aurait permis de donner davantage d'autonomie aux étudiants (en termes de TAD, d'augmenter leur *topos*).

Enfin, le dispositif de formation a permis de faire émerger les conceptions d'enseignants en formation initiale relativement au calcul littéral : pour la plupart, ces derniers ne repèrent pas les obstacles épistémologique et didactique présents dans l'activité étudiée en classe. Ceci est cohérent avec les observations de Coppé et al. (2016) sur l'usage parfois problématique de situations d'introduction de la lettre en algèbre par les enseignants du secondaire et vient souligner la nécessité d'une formation didactique et épistémologique appropriée. Pour ce faire, l'utilisation croisée des PER de la TAD et des DVP de l'ADPM dans la recherche en didactique des mathématiques offre des pistes prometteuses, que ce soit pour les savoirs algébriques ou d'autres

savoirs mathématiques ou situations d'enseignement-apprentissage en mathématiques qui exigent à la fois une réflexion didactique et épistémologique dans une dynamique de recherche.

Bibliographie

- Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2.3), 241-286.
- Assude, T., Coppé, S. & Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au Collège : atomisation et réduction. In L. Coulange et al. (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire - Bilan et perspectives*, (p. 41-62). Numéro spécial hors-série de la revue Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble : la Pensée Sauvage.
- Astolfi, J.-P. (2011). Quel fondement épistémologique pour la pratique enseignante. In Maubant, P. et Martineau, S. (dir.) *Fondements des pratiques professionnelles des enseignants*, (p. 285-301). Ottawa: Les Presses de l'Université d'Ottawa.
- Bardini, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot - Paris VII.
- Bardini, C. (2008). *Inconnues, variables, paramètres, "ce n'est pas donné" pour les élèves ! Un regard didactique sur la question de l'"indéterminé"*. Communication au Séminaire d'Epistémologie et Histoire des Idées Mathématiques, IHP, Paris, France.
- Bernard, A., Génin, A.-S., & Mayrargue, A. (2008). *Proposition pour des formations en épistémologie et histoire des disciplines d'enseignement scientifiques et technologiques, dans le cadre des masters et parcours de masters "enseignement"*. Groupe académique de pilotage de la mise en place de masters "enseignement".
- Bosch, M. (2017). La prise en compte du collectif dans l'analyse des processus d'étude selon la théorie anthropologique du didactique. Volume 1. *Actes de la 18^{ème} École d'été de didactique des mathématiques*. Brest.
- Bosch, M. & Gascon, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic. In Bikner-Ahsbabs, A. & Prediger, S. (dir.), *Networking Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (p. 67-83). Cham : Springer.
- Bikner-Ahsbabs, A., & Prediger, S. (2010). Networking of Theories – An Approach for Exploiting the Diversity of Theoretical Approaches. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories in Mathematics Education* (p. 483-506). New York: Springer.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes didactiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 4, 165-198.
- Chevallard, Y. (2001). Les TPE comme problème didactique. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2001* (p. 177-188). Paris : IREM de Paris 7 et ARDM.
- Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Communication aux 3es Journées d'étude franco-québécoises (Université René-Descartes Paris 5, 17-18 juin 2002). In S. Maury S. & M. Caillot (dir.), *Rapport au savoir et didactiques* (p. 81-104). Paris : Éditions Fabert.
- Chevallard, Y. (2005). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In Bosch, M. (dir.) *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Mathematic Education* (CERME 4) (p. 21-30). Barcelona: FUNDEMII-QS.
- Chevallard, Y. (2007) *Séminaire PLC2, année universitaire 2006-2007*. Récupéré de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Seminaire_2006-2007.pdf
- Chevallard, Y. (2008). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. In G. Gueudet & Y. Matheron (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2007* (p. 344-366). Paris : IREM de Paris 7 et ARDM.
- Chevallard, Y. (2012). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counterparadigm. *Regular lecture presented in the 12th International Congress on Mathematical Education (ICME-12)*. July 2012, 8–15, COEX Seoul (Korea).

- Chevallard, Y. et Cirade, G. (2011). Les ressources manquantes comme problème professionnel. In Gueudet, G. et Trouche, L. (dir.) *Ressources vives: le travail documentaire des professeurs en mathématiques*, (p. 41-55). Rennes: presses universitaires de Rennes.
- Coppé, S. Grugeon, B. & Pilet, J. (2016). Conditions pour diffuser des situations issues de la recherche en didactique des mathématiques : l'exemple du carré bordé. *Petit x 102*, 57-80.
- Daniel, M.-F., Lafortune, L., Pallascio, R. et Sykes, P. (1996). *Philosopher sur les mathématiques et les sciences*. Québec : Le loup de gouttière.
- European Commission. (2007). *Science education now: A renewed pedagogy for the future of Europe*. Brussels: European Commission.
- Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London : Falmer Press.
- Frege, G. (1904). *Was ist eine Funktion?* In Festschrift L. Boltzmann gewidme zum 60. Geburtstag, Leipzig A Barth, 1904. Traduit (Qu'est-ce qu'une fonction?) in Gottlob Frege, *Ecrits logiques et philosophiques* (Paris : Seuil, 1971), traduction et introduction de Claude Imbert, 163.
- Gueudet, G. et Trouche, L. (2011). Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. In Gueudet, G. et Trouche, L. (dir.) *Ressources vives: le travail documentaire des professeurs en mathématiques*, (p. 57-74). Rennes : presses universitaires de Rennes.
- Hausberger, T. (2015). Training teacher students to use history and epistemology tools : theory and practice on the basics of experiments conducted at Montpellier University. In *History and Epistemology in Mathematics Education : Proceedings of the Seventh European Summer University*, 221-236. Danish School of Education, Copenhagen, Denmark.
- Hausberger, T. et Roy, A. (2018). L'interdisciplinarité mathématiques-philosophie : un levier pour la formation des enseignants. *EMF2018*, Paris, France. pp.557-566.
- Lipman, M. (1995). Moral education, higher-order thinking and philosophy for children. *Early Child Development and Care*, 107, 61-70.
- Moyon M. (2012). Penser les mathématiques à travers leur épistémologie et leur histoire : un enjeu de/dans la formation des maîtres. In Dorier J.-L., Coutat S. (dir.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, 641–652). <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>
- Perrenoud, P. (1998). *Les réformes en éducation, leur impact sur l'école et sur la formation des maîtres dans le cadre du Réseau Éducation- Formation (REF)*, Communication au Symposium de Montréal, 25-26 septembre 1996.
- Roy, A. (2017). « Analyse des styles de pensée réflexifs de la discussion à visée démocratique et philosophique » Dans Jean-Pascale Simon et Michel Tozzi (dir.). *Paroles de philosophes en herbe*. Grenoble, UGA Éditions, 205-215.
- Roy, A. Lechasseur, C., Michel, M.-J. (2016). « Trois principales conditions pour intégrer des communautés virtuelles de recherche dans la classe de mathématiques au primaire durant le stage d'internat ». *Apprendre et enseigner aujourd'hui*, 5(2), 28-31.
- Roy, A, Lechasseur, C. et Michel, M.-J. (2014). « Conditions nuisibles à une réflexivité dans les pratiques enseignantes en mathématiques chez une stagiaire au primaire? ». *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques*, 204-210, Université du Québec à Montréal.
- Roy, A. (2010). « Vers un modèle didactique favorisant une pensée réflexive chez des étudiants-maîtres dans le domaine de l'éducation mathématique ». *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques*, 90-99, Université de Moncton.
- Roy, A. (2008). « Philosopher en mathématiques avec des futurs enseignantes et enseignants au primaire ». *For the learning of mathematics*, 28.3, 36-41.
- Roy, A. (2005). *Manifestations d'une pensée complexe chez un groupe d'étudiants-maîtres au primaire à l'occasion d'un cours de mathématiques présenté selon une approche philosophique*. Université du Québec à Montréal.
- Russell, B. (1903). *Principles of mathematics*. New York : Norton.
- Russell, B. (1908). Mr. Haldane on infinity. *Mind*, XVII-2, 238-242.
- Serfati, M. (1999). *La dialectique de l'indéterminé : de Viète à Frege et Russell*. In *La recherche de la vérité*, (p. 145-174). ACL - Les éditions du Kangourou.

Tupin, F. et Lenoir, Y. (2012). Vers la quête d'un équilibre entre instruire et socialiser. In Lenoir, Y. et Tupin, F. (dir.). *Les pratiques enseignantes entre instruire et socialiser: regards internationaux*, (p. 553-564). Québec : Les Presses de l'Université Laval.

Van der Maren, J.-M. (1995). *Méthodes de recherche pour l'éducation*. Montréal : Les Presses de l'Université de Montréal.

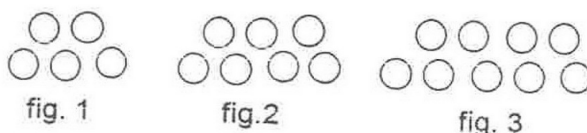
Vergnaud, G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2), 133-170.

Winslow, C., Matheron, Y., & Mercier, A. (2013). Study and Research Courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 267-284.

Annexes

Annexe 1 : documents distribués aux étudiants (récupérés de Bardini, 2008)

Soit le patron suivant:



a) Combien de cercles y'a-t-il:

- Dans la partie **supérieure** de la **figure n°6**?
- Dans la partie **inférieure** de la **figure n°6**?
- En **tout**, dans la **figure n°6**?

b) Combien de cercles y'a-t-il:

- Dans la partie **supérieure** de la **figure n°11**?
- Dans la partie **inférieure** de la **figure n°11**?
- En **tout**, dans la **figure n°11**?

c) Combien de cercles dans la partie supérieure de la **figure n° "n"**?

d) Combien de cercles en tout dans la **figure n° "n"**?

Annexe 1a : Activité d'introduction au calcul littéral, extraite d'un manuel scolaire

« Il n'y a donc pas de nombre variable ; l'absence de nom propre pour d'éventuels nombres variables le confirme [...] Mais ne désigne-t-on pas des nombres variables par "x", "y", "z" ? C'est une manière de parler en usage ; ces lettres, toutefois, ne sont pas des noms propres de nombres variables comme "2" et "3" sont des noms propres de nombres constants. Les nombres 2 et 3 se distinguent de manière effective et assignable ; mais comment distinguer les variables prétendument désignées par "x" et par "y" ? On ne saurait le dire. [...].

M.E.Czuber a tenté de remédier à quelques unes des difficultés que nous venons d'évoquer. Pour se libérer du temps, il interprète la variable comme un nombre indéterminé. Y aurait-il des nombres indéterminés ? Faut-il partager les nombres en déterminés et indéterminés ? Tout objet ne doit-il pas être déterminé ? Mais d'autre part, le nombre n n'est-il pas indéterminé ? Je ne connais pas le nombre n, "n" n'est le nom propre d'aucun nombre, ni déterminé ni indéterminé. [...]. On écrit la lettre "n" avec une intention de généralité. Et on suppose que cette lecture une fois remplacée par le nom propre d'un nombre, la proposition conditionnelle et la conséquence acquerront un sens. [...] On ne dira pas que "n" désigne un nombre indéterminé, mais qu'il indique de manière indéterminée des nombres. [...]

[...] l'expression "une variable prend une valeur" est tout à fait obscure. Une variable doit être un nombre indéterminé : comment donc un nombre peut-il prendre un nombre – car la valeur est évidemment un nombre ? Est-ce qu'un homme indéterminé prend, lui aussi, un homme déterminé ? [...] »

Citation de Frege extraite de Bardini, *Les piliers historiques et épistémologiques de l'indéterminé*, reprise de Serfati, *La dialectique de l'indéterminé, de Viète à Frege et Russell*, in *La recherche de la vérité*, 1999, Editions du kangourou.

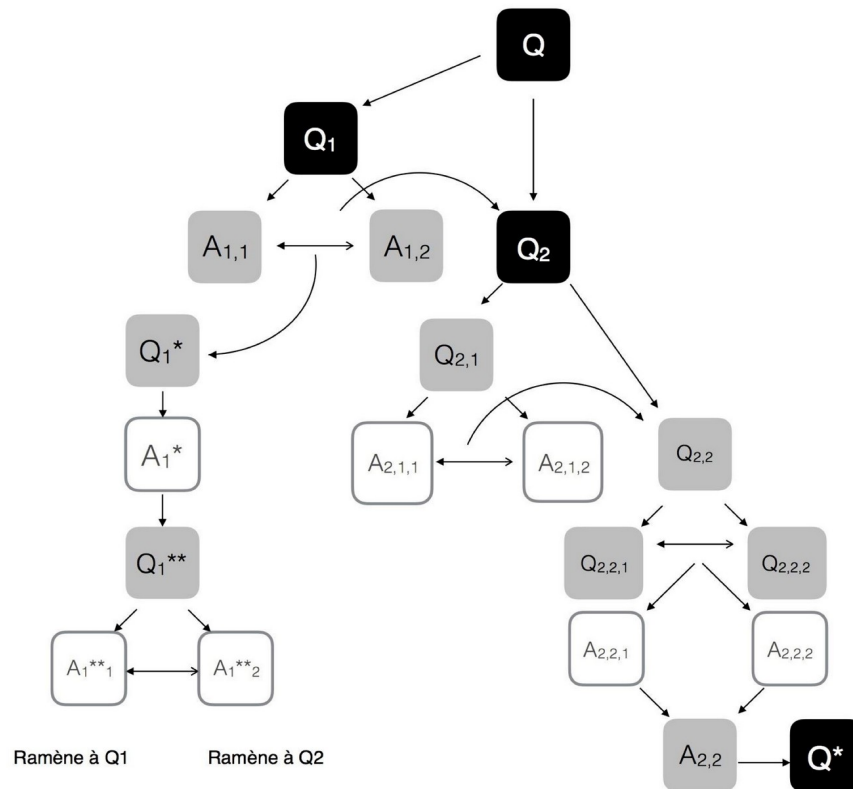
Annexe 1b : Texte de Frege, support à la DVP

E2 : Wow ! (faisant référence à la question b) Elle était facile celle-là. (Lisant maintenant la question c) Combien de cercles y'a-t-il dans la partie supérieure de la figure... ?
(l'élève fait face à l'expression "... la figure numéro "n"") Quoi ? (lance brusquement la feuille vers les deux autres élèves) O.K. Que quelqu'un d'autre le fasse !
E1 : (lit la question) Combien de cercles... ? [...]
E1 : Qu'est ce que ça veut dire ?
E2 : Je ne sais pas (jette son crayon sur la feuille)
E1 : Quelle est la figure n ?
E2 : (s'adressant à l'enseignant) Qu'est n ? Nous ne savons pas...
Enseignant : (tourne la feuille à l'endroit et lit à haute voix) Combien de cercles y'a-t-il dans la partie supérieure de la figure numéro n ?
E3 : (reprenant sa question) Qu'est n ?
E1 : n est la quatorzième lettre de l'alphabet, n'est-ce-pas ?
E2 : (adoptant l'idée de E1 et comptant les lettres que celui-ci avait écrites) un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze, douze, treize, quatorze.
Enseignant : n est un nombre quelconque.
E2 : O.K.
E1 : Qu'est n ?
Enseignant : Un nombre quelconque (tandis que E3 revient à la question a)
E1 : Je ne comprends pas.
Enseignant : Tu ne comprends pas ?
E1 : Non.
Enseignant : Comprends-tu ce qu'est n ?
E3 : Pour laquelle ? (faisant allusion aux figures) celle-ci, celle-ci ou celle-ci ? (et désigne les figures à l'aide de son crayon)
Enseignant : Peu importe.
Enseignant : (s'adressant à E2) Et toi ? As-tu une idée de ce qu'est n ?
E1 : (interrompt) 14. ?
Enseignant : Ca peut être 14...
E2 : (interrompt) Peu importe le nombre ?
Enseignant : (poursuivant sa phrase)... ça peut être 18, ça peut être 25...
E1 : Ah ! Ca peut être n'importe quel nombre ?
E2 : (interrompt) Le nombre qu'on veut.
E1 : O.K. alors (prenant la feuille) O.K., n peut être euh...
E2 : Douze ?
E1 : Oui ?
Enseignant : Mais... Oui. Que vas-tu écrire ?
E1 : 12.
E2 : 12.
Enseignant : Et si vous vouliez parler d'un nombre quelconque ? Comment pourrions-nous connaître... comment pourrions-nous connaître le nombre de cercles d'un terme quelconque ? (silence)
E2 : Figure n ? Il n'y a pas de figure n...

Annexe 1c : retranscription des réactions d'élèves

Annexe 2 : légende complète du question-gramme a priori

Les questions sont notées Q et les réponses A ; en noir les items que nous supposons proposés par l'enseignant seul, en gris ceux construits conjointement avec les étudiants, en blanc les questions ou réponses élaborées par eux seuls. Sont symbolisées par des chiffres (Q_1 , $Q_{1,1}$) les sous-questions, c'est-à-dire des questions incluses dans une autre : apporter une réponse à la sous-question apporte un élément de réponse à la question initiale. Sera notée comme question dérivée (Q^* , Q^{**} ...) une question parallèle à la question initiale qui n'y apporte pas forcément de réponse.



Annexe 2 : Question-gramme a priori de la discussion

Q: Qu'est-ce qu'une variable ?

Q₁ : Dans quel contexte voit-on apparaître ce qu'on qualifie habituellement de « variable » ?

A_{1,1} : Pour représenter, dénoter un objet indéterminé.

A_{1,2} : Pour représenter, dénoter un caractère de généralité.

Q₂ : En quoi la variable renvoie-t-elle à l'indétermination et à la généralité ?

Q₁* : Les lettres ont-elles toutes le même statut ?

A₁* : Non; différence de statut entre « variable », « paramètre » et « inconnue ».

Q₁** : Quels liens et différences entre ces trois notions ?

A₁**₁ : Inconnue comme concept relatif au domaine de l'algèbre alors que la variable est liée au cadre fonctionnel ; le paramètre peut intervenir dans les deux contextes.

A₁**₂ : Inconnue et paramètre inclus dans le concept plus large de « variable », au sens de la lettre dans les écritures mathématiques.

Q_{2,1} : Quels sont les liens entre indétermination, généralité et notion de variable en dehors du cadre de l'algèbre élémentaire ?

A_{2,1,1} : Cadres probabiliste ou fonctionnel : focalisation sur l'aspect d'indétermination.

A_{2,1,2} : Cadre géométrique : focalisation sur l'aspect de généralité.

Q_{2,2} : En quoi la variable, en désignant quelque chose de général/indéterminé par un symbole, peut-elle présenter des difficultés ?

Q_{2,2,1} : Que signifie « assigner une variable » ?

Q_{2,2,2} : Que représente « x » ?

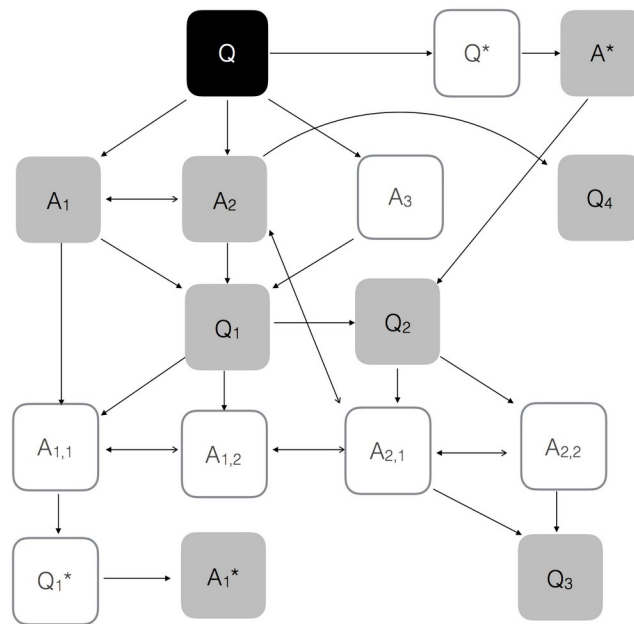
A_{2,2,1} : La variable est efficace en pratique ; les difficultés qui l'entourent sont le « prix à payer » de l'efficacité mathématique.

A_{2,2,2} : Présence d'importantes difficultés conceptuelles qu'il est nécessaire de traiter.

A_{2,2} : Bien que les « nombres indéterminés » n'existent pas, il est nécessaire en mathématiques de pouvoir désigner de façon indéterminée.

Q* : Quelles implications didactiques sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire ?

Annexe 3 : légende complète du question-gramme a posteriori



Annexe 3 : Question-gramme a posteriori de la discussion

N.B. : Les différents items synthétisent des épisodes de la DVP. Les passages en italique indiquent des reprises du discours des étudiants et illustrent les différents épisodes.

Q : Qu'est-ce qu'une variable ?

Q* : Dans quels domaines se situent les difficultés relatives à la variable ? Au niveau didactique ? De la pratique mathématique ?

A* : Bien que ces questions aient des applications didactiques, les problèmes de Frege étaient antérieurs et relevaient des fondements et de la pratique mathématique.

A₁ : Un objet dénotant la généralité : « *Ben, c'est cette intention de généralité.* »

A₂ : Un objet dénotant l'indétermination : « *quand on crée un algorithme, la variable c'est pas automatiquement une intention de généralité, c'est souvent pour prendre des valeurs, enregistrer des valeurs* »

A₃ : Un objet qui varie : « *Ca varie, donc ça prend un nombre déterminé, mais on ne sait pas lequel* »

Q₁ : Quelle est la différence entre la variable et l'inconnue ?

Q₂ : Quelle est la différence entre la variable et le paramètre ?

Q₄ : Comment représenter l'indéterminé ?

A_{1,1} : La généralité de la variable la démarque de l'inconnue : « *Une inconnue [...] c'est quelque chose qui est indéterminé dans le sens où c'est pas encore déterminé, alors que quand on va parler de [...] f(x), c'est quelque chose qui va être valable pour énormément de nombres et là on retrouve l'intention de généralité de quelque chose qui est variable.* »

A_{1,2} : L'usage de la variable est relié à celui des quantificateurs (en logique) : « *[La variable] a quand même deux rôles différents, elle joue deux rôles différents, en fonction de comment elle est liée aux quantificateurs.* »

A_{2,1} : Notion de « paramètre » comme cas particulier de celle de « variable » : « *La variable déterminée⁷ ça serait un paramètre* ».

7 A comprendre comme un donné arbitraire fixé ; « déterminé » ne peut faire référence ici au couple d'opposés déterminé/indéterminé sans introduire de contre-sens. Ce passage fait ressortir les difficultés sémantiques rencontrées.

A_{2,2} : « paramètre » comme distinct de « variable » dans le cadre fonctionnel : « *Je pense qu'on peut bien faire la distinction entre paramètre et variable parce que par exemple dans une fonction, le paramètre c'est ce qui va caractériser [...] notre fonction, et la variable c'est ce qui va donner le statut de fonction.* »

Q₁* : Quelle est la différence entre « inconnu » et « indéterminé » ?

A₁* : L'« inconnue » peut être déterminée par le contexte dans lequel on la rencontre : « *« inconnu » c'est à un moment donné, [...] pour celui qui est intéressé par le problème.* »

Q₃ : Quelles sont les points communs et différences entre la « variable » considérée dans le cadre algébrique d'une part et fonctionnel d'autre part ?