



HAL
open science

René Lagrange (1895-1975), travaux mathématiques

Hervé Le Ferrand

► **To cite this version:**

| Hervé Le Ferrand. René Lagrange (1895-1975), travaux mathématiques. 2020. hal-02876044

HAL Id: hal-02876044

<https://hal.science/hal-02876044v1>

Preprint submitted on 20 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

René Lagrange (1895-1975), travaux mathématiques (*document de travail, 2020, version 1*)

Hervé Le Ferrand*

20 juin 2020

Table des matières

1	Introduction	3
2	De 1914 à 1918, un étudiant sous les drapeaux. Les années 1920	4
2.1	Les années au front	4
2.2	La sortie de la Première Guerre mondiale	5
3	A la Faculté des Sciences de l'Université de Dijon, 1928-1966	9
4	L'apport scientifique de René Lagrange	10
4.1	Une production importante. Des sujets variés	10
4.2	Le calcul différentiel absolu	13
4.3	La collaboration avec Nörlund.	15
4.4	Séries d'interpolation	17
4.5	Sur des suites de polynômes	18
4.6	Géométrie	19
4.7	Equations différentielles	19
4.8	Les travaux en Analyse Combinatoire	20
4.9	Autres écrits	20
4.10	Prix	21
5	Conclusion	21
6	Annexes	24
6.1	Liste des publications de René Lagrange	24
6.2	Rapport d'Elie Cartan sur la thèse de René Lagrange	27

*Institut de Mathématiques de Bourgogne, leferran@u-bourgogne.fr



FIGURE 1 – René Lagrange en 1936, à la Faculté des Sciences de Dijon ©

*Un caillou rond de marbre blanc.
Je lui demande,
Outre une vocation d'avenir sans chagrins,
D'être l'écho fidèle à des chefs-d'oeuvre.
Je le porte à l'oreille.
Il me confie quelques vers de Sophocle :
« Il n'y a pas de lendemain
« Tant qu'aujourd'hui ne s'est pas bien passé... »*

Michel Lagrange, *La constellation des méduses*, orné par Anton Larbie, collection Saint-Germain-des-Prés, 2002.

1 Introduction

Ce travail est réalisé dans le cadre d'un projet de mise en lumière de mathématiciens ayant été professeurs à l'Université de Bourgogne. Michel Pauty dans [21] a écrit une biographie bien documentée sur René Lagrange, professeur de Mathématiques à l'Université de Bourgogne de 1928 à 1966. Le nom de René Lagrange ne nous était pas inconnu avant la lecture de cette biographie. Travaillant dans le domaine des approximants de Padé¹ donc des fractions continues algébriques, nous avons été conduit à nous intéresser aux travaux du mathématicien danois Niels Erik Nörlund (1885-1981). Or, nous y reviendrons en détail, Niels Nörlund et René Lagrange ont collaboré.

Nous nous référerons à la biographie écrite par Michel Pauty, nous y apporterons des éléments nouveaux et compléterons notamment la liste des publications de René Lagrange. Cette liste attire l'attention par sa longueur, par les sujets abordés et par les journaux mathématiques dans lesquels les articles de René Lagrange ont été publiés. Aussi, nous examinerons de plus près l'oeuvre scientifique de René Lagrange.

Michel Pauty quand il réalisait la biographie du mathématicien, a rencontré un des fils de René Lagrange, Michel Lagrange, professeur de Lettres mais aussi poète, auteur de plusieurs recueils et lauréat du Prix Sivet de l'Académie française². Nous avons eu à notre tour le plaisir de le rencontrer.

René Lagrange débute sa carrière académique quelques années après la fin de la Première Guerre mondiale, dans une France en reconstruction, évidemment sur le plan matériel mais aussi sur le plan intellectuel. Pour ce qui concerne les Mathématiques, il serait toutefois maladroit de faire des raccourcis. Comme l'écrivent Hélène Gispert et Juliette Leloup dans [16] :

Cet article, écrit à quatre mains, est au croisement de plusieurs projets de recherche en cours qui tendent à dégager des dynamiques institutionnelles et intellectuelles de la vie mathématique en France dans les années 1914-1945. Abordant une période qui, pour ce qui est des mathématiques, est marquée par des images à priori pour le moins caricaturales, nous avons, à cette étape de notre travail, une double préoccupation. Nous cherchons, d'une part, à identifier certaines caractéristiques de l'activité mathématique de cette période et à préciser les effets de la Première Guerre mondiale, et, d'autre part, à ne pas être prisonnier des visions reconstruites et nécessairement partielles qu'en ont proposé certains des acteurs à travers le biais de leurs conceptions et de leurs intérêts mathématiques.

Dans sa thèse [20], Juliette Leloup indique :

Le registre émotionnel de ceux qui ont vécu le conflit et ses conséquences est sans doute le mieux connu. En témoigne par exemple le monument aux

1. Henri Padé

2. En 1988, pour le recueil « Quelle éternité mon amour ? ».

morts de l'École normale supérieure, qui évoque la mortalité importante des Normaliens des promotions antérieures à 1914, envoyés au front en première ligne. De même, divers témoignages et écrits de mathématiciens vivant à cette époque retranscrivent leurs impressions et leur vécu de cette période (...)

On peut également citer les propos d'André Weil³ évoquant le « vide » creusé par la guerre. Comme l'écrivent Christophe Prochasson et Anne Rasmussen en introduction d'« Au nom de la patrie, les intellectuels et la première guerre mondiale (1910-1919) », Prochasson et Rasmussen 1996, « de la guerre de 1914, il est habituellement retenu sa formidable œuvre de destruction ».

Mais d'autres recherches se sont focalisées plus récemment sur l'impact de la guerre sur le milieu mathématique et sur les trajectoires individuelles et collectives de mathématiciens (...)

Analysant le nombre de thèses soutenues dans l'entre-deux-guerres, Juliette Leloup précise :

Les effets de la guerre se font donc sentir essentiellement pendant la guerre et au début des années 1920. Le massacre causé par le conflit se traduit par une baisse du nombre des soutenances pendant le conflit et par un plus faible nombre de ces soutenances entre 1920 et 1924. À partir de la deuxième partie des années 1920 les doctorants sont des étudiants qui pendant la guerre n'avaient pas l'âge de combattre. Cette période de l'après-guerre apparaît donc comme une période, où les effets quantitatifs du conflit, après avoir été fortement ressentis, sont peu à peu gommés.

Dans une première partie, nous évoquons le parcours militaire de René Lagrange durant la Guerre de 1914-1918 puis comment, à la sortie du conflit, il a repris le cours de ses études. Dans une seconde partie, nous nous intéressons à sa carrière à l'Université de Dijon. Dans une troisième partie, nous analysons l'apport scientifique de René Lagrange.

2 De 1914 à 1918, un étudiant sous les drapeaux. Les années 1920

2.1 Les années au front

René Lagrange est reçu à l'École Normale Supérieure en Juin 1914. L'École Normale Supérieure paie un lourd tribut au début du conflit comme l'indique David Aubin dans [7, 8]. Cet auteur indique [7], pour ce qui concerne les normaliens mathématiciens :

3. André Weil (1906-1998), normalien, frère de la philosophe Simone Weil, membre du groupe Bourbaki, célèbre pour ses travaux en Géométrie Algébrique et en Théorie des Nombres, professeur à l'Institute for Advanced Study, Princeton.

Au cours des semaines les plus sanglantes de l'histoire de France, entre le 22 août et le 20 octobre 1914, douze mathématiciens, tous anciens élèves de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, à Paris, tous agrégés de mathématiques et, pour la plupart, auteurs de travaux remarquables, publiés et recensés dans le Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (JFM), sont tués sur les champs de bataille du Nord et de l'Est.

René Lagrange est appelé sous les drapeaux en Octobre 1914 [3]. En Avril 1915, après sa période de classes, il rejoint une unité combattante, le 1er régiment d'artillerie lourde en qualité de sous-lieutenant. Le 20 Novembre, il est affecté au 109ème régiment d'artillerie lourde⁴. René Lagrange est promu lieutenant le 17 Juillet 1917. Pour l'engagement et le sang-froid qu'il a manifestés notamment lors de la bataille de Verdun et en Italie, René Lagrange est cité à l'ordre du régiment et à celui de la Xème armée [3]. René Lagrange est titulaire de la Croix de Guerre.

2.2 La sortie de la Première Guerre mondiale

En 1919⁵ René Lagrange reprend ses études de mathématiques. Il prépare une thèse sous la direction d'Elie Cartan (1869-1951). Elie Cartan est, depuis le 19 Mai 1920, professeur de Mécanique Rationnelle à la Faculté des Sciences de Paris. Il est aussi professeur de Géométrie à l'Ecole de Physique et de Chimie Industrielles de la ville de Paris [12]. Le nom *René Lagrange* apparaît dans les « archives Elie Cartan » conservées à l'Académie des Sciences de Paris⁶. Il est inscrit d'ailleurs notamment dans les cahiers de brouillon d'Elie Cartan, documents qui ont fait l'objet d'un impressionnant travail d'analyse et de publication de la part d'Emmylou Haffner⁷.

De plus, le concours masculin de l'Agrégation a de nouveau lieu en 1919 après cinq années d'interruption. En 1921, René Lagrange est reçu premier au concours spécial de l'Agrégation de Mathématiques en 1921 [1]. Le ministère de l'Instruction a en effet dressé une liste « concours spécial » classant les candidats ayant été sous les drapeaux durant la Première Guerre mondiale. René Lagrange a dû notamment répondre à ce problème de Mécanique Rationnelle [6] :

Mécanique rationnelle.
DEUXIÈME QUESTION.

Un pendule balistique se compose d'un cylindre de révolution C , d'axe horizontal, rempli de terre et pouvant osciller librement autour d'un axe horizontal perpendiculaire à l'axe du cylindre, la plus courte distance AB des deux axes étant verticale et ayant pour longueur 10 m. Le poids de C est supposé être de

4. Les campagnes militaires de ce régiment sont décrites dans [5].

5. Le directeur de l'Ecole Normale Supérieure de 1919 à 1927 est l'historien et critique littéraire Gustave Lanson (1857-1934).

6. La description de ce fonds est accessible au format pdf sur le site des archives de cette académie

7. Ces cahiers sont accessibles sur le site eliecartanpaper.ahp-numerique.fr



FIGURE 2 – Elie Cartan (source : Mac Tutor)

10 tonnes, et l'on néglige, par rapport à lui, le poids des organes de suspension. Ce cylindre est utilisé comme cible pour des balles de mitrailleuses dont la vitesse est parallèle à son axe et qui s'incorporent dans sa masse symétriquement à l'axe. Le poids de chaque balle est de 10 g et l'on en tire dix par seconde. La durée du tir est assez courte pour que le poids total des balles tirées soit négligeable par rapport au poids du cylindre, et assez longue cependant pour que le cylindre prenne une position apparente d'équilibre, dans laquelle la droite AB , cessant d'être verticale, fait un angle de 3 décigrades avec la verticale. Calculer la vitesse des balles.

René Lagrange, parrainé par les mathématiciens Pierre Fatou (1878-1929) et Henri Lebesgue (1875-1941), devient membre de la Société Mathématique de France en 1922⁸.

Revenons à la thèse de René Lagrange. Ce dernier la soutient le 16 Juin 1923 à la Faculté des Sciences de Paris devant un jury présidé par Emile Borel (1871-1956). Les autres membres du jury sont les mathématiciens Elie Cartan et Ernest Vessiot (1865-1952), professeur à la Faculté des Sciences de Paris et aussi spécialiste de Géométrie Différentielle. Le mémoire de René Lagrange a pour titre « Sur la calcul différentiel absolu ». Juliette Leloup donne dans sa thèse [20] plusieurs informations sur le sujet et le mémoire de René Lagrange. Elle rapporte d'ailleurs une remarque que Roger Godement (1921-2016) a faite

8. Bulletin de la SMF numérisé sur NUMDAM.

dans [17, 18] sur l'expression « calcul différentiel absolu ». :

Néanmoins⁹, je suis tombé un jour en arrêt devant le fascicule de Calcul différentiel absolu de René Lagrange, professeur à Dijon ; le mot « absolu », qui m'avait intrigué, avait été introduit par les Italiens qui avaient peut-être lu Balzac. On y exposait l'analyse tensorielle dans les espaces de Riemann, notion très vaguement définie : on comprenait plus ou moins qu'il s'agissait d'espaces courbes à n dimensions dans lesquels on utilisait des systèmes de coordonnées curvilignes dont on pouvait changer à volonté par des formules n'impliquant que des fonctions aussi différentiables que nécessaires.

Dans son rapport sur la thèse de Lagrange, Elie Cartan écrit¹⁰ :

L'originalité du travail de M. Lagrange n'est pas à chercher dans les résultats géométriques obtenus, qu'on retrouverait sans trop de peine dans les mémoires des géomètres italiens modernes. Elle réside dans la généralisation des méthodes du calcul différentiel absolu à des formes différentielles exprimées au moyen d'expression de Pfaff non différentielles exactes. M. Lagrange possède parfaitement son outil ; le travail qu'il présente à la Faculté nous fait espérer que dans le domaine si vaste de la Géométrie générale il sera capable de produire des mémoires originaux importants ; ce travail nous paraît digne d'être accepté comme thèse.

Le rapport sur la soutenance est rédigé par Emile Borel en ces termes :

M. Lagrange s'est attaqué à une des questions les plus difficiles des mathématiques modernes ; les résultats déjà obtenus par lui donnent plus que des espérances et témoignent d'une connaissance approfondie de parties très étendues de la géométrie et de l'analyse. La soutenance a été très brillante, tant pour la thèse principale que pour les propositions relatives à la théorie des surfaces minima. M. Lagrange est assurément destiné à devenir un des professeurs distingués de notre enseignement supérieur : il y servira utilement la science et l'enseignement par ses qualités de chercheur et son brillant talent de professeur.

En 1924, René Lagrange, alors professeur au lycée d'Evreux [21], est chargé d'un cours Peccot¹¹ [2] au Collège de France. Il rencontre vraisemblablement à ce moment là le physicien Paul Langevin (1872-1946) qui est professeur au Collège de France. Durant la Seconde Guerre mondiale, René Lagrange rend visite à Paul Langevin à Troyes où ce

9. Rogement Godement, alors lycéen au Havre, relate ici la découverte qu'il a faite du mémoire de René Lagrange paru dans la collection *Mémorial des Sciences Mathématiques* que possédait la bibliothèque municipale du Havre.

10. Archives Nationales de France, dossier Aj 16 Aj 16 5543.

11. Un cours Peccot est attribué à un jeune mathématicien prometteur.

dernier a trouvé refuge¹². Paul Langevin a été directeur des études de 1905 à 1925 puis directeur de l'Ecole de Physique et de Chimie Industrielles de la ville de Paris de 1925 à 1946 [13]. Elie Cartan, Paul Langevin et René Lagrange se sont côtoyés l'Ecole de Physique et de Chimie Industrielles de la ville de Paris car René Lagrange a été examinateur de Mathématiques dans cette école [4].



FIGURE 3 – Paul Langevin (source : Wikipedia)

René Lagrange, muni d'une bourse de la Fondation Rockefeller [26, 27], séjourne à deux reprises à Copenhague, deux mois en 1924 et deux mois en 1926 [27], auprès du mathématicien danois Niels Erik Nörlund, professeur à l'Université de cette ville. Les deux séjours de René Lagrange à Copenhague ont vraisemblablement eu lieu lors des vacances d'été. En effet, comme le fait remarquer R. Siegmund-Schultze dans [27], les jeunes chercheurs français ayant pour la plupart des charges d'enseignement ne pouvaient que s'absenter durant les congés d'été. C'était le cas justement de René Lagrange. En 1926, René Lagrange est maître de conférences à l'Université de Lille après avoir été en poste à l'Université de Rennes. Nous reviendrons sur la collaboration entre Niels Nörlund et René Lagrange. René Lagrange seconde, à la Faculté des Sciences de Lille, Henri Béghin (1876-1969) titulaire de la chaire de Mécanique Rationnelle [24]. En 1929, Henri Béghin quitte Lille pour la Faculté des Sciences de Paris.

12. Michel Lagrange nous a montré une lettre que Paul Langevin a adressée, depuis Troyes, à René Lagrange en Janvier 1943.

3 A la Faculté des Sciences de l'Université de Dijon, 1928-1966

En Avril 1928, trois mois après son arrivée à l'Université de Dijon, René Lagrange est nommé professeur titulaire de Calcul Différentiel et Intégral [21]. Il enseignera dans cette université jusqu'en 1966, année de son départ en retraite.

René Lagrange fait partie, en 1933, de la promotion spéciale dans l'ordre de la Légion d'Honneur à l'occasion du cinquantenaire de la création de l'Ecole de Physique et de Chimie Industrielles de la ville de Paris [4]. Il est élevé au grade de Chevalier.

A l'Université de Dijon, René Lagrange a eu pour collègues les mathématiciens Maurice Gevrey (1884-1957), Bernard d'Orgeval (1909 - 2005), Jacques Dixmier, Jean Arbault (1915-1998).

Maurice Gevrey, normalien, célèbre pour la notion de « classes (ou espaces) de Gevrey », qu'il a introduite dans son mémoire paru en 1918, « Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles. Premier mémoire »¹³, a été professeur à Dijon de 1919 à 1954. En 1914, Maurice Gevrey est chargé d'un cours Peccot au Collège de France sur les « Equations aux dérivées partielles du type parabolique, des problèmes aux limites et de la nature des solutions ».

Bernard d'Orgeval, normalien, promotion 1942, est professeur de mécanique rationnelle à l'Université de Dijon de 1955 à 1979. Bernard d'Orgeval soutient, à son retour de captivité d'Allemagne, une thèse en mathématiques le 21 Décembre 1945¹⁴, intitulée « Sur les surfaces algébriques dont tous les genres sont 1 ». Elie Cartan, son fils Henri Cartan (1904-2008) et René Garnier (1887-1984) composaient le jury. D'après les bases bibliographiques *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (1868- 1942) et *Mathscinet* (1942-), Bernard d'Orgeval a publié un peu plus de soixante articles de mathématiques de 1939 à 1975. Mentionnons qu'il participe durant l'année universitaire 1938-1939 au séminaire Gaston Julia, à Paris, dont le thème, cette année-là, était le calcul des variations. Bernard d'Orgeval donne dans ce séminaire, en Mars 1939, un exposé intitulé « Le problème paramétrique dans un espace de Riemann ».

Jacques Dixmier, normalien, membre du groupe Bourbaki. a été professeur à Dijon de

13. Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 35 (1918), p. 129-190. Ce mémoire aurait dû paraître en 1914. Maurice Gevrey écrit :

Le présent mémoire, qui devait paraître fin 1914 et dont la guerre a interrompu la rédaction, est le développement d'une Note insérée aux Comptes-rendus (8 décembre 1913). Le numéro 8 reproduit une leçon faite au Collège de France en 1914.

14. Bernard d'Orgeval écrit dans l'introduction :

Ce travail, commencé sur les indications de M. Enriques 2, professeur à l'Université de Rome, durant un séjour que je fis en Italie, a été achevé en avril 1943, à l'Oflag XB. à Nienburg/Weser, où je me trouvais prisonnier.

1949 à 1955. Jacques Dixmier est notamment célèbre pour ses travaux sur les algèbres d'opérateurs.

Jean Arbault, normalien, est nommé à l'Université de Dijon en 1956. Il est l'auteur d'une thèse¹⁵, dirigée par Arnaud Denjoy (1884-1974), et de plusieurs articles sur des questions de convergence de séries trigonométriques. Jean Arbault prend sa retraite en 1977.

A notre connaissance, René Lagrange n'a pas eu d'étudiant en thèse. Gérard Joubert qui soutient sa thèse en 1966¹⁶ et qui sera ensuite professeur dans cette même université, écrit au début de son mémoire :

Ma reconnaissance va également à M. René Lagrange qui m'a enseigné la rigueur mathématique et me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

4 L'apport scientifique de René Lagrange

La chorégraphie de l'abeille a les vertus de la mémoire offerte en nourriture et perspective aux fraternels de son rucher.

Michel Lagrange, *Eclats d'enfance, Mémoire d'un dijonnais*, éditions de l'Armançon, 2012.

4.1 Une production importante. Des sujets variés

Nous donnons la liste des publications en mathématiques de René Lagrange dans l'annexe. Pour dresser cette liste, nous avons interrogé deux bases de données, le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* pour les articles parus avant l'année 1942 incluse, et *MathSciNet (Mathematical Reviews on the web)* pour ceux publiés après l'année 1942. René Lagrange est l'auteur de près de soixante-dix articles et mémoires. Les tableaux suivants permettent d'avoir une vision d'ensemble des publications de René Lagrange, année par année et par journaux mathématiques :

15. « Sur l'ensemble de convergence absolue d'une série trigonométrique » publiée dans le *Bulletin de la S. M. F.*, tome 80 (1952), p. 253-317.

16. Sous la direction de Charles Ehresmann (1905-1979), « Contribution à l'étude des catégories ordonnées. Application aux structures feuilletées », *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 8 (1966), exp. numéro 5, p. I-117.

Années	Nombre de publications
1921 à 1925	11
1926 à 1930	12
1931 à 1935	7
1936 à 1940	8
1941 à 1945	6
1946 à 1950	7
1951 à 1955	5
1956 à 1960	6
1961 à 1965	6

TABLE 1 – Nombre de publications par années

Journal	Nombre de publications
Acta Mathematica	13
Ann. Mat. Pura Appl.	1
Ann. Sci Ecole Norm.	8
Bulletin des Sciences Mathématiques	7
Bull. Soc. math. France	2
C.R. Acad. Sci Paris	26
Journal de l'Ecole polytechnique	1
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (JMPA)	3
Mémorial des Sciences Mathématiques (lié au JMPA)	2

TABLE 2 – Nombres de publications par journal

On peut être frappé à la lecture du second tableau par le nombre de notes aux *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences* et par le nombre d'articles parus dans *Acta Mathematica*. Les articles publiés dans *Acta Mathematica* sont de longs mémoires, dont certains sont précédés de notes aux *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*. Nous avons déjà indiqué que Niels Nörlund et René Lagrange ont travaillé ensemble. Le mathématicien danois entre en 1916 au comité de rédaction du journal *Acta Mathematica* dirigé alors par son fondateur le mathématicien suédois Gosta Mittag-Leffler (1846-1927). En 1927, Niels Nörlund prend la direction d'*Acta Mathematica*. Il dirigera cette revue jusqu'en 1981 [9]. Les liens qu'entretient Niels Nörlund avec le milieu mathématique français sont étroits. Il séjourne à plusieurs reprises en France et le 14 Juin 1926, il est élu correspondant de l'Académie des Sciences de Paris dans la section Géométrie. Dans sa notice sur Niels Nörlund [11], Henri Cartan (1904-2008) écrit en 1983 :

Il y a longtemps que Niel Erik Nörlund n'est plus venu en France. Mais je puis témoigner de son accueil bienveillant pour les Français en visite à Copenhague. Son grade de commandeur de la Légion d'honneur atteste les liens qui l'unissaient à notre pays.

René Lagrange publie dans des revues de premier plan que ce soit le *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* dont le directeur est Henri Villat (1879-1972), le *Bulletin des Sciences Mathématiques* ou les *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*. Il faut indiquer qu'à la sortie de la Première Guerre mondiale, la santé financière de ces journaux n'est pas florissante. Dans le cas du *Journal de Mathématiques Pures Appliquées*, Henri Villat, alors professeur à l'Université de Strasbourg, en prend justement les rênes, à la suite de Camille Jordan (1838-1922) qui en fut le directeur de 1885 à 1921, pour en redresser la situation financière [19]. D'ailleurs Henri Villat pour trouver de nouvelles entrées d'argent crée la série de monographies *Le Mémorial des Sciences Mathématiques* [19]. Henri Villat va réussir dans sa tâche. En 2020, le *Journal de Mathématiques Pures Appliquées* est avec *Acta Mathematica* une des plus prestigieuses revues de Mathématiques. Les autres journaux mentionnés dans le tableau sont toujours édités. Le *Bulletin des Sciences Mathématiques* est fondé en 1870 par Gaston Darboux (1842-1917). En 1919, Emile Picard (1856-1941) et Paul Appell (1855-1930) en assurent la direction. Emile Picard en sera ensuite quelques années le directeur, Elie Cartan faisant partie du comité de rédaction. En 1945, le nouvel éditeur en chef est Paul Montel (1876-1975). Les *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure de Paris* sont créées par Louis Pasteur en 1864. Revue au départ généraliste, au tournant de l'année 1900, elle se spécialise en Mathématiques¹⁷. En 1850, le mathématicien italien Barnaba Tortolini (1808-1874) fonde les *Annali di Scienze matematiche e fisiche* [28] qui deviendront les *Annali di Mathematica Pura et Applicada*. En 1858, Francesco Brioschi (1824-1897) entre au comité de rédaction des *Annali*. Le *Journal de l'Ecole Polytechnique* paraît de 1795 à 1939. Après une longue interruption, il est de nouveau édité depuis 2013. Quant au *Bulletin de la Société Mathé-*

17. Voir le site des *Annales*, Ecole Normale Supérieure de Paris.

matique de France, il est créé en même temps que la société du même nom, juste après la guerre franco-prussienne de 1870-1871, en 1872.

René Lagrange publie des articles de mathématiques sur une période de près de quarante-cinq années. Si la Géométrie, la Géométrie différentielle, en y incluant les Equations Différentielles, ont été des domaines au centre des préoccupations de René Lagrange, il faut signaler trois champs mathématiques dans lesquels l'apport de René Lagrange est important : Equations aux différences finies, Interpolation et Approximation et, un champ de recherche qui apparaît tardivement, au moins au niveau des publications, l'Analyse Combinatoire.

4.2 Le calcul différentiel absolu

René Lagrange débute donc, à la fin de la Première Guerre mondiale, une thèse sous la direction d'Elie Cartan, spécialiste de Géométrie Différentielle. Dans [14], le mathématicien chinois Shing-Shen Chern (1911-2004) et le mathématicien français Claude Chevalley (1909-1984)¹⁸ rapportent les propos suivants du mathématicien allemand Hermann Weyl :

*Cartan is undoubtedly the greatest living master in differential geometry.
. . . I must admit that I found the book, like most of Cartan's papers, hard
reading. . . "*

Si les travaux novateurs d'Elie Cartan ne reçoivent pas en France immédiatement tout l'intérêt qu'ils méritent, ce n'est pas le cas en Allemagne [14]. En 1912, cependant, Henri Poincaré dans le rapport [23] qu'il écrit au moment de la candidature d'Elie Cartan sur une chaire à la Faculté des Sciences de Paris, met en lumière toute l'importance des travaux d'Elie Cartan. Dans sa conclusion Henri Poincaré écrit :

On voit que les problèmes traités par M. CARTAN sont parmi les plus importants, les plus abstraits et les plus généraux dont s'occupent les Mathématiques ; ainsi que nous l'avons dit, la théorie des groupes est, pour ainsi dire, la Mathématique entière, dépouillée de sa matière et réduite à une forme pure. Cet extrême degré d'abstraction a sans doute rendu mon exposé un peu aride ; pour faire apprécier chacun des résultats, il m'aurait fallu pour ainsi dire lui restituer la matière dont il avait été dépouillé ; mais cette restitution peut se faire de mille façons différentes ; et c'est cette forme unique que l'on retrouve ainsi sous une foule de vêtements divers, qui constitue le lien commun entre des théories mathématiques qu'on s'étonne souvent de trouver si voisines.

(...)

Les résultats les plus importants énoncés par M. CARTAN lui appartiennent bien en propre. En ce qui concerne les groupes de LIE, on n'avait que des énoncés et pas de démonstration ; en ce qui concerne les groupes de GALOIS, on

18. Claude Chevalley est un des fondateurs du groupe Bourbaki.

avait les théorèmes de FROBENIUS qui avaient été rigoureusement démontrés, mais par une méthode entièrement différente ; enfin en ce qui concerne les groupes infinis on n'avait rien : pour ces groupes infinis, l'œuvre de M. CARTAN correspond à ce qu'a été pour les groupes finis l'œuvre de LIE, celle de KILLING, et celle de CARTAN, lui-même.

Elie Cartan a, comme l'analyse Hélène Gispert et Juliette Leloup dans [16], tenu une place très importante dans l'encadrement des thèses soutenues en Mathématiques à la Faculté des Sciences de Paris dans l'entre-deux-guerres, ainsi que pour l'écriture des rapports et la présidence de jurys de soutenance. Ces auteurs indiquent :

Prenons l'exemple d'Élie Cartan. Les rapports qu'il écrit montrent que certains étudiants prolongent ses propres travaux et résultats dans leur travail de thèse. Cependant rien n'est explicite quant à l'implication réelle d'Élie Cartan dans l'élaboration de leur recherche. L'influence intellectuelle est donc réelle même si elle ne se traduit pas forcément concrètement. De plus, les thèses en géométrie différentielle soutenues durant notre période, même si elles ne portent pas toutes sur ses travaux, sont cependant pour l'essentiel rapportées par ce mathématicien. Cette domination globale laisse donc supposer la très grande influence d'Élie Cartan sur cette discipline pendant l'entre-deux-guerres : quiconque l'étudie semble le rencontrer à un moment ou à un autre. Il apparaît ainsi comme l'un des seuls spécialistes de géométrie, sa ressource quasi unique dans le milieu universitaire parisien et c'est ce qui sans doute explique cette « domination » dans les fonctions de président et de rapporteur de jury.

C'est donc dans ce contexte que René Lagrange, alors agrégé-préparateur à l'École Normale Supérieure de Paris, effectue son travail de thèse. Le mémoire de René Lagrange est publié en 1923¹⁹ et en 1926, René Lagrange, alors maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lille, publie le « Le calcul différentiel absolu » dans la collection *Mémorial des Sciences Mathématiques*. La notion centrale de la thèse de René Lagrange est celle de *tenseur*. Comme l'explique Roger Godement [17], les objets mathématiques que manipule René Lagrange n'ont pas encore complètement reçus le formalisme qui prévaut à présent. Roger Godement explique, pages 139 à 174 de [17, 18], en termes modernes les méthodes développées par René Lagrange. Roger Godement analyse par exemple :

La notion de carte locale permet de comprendre les « tenseurs » de René Lagrange (i.e. de Ricci et Levi-Civita) auxquels on a fait allusion (...)

Les mathématiciens italiens Gregorio Ricci (1853-1925) et Tullio Levi-Civita sont les au-

19. La thèse paraît chez le libraire et imprimeur Privat à Toulouse. Cela peut surprendre à priori, on aurait pu envisager une publication plutôt chez l'éditeur scientifique parisien Gauthier-Villars. En fait les deux éditeurs collaborent. Par exemple, les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* sont éditées par ces deux maisons.

teurs de l'article fondateur paru en 1901 dans les *Mathematische Annalen*²⁰, intitulé « Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications ». Dans un ouvrage publié en 1922, « Introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel absolu »²¹, le mathématicien suisse Gustave Juvet²² (1896-1936) cite les premiers travaux de René Lagrange. Récemment, Alberto Cogliati et Paolo Mastrolia analysant [15] les recherches d'Elie Cartan et du mathématicien hollandais Jan Arnoldus Schouten (1883-1971) sur la théorie des connexions, indiquent au sujet des travaux de René Lagrange :

Cartan was here referring to [Lagrange, 1923]. Indeed René Lagrange had investigated the possibility of attaining a synthesis between the technique of the absolute differential calculus and Cartan's techniques based upon the notion of exterior differentials forms.

Après 1926, il semble que René Lagrange se soit détourné de ce thème de recherche. Commence alors une collaboration avec Niel Nörlund dans le domaine des Equations aux différences finies et dans celui de l'Interpolation.

4.3 La collaboration avec Nörlund.

En 1929, dans sa recension²³ des « Leçons sur les équations linéaires aux différences finies », rédigées par René Lagrange, le mathématicien Adolphe Bühl (1878-1949) écrit :

M. Nörlund jouit, quant au Calcul des Différences, d'une célébrité bien méritée. Nous avons déjà analysé (...) ses Vorlesungen über Differenzenrechnung²⁴ et (...) son fascicule du Mémorial des Sciences mathématiques intitulé « Sur la « Somme » d'une fonction ».

En effet, Niels Nörlund publie en 1910 dans *Acta Mathematica* un important mémoire sur les Equations aux Différences. Dans le premier chapitre, il rappelle d'ailleurs les résultats obtenus par Henri Poincaré [22] sur le comportement asymptotique des solutions d'une équation aux différences du type :

$$P_k u_{n+k} + P_{k-1} u_{n+k-1} + \dots + P_1 u_{n+1} + P_0 u_n = 0$$

les coefficients $P_i(n)$ étant des polynômes en n tous du même degré p .

Adolphe Bühl conclut sa recension de 1929 par ces lignes :

L'œuvre est caractérisée par beaucoup de soin et d'art. Elle a d'ailleurs été rédigée par M. René Lagrange dont l'éloge n'est plus à faire ; le jeune et brillant géomètre, Maître de Conférences à Lille lors de la rédaction et Professeur à Dijon lors de la publication, a certainement laissé l'empreinte de son talent en toutes ces belles pages.

20. Volume 54 (1901), pages 125-201.

21. Librairie Scientifique Blanchard, 1922.

22. Gustave Juvet a été professeur à l'Université de Lausanne.

23. *L'Enseignement Mathématique*, 28, 1929.

24. Ouvrage paru en 1924.



FIGURE 4 – Niels Nörlund (source : Mac Tutor)

Déjà en 1927, Adolphe Bühl avait analysé un autre mémoire de Niels Nörlund, « Leçons sur les séries d'interpolation », rédigées par René Lagrange. Au sujet de René Lagrange, Adolphe Bühl indique :

M. Nörlund a tenu à commencer sa préface en disant beaucoup de bien de son rédacteur M. René Lagrange. Ne soyons pas moins juste et reconnaissons que le jeune et brillant maître de conférences de l'Université de Lille qui a déjà montré tant de compétences en d'autres domaines, comme par exemple le Calcul différentiel absolu, n'en a pas montré moins en celui-ci.

Nous avons évoqué dans [26], un troisième mémoire au nom de Nörlund. René Lagrange a certainement participé à sa rédaction. Nous indiquons en effet [26] :

However, we can find in the Annales de la faculté des sciences de Lille(1925–1926) on page 55 that René Lagrange had written in collaboration with N.E. Nörlund a work entitled « Sur la « somme » d'une fonction » to appear in the Mémorial. Indeed, in 1927 the number 24 of the Mémorial has the same title mentioned by Lagrange, but a single author : N.E. Nörlund. We note that Lagrange is not mentioned at all in this work.

Niels Nörlund et René Lagrange publient, chacun, tout au long des années 1920 et au début des années 1930 plusieurs articles sur le thème des séries d'interpolation et des suites de polynômes et aussi, donc, ensemble, les trois mémoires évoqués ci-dessus. La liste des publications de René Lagrange est en annexe de cet article ; quant aux travaux de Niels

Nörlund, la liste en est donnée par Thøger Bang (1917-1997) dans [9]. Intéressons-nous au mémoire, paru en 1935, de René Lagrange sur les séries d'interpolation.

4.4 Séries d'interpolation

Dans son mémoire de 1935 sur les séries d'interpolation René Lagrange étudie, d'une part la convergence de séries du type

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)}{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \cdots (z - \beta_n)},$$

où les a_i , α_i , β_i sont des nombres complexes et, d'autre part la question qui est de déterminer si une fonction $F(z)$ admet un tel développement dans un domaine à préciser du plan complexe. Les coefficients a_i sont alors obtenus à partir de $F(z)$ via la formule de Cauchy. René Lagrange est amené à faire différentes hypothèses sur les deux suites $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Les résultats obtenus par René Lagrange ont été appliqués en Arithmétique par Tanguy Rivoal. Ce dernier dans l'introduction de [25] écrit :

Le but principal de cet article est d'appliquer et de généraliser certaines idées contenues dans le remarquable « Mémoire sur les séries d'interpolation » de René Lagrange [son mémoire de 1935] afin d'obtenir de nouvelles preuves de l'irrationalité de $\log(2)$, $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. D'autres nombres pourraient également être abordés. Ces preuves sont très différentes de celles déjà présentes dans la littérature. Elles apportent, nous semble-t-il, un nouvel éclairage sur l'omniprésence des suites combinatoires d'Apéry dans ce domaine de l'approximation diophantienne.

Michel Waldschmidt consacre d'ailleurs un paragraphe de son article [29] aux séries introduites par René Lagrange et à l'utilisation faite de cet outil par Tanguy Rivoal en Arithmétique.

Comme le souligne Tanguy Rivoal [25], les travaux de René Lagrange sur ces séries d'interpolation n'étaient pas cependant absents de la littérature mathématique, et il en donne quelques exemples dans la bibliographie de [25]. Ainsi, le mathématicien anglais Harry Bateman²⁵ publie dès 1939 un article intitulé « The transformation of a Lagrangian series into a Newtonian series »²⁶. Dans l'ouvrage collectif construit à partir des travaux et des notes laissés par Harry Bateman, « Bateman Manuscript Project, Higher transcendental functions, Volume III »²⁷, il est fait référence à plusieurs articles de René Lagrange : au chapitre 15, « Lamé Functions », « Les familles de surfaces de révolution qui possèdent des harmoniques », Acta Math. 71 (1939) et « Sur une classe d'harmoniques

25. Harry Bateman émigre aux Etats-Unis en 1910.

26. Proc. nat. Acad. Sci. USA 25 (1939), 262-265.

27. Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New-York, 1955.

associés aux cyclides de révolution », Bull. Sci. Math. France 72 (1944) ; au chapitre 19, « Generating functions », « Mémoire sur les suites de polynômes », Acta Math. 51 (1928).

Avant d'évoquer les séries d'interpolation de René Lagrange, Michel Waldschmidt a considéré les séries de Newton (1642-1727). Une série de Newton, pour des points équidistants, est de la forme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-a)(z-a-h)\cdots(z-a-(k-1)h).$$

Niels Nörlund a étudié une telle série dans un article paru en 1922²⁸. Dans une publication de 1924²⁹, il poursuit son étude des séries d'interpolation en considérant des séries de Stirling (1692-1770).

4.5 Sur des suites de polynômes

René Lagrange publie successivement en 1928 et 1929, dans *Acta Mathematica*, un premier mémoire de 109 pages, « Mémoire sur des suites de polynômes », puis un article de 19 pages, « Sur les polynômes de Newton et certaines formules d'interpolation », dans lesquels il est question de suites de polynômes. René Lagrange explique d'ailleurs dans le mémoire de 1928 que ses travaux prolongent ceux de Niels Nörlund publiés en 1922, dans *Acta Mathematica*, dans un article intitulé « Mémoire sur les polynômes de Bernoulli ». René Lagrange ajoute en 1932 à ses deux publications de 1928 et 1929, un troisième mémoire de 50 pages publié lui aussi dans *Acta Mathematica*, « Sur le calcul approché des intégrales définies ». Ce qui nous frappe dans cette trilogie, après une première lecture, c'est la présence de nombreux algorithmes de calculs et la grande virtuosité de l'auteur dans le développement de ces algorithmes. Par exemple, dans le mémoire de 1928, René Lagrange définit et étudie complètement les propriétés du produit qu'il nomme « homogène » de deux suites $[a]$ et $[b]$. Ce produit est la suite $[c]$, notée $[a] \cdot [b]$ dont le terme de rang n est donné par :

$$c_n = \sum_{s=0}^n \Gamma_n^s a_s b_{n-s}$$

où la suite double (Γ_n^s) est fixée. René Lagrange détermine ensuite la notion de quotient et d'inverse pour de telles suites.

Dans son mémoire de 1928, René Lagrange introduit des polynômes qu'il nomme « polynômes bernoulliens d'interpolation », définis à partir des polynômes classiques de Bernoulli. Cela le conduit dans son mémoire de 1932, à de nouvelles formules sommatoires du même type que la formule d'Euler-Maclaurin.

28. Sur les formules d'interpolation de Stirling et de Newton, Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 39 (1922), p. 343-403.

29. Sur l'interpolation Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 114-132.

Claude Brezinski dans son livre sur l'histoire des fractions continues [10] mentionne deux articles de René Lagrange sur les fonctions de Legendre (1752-1833). A ce propos, René Lagrange écrit en introduction à son mémoire de 1931, « Sur certaines fonctions associées aux fonctions de Legendre »,

Dans un mémoire sur les fonctions de Legendre [René Lagrange, 1927], j'ai relié les fonctions de Legendre de première espèce et leurs dérivées au développement d'une puissance du rapport de deux trinômes en t suivant les puissances entières du rapport anharmonique de t avec trois des quatre zéros de ces trinômes.

En 1939, René Lagrange publie dans la collection *Mémorial des Sciences Mathématiques*, un mémoire intitulé « Polynômes et fonctions de Legendre ». Ce mémoire est cité dans un article publié en 2015 dans la revue *International Journal of Computer, Control, Quantum and Information Engineering*, intitulé « 3D Objects Indexing Using Spherical Harmonic for Optimum Measurement Similarity »³⁰.

4.6 Géométrie

Plusieurs travaux de René Lagrange en Géométrie sont cités dans la littérature mathématique. Par exemple, on trouve une référence à son article de 1939, « Sur les surfaces de révolution qui possèdent des harmoniques », chez Robert Campbell en 1950, « Équations intégrales des fonctions de Mathieu associées et applications »³¹ ou encore dans une thèse récente³².

Les deux articles de René Lagrange publiés en 1957, « Sur le groupe de la famille des coniques du plan qui ont un élément de contact donné » et « Sur le groupe ponctuel conservant la famille des coniques du plan qui ont un élément de contact donné » sont cités dans un article de 2008 de Benjamin McKay et Alexey Pokrovskiy³³.

4.7 Equations différentielles

René Lagrange a aussi contribué à la théorie des Equations Différentielles. En 1938, il publie « Quelques théorèmes d'intégrabilité par quadratures de l'équation de Riccati ». Dès 1945, Gabriel Viguié dans un mémoire paru dans les *Annales de la Faculté des Sciences de*

30. 3D Objects Indexing Using Spherical Harmonic for Optimum Measurement Similarity, S. Hellam, Y. Oulahrir, F. El Mouchid, A. Sadiq, S. Mbarki, World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Computer, Control, Quantum and Information Engineering Vol :9, No :1, 2015.

31. Campbell R., Équations intégrales des fonctions de Mathieu associées et applications, Bulletin de la S. M. F., tome 78 (1950), p. 219-233

32. Equilibrium problems in potential theory by Mykhailo Bilogliadov, Oklahoma State University, 2016.

33. Locally homogeneous structures on Hopf surfaces, Benjamin McKay, University College Cork, Alexey Pokrovskiy, London School of Economics, arxiv, 2009.

Toulouse³⁴ sur l'équation de Riccati utilise plusieurs résultats du mathématicien dijonnais. Citons aussi le mémoire de HDR de Marc Jungers, en 2013, « Contributions aux équations généralisées de Riccati et systèmes à commutations. ». Cet auteur écrit notamment :

René Lagrange, quant à lui, étend en 1938 des critères d'intégrabilité [Lag1938]. Jusqu'à présent ces critères étaient donnés en considérant que l'équation transformée possède une intégrale particulière connue. Dans son article, il étudie systématiquement les covariances présentées par les coefficients et leurs dérivées relativement à la transformation homographique à coefficients constants de l'inconnue. Il en déduit alors un critère d'intégrabilité assez général, et comme il le précise lui-même, « dont l'intérêt théorique n'est peut-être pas négligeable ».

4.8 Les travaux en Analyse Combinatoire

Les articles de René Lagrange en Analyse Combinatoire sont eux aussi référencés. Par exemple, l'article de 1963, « Sur les combinaisons d'objets numérotés » est cité dans une publication de W.O. J. Moser et Morton Abramson de 1969³⁵.

L'article de 1962 de René Lagrange, « Quelques résultats dans la métrique des permutations », est mentionné dans une publication de Vladimir Baltic en 2010³⁶.

4.9 Autres écrits

René Lagrange a rédigé en 1925 le premier fascicule (tome I) du « Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications » d'Emile Borel, leçons professées par Emile Borel³⁷.

En 1965, René Lagrange publie « Sur les oscillations d'ordre supérieur d'une fonction numérique ». Les résultats de René Lagrange sont utilisés par Paulina Pych-Taberska dans un article de 1997 « Rate of Pointwise Convergence of Bernstein Polynomials for Some Absolutely Continuous Functions »³⁸ puis dans une publication de 2003, intitulée « Some properties of the Bézier–Kantorovich type operators »³⁹.

34. Algèbre et géométrie de l'équation de Riccati, Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 9 (1945), p. 1-64.

35. Enumeration of Combinations with Restricted Differences and Cospan, Journal of Combinatorial Theory, 7, 162-170 (1969).

36. On the number of certain types of strongly restricted permutations, Appl. Anal. Discrete Math. 4 (2010), 119–135.

37. Pour une analyse de ce Traité, voir North-Western European Journal of Mathematics, Le Traité du calcul des probabilités et de ses applications. Étendue et limites d'un projet borélien de grande envergure (1921-1939), par Martha-Cecilia Bustamante and., 2015.

38. Journal of Mathematical Analysis and Its Applications, 212, 9-19, 1997.

39. Journal of Approximation Theory 123 (2003) 256–269.

4.10 Prix

René Lagrange est lauréat en 1947 du prix Bordin de l'Académie des Sciences de Paris pour « l'ensemble de ses travaux en Géométrie »⁴⁰.

En 1953, René Lagrange reçoit le prix Carrière de l'Académie des Sciences de Paris⁴¹

5 Conclusion

Dans cette première version de l'analyse des travaux scientifiques de René Lagrange, nous avons mis en lumière d'une part l'importante production scientifique du savant et d'autre part la riche palette des sujets qu'il a abordés. Ses travaux sont loin d'être tombés dans l'oubli comme nous l'avons montré.

Il nous reste à poursuivre notre travail d'analyse en examinant encore de plus près les différents mémoires que René Lagrange a écrit.

40. Le prix est doté de 8000 francs de l'époque.

41. Prix doté de 25000 francs de l'époque.

Références

- [1] Les agrégés de l'enseignement secondaire 1809-1960, en ligne : rhe.ish-lyon.cnrs.fr
- [2] Annuaire du Collège de France 2007-2008, Résumé des Cours et Travaux (en ligne).
- [3] Matricule militaire, fiche de René Lagrange, Archives départementales de la Loire.
- [4] Cinquantenaire de l'Ecole de Physique et de Chimie Industrielles de la ville de Paris, 1933 : document numérisé sur le site des archives l'Ecole de Physique et de Chimie Industrielles de la ville de Paris.
- [5] Historique des 109e, 309e et 409e régiments d'artillerie lourde : 9e corps d'armée. 1919. (document numérisé sur Gallica, BNF).
- [6] Concours d'agrégation de 1921, Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 65-72 (numérisé sur NUMDAM).
- [7] Aubin D., L'élite sous la mitraille : les mathématiciens normaliens « morts pour la France », 1914-1918. Aventures de l'analyse de Fermat à Borel. Mélanges en l'honneur de Christian Gilain, Presses de l'université de Lorraine, pp.681-706, 2012. (hal-00903326)
- [8] Aubin D., L'élite sous la mitraille. Les normaliens, les mathématiques et la Grande Guerre, 1900-1925. Paris, Edition Rue d'Ulm, « Figures normaliennes », 2018, 374 P. Préface de Claude Viterbo.
- [9] Bang T., Niels Erik Nörlund in memoriam, Acta Mathematica, 1988.
- [10] Brezinski C., History of continued fractions and Padé approximants, Springer-Verlag, 1991.
- [11] , Cartan H, Sur Niels Erik Nörlund, in Notices sur les membres et les correspondants décédés, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 297 (septembre 1983).
- [12] Charle Christophe, Telkès Eva. 19. Cartan (Elie). In : , . Les Professeurs de la faculté des sciences de Paris, 1901-1939. Dictionnaire biographique (1901-1939) Paris : Institut national de recherche pédagogique, 1989. pp. 64-67. (Histoire biographique de l'enseignement, 25).
- [13] Charle Christophe, Telkès Eva. 43. Langevin (Paul). In : , . Les professeurs du Collège de France – Dictionnaire biographique 1901-1939. Paris : Institut national de recherche pédagogique, 1988. pp. 121-125. (Histoire biographique de l'enseignement, 3).
- [14] Chern Chevalley, Elie Cartan and his mathematical work, Bull. Amer. Math. Soc., Volume 58, Number 2 (1952), 217-250.
- [15] Cogliatia A., Mastrolia P., Cartan, Schouten and the search for connection, Historia Mathematica, Volume 45, Issue 1, pages 39-74, 2018.
- [16] Gispert H., Leloup J., Des patrons des mathématiques en France dans l'entre-deux guerres, Armand Colin, Revue d'histoire des sciences, 2009/1 Tome 62, pages 39 à 117
- [17] Godement R., Analyse mathématique, vol. 3. Fonctions analytiques, différentielles et variétés, surfaces de Riemann. Berlin, Heidelberg : Springer, 2002.

- [18] Analysis III, Analytic and Differential Functions, Manifolds and Riemann Surfaces, Universitext, Springer, 2015.
- [19] Le Ferrand H., The Journal de Mathématiques Pures et Appliquées(1917-1937) : correspondence between Henri Villat and Robert de Montessus de Ballore, arXiv1412.4607, 2014.
- [20] Leloup J., L'entre-deux-guerres mathématique à travers les thèses soutenues en France, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, 2009.
- [21] Pauty M. (sous la direction de), Mathématiciens en Bourgogne, Réalisation du CCSTI de Bourgogne, 2014.
- [22] Poincaré H., Sur les Equations Linéaires aux Différentielles Ordinaires et aux Différences Finies, American Journal of Mathematics, Vol. 7, No. 3 (Apr., 1885), pp. 203-258.
- [23] Poincaré H., Rapport sur les travaux de M. Cartan, fait à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, Acta Mathematica, 38, 11 Août 1914.
- [24] Pourprix, M.-T., Des mathématiciens à la faculté des sciences de Lille : 1854–1971. Acteurs de la Science. L'Harmattan, Paris, 2009.
- [25] Rivoal T., Application arithmétiques de l'interpolation lagrangienne, International Journal of Number Theory, vol 5, number 2, pp 185-208, 2009.
- [26] Roitman P. Le Ferrand H., The strange case of Paul Appell's last memoir on Monge's problem : sur les déblais et remblais, Historia Mathematica, Volume 43, Issue 3, 2016.
- [27] Siegmund-Schultze R., Rockefeller and the Internationalization of Mathematics Between the Two World Wars, documents and studies for the social history of mathematics in the 20th century, Basel ; Boston ; Berlin : Birkhauser, 2001 (Science networks ; Vol. 25).
- [28] Smith D.E., History of Mathematics, Volume I, Dover, New York, 1958.
- [29] Waldschmidt M., Auxiliary functions in transcendental number theory, Ramanujan Journal, 20, 341, 2009.

6 Annexes

6.1 Liste des publications de René Lagrange

Lagrange R. 1921 Sur le calcul différentiel absolu, C.R. Acad. Sci Paris 173, 1921.

Lagrange R. 1922a Sur l'application des variétés d'ordre p dans un espace x d'ordre n , C.R. Acad. Sci Paris 174, 1922, pp 658-661.

Lagrange R. 1922b Sur quelques applications du calcul différentiel absolu, C.R. Acad. Sci Paris 174, 1922, 521-523

Lagrange R. 1923a Sur les variétés sans torsion, C.R. Acad. Sci Paris, 176, 1923, pp 1121-1122.

Lagrange R. 1923b Sur les variétés à torsion totale nulle de l'espace euclidien, C.R. Acad. Sci Paris, 176, 1923, pp 562-563.

Lagrange R. 1923c Sur les systèmes adjoints différentiels linéaires, C.R. Acad. Sci Paris, 177, 1923, pp 1096-1098.

Lagrange R. 1923d Sur le calcul différentiel absolu, Imprimerie et Librairie Edouard Privat, Toulouse, 1923. 69 pp.

Lagrange R. 1924a Sur le calcul différentiel absolu, C.R. Acad. Sci Paris, 178, 1924, pp 1359-1362.

Lagrange R. 1924b Sur les ds^2 réductibles à deux formes de Liouville, C.R. Acad. Sci Paris, 178, 1924, pp 1682-1684.

Lagrange R. 1925a Sur la déformation d'une poutre et l'équation

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0.$$

C.R. Acad. Sci Paris, 181, 1925, pp 67-69

Lagrange R. 1925b Sur une classe de représentations conformes, C.R. Acad. Sci Paris, 182, 1925, pp 67-69

Lagrange R. 1925c Borel E., Traité du calcul des probabilités et des ses applications. Tome I. Rédigées par René Lagrange. Gauthier-Villars, 1925.

Lagrange R. 1926a Sur les intégrales quadratiques des équations de la mécanique, C.R. Acad. Sci Paris, 180, 1926, pp 260-262.

Lagrange R. 1926b Calcul différentiel absolu, 37 p. Paris, Gauthier-Villars, Mémoire des Sciences Mathématiques, fasc. 19, 1926.

Lagrange R. 1926c Sur les systèmes adjoints d'équations différentielles linéaires, Acta Math. 48, 179-201, 1926.

Lagrange R. 1926d Sur les fonctions de Legendre de première espèce et certaines fonctions associées, C.R. Acad. Sci Paris, 183, 1926, pp 15-17.

- Lagrange R. 1926e** Sur les fonctions de Legendre de première espèce et certaines fonctions associées, C.R. Acad. Sci Paris, 183, 1926, pp 383-385.
- Lagrange R. 1926f, 1927b** Sur un algorithme des suites. Sur certaines suites de polynômes. I, II., C.R. Acad. Sci Paris, 184, 1926, pp 1405-1407 ; 185, 1927, pp 175-178, pp 444-446.
- Lagrange R. 1927b** Sur les fonctions de Legendre de première espèce et certaines fonctions associées, Journ. de Math. (9) 6, pp 165-227, 1927.
- Lagrange R. 1928a** Mémoire sur les suites de polynômes, Acta Math. 51 (1928), no. 1, 201-309.
- Lagrange R. 1928b** Nörlund N.-E., Leçons sur les séries d'interpolation. Rédigées par R. Lagrange, 236 p. Paris, Gauthier-Villars, 1928.
- Lagrange R. 1929a** Sur les polynômes de Newton et certaines formules d'interpolation, Acta Math. 52 (1929), no. 1, 169-187.
- Lagrange R. 1929b** Nörlund N.-E., Leçons sur les équations linéaires aux différences finies. Rédigées par R. Lagrange, VI+153 p. Paris, Gauthier-Villars, 1929.
- Lagrange R. 1929c, 1929d** Sur certaines fonctions associées aux fonctions de Legendre, C.R. Acad. Sci Paris, 188 ; pp 1140-1141, pp 1372-1374, 1929.
- Lagrange R. 1931** Sur certaines fonctions associées aux fonctions de Legendre, Acta Math. 56 (1931), no. 1, 205-259.
- Lagrange R. 1932** Sur le calcul approché des intégrales définies, Acta Math. 59 (1932), no. 1, 373-422.
- Lagrange R. 1933** Sur le théorème de Poncelet, C.R. Acad. Sci Paris, 196, pp 319-321, 1933.
- Lagrange R. 1934a** Sur l'évaluation de l'erreur dans la méthode de Newton, Bull. math. Fac. Sci. et gr. Ec. 1, pp 129-132, 1934.
- Lagrange R. 1934b** Sur les congruences de cercles qui ont deux diamètres focaux, C.R. Acad. Sci Paris, 198, pp 1289-1291, 1934.
- Lagrange R. 1934c** Sur une classe de congruences de cercles, C.R. Acad. Sci Paris, 198, pp 788-790, 1934.
- Lagrange R. 1935** Mémoire sur les séries d'interpolation, Acta Math. 64 (1935), no. 1, 1-80.
- Lagrange R. 1936a** Sur une inégalité de Hobson, C.R. Acad. Sci Paris, 202, pp 1897-1899, 1936.
- Lagrange R. 1936b** Sur les théorèmes d'addition des fonctions de Legendre, C.R. Acad. Sci Paris, 203, pp 915-918, 1936.
- Lagrange R. 1936c** Sur les théorèmes d'addition des fonctions de Legendre, C.R. Acad. Sci Paris, 203, pp 1225-1227, 1936.

- Lagrange R. 1937** Sur les congruences de cercles qui ont deux diamètres focaux, J. Ecole polytechn., Paris, 1937; 9-44, 101-111, 193-213.
- Lagrange R. 1938a** Quelques théorèmes d'intégrabilité par quadrature de l'équation de Riccati, Bull. Soc. math. France 66, pp 155-163, 1938.
- Lagrange R. 1938b** Sur une famille de polynômes et certains développements de la fonction $x^{-m}e^x$, Acta Math. 69 (1938), no. 1, 1-19.
- Lagrange R. 1939a** Les familles de surfaces de révolution qui possèdent des harmoniques, Acta Math. 71 (1939), 283-315.
- Lagrange R. 1939b** Polynômes et fonctions de Legendre, Mémor. Sci. Math., 1939, (1939). fasc. 97, 83 pp.
- Lagrange R. 1941a** Sur les invariants conformes d'une courbe, C. R. Acad. Sci. Paris 212 (1941), 1123-1126.
- Lagrange R. 1941b** Propriétés différentielles des courbes de l'espace conforme à n dimensions, C. R. Acad. Sci. Paris 213 (1941), 551-553.
- Lagrange R. 1942** Définitions et théorèmes de métrique anallagmatique, Ann. Sci. Ecole Norm. (3) 59, (1942), 1-42.
- Lagrange R. 1943** Sur le tétraèdre et sur la sphère minimum contenant un ensemble de points, Bull. Sci. Math. (2) 67 (1943), 108-105.
- Lagrange R. 1944** Sur une classe d'harmoniques associés aux cyclides de révolution, Bull. Sci. Math. France 72 (1944), 169-177.
- Lagrange R. 1945** Propriétés métriques anallagmatiques des cycliques, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 62, (1945), 385-417.
- Lagrange R. 1947** Les familles de cônes de même sommet qui possèdent des harmoniques, Acta Math. 79 (1947), 1-15.
- Lagrange R. 1948a** Sur les congruences de cercles du plan, Bull. Sci. Math. (2) 71, 82-104.
- Lagrange R. 1948b** Sur les produits d'inversions, C.R. Acad. Sci Paris 226 (1948), 625-627.
- Lagrange R. 1948c** Sur les produits d'inversions, C.R. Acad. Sci Paris 226 (1948), 866-868.
- Lagrange R. 1950a** Sur les produits d'inversions, Acta Math. 82 (1950), 1-70.
- Lagrange R. 1950b** Sur les produits d'inversions, Bull. Sci. Math. (2) 74 (1950), 79-112.
- Lagrange R. 1950c** Les courbes de l'espace anallagmatique, Acta Math. 82 (1950), 327-355.
- Lagrange R. 1951a** Sur l'équivalence anallagmatique, Bull. Sci. Math. (2) 75 (1951), 47-64.

- Lagrange R. 1951b** Métrique anallagmatique, Acta Math. 86 (1951), 259-295.
- Lagrange R. 1952** Quelques problèmes sur les produits d'inversions, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 69, (1952), 83-108.
- Lagrange R. 1954** Sur les réseaux d'hélice de même cône directeur tracés sur certaines surfaces, Bull. Soc. Math. (2) 78, (1954), 50-80.
- Lagrange R. 1955** Les congruences planes de coniques qui n'ont points focaux, Acta Math. 93 (1955), 257-292.
- Lagrange R. 1957a** Sur le groupe de la famille des coniques du plan qui ont un élément de contact donné, C. R. Acad Sci. Paris 244 (1957), 1886-1868.
- Lagrange R. 1957b** Produits d'inversions et métrique conforme, Gauthier-Villars, Paris, 1957. x+332 pp.
- Lagrange R. 1957c** Sur le groupe ponctuel conservant la famille de coniques du plan qui ont un élément de contact donné, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 74, 1957, 197-229.
- Lagrange R. 1958** Sur les systèmes isogonaux de sphères, J. Math. Pures Appl. (9) 37 (1958), 225-244.
- Lagrange R. 1959** Sur les systèmes isogonaux de sphères, Ann. Sci. Norm. Sup. (3) 76 1959, 305-399.
- Lagrange R. 1960** Sur les sphères osculatrices et les arêtes de courbures successives d'une courbe, J. Math. Pures Appl. (9) 39 (1960), 33-62.
- Lagrange R. 1961** Sur les courbes qui engendrent par translation une surface minima, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 53 (1961), 173-187.
- Lagrange R. 1962a** Sur les permutations avec répétitions, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 79 1962, 23-70.
- Lagrange R. 1962b** Deux problèmes de répartition mixte, Bull. Sci. Math. (2) 86 (1962), no. 1, 1ère partie, 81-88.
- Lagrange R. 1962c** Quelques résultats dans la métrique de permutation, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 79 1962, 199-241.
- Lagrange R. 1963** Sur les combinaisons d'objets numérotés, Bull. Sci. Math. (2) 87 (1963), no. 1, 1ère partie, 29-42.
- Lagrange R. 1965** Sur les oscillations d'ordre supérieur d'une fonction numérique, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 82, 1965, 101-130.

6.2 Rapport d'Elie Cartan sur la thèse de René Lagrange

Archives Nationales de France, dossier Aj 16 Aj 16 5543

Le calcul différentiel absolu a son origine dans le problème traité par Christoffel, de la recherche des conditions pour que deux formes quadratiques de différentielles de n variables puissent être ramenées l'une à l'autre par un changement de variables. M. Lagrange s'est proposé de généraliser ce calcul en prenant comme variables indépendantes n intégrales curvilignes ω_i et non plus n fonctions de points x_i . En réalité, il indique une double généralisation. Dans un premier stade, celui auquel se rapportent presque tous les développements de sa thèse, l'auteur considère une forme quadratique des $d\omega_i$, les coefficients de la forme continuant à être des fonctions de points ordinaires; cela revient au fond à considérer une forme différentielle ordinaire et à changer l'expression analytique de cette forme, considérée comme fonctions algébriques des dx_i , en effectuant sur les dx_i une substitution linéaire (à coefficients fonctions de points). Le principal avantage de cette première généralisation est de permettre de ramener tout ds^2 à la forme

$$ds^2 = d\omega_1^2 + d\omega_2^2 + \dots + d\omega_n^2.$$

Ce point de vue est à rapprocher de celui auquel s'est placé M. Cartan dans plusieurs mémoires qui ne semblent pas du reste avoir influencés M. Lagrange (chose curieuse, celui-ci se trouve désigner par $d\omega_i$ ce que M. Cartan appelle ω_i).

Une seconde généralisation consiste à considérer une forme quadratique en $d\omega_i$, les coefficients étant eux-mêmes des fonctions d'intégrales curvilignes. On a ainsi des formes d'un type essentiellement nouveau; mais à leur égard M. Lagrange se borne à de très brèves indications de caractères purement formel et qui ne permettent pas de voir si les problèmes qu'on peut se poser présentent de l'intérêt ni même si ces problèmes (par exemple celui de l'application) sont susceptibles d'être formulés d'une manière précise.

Si nous faisons abstraction de cette seconde généralisation, le but essentiel de la thèse de M. Lagrange est l'extension des procédés du calcul différentiel absolu aux ds^2 exprimés analytiquement comme formes quadratiques de n expressions de Pfaff $d\omega_i$, et les applications qu'on peut en faire à la géométrie des variétés métriques.

Dans son premier chapitre, M. Lagrange, partant à priori de n expressions de Pfaff $d\omega_i$, définit la différentiation absolue d'un système de quantités à un ou plusieurs indices au moyen de l'introduction de quantités τ_{ijk} satisfaisant à la condition que les dérivées successives absolues, prises par rapport aux ω_i , d'une fonction de point, sont indépendantes de l'ordre des différentiations. Les τ_{ijk} achèvent d'être déterminés par la condition que la différentiation absolue respecte la loi de « composition » des systèmes à indices : l'auteur entre ainsi implicitement dans la théorie de l'espace métrique dont le ds^2 est $d\omega_1^2 + d\omega_2^2 + \dots + d\omega_n^2$. Il démontre la propriété fondamentale $\bar{d}d\omega_i = d\bar{\delta}_i$, où

le trait horizontal [le barre] indique qu'il s'agit d'une différentiation absolue. Il introduit enfin les symboles de Riemann et établit les relations les plus simples qui existent entre ces symboles ainsi qu'entre leurs premières dérivées absolues.

Dans le Chapitre II, M. Lagrange rattache la covariance, telle qu'on la définit ordinairement, au groupe des transformations orthogonales et à ses prolongements – et c'est là que réside le principal intérêt du travail ; les propriétés de la covariance et sa conservation par la différentiation absolue (introduite un peu artificiellement dans le 1er Chapitre) s'en déduisant immédiatement ; application en est faite en particulier aux symboles de Riemann et à leurs dérivées. Les deux paramètres de Beltrami sont retrouvés sous une forme très simple.

Dans le Chapitre III, l'auteur, en exprimant les conditions d'intégrabilités du système qui exprime l'application de deux variétés données, retrouve les résultats classiques de Christoffel. Il applique la même méthode à la recherche des conditions pour qu'une variété donnée admette une représentation conforme sur l'espace euclidien ; il considère le cas plus général où le ds^2 de la variété donnée contiendrait en facteur l'exponentielle d'une intégrale curviligne. Le Chapitre se termine par quelques brèves indications sur le problème de la représentation conforme de deux variétés, ce qui permet de retrouver, dans le cas $n = 3$, la forme différentielle covariante de M. Cotton.

Le Chapitre IV expose succinctement la théorie du vecteur en montrant la relation entre la différentiation absolue et le parallélisme de Levi-Civita. Il établit les formules de Frenet pour une courbe et se termine par la théorie des directions principales d'un vecteur variable.

Le Chapitre V a pour but l'étude des propriétés métriques d'une V_p plongée dans un espace E_n , en se basant sur les notions de ce que M. Lagrange appelle la différentiation absolue sur la variété V_p . Les invariants métriques les plus simples sont étudiés : ce sont les courbures externes ; l'auteur signale particulièrement la courbure totale externe et la courbure moyenne externe. En particulier pour une V_{n-1} , la courbure totale externe est la somme des produits deux à deux des courbures principales. Elle ne se confond, quelle que soit la variété V_{n-1} , avec la courbure totale riemannienne de cette variété que si le tenseur x_{ijk} de l'espace E_n est identiquement nul (pour $n = 3$ si l'espace est euclidien). Des indications intéressantes sont données sur les variétés planes et les variétés développables. Enfin le problème des invariants métriques est rattaché à ce que M. Lagrange appelle le problème de l'application de deux variétés V_p ; ce mot semble assez mal choisi, parce que dans le cas particulier où l'espace E_n est euclidien (ou à courbure constante), le problème en question se réduit à celui de la congruence des deux variétés et non pas de leur application au sens de Gauss ; on peut ajouter, mais c'est une question qui n'est pas soulevée par l'auteur, que dans un espace E_n quelconque, il est exceptionnel

que deux variétés V_p distinctes ($p \geq 2$) aient les mêmes invariants métriques.

L'originalité du travail de M. Lagrange n'est pas à chercher dans les résultats géométriques obtenus, qu'on retrouverait sans trop de peine dans les mémoires des géomètres italiens modernes. Elle réside dans la généralisation des méthodes du calcul différentiel absolu à des formes différentielles exprimées au moyen d'expression de Pfaff non différentielles exactes. M. Lagrange possède parfaitement son outil; le travail qu'il présente à la Faculté nous fait espérer que dans le domaine si vaste de la Géométrie générale il sera capable de produire des mémoires originaux importants; ce travail nous paraît digne d'être accepté comme thèse.