



**HAL**  
open science

# D'un problème d'optimisation d'une surface agricole au cours sur le sens de variation en seconde : une étude de cas

Aline Robert, Janine Rogalski, Fabrice Vandebrouck

## ► To cite this version:

Aline Robert, Janine Rogalski, Fabrice Vandebrouck. D'un problème d'optimisation d'une surface agricole au cours sur le sens de variation en seconde : une étude de cas. 2020. hal-02867844

**HAL Id: hal-02867844**

**<https://hal.science/hal-02867844>**

Preprint submitted on 15 Jun 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**LDAR**

LABORATOIRE DE DIDACTIQUE  
ANDRÉ REVUZ



**Cahiers du laboratoire de didactique  
André Revuz  
n°22**

**Juin 2020**

**D'UN PROBLÈME D'OPTIMISATION D'UNE SURFACE AGRICOLE  
AU COURS SUR LE SENS DE VARIATION EN SECONDE :  
UNE ÉTUDE DE CAS**

Par Aline Robert, Janine Rogalski

*et la participation de Fabrice Vandebrouck*

ISBN : 978-2-86612-395-6

ISSN : 2105-5203

## **Imprimé par l'IREM de Paris – Université de Paris**

Exemplaire **téléchargeable** sur notre site dans la section Publication

<https://irem.u-paris.fr/>

### **Coordonnées de l'IREM**

Pour venir à l'IREM (il est possible de consulter et d'acheter les publications sur place):

Université de Paris, Bâtiment Sophie-Germain,  
8 place Aurélie Nemours (sur l'avenue de France), huitième étage,  
75013 Paris 13ème arrondissement  
(métro 14 -Bibliothèque François Mitterrand ou tramway ligne T3a – Avenue de France )

### **Nous Contacter**

Pour téléphoner: 01 57 27 91 93

Pour écrire à l'IREM concernant les publications:

*par voie postale:*

**Locufier Nadine**  
**IREM de Paris – Case 7018**  
**Université Paris Diderot**  
**75205 Paris cedex 13**

*par voie électronique:*

**nlocufier@irem.univ-paris-diderot.fr**

La liste des publications de l'IREM est mise à jour sur notre site web :

**<https://irem.u-paris.fr/>** (en bas à gauche de la page d'accueil)

Pour rester informé:

inscription à la liste de diffusion de l'IREM de Paris également sur le site de l'IREM

## **D'un problème d'optimisation d'une surface agricole au cours sur le sens de variation en seconde : une étude de cas**

Aline Robert, Janine Rogalski, avec la participation de Fabrice Vandebrouck

Mots clés : fonctions, sens de variation, proximités, cours, ZPD, activité, activités de l'enseignant

Ce texte fait suite au cahier de formation n°16, qui présente un scénario de formation de formateurs portant sur les activités d'introduction et les moments d'exposition des connaissances (cours<sup>1</sup>) s'appuyant sur l'exemple du thème « sens de variation des fonctions » en seconde. Ce scénario comporte en particulier 5 vidéos accessibles sur le site de l'IREM, dont trois capsules (courtes vidéos destinées aux participants à la formation), élaborées par les auteures, une vidéo de cours filmée en classe (qui est analysée dans le scénario) et, en annexe, une vidéo plus générale sur les formations.

Nous reprenons dans la première partie de ce texte l'argumentaire sur les proximités et leur usage, notamment lors de l'étude de moments de cours. Nous précisons notre méthodologie de repérage des proximités, en particulier dans une transcription de tels moments.

Dans la deuxième partie nous présentons l'étude d'une vidéo filmée dans une classe de seconde, correspondant au moment où l'enseignant reprend une activité d'introduction (une optimisation de surface agricole), menée en demi-groupes le matin même puis commence le cours associé sur les variations des fonctions. Nous avons travaillé sur la transcription que nous avons réalisée et qui est jointe (presqu'entièrement) en annexe 3. Après avoir rapidement redonné des éléments de relief sur l'enseignement de la notion de variation des fonctions, nous indiquons le synopsis de la séance que nous avons établi et donnons des tableaux récapitulatifs des proximités trouvées. Nous interprétons (et questionnons) ces données.

En conclusion nous revenons sur ce type d'analyses et élargissons le propos à des questions plus générales.

### **I Retour sur les proximités : argumentaire théorique et précisions méthodologiques**

#### **A) Quoi, pourquoi et pour quoi - le cas particulier des moments d'exposition des connaissances**

Nous inscrivons nos recherches sur les liens entre enseignement et apprentissages des élèves dans le cadre de la théorie de l'activité<sup>2</sup>, et à ce titre, nous traquons les activités mathématiques que développent les élèves, notamment en classe. Si la nature des tâches proposées et le scénario dans lequel elles s'inscrivent en sont un facteur déterminant, les déroulements correspondants, organisés par l'enseignant et façonnés par les élèves eux-mêmes, compte tenu du contexte en jeu, en sont aussi des variables importantes à étudier.

En particulier, inspirés par le principe vygotskien d'action dans la ZPD, nous nous intéressons aux éléments du discours enseignant, développé en classe suite aux activités mathématiques des élèves (quelles qu'elles soient<sup>3</sup>), qui pourraient s'inscrire dans leurs ZPD concernant des connaissances enseignées ou à enseigner. Le mot connaissance est ici à prendre dans un sens

---

<sup>1</sup> Ce mot « cours » sera réservé à l'exposition des connaissances dans ce texte.

<sup>2</sup> Il s'agit d'une inscription particulière, différente de celle adoptée par de nombreux chercheurs anglo-saxons, décrite dans le cahier du LDAR n°18 par exemple

<sup>3</sup> Nous ne tenons pas compte de la « taille » des activités.

large, ce peut être une définition, un théorème, une propriété, une représentation, une méthode ou plusieurs de ces éléments ensemble. L'hypothèse générale à l'appui, qui justifie cet intérêt, est que des activités des élèves, effectuées avec l'aide de l'enseignant, mettant en jeu des connaissances à acquérir proches de leurs connaissances acquises, peuvent faciliter l'acquisition visée. Il faut souligner que l'inscription dans les ZPD des élèves peut se réaliser de différentes manières et avec des effets sans doute variables. Par exemple différents types d'aides peuvent être relevés, celles qui sont plutôt à fonction procédurale, indiquant par exemple une démarche à suivre en réponse à une recherche vaine<sup>4</sup> et permettant une reprise de l'activité, ou à fonction constructive, élargissant à ce qui a été fait<sup>5</sup> et permettant une généralisation.

Plus précisément dès lors que ces interventions de l'enseignant s'appuient **explicitement** sur quelque chose qui est susceptible d'être partagé avec les élèves, nous leur avons attribué une dénomination spécifique, en lien avec leur fonction supposée dans le processus d'acquisition : nous les appelons proximités discursives<sup>6</sup>. Il s'agit de rapprochements, explicites<sup>7</sup>, même très locaux, entre ce qui est travaillé en classe et ce que l'enseignant vise, relevés comme autant de traces d'un travail inscrit dans la ZPD des élèves et qui peut contribuer aux acquisitions<sup>8</sup>. Par exemple une aide à fonction procédurale peut ou non reprendre ce qui a été tenté par les élèves en le mettant en lien avec la démarche attendue, et ainsi porter ou non une proximité.

Cependant ce travail des élèves prend des formes différentes, recherche d'exercices, ou correction, ou même écoute de cours (exposition des connaissances). Ce dernier cas nous a paru nécessiter des adaptations de nos catégories précédentes, dans la mesure où les tâches en jeu sont peu précises et les activités, comme l'écoute par exemple, particulièrement difficiles à observer, voire difficiles à expliciter.

Nous nous centrons donc maintenant sur ces moments de cours où l'enseignant présente des nouvelles connaissances, en prenant en compte tout ce qui a pu éventuellement précéder cette exposition des connaissances, en lien direct avec elle. Dans ce cas, pour contribuer à l'appropriation de connaissances nouvelles ayant un certain degré de généralité, l'enseignant peut par exemple s'appuyer sur un travail contextualisé ayant déjà eu lieu dont il exhibe une généralisation explicitée comme telle<sup>9</sup> ou, au contraire, exemplifier explicitement la manière d'utiliser les nouvelles connaissances qui viennent d'être présentées dans des exemples ou des activités immédiates proposées aux élèves. Ce nouveau peut ainsi être une généralisation de ce qu'ont fait ou dit les élèves, mais aussi une manière différente de voir les mêmes choses, avec éventuellement une visée d'organisation des connaissances. Or il se peut que ces derniers éléments n'aient pas été introduits par les élèves avant le cours en jeu, alors même qu'ils ne

---

<sup>4</sup> Mais qui a engendré un questionnement

<sup>5</sup> On peut se demander s'il n'y a pas des aides à visée constructive AVANT la résolution par l'élève, c'est-à-dire élargissant son horizon sans toutefois modifier la tâche en elle-même.

<sup>6</sup> Nous nous restreignons aux proximités cognitives, tout en reconnaissant l'importance d'autres proximités qui agissent indirectement sur les activités, comme des encouragements ciblés par exemple, ou des interruptions d'une activité trop longue, qui correspondraient à des proximités en acte, etc. (cf. Robert et Vandebrouck, RDM 2014). Nous ne recherchons pas non plus les proximités « ostensives », correspondant à ce qui est montré par l'enseignant pour accompagner son discours, notamment au tableau.

<sup>7</sup> Jugés comme tels par le chercheur

<sup>8</sup> On ne considère ainsi pas les proximités « en-acte », référant au fait que ce soit suffisamment automatisé dans la pratique du professeur pour être familier aux élèves et donc que ça participe aussi de leurs activités mathématiques dans une certaine mesure...

<sup>9</sup> Par exemple accompagnant une institutionnalisation au sens de Brousseau par exemple

sont pas éloignés de connaissances antérieures, par exemple du fait d'activités ayant été faites à des moments différents.

Cela nous amène à trois élargissements de la notion de proximité, spécifiques à l'exposition des connaissances. D'une part nous incluons dans ce qui peut servir d'appui aux enseignants pour développer ce qu'il vise, certaines connaissances des élèves, ayant fait l'objet d'activités mais évoquées à ce moment-là en tant que connaissances déjà-là, proches des connaissances visées. En fait c'est bien une activité des élèves qui est quand même en jeu lorsque l'enseignant évoque ces connaissances, mais liée directement à un savoir et non à une mise en fonctionnement de ce savoir. Ce peut être sous forme de rappel, ou en relation avec le sens de la notion ou sa fonction. Souvent même ce sont des questions de l'enseignant qui ont pour objet ces rappels, et, de ce fait, les activités des élèves prennent alors la forme de réponses à ces questions, au moins pour certains. C'est un deuxième élargissement : nous nous intéressons aux questions de l'enseignant qui pourraient amener les élèves à une réflexion (considérée comme une activité) leur faisant commencer à mettre en lien ce qu'ils savent (ou ont fait) et quelque chose de nouveau. Charge bien entendu à l'enseignant d'exploiter les réponses, pour qu'il y ait proximité. Encore faut-il qu'il y ait au moins une réponse : cela fait partie de ce qui peut être analysé. Enfin nous incluons dans les proximités que nous repérons certains éléments du discours mettant en jeu des connaissances des élèves supposées acquises par l'enseignant, associées à un savoir disponible ou au moins facilement reconnaissable, sans qu'il y ait de traces de ces acquisitions et des activités de reconnaissance correspondantes dans le corpus dont nous disposons. Il y a là une décision du chercheur, justifié par ce qu'il sait des programmes par exemple et de l'histoire de la classe.

Finalement, pendant les cours, nous repérons des proximités lorsque le discours de l'enseignant rapproche explicitement du déjà-connu (ou presque) ou du déjà-fait<sup>10</sup>, ou des échanges ayant lieu pendant le cours, qu'on en ait des traces directes ou indirectes, et autre chose, du nouveau, visé, proche de ce qui précède. Cela prend la forme de liens, à divers niveaux, entre savoir ancien et savoir nouveau ou entre des aspects différents des connaissances ou des méthodes etc. Cela sera précisé ci-dessous.

Notre objectif de recherche est ainsi de différencier les cours des enseignants, en exhibant des usages divers des proximités attachées à des choix de contenus précisés et, si possible, d'aller un peu plus loin, en tentant des mises en relation avec des productions d'élèves. Y-a-t-il des retombées sur les apprentissages de la manière dont l'enseignant a mené son cours qui soient accessibles à nos observations ? Ce peut être sur les résolutions d'exercices mais aussi, à un niveau plus global et peut-être à plus long terme, sur certaines représentations que les élèves se construisent ou non des notions en jeu, voire des mathématiques (cf. Thèse Adri).

Cela étant, il est clair que les exercices qui suivent le cours et les activités auxquelles ils donnent lieu ont un impact majeur sur les apprentissages – en fait c'est l'ensemble cours-exercices qui est en jeu.

## **B) Des notions particulières à enseigner : les FUG**

Cependant il y a des notions à enseigner qui d'une part sont difficilement susceptibles d'être préparées par de véritables activités d'introduction et d'autre part ne donnent lieu qu'à peu d'exercices. Ce sont des notions difficiles, souvent exprimées avec un formalisme

---

<sup>10</sup> Du déjà supposé connu, compte tenu de l'histoire de la classe – d'où l'importance du contexte historico - culturel de la TA.

généralisateur et unificateur (FUG) qui ne peut pas être ré-imaginé par les élèves seuls<sup>11</sup>. Autrement dit, dans ces cas-là, les exemples où la notion sert de manière contextualisée ou les descriptions perceptives (notamment dynamiques, ou temporelles) ne suffisent pas à faire concevoir aux élèves le formalisme en jeu : il y a un « saut » conceptuel, voire un obstacle si les représentations antérieures suffisent dans un certain nombre de cas assez simples, empêchant l'installation visée. Soit ce formalisme simplifie le travail mathématique (cf. structures algébriques) soit il permet une opérationnalisation impossible sinon (cf. définition de la convergence des suites, sens de variation, nombre dérivé). Il se trouve que, dans ce deuxième cas, des théorèmes ultérieurs, algébriques, démontrés grâce au formalisme en question, permettent de ne plus avoir recours à lui dans la majorité des cas, d'où le faible nombre d'exercices évoqué ci-dessus.

Pour ces notions, le cours a alors une place un peu différente de ce qui a été développé ci-dessus. Certes la question se pose de la pertinence d'un enseignement en partie « artificiel », dont les raisons d'être ne sont pas directement du niveau des élèves. Mais on peut objecter qu'il s'agit là d'une réalité mathématique incontournable dont on ne peut infiniment retarder la présentation aux élèves, et qui, dans une perspective à moyen terme, permet une familiarisation bien utile. Si on attend trop, cela pourrait conduire à un véritable embouteillage de nouveaux formalismes, encore plus difficiles à acquérir tous à la fois... L'enjeu est vraiment la construction des connaissances envisagée sur un moyen terme. De ce fait, il s'agit de préparer au maximum l'introduction du nouveau formalisme, en allant jusqu'au bout de ce qui peut être intuitif ou visuel ou dynamique, en sachant qu'on ne peut pas cependant atteindre ce qu'on vise en s'appuyant sur ce qui vient des élèves, et, une fois l'introduction faite par l'enseignant, l'accompagner au maximum en explicitant le « gain » et en revenant aux situations antérieures.

L'objet d'étude précis choisi ici relève de ce type de notion : c'est le sens de variation des fonctions – notion abordée en seconde en France, avec son formalisme algébrique, totalement nouveau. Les fonctions en général sont introduites en troisième, avec une étude précise des seules fonctions linéaires et affines.

On a étudié dans un premier temps les moments d'exposition des connaissances, avec le projet ultérieur de les mettre en rapport avec des productions d'élèves, rapidement après le cours et plus tard dans l'année.

### **C) Comment étudier le cours ? Eléments méthodologiques**

Nous travaillons sur des transcriptions, si possible à partir de vidéos ou sinon d'enregistrements audio.

#### 1) Des éléments globaux : relief et contexte

Le relief sur la notion<sup>12</sup> est établi, servant de référence à l'étude. Il s'agit d'une triple analyse croisant les études épistémologique (étude de la notion), curriculaire (programmes) et cognitive (difficultés connues des élèves), à appliquer à la classe étudiée. En particulier, en tenant compte du contexte, pour autant qu'il puisse être connu, le chercheur précise ce qui est nouveau et les

---

<sup>11</sup> Et qui d'ailleurs a souvent mis longtemps à être établi par les mathématiciens eux-mêmes en général

<sup>12</sup> Il s'agit du relief sur la notion, son enseignement et son apprentissage. On réfère donc non seulement à la notion elle-même, aux programmes d'enseignement, aux élèves, mais on s'inscrit dans un contexte : le relief pour une classe n'est peut-être pas le même dans une autre classe où le scénario a été fait différemment en amont ! Cette prise en compte du contexte, nécessaire à l'étude des activités des élèves qui est au centre de nos analyses, constitue une différence avec ce qui est étudié dans le Modèle Epistémologique de Référence par exemple.

(supposés) acquis antérieurs des élèves, compte tenu des programmes notamment, et, compte tenu de la nature même de la notion, à rappeler, et dégage les difficultés connues ou prévisibles des élèves. Quoiqu'il en soit, il faut au moins préciser ce qui a précédé le cours étudié, et particulièrement les tâches d'introduction s'il y en a – et si c'est possible ce qui a suivi le cours, notamment si on se lance dans des évaluations.

Un synopsis de la séance est souvent produit, dégageant les principaux épisodes, les questions aux élèves, leurs réponses et leurs propres questions, accompagné de la recherche des proximités.

## 2) l'étude des proximités discursives du cours

Plusieurs dimensions sont repérées dans les transcriptions analysées, qui renseignent sur la nature des rapprochements cherchés et la manière dont ils peuvent jouer : le type de discours en jeu, les modes de production et points d'appui, la forme des éléments du discours, les contenus en jeu. De fait ces classifications permettent de réfléchir à l'impact potentiel des proximités, selon ce sur quoi elles portent.

### *a) Type de discours en jeu : lien avec le « méta »*

Avant de décrire le type de discours en jeu dans les proximités, nous revenons sur notre utilisation du mot méta (Robert et Robinet, 1996, Robert & al. 2012). Il est utilisé pour qualifier un commentaire sur les mathématiques ou le travail mathématique en jeu<sup>13</sup>, et permet de distinguer le discours strictement mathématique donné aux élèves, les définitions, le vocabulaire mathématique, les énoncés de théorèmes par exemple, et un discours qui agrmente le premier, y ajoute un éclairage, souvent en langage courant. Ce peut être par l'introduction de descriptifs non mathématiques de ce qui est en jeu (« qu'est-ce qu'on a constaté ? », « C'est la même chose », « avec l'idée... », « c'est ce qu'on a fait »...). Il peut ainsi y avoir à la fois des éléments de structuration qui sont ajoutés au travail des élèves (l'évocation d'étapes, d'objectifs) et des éléments décrivant localement l'activité en cours : « regarder de très près », « avoir une vision globale », « essayer de réduire la complexité ». Ce peut être aussi une explicitation en lien avec le sens ou l'usage ou même l'intérêt de ce qui est commenté. Ce peut être une représentation qu'on peut s'en faire, y compris familière (« le point où ça bascule » pour décrire le changement de croissance des valeurs). Ce peuvent être la présentation, voire la comparaison de démarches, mélangeant des termes mathématiques et non mathématiques. On y place aussi des « recommandations » de l'enseignant : « à retenir », « à ne pas perdre de vue », « pour avoir des références derrière un mot (général) ».

En fait il y a plusieurs « niveaux » de méta, du plus général au très particulier (cf. Robert et Tenaud, 1988).

De plus l'attribution du mot à certains extraits de discours n'est pas toujours tout à fait évidente : ainsi, en forçant un peu le trait, lorsque l'enseignant explicite un exemple, le mot exemple a deux valeurs, une mathématique liée à son texte, et une plus méta, liée à la contextualisation qui est faite d'un énoncé plus général. C'est selon ce que développe l'enseignant à ce sujet qu'on introduira ou non une coloration « méta », voire une proximité si l'enseignant explicite ce que les élèves ont à contextualiser pour passer de l'énoncé général à l'exemple, en un mot s'il y a rapprochement. Encore faut-il que les (des) élèves puissent le ressentir comme tel, au chercheur de l'apprécier<sup>14</sup>.

---

<sup>13</sup> Ce n'est donc pas exactement le langage mixte évoqué par C. Laborde, du fait de la présence de commentaires.

<sup>14</sup> C'est sans doute aussi le cas de l'enseignant mais nous ne nous donnons pas les moyens de le vérifier.

On repère ainsi les proximités dans le discours de l'enseignant, en tenant compte des contenus en jeu et de leur « histoire » dans la classe. ». C'est le lien avec ce qui vient des élèves ou peut être supposé présent chez les élèves (le contexte) qui permet de trancher entre simple commentaire et proximité, c'est-à-dire rapprochement. Là encore avec quelquefois des hésitations dans la mesure où le chercheur ne connaît pas tout le contexte ! Les rapprochements retenus sont souvent des interventions méta, mélangeant un élément mathématique et une appréciation sur cet élément ; ce peuvent être des énoncés qualifiant ce qui est en jeu dans l'activité des élèves ou dans les connaissances présentées, comme des changements de points de vue explicites ; ce peuvent être des images ou du vocabulaire familiers ou extra-mathématiques en relation directe avec le travail en cours ; ce peuvent être des rappels reliant la mémoire de la classe et ce qui est fait ou dit ; ce peuvent être des questions, y compris mathématiques, mais qui forcent la réflexion vers ce qui est visé, à partir de ce qui a été fait.

Il faut préciser que certains des commentaires méta ne sont pas des proximités, dans la mesure où, encore une fois, ils ne comportent pas de lien explicite avec les activités des élèves (au sens large). En particulier, des commentaires en langage familier éclairent le propos, sans être pour autant directement proches du travail des élèves, avec les mots « besoin », « nécessité », « facile », « important », « intéressant », « attention », « évidemment », « clair », « suffisant », « on vit avec ça », « terme choisi par les mathématiciens ».

On a déjà signalé par ailleurs que les aides procédurales, qui comportent souvent des explications sur la mise en œuvre attendue, ne sont pas toujours des proximités. Autre exemple<sup>15</sup> : l'enseignant choisit comme variable  $x$  pour le côté et explique

Dans les deux groupes on est arrivé, d'une façon pas forcément de la même façon, mais on est arrivé du coup à exprimer la longueur des côtés parallèles à la rivière en fonction de  $x$  déjà. Et donc on est arrivé à  $750 - 2x$  et dans l'autre groupe on a écrit  $750 - 2a$ , mais c'est la même chose. Ça c'est pour qu'on soit tous d'accord sur les notations.

Le début de l'extrait résume ce qui a été fait dans chaque groupe et peut représenter une proximité rappelant l'activité du matin, qui toutefois n'apporte pas d'élément nouveau. En revanche le discours méta des segments de phrase en italique n'a pas été précédé d'une question et présente une justification du choix des notations sans rapport direct avec l'activité des élèves, vu qu'ils avaient fait des choix différents. Nous n'y voyons pas une proximité

Enfin, ce qu'on apprécie comme proximités ne peut représenter que des proximités a maxima, qui s'appuient sur des activités possibles de certains élèves dans la classe, et il est fort possible qu'elles échappent tout ou partie à d'autres élèves ou qu'elles ne soient pas des proximités pour eux. Autrement dit, côté élève, il faut être attentif au discours de l'enseignant et avoir présent à l'esprit ce qu'on a fait pour s'approprier le lien que l'enseignant présente oralement, même si c'est explicite, même si c'est répété (comme souvent).

#### *b) Modes de production des proximités et points d'appui*

On distingue plusieurs modes de production des proximités et plusieurs « points d'appui ».

i) elles peuvent être spontanées, sous forme de commentaires ajoutés par l'enseignant, en lien avec ce qui a été fait ou même avec ce qui est (supposé) connu mais sans avoir été nécessairement évoqué directement par les élèves au moment analysé. Précisons que c'est le

---

<sup>15</sup> Les exemples donnés ici sont tirés de la transcription étudiée ensuite.

chercheur qui suppose que l'enseignant considère qu'il y a proximité, implicitement ou non<sup>16</sup>. Ce peut être fait sous le mode d'un rappel, à condition que celui-ci soit mis en lien avec autre chose, fait ou dit par les élèves, ou supposé présent sans que cela ait été exprimé. Un exemple : l'enseignant rappelle là où on en est dans la résolution et repose le problème, supposé présent dans les têtes des élèves (mais non redit par eux de cette façon).

Alors maintenant quel est le problème ? Qu'est-ce qu'on va faire maintenant de cette fonction ? Maintenant qu'on a passé le cap du numérique à l'algébrique avec l'idée que grâce à ça on va avoir accès à toutes les surfaces possibles : puisque  $x$  représente toutes les longueurs possibles pour ce côté-là (il montre le tableau), on va avoir toutes les surfaces possibles (il montre la formule de la surface).

La qualification du changement de cadre de travail s'appuie sur l'activité correspondante menée le matin (dans les deux groupes l'expression de la fonction a été obtenue et mutualisée). Rappelons que nous n'avons pas repéré les proximités ostensives, même s'il y en a beaucoup dans cette séance.

ii) Elles peuvent aussi être ajoutées par l'enseignant après des réponses d'élèves à ses questions ou après des questions d'élèves ou des propositions d'élèves. Elles ont donc lieu pendant des interactions, mais là encore le chercheur doit tenir compte du contexte pour les identifier et interpréter des éléments du discours comme pouvant être des proximités, qui peuvent d'ailleurs s'enchaîner les unes aux autres. Par exemple en réponse à la question de l'enseignant : n'oubliez pas la question qu'on se pose, un élève dit : *le plus grand champ possible* et l'enseignant ajoute, de manière plus générale, en réintroduisant la fonction modélisant le problème :

Voilà trouver le plus grand champ possible en surface Donc savoir si cette fonction elle a une valeur maximale

En fait, encore une fois, l'activité introductive du matin a beaucoup tourné autour de cette question.

iii) Un cas particulier : les proximités sous forme de questions de l'enseignant. Une question de l'enseignant peut provoquer une réflexion à partir de ce qui vient d'être fait ou dit ou sur ce qui est connu (général ou non), réflexion susceptible de compléter par ou de faire ajouter un nouvel élément, d'où le label proximité. Nous avons ajouté dans la transcription, dans la mesure du possible, l'effet de la question – si elle a été répondue ou non, au moins par un élève.

Par exemple, après un travail collectif sur le tableur (avec la classe) l'enseignant demande, poussant les élèves à reprendre ce qui a été dit par les uns et les autres<sup>17</sup> :

Il se trouve que dans la première partie du tableau qu'est-ce qu'on a constaté ?

L'enseignant compte sans doute sur le fait que parmi les réponses, il y en aura une au moins attendue, ce qui se vérifie largement.

iv) enfin les proximités s'appuient sur divers éléments venant des élèves : une activité passée, notamment l'activité d'introduction (AI) sur la tâche d'introduction ou une activité implicite de

---

<sup>16</sup> Dans l'étude présentée, les intentions réelles de l'enseignant, conscientisées ou non d'ailleurs, ne sont pas connues. Un travail ultérieur doit être mené pour confronter les points de vue du chercheur et de l'enseignant.

<sup>17</sup> Il faut être attentif au fait que les élèves peuvent très bien avoir constaté plein de choses qui ne servent pas le propos de ce qui va être dit... si on n'a pas au moins un élève qui dit ce qu'il faut entendre (activité a maxima).

reconnaissance d'une connaissance supposée par l'enseignant (CS) – interprétée comme tel par le chercheur ou un élément, savoir ou activité à venir (F).

Cet étiquetage s'avère difficile à réaliser – plus facile au début de la transcription qu'après.

v) Il peut aussi se présenter des « occasions manquées » – aux yeux des chercheurs, compte tenu du relief... mais non compte tenu du contexte ! Il y a des cas où le chercheur imagine, en lien avec le relief sur la notion, qu'on pourrait ajouter un rapprochement (pas nécessairement dans la classe étudiée), avec des éléments précédents ou à venir mais les premières ont plus de chances d'être vraiment une proximité : on évoque alors des occasions de proximités manquées. On a déjà indiqué que les anticipations sont de peu d'effets sur beaucoup d'élèves. Entendons-nous bien : cela reste « théorique », car seul le déroulement en situation, avec toute la complexité qu'on sait, autoriserait à imaginer des alternatives. A un moment donné par exemple, l'enseignant reprend le calcul de la fonction :

C'est exactement ce qu'on a fait on additionne les deux (montre  $x$ ), on obtient  $2x$  et on l'enlève à 750 pour avoir la longueur qui reste, pour être sûr qu'au total ça fait 750.

Un élève continue à ne pas comprendre. Il n'est pas exclu qu'il aurait pu être éclairant pour l'élève de penser à 750 comme faisant partie d'une expression algébrique, et pas seulement comme un nombre qui ne se « mélange » pas à de l'algébrique...

Il peut aussi y avoir des proximités impossibles, au moins avant l'exposition des connaissances : c'est même tout le problème posé par l'enseignement de ces notions FUG évoquées ci-dessus. La prise de sens attendue repose alors sans doute davantage sur les proximités faites après cette exposition<sup>18</sup>.

*c) Une classification des proximités en relation avec leur place dans le processus d'exposition des connaissances*

Le premier mode rapprochement avec les élèves est la répétition, la reprise pure et simple de phrases des élèves, quel que soit le moment du cours. Mais ces reprises peuvent ne pas porter vraiment de proximité au sens où cela nous intéresse car elles ne contiennent pas de lien entre des éléments différents ni d'ajout. Ce sont plutôt des validations (implicites) – correspondant à des calculs, résultats numériques ou algébriques ou graphiques, lectures (cf. activité de « traitement »). Nous n'en tenons pas compte.

Souvent, en revanche, l'enseignant reprend ce qui vient des élèves mais en le transformant (plus ou moins) ou en le complétant. Ce peut être en généralisant, que ce soit vers un niveau générique ou général<sup>19</sup>, ou au contraire en contextualisant, ou en qualifiant ce qui vient d'être dit, ou en reliant ce qui vient d'être dit à autre chose (de connu ou non).

Il y a ainsi des candidats proximités, qu'on appelle ascendantes si elles interviennent au cours d'une généralisation, notamment vers quelque chose de nouveau. Par exemple,

---

<sup>18</sup>Il peut donc y avoir, pour certaines notions, des proximités ascendantes qui soient impossibles jusqu'au bout, avec des proximités descendantes qui soient nécessaires et seules possibles à un certain moment.

<sup>19</sup>C'est une notion relative, le générique correspond à quelque chose qui a une portée plus générale que lui seul mais sans que ce soit porté par une expression générale, alors que l'expression même du général indique sa portée en termes de contextualisations. Par exemple donner une règle sous forme d'un exemple ( $6^2 \times 6^5 = 6^{2+5} = 6^7$ ) en est une forme générique à partir du moment où les élèves l'utilisent en changeant 6, 2 et 5 selon leurs besoins. Une expression générale serait  $n^p \times n^t = n^{p+t}$ .

l'enseignant formalise le changement de registre numérique/algébrique fait en contexte le matin :

Ça va parce que c'est des lettres mais ce que vous avez fait ce matin avec des nombres c'est exactement la même chose qu'on a fait ici avec des lettres

On les étiquette descendantes si elles interviennent au cours d'une contextualisation de quelque chose de général, déjà connu : dans le calcul de  $f(x)$ , surface du champ rectangulaire :

Donc une fois qu'on a un côté qui s'appelle  $x$ , qui est mesuré par  $x$ , on a l'autre côté, la surface d'un rectangle, vous vous rappelez, c'est, on dit parfois longueur fois largeur, donc  $750 - 2x$  fois  $x$  ou  $x$  fois  $750 - 2x$ . Donc ça donne bien cette expression-là.

Enfin, on réserve le label horizontal aux proximités repérées lorsqu'il y a une qualification d'un aspect ou d'une activité, notamment par signalement ou ajout d'un changement de point de vue, ou de registre ou de cadre ou de formulation mais sans changement de niveau de généralité. Un élève dit : *ça augmente jusqu'à 190 et à partir de 200 ça diminue* et l'enseignant ajoute :

D'accord donc 0, 190 c'est un premier intervalle

Mais quelquefois un commentaire joue sur plusieurs aspects à la fois (on parlera de proximités mixtes). Cela se produit notamment dans la mesure où elles peuvent, selon les élèves, être rattachées ou non à du connu contextualisé dans ce qui est dit (dans ce cas elles sont descendantes ou ascendantes selon les élèves) ; on trouve aussi des proximités qui ont à la fois un caractère horizontal et descendant. Par exemple, l'extrait suivant déjà cité, peut avoir les deux interprétations, descendant ou ascendant, selon que les élèves se rappellent ou non du maximum d'une fonction (ce sera une contextualisation de quelque chose de général, connu, ou une généralisation à quelque chose de général, visé) :

Voilà trouver le plus grand champ possible en surface Donc savoir si cette fonction elle a une valeur maximale

*d) Contenus en jeu dans les proximités : des savoirs mathématiques (ancien ou nouveau), du vocabulaire, ou des activités mathématiques*

La question posée ici est celle de ce que les proximités concernent : savoirs ou activités.

Par exemple, lorsque l'enseignant reprend ce qui a été fait le matin en le généralisant tout en dégagant des caractéristiques utiles, qui ont été respectées dans l'activité mais pas encore explicitées, on parlera d'une proximité « activité » :

Faire un dessin, ça peut vraiment aider. Un dessin, alors suffisamment précis pour que figure sur ce dessin toutes les données du problème

En revanche, on évoquera une proximité « objet » lorsque l'enseignant précise deux affirmations successives des élèves sur les valeurs de  $x$  (c'est un réel et c'est une longueur).

Parce que c'est une longueur et une longueur c'est un réel effectivement qui est a priori strictement positif. Donc déjà  $x$  ne peut pas être négatif.

On parlera aussi de proximités à visée activité ou objet en introduisant une interprétation du chercheur, alors que les éléments dont on dispose sont de simples descriptions des éléments de discours.

Les savoirs anciens sont à reconnaître, les nouveaux à développer (définition, représentations, propriétés, calcul, traitement...). Le vocabulaire est souvent lié au savoir nouveau. Les activités peuvent être qualifiées de manière générale (démontrer) ou reliées à des méthodes ou à des représentations que se sont faites les élèves. Il n'est pas toujours simple de différencier des méthodes, qui sont à adapter à chaque situation différente, et les procédures, fixées et pour lesquelles seuls varient les paramètres numériques par exemple. Le fait que les graphes ne sont pas précis peut être lié à une représentation des élèves.

Dans le lot il y a des activités d'instrumentation ou des résultats liés à l'instrumentation (« le grapher donne une courbe »). Il y a aussi des activités liées à la mathématisation de l'activité d'introduction<sup>20</sup>.

Il n'est pas toujours facile de faire la distinction. D'ailleurs quelquefois on évoque les deux caractères à la fois (Objet et Activité, O&A). Par exemple : quels sont les mots qu'on va noter ? C'est une activité apparemment, mais les mots en question sont considérés comme des objets... Plus généralement, la formalisation relève d'une activité mais c'est un objet mathématique (on peut évoquer aussi le formalisme, l'écriture formelle)...

Cette classification est à justifier en relation avec notre problématique. On peut supposer que les proximités mettant en jeu des activités déjà déroulées sont plutôt spontanément vouées à des généralisations, alors que celles mettant en jeu (déjà) des objets sont plutôt vouées à des contextualisations ou à des changements de points de vue, etc. Il peut cependant y avoir des méthodes qui sont objet d'une proximité descendante tout en concernant l'activité (y compris à venir).

#### *e) Croisements*

Il peut être intéressant de croiser différents aspects analysés, par exemple la spontanéité (la proximité vient de l'enseignant), le fait que ce soit une question, ce sur quoi l'enseignant s'appuie et/ou les contenus en jeu.

En particulier, dans les proximités un peu indirectes sous forme de questions, lorsque l'enseignant pose spontanément une question à partir d'une activité, on peut se demander s'il n'est pas en train de mobiliser la ZPD des élèves associée à l'activité pour « monter » en généralité (il tire les élèves vers le haut). Les proximités ascendantes basées sur l'activité et vers un objet seraient les plus « larges ».

En revanche si l'enseignant s'appuie sur des objets connus, on peut se demander s'il n'est pas en train de mobiliser la ZPD des élèves sur ces savoirs pour les amener à donner un sens en contexte, à faire un lien entre le général et du particulier (il pousse les élèves vers la reconnaissance d'objets connus). Il peut même contribuer ainsi à la construction de la disponibilité des notions.

Les proximités horizontales, souvent assez « locales », illustrent différentes façons de voir ou de travailler une même chose, générale ou particulière, et à ce titre s'appuient indifféremment sur activité ou connaissance, tout en ciblant également possiblement les deux. Les proximités horizontales sont ainsi plutôt liées à des changements de... points de vue ou registres ou cadres...

---

<sup>20</sup> Au sens ici de l'exercice (la tâche) d'introduction fait le matin

Donc vers un certain travail de disponibilité assez locale, ou concernant des activités de traitement, voire d'organisation ?

## **II L'étude de la vidéo**

Ce sont des élèves moyens (dans une classe assez hétérogène).

### 1) Le relief attaché à la notion de sens de variation : programmes et difficultés des élèves

Le relief sur la notion a été établi, servant de référence à l'étude (cf. cahier de formation n°16 par exemple, ou article en anglais soumis).

#### *a) les programmes et les différents registres associés aux variations d'une fonction*

Les séances que nous étudions ici relèvent du programme précédent le nouveau programme entré en vigueur en 2019<sup>21</sup>. Cependant, en ce qui concerne le chapitre des variations des fonctions, il n'y a pas de réel changement à signaler entre les deux. De plus, au collège, les élèves ont déjà étudié des généralités sur les fonctions et les premiers aspects des fonctions affines – sans aborder les variations.

Les contenus concernés ici sont ainsi (dans le programme de 2019) « la croissance, la décroissance, la monotonie d'une fonction définie sur un intervalle et son tableau de variations, ainsi que le maximum et le minimum d'une fonction sur un intervalle » dont nous ne parlons pas ici [...].

Les capacités attendues dans le programme de 2009 sont les suivantes – notons qu'il n'y a pas besoin de la définition algébrique pour réussir les tâches correspondant à ces deux capacités.

- Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe.
- Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations. [...]

Ces variations des fonctions peuvent donner lieu, lorsque la variable décrit l'intervalle considéré, à une perception visuelle, sur une courbe (la courbe « monte » ou « descend »), à une perception numérique (les valeurs de la fonction augmentent ou diminuent) ou à une définition algébrique mettant en jeu une implication et un quantificateur. Mais avec des différences entre les traductions dans ces trois registres, en termes d'approximation pour les deux premiers et l'introduction d'un symbolisme logique pour le troisième.

Ainsi, dans le premier paragraphe « Fonctions » du programme de Seconde (BO n°30 du 23 juillet 2009) l'utilisation des logiciels est largement encouragée mais en même temps, l'élève doit s'interroger sur la façon dont les courbes sont obtenues : en effet, il doit apprendre « à distinguer la courbe représentative d'une fonction des dessins obtenus avec un traceur de courbe ou comme représentation de quelques données ». Plus loin, on indique « il s'agit de faire comprendre que des dessins peuvent suffire pour répondre de façon satisfaisante à un problème concret mais qu'ils ne suffisent pas à démontrer des propriétés de la fonction. » Il s'agit donc

---

<sup>21</sup> Voici ce qu'on trouve dans le nouveau programme : Dans un premier temps, les élèves découvrent, manipulent et verbalisent certaines propriétés (parité, monotonie sur un intervalle...) sur les fonctions de référence. Ces propriétés se généralisent peu à peu aux fonctions quelconques. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année. Leur formalisation est l'occasion d'un travail sur les quantificateurs...

de faire comprendre les limites des courbes obtenues sur un écran graphique comme avec Géogébra par exemple.

Enfin les commentaires des deux programmes précisent à un moment donné « Les définitions formelles d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante, sont progressivement dégagées. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année. Cf. note 6»

En effet comprendre et maîtriser ces définitions algébriques ne va pas de soi et les tâches qui peuvent y conduire ne sont pas souvent évoquées. Si le professeur se contente de décliner les capacités indiquées dans le programme de 2009, on reste bien loin de la maîtrise de cette définition. En fait, les deux programmes permettent une certaine latitude, suivant le niveau des élèves et les intentions de l'enseignant, entre des tâches simples et isolées autour de la courbe et du tableau de variation et des exercices plus complexes combinant différents aspects dans de véritables problèmes, utilisant éventuellement la définition algébrique, ce qui est difficile, on y reviendra. A minima, on peut faire constater qu'une courbe monte ou descend sur tel ou tel intervalle, ou que des valeurs augmentent ou diminuent, et en déduire les variations sans jamais utiliser la définition. De plus la notion de dérivée permettra, en classe de première, d'éviter le recours à la définition algébrique.

En particulier, dans ces conditions, un des choix des enseignants est l'ordre dans lequel ils abordent les fonctions de référence dont l'étude est demandée dans le programme (affine, carré, inverse, racine carrée) et les généralités sur les fonctions ajoutées en seconde – dont les variations. Selon les cas, l'établissement des variations peut ou non mettre en jeu la définition algébrique...

Une étude épistémologique des formulations successives des variations des fonctions, en relation avec l'étude du signe de la dérivée, est accessible dans Cabañas-Ramírez N.O & al. (2020). Elle montre plusieurs formulations successives, historiquement et dans les manuels et confirme le fait que la formalisation actuelle est apparue tardivement (1912), bien après l'émergence du théorème liant signe de la dérivée et variations de la fonction (cf. annexe 2).<sup>22</sup> »

#### *b) un changement de registre non transparent entre courbes et fonctions*

La question du lien entre courbes et fonctions nous apparaît au cœur de l'étude des variations des fonctions. C'est à la fois un point d'appui car les élèves savent interpréter, depuis longtemps, une courbe en termes de variations de ce qui est porté en ordonnée en fonction de ce qui est porté en abscisse. C'est aussi une difficulté à surmonter, car il s'agit de « transférer » des courbes aux fonctions, invisibles sur les représentations graphiques, en changeant de registre, les notions de croissance, décroissance, variation.

D'une certaine manière adopter le point de vue fonctionnel revient à « décomposer » quelque chose de global (l'allure de la courbe, dans le plan, qui monte ou qui descend) en deux informations ponctuelles et dynamiques – certes coordonnées, mais désimbriquées<sup>23</sup> dans leur présentation - concernant les variations de  $x$  et de  $f(x)$  « simultanées » mais indiquées de manière disjointes, que ce soit dans la phrase (quand  $x \dots f(x) \dots$ ) ou, tout particulièrement, dans le tableau de variation.

Notons que ce qui est interprété visuellement le plus immédiatement est la variation de  $f(x)$ , celle de  $x$  étant « cachée » (implicite) dans le sens du parcours, de gauche à droite. Il y a donc

---

<sup>22</sup>Osgood (2006/2012) s'est appuyé explicitement sur la définition de fonction de Dirichlet, dans le contexte du développement des approches ensemblistes.

<sup>23</sup> Cela peut rappeler ce que Duval appelle « déconstruction » en géométrie

une petite inversion avec le fait que, en phrase ou dans le tableau, on commence par  $x$  [en première ligne du tableau]... De plus il y a une « traduction » souvent laissée implicite de « plus haut » ou « à droite » (on regarde la place sur un axe) en « plus grand » (on introduit un ordre sur les valeurs représentées sur l'axe).

Cela dit, les passages entre registres graphique et numérique, facilités ou non par le recours à un logiciel (ou la donnée d'un dessin) ou à un tableur, semblent plus accessibles, ne demandant que la dissociation entre  $x$  et  $f(x)$ .

*c) une définition algébrique difficile et un changement de registre non transparent entre numérique et algébrique*

Le registre numérique permet de dissocier  $x$  et  $f(x)$ , tout en décrivant leur co-variation. Mais comment traduire algébriquement que, quand les valeurs de  $x$  augmentent, celles de  $f(x)$  aussi (pour fixer les idées) ? Il y a une double « astuce » mathématique : on compare algébriquement les valeurs de  $f(x)$  pour deux valeurs  $a$  et  $b$  de  $x$  – perspective ponctuelle devenue statique - et, comme c'est évidemment insuffisant, on le fait pour tous les couples  $(a ; b)$ , ou, ce qui revient au même pour un couple « quelconque », c'est-à-dire tel que les valeurs particulières que pourraient prendre  $a$  ou  $b$  n'interviennent pas. Il y a ainsi un quantificateur sur les couples, et une implication pour un couple donné, qui doit être démontrée de manière générique, sans faire intervenir un couple spécifique. Ainsi, si une partie de la définition algébrique, en termes d'inégalités ( $a < b$  implique  $f(a) < f(b)$ ), est facilement associée à la représentation graphique de la fonction (qui « monte »), même si les élèves ne peuvent pas la trouver seuls, le fait qu'il est nécessaire et suffisant que ce soit vérifié pour tous les couples  $(a,b)$  tels que  $a < b$  est nettement moins intuitif. Cette double astuce nous semble inaccessible à l'imagination de la plupart des élèves de seconde, mais accessible à des explications après que la formule ait été donnée, et notamment si le travail dans les cadres numérique et graphique a été bien avancé.

De plus le passage au calcul algébrique à proprement parler s'avère souvent délicat, vu les difficultés prévisibles des élèves de seconde dès qu'on a affaire à des fonctions ne serait-ce que du second degré...

Plusieurs objectifs peuvent ainsi être visés pour une approche avant le cours : une première description de la co-variation en jeu (passage du graphique au numérique), et le besoin de dépasser les descriptions graphique et numérique nécessairement approximatives.

En résumé, dans le cheminement cognitif visé, sont en jeu des dialectiques entre les perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions (Vandebrouck, 2011 ; Kuzniak & al., 2015) mais aussi entre les perspectives statique et dynamique (Robert, 1982).

## 2) Des tâches (et activités) d'introduction

Il nous semble qu'il est difficile de trouver un problème tel que les élèves « seuls » aient besoin, pour le résoudre, de la formulation algébrique. S'intéresser à la « double » variation simultanée de  $x$  et  $f(x)$ , au lieu de s'appuyer sur la seule courbe, semble en revanche possible et suffit souvent pour un certain type de réponses. Par exemple, les élèves peuvent avoir « besoin » de trouver quand telle grandeur croît en fonction de telle autre, quand il y a des maxima ou minima, quand ne pas dépasser telle valeur, etc. S'ils ont une courbe ils peuvent répondre. S'ils disposent des valeurs sur un tableur, ils peuvent aussi donner des réponses (approximatives cependant, comme avec une courbe). Sinon, s'ils n'ont que des informations algébriques par exemple, ils

n'ont aucun moyen pour le faire, si ce n'est à se ramener à une courbe... tracée par un logiciel ou par eux à partir de valeurs, mais approximativement (sauf si c'est une fonction affine).

De ce fait, les activités sur la tâche introductive nécessiteront sans doute une intervention complémentaire de l'enseignant (et des proximités) pour aller jusqu'à l'expression algébrique des variations de la fonction, en s'appuyant sur les acquis antérieurs.

Nous avons trouvé deux grands types de tâches introductives selon la façon dont on envisage ce lien courbes/fonctions (cf. cahier de formation n°16).

Le premier type permet de faire travailler sur des graphiques directement fournis aux élèves, permettant de réviser les descriptions des courbes et les interprétations correspondantes sur la co-variation – extrema, intervalles où la courbe monte ou descend. Ce sont souvent des situations non mathématiques qui sont en jeu, et on ne connaît pas les fonctions associées. Souvent la variable est le temps. Rien dans ce type de tâches n'amène au besoin d'une formulation plus précise, si ce n'est, éventuellement, une certaine approximation des lectures, mais qui ne peut pas être résolue au sein de la tâche.

Dans la séquence étudiée, l'enseignant a choisi une tâche d'introduction de l'autre type, à partir d'une situation extra-mathématique, modélisée par une fonction dont on peut trouver la formule explicite (annexe 1).

On introduit l'étude de la variation d'une grandeur (la surface d'un champ) en fonction d'une autre (la longueur du côté), liée à une figure géométrique (rectangle modélisant le champ). On cherche s'il y a un maximum de cette surface.

On peut proposer aux élèves, après un premier temps de modélisation, de percevoir visuellement les variations grâce à une animation sur GéoGebra par exemple, ou numériquement (et ce peut être les deux)... y compris sous forme de conjectures qu'ils auront à vérifier.

Cela permet de rapprocher les élèves de questionnements et de réponses possibles sur les variations de la grandeur étudiée quand la longueur d'un des côtés varie. Ils peuvent répondre en s'aidant d'un graphique ou d'un tableau de valeurs mais les réponses restent nécessairement approchées. Cela peut être un des prétextes pour faire réfléchir les élèves à une formulation algébrique « exacte ».

### 3) Synopsis de la séance analysée et premiers comptages

#### *a) nos données initiales*

Nous avons regardé trois vidéos : deux sur la tâche d'introduction travaillée dans les deux demi-groupes constitués par l'enseignant et une sur le début du cours. Une dernière vidéo présente une partie de la suite du cours, mais il y a une interruption entre celle-ci et la précédente qui nous a fait renoncer à l'utiliser.

Nous avons transcrit et analysé la seule vidéo de cours, en ayant en tête les deux premières vidéos que nous avons regardées<sup>24</sup>.

---

<sup>24</sup> Évidemment le mieux aurait été d'avoir des traces des activités effectives des élèves ou les activités possibles pendant les déroulements de la tâche d'introduction, car ce sont sur elles que les proximités vont être basées pour l'épisode 1... L'adoption d'un cadre théorique basé sur la TA c'est effectivement prendre l'ensemble du

Nous disposons aussi de l'énoncé de la tâche d'introduction et des prévisions et visées de l'enseignant sur les premières séances.

*b) le synopsis*

Nous avons distingué les épisodes<sup>25</sup> suivants (leur durée est indiquée en minutes)

Épisode 1 (0->3) reprise de la séance du matin (reprise du dessin, rappel du fait que tous les champs n'ont pas tous la même surface, expression de l'aire  $f(x)$  en fonction du côté  $x$ ) – c'est plutôt l'activité des élèves qui est rappelée.

Épisode 2 (3->8) introduction de la recherche de l'intervalle de définition pour  $x$  : « vieil » objet

Épisode 3 (8->12) reprise des calculs de  $f(x)$  – du numérique à l'algébrique, calcul d'aire, intermède de 9 à 11 pour répondre à un élève (activité et objet)

Épisode 4 (12 ->13) premier vocabulaire : introduction des mots variations et recherche du maximum (appui sur les élèves)

Épisode 5 (13-> 22) travail sur les valeurs de  $f(x)$  à partir du tableur (projeté) – recherche de la co-variation visible entre  $x$  et  $f(x)$  (objet), intermède sur algèbre de 21 à 22

Épisode 6 (22-> 29) travail sur le graphe projeté (objet) – intermède sur valeur approchée et vie courantes 25-> 25'30 – intermède sur question plus difficile 26-> 28 - intermède sur échelles

Épisode 7 (29-> 34) première institutionnalisation des mots (croissant, optimiser, décroissant) – 33-> 34 intermède sur les bornes (objet)

Épisode 8 (34->50) vers la deuxième institutionnalisation, de la formalisation algébrique – avec l'échec de la faire venir des élèves – intermède 37->38 réponse à un élève – intermède 42->43 autre exo sans lien – finalement c'est l'enseignant qui débloque la situation en suggérant de comparer deux valeurs de  $f(x)$  pour deux valeurs de  $x$ ...

*c) premiers constats*

On a établi trois tableaux – les deux premiers sont ci-dessous, avec les répartitions par épisode des types de proximités, des questions et des visées. La transcription, sous forme elle aussi de tableau, permet de compléter les tableaux ci-dessous, avec, par exemple, un complément sur la répartition des seules proximités questions selon leur visée activité ou objet, ou encore une indication partielle de l'existence de réponses aux questions, un certain nombre de commentaires méta que nous n'avons pas retenus comme des proximités, et, partiellement, ce sur quoi s'appuient les proximités, en complément de leur visée.

La lecture de ces données est faite tableau par tableau puis par type de proximités. Puis on indique quelques compléments venant des tableaux complets et enfin un retour sur chaque épisode.

**Premier tableau** : on indique par épisode

- Le nombre de proximités de chaque catégorie

---

contexte pour interpréter les activités des élèves – et ici juger des proximités – mais dans les contextes de classe à l'impossible nul n'est tenu...

<sup>25</sup> Chaque épisode correspond à une activité différente associée à une tâche énoncée plus ou moins directement par l'enseignant

- Le nombre de *proximités non-question* de chaque catégorie *en italique (en dessous)*
- La nature des proximités majoritaires : c'est la catégorie de proximité la plus représentée dans l'épisode – on indique leur % (ligne) sur toutes les proximités de l'épisode. Pour les plus nombreuses, on ajoute leur pourcentage sur le total des proximités de leur catégorie (% colonne).

Par exemple dans le premier épisode, les proximités ascendantes sont majoritaires et représentent la moitié des proximités de l'épisode. Dans le deuxième épisode, ce sont les horizontales qui sont majoritaires dans leur ligne (61%) ; par ailleurs, elles représentent 16% du total des proximités horizontales dans la séance étudiée.

Globalement on indique

- les totaux et les % lignes et colonnes de chaque catégorie (en ligne et en colonne)

Par exemple les proximités du premier épisode représentent 5% du total des proximités, et les proximités non-question de cet épisode représentent 7% du total des proximités non-question.

Les proximités ascendantes représentent 41% du total des proximités ascendantes ; celles non-question représentent 29% du total des proximités ascendantes non-question.

### **Bilan global du premier tableau (ci-dessous)**

On décompte donc 147 proximités, dont 99 qui ne sont pas sous forme de questions (67%), ce qui laisse 48 proximités (33%) associées à des questions : celles-ci, rappelons-le, provoquent une réflexion, supposée par le chercheur « proche » de ce qui est visé.

Il y a une certaine relation entre le nombre de proximités pour un épisode et sa durée : pour une durée de moins de 5', jusqu'à 9% du total de proximités, le quart ou plus pour une durée de plus de 8'. Il y a donc une certaine homogénéité globale dans le discours, malgré la pression du temps.

Cependant, dans chaque épisode c'est la même catégorie de proximités qui est majoritaire à la fois parmi toutes les proximités de l'épisode, et parmi les proximités sans les questions de l'épisode : on reviendra plus loin à une analyse épisode par épisode.

Au total, ce sont les proximités ascendantes qui sont majoritaires (41% du total), puis les horizontales (34%) puis les descendantes (24%).

Sur les proximités descendantes, ce sont les proximités non-questions qui sont le plus présentes (31/35 soit 89%), tandis que sur les proximités ascendantes, on trouve à peu près la moitié de questions (31/60 soit 48%), et la moitié de non-question (52%) ; sur les horizontales il y a 69% de non-questions. Donc les questions sont davantage associées aux proximités ascendantes.

**Tableau 1 : Répartition des proximités par épisodes (avec les questions) et les non-questions** ( t.lig : total ligne ; T ou tot : total ; Col : colonne)

proximités Épisode	Desc.	Horiz	Asc.	Toutes (% : au Total) <i>En italique : proximités sans questions aux élèves</i>
Épisode 1 (3') <i>Sans questions</i> <u>Reprise</u>	2 2	2 2	4 (50% T.lig) 3	8 (5% tot) 7 (7% tot)
Épisode 2 (5') <i>Sans questions</i> <u>Intervalle</u>	2 2	8 (61% t.lig) (16% t.col) 5	3 1	13 (9% tot) 8 (8% tot)
Épisode 3 (2'+) <i>Sans questions</i> <u>f(x)</u>	3 3	5 (45% t.lig) (10% t.col) 4	3 3	11 (7% tot) 10 (10% tot)
Épisode 4 (1') <i>Sans questions</i> <u>Premier vocabulaire</u>	2 2	1 1	5 (62% t.lig) 0	8 (5% tot) 3 (3% tot)
Épisode 5 (8'+) %colonne <i>Sans questions</i> <u>Tableur</u>	12 (32% t.lig) (33% t.col) 8	8 (22% t.lig) (16% t.col) 4	17 (46% t.lig) (28% t.col) 9	37 (25% tot) 24 (24% tot)
Épisode 6 (5'+) <i>Sans questions</i> <u>Graphe</u>	4 4	4 3	7 (47% t.lig) (11% t.col) 5	15 (10% tot) 12 (12% tot)
Épisode 7 (4'+) <i>Sans questions</i> <u>Vocabulaire co- variation institutionnalisée</u>	3	3 1	7 (54% T.lig) 5	13 (9% tot) 6 (6% tot)
Épisode 8 (14'+) %colonne <i>Sans questions</i> <u>À la recherche de l'algébrique</u>	7 (17% t. lig) (19% t.col) 6	21 (50% t.lig) (42% t.col) 16	14 (33% t.lig) (23% t.col) 3	42 (28% total) 25 (25% total)
<b>Total avec questions</b>	<b>35 (24% T)</b>	<b>52 (34% T)</b>	<b>60 (41% T)</b>	<b>147</b>
<b>Total sans questions</b> <b>% colonne</b>	<b>31 (31% T)</b> <b>89 %col</b>	<b>36 (36% T)</b> <b>69%</b>	<b>29 (29% T)</b> <b>48%</b>	<b>99</b> <b>67%</b>

**Bilan global du deuxième tableau (ci-dessous) :**

On indique par épisode, par catégorie et globalement, la répartition entre les proximités à visée activité (noté A) et celles à visée objet (notée Ob). (Tlig : total ligne ; T : total ; Col : colonne ; O&A : visée mixte, objet et activité - il y en a 3 proximités O&A, comptées 2 fois).

Globalement, il y a 101 proximités portant sur des objets mathématiques, elles sont majoritaires (66% du total). On trouve dans cette catégorie plus de proximités horizontales : 40% de ces proximités sont à visée objet alors qu'elles représentent 34% du total des proximités. En revanche, Il y a plus de proximités ascendantes qui sont à visée activité : il y en a 56% parmi les ascendantes, qui représentent 41% du total. Moins de proximités descendantes et horizontales sont à visée activité (15% contre 24% et 29% contre 34%).

**Tableau 2 : Visée de la proximité : objet (O) ou activité (A) ?**

<i>% des proximités totales</i>	Desc. 24%	Horiz 34%	Asc. 41%	Visée objet Visée activité
Épisode 1 5% T	2 Ob	2 Ob	4A	4 Ob (50% Tlig) 4A
Épisode 2 9% T	2 Ob	6 Ob – 2A	3A	8 Ob (61% Tlig) 5A
Épisode 3 7% T	3 Ob	3 Ob -2A	3 Ob	9 Ob(82% Tlig) 2A
Épisode 4 5% T	2 Ob	1 O&A	5A	3 Ob (33% Tlig) 6A
Épisode 5 25% T	6 Ob-6A	6 Ob, 1 O&A,1A	12 Ob, 5A	25 Ob (66% Tlig) 13A
Épisode 6 10% T	2 Ob-2A	3 Ob-1 O&A	6 Ob -1A	12 Ob(75% Tlig) 4A
Épisode 7 9% T	3 Ob	2 Ob-1A	7 Ob -1A	11 Ob(82% Tlig) 2A
Épisode 8 28% T	7 Ob	15 Ob -6A	6 Ob – 8A	28 Ob(67% Tlig) 14A
Total	24%	34%	41%	
Visée objet	27 Ob (27% T) (77% col)	40 Ob(40%T) (77% col)	34 Ob(34%T) (57%col)	101 Ob (66% Total)
Visée activité	8 A(15%T) (23% col.)	15A (29%T) (27% col.)	29A (56%T.) (46% col.)	52A (34% du tot)

**Tableau 3. Bilan par type de proximités selon leur visée objet ou activité, sur l'ensemble de la séance**

Type de proximités	Desc.	Horiz	Asc.	Total
	<b>N=35 (24%)</b>	<b>N= 55 (34%)</b>	<b>N=63 (41%)</b>	<b>T=153</b>
Visée objet	27 (27%T)	40 (40%T)	34 (34%T)	101 (66% T)
Visée activité	8 (15%T) (23% col.)	15 (29%T) (27% col.)	29 (56%T) (46% col.)	52 (34% T)

### Bilan par type de proximités

- 35 proximités descendantes – 24% du total des proximités décomptées, dont 4 questions, et 24 + 3<sup>26</sup> à visée objets : très peu de questions (11% du total des descendantes) et une visée plutôt « objet » (77% du total des descendantes) ;

- 52 proximités horizontales - 34% du total des proximités décomptées, dont 16 questions, et 33 + 7 à visée objets : assez peu de questions (31% du total des horizontales) et une visée plutôt objet (77% du total des horizontales) ;

- 60 proximités ascendantes – 41% du total des proximités décomptées dont 31 questions et seulement 22 + 12 à visée objets : la moitié de ces proximités est sous forme de questions, et 46% à visée activités, que ce soit les questions ou les autres.

Globalement :

- les proximités ascendantes sont les plus nombreuses (63, soit 41%) et les descendantes les moins nombreuses (35, soit 24% du total des proximités)

- les proximités portant sur des objets de connaissance sont les plus nombreuses (les deux-tiers), mais cela n'est pas uniforme selon les types de proximité : les proximités ascendantes portent plus souvent que les autres sur les activités (un peu plus de la moitié, contre à peu près le quart pour les proximités descendantes ou horizontales).

Finalement, les questions sont plus représentées dans des proximités ascendantes tout comme la visée activité... En réunissant sans précaution les deux résultats, on pourrait avancer que tout se passe comme si l'enseignant, au moyen de proximités ascendantes, polarisait plutôt ses questionnements sur les généralisations à visée activité, du moins ceux pour lesquels la réflexion attendue peut rapprocher les élèves des activités en jeu dans ces généralisations...

<sup>26</sup> Le nombre en italique correspond aux visées des proximités questions. Le détail sur la répartition objet-activité pour les proximités non-question est tiré du tableau complet en annexe 3

## Retour sur chaque épisode

Épisode 1 *Reprise de l'activité d'introduction du matin* – les proximités ascendantes à visée activité sont majoritaires avec 50% des proximités de l'épisode (plus que la moyenne) ; il y a 25% de Questions et 100% à visée Activité sur ces seules proximités ascendantes de l'épisode ; sur tout l'épisode il y a égalité des visées Objet et Activité, et 12,5% des proximités sous forme de questions (peu par rapport aux 33% de proximités questions globalement). Tout se passe comme si l'enseignant s'appuyait sur les activités contextualisées du matin pour leur donner un statut plus général, sans beaucoup questionner (peut-être vu que c'est très récent) ; il y a peu de nouveaux objets en jeu. On peut supposer que, vu le temps passé à travailler sur la tâche d'introduction, l'enseignant estime qu'il y a un potentiel chez les élèves susceptible de donner lieu à généralisation grâce à son intervention<sup>27</sup>.

Épisode 2 *Recherche de l'intervalle de définition* : c'est un objet mathématique travaillé si ce n'est acquis dans l'année, à contextualiser ici – les proximités horizontales à visée objet sont majoritaires avec 61% des proximités de l'épisode (ce qui est plus que la moyenne) ; il y a 37% de Questions et 25% à visée Activité sur ces seules proximités horizontales de l'épisode ; sur tout l'épisode il y a une visée à 61% Objet et il y a 38% de Questions (comme la moyenne). Cette problématique de l'intervalle pour  $x$  n'avait pas été abordée le matin, tout se passe comme si l'enseignant cherchait à rapprocher, en restant le plus possible dans le contexte, la notion déjà vue et la situation étudiée. On peut se demander si ce choix intermédiaire (sans appui sur la notion générale) ne permet pas à certains élèves d'exploiter leurs connaissances déjà-là et à d'autres de se rapprocher de la notion du fait de l'utilisation en lien étroit avec le contexte, avec les questions.

Épisode 3 *Reprise des calculs de  $f(x)$  : du numérique à l'algébrique, calcul d'aire* : il y a un « vieil » objet à contextualiser (la formule de l'aire d'un rectangle) - les proximités horizontales à visée objet sont majoritaires, là encore, avec 45% des proximités de l'épisode (plus que la moyenne) ; il y a 25% de Questions et 40% à visée Activité sur ces seules proximités horizontales de l'épisode ; sur tout l'épisode il y a une visée à 82% Objet (plus que la moyenne) et seulement 9% de Questions (moins que la moyenne). Là l'enseignant veut « asseoir » la fonction à étudier, sans la couper de la manière dont elle a été élaborée. Il ne s'appuie pas sur la notion générale de fonction, il s'agit d'en reconnaître une, mais il s'appuie plutôt sur le travail des élèves pour l'engendrer. Là encore on peut se demander si ces proximités ne peuvent pas avoir un rôle différent selon les élèves - découverte de la reconnaissance de l'objet pour les uns, et, pour d'autres, confirmation de cette reconnaissance.

Épisode 4 *Premier vocabulaire* : les proximités ascendantes à visée activités sont majoritaires avec 62% des proximités de l'épisode ; il y a 100% Questions et 100% de visée Activité sur ces seules proximités horizontales de l'épisode ; sur tout l'épisode il y a 37% de visée Objet et 62% Questions (comme la moyenne). C'est seulement en partie nouveau et pas très difficile, l'enseignant profite des réponses des élèves à ses questions.

Épisode 5 *Travail sur tableur*, avec une visée de recherche de l'expression par les élèves de la co-variation visible entre  $x$  et  $f(x)$ <sup>28</sup>. L'épisode est long, il y a beaucoup de proximités (le ¼ de toutes les proximités de l'extrait analysé). Les proximités ascendantes sont majoritaires sur l'épisode (46%), dont 47% de questions et seulement 29% à visée activités ; sur tout l'épisode la visée objet est développée à 67% et il y a 35% de questions – ce qui est assez proche de la

---

<sup>27</sup> Il y a là, répétons-le, un élargissement de la définition stricte donnée par Vygotski.

<sup>28</sup> L'enseignant ne le dit pas comme ça.

moyenne. Notons qu'il y a aussi dans l'épisode un peu plus de proximités descendantes, sans et avec questions, que la moyenne, mais c'est en partie en relation avec les rappels sur le tableur. Tout se passe comme si l'enseignant essayait de s'appuyer sur un constat effectivement fait par les élèves en séance (grâce à leur activité de lecture des valeurs affichées sur le tableur), qu'il fait expliciter, notamment grâce à des questions, ce qui permet de le faire partager par tous, puis essaye de faire transformer ce constat grâce à une interprétation fonctionnelle, tout cela en s'aidant de proximités ascendantes. Ici les proximités ascendantes sont associées à une activité en séance, et doivent contribuer à l'expression d'une forme de généralisation limitée, du numérique à un fonctionnel particulier.

Épisode 6 *Travail sur courbe* (projetée), avec la même visée de recherche de l'expression par les élèves de la co-variation visible entre  $x$  et  $f(x)$  et le constat de la cohérence avec ce qui a été fait sur tableur. L'épisode est moins long, il y a moins de proximités dans l'épisode – comme si l'enseignant comptait plus sur la description par valeurs qu'à partir de la courbe pour tirer l'expression algébrique ? Les proximités ascendantes sont majoritaires sur l'épisode, 47% (dont 40% de Questions, et 14% à visée Activité) ; sur tout l'épisode la visée objet est majoritaire, avec 80%, ce qui est plus que la moyenne, et il n'y a que 20% de questions (moins que la moyenne). Tout se passe comme si l'enseignant misait moins sur cet épisode, tout en adoptant le même type de déroulement, s'appuyer sur un constat qu'il fait expliciter pour retrouver la même interprétation fonctionnelle particulière qu'avec le tableur.

Épisode 7 *Première institutionnalisation vocabulaire nouveau* (croissant, optimiser, ...), les proximités ascendantes sont majoritaires, 54% de l'épisode, avec 28% de Questions et 14% à visée activités. Sur tout l'épisode, la visée objet est majoritaire (85%, ce qui est plus que la moyenne), et la proportion de questions moyenne (31%). L'enseignant semble en partie s'appuyer sur ce qui vient des élèves, qui peuvent suggérer y compris des expressions langagières non strictement liées aux mathématiques. Il s'agit de mettre en valeur les liens entre les dires ordinaires et les choix des mathématiciens.

Épisode 8 : *vers la deuxième institutionnalisation, algébrique* – avec l'échec de faire venir la formalisation cherchée des élèves, qui ne nous étonne pas<sup>29</sup> ... l'épisode est long... Les proximités horizontales sont majoritaires – c'est la moitié des proximités de l'épisode, elles sont à visée objet (73%) et sous forme de questions (71%). Notons que les proximités ascendantes, cette fois à visée activité à plus de la moitié, prennent quand même 1/3 des proximités totales de l'épisode. Cependant sur l'épisode on reste à des proximités à 67% objet (taux peu différent du taux moyen) avec 40% de questions ce qui est un peu supérieur à la moyenne. Rien à faire ! Même si l'enseignant multiplie les pistes de changements de points de vue, avec des proximités horizontales, ça ne « sort » pas... En revanche dès qu'il met les élèves sur la voie, il y a des réponses pour compléter l'idée. Ainsi des élèves ont profité des questions et sans doute sont-ils devenus assez proches du but pour bénéficier du coup de pouce donné.

Si on ne retient que les proximités majoritaires dans un épisode<sup>30</sup>, tout se passe comme si dans les épisodes les plus mathématiques (2,3,8), concernant l'intervalle de définition de  $x$ , l'établissement de la formule de la fonction et la formalisation algébrique de la croissance, c'est plutôt par des proximités horizontales, sans changement de niveau de généralité, que l'enseignant cherche à rapprocher les élèves des objets travaillés, connus ou non, en s'appuyant ou non, selon les cas, sur des questions provoquant la proximité – apparemment ces dernières

---

<sup>29</sup> C'est pour nous comme une confirmation de notre étude du relief...

<sup>30</sup> Ce qui est très schématique !

étant plus nombreuses dans les deux épisodes les plus nouveaux, que ce soit sur du connu (2) ou de l'inconnu (8).

En revanche dans les épisodes de reprise ou de lecture d'un comportement sur le tableur ou le grapheur, ou encore portant sur du vocabulaire (1,4,5,6,7) c'est plutôt par des proximités ascendantes, du contextualisé au général, que l'enseignant cherche à rapprocher les élèves des activités ou objets travaillés, les questions étant notamment plus nombreuses lorsque la lecture est en jeu (5,6). L'enseignant s'appuierait davantage sur des rapprochements entre contextualisé et général lorsque sont en jeu des activités ou des mots ; il s'appuierait davantage sur des façons différentes de dire les mêmes choses pour rapprocher d'objets mathématiques... Dans cet extrait, il n'y a pas de proximités descendantes majoritaires, vu ce qui est traité (le début du cours).

Deux épisodes, les deux plus longs, produisent chacun à peu près le quart des proximités : l'épisode 5 et l'épisode 8 (cf tableau 4, ci-dessous).

**L'épisode 5** – de plus de 8 minutes - porte sur l'usage du tableur. Il présente 38 proximités discursives, soit le quart du total, dont les deux-tiers portent sur des objets de connaissance.

**L'épisode 8** - de plus de 14 minutes – porte sur la recherche de la formulation algébrique de la croissance d'une fonction. Il présente 42 proximités discursives, dont la moitié sont horizontales ; c'est d'ailleurs l'épisode qui "fournit" relativement le plus de ces proximités (42% du total de ces proximités, alors qu'il ne prend que le tiers du temps).

**Tableau 4 : place des questions aux élèves dans les interventions de l’enseignant, selon les proximités, avec détail pour les épisodes 5 (sur de “l’ancien” : tableur) et 8 (sur du “nouveau” : à la recherche de la formulation algébrique).**

Type de proximités	Desc.	Horiz	Asc.	Total
<b>Épisode 5 (8'+)</b>	12(32% t.lig)	8 (22% t.lig)	<b>17</b> (46% t.lig)	37 (25% tot)
%colonne	(33% t.col)	(16% t.col)	(28% t.col)	
<i>avec questions</i>	4	4	8	16
<i>Sans questions</i>	8	4	9	21 (24% tot)
<u>Tableur</u>				
<b>Épisode 8 (14'+)</b>	7 (17% t. lig)	<b>21</b> (50% t.lig)	14 (33% t.lig)	42 (28% total)
%colonne	(19% t.col)	(42% t.col)	(23% t.col)	
<i>avec questions</i>	1	5	11	25(25% total)
<i>Sans questions</i>	6	16	3	
<u>À la recherche de l’algébrique</u>				
<b>Total séance incluant interventions avec question</b>	<b>35 (24% T)</b>	<b>55 (34% T)</b>	<b>63 (41% T)</b>	<b>T=153</b>
<i>Total interventions séance sans questions</i>	<b>31</b>	<b>39</b>	<b>32</b>	<b>T=92</b>
<i>avec questions</i>	<b>4</b>	<b>16</b>	<b>31</b>	<b>T=61</b>

### Compléments venant du tableau complet en annexe 3

26 des proximités associées à des questions portent sur des activités (soit 54%), alors que 22% des proximités non questions portent sur des activités. **Autrement dit, il y a plus de questions que de non-questions à visée activités.** De même 20 proximités-questions portent sur des objets (42%), alors que 78% des proximités non questions portent sur des objets. **Il y a plus de non-questions à visée objets.**

De plus il y a 18 questions qui ne sont pas des proximités, avec un peu plus de 2/3 de réponses. Il y a 57 interventions « méta » qu’on n’a pas labellisées comme proximités.

Sur les 48 proximités sous forme de questions (le tiers), on peut être presque sûr que les élèves répondent à 33, c'est-à-dire les 2/3. Sur les 31 proximités ascendantes sous forme de questions, il y a 19 auxquelles il a été répondu : c'est le même taux.

Non répondu : 7 aussi bien horizontales qu'ascendantes entre 35' et 49'...

Il y a au total 47 proximités spontanées, dont 9 descendantes, 17 ascendantes et donc 21 horizontales (question ou non).

De plus les proximités descendantes (spontanées) sont plus sur les savoirs (objets) (6/9), mais commencent tard (à partir de 10') et les ascendantes (spontanées) sur les activités, sont produites surtout au début (10/17)...

*Points d'appui : AI, CS, F : cet indicateur s'avère difficile à exploiter.*

En fait il n'y a de points d'appui antérieurs à la séance que jusqu'à 13'. A une exception près.

Sur l'activité d'introduction, il y en a 11 dont 7 ascendantes (jusqu'à la minute 11).

Sur des savoirs anciens, il y en a 25 jusqu'à la minute 13, dont 10 descendantes et 12 horizontales.

Sur instrumentation, 13 pendant les deux phases dédiées.

#### 4) Premiers résultats

D'abord, globalement, on constate l'impossibilité pour les élèves de produire, même guidés, la traduction algébrique de la croissance, malgré une préparation numérique et graphique très poussée, en termes visuels ou dynamiques, et de gros efforts du professeur, qui multiplie les proximités et les questionnements. L'enseignant semble penser que l'image associée à "plus  $x$  augmente plus  $f(x)$  augmente" va aider la traduction algébrique – il n'en est rien, en fait c'est la comparaison qu'il faudrait introduire, mais on ne voit pas comment à ce moment de la scolarité des élèves cela pourrait venir d'eux : l'enseignant doit "dévoiler" l'utilisation de la comparaison. L'absence de succès de l'effort qu'il développe pour faire "sortir" des réponses des élèves cette comparaison entre valeurs de la fonction pour des valeurs ordonnées de la variable conforte tout à fait nos analyses de relief sur la nature FUG(O) de cette formalisation à ce niveau scolaire - O comme opérationnelle. En effet qu'est-ce qui est demandé ici, comme c'est indiqué dans le relief rappelé plus haut ? C'est la transformation d'une description non mathématisée complètement, en particulier non traduisible directement algébriquement et qui s'appuie sur une courbe ou des valeurs données (la courbe monte, les valeurs augmentent...) en une formalisation algébrique qui puisse non seulement s'appliquer à cette situation mais encore à toutes les fonctions, dès lors qu'on a leur expression : une formalisation générale, qui rende compte de ce qui est décrit, sans avoir à faire appel à autre chose que l'usage correct des symboles algébriques et logiques. C'est cet objectif d'opérationnalisation algébrique des descriptions perceptives initiales de la (dé)croissance qui donne lieu au O ci-dessus.

Ensuite on peut souligner le fait qu'il y a beaucoup de proximités, que nous avons mieux définies, en y ajoutant des catégories (proximités "mixtes" relevant de deux catégories, proximités d'instrumentation, de mathématisation), et en tenant compte de caractéristiques supplémentaires (proximité éventuelle produite à partir d'une question, répondue ou non, proximité portant sur une activité ou sur un objet mathématique, proximité s'appuyant sur une activité des élèves ou une connaissance – manifestée par les élèves ou éventuellement supposée présente par le professeur (d'après nous), etc.).

Visiblement selon les épisodes la répartition n'est pas tout à fait la même. Il semble cependant que les proximités ascendantes sont en moyenne plus associées à des activités déjà réalisées ou venant juste d'être réalisées et à des questions, ces dernières peut-être pour faciliter le partage de ce qui est en jeu (rendre proche ?) : ainsi les proximités ascendantes sont davantage utilisées dans les épisodes de reprise ou de recherche plutôt facile, semble-t-il. En revanche les proximités horizontales sont majoritaires dans les épisodes sur des objets mathématiques à adapter (épisodes 2 et 3) ou nouveaux (épisode 8).

Les deux épisodes où il y a le plus de proximités sont le travail sur tableur (pour arriver à l'expression du fait que les valeurs de  $f$  augmentent puis diminuent, peut-être ce qui pour cet enseignant pourrait conduire à la traduction algébrique attendue), avec des proximités ascendantes et descendantes, et le travail (vain) pour produire la formalisation - avec essentiellement des proximités horizontales. Dans cet épisode "clé", il semble que l'enseignant essaie - en vain - de trouver une "entrée" des élèves dans la formulation algébrique attendue en mobilisant les différents cadres (registres?) possibles. En fait, il y a un multiple saut à faire : passer de la variation d'une variable ( $x$  est de plus en plus grand) à la comparaison de deux valeurs de cette variable ("splitter" un  $x$  dynamique en deux  $x_1$  et  $x_2$  ponctuels), qui plus est considérer ces deux valeurs comme "quelconques", et enfin prendre en compte qu'il s'agit de "pour tous" ou "quels que soient" ces  $x_1$  et  $x_2$  ...

### **III Conclusion : et alors ?**

L'importance de prendre conscience du type de notion auquel on a affaire (relief) semble confirmée par l'étude, ici c'est l'obstacle de la traduction algébrique des variations qui est amplement vérifié.

1) Un certain nombre de problèmes d'optimisation, y compris issus de la vie courante ou scientifique peuvent conduire à la question de maxima-minima ou celle de variations.

Ces deux questions sont distinctes, et on n'a pas d'éléments suffisants pour anticiper si elles seraient susceptibles des mêmes observables.

Dans la vidéo étudiée, le besoin de démontrer algébriquement est suscité par l'enseignant à partir de remarques d'élèves sur les approximations inévitables de détermination des intervalles où la fonction est monotone et sur la valeur exacte du maximum, imprécisions engendrées par le fait de lire sur la courbe ou de s'appuyer sur le tableau de valeurs. Il y a ainsi un mélange entretenu entre l'absence de formalisation algébrique et la difficulté de déterminer les intervalles en question.

Nous pensons cependant que, quel que soit le problème d'introduction choisi, on ne peut pas faire de proximités ascendantes « jusqu'au bout », jusqu'à faire trouver aux élèves la formalisation algébrique : à un moment donné c'est l'enseignant qui doit faire franchir un saut, donner lui-même la traduction algébrique pour les variations. Celle-ci n'est pas dans la continuité de ce que les élèves peuvent trouver, même avec l'aide du professeur. Il s'agit de préparer le plus possible le saut - ici en ayant fait expliciter les aspects graphiques et numériques, intuitifs, perceptifs, dynamiques, de la croissance et en ayant posé le problème du formalisme algébrique pour se débarrasser des approximations : « sans avoir besoin de la courbe ou des valeurs ». Les élèves peuvent ainsi entendre que les autres approches restent imprécises, même si presque toujours approchées mais proches des valeurs exactes, au moins pour associer un intervalle précis à chaque sens de variation. Ils peuvent concevoir aussi qu'on pourrait disposer d'un moyen ne nécessitant pas de dessiner ou de calculer. Mais cela ne les met pas du tout sur la voie de la formalisation à imaginer, à partir des expressions algébriques : il y a un

« saut ». De plus, on ne fait pas vérifier sur la formule de la surface que ce qu'on "voit" sur le graphe ou le tableur est bien la même chose que ce qu'on déduit de la formulation algébrique. Une difficulté "cognitive" est que "l'intuition" s'avère valide, il n'y a donc pas vraiment besoin du détour algébrique, sauf cependant à exhiber des cas où on se trompe en regardant la courbe. Il y en a<sup>31</sup> mais alors les connaissances algébriques des élèves étant moindres qu'avant, il est nécessaire de beaucoup guider les calculs pour les convaincre ce qui affaiblit l'argument.

On met les élèves face à un problème formel qu'ils n'ont pas les moyens de résoudre.

2) Une fois la définition donnée, pour suivre la démarche que nous défendons pour l'enseignement de FUG, il s'agit de la commenter, de la faire utiliser (y compris sur l'exemple de l'activité d'introduction ou autres exemples donnés avant), d'explicitier comment les mathématiciens ont franchi l'obstacle en trouvant un formalisme adéquat (cf. ci-dessus). Dans le cas de la croissance sur un intervalle, pour être sûr de ce qu'on voit et pour pouvoir le démontrer, y compris sans courbe ou valeurs, il faut traduire, autrement que visuellement ou numériquement, l'augmentation de  $f$  quand  $x$  augmente. Cette traduction est algébrique. L'idée est de **remplacer la perception** d'une augmentation simultanée de  $x$  et  $f$ , intuitive mais intraduisible telle quelle sur les formules, par **la comparaison de toutes les valeurs de  $f(x)$  deux à deux, pour tous les couples ordonnés de valeurs de  $x$ , en vérifiant que c'est le même ordre pour  $f$  et pour  $x$ ...** Sauf que vu l'impossibilité de le faire pour tous les couples, on le fait en prenant deux valeurs **quelconques** de  $x$ , faisant preuve pour toutes, si possible. La validité de ce passage d'un «  $x$  quelconque » au « quel que soit  $x$  » dont on a besoin n'est pas évidente à ce niveau même si les élèves ont déjà rencontré dans des cas plus simples cette propriété cruciale, véritable apanage du calcul algébrique.

3) La difficulté de cet enseignement est souvent accrue par le fait qu'une fois cette définition donnée, on s'en sert peu, nous l'avons déjà signalé.

Faut-il pour autant s'en passer, vu le temps que demande le cours correspondant, pour peu d'effets évaluable sur des exercices ? Il n'y a pas beaucoup d'exercices à traiter directement avec les définitions, ils sont difficiles algébriquement et en première on disposera des dérivées.

Notre perspective est ici le moyen terme, la construction chez les élèves de représentations « authentiques » des mathématiques, avec leur complexité. En particulier la conceptualisation de la notion de fonction est longue, elle demande de coordonner « intimement » plusieurs registres, plusieurs aspects, dont certains ne vont pas de soi – ayant d'ailleurs demandé souvent un long temps aux mathématiciens eux-mêmes. Le sens de variation en fait partie, et c'est à ce titre que son enseignement « complet » pourrait se justifier à ce niveau, notamment en termes de familiarisation avec l'usage du formalisme algébrique.

4) L'expérience de l'enseignant semble engendrer des choix de proximités en relation avec les contenus en jeu et ce que savent ou ont fait les élèves, notamment dans un cas où il y a une activité d'introduction longue.

Les proximités ascendantes accompagneraient plutôt des épisodes "moins difficiles", avec une visée activité, que les proximités horizontales, à visée objet, les proximités descendantes étant moins nettement attribuées à tel ou tel type.

5) Retour aux ZPD : tirer ou pousser ? Individuelle ou collective ? Créer des rapprochements ou s'appuyer sur des rapprochements ?

---

<sup>31</sup> Cf. manuel de seconde « métamath » belin, 2019

On peut soupçonner qu'il y a deux manières pour l'enseignant (consciemment ou non) de "placer" utilement son discours dans les ZPD. Une première façon consiste à tirer" vers la généralité à partir des activités ou connaissances : dans ce cas il est important que les élèves réalisent qu'il s'agit de la même chose, prennent conscience de la généralisation, grâce à la proximité explicitée avec du déjà-là en contexte ; l'enseignant les tire vers de l'inconnu, ce qu'ils ne feraient pas seuls ; une deuxième façon, peut-être plus spontanée, est "de faire descendre" du général vers des applications contextualisées : dans ce cas il est important que les élèves reconnaissent la contextualisation, grâce à la proximité explicitée avec (une partie du) déjà-là général. On pousse les élèves à adapter ce qui est nouveau à un contexte connu, le problème n'est pas lié à l'établissement du nouveau mais seulement à « se retrousser les manches » pour l'adapter.

On peut aussi remarquer que souvent l'appui de l'enseignant lui est fourni par un seul élève, pas le même selon les moments. On a pu identifier au moins 4 ou 5 prénoms différents. Il semble cependant qu'il y ait un élève qui soit particulièrement sollicité quand c'est difficile. On peut alors penser que l'élève dont la réponse est reprise, ou qui est questionné, il y a vraiment écho et potentiellement travail dans sa ZPD mais pour les autres ? Il y a un problème théorique indéniable ici : tout se passe comme si l'enseignant travaillait sur une ZPD « moyenne », qui n'est éventuellement pas présente<sup>32</sup> chez tous les élèves, et escomptait quand même une certaine diffusion parmi les élèves des bénéficiaires de ce travail.

On ne peut ainsi pas affirmer que tel ou tel rapprochement est entendu par des (les) élèves ni qu'il contribue à une acquisition. Cela peut être très différent selon les élèves, comme on l'a déjà souligné pour les aides (Robert & al. 2012). Une grande prudence s'impose...

En fait, en réfléchissant à cette diversité, on peut encore introduire une autre distinction, mis à part les aspects internes et externes dont parle Vygotski, qui décrivent la nécessité d'une internalisation par les élèves d'éléments proches travaillés d'abord avec autrui. Il y a ainsi peut-être deux autres aspects un peu différents à considérer quand on réfléchit à des processus cognitifs relevant d'un travail dans la ZPD. Il y a l'existence même chez un élève de connaissances "proches" des connaissances visées, et il y a le travail que l'enseignant partage avec l'élève avec ou sur ces connaissances proches pour le faire avancer vers du nouveau. Les deux seraient en relation mais pas réductibles l'un à l'autre. Dans quelle mesure une connaissance acquise ou en voie d'acquisition est susceptible d'engendrer chez un élève des connaissances proches, qui pourraient servir de point d'appui à un travail avec l'enseignant ?

C'est une manière schématique de dire les choses – le mot connaissance est ici à prendre dans un sens large, comme nous l'avons rappelé au début du texte. Prenons un exemple fictif. On peut se demander si, pour un élève, avoir réalisé numériquement ce que représente un maximum pour une fonction (ses valeurs augmentent puis diminuent) peut toujours donner lieu à l'entrée dans un questionnement algébrique suscité par l'enseignant sur la propriété correspondante de la fonction. Il se pourrait qu'un élève n'étende pas au cadre fonctionnel, même aidé par l'enseignant, la connaissance numérique qu'il a comprise, auquel cas la proximité supposée par l'enseignant ne jouerait pas son rôle de point d'appui. On peut imaginer qu'un intermédiaire soit nécessaire, explicitant davantage le lien entre le cadre numérique et le cadre fonctionnel par exemple. Est-ce que ce sont les proximités horizontales et descendantes qui contribuent à "alimenter" (voire créer si ça ne vient pas des élèves eux-mêmes) ce qui peut devenir, chez certains élèves qui n'ont pas fait seuls ce cheminement avant, un certain potentiel de connaissances proches ? Ça irait avec notre constat chez notre enseignant de proximités

---

<sup>32</sup> Au sens où les élèves n'ont pas les mêmes connaissances « proches », leur permettant de bénéficier des aides de l'enseignant pour ensuite se les approprier.

descendantes et horizontales plutôt "objet" ? C'est un peu contradictoire avec une certaine vue intuitive (piagetienne) des apprentissages, qui les conditionnent à des activités de construction, mais c'est peut-être conforme à une certaine réalité, notamment sociale ?

En ce qui concerne le travail s'appuyant sur des connaissances proches, on a tendance (avec Vygostki) à le situer du côté des activités partagées entre élèves et enseignant, et, si on suit ce fil, des proximités ascendantes. Est-ce une affaire d'activités contextualisées, est-ce une affaire d'activités plus liées à la reconnaissance des savoirs, y compris généraux, ou à leur mémorisation ? Ça irait avec notre constat chez notre enseignant de proximités ascendantes plutôt "activités" ? Vraisemblablement il n'y a pas une réponse unique ni univoque, ça va dépendre des notions, des élèves, chacun et leur groupe, de leur engagement dans le processus, mais aussi du prof et de ses choix de tâches et de déroulements.

Si c'était le cas (s'il existait bien une distinction à prendre en compte entre deux aspects de la ZPD), on comprend la nécessité de faire travailler les élèves immédiatement après le cours pour s'appuyer sur ce qu'on vient peut-être d'engendrer chez les moins autonomes... Et de multiplier alors à la fois les aides procédurales s'il en est besoin, puis les aides constructives, voire les proximités ascendantes... On retrouve cette idée (cf. RDM 2014) des deux étapes nécessaires pour certains élèves, avec selon le contexte, activités a minima, aides procédurales, ou alors proximités descendantes et horizontales - activités normales, aides constructives, ou alors proximités ascendantes...

Ne peut-on y voir une proximité avec ce que disent Tzur et Simon et leurs deux stades d'apprentissage, anticipatory et participatory (Tzur et Simon, 2004).

6) Plusieurs perspectives s'imposent.

Une réflexion approfondie sur l'enseignement des fonctions et des différents formalismes algébriques qui s'y rattachent peut être menée, élargissant l'étude.

Pour apprécier l'impact éventuellement différencié des différents cours, nous avons lancé des pistes pour mettre en relation ces débuts de cours et les représentations de la notion que se font les élèves, y compris à moyen terme, – ainsi que leurs productions, à différents moments après le cours.

Il s'agit aussi de recommencer ce type d'étude sur d'autres cours (sur la même notion, sur d'autres notions FUG, sur d'autres notions non FUG) et de mettre en relation cours, représentations des élèves et productions d'élèves.

Enfin, un travail ultérieur plus théorique sera engagé sur l'adaptation de la notion de ZPD au cas de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques.

## Bibliographie

Bridoux, S., Grenier-Boley, N., Hache, C., & Robert, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances, analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 187-234.

Cabañas-Ramírez N.O., Locia-Espinoza E., Morales-Carballo A. (2020) Didactic Engineering in the Study of the Sense of Variation of Functions: Preliminary Analysis. *International Electronic Journal of Mathematics Education* e-issn: 1306-3030. 2020, vol. 15, no. 2, em0566

Chappet-Paries M., Pilorge F. Robert A (2017). Un scénario de formation de formateurs : les activités d'introduction, les moments d'exposition des connaissances et les capsules pour la classe inversée sur le thème « sens de variation des fonctions » en seconde. Document pour la formation des enseignants n°16, IREM, Université Paris Diderot.

Kuzniak A., Montoya E., Vandebrouck F., Vivier, L (2015) Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction, *cours à la 18ième école d'été de didactique des mathématiques*, In Y. Matheron, G. Gueudet et al. (Ed.), Enjeux et débats en didactique des mathématiques. Actes de la XIIIème Ecole d'été de didactique des mathématiques 18e école d'été de didactique des mathématiques, Brest, août 2015 (pp 47-66). La Pensée Sauvage

Osgood, W. (1912). *Lehrbuch der Funktionentheorie* (2te Auflage). Teubner, Leipzig.

Robert A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, *Recherches en didactique des mathématiques*, 3.3, 307-341.

Robert, A., Penninckx, J., & Lattuati, M. (2012) *Une caméra au fond de la classe, (se) former au métier d'enseignant de mathématiques du second degré à partir d'analyses de vidéos de séances de classe*. Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté.

Robert A., Robinet J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 16.2, 145-176.

Robert, A. & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2/ 4, 505-528.

Robert A., Tenaud I. (1988). Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C, *Recherches en didactique des mathématiques*, 9.1, 31-70.

Robert A, Vandebrouck F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et zpd des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en didactique des mathématiques*, 34-2/3 239-285.

Tzur R., Simon M. (2004) Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning *IJSME* 2(2) 287-304.

Vandebrouck F. : (2011) Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de Strasbourg*, Vol 16, pp 149-185.

## Annexe 1

NOM :

Classe :

Prénom :

Date : ..... / ..... / .....

### Surfaces agricoles

Le long d'une rivière dont les bords sont rectilignes, il a été décidé de délimiter des champs destinés à l'agriculture. Ces champs seront tous de forme rectangulaire, l'un des côtés du rectangle étant le bord de la rivière, ce qui permettra facilement l'arrosage des cultures.

Pour délimiter son champ, chaque famille d'agriculteurs reçoit une clôture de longueur égale à **750** mètres, ainsi que tout le matériel pour installer solidement la clôture. Chaque famille peut donc choisir les dimensions de son champ, pourvu qu'il respecte les contraintes indiquées et soit entouré par les **750** mètres de clôture.

*Les champs ainsi délimités auront-ils tous la même surface ?*

*Si la réponse à la question précédente est négative, existe-t-il une façon d'installer la clôture qui délimite un champ de surface maximale ?*

*Prévisions de l'enseignant : Mise en œuvre*

#### **Premier temps (en groupes)**

- ✓ Temps de recherche individuelle (5 minutes).
- ✓ Mise en commun par groupes (de deux puis quatre).
- ✓ Élaboration commune et écrite d'une réponse argumentée à la question posée.

#### **Deuxième temps (en classe entière)**

Reprise du problème en classe entière à partir des réponses fournies par les groupes.

- Importance du schéma.
- Expressions algébriques différentes selon la grandeur prise pour variable (longueur du côté du champ parallèle ou perpendiculaire à la rivière).
- Notion de fonction polynôme de degré deux et, éventuellement, différentes formes d'une telle fonction.
- Tableau de valeurs et représentation graphique.
- Définitions et vocabulaire des variations.
- Résolution graphique du problème posé.

- Limites d'une telle résolution.
- Résolution algébrique du problème posé.

### **Prolongements**

- ✚ Construction d'un tableau de variations à partir d'une courbe.
- ✚ Construction d'une courbe à partir d'un tableau de variations.
- ✚ Lecture fine d'un tableau de variations (informations explicites et implicites) → comparaison d'images ; nombre de solutions d'une équation ; image d'un intervalle par une fonction et approche de la notion de continuité.
- ✚ Variations des fonctions affines.
- ✚ Généralisation du problème : cas où la longueur de la clôture est un réel strictement positif  $L$  quelconque → fonction  $f_L$  ; parabole  $(P_L)$ .
- ✚ Lieu géométrique des sommets des paraboles  $(P_L)$ .
- ✚ La question des variations d'une fonction polynôme de degré deux quelconque.

### ***Ce qui est abordé***

- ♣ Compréhension de l'énoncé → schéma illustrant le problème (ouvert).
- ♣ Passage du numérique à l'algébrique → modélisation.
- ♣ Tableau de valeurs et représentation graphique.
- ♣ Notions de sens de variation et d'extremum d'une fonction.

**Annexe 2 : un extrait d'une étude épistémologique et didactique**

Found in textbooks	Identified in the epistemological analysis
<p>Definition 1: A function <math>f(x)</math> is increasing in a set <math>I</math>, if for any two points <math>x_1</math> and <math>x_2</math> of <math>I</math>, <math>x_1 &lt; x_2</math> implies that <math>f(x_1) \leq f(x_2)</math>.</p> <p>Definition: A function is named monotonous if it has the following behavior: Let <math>x_1</math> and <math>x_2</math> be two arbitrary points in the domain of definition such that <math>x_1 &lt; x_2</math>. Then, without exceptions, it should always be <math>f(x_1) \leq f(x_2)</math>, or always be <math>f(x_1) \geq f(x_2)</math> (Osgood, 1912).</p>	<p>The two definitions establish the same conditions. An important element rests on the fact that the proposal of Osgood (1912) is the result of the analysis of the contributions of Fourier, Ampère, Lagrange and Cauchy; each of these mathematicians made contributions to the definition essentially from a geometrical and algebraic approach. However, the definition in the textbook does not have this background, namely, a process of construction or reconstruction where the problems that make the establishment of rigorous conditions for increasing or decreasing functions are identified. According to Chorlay (2010), even when only one quantifier appears, there is a double hidden quantification in the definition (for any element <math>x_1</math> of <math>S</math> and any element <math>x_2</math> of <math>S</math>) that is undoubtedly an important obstacle for students' comprehension because formulations with double universal quantification followed by an order hypothesis (as in this case) lead to difficulties due to the poor cognitive integration of the definition in the long term and to the smooth integration of the conceptual image from the beginning. Even when this double quantification is correct from a technical point of view, it is not correct from a cognitive and epistemological point of view (in which the differences between the local and global properties</p>

**Annexe 3 : la transcription**

À gauche le tableau blanc affiche le résumé de ce qui a été fait le matin, avec le schéma de la surface :: à droite l'énoncé de la situation (un problème de géométrie, à partir d'une petite modélisation). Notations : entre / les énoncés de gestion de la classe/ En italique : les élèves :: les numérotations correspondent à des énoncés sur un seul contenu (autant que se peut).

[...] signale une coupe du texte vraiment sans importance

en jaune certains verbes permettant d'affecter à la proximité la mention « activité »...

En bleu les rappels

En rouge nos quelques remarques

Soulignées : les candidats proximités sous forme de questions

**En gras** :

Appui : (AI) appui sur activité d'introduction  
 (CS) appui sur connaissance supposée  
 savoir ou activité à venir (F).  
 (instrum)

GH	Verbatim	descendantes	horizontales	Ascendantes	Méta ou questions autres
	<b>Reprise activité du matin</b> ....				
	<b>Alors</b> première chose à retenir, ça c'est quand même un pb de géométrie, (1)				À retenir
	<b>Faire un dessin</b> , ça peut vraiment aider. Un dessin, alors suffisamment précis pour que figure sur ce dessin toutes les données du pb.			Sur méthode (activité), spontanée, (AI) – pas d'effets attendus	
	<i>Rappel démarche et calculs pour obtenir des surfaces différentes...</i>				
	et qu'est ce qu'il suffit de <b>prover</b> , qu'est ce qu'il suffit de <b>dire</b> pour prouver qu'ils sont pas tous de la même surface ? Ada ?			<u>Question qui provoque la réflexion</u> - Quel mode de raisonnement, spontané, activité (AI) – répondu	
	<i>E. contre exemple</i>				
(2)	Oui, <b>alors</b> contre exemple, et là il en faut donc deux . Deux contre, enfin deux exemples qui prouvent que tous les champs n'ont pas la même surface]...	Contextualisation du mode de raisonnement général utilisé objet (AI)			

	<b>Donc après</b> on peut se demander s'il est possible de trouver une surface qui serait plus grande que toutes les autres.				
	<b>c'est à dire</b> qu'on n'arriverait pas à dépasser (geste).		plus grande / indépassable : changement de point de vue, spontané, objet (CS)		
	Et du coup la deuxième étape ça a été à ce moment là				Deuxième étape, répondu
	<i>E: la recherche ;</i>				
	P : la recherche en utilisant quoi ; <i>E : x ;</i>				
	P : x, <b>c'est-à-dire</b> les fonctions. ; <b>Autrement dit</b> <b>on est passé</b> d'un calcul numérique ; <i>E. à un calcul algébrique ;</i> à un calcul algébrique :: ;	Reconnaissance fonctions (objet)(CS)	c'est à dire changement de point de vue sur fonctions, objet (CS)	généralisation sur changement de registre via élève spontané, activité, (AI)	Question sur changement registre, répondu
(3)	<i>Choix de x comme lettre et rappel mathématisation...</i> On appelait x les longueurs en mètres des côtés du champ qui sont perpendiculaires à la rivière Ça c'est les deux côtés qui mesurent x. Dans les deux groupes on est arrivé, d'une façon pas forcément de la même façon, mais on est arrivé du coup à exprimer la longueur des côtés parallèles à la rivière en fonction de x déjà. Et <b>donc</b> on est arrivé à $750 - 2x$ et dans l'autre groupe on a écrit $750 - 2a$ ,				x et a c'est la même chose, nécessité d'accord

	mais c'est la même chose. Ça c'est pour qu'on soit tous d'accord sur les notations.				
	<b>Introduction de l'intervalle pour x</b> Alors vous avez vu qu'ici j'ai laissé un petit espace, est ce que certains voient déjà, avant que j'en dise plus, <b>pourquoi</b> il y a quelque chose à préciser ici sur x ? [écriture au tableau] [...]			<u>Question qui provoque la réflexion : sur x ?</u> spontané, activité Nouveau – (CS) répondu	
	<i>E. x on peut dire c'est quoi x</i>				
	Alors c'est quoi x, au sens de qu'est ce que ça représente, la phrase ici nous le dit [...]				
	<i>A ... il appartient aux réels</i>				
(4)	Alors x c'est un réel, <b>autrement dit</b> est ce que j'écris ici x appartient à $\mathbb{R}$ ? c'est ça ?		du registre langue au registre ensembliste (objet)(CS)		
	La question est de savoir si x est un réel quelconque.		De un réel à quelconque (spontané) objet(CS)		
	<b>Autrement dit</b> est ce que x peut prendre toutes les valeurs de tous les réels. [...]		<u>Question</u> : De quelconque à toutes valeurs possibles (spontané) objet (CS) pas répondu		
	Est ce que, je répète ma question, .... Est ce que x peut prendre toutes les valeurs réelles ? Est ce que je peux remplacer x par n'importe quel nombre ?		<u>Question</u> : De toutes les valeurs à n'importe quel nombre (objet, activité, spontané CS) répondu		

	<i>E oui, non</i>				
	[...] <b>Alors</b> Nad...				
	<i>E.</i>				
	x va être effectivement supérieur à 0 <b>pourquoi ?</b>	<u>Question qui provoque la réflexion</u> : signe de x ? objet (CS) répondu			
	<i>E. parce que c'est une longueur</i>				
	Parce que c'est une longueur et une longueur c'est un réel effectivement qui est a priori strictement positif. <b>Donc</b> déjà x ne peut pas être négatif.	Longueur positif (reprise, objet)(CS)	Changement de point de vue : strictement positif = pas négatif, spontané, objet CS		

(5)	/Est ce que quelqu'un veut ajouter autre chose ?/				Question - répondu
	<i>E.x ne peut pas être plus grand que la longueur</i>				
	<b>Alors</b> x ne peut pas être plus grand que, finissez votre phrase que la longueur...				
	<i>E des côtés</i>				
	Oui <b>c'est-à-dire...</b>				
	<i>E que la somme des côtés du rectangle</i>				
	Oui, <b>alors</b> la somme des côtés du rectangle...				
	<b>Autrement dit</b> est ce que ça ça représente un nombre précis (montre avec ses mains) :: c'est juste une question générale, une...				C'est juste une question générale

	<i>E. inférieur à, enfin strictement inférieur à 375</i>				
	<b>Alors 375</b>				
	<b>Alors</b> déjà 750 ça <u>ça peut être facile à comprendre</u> La longueur totale de la clôture fait 750. Donc <u>évidemment</u> la longueur d'un côté				Facile à comprendre, évidemment
	<i>E sauf la rivière</i>				
(6)	<b>Alors</b> oui, Attention la rivière elle compte pas, ça c'est un bord du champ qui n'est pas clôturé. Donc la somme de ces 3 longueurs est égale à 750. <u>Évidemment</u> si on prend un côté, il peut pas être plus grand que 750. Alors A. dit que c'est même 375. Mathi				Attention, la rivière elle compte pas...
	<i>E(M). Vu qu'il y a deux x on divise 750 par deux</i>				
	Oui vous avez déjà deux fois la longueur x et la somme de ces deux x elle ne peut pas, elle ne peut pas non plus dépasser 750. Au total il y a 750mètres de clôture.				
	Donc si on divise 750 par 2 on obtient 375. Et est ce qu'on pourrait prendre exactement $x = 375$ ? Ça ferait un drôle de champ, hein, 375m, on revient au point de départ (geste vertical vers le bas puis le haut). Ça fait un champ qui est, c'est un champ limite				Question fictive, <b>non répondu</b> Champ « limite »

	Donc en effet 375 c'est la valeur maximale que peut prendre x.		Point de vue algébrique (maxle)objet (CS)		
--	--	--	---	--	--

(7)	<p>Ça c'est important parce que vous avez vu c'est un pb compliqué quand même, c'est un pb ouvert. Si déjà on peut savoir exactement les valeurs de x qui sont concernées, ça évitera de compliquer les choses inutilement.</p> <p><b>Donc</b> on va écrire ça ici compte tenu de tout ce qu'on a dit [il lit ce qui est écrit au tableau en dessous d'un tableau de valeurs].</p>			méthode : pour ne pas compliquer un problème, activité, spontané (AI)	
	On appelle x la longueur des côtés du champ perpendiculaires à la rivière et on précise				
	<b>Alors</b> comment est ce qu'on va écrire ça ? Mel. ?		<u>Demande de formalisation activité (CS)</u>	<u>Question qui provoque la réflexion</u> changement de registre ; activité (CS) répondu	
	<i>E. un intervalle</i>				
	Un intervalle. (il écrit) donc x				
	<i>E appartient</i>				
	appartient				
	<i>E. zéro inclus,</i>				
	Zéro (Il écrit sans rien dire). C'est ça ? [...]				
	<i>E. Et trois cent soixante quinze inclus</i>				

	(à l'intervalle $[0, 375]$ (écrit sans rien dire))				
	<b>Bon alors</b> est ce qu'on prend 0 est ce qu'on prend pas zéro ? On va prendre 0 même si c'est limite, c'est pas très important.				C'est pas très important
	En tout cas voilà. Les $x$ qu'on va considérer sont des nombres réels compris entre 0 et 375.		Intervalle = réels compris entre 0 et 375 (spontané, objet, CS)		
<b>(8)</b>	<b>Reprise des calculs de la surface <math>f(x)</math></b>				
	Une fois qu'on a donné un nom, enfin qu'on a appelé $x$ la longueur de ce côté là, qu'on a déterminé que c'est $750 - 2x$ , la longueur de cet autre côté (Reprend l'écriture au tableau) on va pouvoir calculer la surface du champ puisque le champ c'est un rectangle, et <b>comme disait</b> Agni, c'est ça, on a une fonction. <b>Alors</b> est ce qu'on avait donné un nom à la fonction ?	Cas particulier de $f$ fonction (reprise élève, objet, CS)			Est-ce qu'on avait donné un nom à la fonction ? <b>répondu</b>
	$E. f ;$				
	$f$ on va l'appeler, /Si vous voulez on l'appelle $f$ , c'est pour qu'on soit tous d'accord, comme je sais pas si dans les deux groupes on a fait exactement la même chose, / on va l'appeler $f$ cette fonction, <b>alors</b> définie sur l'intervalle qu'on a précisé à l'instant pour $x -$ écrit $[0, 375]$ Et <b>donc</b> maintenant qu'est ce qu'on va écrire ? Adri ? ;				Qu'est-ce qu'on va écrire ? <b>répondu</b>

	<i>E. f(x) ;</i>			
	(écrit sans rien dire) $f(x)$ ;			
	<i>E. est égale à ;</i>			
	(écrit sans rien dire) = ;			
	<i>E. Heu 750 moins 2x ;</i>			
	(écrit sans rien dire) $750 - 2x$ (petit silence) ;			
<b>(9)</b>	<i>E. Enfin non c'est a, heu x fois 750 - 2x ;</i>			
	C'est ? ;			
	<i>E. C'est la surface ;</i>			
	Ah, c'est la surface, on en était à la surface du champ ;			
	<i>E. (dit) x fois entre parenthèses (750 - 2x) ;</i>			
	(Complète sans rien dire) $x(750 - 2x)$ . ;			
	<b>Donc</b> une fois qu'on a un côté qui s'appelle $x$ , qui est mesuré par $x$ , on a l'autre côté, la surface d'un rectangle, <b>vous vous rappelez</b> , c'est, on dit parfois longueur fois largeur, donc $750 - 2x$ fois $x$ ou $x$ fois $750 - 2x$ . <b>Donc</b> ça donne bien cette expression là. /on pourrait se passer de... la petite croix.../	Cas particulier de la formule de la surface d'un rectangle, objet CS		On pourrait se passer de la petite croix $x$
	<i>E. non, non, non. Vous avez dit que le tour de la clôture fait 750</i>			
	<b>Intermède – réponse sur calcul</b> Ça c'est le... Oui, mais ça c'est le périmètre, enfin non c'est même pas le périmètre... Ça ça fait 750 (il montre sur le schéma) mais nous ce qu'on veut, <b>alors</b>			

	<i>E. Vous avez dit que... ça faisait 750</i>			
	f(x) <b>alors</b> f(x) (il écrit f(x) au milieu du rectangle dessiné et hachure la surface) ça va être ça.		registres (langage /dessin)spontané, mathématisation, objet AI	
	<i>E. Ah !</i>			
<b>(10)</b>	f(x) on est d'accord c'est la surface du champ, donc c'est la surface d'un rectangle.		mathématisation (champ=rectangle, objet)CS	On est d'accord répondu (non)
	<i>E. je comprends pas ça fait 750-2x</i>			
	Ça c'est la mesure d'un des côtés, oui ?			Mathématisation (objet) (AI)
	<i>E. ça fait pas 750</i>			
	Ce qui fait 750 regardez : ça plus ça plus ça ça fait 750.			
	<i>E.</i>			
	Non on a dit 750 - 2x.			
	<i>E. c'est la même chose , non</i>			
	Non justement, quand vous avez, ce matin quand vous avez mis 250 ici, vous aviez 250 et 250, 500, comment vous avez trouvé ce côté là,			
	<i>E.</i>			
	Oui et en l'enlevant à 750 pour voir ce qui restait.			
	C'est exactement ce qu'on a fait on additionne les deux (montre x), on obtient 2x et on l'enlève à 750 pour avoir la longueur qui reste, pour être sûr qu'au total ça fait 750.		Détaille l'activité (AI)	Occasion manquée : 750 considéré dans une expression algébrique (mélange nombres et x)

	<i>E. Ah ouais !</i>				
	Ça va ?				
	<i>E. à moitié</i>				
	Ça va parce que c'est des lettres mais ce que vous avez fait ce matin avec des nombres c'est exactement la même chose qu'on a fait ici avec des lettres.			changement de registre numérique / littéral (sans les mots de la part du prof) spontanée activité (AI)	C'est exactement la même chose
	<i>E mais là pourquoi ... vous le mettez dans cette ligne le 750 – 2x</i>				
(11)	Non ce que j'ai voulu dire c'est que la longueur du trait vert elle est donnée par ce qui est écrit en vert, la longueur du trait marron par ce qui est écrit en marron... c'est une cotation.				
	Quand on cote, vous savez quand on met des dimensions. C'est comme si ici j'avais mis 100mètres, 100mètres, et 550mètres. <i>(fin)</i>		numérique / littéral(objet)(AI)		
	Sauf que là c'est une expression littérale parce que justement on va faire varier,			Littérale parce que faire varier (spontané, activité)CS	
	<b>alors maintenant</b> on va faire varier la longueur de ce côté là. <b>Donc</b> x c'est la variable, et f(x) la surface donc c'est le résultat du calcul.	Reconnaissance variable et fonction (objet) CS			
	<b>Alors</b> vous pouvez écrire ça comme ça ou vous pouvez supprimer la petite croix si vous voulez.				Vous pouvez écrire comme ça...

	<p><b>Introduction des variations et du maximum</b></p> <p><b>Alors</b> maintenant quel est le problème ? Qu'est ce qu'on <b>va faire</b> maintenant de cette fonction ? Maintenant qu'<u>on a passé</u> le cap du numérique à l'algébrique <b>avec l'idée que</b> grâce à ça on va avoir accès à toutes les surfaces possibles :: puisque x représente toutes les longueurs possibles pour ce côté là (il montre le tableau), on va avoir toutes les surfaces possibles (il montre la formule de la surface).</p>	<p>Fonction : lorsque x prend toutes les valeurs possibles on a toutes les surfaces possibles (spontanée, objet) CS</p>		<p>Question qui provoque la réflexion : qu'est-ce qu'on va faire de cette fonction ? Spontanée, activité nouvelle, AI, CS (répondu in fine)</p>	
12	Plus simplement quelques exemples				
	même si on multiplie les exemples parce qu'on est courageux et qu'on a du temps, là on a accès à toutes les surfaces possibles. Alex.	Reprise : toutes les surfaces possibles (objet) CS			
	<i>E. on peut développer</i>				
	<b>Alors</b> on peut développer, c'est à dire écrire ça autrement, mais fondamentalement qu'est ce qu'on veut <b>faire avec</b> cette fonction, à quoi est ce qu'elle va nous servir ?			Répétition même question () répondu	
	<i>E. à calculer toutes les surfaces possibles</i>				
	<b>Alors</b> est ce qu'on va <b>calculer</b> toutes les surfaces possibles ?			Question précisée	
	<i>E. On peut faire un graphique</i>				

	<b>Alors</b> on peut faire un graphique. <b>Alors</b> si on veut calculer toutes les surfaces possibles, c'est possible justement ? est ce qu'on <b>peut calculer</b> toutes les surfaces possibles			<u>Répétition – ajout toutes les surfaces</u> <b>(répondu)</b>	
	<i>E non</i>				
	Non, pourquoi non ?				Pourquoi ? <b>répondu</b>
	<i>E y en a une infinité</i>				
	Y en une infinité. <b>Alors</b>				
	<i>E donc c'est pas possible</i>				
	On ne peut pas les avoir toutes		Infinité = toutes (objet et activité)CS		
	<i>E. non mais si</i>				
	<b>Alors</b> qu'est ce qu'on <b>va faire ?</b>			<u>Question qui provoque la réflexion</u> activité (F) <b>(répondu)</b>	
	<i>E graphique</i>				
	<b>Alors</b> On peut faire un graphique. Mais est ce qu'un graphique ça va nous les calculer quoi.				Est-ce qu'un graphique ça va nous les calculer ? <b>répondu</b>
	<i>E.</i>				
<b>(13)</b>	<b>Introduction du tableur</b> <b>Alors</b> qu'est ce qu'on pourrait faire si on veut calculer, si on veut avoir un certain nombre de valeurs de la surface			<u>Restriction de la même question, activité</u> <b>répondu</b>	
	<i>E un tableur</i>				
	C. ?				
	<i>E. Un tableur</i>				

	<b>Alors</b> un tableur. Oui, avec une fonction on <b>peut avoir recours</b> au tableur ou alors au grapheur	fonction / tableur / grapheur (activité, méthode) appui sur activité instrum.			
	<i>E y en a sur l'ordi hein, y a un truc exprès</i>				
	Oui, sur l'ordi, il y a un truc exprès qu'on avait utilisé, Excel.				
	<i>E</i>				
	<b>Alors</b> on va sur l'ordi. <b>Alors</b> on va peut être quand même écrire ici deux choses (il écrit avec des flèches)				
	C'est que on va pouvoir utiliser un tableur ou un grapheur. Cela dit, vous m'avez dit ce qu'on va pouvoir les utiliser (oui on va voir la différence) ` mais pourquoi un tableur ou pourquoi un grapheur ? <i>C'est quoi notre objectif ?</i>				Pourquoi un tableur ou un grapheur ? c'est quoi notre objectif ?
	<i>E. on va calculer directement</i>				
	Oui mais <i>qu'est-ce qu'on cherche ?</i>				Qu'est-ce qu'on cherche ? <b>répondu</b>
	<i>E :: la plus grande valeur possible</i>				
	<i>E. tous les résultats possibles</i>				
	<b>Alors</b> le plus de résultats possibles mais dans quel but <i>n'oubliez pas la question qu'on se pose ?</i>		Le plus de résultats possibles à la place de tous ou de la plus		

			grande valeur (activité-objet) (F)		
	<i>E le plus grand champ possible</i>				
	<b>Voilà</b> trouver le plus grand champ possible en surface <b>Donc</b> savoir si cette fonction elle a une valeur maximale.	Valeur maximale d'une fonction (objet, spontané) CS	mathématisation langage : plus grand possible en surface → maximal (objet, spontané)	(mixte)	
	(Il complète sous les flèches) <b>Donc</b> on peut en effet mobiliser un tableur				
(14)	<b>Alors</b> c'est à dire le tableur ça nous fournit un tableau de valeurs. <b>Vous vous rappelez de ça ?</b> On apprendra bientôt ... Il faut qu'on le fasse à partir de novembre ça, Pour l'instant j'ai pas trop le temps mais... On apprendra à le faire à la calculatrice. Y en a qui savent déjà, alors ceux qui savent déjà, et si ça ne perturbe pas le cours vous pouvez le faire tranquillement, puis d'ailleurs je compterai peut-être sur vous pour apprendre aux autres	Le tableur fournit un tableau de valeurs (instrum.)			
	le tableur ça va nous donner un tableau de valeurs et le grapheur ça va nous donner une courbe représentative. <b>Alors</b> par contre... je vais éteindre le tableau (sur l'ordi, il éteint la lumière).	Le grapheur donne une courbe (instrum.)			
<b>14.3 0</b>	Alors le grapheur, le tableur (il projette un tableau Excel) voilà ce qu'il nous				

	donne. <b>Vous vous rappelez</b> hein on avait fait ça une fois				
	<i>E. Oui, c'était pour les voitures.</i>				
	C'était pour les voitures Tiens on va réviser un peu de vocabulaire. <b>Donc</b> ça c'est un tableau de valeurs				
	<i>E Un pas de 10</i>				
	Oh là là bravo ( <i>merci</i> ). Redites-le				
	<i>Un pas de 10...</i>				
	Un pas de 10. <b>Vous vous rappelez</b> le mot pas				
	<i>E. Non</i>				
(15)	Ben justement. <b>Alors</b> c'est quoi le pas Xav ::	<u>Question sur de l'ancien (instrum) répondu</u>			
	<i>E quand</i>				
	Alors un pas, vous faites un pas d'accord (il marche en insistant sur ses pas) c'est ce qui,				
	Regardez on avance ici de 10 en 10 voilà le pas c'est l'écart entre deux valeurs successives de x dans le tableau de valeurs, le pas c'est ce qu'on voit ici (montre la première colonne)	Définition du pas = écart entre valeurs successives (objet)(instrum.)	(mixte)	Définition du pas = écart entre valeurs successives (objet)	
	<b>Donc</b> ça nous c'est ce qu'on propose à l'ordinateur, au tableur et il nous calcule les surfaces. ...				C'est ce qu'on propose à l'ordinateur...

	<b>Alors</b> vous allez regarder. ce qui se passe ? Dans la colonne de droite évidemment, silence (7'')			<u>Question qui provoque la réflexion objet</u> Nouveau (?)	
	<b>alors</b> regardez bien parce que				
	<i>E Stop stop stop...</i>				
	<b>Alors</b> on peut peut être s'arrêter là alors qu'est ce que vous avez remarqué ?				
	<i>E ben le maximum il est là</i>				
	<b>Alors</b> il se trouve que dans la première partie du tableau qu'est ce qu'on a constaté ? ...			<u>Question qui provoque la réflexion objet</u> (?)	
	<b>Donc</b> j'espère que vous avez noté des choses.				
	<i>E. Ben oui</i>				
	<b>Alors</b> vous avez noté que dans la première partie du tableau on constate que la surface augmente (son doigt suit la colonne en descendant)			« la surface augmente » (+ geste) objet	
	<i>E. puis diminue</i>				
	jusqu'à, <b>alors</b> , une valeur qui pour l'instant est maximale		Passage surface à valeur (objet)	Précision objet spontané	
	<i>E. en nombre entier</i>				
	en nombre entier. En tout cas 190 on a 70300 et après on constate que, pour l'instant, on va aller au bout			Ça diminue (objet)	
	<i>E.</i>				
	Ça diminue. Alors est ce que ça continue à diminuer tout le temps			<u>Question qui provoque la réflexion</u> : tout le	

				temps ? (objet) répondu	
	<i>E. ouais</i>				
	Et là on est à 0. <b>Alors</b> qu'est-ce qu'on pourrait dire globalement, c'est à dire qu'est- ce qu'on a observé ? ...			<u>Question qui provoque la réflexion globale</u> objet répondu	
	<i>E augmente</i>				
(17)	Chut vous écoutez, vous vous écoutez...				
	<i>E. dans la colonne de gauche</i>				
	<b>Alors</b> dans la colonne de gauche est ce que les valeurs augmentent tout le temps ?			Précision de la <u>question</u> spontané objet répondu	
	<i>E. Oui</i>				
	Dans la colonne de gauche les valeurs augmentent de 10 en 10 régulièrement de 0 à 375				
	Dans la colonne de gauche x augmente tout le temps (c'est le principe du tableau de valeurs de pas 10) et du coup tandis que x augmente	« principe » tableau de valeurs de pas 10 sur x (objet)		« principe » tableau de valeurs de pas 10 sur x (objet)	C'est le principe du tableau
	<i>E. ben</i>				
	Donc dans la colonne de droite				Dans la colonne de droite... (répondu)
	<i>E. ça augmente</i>				
	ça augmente				
	<i>E. et après ça diminue.</i>				
	et après ça diminue. <b>Donc</b> on a d'abord des valeurs qui sont en augmentation et puis après, alors			bilan local (sur les valeurs) objet	

	ici( <i>ça diminue</i> ) c'est à 190 que ça a l'air de changer, et après c'est en diminution,			
	<i>E. à partir de 200</i>			
	<b>voilà</b> à partir de 200 et jusqu'à la fin. J'ai mis 375 parce que ça tombe sur 375 où ça fait 0, bon.			
(18)	<b>Donc</b> qu'est ce qu'on peut déjà. <b>Qu'est ce que ça peut nous permettre de dire cette observation.</b>			<u>Question qui provoque la réflexion spontanée</u> objet (?)
	<i>E</i>			
	Et déjà c'est pas toutes les mêmes valeurs ça on l'a vu, il y en a plein plein de différentes Et puis de façon plus globale, End.		Pas toutes, plein de différentes, spontanée, objet	
	<i>E. plus x est grand</i>			
	plus x est grand			Plus x est grand (répondu)
	<i>E. plus la surface est petite</i>			
	<i>E. non</i>			
	<b>Alors</b> c'est pas. Alors corrigez, Juli, corrigez [...]			
	<i>E. Ben ça augmente mais au bout d'un moment ça rediminue</i>			
	Dans un premier, pour certaines valeurs de x ça augmente			
	<i>E. Et après ça diminue</i>			
	Et après ça diminue. <b>Alors</b> est ce que c'est clair pour tout le monde ça ?			Est-ce clair pour tout le monde ?

	<b>Alors qu'est ce qu'on pourrait faire comme phrase ?</b> Essayez de faire une phrase, oui une phrase, Agni.			Question qui provoque la réflexion sur formulation (activité, en partie non spontané) répondu petit à petit	
	<i>E.</i>				
	<b>Alors</b> c'est quelle ... quelle première partie ? Y a une première partie où la surface augmente Jului.		Retour aux surfaces à la place des valeurs (objet)		
<b>(19)</b>	<i>E. ben sur x à un certain moment</i>				
	<b>Alors</b> sur x. Précisez sur x justement (avec un geste de gauche à droite)				
	<i>J. sur x ça augmente, jusqu'à un nombre et après ça diminue</i>				
	Alors on va essayer alors Jusqu'à 190 pour x. Donc qu'est ce qu'on pourrait dire pour x ?			Répétition avec précision activité non spontané répondu)	

	<i>E. ça augmente jusqu'à 190 et à partir de 200 ça diminue ;</i>				
	D'accord <b>donc</b> on part de 0 jusqu'à 190. Quand on prend x entre 0 à 190 on constate que la surface semble augmenter et quand on se met entre 200 et 370 la surface ;				La surface ... (répondu)
	<i>E. Diminue ;</i>				
	Diminue. D'accord <b>donc</b> 0 190 c'est un premier intervalle (il montre le tableau déjà écrit à gauche). <b>D'accord donc</b> on		Introduction intervalle (objet)		

	pourrait dire que, /Agni. vous voulez écrire ça/ ;				
	<i>E. non c'est bon</i>				
(20)	on constate que sur l'intervalle 0 190, quand on prend x entre 0 et 190, on constate on a une surface qui est en augmentation et puis sur l'intervalle 200 370 on a des surfaces qui sont en diminution. Vous voyez ça ?		De 0 à 190 remplacé par l'intervalle [0 190] (objet)		Vous voyez ça ?
	Bon. Est ce que ça veut dire que le maximum on l'a de façon certaine ici ?	Question qui provoque la réflexion objet spontané répondu			
	<i>E. Ça n'est pas précis ;</i>				
	Ça n'est pas précis Pourquoi ? ;				
	<i>E. ;</i>				
	<b>Voilà.</b> On a un écart de 10. Est ce qu'on pourrait avoir, est ce qu'on pourrait arriver à l'avoir exactement ? /Juli. parlez pour tout le monde en levant la main/ ;	Question qui provoque la réflexion activité répondu			
	<i>E. On fait un écart de 1 ;</i>				
	Un écart de 1. /Chut/ Ca suffira ? ;				Ça suffira ?
	<i>E. non</i>				
	En commençant éventuellement à 190 effectivement, en restreignant la zone, M.				
	<i>E. On résout une inéquation ;</i>				
	Ah On résout une inéquation ;				

	<b>Donc</b> est ce que c'est le tableur qui va nous la faire ?				Est-ce que c'est el tableur qui va nous la faire ?
	<i>E. Non ;</i>				
	<b>Voilà Donc</b> là qu'est ce que vous pointez comme, comme heu, comment dire comme options différentes enfin comme options là ? ;				Quelles options ?
	Avec le tableur est ce qu'on peut avoir un résultat exact ? ;	Question reprenant ce qui vient d'être fait objet en partie non spontané (répondu)	Question reprenant ce qui vient d'être fait objet-activité non spontané		
	<i>Non, approximation ;</i>				
(21)	On va avoir une approximation <b>alors</b> de plus en plus précise Julien a raison parce que plus le pas va être petit plus <b>on va peut être arriver à donner</b> une valeur précise. ;	Précision meilleure : objet non spontané	(mixte)	Précision meilleure : activité	
	<b>Intermède- réponse et reprise - sur algèbre</b> Mais Mel elle voulait résoudre une inéquation donc revenir à de l'algébrique pur. C'est ça (il montre le tableau). Voilà.				
	<b>Alors</b> effectivement, <b>on avait vu ça</b> que avec l'algèbre on peut peut être essayer d'obtenir un résultat précis. L'avantage	algèbre = précision (objet), algèbre			Le travail c'est la machine qui le fait,

	du tableur c'est que, <b>vous avez vu</b> , le travail c'est la machine qui le fait et c'est assez rapide quand même. Mais attention hein pour programmer le tableur tiens je vais vous <b>rappeler</b> pour ceux qui se <b>rappellent</b> de excel. Voyez si on se met dans cette case là il faut avoir trouvé la fonction, voyez, x fois $750 - 2x$ (montre la case du tableur). vous la voyez, vous la retrouvez la formule là avec le langage des cases excel.... ;	nécessaire pour tableur (activité)			c'est assez précis quand même
	<b>Donc</b> il faut passer par l'algèbre pour arriver quand même à avoir un tableur qui nous dise des choses assez précises :: Éventuellement on y retournera. ;			algèbre pour tableur (instrum.)	
(22)	<b>Introduction du graphe sur geogebra</b> <b>Alors</b> il y avait une deuxième piste que Adri avait suggéré c'était le graphique. <b>Alors</b> c'est pareil il faudra apprendre à le faire à la calculatrice. Première chose quand on a fait un tableau de valeurs on peut préparer ce qu'on appelle la fenêtre de la calculatrice. Vous avez vu on ne peut pas prendre n'importe quelle quelle graduation :: pour x il faut aller de 0 à 375 (montre) et pour y vous vous rappelez des valeurs on avait une valeur à 70300 <b>donc</b> il faudra apprendre à faire ça à la calculatrice, à préparer	Préparation du travail sur calculatrice, (activité instrum., spontané)	mixte	Préparation du travail sur calculatrice activité instrum, spontané	

	une fenêtre qui soit adaptée aux valeurs et après une fois que vous programmez la fonction dans la calculatrice voilà ce que vous obtenez (il projette) et <b>donc</b> on a ceci ;				
	(il montre) ;				
	<i>E. ; c'est quoi</i>				
	<b>/donc</b> là j'avais préparé quelque chose pour aller un peu plus vite/ <b>donc</b> là j'ai donné cette fonction à géogébra qui me l'a dessiné sur l'intervalle 0 , 370. ;				
	<i>E. mais là c'est max ;</i>				
	<b>Alors</b> j'ai simplement activé l'apparition de la courbe. ;				
	<b>Alors</b> cette courbe là elle nous dessine la fonction ;		<u>Cette courbe/ fonction spontanée objet</u>		
(23)	<i>E. c'est pas précis non plus ;</i>				
	<b>Alors</b> c'est pas précis non plus <b>puisque</b> c'est un graphique, <b>est ce que déjà c'est en cohérence avec le tableur</b> , Hela [...]	graphique donc pas précis (objet)	<u>Question provoque réflexion sur cohérence graphe/tableur objet en partie non spontané (?)</u>	graphique donc pas précis (objet)	
	<i>E en fait comment ... l'expression algébrique comme quoi x est entre 0 et 187,5 ;</i>				
	<b>Alors</b> sur geogebra ? [...]				

	<i>E entre 0 et 180 x augmente et que x appartient aussi à</i>				
--	--	--	--	--	--

	/Attendez, chut, chut/				
	<i>Ex appartient</i>				
	Oui <b>alors</b> pour écrire ça, ou j'ai l'impression que vous allez dire quelque chose après si c'est juste ça j'écris x appartient				
	<i>E :: non ça augmente</i>				
(24)	<b>Alors</b> c'est très bien, c'est exactement ce qu'on va faire après, on va regarder un peu ça et puis après, vous êtes en train de poser la question, enfin c'est ça que je crois comprendre				
	comment est ce qu'on va expliquer avec des mots et des lettres ce qu'on constate sur le tableau et sur le graphique. C'est ça que vous voulez dire ? ( <i>oui c'est ça</i> ) On va faire ça exactement.			Question provoque réflexion sur passage littéral de graphe ou valeurs objet, non spontané (répondu en partie)	
	Ça ça va être un peu plus difficile. On va faire ça dans 5 minutes. Enfin je pense, le temps de regarder ça et				
	après effectivement c'est donner la définition d'un mot très précis, <b>donc</b> là je vais vous donner un mot, qui explique ce qu'on voit, c'est <b>pas un mot compliqué</b> à comprendre hein,				
	et on va essayer de donner une définition générale qui décrira ce qu'on appelle les variations des fonctions. Quand on parlé de			Définition annoncée : de augmentation / diminution à variation	Essayer de donner une définition générale

	diminution d'augmentation c'est ce qu'on appelle plus généralement les variations de fonctions, c'est le chapitre sur lequel on va enchaîner tout de suite. Adri			des fonctions, objet, spontané	
	<i>E. est ce que sur le grapheur on peut demander quel est le maximum ?</i>				
	Oui, exactement, voyez c'était prévu c'est à dire que GeoGebra si je lui demande de me mettre en évidence le point qui est au sommet de cette courbe, il a une commande <b>alors</b> c'est pareil je vous apprendrais un jour si vous voulez, vous pouvez presque le faire tout seul puisque geogebra ça se télécharge gratuitement				
	<i>E</i>				
(25)	<b>Alors voilà</b> attention. Est ce que c'est exact ? Encore une fois geogebra c'est des calculs comme votre calculatrice approchés avec une grande précision éventuellement mais c'est à prendre comme des valeurs approchées.	Approximation sur calculatrice ou geogebra (objet)			
	<i>E ... elle sert à quoi alors ?</i>				
	<b>Intermède- réponse - sur approché et vie courante</b> Bien sûr, bien sûr la calculatrice dans la vie courante vous savez les résultats approchés eh ben ça nous suffit largement. Quand vous voulez faire un				Les valeurs approchées on vit avec ça.

	<p>cercle vous allez pas prendre pi, vous allez prendre 3 et quelque, si vous avez besoin de d'acheter une clôture pour entourer un un massif de fleurs circulaires vous allez prendre d'accord vous allez mesurer le diamètre et le multiplier par 3,2 si vous voulez être un peu large pour acheter votre clôture. Parce que la lettre pi qui est la valeur exacte elle ne vous servira pas, donc les valeurs approchées on en a, on vit avec ça. Ada <b>(fin)</b></p>				
	<p><b>Donc</b> vous avez raison il y a, grâce à la commande de géogébra qui permet d'afficher le point le plus haut, <b>alors</b> on trouve ici en effet, ben il est par là, ... c'est ce que J nous avait proposé ce matin, il avait proposé ça comme valeur maximale :: ça semble être conforme avec ce que donne géogébra avec toujours cette restriction que c'est quand même une valeur approchée, et que</p>	<p>Commande pour maximum (activité instrumentation)</p>			
(26)	<p>Mel a raison, peut être qu'il faudrait revenir à de l'algèbre mais c'est trop compliqué, donc on peut se satisfaire de ça pour avoir entre guillemets la valeur exacte mais sans avoir quelque chose d'absolument précis.</p>				
	<p><b>Alors</b> Adri. veut dire quelque chose</p>				

	<i>E. 187,5</i>				
	oui on trouve 187,5 pour x ça ça faisait le fameux champ de 187,5 ,187,5 et 375 (il dessine dans l'air) et ça fait en effet une valeur de 70312,5m <sup>2</sup>		Retour en arrière au mathématisé. Objet, en partie spontané ?		
	On n'avait pas fait mieux <b>alors</b> il semble de toutes façons vu les, vu la courbe on puisse pas forcément à faire mieux. Juli oui ?				
	<i>E. 375 c'est le double de 187,5</i>				
	<b>Intermède- question</b> On peut se dire tiens c'est étonnant c'est la moitié de 375 qui elle même est la moitié de 750				
	(Geste englobant)				
	<b>Alors</b> les esprits aventuriers <b>qu'est ce que vous pourriez poser comme question ?</b>			Question qui provoque une réflexion nouveau objet (répondu un peu)	
(27)	<i>E. ben</i>				
	Chut levez la main. Oui ?				
	<i>E. A chaque fois c'est la moitié de la moitié de la moitié...</i>				
	Est ce que si je vous donne une longueur de clôture qui fait pas 750 mais qui fait				
	<i>E. 200 par exemple</i>				
	par exemple 200, est ce que ce sera encore la moitié de la moitié ? Ça c'est				

	<p>une excellente question c'est ce qu'on appelle appro voilà quand on dit approfondir c'est ça alors on va pas la traiter maintenant cette question mais c'est bien que vous la posiez, votre cerveau la garde dans un petit coin</p> <p><b>(fin)</b></p> <p>On revient à des choses plus basiques là dessus.</p>				
	<p><b>Alors donc</b> vous êtes d'accord que la courbe qui est là et le tableau qu'on a vu tout à l'heure disent un peu la même chose quand même ce que Juli a essayé de dire. Quand x va de 0 à, alors à peu près 190, on a une courbe qui monte (geste), et puis après on a une courbe qui descend (geste) :: dans le tableau on avait des valeurs de la fonction qui augmentaient et après des valeurs qui diminuaient.</p>		<p>Mise en regard des deux registres : "courbe monte valeurs de la fonction augmentent" (objet)</p>	<p>regroupement de l'ensemble des observations courbe et tableur (objet)</p>	
	[...] E. 703				
	70312 oui				
(28)	E. Ouais, ouais 190 c'est plus petit que ça				
	<p><b>Intermède – réponse - sur les échelles</b></p> <p><b>Alors</b> oui, parce que le problème c'est que, voyez vu l'échelle ici, 190 et 187,5 c'est tellement voisin qu'on ne voit plus la différence. <b>Alors</b> si on regarde de très très très près, on voit que là on est peut</p>				<p>Quand on regarde de très très près, zoom</p>

	être en dessous il faut faire un zoom parce que on avait trouvé 70300 oui mais regardez 12,5 avec l'échelle qu'on a en y c'est absolument invisible regardez ça ça fait 10000 (il montre un segment de 10cm sur l'axe des y). Là on est en train de raisonner sur quelque chose qui fait 12				
	<i>E ouais</i>				
	12 par rapport à 10 000 c'est tellement petit que ça se voit pas. ( <i>fin</i> ) <b>Donc</b> c'est bien ce qu'on disait ça ne suffit pas c'est quand même intéressant d'avoir ça sous les yeux puisque vous avez une vision globale de la fonction			Insuffisant mais vision globale de la fonction activité, spontanée	Ça n suffit pas mais intéressant d'avoir une vision globale
	<b>Institutionnalisation : les mots</b> <b>Alors</b> quels sont les mots qu'on va noter ?			<u>Question réflexion</u> sur l'institutionnalisation( mots) spontané objet (?)	
(29)	<b>Donc déjà</b> on va, ça c'est <b>donc</b> un exemple de ce qu'on appelle l'étude des variations d'une fonction et ... de ce qu'on appelle même un problème d'optimisation. Optimiser ça veut dire quoi ? /Juli ? [...]	exemple de « étude des variations d'une fonction » et au « problème d'optimisation » vocab(F)		exemple de « étude des variations d'une fonction » et au « problème d'optimisation »	
	<b>Alors</b> optimiser ça veut dire quoi ?			<u>Question provoquant réflexion</u> sur mot (vocab) répondu	
	<i>E. Améliorer</i>				

	Améliorer et faire même ce qu'il y a de mieux possible. <b>Donc ici</b> ce qu'il y a de mieux possible c'est la plus grande surface.	<u>ici</u> « le mieux possible = la plus grande surface spontané objet(AI)			
	<b>Donc</b> on parlera de pb d'optimisation et c'est justement ce qu'on appelle l'étude plus générale des variations de fonction,			On donne le titre	titre
	<b>donc</b> à la suite de ça, vous pouvez mettre à la suite, c'est quand même le titre d'un chapitre ça, c'est l'étude des variations de fonction.				
	On étudie des fonctions en ce qu'on appelle les variations (il écrit au tableau). Et <b>alors</b> on va on va revenir sur ce que, sur la question que posait [hela] :: comment est ce qu'on dit ça cette histoire de quand x est dans tel intervalle il se passe telle chose pour la fonction. <b>Donc</b> on s'intéresse aux variations de fonctions. Sami.				Comment est-ce qu'on dit ça, cette histoire quand x est dans l'intervalle il se passe telle chose pour f
	<i>E</i>				

(30)	<b>Bon alors déjà</b> on va commencer par des mots, ça ça va pas être très difficile à comprendre. On décrit ces				
------	--	--	--	--	--

	phénomènes par des mots(il montre la courbe) hein c'est toujours pareil en mathématiques il y a des mots précis ;				
	À votre avis qu'est ce qu'on peut choisir comme mot pour dire que la courbe monte ou que la fonction prend des (gestes vers le haut) valeurs qui augmentent ;			Question provoque réflexion sur un mot nouveau (activité) répondu	
	Alors on a été chercher un synonyme d'augmenter ;				
	Es un élève : <i>ascendant, un autre : croissant ;</i>				
	Croissant. <b>Voilà. Alors</b> on aurait pu dire ascendant alors ascendant c'est assez visuel. <b>Donc</b> en fait on a pris l'adjectif croissant. Donc par exemple ici si on veut employer le terme choisi par les mathématiciens on dira et on va répondre petit à petit à votre question que, / <b>alors</b> ici si vous enchaenez hein, par rapport à la structure de votre cours, <b>donc</b> là vous pouvez noter que on est encore dans l'exploitation de l'exemple des surfaces agricoles./ /Je vais un peu vite pour... / ;			le terme mathématique « croissant » est introduit comme choisi par les mathématiciens (suite prop élève)  on est encore dans l'exemple	Le terme choisi par les mathématiciens
(31)	Et <b>donc</b> ici par exemple on dira que (il écrit en même temps qu'il parle) sur l'intervalle, <b>alors</b> c'est pareil, si on fait confiance à géogébra quel est l'intervalle de x pour		Question : reprise sur l'intervalle de x concerné dans l'exemple (?)		

	lequel les valeurs augmentent ou pour lequel la courbe monte ? ... A quel intervalle Meli;				
	E. ;				
	Ça monte voyez (il montre la courbe) il y a une première partie qui monte puis après ça descend :: pour quel l'intervalle de x ? Hela		Question reprise : sur l'intervalle de x concerné dans l'exemple répondu		
	E. Ah ben $[0, 187,5]$ ;				
	Voilà si on fait confiance à géogébra pour l'instant on n'a pas...				

	(il écrit et dit) on va dire que sur l'intervalle $[0, 187,5]$ la fonction $f$ est, <b>alors</b> on va mettre en rouge, donc le mot hein le mot qu'on a choisi, on aurait pu en prendre d'autres, c'est croissante (écrit en couleur rouge). <b>Bon alors</b> après, c'est tout pour l'instant. Est croissante.			institutionnalisation d u mot : « la fonction $f$ » est « croissante »	
(32)	<b>Alors</b> vous pouvez noter entre parenthèses, <b>puisque ça faut pas perdre de vue</b> , que ça correspond à des valeurs qui augmentent dans le tableur par exemple, dans le tableur on a vu que les valeurs augmentaient et ça correspond à une courbe qui monte sur le graphique /Ça c'est des choses aussi <b>qu'il faut retenir</b> ./ Ça c'est le	Reprise immédiate du mot général introduit dans le cas particulier (spontané, vocab, P)			Faut pas perdre de vue que... Il faut retenir. Derrière ce mot c'est bien d'avoir des références

	mot précis /et derrière ce mot c'est bien d'avoir des références./				
	<b>Donc</b> dans le tableur les valeurs augmentent, sur là sur le dessin la courbe monte.				
	Et la fonction on ne dira pas qu'elle augmente ou qu'elle monte, on dira qu'elle est croissante. Ça c'est le mot précis.		On dira pas augmente mais croissante (spontané activité)		
	<b>Bon</b> et pendant qu'on y est sur l'autre intervalle, sur l'intervalle (187,5, 375] la fonction sera				
	<i>E. décroissante</i>				
(33)	bien :: décroissante. (Il écrit et dit) On va l'écrire pour l'instant sur l'intervalle (187,5, 375) la fonction est, est décroissante (écrit en rouge) .			id pour décroissante (toujours sur l'exemple) :	
	[...] <i>E. est ce que on inclut 375 ?</i>				

	<b>Intermède – réponse -sur bornes intervalle</b> Ah très bonne question, alors vous voyez là j'ai mis j'ai mis j'ai mis les crochets fermés partout. Heu c'est une bonne question, qu'est ce que vous pensez, est ce que c'est important est ce que d'inclure, d'ouvrir... ;				Qu'est-ce que vous en pensez ?
	<i>E. ben je pense qu'on devrait pas inclure 375 dans l'intervalle ;</i>				

	Oui et pourquoi ? ;				Pourquoi ? répondu
	E. ;				
	<b>Voilà</b> c'est le point le plus haut, on va dire c'est le point où ça bascule, où ça change, voyez.				Le point où ça bascule
(34 )	<b>Alors</b> en fait on va pas trop s'embêter avec ça pour l'instant. C'est vrai qu'on pourrait se poser la question, vous si vous préférez ouvrir vous ouvrez, parce que de toutes façons si c'est sur un intervalle que ça augmente, quand on se place à une valeur précise, de toutes façons ça n'a pas de sens de regarder ce qui se passe juste pour une valeur... <b>Donc</b> on peut ouvrir ici ou fermer là, c'est un peu comme vous voulez, pour l'instant, on va dire que c'est pas , <b>voilà</b>				On s'embête pas avec ça, ça n'a pas de sens de regarder juste pour une valeur... c'est un peu comme vous voulez
	/c'est une question intéressante mais je vous embêterai pas avec ça./ ; <b>fin</b>				
	<b>Institutionnalisation : la formalisation algébrique</b> <b>Alors</b> maintenant on n'a pas répondu à sa question : <b>comment ça se traduit ça</b> . Ça se visualise en courbe qui monte ou qui descend ou bien tableau où des valeurs augmentent ou des valeurs diminuent. ;				Comment ça se traduit ça, ça se visualise...
	Maintenant il faudrait qu'on soit capable peut-être de dire ça en termes plutôt algébriques, c'est à dire comment ça va	<b>Nous pensons que la réponse</b>		<u>Question provoque la réflexion</u> sur la formalisation	Capable un jour de prévoir les variations avant d'avoir vu sa

	s'exprimer, se traduire ? Avec des mots, avec des phrases, qui soient pas juste ça monte ça descend ou ça augmente ou ça diminue de façon un peu rigoureuse ; parce que après, à terme, alors c'est peut-être un peu prématuré, mais on va vous demander d'être capable un jour de prévoir les variations d'une fonction avant d'avoir vu sa courbe et sans forcément avoir fait un tableau de valeurs,	ne viendra pas des élèves,		algébrique, justifiée par manque de courbe ou de valeurs, spontané, objet, nouveau (non répondu)	courbe et sans forcément avoir fait un tableau de valeurs
(35)	et sinon pour aussi pouvoir, comme disait Mel, passer uniquement par l'algèbre ou par le calcul sachant que le dessin comme le tableau sont intéressants mais ils restent quand même approximatifs.			Besoin Justifié aussi par approximation(activité)	Tableau et valeurs approximatifs
	<b>Donc il faudrait une traduction</b> mathématique algébrique de ça ;		Traduction <u>demandée</u> (objet et activité) non répondu		
	<i>E. Ben on écrit. Ah c'est à dire on n'a pas le droit d'utiliser 0 et ... ;</i>				
	Qu'est ce que ça veut dire ? <b>Voilà</b> Quand j'écris cette phrase sur l'intervalle 0, 187,5 la fonction f est croissante (il lit la première phrase écrite avec fonction croissante) <b>comment est ce que je peux traduire ça en langage algébrique</b> sans référence à des valeurs parce que c'est			<u>Reprise de la question</u> non répondu	sans référence à des valeurs parce que c'est du numérique, sans référence à une courbe parce que c'est du graphique

	du numérique, sans référence à une courbe parce que c'est du graphique.				
	Ça alors je vous le dis tout de suite c'est pas facile, faites un effort de, pour essayer de réfléchir à comment on pourrait donner une définition en langage algébrique de cet adjectif (montre croissant). [...]		Définition en langage algébrique (objet)		Pas facile
(36)	Non, c'est à dire qu'il suffit pas de me dire, même si ça vous donne une idée, eh bien on a vu que dans le tableur les valeurs augmentaient quoi. C'est vrai hein c'est vrai...				Ça vous donne une idée
	Mais cette phrase-là <b>vous êtes d'accord</b> qu'elle est pas très opérationnelle en termes de calcul. C'est du constat, 'est une observation. Mari. ;		Augmente pas très opérationnelle (spontané, objet)		Constat, observation, pas opérationnelle
	<i>M. on utilise le signe &lt;(montré);</i>				
	On utilise le signe comme ça. Alors [...] Alors Mar elle a fait ça (dessine un signe <) c'est ça ?				
	<i>M. et l'inverse pour décroissante ;</i>				
	et l'inverse pour décroissante.				
	<b>Bon alors</b> je mets celui-là ... <b>bon ben</b> écoutez heu, c'est déjà pas mal, ça c'est de l'algèbre <b>alors</b> maintenant faudrait lier tout ça. Il y a peut-être une idée après ou c'est juste la première idée, utiliser ;	;	Les signes < et > c'est de l'algèbre – à relier (objet)		Première idée
	<i>E ;</i>				

	Utiliser les inégalités. Est ce que ça peut paraître logique ? ;			Question provoque réflexion (reprise): logique d'utiliser les inégalités ? Activité répondu	
	E ( ?) Oui, Oui ;				
	Pourquoi ? ; [...]				
(37 )	<b>Intermède en réponse à un élève</b> E. O, c'est O ou zéro ? ;				
	<b>Alors</b> là c'est le point O et la valeur de x c'est zéro. ;				
	E. bon zéro ; Mais ça a aucun rapport avec ça				
	Oui <b>Alors</b> dites puis après on écrira ;				
	E.... Zéro, on fait l'intervalle là zéro, 187,5. Après on fait inférieur à et supérieur à ;				
	Oui mais là vous me donnez des nombres ;				
	E. c'est O A ;				
	Oui mais A c'est un point. Là on a dit qu'on mettait de l'algèbre, il faut pas trop regarder le graphique ;				
	E :: ah ben non ;				
	Faut creuser peut être parce que <b>(fin)</b> ... Hela ? ;				
	E. l'intervalle on met < 187,5...;				
(38 )	Pour l'instant on va faire que celui là déjà (montre croissant). Voyez Mari elle a dit deux choses différentes, par			Reprise de la question de	

	exemple on va essayer de traduire la première phrase ;			« traduire » pas répondu	
	<i>E. <math>x &gt; 187,5</math>;</i>				

	<b>Alors</b> de toutes façons si vous êtes dans cet intervalle vous avez un x qui est en effet compris entre 0 et 187,5.				
	Donc si vous prenez un nombre dans l'intervalle, x, il sera compris entre 0 et 187,5.		Intervalle = x compris entre les bornes (objet)		
	Mais qu'est ce que ça veut dire que la fonction est croissante ? ;			Reprise question pas répondu	
	Essayez dans un premier temps peut être de le dire avec des mots mais en essayant de ne pas être trop visuel par rapport à la courbe. ;			Avec des mots, pas trop visuels (activité)	
	<i>E. je suis pas sûre à gauche on met la fonction, plus grande</i>				
(39)	Ca veut dire quoi qu'elle est plus grande ? Qu'est ce qui est plus grand que quoi et ?		question de précision : qu'est-ce qui est plus grand que quoi (objet) pas répondu		
	<i>E La surface ;</i>				
	sachant que si on parle de fonction, dans une fonction il y a x ;	Fonction de x (objet, spontané)			
	<i>E. C'est par rapport au côté ;</i>				
	et il y a y. Il y a x et il y a f(x). Oui alors, effectivement là on est par rapport au		x représente le côté (objet)	relance question pour une définition	

	côté, Alex, mais là j'essaie de voir quelque chose qui serait général, c'est à dire sur cet exemple de donner une fonction, heu une définition de fonction croissante qui soit une définition générale. Adri ;			générale à partir de l'exemple (objet) pas répondu	
	<i>E... sur l'intervalle 0, 87,5 plus x augmente plus y augmente aussi ;</i>				
	<b>Alors</b> plus x augmente plus y augmente. Est ce que ça ça vous parait une bonne description ? <b>Voilà. Alors</b> ça c'est nouveau plus x augmente plus y augmente. <b>Ça est ce qu'on peut mettre ça en algèbre ?</b> c'est à dire écrire ça avec des symboles. Peut être ce symbole là (il montre <) il peut être utile ;	est-ce que garder le terme « plus » va amener les élèves à considérer plus (davantage) qu'un seul x ?	reprise de « y » référence à la courbe (objet) Algèbre = symboles	<u>Relance question</u> « mettre en algèbre » (activité) (pas répondu)	Est-ce que ça vous parait une bonne description ? Pas répondu
	<i>E ::... ;</i>				
(40)	Peut être gardez là pour éviter qu'on s'embrouille, notez là si vous avez peur d'oublier. <b>Qu'est ce que ça veut dire plus x augmente ?</b> silence de 11'' <b>Qu'est ce que ça veut dire ?</b> ;			<u>Reprise question</u> (objet et activité) Pas répondu	
	<i>E. ;</i>				
	<i>E. Les valeurs supérieures à x augmentent, là, y augmente aussi ;</i>				
	<b>Oui alors</b> y, y déjà c'est f(x) Adri. ;		retour à f(x) (objet)		

	<i>E Il faut faire x avec une flèche qui monte en diagonale. Et après équivaut à y monte en diagonale aussi.</i>				
	Ah oui <b>alors</b> attendez, je crois que c'est ça (il transcrit) x ça				
	C'est ça un peu votre idée ?				
<b>(41)</b>	<i>E. Oui c'est ça</i>				
	<b>Alors</b> oui c'est déjà pas mal d'ailleurs ça pourra nous servir dans un autre moyen d'expliquer ça enfin de présenter ça Adam		Autre moyen de représentation pour plus tard (activité)		
	<i>E. j'ai trouvé un truc mais</i>				
	<b>Bon d'accord. Alors</b> est que c'est proportionnel ? <b>Alors</b> ça, x augmente ça veut dire quoi ? le x est de plus en plus grand. Ça veut dire que quand x est de plus en plus grand, en même temps f(x) aussi. <b>Alors</b> le problème c'est que c'est ça qui est compliqué. Cet x augmente de plus en plus. Comment est ce qu'on peut traduire ça avec ce symbole là (montre <) ? Pour dire que x est de plus en plus grand ? Ce symbole là il dit bien plus grand que. <b>Donc</b> entre de plus en plus grand et plus grand que on a l'impression que c'est quand même connecté. Oui ?		Traduction intermédiaire du prof : quand x est de plus en plus grand, en même temps f(x) aussi. objet  Ce symbole là il dit bien plus grand que. Donc connexion...objet	<u>Question</u> : utiliser < pour dire x de plus en plus grand ? À partir du fait que < veut dire plus grand (activité)  <b>Pas répondu</b>	Entre de plus en plus grand et plus grand on a l'impression que c'est connecté
<b>(42)</b>	<b>Intermède : autre exo sans lien</b> <i>E. est ce que la fonction qu'ond écrit là, comme ça, est ce que ça a un rapport</i>				

	<i>avec dans les voitures à louer, avec la société, B</i>				
	Non, dans les voitures à louer on n'était pas en train d'étudier les variations d'une fonction, on avait trois fonctions et on les comparait				
	<i>E Non mais quand je dis les 70 premiers km...</i>				

	Oui mais je vous rappelle que, dans cet exercice on n'a pas, de toutes façons dans cet exercice, c'était évident que quand vous louez une voiture, plus la distance parcourue est grande en général plus vous payez cher, donc là c'était évident sans avoir l'adjectif en tête qu'elles étaient croissantes, nous à l'époque on avait comparé les fonctions. Alors on avait utilisé aussi un tableur, on avait utilisé aussi un grapheur. Et on avait d'ailleurs résolu des inéquations, mais c'était pour comparer des fonctions entre elles. <b>(fin)</b>				
	Là c'est une seule fonction où il faut traduire que à mesure que x augmente, f(x) aussi		À mesure que x augmente f(x) aussi objet		
<b>(43)</b>	<b>Alors</b> si vous avez du mal avec l'algébrique peut être traduisez ça en		Essai retour numérique activité <b>Pas répondu</b>		

	version numérique. Qu'est ce qu'on peut mettre ici ? (il montre)				
	[...] <b>Qu'est ce qu'on peut mettre là ?</b>			<u>Reprise question</u> (activité) <b>mal</b> <b>répondu</b>	
	<i>E. N'importe quel point</i>				
	N'importe quel point, enfin n'importe quel x avant celui de A. <b>Alors</b> par exemple 0				
	<i>E. 0 0</i>				
	<i>E. et après on peut mettre</i>				
	Vous m'avez dit n'importe lequel				
	<i>E non celui d'avant n'importe lequel</i>				
<b>(44)</b>	Si c'est valable sur tout l'intervalle, d'accord si le fait que la fonction est croissante c'est sur tout l'intervalle, ça correspond à combien de valeurs de x	Croissant sur un intervalle. <u>Question</u> : combien de valeurs (objet) ? <b>répondu</b>			
	<i>E à une infinité</i>				
	A une infinité. <b>Donc</b>				
	<i>E. ben non</i>				
	Là il y a plein de valeurs de x				Plein de valeurs
	<i>E ...ça s'arrête à 187,5</i>				
	Oui, ça en fait quand même plein.				
	<i>E. Oui mais ça fait pas l'infini</i>				
	Ah le nombre de x est infini quand même. Dans l'intervalle 0, 187,5 il y a une infinité de nombres, de x, qui vont	Infinité de nombres dans un intervalle (borné) objet			

	en .. du plus petit au plus grand il y a 1 il y a 2, etc... S.	Peut-être occasion de proximité un peu manquée ?			
	<i>E. 0 est plus petit que x et x plus petit que 187,5</i>				
	/Il écrit / Alors ça c'est vrai, sauf que est ce que quand j'écris ça je vois que x augmente ?		<u>Je vois que x augmente ?</u> activité non répondu		
(45)	Qu'est ce que ça veut dire x augmente ? Ça veut dire quand je prends des valeurs de x de plus en plus grandes, <u>des</u> valeurs de x <u>de</u> plus en plus grandes. Là il y a combien de valeurs de x au tableau ?		Ça veut dire quand on prend des valeurs de plus en plus grandes (objet) non répondu		
	<i>E.</i>				
	Ben là on a écrit un x – si je dis je prends des valeurs de x de plus en plus grandes, il faut que j'en prenne au moins (montre deux doigts)	pas de proximité le prof "crache le morceau" – peut-être on pouvait en dire un peu plus ?			
	<i>E. deux,</i>				
	deux, sachant qu'il y en a une qui sera plus petite que l'autre. <b>Alors deux</b> valeurs de x avec une qui est plus petite que l'autre comment ça va s'écrire ?		<u>Question</u> : traduire comparaison deux valeurs (activité) répondu		
	Déjà deux valeurs de x, comment on les écrit : si j'ai deux valeurs de x		<u>Reprise question</u>		

	différentes, si j'écris ça $x$ $x$ est-ce que c'est deux valeurs de $x$ différentes ?				
	<i>E. Non</i>				
	Ben non c'est la même lettre. Alors comment on fait pour distinguer. Oui ?				
	<i>E x indice 1 et x indice 2</i>				
	/Dites le plus fort/				
	<i>E x indice 1 et x indice 2</i>				
(46)	<b>Voilà</b> (il écrit 1 et 2 en indices). Là on voit que c'est deux valeurs de $x$ différentes. Et il y en a une, alors qui sera plus petite que l'autre. Est ce que ça peut trouver ça, Hela, des valeurs de $x$ comme ça entre 0 et 187,5		<u>Reprise traduction inégalité avec des mots</u> (activité)	<u>Question provoque la réflexion vers le pour tous <math>x</math> ? (objet)</u> répondu	
	<i>E. Ben oui</i>				
	<b>On peut en trouver combien ?</b>				
	<i>E. Une infinité</i>				
	Une infinité <b>d'accord ?</b> <b>donc</b> ça ça peut décrire deux nombres entre 0 et 187,5 (il montre l'axe des $x$ de la courbe). <b>Alors</b> ça c'est pour $x$ Donc si on prend deux valeurs de $x$ , qu'on a appelées $x_1$ et $x_2$ , avec $x_1$ plus petit que $x_2$ et qu'on veut traduire que la fonction est croissante				
	<i>A. si x indice1 est inférieur à x indice 2 alors y indice 1</i>				
	(le prof écrit) y indice 1 ou encore plus				

	<i>E. f de x indice 1 est inférieur à f de x indice 2</i>				
	Est ce que ça vous pensez que ça peut traduire ce qu'on disait ? Que plus x augmente, plus f(x) aussi		Question de la validité de la traduction (objet répondu)		
	<i>Non</i>				
(47)	Alors ça ça dit quoi ? Ça veut dire que, alors x1 et x2 qu'est ce qu'on a dit c'était (il écrit x1 x2)	les x sont mis en relation dans l'intervalle de x dans la situation...(objet)			
	<i>E. Des valeurs</i>				
	x1 x2 Deux réels ils sont où ces deux réels				
	<i>E dans l'intervalle</i>				
	Dans l'intervalle				
	<i>E. 0 à 187,5</i>				
	0 , 187,5. (il montre en même temps l'écrit au tableau) <b>Donc</b> on prend deux réels de l'intervalle 0 , 187,5 et <b>on dit que si x1 est plus petit que x2 alors f(x1) est plus petit que f(x2). Est ce que ça ça peut bien traduire le fait que plus x augmente plus y augmente aussi (il s'est déplacé vers la courbe)</b>			Est-ce que ça peut bien traduire le fait que plus x augmente plus y augmente aussi ? objet répondu	
	<i>E. Oui</i>				
(48)	Là il faut prendre le temps de regarder. /Alors ceux qui n'en peuvent plus ben regardez là ce qu'il y avait avant hein				

	effectivement là c'est un peu compliqué mais.../				
	<i>E. Ben oui parce que c'est dans l'intervalle</i>				
	<b>Alors</b> c'est dans l'intervalle donc effectivement, <b>Donc</b> vous voyez tout de suite la notion qu'on ne peut pas parler de croissant ou décroissant comme ça dans l'absolu hein si on ne dit pas sur quel intervalle on est d'accord ça n'a pas de sens. <b>Donc si</b> on se place dans cet intervalle et qu'on choisit deux réels quelconques qui sont ordonnés de cette façon là (il montre ce qui est écrit au tableau) $x_1$ est plus petit que $x_2$ , dire que la fonction est croissante c'est dire qu'alors $f(x_1)$ sera plus petit aussi que $f(x_2)$ . <b>Autrement dit</b> l'ordre qui est là, c'est le même que celui qui est ici (il montre le tableau). Quand $x$ augmente, $y$ augmente (geste). <b>Alors</b> bien sûr ça après on peut le regarder sur la courbe. On peut le visualiser	de la formulation algébrique à l'observation déjà faite dans la situation « surface » dans tout ce qui précède, tableau, courbe... (objet)  on peut le regarder sur la courbe, on peut le visualiser (objet)	Traduction : l'ordre est le même (objet)	Nécessité de l'intervalle (objet)	on ne peut pas parler de croissant ou décroissant comme ça dans l'absolu
	<i>EA vous avez inventé.</i>				

	On n'a pas inventé du tout. On a essayé ce qui est extrêmement compliqué et C'est Hela. qui a un peu mis le doigt				On n'a pas inventé du tout. On a essayé ce qui est extrêmement
--	---	--	--	--	--

	dessus tout à l'heure, on a essayé de traduire l'adjectif (il le montre)				compliqué et C'est Hela. qui a un peu mis le doigt dessus tout à l'heure, on a essayé de traduire l'adjectif
(49)	pas simplement avec des considérations qui sont un peu visuelles ça monte ça descend on a essayé de traduire sous une forme qui soit générale. Parce que si vous mettez ici un intervalle I (il montre l'intervalle particulier) quelconque, est ce que ça vous imaginez que ça correspond bien à l'idée qu'on s'est fait d'une fonction croissante ?			Question : Vrai pour I quelconque ? (à partir de l'intervalle particulier montré du doigt par E)(objet) (non répondu)	Considérations visuelles... forme générale
	<b>Alors</b> si vous avez besoin d'une petite illustration graphique je vais vous le montrer/ et après vous réfléchissez ceux qui ont compris, qui sont encore en état,/ de ce qu'on va mettre pour décroissant.	illustration graphique sur la courbe au tableau (objet)			
	(Il est devant la courbe et a une règle pour montrer) je prends un $x_1$ ici, je prends un $x_2$ qui est plus grand, là. Pour $x_1$ on va trouver $f(x_1)$ , voyez $f(x_1)$ là et pour $x_2$ ... il le fait avec la règle... <b>Alors qui est le plus grand <math>f(x_1)</math> ou <math>f(x_2)</math> ?</b>				Question (?)
	E.				

(50 )	<p>Est ce que ce que j'ai fait là, évidemment c'est des exemples, est ce que c'est valable quels que soient les nombres <math>x_1</math> <math>x_2</math> que je prends dans l'intervalle à condition que <math>x_1</math> soit plus petit que <math>x_2</math> ?</p> <p>Est ce que si je prends n'importe quel <math>x_1</math> plus petit que n'importe quel <math>x_2</math> dans cet intervalle, j'aurais à chaque fois <math>f(x_1)</math> plus petit que <math>f(x_2)</math></p>	<p>Peut-être occasion manquée ?</p>	<p>"à condition que" par rapport à "je prends un <math>x \dots</math>" etc (objet)</p>		<p>Question (répondu)</p>
	<p><i>E. oui, ben oui, ben oui</i></p>				
	<p><b>Donc</b> ça pourrait être une bonne façon de traduire que la courbe monte par exemple et c'est généralisable à n'importe quelle fonction.</p> <p><b>Autrement dit</b> une fonction est croissante sur un intervalle si quels que soient les réels <math>x_1</math> <math>x_2</math> qu'on prend dans l'intervalle, à partir du moment où <math>x_1</math> est plus petit que <math>x_2</math>, <math>f(x_1)</math> est plus petit que <math>f(x_2)</math></p>	<p>institutionnalisati on générale, non complètement formalisée encore (au sens pas seulement avec le formalisme si <math>a &lt; b</math> alors <math>f(a) &lt; f(b)</math> mais « enrichi » avec des mots (idée de choix qq « on prend »</p>			



## **TITRE :**

D'un problème d'optimisation d'une surface agricole au cours sur le sens de variation en seconde : une étude de cas

## **AUTEURS:**

Aline Robert, Janine Rogalski, avec la participation de Fabrice Vandebrouck

## **RÉSUMÉ :**

Ce texte fait suite au cahier de formation n°16, qui présente un scénario de formation de formateurs portant sur les activités d'introduction et les moments d'exposition des connaissances (cours) s'appuyant sur l'exemple du thème « sens de variation des fonctions » en seconde. Ce scénario comporte en particulier 5 vidéos accessibles sur le site de l'IREM, dont trois capsules (courtes vidéos destinées aux participants à la formation), élaborées par les auteures, une vidéo de cours filmée en classe (qui est analysée dans le scénario) et, en annexe, une vidéo plus générale sur les formations.

Nous reprenons dans la première partie de ce texte l'argumentaire sur les proximités et leur usage, notamment lors de l'étude de moments de cours. Nous précisons notre méthodologie de repérage des proximités, en particulier dans une transcription de tels moments.

Dans la deuxième partie nous présentons l'étude d'une vidéo filmée dans une classe de seconde, correspondant au moment où l'enseignant reprend une activité d'introduction (une optimisation de surface agricole), menée en demi-groupes le matin même puis commence le cours associé sur les variations des fonctions. Nous avons travaillé sur la transcription que nous avons réalisée et qui est jointe (presqu'entièrement) en annexe 3. Après avoir rapidement redonné des éléments de relief sur l'enseignement de la notion de variation des fonctions, nous indiquons le synopsis de la séance que nous avons établi et donnons des tableaux récapitulatifs des proximités trouvées. Nous interprétons (et questionnons) ces données.

En conclusion nous revenons sur ce type d'analyses et élargissons le propos à des questions plus générales.

## **MOTS- CLÉS :**

fonctions, sens de variation, proximités, cours, ZPD, activité, activités de l'enseignant

**Éditeur: IREM de Paris**

Responsable de la publication: C. Hache

IREM de Paris – Case 7018

Université de Paris

75205 Paris cedex 13

irem\_de\_paris@u-paris.fr

<https://irem.u-paris.fr/>

Dépôt légal : 2020

ISBN : 978-2-86612-395-6