HAL
open science

La “ théorie des banquets ”: une ingénierie didactique pour faciliter l’entrée dans la pensée structuraliste

Thomas Hausberger

▶ **To cite this version:**

Thomas Hausberger. La “ théorie des banquets ”: une ingénierie didactique pour faciliter l’entrée dans la pensée structuraliste. Recherches en Didactique des Mathematiques, 2021, 41 (3), pp.301-346. hal-02867778

HAL Id: hal-02867778

https://hal.science/hal-02867778

Submitted on 26 Dec 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LA «THÉORIE DES BANQUETS» : UNE INGÉNIERIE DIDACTIQUE POUR FACILITER L'ENTRÉE DANS LA PENSÉE STRUCTURALISTE

Thomas Hausberger*

THE "THEORY OF BANQUETS": A DIDACTIC ENGINEERING TO FACILITATE THE ACCESS TO STRUCTURALIST THINKING

Abstract – This article is part of a didactic approach to abstract algebra and more particularly to the didactics of algebraic structuralism. It reports on original work that has been carried out according to the methodology of didactic engineering and aims to answer the following research questions: Is it possible to construct a set of situations to facilitate the access to structuralist thinking? How to analyse and promote the conceptualisation of an abstract algebraic structure? The theory of banquets (an invented structure) was elaborated and analysed using the Theory of Didactic Situations and an epistemological and semio-cognitive framework dedicated to structuralism: the "objects-structures dialectic". The results of a classroom experiment are presented and discussed.

Key words: tertiary education, abstract algebra, didactics of structuralism, didactic engineering, meta-concept of structure, objects-structures dialectic

LA "TEORÍA DEL BANQUETE": UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA PARA FACILITAR LA ENTRADA EN EL PENSAMIENTO ESTRUCTURALISTA

Resumen – Este artículo es parte de un enfoque didáctico del álgebra abstracta y más particularmente de la didáctica del estructuralismo algebraico. Se trata de un trabajo original que se ha llevado a cabo según la metodología de la ingeniería didáctica y que pretende responder a las siguientes preguntas de investigación: ¿Es posible construir un conjunto de situaciones para entrar en el pensamiento estructuralista? ¿Cómo analizar el trabajo de conceptualización de una estructura algebraica abstracta y promoverla? La teoría de los banquetes (una estructura inventada) fue elaborada y analizada utilizando la Teoría de las Situaciones Didácticas y un

---

* Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, Univ. Montpellier & CNRS, thomas.hausberger@umontpellier.fr

marco epistemológico y semicognitivo dedicado al estructuralismo: los "objetos-estructuras dialécticas". Se presentan y discuten los resultados de un experimento en el aula.

Palabras-claves: enseñanza superior, álgebra abstracta, didáctica del estructuralismo, ingeniería didáctica, metaconcepto de estructura, objetos-estructuras dialécticas

RÉSUMÉ

Cet article s'inscrit dans la perspective d'une didactique de l'algèbre abstraite et plus particulièrement d'une didactique du structuralisme algébrique. Il rend compte d'un travail original qui a été mené selon la méthodologie de l'ingénierie didactique et vise à répondre aux questions de recherche suivantes : Est-il possible de construire un ensemble de situations pour faciliter l'entrée dans la pensée structuraliste ? Comment analyser le travail de conceptualisation d'une structure algébrique abstraite et le favoriser ? La théorie des banquets (une structure inventée) a été élaborée et analysée à l'aide de la Théorie des Situations Didactiques et d'un cadre épistémologique et sémio-cognitif dédié au structuralisme : la « dialectique objets-structures ». Les résultats d'une expérimentation en classe sont présentés et discutés.

Mots-Clés : enseignement supérieur, algèbre abstraite, didactique du structuralisme, ingénierie didactique, méta-concept de structure, dialectique objets-structures

INTRODUCTION

Le travail présenté dans cet article trouve sa source dans l'expérience de son auteur en tant qu'enseignant d'algèbre en troisième année de Licence à l'université. Pendant 8 années consécutives, nous avons pu constater d'importantes difficultés rencontrées par les étudiants dans l'apprentissage des structures algébriques, en phase avec la situation au niveau international telle que la renvoie la littérature en éducation mathématique :

> The teaching of abstract algebra is a disaster, and this remains true almost independently of the quality of the lectures (Leron & Dubinsky, 1995, p. 227).

Cette citation, bien qu'un peu caricaturale, laisse entrevoir la présence d'un obstacle de nature épistémologique qui résiste à l'action didactique. Nous avons appelé cet obstacle « le défi de la

pensée structuraliste » (Hausberger, 2012). Si les recherches en didactique de l'enseignement supérieur portant sur l'algèbre linéaire (Dorier, 2000, p. 36) ou la théorie des groupes (Lajoie & Mura, 2004) ont permis d'identifier des spécificités des apprentissages algébriques à l'université, notamment autour de la notion de concepts formalisateurs, unificateurs et généralisateurs, voire simplificateurs (FUG(S) ; Robert 1987), il est question ici d'une autre rupture. En effet, lors de l'entrée dans la pensée structuraliste à la transition entre licence et master de mathématiques, le caractère unificateur prend une dimension supérieure (au sens des niveaux d'unification introduits dans (Hausberger, 2012)). L'enjeu n'est plus celui d'une théorie qui s'applique à des objets de natures différentes (niveau 1), mais celui d'un traitement unifié, systématique, des structures présentées axiomatiquement (niveau 2) : on se pose à leur propos le même type de questions que l'on cherche à résoudre avec le même type d'outils, mettant en avant les ponts entre ces structures (par exemple, les théorèmes d'isomorphisme soulignent l'analogie formelle entre la théorie des groupes et celle des anneaux). Une compréhension fine de l'épistémologie du structuralisme algébrique apparaît ainsi comme un prérequis nécessaire à l'action didactique.

La période 2011-14 fut l'occasion, dans nos enseignements, de plusieurs expérimentations d'ingénieries didactiques élaborées en relation avec nos travaux de recherches, lesquels ont conduit à la soutenance d'une habilitation à diriger des recherches (Hausberger, 2016). L'objet de cet article est la publication de l'ingénierie des « banquets » (une structure inventée plus simple[1] que la structure de groupe) qui constitue la partie originale de notre note de synthèse. Ainsi que le stipule l'introduction du texte distribué aux étudiants (annexe 2), « le but est de comprendre, sur un exemple simple, le fonctionnement d'une théorie structurale mathématique : d'où provient une telle théorie ? Comment est-elle formulée ? Quels types de questions se pose-t-on dans une théorie structurale et quels types de méthodes utilise-t-on pour y répondre ».

Nous avons donc choisi de mobiliser la Théorie des Situations Didactiques (TSD ; Brousseau, 1997) afin de penser l'apprentissage de la pensée structuraliste en termes de *situations* (en relation avec des démarches structuralistes), et ceci malgré le problème de la construction de situations fondamentales dans le cas des concepts

1 du point de vue de la « technicité » mathématique : décomposition en « sous-structure » et classification à isomorphisme près

FUGS (Rogalski, 1995) qui fait débat dans la communauté de recherches en didactique des mathématiques (Bosch et al., 2018). Les questions de recherche suivantes ont été ainsi mises à l'étude, dans le cadre de la TSD : Est-il possible de construire une situation fondamentale ou un ensemble de situations pour l'entrée dans la pensée structuraliste ? Si oui, comment organiser le milieu et avec quel contrat didactique spécifique ?

Les premières idées qui ont présidé au travail d'ingénierie furent basées sur l'hypothèse d'un « déficit sémantique » des structures algébriques définies par des systèmes axiomatiques abstraits : sur quels types de représentations l'étudiant peut-il s'appuyer lorsque le principe est justement de faire abstraction de la nature particulière des objets ? Ceci nous a conduit à emprunter certaines idées à la « phénoménologie didactique » des structures mathématiques développée par Freudenthal (1983), d'où le nom de « banquets », et à faire jouer un rôle important à une dialectique entre concret et abstrait ou encore entre forme et contenu, identifiée par les philosophes Cavailles (1994) et Lautman (2006) et que nous avons appelée *dialectique objets-structures*. Une pré-expérimentation en classe de la théorie des banquets a permis de confirmer son potentiel en terme d'enrichissement sémantique tout en mettant en évidence d'une part la difficulté des étudiants à articuler syntaxe et sémantique, d'autre part le rôle important joué par les représentations sémiotiques. Dans un va-et-vient entre recherche et action, nous avons affiné notre cadre épistémologique et didactique en développant notamment des outils sémiotiques, ce qui a donné lieu à la publication de la dialectique objets-structures (Hausberger, 2017b) en tant que cadre épistémologique et sémio-cognitif répondant aux questions de recherches suivantes : Comment les aspects épistémologiques, sémiotiques et cognitifs s'articulent-ils dans le déploiement de la pensée structuraliste ? Comment analyser le travail de conceptualisation d'une structure algébrique abstraite et le favoriser ?

En d'autres termes, notre recherche a suivi les étapes de la méthodologie de l'ingénierie didactique (Artigue 1990), qui organise le travail en différentes phases : 1. Analyse préliminaire du savoir à enseigner 2. Élaboration de la situation et analyse a priori 3. Implémentation 4. Analyse a posteriori et validation. En tenant compte des aspects dialectiques (nécessaires va-et-vient entre recherche et action), la phase 1 a été achevée avec la publication de la dialectique objets-structures. Le but de cet article est de rendre

compte des autres phases autour d'un corpus recueilli lors de la dernière expérimentation en classe de la théorie des banquets. Les sessions en laboratoire présentées dans la note de synthèse ne seront qu'évoquées en fin de l'article, dont la structure reprend essentiellement les étapes de la recherche.

ÉTUDES PRÉLIMINAIRES

Selon la méthodologie de l'ingénierie didactique, ces études préliminaires combinent des analyses de nature épistémologique, cognitive et didactique. Le point de départ est une étude d'épistémologie historique (Lecourt, 2002) du structuralisme mathématique, lequel se caractérise par une méthodologie particulière et le « méta-concept » (voir infra) de *structure*, dont nous éclairerons la transposition didactique. Ces premières analyses permettent d'introduire le cadre de la dialectique objets-structures que nous avons élaboré et dont nous résumerons les principaux éléments. Enfin, nous présenterons une analyse de conceptions relatives au méta-concept de structure, menée sur la population d'étudiants qui sera soumise à l'ingénierie des banquets.

Epistémologie historique du structuralisme mathématique et transposition didactique du (méta-)concept de structure

Patras (2001) caractérise la pensée mathématique contemporaine par la prédominance, dans la pratique mathématique, de la méthode « structurelle-transcendantale », c'est-à-dire du *structuralisme* en tant qu'*épistémologie particulière* des mathématiques :

> L'esprit de la méthode est d'abstraire des objets étudiés leur substance formelle, à la manière dont le procédé d'abstraction transcendantale dégage les concepts de leur enracinement empirique […] : à partir de situations diverses et parfois sans liens apparents, dégager des concepts, des structures universelles, qui puissent permettre de traiter simultanément de questions relevant de domaines a priori distincts. [...] Cette généralité n'est pas vaine, dès lors que le mathématicien y gagne en lucidité et en compréhension (Patras, 2001, p. 57).

Cette épistémologie, que Patras tout comme certains historiens (Corry, 1996) fait remonter à Gauss, s'est développée à travers les travaux des mathématiciens allemands des XIXe et XXe siècles, notamment Riemann, Hasse, Dedekind, Hilbert et Noether. En particulier, la généralisation de la méthode axiomatique a joué un

rôle important : le système axiomatique proposé par Hilbert pour la géométrie a ouvert le pas à des axiomatiques « formelles » où le processus d'abstraction concerne à la fois la nature des objets et la sémantique des relations. Le résultat est un système d'axiomes dans lequel objets et relations sont désignés par des symboles, et qui exprime les propriétés formelles des relations, généralement dans le langage de la logique formelle.

Carnap (1928) est l'un des premiers à saisir, dans une approche logicienne qui prolonge les travaux de Russell et Whitehead, ces différents niveaux d'abstraction qui conduisent au concept de structure :

> Une *description de propriété* indique les propriétés que possèdent les objets individuels d'un domaine donné, tandis qu'une *description de relation* indique les relations qui ont lieu entre ces objets, sans affirmer quoi que ce soit sur ces objets en tant qu'individus. [...]. Dans une *description de structure*, seule la structure de la relation est indiquée, c'est-à-dire, la totalité de ses propriétés formelles. Par propriété formelle d'une relation, j'entends une propriété qui peut être formulée sans référence à la signification de la relation et aux types d'objets qu'elle concerne (Carnap 1928, II. chap. A, ainsi que cité dans Patras 2008).

Carnap était déjà sensible à la difficulté conceptuelle sous-jacente à cette idée de « structure des relations », aussi a-t-il recours à une représentation symbolique particulière qui trouve son fondement dans l'idée de relier des éléments et qu'il appelle « diagramme de flèches » (en langage contemporain, un graphe) :

> Si deux relations ont le même diagramme de flèches, on les dit structurellement équivalentes, ou isomorphes. Le diagramme de flèches est la représentation symbolique de la structure. (loc. cit.)

Dans son Manifeste « L'architecture des mathématiques », Bourbaki (1998) fait la promotion de la méthode axiomatique, dans son usage structuraliste. L'idée de structure y apparaît tout d'abord comme un concept régulateur de la pensée, sous forme métaphorique ou programmatique, pour désigner une architecture cachée derrière des objets ou des théories mathématiques. Ensuite, elle est formalisée de façon précise et rigoureuse en termes de structures particulières comme les groupes, les espaces vectoriels ou espaces topologiques. Bourbaki insiste sur la *dimension méthodologique* de la pensée structuraliste et parle des structures en tant que « système Taylor » des mathématiques. Bien qu'une définition mathématique de structure soit donnée dans le traité « Les

Éléments de mathématique » (publié par Bourbaki à partir de 1939), cette définition sert essentiellement de cadre général et n'est pas mathématiquement « fonctionnelle » (Corry, 1996, p. 324), à la différence de la théorie des catégories introduite par Mac Lane et Eilenberg (Mac Lane, 1996). Cette dernière constitue une véritable métathéorie mathématique des structures, mais il s'agit d'un point de vue très surplombant qui n'est traditionnellement pas enseigné avant la fin du master. En définitive, le concept de structure rencontré par les étudiants lorsqu'ils apprennent la théorie des structures algébriques tient essentiellement lieu, en l'absence de statut mathématique avéré, de notion *paramathématique* (Chevallard, 1985), au même titre que le concept de polynôme, d'équation ou de démonstration dans l'enseignement secondaire. Il s'agit d'un outil pour l'activité mathématique, mais notre commentaire du Manifeste de Bourbaki montre que sa fonction ne se limite pas aux besoins d'identification, de formulation et de communication mis en avant par Chevallard. De plus, ce concept n'est pas introduit par une simple monstration de l'enseignant, mais par un *discours méta*[2] (Robert et Robinet, 1993 ; Dorier et al., 2000) élaboré[3]. De ce fait, nous préférons parler de *méta-concept.* Il en résulte d'emblée le problème didactique suivant :

> As a consequence, students are supposed to learn by themselves and by the examples what is meant by a structure whereas sentences like "a homomorphism is a structure-preserving function" is supposed to help them make sense of a homomorphism (Hausberger, 2018, p. 421).

Si les définitions par axiomes réalisent une séparation plus nette entre le logique et l'intuitif, le style d'exposition structuraliste laisse en général peu de place aux intuitions qui ont vu naître les formalisations mathématiques. Il en résulte une distance entre les mathématiques vécues par le mathématicien dans l'acte de création et celles que renvoient les textes du savoir, distance qui devient problématique lorsqu'il s'agit de comprendre les raisons d'être de

---

2 A la suite de Robert et Robinet (1993), nous appelons *discours méta* des éléments d'information ou de connaissances SUR les mathématiques, sur leur fonctionnement, sur leur utilisation. La majuscule insiste sur la présence d'un double niveau, tout comme l'épistémologie des sciences est un discours (une critique) sur la science qui procède d'un recul réflexif.

3 Voir la préface du manuel (Guin, 1997) pour un exemple d'introduction du terme de « structures » dans un discours méta

ces formalisations et d'aborder la question du sens. C'est cette distance que pointe Patras en la dénonçant dans la tradition phénoménologique héritée de Husserl :

> car la science est condamnée à être stérile si elle cesse de prendre appui sur une intuition pleine et vivante de ses contenus. C'est la conscience de cette stérilité qui gouverne les réactions de rejet de l'enseignement mathématique comme un bloc d'abstractions gratuites et dépourvues de significations tangibles (Patras, 2001, pp. 27-28).

Patras fait allusion à la réforme des « maths modernes », dont les historiens de l'éducation (Enfert et Gispert, 2011) relatent les difficultés de mise en œuvre liées à la formation des enseignants et aux ambitions en termes de formalisme et d'abstraction. C'est dans ce contexte qu'est née la didactique des mathématiques en tant que nouveau champ de recherches. Le défi de la pensée structuraliste se situe en quelques sorte à l'origine du projet didactique et la réalisation de ce projet aux niveaux avancés de l'enseignement supérieur conduit directement à notre question d'élaboration de situations (fondamentales) pour l'accès à la pensée structuraliste.

La dialectique objets-structures

Ce cadre incorpore différents contributions qui viennent approfondir les premiers éléments issus de l'épistémologie historique : des apports de philosophie du structuralisme empruntés à Cavailles (1994) et Lautman (2006), des idées issues de la phénoménologie didactique de Freudenthal (1983), un point de vue logique sur les structures tiré de la théorie des modèles, enfin des éléments de la théorie sémiotique de Duval (1995). Nous allons présenter ces différents aspects de façon synthétique et renvoyons le lecteur à (Hausberger, 2017b) pour des compléments.

Idéalisation et thématisation

Selon Cavaillès, deux mouvements d'abstraction sont à l'œuvre dans la pensée structuraliste, l'*idéalisation* et la *thématisation*, lesquels s'exercent transversalement l'un de l'autre (l'un est perçu comme vertical, l'autre horizontal). Ils se succèdent de façon dynamique pour exprimer une dialectique entre forme et contenu que Cavaillès appelle « dialectique des concepts » et qui sera ensuite reprise et systématisée par Lautman (2006). A leur suite, Benis-Sinaceur (2014) décrit l'idéalisation en ces termes :

> Leaving aside or discarding all other aspects, especially specific

> substantial or space-time aspects. [...] it comes down to extracting a form from sundry situations [...] idealization follows from seeing or guessing some invariant basic properties attached to a plurality of apparently heterogeneous situations and it leads to a unifying view of the different domains on which we perform the same type of operations (Benis-Sinaceur, 2014, pp. 94-95).

Elle nous rappelle également le sens de la thématisation :

> Cavaillès appelle ensuite « thématisation » le fait que « les gestes accomplis sur un modèle ou un champ d'individus peuvent, à leur tour, être considérés comme des individus sur lesquels le mathématicien travaille en les considérant comme un nouveau champ » (Benis-Sinaceur, 1987, p. 24).

En d'autres termes, l'idéalisation consiste à extraire une forme, laquelle est ensuite thématisée en une théorie d'objets de niveau supérieur[4]. L'idéalisation et la thématisation constituent ainsi les deux grands mouvements d'abstraction qui fondent, d'un point de vue épistémologique et cognitif, la dialectique objets-structures.

Phénoménologie didactique

Pour Freudenthal (1983), l'*analyse phénoménologique* d'un concept (ou structure) mathématique consiste à repérer le phénomène dont ce concept est le *principe d'organisation* et à décrire les relations entre structure et phénomène. De telles considérations ont nourri le courant contemporain de la Realistic Mathematics Education (RME). Dans le but de clarifier les rapports du cadre que nous proposons avec celui de RME, on pourra noter que l'idéalisation s'apparente à la *mathématisation horizontale* de RME (une modélisation du réel), et la thématisation à la *mathématisation verticale* (une réorganisation à l'intérieur des mathématiques). Cependant, l'idéalisation ne se réduit pas à une mathématisation du monde réel et la thématisation est une mathématisation verticale particulière, propre au projet structuraliste.

Par ailleurs, il s'agit dans le cas de l'algèbre abstraite, à la différence de l'algèbre élémentaire, de distinguer *deux niveaux* de principes organisateurs (PO) de phénomènes : d'une part, le niveau de la structure (de groupe, d'anneau, etc.) qui apparaît en tant que principe organisateur PO1 de phénomènes impliquant des objets de niveau inférieur ; d'autre part, le niveau PO2 du méta-concept de

4 Le lecteur pourra consulter les figures 1 et 2 de (Hausberger, 2017b) pour une schématisation de ces différents niveaux et dynamiques.

structure lui-même, lequel est appelé à jouer un rôle architectural dans l'élaboration des théories mathématiques, en relation avec la méthodologie structuraliste. Alors que PO1 se manifeste à travers les caractéristiques FUGS des différentes structures, l'enjeu de PO2 se situe au niveau du processus de thématisation et convoque différents aspects de la pensée structuralistes (sous-structures, isomorphismes et classes, existence de décompositions en sous-structures, etc.). Ces éléments viennent clarifier la fonction paramathématique du méta-concept de structure.

Apports de théorie des modèles

La théorie des modèles offre un point de vue fertile pour appréhender les relations entre objets et structures, à travers la distinction entre syntaxe et sémantique et l'articulation entre ces deux aspects complémentaires. Tout d'abord, une définition par axiomes est, d'un point de vue logique, une *phrase ouverte*. Les *modèles*, c'est-à-dire les instances qui satisfont ces énoncés, constituent le contenu *sémantique* de la structure, par rapport au système d'axiomes qui la définit syntaxiquement. De ce point de vue, la dialectique objets-structures s'apparente à une dialectique entre syntaxe et sémantique, où un travail déductif sur les axiomes vise à exercer un contrôle syntaxique sur les objets et leurs propriétés tandis que les énoncés généraux qui proviennent du développement théorique syntaxique sont mis à l'épreuve des modèles connus (contrôle sémantique). Ceci nous amène également à distinguer un point de vue syntaxique sur l'idéalisation, qui consiste à isoler les propriétés formelles des relations (la « logique » des relations), et un point de vue sémantique qui met l'emphase sur les *classes d'isomorphisme de modèles*, lesquelles constituent un intermédiaire entre le domaine sémantique concret des objets et celui syntaxique abstrait de la structure. Le prix à payer est la transition des éléments aux classes. Nous faisons l'hypothèse que la conceptualisation de ces classes engage un processus de réification (au sens de Sfard, 1991) et appelons de ce fait *objets structuraux* les classes d'équivalences réifiées. De ce point de vue, la tâche de classification des modèles (à isomorphisme près) apparaît fondamentale pour la conceptualisation d'une structure abstraite.

Apports de la théorie de Duval

La théorie de Duval (1995) fournit les outils sémiotiques nécessaires pour appréhender ce processus de conceptualisation dans ses

dimensions cognitives. Pour Duval comme pour Freudenthal, des *images mentales* portent l'intuition sous-jacente à une structure mathématique. Il s'agit d'une représentation interne qui sert à l'objectivisation de la structure, alors que les observables sont les représentations externes produites par les apprenants (*sémiosis*), en particulier lors de la conceptualisation de ce que nous avons appelé objets structuraux (*noésis*). Lors de l'observation du travail des étudiants, nous serons particulièrement attentifs à ce type de représentations, ainsi qu'aux manipulations sémiotiques (traitements et conversions) qui sont nécessaires pour la détermination d'une relation d'isomorphie entre modèles. A la suite de Duval, nous faisons l'hypothèse que la coordination de différentes représentations exprimées dans différents registres est cruciale dans le processus de construction d'un schéma conceptuel de l'objet structural. Ce travail sur les représentations doit ouvrir la possibilité d'extraire des modèles (*templates*) un motif (*pattern*) (Resnik, 1997). Dans le cadre du registre graphique, la reconnaissance d'un isomorphisme peut alors s'apparenter à un processus visuel de reconnaissance d'une congruence de formes, en relation avec l'étymologie même du terme isomorphisme.

Recueil de conceptions relatives au méta-concept de structure

Elaboration du questionnaire et méthodologie d'analyse

La notion de structure étant un méta-concept, il ne s'agit donc pas de recueillir le *concept image* relatif à un *concept definition* au sens de Tall et Vinner (1981). Ce méta-concept joue par contre le rôle de principe structurant que les trois questions suivantes, proposées aux étudiants, visent à mettre en évidence :

1) Avec vos propres mots, expliquez ce que l'on entend par « structure mathématique ». Donner des exemples variés.
2) Pourquoi les mathématiciens élaborent-ils des théories de structure ?
3) Donnez des exemples de questions que se posent les mathématiciens à propos d'une structure, questions auxquelles la théorie de la structure va répondre.

On notera que la première question requiert une *explication* et non une définition. La désignation de concepts unificateurs ne devrait pas poser problème : il est attendu de nombreux exemples de structures que les étudiants ont rencontrées lors de leur scolarité. Il sera intéressant d'observer l'*extension* du méta-concept : ce dernier

quitte-t-il ou non le champ de l'algèbre dans le cadre d'une conception qui est recueillie pendant un module d'algèbre ? En référence au triplet définissant un concept au sens de Vergnaud (1990), on peut voir dans ces réponses l'*ensemble des situations* qui donnent sens au méta-concept.

Nous attendons que les étudiants mettent en avant à la question 2 la *dimension outil* (Douady, 1986) du méta-concept de structure (fonction paramathématique), en l'occurrence le rôle de principe organisateur dans les deux niveaux que nous avons identifiés dans la dialectique objets-structures. A la question 3, nous souhaitons tester si les étudiants sont capables de détecter des questions structuralistes qui organisent l'étude d'une structure. Ces éléments constituent en quelque sorte la *dimension objet* (ibid.) du méta-concept. Nous attendons la mise en avant d'une combinatoire de structures (sous-structure, opérations de décomposition en sous-structures simples ou irréductibles, construction de nouvelles structures à partir d'opérations ensemblistes ou autres, etc.) ainsi que la mention des théorèmes d'isomorphismes et des théorèmes de structure. Ces éléments font office d'*invariants opératoires* (au sens de Vergnaud). Les étudiants repèrent en effet ces invariants en comparant les différentes théories structurales qu'ils ont rencontrées. On peut également conjecturer qu'ils s'appuient sur un objet mental : l'idée de structure en architecture (un immeuble par exemple, structuré en appartements, lesquels se divisent en chambres, etc.). Pour soutenir cette hypothèse, rappelons que « l'architecture des mathématiques » est le titre donné par Bourbaki à son manifeste.

Dans sa définition d'un concept, Vergnaud insiste finalement sur les *éléments langagiers*. Nous serons particulièrement attentif à ce point dans la réponse des étudiants à la question 1. Nous nous attendons à trouver les unités signifiantes suivantes : ensemble, loi, relation, axiomes, etc. Un ensemble muni de lois fait référence à une conception que nous appellerons *ensembliste*, comparativement à la conception d'une structure en tant que système axiomatique, que nous appellerons *axiomatique*, ou la conception d'une structure en tant que formalisation abstraite mettant en avant les relations entre objets (conception *relationnelle*). Bien entendu, ces différents points de vue peuvent cohabiter. Ces divers éléments nous permettent de construire le tableau figurant en annexe 1 et destiné à relever les réponses des étudiants. Il s'agira ensuite de repérer si les principes organisateurs PO1 et PO2 sont fonctionnels. Pour cela, la mention des propriétés FUGS (à la question 2 notamment) sera un indicateur

de l'acquisition de PO1 tandis que la présence de questions structuralistes témoignera de la fonctionnalité de PO2. Nous ne détaillerons pas davantage l'analyse a priori car il s'agit d'un recueil exploratoire qui n'a pas vocation à être systématique à ce stade de la recherche ainsi qu'au vu de l'usage qui en sera fait dans cet article.

Analyse des résultats

Nous allons discuter les réponses de 4 groupes d'étudiants, parmi les 7 groupes qui ont travaillé sur la théorie des banquets. La modalité par groupe a été choisie afin de promouvoir la réflexivité via le dialogue entre pairs. Le recueil a été effectué après un enseignement de théorie des groupes, avant que les étudiants n'abordent les banquets puis étudient la théorie des anneaux et des corps. Le travail des 4 groupes sera analysé dans différentes sections de cet article, aussi les groupes ont-ils été sélectionnés pour fournir un corpus à la fois représentatif et à même de produire du « contraste ». L'ensemble des données et des analyses est disponible dans (Hausberger, 2016) dont la numérotation des groupes est reprise.

Groupe 1 : Ce groupe se place dans le paradigme ensembliste : « une structure permet de déterminer un ensemble grâce à des lois ». Bien que les étudiants évoquent une « classe comme en informatique » et plus loin « restreindre le domaine d'application d'une structure », ce qui les conduit à la notion de sous-structure, la formulation des questions qu'ils énoncent (« quelles propriétés définissent une structure ? Sur quel ensemble une structure est-elle définie ? ») suggèrent une ambiguïté : les étudiants se placent-ils au niveau d'une description de propriétés ou de structure, selon la terminologie de Carnap ? L'absence de toute référence à un caractère FUGS confirme que les étudiants ne semblent pas distinguer ce double niveau objets-structures. Ceci suggère que le principe *PO1 n'est pas fonctionnel* et l'incompréhension du principe d'abstraction-idéalisation handicape également la thématisation, de sorte que *PO2 est non-fonctionnel* : l'unique question structuraliste mise en avant concerne la notion de sous-structure. *La conception de ce groupe suggère un écrasement des structures par les objets, donc probablement la prédominance des aspects sémantiques*.

Groupe 3 : La définition « ensemble d'éléments + ensemble de règles sur les éléments » dénote également une conception ensembliste, avec la même ambiguïté entre description de propriété et de structure. Les étudiants donnent des exemples variés de structures algébriques. *Le rôle généralisateur-simplificateur est bien*

pointé mais pas la fonction unificatrice, ce qui ne permet pas de conclure que PO1 soit pleinement fonctionnel. Les aspects de combinatoire des structures (« construire d'autres structures à partir d'une structure », « découper en sous-structures plus simples ») sont bien détectés, ainsi que la notion d'isomorphisme et de morphisme (« Y a-t-il équivalence entre structures ? Peut-on les comparer ? ») sans user du vocabulaire savant. Les étudiants font référence à des actions qui ont lieu dans le *monde phénoménal* (construire, découper, comparer), probablement *en appui sur des images mentales de type topologique reliées au point de vue ensembliste*. *Le principe PO2 est fonctionnel.*

Groupe 5 : Ce groupe mentionne, comme les précédent, « ensembles + lois » mais rajoute « Relations sur les éléments → structure ». Ceci suggère que le passage d'une description de propriétés à une description de structure est compris des étudiants. Des exemples de structures sont donnés en dehors de l'algèbre (espace normé) ainsi que des types de relations (ordre, équivalence) qui témoignent de l'assimilation du point de vue abstrait axiomatique sur les relations. Le point de vue relationnel se traduit également au niveau des ensembles : parmi les raisons d'être du structuralisme, les étudiants mentionnent « Pour comparer des ensembles », « Faire des analogies entre des ensembles ayant la même structure (ex : se rapporter aux groupes **Z**/n**Z** qu'on maîtrise plus ». *Ceci traduit l'assimilation de PO1*. La combinatoire des structures est mise en avant au niveau des questions : « Est-ce qu'elles sont conservées par certaines combinaisons ? Peut-on créer des ensembles structurés à partir d'éléments ou de sous-ensembles ? » ainsi que la notion de morphisme à travers l'idée d'un « transport » de structure (« Est-ce qu'elles se transportent ? ») qui est souvent véhiculée dans le discours méta des enseignants d'algèbre abstraite. *Le principe PO2 est donc également fonctionnel.*

Groupe 7 : Ce groupe adopte un point de vue ensembliste sans opérer la distinction de Carnap. Les étudiants mettent en avant le rôle simplificateur ainsi que la fonction organisatrice des structures (« Dans le but de comparer et de créer des « catégories » de structures, de lois »). Il est possible que l'existence de la théorie des catégories soit connue de l'un au moins des étudiants du groupe. Ceci témoigne de l'identification de PO2. Le groupe mentionne la quadrature du cercle et la résolution des équations algébriques, qui constituent deux grandes applications de la théorie des corps. Ceci s'explique par la présence d'un redoublant au sein du groupe. Les

aspects FUGS sont mal identifiés, excepté au niveau d'un exemple : le groupe met en relation le calcul d'une puissance d'une somme de deux matrices à l'aide de la formule du binôme de Newton avec le caractère d'anneau commutatif des matrices carrées. Cette formule est en effet applicable dans un anneau lorsque les deux éléments considérés commutent, mais l'anneau des matrices n'est pas commutatif (un déficit de contrôle sémantique). *Ceci montre que PO1 n'est pas fonctionnel*. Enfin, la combinatoire des structures ne transparaît pas et aucune question structuraliste n'est formulée. *Le principe PO2, s'il est identifié, est donc également non fonctionnel*.

Ces analyses sont limitées par les signifiants visibles et les capacités réflexives des étudiants, ce qui oblige à modérer nos propos. Pour autant, elles permettent de mettre en évidence des conceptions contrastées dont nous faisons l'hypothèse qu'elles vont se refléter au niveau des démarches menées par les groupes lors de l'expérimentation de l'ingénierie des banquets.

TRAVAIL D'INGÉNIERIE

Nous présentons dans cette section le travail d'ingénierie réalisé en amont de la dernière expérimentation en classe. Pour faciliter la lecture, nous débutons par un exposé des aspects mathématiques de la théorie des banquets puis discutons les variables didactiques, le contrat didactique et l'organisation du milieu. Une analyse a priori des principales tâches de la situation est donnée, en appui sur la dialectique objets-structures, et utilisée pour discuter le caractère fondamental (au sens de Brousseau) de la situation puis préciser des éléments clefs de l'orchestration.

Description de la situation

Aspects mathématiques

Un *banquet* est la donnée d'un ensemble E muni d'une *relation binaire* R tel que les axiomes suivants sont satisfaits : i) aucun élément ne vérifie $x\,R\,x$; ii) si $x\,R\,y$ et $x\,R\,z$ alors $y = z$; iii) si $y\,R\,x$ et $z\,R\,x$ alors $y = z$; iv) pour tout x il existe au moins un y tel que $x\,R\,y$. S'il est en général aisé de nommer la première propriété (anti-réflexivité), les suivantes ne s'interprètent pas en termes de propriétés qui définissent les relations binaires usuelles (ordre et équivalence).

De fait, en tant que théorie mathématique abstraite, la théorie des banquets est susceptible d'une multiplicité d'interprétations : la structure de banquets possède une *diversité de modèles* construits dans des *cadres mathématiques variés*, d'où également une grande *diversité de représentations sémiotiques*. On peut distinguer une *interprétation empirique* (le nom de banquet évoque des invités assis autour de tables, ce qui invite à poser $x\,R\,y$ si x est assis à la gauche, ou à la droite, de y) et des représentations sémiotiques qui prennent pour cadre la *théorie des ensembles* (la relation binaire est représentée par son graphe en tant que sous-ensemble de E^2) ou bien l'*algèbre matricielle* (la relation est regardée comme une fonction de E^2 dans $\{0,1\}$ et représentée par la matrice correspondante ; les axiomes disent que la diagonale ne contient que des 0, qu'il y a exactement un 1 dans chaque ligne et au moins un dans chaque colonne), la *théorie des graphes* ($x\,R\,y$ si et seulement si les sommets x et y sont reliés par une arête orientée de x vers y), la *théorie des fonctions* ($x\,R\,y \Leftrightarrow y = f(x)$ définit une fonction f d'après les axiomes (ii) et (iv) ; les autres axiomes signifient qu'elle est injective et sans point fixe), enfin la *théorie des groupes de permutations* (si l'ensemble E est fini alors f est bijective, autrement dit c'est une permutation sans point fixe et il est commode d'utiliser les représentations sémiotiques standards pour ces dernières, ce qui inclut l'écriture en produit de cycles à supports disjoints).

Ces remarques expliquent pourquoi la théorie des banquets est riche mathématiquement et ne se trouve dans aucun manuel : en effet, elle est équivalente, dans le cas des banquets finis, à la théorie des permutations (sans point fixe). En outre, il s'agit d'une théorie plus simple (au sens de la technicité mathématique) que la théorie des groupes. Mais surtout, la structure de banquet est porteuse d'une *intuition* sous-jacente liée à l'*image mentale* de convives assis autour de tables (un banquet de mariage).

La théorie des banquets, en tant que situation didactique pour la classe (annexe 2), comporte une pluralité de tâches[5] reflétant différentes démarches structuralistes : une tâche de *construction de modèles* en relation avec l'examen logique du système d'axiomes (il s'agit d'étudier si un axiome est conséquence logique des autres ou non, démarche qui implique la construction de contre-exemples

5 au sens de la TSD, une tâche est une « action acceptée a priori par l'actant comme étant déterminée, dans une situation convenue » (Brousseau, 2010)

permettant de cerner l'extension du concept de banquet) ; une tâche de *classification* de modèles (détermination des classes de banquets de petits ordres) ; une tâche de *définition axiomatique* des *tablées* (il s'agit de la démarche inverse : on part de l'empirie et on recherche une formalisation par un système d'axiomes d'une configuration de *n* personnes autour d'une table ronde) ; enfin, une tâche d'*élaboration théorique* : il s'agit de proposer une définition de *sous-banquet*, de *banquet irréductible*, de *banquet monogène*, puis d'énoncer et de prouver le *théorème de structure* des banquets (tout banquet fini se décompose en une union disjointe de tablées, analogue du théorème bien connu de décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints).

Variables didactiques de la situation

La théorie des banquets est une situation didactique conçue pour faciliter l'accès à la pensée structuraliste. L'apprentissage visé n'est donc pas la théorie des banquets (ce n'est pas une notion du programme) mais les modes de pensée à l'œuvre dans l'établissement de cette théorie. Comment produire le niveau de réflexivité visé, puisque c'est le méta-concept de structure et la méthodologie structuraliste qui sont objet de l'enseignement ? Ceci nous conduit à employer le *levier méta*, c'est-à-dire :

> the use, in teaching, of information or knowledge *about* mathematics. […]. This information can lead students to reflect, consciously or otherwise, both on their own learning activity in mathematics and the very nature of mathematics (Dorier et al., 2000, p. 151).

Un discours méta, dont la présence constitue une variable didactique primordiale de la situation, est introduit de façon explicite dans l'énoncé distribué aux étudiants (annexe 2). Il est attendu des étudiants, en écho à ce discours tenu par l'enseignant, un niveau de méta-cognition appelé « abstraction réfléchissante » (Piaget & Beth, 1961). Le choix du *type de structure* constitue alors une seconde variable didactique qu'il s'agit d'ajuster en tenant compte des connaissances algébriques des apprenants. Nous avons choisi de développer une théorie de structure qui soit en proche parenté avec la théorie des groupes, de sorte que, par exemple, les démarches à l'œuvre dans la classification des banquets de petits cardinaux puissent s'appuyer sur celles menées lors de la classification des groupes de petits ordres. Pour autant, nous avons veillé à dissimuler l'équivalence entre la théorie des banquets et les permutations sans

points fixes (celle-ci fait l'objet de la partie III qui vient conclure la situation ; sa découverte prématurée viendrait « court-circuiter » la plupart des tâches proposées) grâce au choix d'une relation binaire (une troisième variable). En effet, ce *type de relation* est très différente d'une loi de composition interne et une familiarité avec le formalisme logique est nécessaire pour apercevoir le contexte fonctionnel. En outre, cette valeur de la variable didactique possède l'avantage de mettre en avant le point de vue relationnel dont l'étude épistémologique a souligné l'importance dans la pensée structuraliste. Le *nom* de la structure constitue une quatrième variable didactique : la capacité des banquets à évoquer une image mentale cohérente avec la formalisation mathématique traduit le choix d'inscrire l'ingénierie dans la lignée de la phénoménologie didactique de Freudenthal dont nous avons parlé dans la dialectique objets-structures. Il est probable que le comportement des apprenants soit considérablement modifié si la structure était nommée « schmilblick », mais cette hypothèse n'a pas encore été testée.

Les *cadres et registres* introduits dans le milieu constituent une cinquième variable importante de la situation : en effet, nous verrons dans l'analyse *a priori* que des représentations « génériques » de la relation *R* sont nécessaires afin de pouvoir réaliser les tâches demandées par une approche sémantique. La modalité pédagogique (sixième variable) choisie est celle d'un travail par petits groupes. La communication entre pairs favorise en effet l'explicitation des stratégies d'action afin de les rendre intelligibles par autrui, ce qui constitue un premier stade de recul méta-cognitif. Enfin, l'*ordre des tâches* constitue une dernière variable à souligner : nous avons choisi de ne pas débuter par la recherche d'une définition axiomatique de tablée car une telle tâche de formalisation est fortement sous-déterminée et conduit à de nombreux systèmes possibles en vertu de ce que l'on appelle en épistémologie des sciences le pluralisme théorique (Poincaré, 1902). Pour ne pas rentrer dans les difficultés que posent, d'une façon générale, les démarches de modélisation, il nous apparaît préférable de rigidifier le cadre de l'étude et de permettre que la tâche de définition axiomatique puisse s'appuyer sur un formalisme préexistant (celui des banquets).

Contrat didactique et organisation du milieu

Les étudiants travaillerons par petits groupes de 3-4 personnes. Des rétro-actions internes au niveau de chaque sous-système « groupe d'étudiants-milieu » sont ainsi générés par les dialogues entre pairs. Nous avons vu que le document support introduit dans le milieu un discours méta. On notera que le texte distribué (annexe 2) débute par un poème d'Apollinaire, lequel contribue à matérialiser un changement de contrat et invite à « prendre part au banquet ». Le soin accordé à la négociation du contrat est primordial pour plusieurs raisons : la fragilité de l'ancrage institutionnel (ce n'est pas une structure au programme), l'obstacle du formalisme et le niveau élevé de réflexivité visé. En termes de traces écrites, nous prévoyons de demander à chaque groupes de rendre, à la fin de chaque séance, une réponse collective aux questions solutionnées. Chaque groupe désignera donc un rédacteur (qui peut être amené à varier d'une séance à l'autre). Ces traces permettront à l'enseignant, qui organise le temps de l'étude, d'orienter son intervention lors des phases d'institutionnalisation, ce qui constitue une seconde forme de rétro-action.

En termes épistémiques dans la lignée des travaux de Brousseau, il s'agit donc principalement d'un « jeu » impliquant différents sous-systèmes qui jouent contre une situation. Il est souhaitable que l'enseignant sollicite les rapporteurs lors des phases d'institutionnalisation, qui s'apparentent alors à une mutualisation. Malgré la présence du discours méta, il est probable qu'il soit nécessaire d'enrichir encore le milieu, compte-tenu du niveau d'abstraction et de la complexité des notions. Seul l'enseignant peut jouer ce rôle, que nous détaillerons ci-après dans la section dédiée à l'orchestration entre dimensions a-didactiques et didactiques de la situation.

Analyse a priori détaillée des principales tâches

Nous détaillerons uniquement la tâche de classification et la partie II du problème. Le lecteur pourra consulter la note de synthèse (Hausberger, 2016b) pour une analyse exhaustive.

Tâche de classification des banquets de petits cardinaux

Les méthodes se divisent en deux catégories : d'un côté une approche à dominante syntaxique qui s'apparente aux raisonnements menés dans le cas de la classification des groupes de petits ordres, de l'autre une approche à dominante sémantique qui utilise les modèles

génériques empruntés à la théorie des matrices ou des graphes. Il sera nécessaire cependant, dans chaque cas, d'articuler syntaxe et sémantique à un moment donné du raisonnement.

Dans l'approche à dominante syntaxique, prenons le cas de trois éléments x, y, z. Quitte à effectuer une permutation, nous pouvons supposer $x\,R\,y$ (en vertu de i) et iv)) ; nécessairement, ($y\,R\,x$ ou $y\,R\,z$) et (z $R\,x$ ou z $R\,y$), toujours d'après i) et iv). Parmi les quatre cas, seul $y\,R\,z$ et z $R\,x$ est possible, en vertu des axiomes ii) et iii). Le raisonnement est similaire avec quatre éléments, mais il nécessite de répéter plusieurs fois des considérations du type « quitte à permuter... ». On aboutit à deux classes : $x\,R\,y$, $y\,R\,x$, $z\,R\,t$, $t\,R\,z$ et $x\,R\,y$, $y\,R\,z$, $z\,R\,t$, $t\,R\,x$. Il est prévisible que les étudiants s'arrêtent à ce stade, alors qu'il s'agit encore, d'une part de justifier que ces deux classes sont bien distinctes, d'autre part de montrer qu'elles sont non-vides, donc d'en exhiber un représentant (retour sémantique). Le premier point nécessite la notion d'isomorphisme, en fait la connaissance de propriétés invariantes par isomorphisme qui permettent de distinguer les deux classes. Dans le cas des groupes d'ordre 4, bien connu des étudiants, on invoque la présence ou non d'un élément d'ordre 4. L'analogue pour les banquets consiste à repérer une propriété de cyclicité : raisonner sur l'ordre d'un élément revient, dans notre contexte, à raisonner sur le cardinal de la « chaîne » issue d'un élément, notion qui est aisée à formaliser (en introduisant, par exemple, une notation R^k), laquelle chaîne se referme dans le cas d'un cardinal fini. Les groupes cycliques, dont ceux constitués par les racines de l'unité, s'appuient également sur cette image mentale du cercle. S'il est peu probable que les étudiants s'engagent dans une telle formalisation, excepté ceux qui sont particulièrement à l'aise avec le formalisme, il est probable par contre que le motif de cyclicité soit reconnu et mis en avant. Le but des questions c) et d) est d'amener les étudiants à expliciter cette image mentale dans le formalisme des relations. Enfin, la construction d'un représentant pour chaque classe est aisée, soit en s'appuyant sur les banquets empiriques, soit sur les graphes, soit sur le modèle de la question c).

Dans l'approche à dominante sémantique, on utilise le fait que la théorie des matrices ou des graphes permet de représenter tous les cas possibles. Il s'agit donc de différencier les classes. Les graphes permettent de traiter rapidement le cas de 3 éléments : il permet de remplacer le raisonnement sur les axiomes par une succession d'actions, comme dans un « jeu de légos ». On obtient ainsi deux

possibilités de rajouter des flèches entre trois lettres x, y, z et on se convainc facilement que le sens de rotation des flèches n'a pas d'importance grâce à un traitement au sein de ce registre graphique symbolique : on passe de la première configuration à la dernière (figure 1) en rétablissant le sens anti-horaire, ce qui laisse le graphe invariant, puis en remarquant qu'il s'agit du même motif à permutation près des lettres x et y. Sans formaliser de notion d'isomorphisme, le principe d'abstraction, dans sa version naïve d'abstraire la nature des objets, permet de se convaincre qu'il s'agit de la même classe d'isomorphisme, dans le sens étymologique.

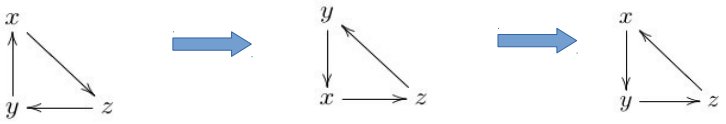


Figure 1: établissement du lien d'isomorphie par une succession de traitements au sein du registre des graphes

La situation est un plus compliquée dans le cas de 4 éléments, car le nombre de configurations est plus élevé. Des connaissances de théorie des graphes (notamment changer de représentation afin de supprimer les « croisements » de flèches) permettent de se ramener facilement soit au cas du graphe cyclique, soit au cas du graphe ayant deux composantes connexes formées de deux éléments reliés par une flèche double. Le processus visuel de reconnaissance de forme permet de conclure, en faisant abstraction des lettres.

Examinons pour finir l'approche sémantique à base de matrices : dans le cas de trois éléments, la position du 1 en première ligne détermine totalement la matrice des relations ; il y a donc deux possibilités. On se rend compte qu'il s'agit de la même classe par le raisonnement suivant : permuter y et z dans la seconde matrice conduit à deux matrices identiques. C'est donc à nouveau un processus visuel de congruence qui permet d'établir le lien d'isomorphie. Comment a-t-on compris qu'il fallait permuter ces éléments ? C'est l'examen des relations qui le dicte : dans un cas, $x\,R\,y$, $y\,R\,z$, $z\,R\,x$, dans l'autre $x\,R\,z$, $z\,R\,y$, $y\,R\,x$. Isoler les relations et les ordonner en faisant apparaître des cycles (la conversion en une représentation du type banquet empirique) constitue en définitive une procédure très performante pour comparer les structures. Le cas de 4 éléments est, comme précédemment, facilité par un argument

de permutation des éléments *a priori*, plutôt que d'invoquer des isomorphismes *a posteriori*.

En théorie des groupes, l'isomorphisme est défini comme une bijection préservant la loi, ce qui est conceptuellement différent d'une bijection préservant les relations (voir (Hausberger, 2017a) pour une étude approfondie de la transposition didactique du concept d'homomorphisme). Cependant, l'environnement culturel de cette notion inclut des éléments de discours méta sur lesquels les étudiants sont susceptibles de s'appuyer : Guin (1997, p. 13) présente ainsi un homomorphisme comme une application qui est « compatible avec la structure », ce qui permet la comparaison entre groupes. La proximité syntaxique des écritures $x*y$ et $x\ R\ y$ devrait permettre aux étudiants de trouver facilement, outre le caractère bijectif qui est standard, la condition $\forall\ (x, y) \in E^2,\ x\ R\ y \Rightarrow \varphi(x)\ R'\ \varphi(y)$ définissant un isomorphisme de banquets $\varphi : (E, R) \rightarrow (E', R')$. La construction effective, par exemple entre les deux banquets précédents d'ordre 3, s'effectue en comparant $x\ R\ y$, $y\ R\ z$, $z\ R\ x$ et $x'\ R\ z'$, $z'\ R\ y'$, $y'\ R\ x'$: si φ associe x à x', il associera donc y à z' et z à y'. On observera si les étudiants s'engagent dans l'écriture de tels isomorphismes ou bien se satisfont de la reconnaissance intuitive de formes.

Partie II (définition axiomatique des tablées et élaboration théorique)

La tâche de définition axiomatique d'une tablée s'appuie sur les banquets « empiriques » (il est peu probable que les étudiants posent d'autre relation que celle d'être assis à droite ou à gauche d'une autre personne) et la caractérisation abstraite du banquet cyclique de cardinal 4 demandée en dernière question de la partie I. On peut ainsi définir une tablée comme un banquet « circulaire », au sens où il est possible de numéroter les éléments de E de sorte que $x_i\ R\ x_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$, et $x_n\ R\ x_1$ (n désigne le cardinal de la tablée). Se pose la question de la tablée à 1 élément qui n'est pas un banquet : faut-il l'exclure ou non ? La tâche de définition est en définitive assez modeste. Nous avons déjà expliqué les raisons de ce choix. Notre propos est d'illustrer le fonctionnement de la dialectique concret-abstrait dans la construction théorique, d'où l'importance de cette phase de formalisation à partir de l'empirie. Cet objectif devrait être atteint, malgré une prise d'initiative limitée par le cadre des banquets. On pourra noter que la dialectique des preuves et réfutations (Lakatos, 1976) est absente, ce qui traduit une limitation de la reconstruction didactique proposée du fonctionnement de la pensée structuraliste.

La tâche d'élaboration théorique engage un autre type de tâche de définition : il ne s'agit plus de caractériser abstraitement, mais de donner des définitions « structuralistes » de sous-banquet, banquet irréductible, banquet engendré par un élément, et de réunion de banquets. Ces définitions s'appuient sur le formalisme ensembliste et ses images mentales associées, du type diagrammes de Venn.

Sous-banquet : (E', R') est un sous-banquet de (E, R) si et seulement si $E' \subset E$, $R' = R|_{E'}$ et (E', R') est un banquet. Cette dernière condition n'est pas automatique : si l'on s'imagine un banquet de l'empirie, on ne peut pas extraire aléatoirement des personnes, il faut isoler des tables entières. Ce phénomène est analogue au cas de la théorie des groupes, où l'on définit un critère de sous-groupe garantissant la stabilité de la loi et la stabilité par passage au symétrique. Dans notre cas, l'axiome iv) pose problème, ce qui conduit au critère suivant : $(E', R|_{E'})$ est un sous-banquet si et seulement si $\forall x \in E' \forall y \in E \;\; x R y \Rightarrow y \in E'$. Cette condition traduit la remarque précédente sur les banquets de l'empirie.

Banquet irréductible : La notion d'irréductibilité est une notion assez intuitive ; les étudiants connaissent par ailleurs la définition d'un groupe simple (ne possédant pas de sous-groupe distingué propre). Il est probable qu'ils posent rapidement la définition suivante : un banquet est dit irréductible s'il ne possède pas de sous-banquet autre que lui-même.

Banquet monogène : De façon analogue à la théorie des groupes (ou toute théorie algébrique structuraliste), plusieurs approches sont possibles. D'un point de vue structurel (au sens de Sfard 1991), $< x >$ est caractérisé par une condition de minimalité pour l'inclusion, parmi les banquets contenant x. Il est probable que certains étudiants adoptent d'emblée ce point de vue, par analogie avec la théorie des groupes. L'idée de génération à partir d'un élément fait par ailleurs référence à un processus d'itération (on itère en fait la condition du critère de sous-banquet, qui dit que toute la « chaîne issue de x », ou encore la tablée contenant x, dans le cas de cardinal fini, est incluse dans $< x >$; comme il s'agit par ailleurs d'un banquet, c'est $< x >$). L'encapsulation de ce processus en un objet (en fait, une tablée) procure ainsi une description explicite de $< x >$ qui en assure l'existence. Ces deux points de vue conceptuellement assez différents sont susceptibles d'intervenir dans les preuves. Une autre façon d'obtenir l'existence se fonde sur un raisonnement structuraliste classique : on montre qu'une intersection quelconque de sous-banquet est encore un sous-banquet, ce qui

permet de définir abstraitement $< x >$ en tant qu'intersection de tous les sous-banquets contenant x. Bien que ce soit peu probable, certains étudiants sont susceptibles d'employer cette méthode, notamment si elle a été exposée et présentée comme générale dans le cours de théorie des groupes.

Réunion de banquets : Cette opération se fonde sur l'union de deux ensembles et non le produit cartésien. La situation est donc inversée par rapport à la théorie des groupes qui peut ainsi s'ériger en obstacle. De plus, il s'agit de prendre l'union disjointe (en accord avec le cas des convives) alors que le formalisme laisse ouvert la possibilité d'une intersection non vide. Il est possible que les étudiants imaginent des méthodes d' « amalgamation » des ensembles (intercaler des personnes).

Les deux résultats théoriques importants à démontrer à partir de ces définitions sont les suivants : « les tablées sont les banquets irréductibles de cardinal fini » (question II 2 b) et « tout banquet fini est réunion de tablées $< x_i >$, cette écriture étant unique à permutation près des tablées et au choix près d'un représentant de chaque tablée » (théorème de structure). Ce théorème peut s'énoncer également en termes d'isomorphisme et des modèles spécifiques de banquets cycliques construits sur les ensembles $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (question I 2 c). Les étudiants pourront s'appuyer, dans la formulation de ce théorème, sur l'analogie avec la classification des groupes abéliens finis (noter que la situation est plus complexe en théorie des groupes en raison du « théorème chinois ») : un banquet fini est la réunion de banquets cycliques tout comme un groupe abélien fini se décompose en produit de groupes cycliques. En fait, la véritable analogie se situe au niveau du théorème de décomposition d'une permutation en tant que produit de cycles à supports disjoints (partie III).

Les tablées sont les banquets irréductibles de cardinal fini : La preuve de cette proposition est aisée lorsque les tablées ont été caractérisées en tant que banquets monogènes. La réciproque est immédiate en vertu de la caractérisation structurale (minimalité) d'un banquet monogène et la définition d'irréductibilité. Le sens direct se montre à l'aide du lemme suivant concernant les tablées : $y \in < x > \Rightarrow < y > = < x >$. Il est probable qu'il soit admis par les étudiants, lesquels s'appuient sur l'image mentale du cercle.

Théorème de structure : La démonstration de l'existence se fonde sur un raisonnement par récurrence sur le cardinal : la clef est de remarquer que, pour b un banquet et x un de ses éléments, le complémentaire $b \setminus < x >$ est encore un banquet. En définitive, il

s'agit d'un algorithme de décomposition. L'unicité s'établit également par récurrence (sur la somme $k+l$ des nombres de tablées intervenant dans chacune des deux décompositions considérées), ce qui nécessite une plus grande maîtrise du formalisme et de la méthode de raisonnement par récurrence. La difficulté est identique à celle de la preuve de l'unicité de la décomposition canonique d'une permutation. Malgré le fait que cette démonstration ait été rencontrée par les étudiants, il est peu probable qu'ils parviennent à rédiger la preuve dans le cas tout à fait analogue qui nous concerne.

Une situation fondamentale ?

Les critères mis en avant par Brousseau (1997) se situent sur deux plans : celui de la connaissance et celui de l'activité d'enseignement. Du point de vue épistémologique, la situation des banquets engendre le champ mathématique visé (le structuralisme mathématique) du point de vue qu'elle condense un ensemble de questions et de méthode à la base de l'étude d'une structure (du moins, une structure algébrique). Du côté didactique, il s'agit de questionner le « jeu » qui vient d'être présenté : le choix des différentes variables didactiques permet-il d'assortir la connaissance visée, pour l'actant qui joue la situation, des conditions qui la justifient et la rendent nécessaire ? Dans le cas contraire, l'a-didacticité de la situation serait compromise et l'apparition de la connaissance, le cas échéant, serait essentiellement à relier à un « effet de contrat ».

L'étude épistémologique a mis en avant des arguments de *fertilité* plutôt que nécessité de la méthode structuraliste. Cette fertilité, liée aux aspects FUGS, à la « lucidité et la compréhension » (cf première citation de Patras) est difficile à rendre compte du point de vue philosophique (Tappenden, 2008) et engage des dimensions subjectives et culturelles. On peut d'ailleurs objecter que la théorie des banquets vise essentiellement une compréhension des aspects formels de la théorie (rôle des différents axiomes, décomposition en sous-structures) plutôt que la fertilité de son application aux phénomènes (des sémantiques particulières), ce qui est réducteur.

De fait, la nécessité des constructions structuralistes ne peut être mise en évidence qu'à un niveau où les « formes » sont prises pour objet : ces constructions apparaissent comme des réponses à des problèmes appelés « universels » en théorie des catégories. Cette nécessité est hors d'atteinte d'un étudiant dans le contexte d'une entrée dans la pensée structuraliste, de sorte que les banquets

seraient davantage une situation *caractéristique*[6] que fondamentale. Pour autant, le milieu possède des aspects antagonistes portés par le discours méta : par exemple, le discours sur l'abstraction s'oppose à la démarche d'action qui consisterait à réduire la classification à celle des banquets de l'empirie. L'analyse a priori a montré qu'un jeu sur la variable didactique des représentations sémiotiques (introduction ou non de modèles génériques dans le milieu) instaure dans la tâche de classification des rapports différents entre le concret et l'abstrait, la syntaxe et la sémantique, et par là même fait fonctionner des dialectiques constitutives de la pensée structuraliste. De même, des nécessités locales apparaissent au niveau des tâches d'élaboration théorique : l'analyse a priori a montré que les définitions attendues sont suscitées en partie par le formalisme (algébrique et ensembliste), de paire avec des images mentales, donc un couplage entre le logique et l'intuitif qui fait écho aux discours des épistémologues sur la pratique mathématique de référence. À ce niveau encore, le travail est porté par le discours méta et l'analyse des tâches montre que le jeu ne peut fonctionner sans une part incontournable des connaissances de l'actant relative à la théorie des groupes, laquelle vient s'actualiser dans le sens de la thématisation recherchée. Pour toutes ces raisons, les banquets possèdent des qualités propres à une situation fondamentale. Ceci ne tranche pas le débat qui trouve de nombreux prolongements : par exemple, le discours méta ne serait-il pas la manifestation d'intentions didactiques qui visent à compenser un déficit patent de rationalité de la situation ?

Orchestration entre dimensions a-didactique et didactique

Dans le « jeu contre le milieu », les principaux leviers de l'enseignant sont la dévolution et l'institutionnalisation. Des tâches de différents types (classification, définition axiomatique, formalisation, preuve) se succèdent comme autant de nouvelles situations locales au sein de la théorie des banquets, ce qui nécessite à chaque fois une dévolution spécifique pour accompagner le changement de contrat et rend souhaitable une institutionnalisation des définitions avant de se lancer dans les preuves. Nous avons montré également l'importance des cadres et des représentations sémiotiques disponibles pour la réalisation des tâches, d'où la

6 au sens où le critère épistémologique est vérifié et les conditions de la situation justifient la connaissance visée sans la déterminer pleinement

pertinence d'enrichir le milieu aux moments opportuns. Enfin, l'institutionnalisation doit permettre la mise en relation du discours méta avec les situations proposées et souligner l'analogie avec la théorie des groupes qui est susceptible de demeurer implicite dans les procédures des étudiantes.

Nous listons ci-dessous les interventions de l'enseignant que nos analyses ont permis de motiver et que nous décidons d'inscrire dans le scénario. Elles seront utiles au lecteur qui souhaite expérimenter notre ingénierie dans son université et témoignent des nécessaires interactions entre dimensions a-didactiques et didactiques.

I 1 b) (dévolution) : Expliquer, en logique mathématique, la méthode d'étude de l'indépendance des axiomes (disjonction de cas et approche sémantique par construction de contre-exemples).

I 1 b) (enrichissement puis institutionnalisation) : L'introduction des représentations génériques sous forme de matrice et de graphe est utile pour démontrer l'implication iii) et iv) $\Rightarrow$ ii) en dimension finie, nier l'implication i) et iii) et iv) $\Rightarrow$ ii) en dimension infinie et s'engager dans la tâche suivante de classification des banquets.

I 2 a) (institutionnalisation) : La discussion de la tâche de classification des banquets dans le cas de 3 éléments permet un ensemble de mises au point. La réalisation de la même tâche dans le cas de 4 éléments permettra de vérifier l'acquisition des connaissances, tout en introduisant un nouveau phénomène.

I 2 b)-d) (institutionnalisation) : La caractérisation abstraite d'un banquet cyclique sera réinvestie dans la tâche de définition axiomatique des tablées. Il est souhaitable, d'un point de vue didactique et cognitif, de clôturer la partie I qui s'apparente à un mouvement de l'abstrait vers le concret, avant de s'engager dans la partie II qui procède d'une dynamique inverse.

II 1) et 2 a) (institutionnalisation) : Il s'agit de convenir d'une définition axiomatique de tablée ainsi que des autres définitions avant de s'engager dans les preuves. De même pour la définition de la réunion de banquets (première partie de la question II 2 c)

II 2 b) et c) (dévolution) : Le raisonnement déductif attendu diffère des preuves précédentes utilisant le symbolisme algébrique ou des processus de reconnaissance de forme. Il est important de souligner le changement de contrat. Lors de la dévolution de la preuve du théorème de structure, l'accent sera mis sur la question de l'existence et la méthode par récurrence pourra être indiquée.

II 2 (institutionnalisation) : Il s'agit de travailler l'écriture formelle des preuves. Le résultat d'unicité peut être admis en argumentant

qu'une preuve utilisant la décomposition d'une permutation sera donnée dans la partie III. Cette dernière, qui s'apparente à un exercice d'algèbre abstraite classique mobilisant les connaissances de théorie des permutations, peut faire l'objet d'un travail à la maison afin d'économiser le temps didactique.
IV (institutionnalisation) : Il s'agit d'éclairer le discours méta précisant les trois sens du mot « structure ». L'enseignant pourra interroger les étudiants à l'oral sur les théorèmes de structure qu'ils ont déjà rencontrés.

ÉTUDE EMPIRIQUE

L'ingénierie des banquets a été expérimentée en début de deuxième semestre 2013-14 dans une classe de troisième année de licence de mathématiques ayant reçu au premier semestre en enseignement classique de théorie des groupes. Les 7 groupes dont nous avons recueilli les conceptions structuralistes (voir plus haut) ont travaillé pendant 4 séances d'1h30. Des phases de dévolution et d'institutionnalisation ont ponctué le travail, ainsi que nous l'avions prévu dans l'orchestration. Chaque groupe était tenu de rendre son « cahier de recherches » à la fin de chaque séance. Il a été explicité que le travail, non noté, est préparatoire à l'étude des théories structurales au programme (on rappelle que les banquets n'en font pas partie), de façon à renforcer le contrat didactique.

La modalité de travail en petit groupes, assez inhabituelle en travaux dirigés à l'université de Montpellier, ainsi que la dimension ludique de la situation (l'étude d'une structure mystérieuse à élucider, impliquant le réel), ont permis une bonne dévolution de la situation. Un petit essoufflement a cependant été constaté en fin de la séquence, lorsqu'il s'est agi de rédiger des preuves déductives rigoureuses impliquant des enjeux davantage formels que conceptuels et cognitifs. La longueur de l'ingénierie explique également ce phénomène, c'est pourquoi nous avons proposé que la partie III fasse l'objet d'un travail à la maison.

Nous allons analyser nos données selon 3 axes :
Axe 1 : L'abstraction-idéalisation, qui engage les dialectiques concret-abstrait et syntaxe-sémantique. Ceci inclut les analyses sémiotiques et les objets mentaux. Nos analyses revêtent une fonction diagnostique sur la fonctionnalité du principe OP1. Nous

nous focaliserons sur les tâches de classification des banquets et de définition axiomatique des tablées.
Axe 2 : L'abstraction-thématisation dans sa dimension méta-cognitive, en appui sur la théorie des groupes. Il s'agit du principe OP2. Nos analyses visent à évaluer si la situation produit l'apprentissage escompté de la pensée structuraliste, en termes d'adaptation vis-à-vis du milieu a-didactique. L'attention sera portée sur la thématisation du concept d'isomorphisme dans la tâche de classification et sur la tâche d'élaboration théorique.
Axe 3 : Croisement des analyses précédentes avec le recueil de conceptions relatives au méta-concept de structure.
Dans la suite de l'analyse des conceptions, nous détaillerons pour chaque axe le travail des 4 groupes de numéros impairs, choisis pour leur représentativité et le contraste qu'ils fournissent. Les principaux phénomènes didactiques identifiés sont soulignés en italique dans le texte. Les données relatives à la tâches de classification, pour les 4 groupes, figurent en annexe 3. Les données complètes pourront être consultées dans notre note de synthèse (Hausberger, 2016).

Axe 1 : abstraction-idéalisation

Groupe 1 : Malgré l'enrichissement du milieu avec les représentations matricielles et les graphes, les étudiants classifient les banquets en s'appuyant sur une représentation idéalisée de personnes autour de tables (une numérotation de points sur des cercles). Ils concluent à l'existence de 2 banquets de cardinal 3 et 9 banquets de cardinal 4, dont 6 à une « table » et 3 à 2 tables. En définitive, la théorie des banquets est pour ce groupe une *théorie semi-empirique* et non une théorie abstraite : il y a *écrasement de la structure par les objets* mathématiques qui renvoient directement au réel. Le banquet cyclique $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ donné en exemple à la question c) est « modélisé par le banquet de cardinal 4 à une table ». Les étudiants réussissent donc la conversion de registre du cadre fonctionnel vers le cadre empirique. Les banquets de l'empirie font office de modèles concrets vis-à-vis de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ qui se situe à un niveau d'abstraction supérieur, alors qu'il s'agit de deux modèles vis-à-vis de la structure abstraite de banquet. Les étudiants ne font pas sens de la demande de « caractérisation abstraite » de ce banquet, mais ils reconnaissent que les deux banquets sont « dans la même classe ». La *reconnaissance de forme* opère donc, après conversion de registre, alors que le groupe ne reconnaît pas, par exemple, que les 2 banquets de cardinal 3, représentés au sein du même registre, sont

isomorphes. Ceci traduit un processus d'idéalisation incomplet : une numérotation ne constitue pas une abstraction complète des objets. Lors de la tâche de définition axiomatique des tablées, le groupe affirme : « on a un banquet à n éléments vérifiant : si on numérote les éléments de E de sorte que $x_i \, R \, x_{i+1}$, $1 \leq i \leq n\text{-}1$, et $x_n \, R \, x_1$, on a un banquet qui est isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ muni de $i \, R \, j \Leftrightarrow j = i+1$ ». Le groupe a ainsi intégré l'image mentale circulaire et il la formalise dans le langage des relations. La structure de banquet coïncidant avec les banquets de l'empirie qui comprennent les tablées, il n'y a, pour ce groupe, pas de raison de définir une relation. L'axiomatique abstraite ne joue finalement aucun rôle.

Groupe 3 : Après enrichissement du milieu, les étudiants classifient les modèles à 3 éléments dans le cadre matriciel. Face aux deux matrices possibles, le groupe « remarque que les banquets associés à ces matrices sont isomorphes : on passe de l'un à l'autre en échangeant de place 2 personnes ». La notion d'isomorphisme, non formalisée, est donc interprétée sémantiquement. L'identification de l'opération d'union de banquets (non formalisée), leur permet de conjecturer le nombre correct de classes dans le cas général de n éléments : une classe d'isomorphisme est caractérisées par le nombre de personnes par tablées. En appui sur le contexte empirique, ce groupe a donc réussi à abstraire une représentation structurale de banquet, liée au théorème de structure des banquets. Cette représentation demeure une représentation mentale, mais elle est opérationnelle pour caractériser et dénombrer les classes. L'exemple $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ est converti du cadre fonctionnel au cadre empirique, en passant par le cadre des graphes : les étudiants ont mobilisé ce nouveau registre en vertu de son aptitude à représenter graphiquement les relations ; les flèches sont dessinées en arcs de cercles, ce qui fait le lien avec les banquets empiriques. La représentation mentale sous forme (d'union) de cercles permet ainsi d'unifier les différents modèles et *le banquet circulaire de cardinal 4 est reconnu par un processus visuel de reconnaissance de forme*. Lors de la tâche de définition axiomatique, le groupe choisit la relation « être à droite de » et donne les axiomes de banquets, auxquels est adjoint l'axiome de renumérotation des éléments pour constituer un cycle. *Les étudiants sont donc capables de mobiliser les deux dimensions syntaxique et sémantique, mais n'articulent pas les deux au-delà de ce qui est permis par les représentations mentales (l'isomorphisme en tant que permutation de personnes)*.

Groupe 5 : La tâche de classification est effectuée par une approche syntaxique. La rédaction apparaît assez elliptique, mais elle laisse entrevoir que les étudiants sont capables de justifier leurs raisonnements syntaxiques : « car si par ex ... ». Dans le cas de 3 éléments, les étudiants mentionnent « à permutation près » ; dans le cas de 4 éléments, ils mettent en avant deux cas et donnent la liste des relations entre les 4 symboles, sans justification et sans retour sémantique. Les étudiants affirment que **Z**/4**Z** « correspond au premier cas » ; le mot classe n'apparaît qu'à la question d), lorsqu'il est fait usage explicitement de ce terme dans l'énoncé : « il appartient à la classe des banquets à 1 table ronde ou 'banquet cyclique' ». Ce dernier est caractérisé abstraitement par la possibilité de relier deux éléments quelconques par une « chaîne » d'éléments en relation. Les étudiants n'avaient probablement pas conscience auparavant qu'ils effectuent une classification à isomorphisme près, ce fait étant dissimulé derrière le symbolisme algébrique et le raisonnement « à permutation près ». Dans la tâche de définition axiomatique, les étudiants reprennent cette condition de chaîne. Ils mettent en avant la relation « être à la droite de » et chaque axiome, exprimé formellement, est illustré par son interprétation empirique, retranscrite à côté. *Ce groupe distingue donc bien deux niveaux : objets et structure, mais il n'articule pas syntaxe et sémantique dans la tâche de classification*. La notion syntaxique manquante est celle d'isomorphisme et les étudiants ne s'appuient pas, à ce niveau, sur des images mentales, ce qui ne leur permet pas d'utiliser les processus de reconnaissance de forme. L'abstraction mise en œuvre par les étudiants est fondée sur l'usage du symbolisme et l'axiomatique. Ce n'est qu'après-coup qu'ils développent *l'image mentale de cycle, ce qui leur permet de caractériser abstraitement le banquet cyclique et de conceptualiser sa classe*.

Groupe 7 : Lors d'une première réalisation de la tâche de classification, ce groupe s'appuie à la fois sur l'analogie avec la théorie des groupes et sur les banquets de l'empirie. L'unicité dans le cas de 2 ou 3 éléments est reliée à la primalité de ces entiers et les notations B_4 et $B_2 \times B_2$ sont introduites et interprétées en termes de banquets empiriques. Après enrichissement du milieu, les étudiants justifient l'unicité des banquets de cardinaux 2 et 3 par des arguments de nature structuraliste (« plus petit banquet possédant au moins 1 élément », « unique car les 3 éléments sont en relation ») mais incomplets. Dans le cas de 4 éléments, le groupe fait appel à la fois à des représentations sémiotiques empruntés à la théorie des

groupes et à la représentation des relations sous forme fonctionnelle. Leur rédaction mélange de façon assez confuse les deux structures de groupe et de banquet. Ce groupe essaie donc, dans ses démarches, de mettre en relation un formalisme abstrait structuraliste emprunté à la théorie des groupes avec des représentations concrètes évoquées par l'axiomatique de banquet. Il se retrouve cependant en difficultés dans l'expression et l'utilisation des analogies qu'il perçoit et ne parvient pas à engager les concepts dans des preuves afin de justifier les résultats formulés sur des bases intuitives.

Axe 2 : abstraction-thématisation

Notre analyse selon l'axe 1 permet déjà de discuter des premiers aspects de la thématisation, dans ses rapports à l'idéalisation. Aucun groupe n'a thématisé la notion d'isomorphisme, contrairement à ce que nous avions prévu dans l'analyse *a priori*. Un isomorphisme n'est pas conceptualisé par les étudiants en tant que bijection préservant les relations, ce qui ne permet pas de rendre cette notion opératoire : un isomorphisme entre banquets est essentiellement établi par reconnaissance d'une congruence de formes, les étudiants n'articulant pas syntaxe et sémantique. Il faut noter que les étudiants ont classifié des modèles uniquement en théorie des groupes, alors qu'une pluralité de contextes différents est nécessaire afin d'identifier des invariants opératoires. Il est fort probable qu'une majorité d'étudiants soit passée à côté de la portée conceptuelle de la classification des groupes de petits ordres.

Nous allons maintenant, pour chaque groupe où ce sera possible (le groupe 1, par exemple, a rendu peu de traces de son travail relatif aux tâches d'élaboration théorique), analyser plus précisément les rapports explicites que les étudiants établissent avec la théorie des groupes et décrire les fonctionnements analogiques, souvent implicites, que l'on peut lire dans leurs démarches.

Groupe 3 : Ce groupe ne fait aucune mention explicite de la théorie des groupes dans les documents rendus. Pour autant, la formalisation des notions de sous-banquet et de banquet monogène montre un phénomène de *sémiosis* (symboles $<$ et R^k, figure 2) traduisant une *extension au contexte des banquets de représentations sémiotiques empruntés à la théorie des groupes*. La propriété de sous-banquet est comprise comme une propriété de congruence avec une sous-partie et retranscrite formellement par la coïncidence de R' avec la restriction de R à E', ce qui est insuffisant. Les représentations des étudiants ne leur permet pas d'envisager une extraction de personnes

ne se situant pas sur une même table. Ces éléments montrent *un début de thématisation, avec un fort appui sur les représentations phénoménologiques, donc le processus d'idéalisation*.

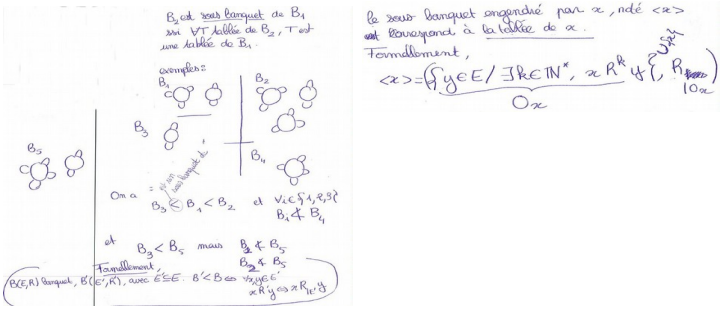


Figure 2: travail de formalisation effectué par le groupe 3.

Groupe 5 : A la différence du groupe 3, ce groupe définit un sous-banquet de (*E, R*), de façon formelle, comme une donnée (*F, R*) telle que $F \subset E$ et (*F, R*) est un banquet. Le sous-banquet monogène est défini comme le plus petit sous-banquet contenant l'élément générateur, puis décrit comme la « chaîne » issue de *x* à l'aide de la l'itérée R^k de la relation, sans justification. Le *point de vue structural* leur permet de donner une preuve conceptuelle de la caractérisation des tablées en tant que banquets irréductibles (figure 3), autrement dit à *exprimer la dimension organisatrice* (Battie 2003) *des concepts vis-à-vis des preuves*. Ce groupe donne ensuite une formalisation très rigoureuse de l'opération d'union de banquets mais ne dispose pas du temps nécessaire pour se lancer dans la recherche d'une preuve du théorème de structure, correctement énoncé (l'existence uniquement).

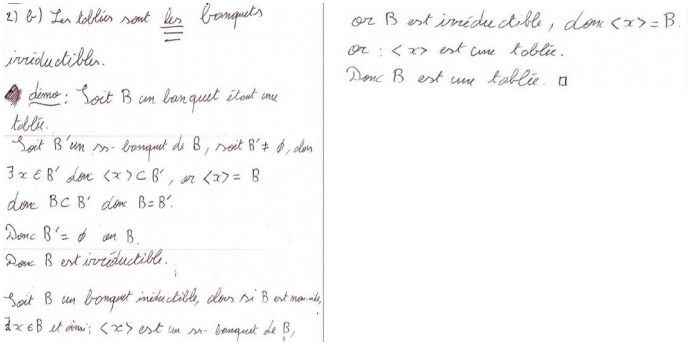


Figure 3: démonstration donnée par le groupe 5 (question II 2 b).

Groupe 7 : Nous avons vu que ce groupe justifie l'unicité des classes de banquets de cardinaux 2 et 3 par la primalité de ces nombres (ceci renvoie au raisonnement classique de théorie des groupes mobilisant la notion d'ordre d'un élément, mais ce raisonnement ne se transpose pas directement au cas des banquets) et qu'il introduit la notation $B_2 \times B_2$ issue du produit cartésien de groupes cycliques alors que cette opération n'est pas définie pour les banquets. Plus loin, il note $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et interprète $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ comme un groupe de permutations de 2 éléments. Le parallélisme entre les deux structures apparaît explicitement dans des réponses du type : « C'est un groupe cyclique (d'ordre 4), c'est un banquet », ainsi qu'à la question d) où l'itération de la relation est mise en regard avec la notion d'ordre d'un élément, dans le cas de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$. *La théorie des groupes sert donc essentiellement de théorie structurale permettant d'interpréter le domaine phénoménal des banquets et prédire des résultats. Le groupe se trouve incapable de transposer les démarches menées en théorie des groupes, dans ses aspects syntaxiques et sémantiques, à ce nouveau contexte*. Au niveau de l'élaboration théorique, ce groupe définit un sous-banquet avec la condition insuffisante $R' = R|_{E'}$. Il illustre cette définition par un dessin de 2 tablées qui diffèrent par l'omission d'une personne alors que cette situation ne correspond pas à une relation de sous-banquet (l'omission d'une personne induit de nouvelles relations). Le sous-banquet monogène est décrit comme minimal pour l'inclusion et représenté sous forme circulaire avec des éléments x, x' et x''. Enfin, l'opération de réunion de banquets est étudiée, toujours en appui sur un dessin. Ce groupe propose, à partir de 2 tables, d'intercaler les personnes afin de former une table unique. Là encore, les relations entre personnes sont perdues, de sorte que le résultat de l'opération ne contient pas les banquets initiaux en tant que sous-banquets. Pour résumer, ce groupe montre *un début de thématisation* mais il a du mal à articuler les représentations concrètes avec le formalisme abstrait qui est le propos de la thématisation. *Un déficit de contrôle syntaxique handicape les démarches analogiques menées par ce groupe, en appui sur la sémantique*.

Axe 3 : analyse croisée avec le recueil de conceptions

Le croisement du recueil de conceptions avec les analyses menées selon les deux axes ci-dessus suggère une corrélation entre les conceptions relatives au méta-concept de structure et la capacité des étudiants à interpréter et réaliser les tâches structuralistes de la

théorie des banquets. En effet, l'écrasement des structures par les objets qui apparaît dans les conceptions du groupe 1 est corrélée avec la construction par ce groupe d'une théorie des banquets semi-empirique. La fonctionnalité du principe PO2 chez le groupe 3, en appui sur des images mentales de type topologique, est corrélée avec le développement par ce groupe de représentations mentales performantes pour classifier les banquets et la mise en œuvre d'un début de thématisation. Le groupe 5, qui a montré le méta-concept de structure le plus développé, est capable de thématiser des définitions structuralistes et de mettre en œuvre la dimension organisatrice des concepts dans les preuves. Par contre, il n'articule pas syntaxe et sémantique dans la tâche de classification, ce qui pourrait être mis en relation avec des aspects FUGS soulignés de façon incomplète au niveau du recueil de conceptions. Le stade de conceptualisation du groupe 7 (un méta-concept de structure en tant qu'organisant des liens, encore flous, entre objets et structures) semble reflété par les démarches du groupe, lequel tente d'organiser les phénomènes en thématisant les résultats de théorie des groupes sur la base d'analogies mal maîtrisées.

Ces corrélations viennent étayer notre hypothèse sur le rôle du méta-concept de structure dans la réalisation de tâches structuralistes. D'un point de vue méthodologique, elles étayent également la possibilité, par un recueil de conceptions engageant la méta-cognition, de diagnostiquer un stade de développement de la pensée structuraliste qui soit cohérente avec les pratiques effectives des apprenants. Le développement du méta-concept de structure s'opère ainsi en relation avec la réalisation de tâches structuralistes, et réciproquement. Ceci montre la pertinence d'accompagner l'apprenant dans des tâches de méta-cognition visant un recul réflexif sur l'algèbre abstraite (stratégie du levier méta) et motive des situations didactiques du type la théorie des banquets.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

La théorie des banquets a été élaborée en utilisant la méthodologie de l'ingénierie didactique, en appui sur le cadre conceptuel de la dialectique objets-structures (Hausberger, 2017b) et sur la théorie des situations didactiques, puis soumise à la contingence. L'activité méta-cognitive de l'apprenant requise par la situation dans le processus d'apprentissage par adaptation est

soutenue par le discours méta inscrit dans le document support de l'activité et par une articulation fine entre dimensions didactique et a-didactique. L'objectif didactique est d'amener les étudiants à thématiser des notions structuralistes rencontrées dans le contexte des groupes et de l'algèbre linéaire, en particulier la notion d'isomorphisme. Nous avons fait l'hypothèse que le méta-concept de structure de l'apprenant impacte sa capacité à réaliser des tâches structuralistes.

L'analyse des données empiriques recueillies lors de la réalisation en classe de l'ingénierie a permis de confirmer cette interrelation entre le développement du méta-concept de structure et le développement de démarches structuralistes, via l'examen de l'intégration des deux niveaux de principes organisateurs de phénomènes en jeu dans le structuralisme algébrique et l'examen du fonctionnement des dialectiques concret-abstrait et syntaxe-sémantique. L'image mentale des banquets de l'empirie s'avère un point d'appui aux raisonnements syntaxiques sur les axiomes ainsi qu'aux tâches de classification et de caractérisation abstraite des banquets. Différents couplages se produisent entre cette image mentale et le symbolisme mathématique (sémiosis) et conduisent à l'utilisation de processus visuels de reconnaissance de formes. L'ingénierie des banquets répond ainsi au projet de phénoménologie didactique des structures mathématiques soutenu par Freudenthal et contribue à rétablir une dialectique concret-abstrait en algèbre abstraite.

L'analyse des données a également montré des difficultés persistantes des étudiants à articuler syntaxe et sémantique dans la tâche de classification des banquets. Plusieurs groupes distinguent mal le niveau des objets et celui de la structure. Nous faisons l'hypothèse que le point de vue de théorie des modèles utilisé dans la théorie des banquets est à même d'aider les étudiants à conceptualiser ces deux niveaux et leur articulation. Les sessions réalisées en laboratoire (Hausberger, 2016), que nous ne pouvons inclure ici par manque de place, permettent d'éclairer certains obstacles : d'une part, les étudiants distinguent mal un travail syntaxique sur les axiomes et la manipulation d'un modèle générique, ce qui explique qu'ils ne perçoivent pas le rôle du retour sémantique ; d'autre part, les modèles génériques sont perçus comme formant des classes distinctes du fait d'une conception erronée persistante relative au processus d'abstraction-idéalisation, induite par le formalisme algébrique (la lettre est perçue comme une

abstraction de la nature des objets alors qu'elle n'est que partielle). Le dépassement de cet obstacle s'effectue via la notion d'isomorphisme. Les sessions en laboratoire ont également confirmé que la théorie des groupes s'avère à la fois un point d'appui majeur et un obstacle à la thématisation lorsqu'il s'agit de préciser les analogies, d'où la nécessité d'une intervention didactique afin que la méta-cognition conduise à la thématisation escomptée de la notion d'isomorphisme, en appui sur son étymologie. De nouvelles réalisations de l'ingénierie s'avèrent donc nécessaires pour consolider cette dernière et affiner l'orchestration entre ses dimensions a-didactique et didactique. En outre, cet approfondissement peut être l'occasion d'utiliser le schéma de structuration du milieu développé par Margolinas (1995) à la suite de Brousseau, afin de décrire plus finement les rapports du sujet épistémique avec le milieu lors des différentes phases de la situation, notamment celles de méta-cognition (qui correspondent, dans ce modèle, au dernier niveau a-didactique, le niveau -1), en remontant les niveaux, et le rôle de l'enseignant (niveau 0). L'usage de ces outils fins d'analyse a posteriori devrait permettre une meilleure compréhension du fonctionnement de la situation en relation avec les diverses variables didactiques identifiées. Enfin, on peut attendre d'une analyse plus fine des différents niveaux de milieu de nouveaux arguments dans le débat sur le caractère fondamental (au sens de Brousseau) de la situation des banquets.

BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU, G. (1997). *Théorie des situations didactiques.* La Pensée Sauvage : Grenoble.

BROUSSEAU, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. Récupéré de http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

ARTIGUE, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 281–308.

BATTIE, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'Arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*. Thèse de l'Université Paris 7.

BENIS-SINACEUR, H. (1987). Structure et concept dans l'épistémologie mathématique de Jean Cavaillès. *Revue d'histoire des sciences, 40*(1), 5-30.

BENIS-SINACEUR, H. (2014). Factes and Levels of Mathematical Abstraction. *Philosophia Scientiæ*, *18*(1), 81-112

BOSCH, M., GASCÓN, J., NICOLÁS, P. (2018). Questioning Mathematical Knowledge in Different Didactic Paradigms: The Case of Group Theory. *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed.*, *4*(1), 23–37.

BOURBAKI, N. (1998). L'architecture des mathématiques. In Le Lionnais, F. (Ed.), *Les grands courants de la pensée mathématique* (pp. 35-47). Paris : Hermann. (Ouvrage original publié en 1948)

CARNAP, R. (1928). *Der logische Aufbau der Welt*. Berlin : Weltkreis.

CAVAILLÈS, J. (1994). *Œuvres complètes de philosophie des sciences*. Paris : Hermann.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CORRY, L. (1996). *Modern Algebra and the Rise of mathematical Structures*. Bâle : Birkhaüser.

DORIER, J.-L., ROBERT, A., ROBINET, J., ROGALSKI, J. (2000). The Meta Lever. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 151-176). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 5-31.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

ENFERT (D'), R., GISPERT, H. (2011). Une réforme à l'épreuve des réalités. Le cas des « mathématiques modernes » en France, au tournant des années 1960-1970. *Histoire de l'éducation*, *131*, 27-49.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht : Reidel.

GUIN, D. (1997). *Algèbre Tome 1. Groupes et Anneaux*. Paris : Belin.

HAUSBERGER, T. (2012). Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Éds), *Enseignement des mathématiques et contrat social : Enjeux et défis pour le 21e siècle* (pp. 425-434). Genève : Université de Genève.
HAUSBERGER, T. (2016). *Enseignement et apprentissage de l'algèbre abstraite à l'université et premiers éléments d'une didactique du structuralisme algébrique : études croisées en didactique et épistémologique des mathématiques.* Note de synthèse à l'Habilitation à Diriger des Recherches en didactique des mathématiques, disponible à l'adresse : https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01408565
HAUSBERGER, T. (2017a). The (homo)morphism concept: didactic transposition, meta-discourse and thematisation. *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed.*, *3*(3), 417-443.
HAUSBERGER, T. (2017b). La dialectique objets-structures comme cadre de référence pour une étude didactique du structuralisme algébrique. *Education et Didactique*, *11*(2), 131-152.
LAJOIE, C. & MURA, R. (2004). Difficultés liées à l'apprentissage des concepts de sous-groupe normal et de groupe quotient. *Recherches en didactique des mathématiques*, *24*(1), 45-80.
LAKATOS, I. (1976). *Proofs and Refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
LAUTMAN, A. (2006). *Les mathématiques, les Idées et le Réel physique*. Paris : Vrin.
LECOURT, D. (2002). *L'épistémologie historique de Gaston Bachelard*. Paris : Vrin.
LERON, U. & DUBINSKY, E. (1995). An abstract algebra story. *American Mathematical Monthly, 102*(3), 227-242.
MAC LANE, S. (1996). Structure in Mathematics. *Philosophia Mathematica*, *4*(2), 174-183.
MARGOLINAS, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In C. Margolinas (Ed.), *Les débats de didactique des mathématiques* (pp. 89-102). Grenoble : La Pensée sauvage.
PATRAS, F. (2001). *La pensée mathématique contemporaine*. Paris : Presses Universitaires de France.
PATRAS, F. (2008). Carnap, l'Aufbau, et l'idée mathématique de structure. In J. Bouveresse & P. Wagner (Éds), *Mathématiques et expérience. L'empirisme logique à l'épreuve (1918-1940)* (pp. 33-54). Paris : Odile Jacob - Collège de France.
PIAGET, J. & BETH, E. W. (1961). *Épistémologie mathématique et psychologie. Essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle*. Paris : PUF.
POINCARÉ, H. (1902). *La science et l'hypothèse*. Paris : Flammarion,

ROBERT, A. (1987). De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire. *Cahiers de didactique des mathématiques, 47*. Paris : IREM de Paris 7.
ROBERT, A. & ROBINET, J. (1993) Prise en compte du « méta » en didactique des mathématiques. *Cahier de DIDIREM, 21*. Paris : IREM de Paris 7.
ROGALSKI, M. (1995). Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher et qu'il n'y a apparemment pas de situation fondamentale ? l'exemple de l'algèbre linéaire. *Séminaire DidaTech n°169.* Grenoble : Université Joseph Fourier, p. 127-162.
RESNIK, M. (1997). *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford : Oxford University Press.
SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics***,** *22*(1), 1-36.
TALL, D.O. &VINNER, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with special reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.
TAPPENDEN, J. (2008). Mathematical Concepts: Fruifulness and Naturalness. In P. Mancosu (Ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice* (pp. 276-301). Oxford: Oxford University Press.
VERGNAUD, G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2), 133-170.

ANNEXE 1: RECUEIL DE CONCEPTIONS RELATIVES AU MÉTA-CONCEPT DE STRUCTURE

		Groupe 1	Groupe 3	Groupe 5	Groupe 7
définition	axiomatique				
	ensembliste	Une structure mathématique permet de déterminer un **ensemble** grâce à des **lois**. C'est comme une **classe** en informatique	Structure = **ensemble** d'éléments + ensemble de **règles** sur les éléments	**Ensemble** + **lois** **Relations** sur les éléments → structure	La structure mathématique s'associe à un ensemble, un groupe, etc. C'est une **liste de propriétés** qui définissent un **ensemble** d'éléments. On peut définir des "**sous-ensembles**" pour lesquels on peut associer d'autres structures.
	relationnelle				
exemples	algébriques	Corps, groupe, anneaux	Groupes, anneaux, semi-anneaux, corps, algèbres, espaces affines	Structure d'anneau, de groupe, d'espace vectoriel	La structure d'espace vectoriel, de groupes, d'anneaux, de corps
	autres			Espace normé ; Structure avec une relation d'ordre, d'équivalence	
raisons d'être	formaliser				
	unifier			Faire des **analogies** entre des ensembles ayant la même structure (ex : se rapporter aux groupes Z/nZ qu'on maîtrise plus)	
	généraliser		Faire des **généralités**		
	simplifier		**Simplifier** des problèmes		Afin de **simplifier** des problèmes (structure quotient)
	autre raison	Les théories des structures sont élaborées pour résoudre des problèmes mathématiques fondamentaux		Pour **comparer** des ensembles	Dans le but de **comparer** et de créer des "**catégories**" de structures, de lois
questions	combinatoire	Peut-on **restreindre** le **domaine d'application** d'une structure ? Peut-on trouver une structure à l'**intérieur** d'une structure ?	Peut-on **construire** d'autres structures à partir d'une structure ?	Est-ce qu'elles sont **conservées** par certaines "**combinaisons**" ? Peut-on **créer** des ensembles structurés à partir d'éléments ou de **sous-ensembles** ? Comment ?	
	morphismes		Y a-t-il des **équivalences** entre structures ? Peut-on les **comparer** ?	Est-ce qu'elles se **transportent** ?	
	théorèmes de structure		Peut-on **découper** une structure en **sous-structures plus simples** ?		
	autre	Quelles **propriétés définissent** une structure ? Sur quel **ensemble** une structure est-elle définie ?	Peut-on mesurer, distinguer, quantifier les éléments d'une structure ?		La quadrature du cercle est-elle possible ? Les équations sont-elles résolubles sur tel ou tel ensemble, telle ou telle structure ? Comment calculer $(M+N)^p$ où M, N sont des matrices carrées d'ordre n ? La structure d'anneau commutatitf permet d'appliquer la formule du binôme de Newton.

ANNEXE 2 : LA THÉORIE DES BANQUETS (TEXTE DISTRIBUÉ AUX ÉTUDIANTS)

La théorie des banquets

Une mini-theorie pour appréhender la pensée structuraliste

Vers le palais de Rosemonde au fond du Rêve
Mes rêveuses pensées pieds nus vont en soirée
Le palais don du roi comme un roi nu s'élève
Des chairs fouettées des roses de la roseraie

...

Ah ! nom de Dieu ! qu'ont donc crié ces entrecôtes
Ces grands pâtés ces os à moelle et mirotons
Langues de feu où sont-elles mes pentecôtes
Pour mes pensées de tous pays de tous les temps

Palais. Appolinaire.

Introduction

Vous ne trouverez pas cette théorie des banquets dans les manuels d'algèbre : c'est une invention [1] didactique de votre enseignant. Le but est de comprendre, sur un exemple simple, le fonctionnement d'une *théorie structurale mathématique* : d'où provient une telle théorie ? Comment est-elle formulée ? Quels types de questions se pose-t-on dans une théorie structurale et quels types de méthodes utilise-t-on pour y répondre ?

La "théorie des banquets" est plus simple, moins riche que les théories structurales algébriques classiques que l'on étudie en L3 de mathématiques (théorie des groupes, des anneaux et des corps). C'est son intérêt : elle fournit un domaine restreint d'investigation qui sera propice à une prise de recul. On pourra ainsi discuter les questions précédentes sans avoir à recourir à trop de "technicité mathématique".

Ce travail devrait donc à la fois permettre une prise de recul par rapport aux théories structurales que vous avez déjà rencontrées et faciliter l'apprentissage d'autres structures mathématiques, par la perspective ainsi dégagée sur la pensée structuraliste.

Partie I. Axiomatique de la structure de banquet et modèles de l'axiomatique

Une théorie structurale est une théorie abstraite : elle parle donc d'objets dont la nature n'est pas spécifiée. On les note alors par des symboles : x, y, z ou α, β, γ, *etc.*

Dans notre théorie des banquets, il n'y a qu'un seul type d'objets (dans d'autres théories, il peut y avoir plusieurs catégories d'objets : par exemple, les points, les droites et les plans dans la géométrie d'Euclide).

La nature des objets n'étant pas spécifiée, ce sont les *relations* entre les objets qui sont le propos de la théorie (par exemple, on dit qu'un point *appartient* à une droite en géométrie d'Euclide : c'est la relation d'appartenance, entre autres, qu'il s'agit alors de caractériser). Vous avez déjà formalisé différentes catégories de relations qui interviennent souvent dans les théories mathématiques : les relations d'ordre et les relations d'équivalence, deux exemples de relations binaires, définies par les axiomes bien connus qui expriment les propriétés formelles de ces relations. Nous noterons $x\mathcal{R}y$ une relation binaire, qui peut être satisfaites ou non, donc prend l'une des deux valeurs V ou F. Les lois de composition interne sur un ensemble (du type $(x, y) \mapsto x * y$, comme l'addition et la multiplication des nombres) permettent également de définir des relations entre éléments de cet ensemble : par exemple $x * y * x * y = 1$.

Dans notre théorie des banquets, on considère une unique relation entre les objets, qui est une relation binaire notée $\mathcal{R}$. Il s'agit alors d'expliciter les axiomes que vérifient la relation $\mathcal{R}$. Ils constituent la présentation axiomatique de la théorie.

Voici les axiomes de la théorie des banquets :

(i) aucun objet ne vérifie $x\mathcal{R}x$;

(ii) si $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{R}z$ alors $y = z$;

(iii) si $y\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}x$ alors $y = z$;

(iv) pour tout x, il existe au moins un y tel que $x\mathcal{R}y$.

Si l'on regroupe dans un ensemble les objets de la théorie, on peut dire qu'un banquet est la donnée $(E, \mathcal{R})$ d'un ensemble E muni d'une relation binaire $\mathcal{R}$ vérifiant les axiomes précédents. Ces derniers sont les axiomes de la *structure* de banquet.

Une donnée $(E_0, \mathcal{R}_0)$ spécifiée s'appelle un *modèle* de l'axiomatique ou plus simplement un exemple de banquet. Le concept de banquet est un concept abstrait, général alors qu'un modèle est concret et particulier.

(1) Examen logique du système d'axiomes :

a) Cohérence : s'agit-il d'une théorie mathématique valide, *i.e.* les axiomes sont-ils non-contradictoires ? Ou encore : existe-t-il un modèle ?

b) Indépendance (minimalité du système d'axiomes) : certains axiomes sont-ils conséquences logiques d'autres axiomes ou bien les axiomes sont-ils mutuellement indépendants ?

(2) Etude des banquets de petits cardinaux : le cardinal d'un banquet $(E_0, \mathcal{R}_0)$ est par définition le cardinal de l'ensemble E_0.

a) Classifier les banquets de cardinal $n \leq 3$.

b) Classifier les banquets de cardinal 4.

c) Que dire de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ muni de la relation $\bar{i}\mathcal{R}\bar{j} \Leftrightarrow \bar{j} = \bar{i} + \bar{1}$?

d) Comment caractériser abstraitement le banquet précédent (*i.e.* caractériser sa structure abstraite de banquet parmi les différentes classes de banquets, en fait caractériser sa classe) ?

1. ©Thomas Hausberger

Partie II. Elaboration d'une théorie abstraite des tablées et théorème de structure des banquets

On veut placer n personnes quelconques (n est le cardinal de la tablée) autour d'une table ronde. Une telle configuration s'appelle une tablée. Il s'agit de construire une théorie abstraite des tablées.

En d'autres termes, la situation est maintenant renversée par rapport à la partie précédente : on part de situations concrètes et il s'agit d'élaborer une théorie abstraite. C'est en général de cette manière que sont construites les théories structurales mathématiques, mais cette partie de la démarche n'apparait pas dans l'exposition des théories mathématiques qui sont en général présentées directement comme dans la première partie.

(1) Construction du système d'axiomes :
   a) Quelle relation entre les personnes pourrait-on poser afin de définir abstraitement une tablée ?
   b) Enoncer un système d'axiomes définissant abstraitement une tablée.

(2) Théorème de structure des banquets.
   a) Proposer une définition pour un *sous-banquet* et un banquet *irréductible*. Soit $b = (E, \mathcal{R})$ un banquet de cardinal fini et $x \in E$. Définir et caractériser le sous-banquet $< x >$ *engendré* par x.
   b) Quel lien y a-t-il entre les tablées et les banquets irréductibles ?
   c) Définir une opération de *réunion* de banquets. Enoncer et démontrer le *théorème de structure* des banquets de cardinaux finis.
   d) Appliquer ce théorème de structure aux banquets de cardinal 4.

Partie III. Lien avec la théorie des permutations

(1) Démontrer que l'application $b : \sigma \mapsto b_\sigma = (\{1, 2, \ldots, n\}, \mathcal{R}_\sigma)$, où $i\mathcal{R}j \Leftrightarrow j = \sigma(i)$, définit une bijection entre les permutations $\sigma \in S_n$ sans point fixe et les structures de banquet sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

(2) Comment se traduit sur la permutation σ le fait que deux banquets soient isomorphes ?

(3) Comment se traduit en terme de banquets la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints ? Que retrouve-t-on ainsi ?

(4) On rappelle que le type d'une permutation est la liste des longueurs de ses différents cycles dans la décomposition canonique en produit de cycles à supports disjoints. Définir le *type* d'un banquet et montrer à l'aide des questions de cette partie III que deux banquets sont isomorphes si et seulement si ils ont même type.

Conclusion

La volonté de décrire abstraitement des objets mathématiques afin de produire des théories générales conduit donc les mathématiciens à écrire des systèmes axiomatiques définissant les relations qu'ils décident de considérer entre ces objets.

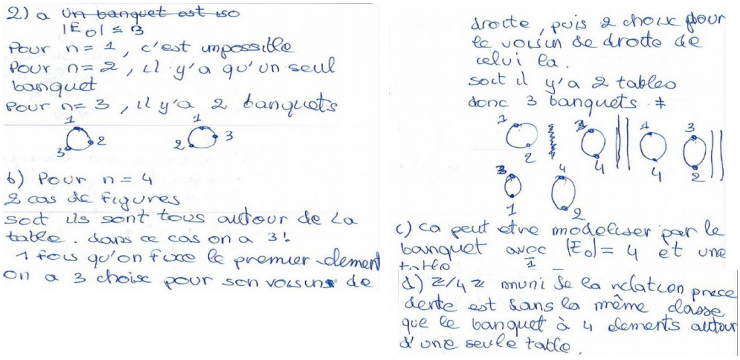
Les mathématiciens définissent ainsi différentes structures mathématiques abstraites. Les théories de ces structures établissent des conséquences logiques des systèmes axiomatiques en s'interdisant tout autre axiome.

On cherche notamment à classifier les différents modèles de l'axiomatique considérée. Cette étude des modèles concrets se fait à "isomorphisme près", puisque la nature particulière des objets ne joue aucun rôle. Un des buts de la théorie est d'établir des théorèmes de structure, c'est-à-dire de décomposer de façon canonique les modèles en un "assemblage" de sous-modèles les plus simples possibles (les briques élémentaires de la théorie).

Le mot structure s'emploie donc dans trois sens différents :
- on parle de la structure de groupe, d'anneau, de corps, *etc.* (ou de banquet) ;
- on parle de la structure abstraite d'un modèle donné (au sein d'une théorie structurale) : il s'agit alors généralement de caractériser la classe d'isomorphisme de ce groupe ;
- on parle de théorème de structure : on vient d'expliquer ce qu'il faut entendre par là.

ANNEXE 3 : EXEMPLES DE PRODUCTIONS D'ÉTUDIANTS (TÂCHE DE CLASSIFICATION)

Groupe 1 :



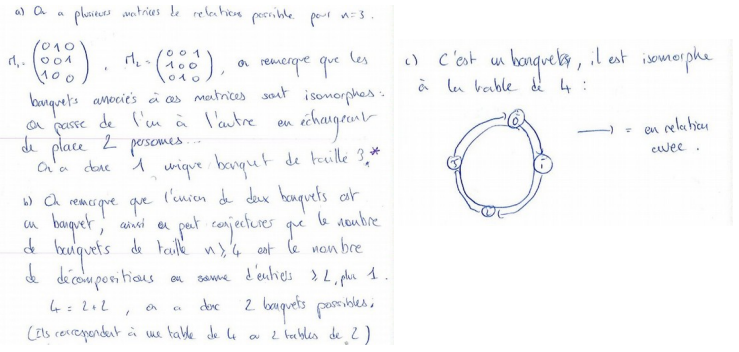
2) a ~~Un banquet est iso~~
$|E_0| \leq 3$
Pour $n = 1$, c'est impossible
Pour $n = 2$, il y'a qu'un seul banquet
Pour $n = 3$, il y'a 2 banquets

b) Pour $n = 4$
2 cas de figures
soit ils sont tous autour de la table. dans ce cas on a 3!
1 fois qu'on fixe le premier element on a 3 choix pour son voisin de droite, puis 2 choix pour le voisin de droite de celui la.
soit il y'a 2 tableo
donc 3 banquets ≠

c) ca peut etre modeliser par le banquet avec $|E_0| = 4$ et une table

d) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ muni de la relation precedente est dans la même classe que le banquet à 4 elements autour d'une seule table.

Groupe 3 :



a) On a plusieurs matrices de relations possible pour $n=3$.

$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on remarque que les banquets associés à ces matrices sont isomorphes : on passe de l'un à l'autre en échangeant de place 2 personnes...
On a donc 1 unique banquet de taille 3.*

b) On remarque que l'union de deux banquets est un banquet, ainsi on peut conjecturer que le nombre de banquets de taille $n \geq 4$ est le nombre de décompositions en somme d'entiers ≥ 2, plus 1.
$4 = 2+2$, on a donc 2 banquets possibles ;
(Ils correspondent à une table de 4 ou 2 tables de 2)

c) C'est un banquet, il est isomorphe à la table de 4 :

Groupe 5 :

2) a) $n = 0$ $\emptyset$ vérifie la théorie

$n = 1$ mais ne pas car doit être en relation ma pas avec lui

$n = 2$ $E_0 = \{x_1, x_2\}$
$x_1 \mathcal{R}_0 x_2$ et $x_2 \mathcal{R}_0 x_1$

$n = 3$ $E_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$
$x_1 \mathcal{R}_0 x_2$ $x_2 \mathcal{R}_0 x_3$
$x_3 \mathcal{R}_0 x_1$

(car si par ex $x_2 \mathcal{R}_0 x_1$ alors $x_2 = x$ à permutations près.

b) $n = 4$ $E_0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

2 cas : - $x_1 \mathcal{R}_0 x_2$ $x_2 \mathcal{R}_0 x_3$ $x_3 \mathcal{R}_0 x_4$
$x_4 \mathcal{R}_0 x_1$

- $x_1 \mathcal{R}_0 x_2$ $x_2 \mathcal{R}_0 x_4$ $x_3 \mathcal{R}_0 x_4$
$x_4 \mathcal{R}_0 x_3$

c) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

$\bar{i} \mathcal{R} \bar{j} \Leftrightarrow \bar{j} = \bar{i} + \bar{1}$

correspond au 1er cas

d) il appartient à la classe des banquets à 1 table ronde qu'"banquet cyclique"

T table ronde : un ensemble d'éléments d'un banquet tels que $\forall x, y \in T$
$\exists$ une chaîne $z_0, \dots, z_p$ d'éléments de T
tels que $x \mathcal{R} z_0$ $z_0 \mathcal{R} z_1$
$z_1 \mathcal{R} z_2$ ...
$z_p \mathcal{R} y$

Groupe 7 :

4a) 2 et 3 était premier B_2 et B_3 sont les seul banquet d'ordre 2 ou/et 3.

$B_2 = \{2 \text{ personnes}, \mathcal{R} \text{ personne à sa droite}\}$.

$B_3 = \{3 \text{ p}\}, R$ //.

b) il y a B_4 et $B_2 \times B_2$.

$\mathcal{R}$ 4 personne d.

4 personnes
$\mathcal{R}$ personne à sa droite

2) a) Banquets de cardinaux $n \leq 3$:

$n = 0$: Banquet trivial $\emptyset$

$n = 1$: Absurde car (R) $\Rightarrow x \mathcal{R} x$.

$n = 2$: Unique (plus petit banquet possédant au moins 1 élément)

$n = 3$: Unique (car les 3 éléments sont en relation entre eux)

b) Banquets de cardinaux 4

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

a, b, c, d 4 éléments

avec $\bar{i} \mathcal{R} \bar{j} \Leftrightarrow \bar{j} = \bar{i} + \bar{1}$

$a \longmapsto b$
$b \longmapsto a$
$c \longmapsto d$
$d \longmapsto c$

c) C'est un groupe cyclique, c'est un banquet d'ordre 4

a) Par exemple, c'est le groupe cyclique tel que :

$\bar{0} \mathcal{R} \bar{1}$
$\bar{1} \mathcal{R} \bar{2}$
$\bar{2} \mathcal{R} \bar{3}$
$\bar{3} \mathcal{R} \bar{0}$

ou sous forme de groupe :

$G = \{1, i, i^2, i^3\}$

$i^4 = 1$

$\forall y \in G, \exists m \in \{0,1,2,3\} / y = i^m$.