HAL open science

Autour de l'approximabilité du problème de dimensionnement robuste des réseaux

Yacine Al-Najjar, Walid Ben-Ameur, Jeremie Leguay

To cite this version:

Yacine Al-Najjar, Walid Ben-Ameur, Jeremie Leguay. Autour de l'approximabilité du problème de dimensionnement robuste des réseaux. ALGOTEL 2020: 22èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications, Sep 2020, Lyon, France. hal-02795754

HAL Id: hal-02795754

https://hal.science/hal-02795754

Submitted on 5 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Autour de l'approximabilité du problème de dimensionnement robuste des réseaux

Yacine Al-Najjar[1,2] et Walid Ben-Ameur [2] et Jérémie Leguay[1]

[1]*Huawei Technologies, France Research Center.*
[2]*Samovar, Telecom SudParis, Institut Polytechnique de Paris, France*

Le problème de dimensionnement robuste d'un réseau consiste à choisir les capacités des liens en minimisant un certain coût linéaire et en prenant en compte l'incertitude de la matrice de trafic. Pour modéliser cette incertitude dûe à la dynamicité de la demande et à la difficulté de la mesurer et de la prédire, nous faisons l'hypothèse que la matrice de trafic varie dans un ensemble polyédrique donné. L'objectif est alors de choisir un vecteur de capacités de coût minimum de telle sorte que chaque matrice de trafic du polyèdre soit routable sur ces capacités. Le routage est supposé être dynamique, c'est à dire qu'il varie avec la matrice de trafic. On suppose également que le routage est fractionnaire. [Che07] a décrit un algorithme polynomial pour résoudre ce problème d'une manière approchée avec un rapport d'approximation de $O(\log n)$. Il a aussi été démontré que ce problème est co-NP-difficile dans les cas orienté [GKK$^+$01] et non orienté [CSOS07]. En utilisant seulement la conjecture $P \neq NP$, nous montrons dans cet article que ce problème est inapproximable avec un rapport d'approximation en dessous d'un certain facteur constant.

Mots-clefs : Approximabilité, dimensionement robuste

1 Introduction

Le dimensionnement des réseaux est une tâche cruciale pour les opérateurs de télécommunications leur permettant de prévoir les ressources nécessaires pour faire face à la demande de services de communication tout en maîtrisant les coûts. Cette tâche devient de plus en plus complexe à cause de la multiplication des sources et des types de trafic créant ainsi de plus en plus d'incertitude. Il s'agit donc de prendre des décisions à moyen et à long terme en tenant compte de cette incertitude grandissante et de la difficulté de mesurer le trafic. Des modèles stochastiques sont parfois utilisés pour modéliser cette incertitude donnant lieu à des problèmes d'optimisation stochastique. Une autre approche qui a été étudiée depuis les années 2000 passe par l'optimisation robuste. Il s'agit ici de considérer un ensemble de scénarios de trafic qui pourrait être infini et de concevoir un réseau qui est capable de faire face à tous ces scénarios. Un premier modèle appelé Hose a été introduit par [DGG$^+$99] et [FST97] où des limites sur le trafic entrant ou/et sortant sont considérées. Un modèle polyédral plus général a été introduit par [BAK03]. Le dimensionnement s'accompagne souvent d'un routage. En supposant que la matrice de trafic varie dans un polytope $\mathcal{D}$, il est possible de dimensionner au moindre coût en supposant que le routage est statique [BAK03, AC03]. Ce dimensionnement se calcule en temps polynomial. Cependant, un routage statique peut induire un dimensionnement plus coûteux. Pour réduire les coûts, on peut chercher à introduire une certaine dynamicité ou adaptabilité. Plusieurs approches ont été proposées dans la littérature telles que le routage multi-statique [BA07] ou le routage affine [OV07, PR13], etc.

L'approche qui permet de minimiser le coût du dimensionnement est cependant celle où l'on accepte que le routage varie d'une manière complètement libre pour chaque matrice de trafic. Nous allons dans la suite considérer ce cas et étudier sa complexité théorique.

Formellement, nous considérons un graphe orienté $G = (V,E)$ et un ensemble de demandes $h \in \mathcal{H}$ associées aux différentes paires de noeuds. Pour modéliser l'incertitude, la matrice de trafic est représentée par un vecteur d variant dans un polytope $\mathcal{D}$. L'objectif est de calculer la capacité u_e à mettre sur chaque lien e en garantissant que tout vecteur de trafic $d \in \mathcal{D}$ soit routable sans dépasser les capacités calculées.

Le coût que nous cherchons à minimiser est un coût linéaire $\sum_{e\in E}\lambda_e u_e$ où λ_e est un coût unitaire. Aucune restriction supplémentaire n'est considérée au niveau du routage (routage complètement dynamique).

Concernant la résolution de ce problème, la bonne nouvelle décrite dans [Che07] (et attribuée à Gupta dans une communication privée de 2004) est que le problème peut être résolu en temps polynomial d'une manière approchée avec un rapport d'approximation d'au plus $O(\log n)$ (où n est le nombre de noeuds). D'un autre coté, il a été prouvé que le problème est co-NP-difficile pour les graphes orientés [GKK+01] et pour les graphes non-orientés [CSOS07]. Notons que le résultat pour les graphes non-orientés induit celui pour les graphes orientés [CSOS07].

Nous allons prouver dans cet article que le problème de *dimensionnement robuste* que l'on vient de décrire est difficile à approcher avec un rapport inférieur à une certaine constante que l'on déterminera. Nous rappelons qu'une solution $x_0 \in X$ constitue une approximation du problème $\min_{x\in X} f(x)$ avec un rapport α si $\min_{x\in X} f(x) \leq f(x_0) \leq \alpha \min_{x\in X} f(x)$.

2 Preuve du résultat d'inapproximabilité

Dans cette section nous allons prouver le resultat d'inapproximabilité mentionné dans l'introduction.

Proposition 1. *Sauf si P = NP, le problème de dimensionnement robuste d'un réseau ne peut être approché avec un rapport d'approximation en dessous d'un certain facteur constant* $\alpha > 1$.

Pour prouver le résultat revendiqué, nous allons utiliser la NP-complétude du problème $(1,\rho)$-*gap-3-SAT*. Étant donnée une formule *3-SAT*, ce problème consiste à décider si φ est satisfaisable ou si $val(\varphi) < \rho$, où $val(\varphi)$ est le ratio maximum de clauses satisfaisables en même temps dans φ. Un résultat classique est que pour un certain $0 < \rho < 1$, sauf si P=NP, aucun algorithme polynomial ne peut résoudre le problème $(1,\rho)$-*gap-3-SAT*. (voir e.g. [AB09]).

Pour une formule *3-SAT* φ avec m clauses, nous allons construire en temps polynomial une instance du problème de dimensionnement robuste d'un réseau de telle sorte que le coût de la solution optimale soit $(4-\rho)m$ si φ est satisfaisable et $3m$ si $val(\varphi) \leq \rho$. Cela prouvera le résultat voulu. En effet, supposons que nous disposions d'un algorithme avec un facteur d'approximation $\alpha < \frac{4-\rho}{3}$ pour ce problème. Nous pourrions alors exécuter l'algorithme sur les instances du problème de dimensionnement robuste de réseau obtenues à partir de la formule *3-SAT* φ.

Notons v_{opt} et v_{apx}, respectivement, le coût de la solution optimale (resp.) approchée. Ces valeurs doivent respecter les relations $v_{opt} \leq v_{apx} \leq \alpha v_{opt}$. Supposons maintenant que $v_{opt} \leq 3m$, nous pouvons alors déduire que $v_{apx} \leq \alpha v_{opt} < (4-\rho)m$. D'un autre coté, si $v_{opt} \geq (4-\rho)m$, alors nous aurions aussi $v_{apx} \geq (4-\rho)m$. Cela montre qu'un tel algorithme d'approximation nous permettrait de résoudre $(1,\rho)$-*gap-3-SAT* en distinguant le cas où $v_{apx} \geq (4-\rho)m$ du cas où $v_{apx} < (4-\rho)m$.

Nous allons maintenant construire l'instance du problème de dimensionnement robuste de réseau mentionnée ci-dessus. Spécifiquement, étant donnée une formule *3-SAT* φ, nous allons construire un graphe G, un ensemble de demandes $\mathcal{H}$, et un polyèdre $\mathcal{D}$ dont le coût de la solution vérifie les relations mentionnées si dessus. Pour ce faire, le graph G contient deux noeuds s,t reliés par des chemins disjoints correspondant chacun aux clauses de la formule φ. Ces chemins sont composés de trois liens successifs. Sur chaque lien il y a une demande ayant les mêmes source et destination que celui-ci. Ces demandes correspondent aux littéraux de chaque clause. Les valeurs de ces demandes varient entre 0 et 1. Le polyèdre des matrices de trafic $\mathcal{D}$ est construit de telle sorte que plusieurs de ces demandes puissent être à 1 en même temps seulement si les littéraux correspondant peuvent être vrais en même temps dans la formule φ.

Pour ce faire, commençons par noter $\mathcal{V}$ l'ensemble des variables de φ et $\mathcal{L}$ l'ensemble des littéraux formés à partir des variables dans $\mathcal{V}$ (c'est à dire soit une variable v ou alors une variable v à laquelle on ajoute un signe de négation : $\neg v$). Nous utilisons aussi les notation $I := \{1,2,...,m\}$ pour représenter l'ensemble des indices correspondant à une clause et $J := \{1,2,3\}$ la position d'un littéral dans chaque clause. Pour chaque $i \in I$, nous créons trois liens successifs $e_{i,j}$ de capacité $c_{i,j} = 1$ et trois demandes $h_{i,j}$ ayant les mêmes extrémités que $e_{i,j}$ pour $j \in J$. Toutes les arêtes $e_{i,1}$ (resp. $e_{i,3}$), pour $i \in I$, ont une extrémité en commun que l'on note s (resp. t). De plus nous ajoutons une demande h_0 ayant de s vers t. Décrivons maintenant le polyèdre $\mathcal{D}$ des vecteurs de demandes. Nous ajoutons des variables auxiliaire $\xi_l \geq 0$ pour

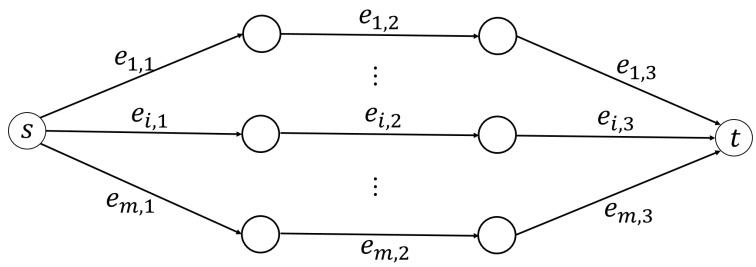

FIGURE 1: Graphe G

chaque littéral $l \in \mathcal{L}$ et la contrainte $\xi_v + \xi_{\neg v} = 1$ pour $v \in \mathcal{V}$. Pour $i \in I, j \in \mathcal{J}$, nous ajoutons la contrainte $d_{h_{i,j}} = \xi_{l_{i,j}}$, où $l_{i,j}$ désigne le littéral qui apparaît dans la i-ème clause en j-ème position (si un littéral $l \in \mathcal{L}$ apparaît dans deux positions i, j et i', j' de la formule 3-SAT alors $l = l_{i,j} = l_{i',j'}$). Nous ajoutons aussi la contrainte $d_{h_0} = (1-\rho)m$ pour la demande h_0. En résumé, l'ensemble $\mathcal{D}$ est défini comme étant l'ensemble de $d \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{H}}$ tel qu'il existe $\xi \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$ vérifiant les équations suivantes :

$$\xi_v + \xi_{\neg v} = 1 \qquad \forall v \in \mathcal{V} \tag{1a}$$

$$d_{h_{i,j}} = \xi_{l_{i,j}} \qquad \forall i \in I, j \in J \tag{1b}$$

$$d_{h_0} = (1-\rho)m \tag{1c}$$

Notons Ξ l'ensemble des $(d,\xi) \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{H}} \times \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$ vérifiant les équations (1). Bien que ξ_l soit à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$, nous pouvons montrer le lemme suivant :

Lemme 1. *Pour tout point extrême $d \in \mathcal{D}$, il existe $\xi \in \{0,1\}^{\mathcal{L}}$ tel que $(d,\xi) \in \Xi$.*

Démonstration. Soit d un point extrême de $\mathcal{D}$ et $\xi \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$ tel que $(d,\xi) \in \Xi$. Supposons par l'absurde que $\xi \notin \{0,1\}^{\mathcal{L}}$, alors il devrait exister un $v \in \mathcal{V}$ tel que $\xi_v \notin \{0,1\}$. Soit $\xi^0, \xi^1 \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{V}}$ le vecteur défini par :

$$\xi_l^0 := \xi_l^1 := \xi_l \qquad \forall l \in \mathcal{L} : l \neq v, l \neq \neg v \tag{2}$$

$$\xi_v^0 := 0, \xi_{\neg v}^0 := 1 \tag{3}$$

$$\xi_v^1 := 1, \xi_{\neg v}^1 := 0. \tag{4}$$

Et soit $d^0, d^1 \in \mathcal{D}$ les vecteurs de demandes correspondant respectivement à ξ^0, ξ^1. Le vecteur de demandes d peut être écrit comme la combinaison convexe $d = \xi_v d^0 + (1-\xi_v) d^1$ contredisant ainsi le fait que d est un point extrême de $\mathcal{D}$. □

Ce lemme est important car pour vérifier qu'un vecteur de capacités u supporte toutes les demandes de $\mathcal{D}$, il suffit de le vérifier seulement pour les points extrêmes de $\mathcal{D}$ (voir e.g. [BAO1]) et par conséquent pour des vecteurs de demandes d correspondants a des assignations de valeurs de vérité aux variables de la formule φ.

Lemme 2. *Si $val(\varphi) < \rho$ alors il suffit de réserver une unité de capacité sur chaque lien de G pour pouvoir router toutes les demandes $d \in \mathcal{D}$. Par conséquent un coût total de $3m$ est suffisant pour supporter toutes les demandes de $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Pour $i \in I, j \in J$ nous pouvons router les demandes $h_{i,j}$ en utilisant seulement les liens $e_{i,j}$. Quelque soit l'assignation de valeurs de vérité pour les variables de φ, pas plus de $(1-\rho)m$ clauses ne peuvent être vraies en même temps. Par conséquent, pour tout les points extrêmes d de $\mathcal{D}$ il existe au moins $(1-\rho)m$ chemins libres (de capacité 1) pour router la demande d_{h_0} en entier. □

Lemme 3. *Si φ est satisfaisable alors le coût de réservation des capacités nécessaires pour router tous les vecteurs de demandes dans $\mathcal{D}$ est supérieur ou égal à $(4-\rho)m$.*

Démonstration. Comme φ est satisfaisable, il existe une assignation des valeurs de vérité rendant toutes les clauses de φ vraies. Par conséquent, en fixant $\xi_l = 1$ si l est vrai et à 0 sinon, nous pouvons obtenir un vecteur de demandes $\overline{d} \in \mathcal{D}$ telle que pour tout $i \in I$ il existe un $j(i) \in J$ tel que $\overline{d}_{h_{i,j}} = 1$. Le flot total que doit traverser la coupe, $C := \{e_{i,j(i)} : i \in I\}$ est

$$\overline{d}_0 + \sum_{i \in I} \overline{d}_{h_{i,j(i)}} = (1-\rho)m + m.$$

Le coût de réservation que l'on doit payer pour les arcs de la coupe C est donc d'au moins $(2-\rho)m$. Pour les $2m$ autres liens $e_{i,j}$ en dehors de C, il existe au moins un vecteur de demandes $d \in \mathcal{D}$ tel que $d_{h_{i,j}} = 1$, nous devons donc réserver au moins une unité de capacité sur chacun de ces liens pour un coût de $2m$. Le coût total est donc d'au moins $(4-\rho)m$. □

3 Conclusion and perspectives

Nous avons pu présenter dans cet article une première borne inférieure du rapport d'approximation du problème de dimensionnement robuste des réseaux. Cette borne inférieure ne se base que sur l'hypothèse standard $P \neq NP$. Eu égard à l'approximabilité du problème avec un rapport de $O(\log n)$, le gap semble encore important entre la borne inférieure et la borne supérieure. Il convient donc d'oeuvrer pour réduire ce gap. Notons qu'un travail des auteurs en cours d'arbitrage prouve que le problème n'est pas approximable avec n'importe quel rapport d'approximation constant. Nous montrons également que sous l'hypothèse de la conjecture ETH (exponential time hypothesis), le problème est difficile à approcher avec un rapport de $\Omega(\frac{\log n}{\log \log n})$.

Références

[AB09] S. Arora and B. Barak. *Computational Complexity : A Modern Approach*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1st edition, 2009.

[AC03] D. Applegate and E. Cohen. Making intra-domain routing robust to changing and uncertain traffic demands : Understanding fundamental tradeoffs. In *Proc. ACM SIGCOMM*, 2003.

[BA07] W. Ben-Ameur. Between fully dynamic routing and robust stable routing. pages 1 – 6, 11 2007.

[BAK03] W. Ben-Ameur and H. Kerivin. New economical virtual private. *Networks Commun. ACM*, 46(6) :69–73, June 2003.

[BAO1] W. Ben-Ameur, A. Ouorou, and M. Żotkiewicz. Robust routing in communication networks. 01 2011.

[Che07] C. Chekuri. Routing and network design with robustness to changing or uncertain traffic demands. *SIGACT News*, 38(3) :106–129, September 2007.

[CSOS07] C. Chekuri, F.B. Shepherd, G. Oriolo, and M.G. Scutellá. Hardness of robust network design. *Networks*, 50(1) :50–54, 2007.

[DGG+99] N. G. Duffield, P. Goyal, A. Greenberg, P. Mishra, K. K. Ramakrishnan, and Jacobus E. van der Merive. A flexible model for resource management in virtual private networks. *SIGCOMM Comput. Commun. Rev.*, 29(4) :95–108, August 1999.

[FST97] J.A. Fingerhut, S. Suri, and J. S. Turner. Designing least-cost nonblocking broadband networks. *Journal of Algorithms*, 24(2) :287 – 309, 1997.

[GKK+01] A. Gupta, J. Kleinberg, A. Kumar, R. Rastogi, and B. Yener. Provisioning a virtual private network : A network design problem for multicommodity flow. In *Proc. ACM STOC*, 2001.

[OV07] A. Ouorou and J. Vial. A model for robust capacity planning for telecommunications networks under demand uncertainty. In *2007 6th International Workshop on Design and Reliable Communication Networks*, pages 1–4, Oct 2007.

[PR13] M. Poss and C. Raack. Affine recourse for the robust network design problem : Between static and dynamic routing. *Networks*, 61 :180–198, 03 2013.