



HAL
open science

Prolégomènes à une définition mathématique de l'échange monétaire

Olivier Rocca

► **To cite this version:**

Olivier Rocca. Prolégomènes à une définition mathématique de l'échange monétaire. 2020. hal-02771385v3

HAL Id: hal-02771385

<https://hal.science/hal-02771385v3>

Preprint submitted on 21 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PROLEGOMENES A UNE DEFINITION MATHEMATIQUE DE L'ÉCHANGE MONÉTAIRE

Pour définir un échange monétaire de façon rigoureuse et opérationnelle, il faut préciser les concepts d'échange et de monnaie. L'échange se définit comme le fait de recevoir, de donner et / ou de rendre des biens (produits ou services). La monnaie se définit comme un instrument permettant de quantifier, d'équilibrer et de dimensionner des échanges qui comporte à minima trois propriétés fondamentales de comptage, de règlement et de mesure de la valeur.

Dans une telle perspective, l'échange monétaire est une action qui consiste à donner, recevoir, et / ou rendre des biens en ayant recours à un instrument monétaire pour le comptage, le règlement et la mesure de la valeur des biens (produits et services).

L'échange monétaire n'est pas une notion unique mais multiple. Sa définition repose une analyse fonctionnelle et instrumentale de la monnaie telle qu'elle figure déjà dans les travaux d'Aristote sur la science économique. Elle se prolonge dans une définition mathématique de ces fonctions qui n'avaient jamais été étudiées sous cet angle plus rigoureux et scientifique. A notre connaissance, il n'existe pas de travaux ayant mis en relation les définitions fonctionnelles de la monnaie avec ses propriétés mathématiques objectives. Cette étude prépare et annonce le remplacement de la notion de fonction (au sens aristotélicien) par la notion de propriété de la monnaie basée sur une définition scientifique plus rigoureuse.¹

Distinction des propriétés monétaires :

En nous basant sur les travaux d'Aristote qui est le fondateur de l'approche fonctionnelle de la monnaie, nous distinguerons trois propriétés monétaires fondamentales : le comptage, le règlement et la mesure. Chacune de ces propriétés de la monnaie permet de réaliser un type d'échange spécifique caractérisé par des propriétés mathématiques.

Distinction des propriétés mathématiques :

En nous basant sur les travaux de l'épistémologie, nous distinguerons trois grandes catégories de relations mathématiques : les relations d'égalité qui ont pour but de produire un nombre identique, les relations d'équivalence qui ont pour but de produire une valeur comparable, les relations de similitude qui ont pour but de produire une grandeur invariable.

Conjonction des propriétés monétaires et des propriétés mathématiques :

Sachant que les nombres se déterminent par le comptage, que les valeurs se déterminent par le calcul et que les grandeurs se déterminent par la mesure, nous dirons que la fonction de comptage a pour but la production de nombre égaux, la fonction de calcul a pour but la

¹ L'enjeu de cette étude est l'apprentissage à un meilleur usage de l'instrument monétaire. Et de facto l'apprentissage à un meilleur échange au moyen de l'instrument monétaire. Ici comme on le voit l'opposition entre valeur d'usage et valeur d'échange disparaît totalement. Ne subsistent plus que des propriétés monétaires auxquelles on associe des propriétés mathématiques distinctes. Plus nous progresserons dans notre connaissance de l'instrument monétaire et de ses propriétés, plus nous saurons l'utiliser et l'échanger intelligemment.

production de valeurs équivalentes, alors que la fonction de mesure a pour but la production de grandeurs similaires. Les nombres, les valeurs et les grandeurs constituent ainsi trois manières différentes de représenter une opération économique. Il est donc logique de les rapporter aux trois propriétés de l'instrument monétaire – comptage, règlement et mesure.²

Les opérations de comptage, de calcul et de mesure sont trois manières différentes de traiter mathématiquement les échanges. Cette définition mathématique des propriétés de la monnaie donne aux échanges un plus haut niveau de précision, de formalisation et de pertinence. Une telle distinction n'a jamais été faite dans les sciences économiques qui se contentent d'affirmer que les échanges monétaires établissent des rapports de prix permettant à la monnaie de remplacer efficacement le troc des objets. Il convient de préciser l'assise de ce raisonnement qui va nous permettre de déduire les propriétés de la monnaie de propriétés mathématiques et non plus de propriétés matérielles basées sur les biens rares et utiles.

Classement des propriétés monétaires selon leurs propriétés mathématiques :

Une manière simple de se repérer avec les trois grandes propriétés monétaires est de partir du nombre d'éléments qu'elles utilisent dans leurs raisonnements mathématiques :

Comptage	–	relation d'égalité	–	0 élément (annulation)
Calcul	–	relation d'équivalence	–	1 élément (réflexivité) 2 éléments (symétrie) 3 éléments (transitivité)
Mesure	–	relation de similitude	–	4 éléments (proportionnalité)

La distinction entre comptage (augmentation, diminution), calcul (comparaison, substitution) et mesure (répétition, mise à l'échelle) est identique à celle que l'on fait entre nombre, valeur et grandeur. Or les nombres, les valeurs et les grandeurs impliquent chacun une définition spécifique de la relation que les sujets développent avec les objets qu'ils manipulent :

- Les nombres sont basés sur une relation d'égalité (dans laquelle deux objets sont indifférenciables dans leurs tailles et leurs quantités).
- Les valeurs sont basées sur une relation d'équivalence (dans laquelle deux objets sont indifférenciables dans leurs structures et leurs fonctions).
- Les grandeurs sont basées sur une relation de similitude (dans laquelle deux objets sont indifférenciables dans toutes leurs échelles).

² On retrouve cette distinction dans les constantes universelles des mathématiques et de la physique. Ainsi pour pi, exp et phi, on peut dire que lorsque ces constantes sont représentées par un nombre, on les comptabilise sous une forme irrationnelle toujours changeante, donc infinie et imprévisible ; lorsque ces constantes sont représentées par une quantité, on les calcule sous la forme de séries de nombres, dont les séquences sont infinies mais toujours prévisibles, et lorsque ces constantes sont représentées par une mesure, on les symbolise comme une formule algébrique qui est toujours identique, donc finie et prévisible.

Il existe vraisemblablement une corrélation entre les fonctions de comptage, de calcul et de mesure, au sens où les progrès de l'une de ces fonctions est toujours indissociable du progrès des autres fonctions. Ainsi par exemple un progrès dans la fonction de comptage se traduira nécessairement par un progrès dans la fonction de calcul et par un progrès dans la fonction de mesure. De tels progrès se matérialiseront à travers de nouveaux instruments de décision, de paiement ou de comparaison. Cela témoigne de l'unicité et de la très grande cohérence de l'instrument monétaire dès lors qu'on le définit de façon abstraite, complète et rigoureuse.

Classement des propriétés monétaires selon leur puissance opérationnelle :

Si l'on essaie maintenant de définir les propriétés monétaires en prenant le point de vue d'un observateur, on aboutit à des définitions complémentaires et très intéressantes :

- Egalité : deux objets sont égaux pour un observateur O s'il ne peut pas les discerner au niveau de leur quantité, de leur nombre ou de leur taille.

On dira alors que ces deux objets sont exactement pareils en nombre et en apparence.

- Equivalence : deux objets sont équivalents pour un observateur O s'il ne peut pas les discerner au niveau de leur valeur, de leur structure ou de leur utilité.

On dira alors que ces deux objets sont interchangeable et qu'ils ont la même utilité.

- Similitude : deux objets sont similaires pour un observateur O s'il ne peut pas les discerner au niveau leur échelle ou de certaines propriétés significatives.

On dira alors que ces deux objets sont comparables sur certaines de leurs propriétés d'intérêt ou d'intention s'ils sont indifférents au facteur d'échelle.

On constate ainsi que :

- L'égalité s'appuie sur la perception.

- L'équivalence s'appuie sur la perception + la réflexion sur la valeur / l'expérience utilisateur.

- La similitude s'appuie sur la perception + la réflexion sur la valeur / l'expérience utilisateur + un objectif / une propriété d'intérêt ou d'intention / une scalabilité.

La fonction de mesure contient la fonction de calcul et la fonction de comptage. La fonction de calcul contient la fonction de comptage. La fonction de comptage se contient elle-même. Cela signifie donc que la fonction de mesure est la fonction monétaire la plus puissante car elle contient ses propres propriétés et les propriétés de toutes les autres fonctions. La fonction de calcul est d'une puissance intermédiaire car elle ne contient que ses propres propriétés et celles du comptage. La fonction de comptage est de faible puissance car elle ne contient que ses propres propriétés. De telles conclusions permettent d'établir une hiérarchie de puissance et donc de préférence dans les choix que nous faisons entre les fonctions monétaires.

Valeur absolue et relative des propriétés monétaires dans les échanges :

Pour que l'on puisse parler d'un échange monétaire, il est nécessaire de disposer d'une propriété de comptage, d'une propriété de règlement et d'une propriété de mesure. Autrement dit, un échange correctement paramétré doit comporter une fonction d'égalité, une fonction d'équivalence et une fonction de similitude. Il s'agit d'une condition cumulative et non pas

facultative. C'est à cette condition absolue que l'on dispose d'une définition complète de l'échange monétaire et de ses instruments. Il n'est pas donc pas question d'assimiler ou de confondre l'échange avec la seule fonction de règlement comme on le voit dans les sciences économiques. Beaucoup d'erreurs ont été commises à ce sujet et cela explique pourquoi dans la plupart du temps nous disposons d'instruments monétaires incomplets et peu satisfaisants. Le fait de savoir relier les propriétés de comptage, de règlement et de comparaison à leurs propriétés mathématiques d'égalité, d'équivalence et de similitude va nous permettre de les analyser en profondeur et d'en dégager les structures ainsi que les utilisations optimales.

Au-delà des conditions cumulatives de l'échange monétaire, il convient d'observer que chaque propriété est un mode d'échange en soi. Et c'est ce point précisément qui confère à l'instrument monétaire toute sa complexité et son incroyable richesse. La propriété de comptage est un mode d'échange monétaire, la propriété de règlement est un mode d'échange monétaire et la propriété de mesure est également un mode d'échange monétaire spécifique.³ Les définitions mathématiques de ces trois propriétés monétaires vont nous permettre de les décomposer afin de distinguer précisément les différentes formes d'échanges dont elles sont la source. Nous sommes ici très loin de la définition grossière des échanges comme le mouvement réciproque entre deux objets ou deux biens de même valeur. ... Cette complexité de l'échange monétaire est d'ailleurs attestée par de nombreux exemples d'hommes et de femmes inventifs qui ont dû repousser les limites des échanges physiques afin de résoudre certains problèmes que leurs posaient les nécessités de leurs situations particulières.

A. L'égalité :

En mathématiques, l'égalité est une relation binaire entre objets de même forme (ou d'un même ensemble) signifiant que ces objets sont *identiques*, c'est-à-dire que lorsqu'on procède à la soustraction de l'un par l'autre, cela les annule totalement et il ne reste rien. L'annulation nous apporte une définition opérationnelle de l'égalité qui est fort intéressante pour de nombreuses questions touchant à la gestion des dettes et à la comptabilité des partages.

Une égalité est une proposition pouvant s'écrire à l'aide du signe égal « = », séparant deux expressions mathématiques de même nature (nombres, vecteurs, fonctions, ensembles...) ; la proposition contraire s'écrit à l'aide du symbole de différence « ≠ ». Une proposition d'égalité, ou d'inégalité, peut être vraie ou fautive : en ce sens, elle a aussi une valeur logique dite *valeur de vérité*. Une égalité peut ainsi apparaître comme une affirmation, une définition de notation ou encore comme une équation. Dans un ensemble, la relation d'égalité est la seule relation binaire à la fois réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.

Une autre définition de l'égalité va nous apporter tout le potentiel d'exploitation opérationnelle faisant le lien entre les mathématiques et les fonctions de la monnaie : *L'égalité est la relation entre deux choses ne présentant aucune différence de quantité, de nombre, de taille, de grandeur ni de qualité*. En application stricte de cette définition, une égalité capable de réaliser simultanément ces cinq propriétés est rarissime. Dans les échanges économiques, on s'aperçoit même que c'est en développant une inégalité entre ces cinq propriétés que l'on obtient les résultats économiques les plus intéressants et les plus importants. Les exemples qui suivent vont analyser quelques cas intéressants pour en faire ressortir toute la richesse.

- Egalité de quantité sans égalité de nombre : les états comptiques

³ Ainsi nous pourrions dire par exemple que le marché agrège des similitudes individuelles pour créer des fonctions de règlement. Mais il existe de nombreuses autres combinaisons possibles entre les fonctions.

L'instrument de compte est idéal pour toutes les opérations économiques basées sur la recherche de l'égalité entre les valeurs, de l'équilibre des comptes, des calculs de soldes et de ratios. En économie, l'unité de compte est une unité standardisée qui permet de mesurer la valeur des échanges et des stocks de biens et services ou d'actifs. Pendant longtemps on s'est servi d'un bien comme unité de compte pour exprimer les prix, et c'est ce bien qui faisait office de monnaie. Mais aujourd'hui avec la non-convertibilité des monnaies nationales, les unités de compte n'existent plus que comme de simples écritures comptables. On parle de calcul économique quand une évaluation est faite à priori et de comptabilité quand elle est faite à posteriori. Il en découle une conception de la richesse basée sur l'accumulation des unités de compte perçues comme autant de pouvoir d'achat liés à un revenu ou un capital.

On pourrait penser au regard des seules propriétés mathématiques qu'une relation d'égalité est strictement la même chose qu'une relation d'équivalence, mais rapporté aux questions des fonctions monétaires, nous allons voir qu'il n'en est rien. En effet, l'égalité mathématique entre différentes valeurs n'a de signification qu'au regard des choix d'affectations de ces valeurs dans les différents postes comptables. 10.000 euros n'a pas le même sens selon qu'on l'inscrit dans un compte client (créance), dans un compte fournisseur (dette), dans un fonds propre (actif) ou dans un capital social (passif)... Passer 100.000 euros de dépenses d'investissement en comptabilité n'a pas le même sens ni la même valeur selon que l'on choisit de porter cette somme en poste de charge ou en poste d'immobilisation amortissable sur 5 ans... Ce n'est donc pas tant la quantité des valeurs que la position de chacune de ces valeurs dans la norme des postes comptables et la qualification qui en découle qui nous importent ici principalement.

Il y a là quelque chose de très important qui conditionne la logique de tous les échanges, au sens où tous les échanges se fondent sur des mouvements qui trouvent leur point de départ et d'arrivée dans les différents postes comptables et pas seulement dans les valeurs. Nous qualifions d'opérations « comptiques » sur les valeurs toutes les opérations par lesquelles on va opérer un regroupement de différentes valeurs sur certains postes comptables, un transfert de différentes valeurs sur certains postes comptables, et une interprétation de différentes valeurs au regard de leur positionnement dans certains postes comptables. Beaucoup de personnes ont une conception passive du rapport de la quantité au nombre et se cantonnent à des opérations « comptables » dans lesquelles les valeurs ne sont appréhendées qu'au regard de la nécessité de réaliser un équilibre des comptes à la clôture d'un exercice, que cet équilibre prenne la forme d'une balance crédit / débit, d'une balance actif / passif ou d'une balance charges / produits. Tant que le nombre est traité comme une quantité, on reste dans une approche « comptable » des questions de gestion de la valeur. Mais dès que le nombre est traité différemment de la quantité et comme une source de création de valeur et de richesse opérationnelle, alors nous entrons de plein pied dans ce que nous appelons le « comptique ».

L'enjeu ici ne porte pas tant sur un échange de valeur à valeur que sur un échange de compte à compte et même plus spécifiquement de poste comptable à poste comptable... puisque chaque agent économique dispose potentiellement d'autant de comptes qu'il a de postes comptables. Quand on sait qu'à notre époque, toute la création monétaire qui alimente les échanges de produits et services dans l'économie mondiale ne repose que sur l'utilisation du passif comptable des banques (poste comptable client), on perçoit combien un tel système est limitatif et contraire aux principes de la liberté et de l'égalité du développement économique, tant par la médiation forcée de l'opérateur bancaire que par l'exploitation inexistante des ressources qu'offrent les différents postes comptables. La réalisation d'une économie monétaire distribuée passe par la création de nouveaux droits d'écriture qui permettraient de doter les agents de capacités monétaires nouvelles et beaucoup plus importantes. Son objectif

sera de permettre à des opérateurs bancaires et non bancaires de relier entre eux leurs différents postes comptables afin de démultiplier leurs ressources informationnelles en terme de sens et de valeur en procédant à des règlements directs de poste comptable à poste comptable au moyen de systèmes de paiement beaucoup plus analytiques et spécialisés.

- Egalité de quantité sans égalité de qualité : les états sémantiques

L'expression monétaire de la valeur réduit toute chose à un chiffre, son prix. Mais ce faisant, on perd totalement de vue les distinctions entre les choses. Il en résulte une disparition de la notion de qualité à laquelle on substitue une quantité monétaire. Un saumon à 30 euros peut aussi bien se révéler être un saumon industriel bourré de pesticides qu'un saumon élevé dans le respect des règles de l'agriculture biologique. Une créance à 25.000 euros peut aussi bien concerner une dette liée à l'achat d'une voiture qu'une dette liée au commerce de la drogue. Un produit intérieur brut national à plusieurs milliers de milliards de dollars recouvre toutes sortes de prestations ayant donné lieu à facturation, indépendamment de la nature des prestations réalisées. C'est le sujet central du discours du 18 mars 1968 de Bob Kennedy :

« Notre PIB prend en compte, dans ses calculs, la pollution de l'air, la publicité pour le tabac et les courses des ambulances qui ramassent les blessés sur nos routes. Il comptabilise les systèmes de sécurité que nous installons pour protéger nos habitations et le coût des prisons où nous enfermons ceux qui réussissent à les forcer. Il intègre la destruction de nos forêts de séquoias ainsi que leur remplacement par un urbanisme tentaculaire et chaotique. Il comprend la production du napalm, des armes nucléaires et des voitures blindées de la police destinées à réprimer des émeutes dans nos villes. Il comptabilise la fabrication du fusil Whitman et du couteau Speck, ainsi que les programmes de télévision qui glorifient la violence dans le but de vendre les jouets correspondants à nos enfants. En revanche, le PIB ne tient pas compte de la santé de nos enfants, de la qualité de leur instruction, ni de la gaieté de leurs jeux, ni de leur avenir. Il ne mesure pas la beauté de notre poésie ou la solidité de nos mariages. Il ne songe pas à évaluer la qualité de nos débats politiques ou l'intégrité de nos représentants. Il ne prend pas en considération notre courage, notre sagesse ou notre culture. Il ne dit rien de notre sens de la compassion ou du dévouement envers notre pays. En un mot, le PIB mesure tout, sauf ce qui fait que la vie vaut la peine d'être vécue ».

Au-delà des objectifs quantitatifs d'achat et de vente, il convient de redonner du sens à notre économie. Car qui dit « sens » dit également « valeur », les deux termes étant indissociables et synonymes. Comme le montre l'extrait du discours de Bob Kennedy, il est très rare que les échanges monétaires se fassent à quantité et à qualité égales. Pour qu'une telle chose puisse arriver, il est nécessaire d'introduire des labels qui vont modifier la manière de faire des échanges. Ainsi, un label « aquaculture biologique » permettra au saumon de Norvège de retrouver le chemin du respect de l'environnement. Un label « investissement éthique » sélectionnera la nature des activités dans lesquelles nous voulons procéder à des investissements. Un label « bonheur national brut » (BNB) permettra à un pays comme le Bhoutan de définir un ensemble de critères fondamentaux – croissance et développement économique, conservation et promotion de la culture, sauvegarde de l'environnement et utilisation durable des ressources, bonne gouvernance responsable – afin de faire évoluer l'ensemble des activités nationales vers un objectif plus qualitatif que le simple PIB.⁴

⁴ Le sujet dont il est ici question n'est pas la position de la valeur comme dans les états comptiques, mais plutôt celui de son sens entendu ici comme le mouvement de la valeur. Cela ouvre aux questions de l'orientation, du déplacement et de la direction des flux. D'où vient l'argent ? Où va-t-il ? Comment l'utilise-t-on ? Comment le comptabilise-t-on ? Voilà autant de questions relatives au sens. Signe sans signification, l'argent n'en a pas moins

- Egalité de grandeur sans égalité de taille : les états économiques

Par grandeur nous désignons tout phénomène pouvant faire l'objet d'un calcul ou d'une mesure et dont les différentes valeurs possibles s'expriment à l'aide d'un nombre réel souvent accompagné d'une unité de mesure. Par exemple le chiffre d'affaires d'une entreprise calculé et mesuré en euros. Par taille nous désignons l'importance d'un phénomène que l'on va déterminer en évaluant ses caractéristiques par leur nombre. Par exemple la taille d'une entreprise calculée par le nombre de ses employés, de ses immeubles ou de ses stocks.

Dans l'économie classique et plus particulièrement l'économie d'échelle, la performance financière d'une entreprise (dont sa grandeur) était toujours liée à sa taille. Les entreprises étaient donc incitées à croître sans cesse afin d'acquérir une taille qui leur permettrait de devenir leader sur un marché. Avec la théorie du coût marginal, les entreprises ont cherché à grossir afin de réduire leur coût unitaire et réaliser ainsi d'importantes économies d'échelle. Les très grandes multinationales comme GE, le groupe ACCOR, Renault... etc sont de très bons exemples de cette approche qui se fonde essentiellement sur une approche capitalistique.

Depuis une vingtaine d'année on voit apparaître un nouveau modèle économique que l'on appelle la scalabilité. Terme informatique transposé au monde du business, la scalabilité désigne la capacité d'une entreprise à améliorer sa rentabilité lorsque son activité passe à l'échelle supérieure. Cela est rendu possible par un modèle économique qui permet à une entreprise de « passer de 0 à 1, de 1 à 10 et de 10 à 1000 ou même à 1 million sans modifier fondamentalement sa manière de fonctionner ni sa structure ». Economiquement, cela signifie qu'à une croissance exponentielle des revenus ne correspond qu'un accroissement incrémental des ressources. Une entreprise scalable a donc le potentiel d'atteindre des résultats comparables à ceux d'une multinationale sans forcément en adopter la taille.

Cette décorrélation entre la taille de l'entreprise et sa grandeur économique est bien ce qui différencie l'économie d'échelle de la scalabilité. Là où la première a traditionnellement poussé les entreprises à grossir afin de réduire leurs coûts unitaires et de maximiser leur profitabilité, la seconde assure rendements croissants et profitabilité quel que soit le niveau d'activité (à condition d'avoir passé le point mort). Une fois un logiciel développé, par exemple, il peut potentiellement être distribué à un nombre infini d'utilisateurs sans coûts supplémentaires. Sans posséder un seul hôtel dans son capital, AIRB&B vend des prestations de logement chez des particuliers et réalise un chiffre d'affaire deux fois supérieur au groupe ACCOR qui possède plus de 5000 hôtels dans le monde. Plus qu'un simple résultat, la scalabilité est un processus de production endogène à l'entreprise et à son business model.

- Egalité de quantité sans égalité de grandeur : les états physiques

un sens. Même aux plus hauts niveaux d'abstraction, l'argent a toujours un sens. Développer le sens de l'argent, ce n'est pas tant questionner sa position que son mouvement. L'échange de biens est un acte de communication symbolique qui se fait par une représentation sémantique des demandes, des besoins et des désirs que chaque acteur est en mesure d'exprimer. Il y a là quelque chose de très important qui justifie la transformation de l'économie depuis plusieurs années et le passage d'une économie de l'offre (très quantitative et statistique) vers une économie à la demande (beaucoup plus sémantique et basée sur la mesure des préférences).

L'expérience nous montre que la comptabilité économique et financière repose exclusivement sur un système additif. La pratique historique fonde une telle approche : le comptage des biens, que cela soit des moutons, des maisons, des voitures, est essentiellement additif.

Dans un tel système de comptage des richesses, plus d'argent est considéré comme toujours préférable à moins d'argent. Le gain est toujours préférable à la perte, le plus au moins... Le bénéfice est toujours égal à la différence entre les recettes et les dépenses. Ce système additif est le fondement du calcul rationnel des préférences tel qu'on le retrouve dans la théorie du choix social, dans l'économie comportementale ou la théorie de la dominance stochastique. Le classement ordinal des quantités de vote ou d'argent est un système additif basé sur le cumul.

Jusqu'à 20, la langue elle-même est additive qui donne un nom différent à chaque nombre. De 20 à 100 la langue est pourrait-on dire partiellement additive avec quelques nouveaux noms. Par contre, passé 100 nous basculons dans le monde de la multiplication : il n'y a plus de mots spécifiques pour dire 200 ou 300. Nous disons simplement « deux cent » ou « trois cent ». Et les nouveaux mots se mettent alors à apparaître à un rythme multiplicatif : mille, million, milliard, billion... Chacun de ces termes est mille fois plus grand que le précédent. Cette transition dans le vocabulaire de comptage passe inaperçue lorsqu'on apprend les nombres à l'école. Pourtant elle marque profondément notre façon de penser et de percevoir.⁵

Lorsque nous comparons deux valeurs, quel que soit le contexte dans lequel cette comparaison survient, c'est la plupart du temps multiplicativement que nous allons réfléchir. Si votre supermarché augmente de 8 euros un produit qui coûte 200 euros, sans doute la hausse vous contrariera-t-elle, mais bien moins que si ces mêmes 8 euros sont ajoutés à un produit de 2 euros. Dans le second cas le prix passe à 10 euros se retrouvant multiplié par 5 ! Ce n'est plus une contrariété mais une escroquerie. Pourtant l'augmentation est la même quand on la considère que comme une quantité et pas comme une grandeur. Ce mode de comparaison n'est pas qu'intellectuel. Il n'est pas propre à la pensée, il s'approprie également notre corps et modèle la plupart des interactions que nous avons avec le monde. Les sens par lesquels nous percevons notre environnement semblent eux aussi réglés multiplicativement.

L'idée de base est simple mais redoutablement puissante : réfléchir en ordre de valeur relative, c'est réfléchir avec des multiplications plutôt que des additions, et réfléchir en ordre de valeur absolue, c'est réfléchir avec des additions plutôt que des multiplications. Imaginons un jeu dans lequel on demande à deux équipes d'évaluer la distance de la terre à la lune. La première équipe répond 800.000 km, et la seconde équipe répond 10 km. Cette seconde réponse peut sembler absurde quand on sait que le plus haut sommet de la terre, l'Everest, culmine à 9 km. Pourtant, le résultat du jeu est déconcertant. Dans la mesure où la lune se situe en réalité à 384.000 km de la terre, une simple soustraction permet de vérifier que l'équipe qui a dit 800.000 km s'est trompée de 416.000 km, alors que l'équipe qui a dit 10 km s'est trompée de 383.990 km. Lorsqu'on raisonne additivement, l'équipe qui a fait la réponse la plus aberrante

⁵ En réalité, l'univers dans lequel nous vivons est à 99,999999999999% multiplicatif. Que cela soit au niveau de l'ensemble de tous les nombres ou au niveau de l'ensemble de tous les mondes. Comment cela se fait-il alors que l'homme soit si attaché au mode de pensée additif ? Peut-être est-il plus attentif aux objets qu'aux rapports entre les objets. Peut-être raisonne-t-il plus en valeur absolue qu'en valeur relative plus abstraite. Peut-être n'a-t-il pas suffisamment confiance dans son sens des nombres. Quand on compare deux nombres 2 et 10, on peut le faire de deux façons différentes : additivement, combien faut-il ajouter à 2 pour obtenir 10 ? Alors la réponse est 8. Multiplicativement : Par combien faut-il multiplier 2 pour obtenir 10 ? Alors la réponse est 5. L'écart additif entre deux nombres s'obtient par soustraction : $10 - 2 = 8$. L'écart multiplicatif s'obtient par division : $10 / 2 = 5$. Dans le deuxième cas nous avons un rapport : 2 est 5 fois plus petit que 10.

est gagnante. Toutefois, si on raisonne multiplicativement, on voit que l'équipe qui a répondu 800.000 km a fourni une estimation 2,08 fois trop grande, alors que l'équipe qui a répondu 10 km a fourni une estimation 38.400 fois trop petite. En adoptant un tel point de vue, on produit un ordre de grandeur qui est bien plus conforme à notre perception spontanée de la question.

B. L'équivalence : instrument de substitution

Afin de présenter de façon intéressante la notion d'équivalence, nous allons proposer ici une définition basée sur la comparaison entre une équivalence et une égalité et faisant bien ressortir la différence importante qui existe entre ces deux notions :

- Egal est défini comme étant le même en quantité, en nombre, en taille, en niveau, en couleur, en tonalité ou en degré.
- Equivalent est égal en valeur, en somme, en produit, en différence, en quotient, en fonction, en structure ou en sens.

Pour comprendre la différence entre ces deux notions, nous citerons cet exemple mathématique connu selon lequel 5×3 est égal à $5+5+5$ et à $3+3+3+3+3$ mais 5×3 n'est pas équivalent à $5+5+5$. En effet, une multiplication est une opération qui consiste à ajouter un entier à lui-même plusieurs fois. Ainsi multiplier 5 par 3 c'est calculer $5+5+5$ et ce n'est pas calculer $3+3+3+3+3$. Si nous avons voulu faire cette dernière opération alors nous aurions dû écrire la multiplication 3×5 . Toutes les multiplications se structurent de la même façon avec le premier chiffre devant être multiplié qui s'appelle le multiplicande et le deuxième chiffre multiplicateur qui est appelé le multiplicateur. En respect de cette règle de construction des multiplications, on comprend pourquoi 5×3 n'est pas équivalent à 3×5 même si le résultat de ces deux opérations est le même : 15. En réalité, bien que ces deux opérations arrivent au même résultat, elles n'ont pas la même signification. Pour l'expliquer par un exemple on peut dire que 3 grappes de 5 bananes est différent de 5 grappes de 3 bananes. Leurs structures et leurs processus sont différents. Cette distinction entre égalité et équivalence est une clé de compréhension importante pour la construction des programmes et des algorithmes.

Un autre point important à distinguer est le suivant : l'égalité est une relation pour définir l'avoir alors que l'équivalence est une relation pour définir l'être. « Ces deux voitures ont une couleur jaune » signifie que ces deux voitures sont identiques (égales) du point de vue de leur couleur et que je peux les classer dans un ensemble qui ne contient que des voitures jaunes. « Paul est comme Henri, l'un et l'autre sont des hommes jaloux » signifie que ces deux personnes sont comparables (équivalentes) sur le plan de leur comportement et que je peux les faire rentrer tous les deux dans l'ensemble des hommes jaloux. En fait une égalité repose sur une métonymie, ainsi « les bateaux ont des mats » signifie sur le plan métonymique que je peux appeler « mats » les « bateaux » et prendre la partie pour le tout ou le mot pour la chose. Une équivalence pour sa part repose sur une métaphore, ainsi « toutes ces routes qui serpentent » utilise une comparaison implicite, l'image visuelle et sonore d'un serpent (un signifiant) pour produire un concept de route avec un sens plus fort (un signifié). Il nous paraît essentiel de bien comprendre de telles opérations quand on veut travailler sur un système économique ou social, notamment en vue de l'améliorer ou de le structurer. Cela permettra notamment de comprendre que les opérateurs arithmétiques permettent de traiter des questions de l'être tout aussi bien que des questions de l'avoir, et nous permettra de choisir des instruments mathématiques et sémantiques en rapport avec ce que nous désirons.⁶

⁶ Les plaintes que l'on entend si souvent sur le déclin des structures, des valeurs, du sens et de la conscience ne proviendraient-ils pas d'une incapacité à utiliser l'instrument monétaire pour la finalité qui est la sienne, à savoir

Les mathématiques nous enseignent qu'une « relation d'équivalence » est une relation qui doit réunir trois critères de façon cumulative : elle doit être « réflexive », « symétrique » et « transitive ». Ces trois critères devraient donc être considérés comme les trois axiomes de base à réunir pour définir les « systèmes d'échanges » économiques, monétaires et sociaux.

- La « réflexivité » ou « identité » définit la relation fondamentale d'un élément avec lui-même. En général, une relation « est égal à » est réflexive, tandis qu'une relation « n'est pas égal à » ne l'est pas. Dans un cas assez simple d'identification d'une personne, la relation « est un humain » est réflexive : chaque individu est un humain, et chaque humain est un individu. Dans un ensemble de personnes, la relation « est enfant de » est antiréflexive : personne n'est son propre enfant. La réflexivité perçue comme l'identité unique d'une chose est le fondement de la réflexion sur la valeur. La réflexivité d'une chose est déterminante de son unicité mais également de son intériorité ; dont on perçoit le signe, la marque, la forme, le style, le mouvement unique, singulier et incomparable dans le monde extérieur. Sur le plan programmatique, les systèmes réflexifs sont caractérisés par deux techniques : l'introspection qui est la capacité d'un programme à examiner son propre état, et l'intercession qui est la capacité d'un programme à modifier son propre état d'exécution ou altérer sa propre interprétation ou signification. Parallèlement aux concepts d'introspection et d'intercession, il existe deux types de réflexion : la réflexion structurelle (qui concerne surtout le code du programme) et la réflexion comportementale (qui concerne surtout l'environnement du programme). De nombreux langages sont réflexifs et donc potentiellement intelligents.

- La « symétrie » ou « commutativité » définit la relation fondamentale d'un élément avec un autre élément. D'une manière générale, un système est symétrique quand il peut permuter (ou échanger) ses éléments en laissant sa forme inchangée. Le concept d'auto-morphisme permet de préciser cette définition. Un échange monétaire par exemple est symétrique quand il permet de comparer et d'échanger toutes les choses par rapport à un nombre. Par exemple si mon coq vaut dix euros et que ton canard vaut dix euros, alors mon coq et ton canard deviennent des éléments symétriques par le biais de leur représentation chiffrée. Chez Aristote, la justice commutative est la justice « particulière » qui règle les échanges selon le principe de l'égalité arithmétique entre des individus (ou des agents) considérés eux-mêmes comme égaux. La justice commutative ignore les différences entre les individus et considère qu'un échange est juste lorsqu'on attribue à chacun la même part. Les systèmes de réciprocité, de transaction et de compensation se fondent sur le principe de l'équilibre des comptes qui trouve également son fondement dans une égalité arithmétique régie par la commutativité. Le système de réciprocité est un système binaire ou bi-univoque. Mathématiquement c'est un système qui comporte toujours deux acteurs : acheteur et vendeur, créancier et débiteur... et c'est cette structure binaire que l'on retrouve dans tous les systèmes financiers et comptables.

- La « transitivité » ou « relation d'ordre » définit la relation fondamentale des éléments avec un troisième élément appelé « le tiers » ou « le commun dénominateur ». D'une façon générale, un échange est considéré comme juste lorsque chaque terme est échangeable contre un même troisième, selon le principe que deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles. En pratique, beaucoup de personnes considèrent que c'est la monnaie qui permet de dépasser la simple comparaison d'un objet avec son autre (le troc) pour permettre la confrontation de tous avec une image abstraite de la valeur qui du coup sert de tiers. La monnaie serait donc la fonction numérique qui permet de projeter l'ensemble des objets et des

être une fonction d'équivalence, de substitution, de remplacement, de déplacement, de correspondance, de traduction, de représentation, de transfert, beaucoup plus qu'une simple fonction d'égalité ?

activités humaines nommables dans l'ensemble des nombres censés les représenter. A chaque x (objet, projet ou activité) correspond un $f(x)$, un nombre ou un ensemble de nombres ; ce que l'on appelle un vecteur. Un vecteur se définit non pas comme un prix absolu mais comme un prix relatif ou nombre rationnel susceptible de comparer, de questionner et de poser des rapports de valeurs. Même s'il peut paraître simple de poser que l'argent est une fonction numérique qui à chaque acte ou objet associe un nombre, on s'aperçoit qu'à chaque objet on peut associer un vecteur voire un espace (celui du déplacement des objets). Du coup l'argent est un champ de vecteurs ou de fibres ou de lignes implantés dans le social, dans l'ensemble des actes ou objets échangés. Cette structure générale rend possible toutes sortes de singularités, de substitutions, de significations. C'est de cette définition de l'argent comme fonction (d'énumération de valeurs) que découle le fait qu'il a la fonction d'un « langage ».⁷

On aboutit ainsi à un paradoxe : quand on utilise la monnaie pour acheter un bien en fonction d'un prix, il ne s'agit pas d'un échange mais d'un acte d'achat. Cela explique notamment que l'on puisse revendre le bien plus cher ou moins cher que ce qu'on l'a acheté. Pour qu'il y ait réellement un échange, il faudrait que chaque agent équilibre son achat par un autre achat, ou sa vente par une autre vente du même montant. C'est à cette seule condition que l'on pourrait avoir une opération d'échange qui regroupe les trois propriétés de l'identité, de la symétrie bilatérale et de la transitivité. Cette opération d'échange ou de double vente serait une opération structurée et totalement juste sur le plan de la répartition de la richesse entre les agents. Le seul problème est que pour réaliser un tel échange, la monnaie n'est pas nécessaire ! En effet il suffira que les agents s'accordent sur un prix commun pour pouvoir procéder à un échange de produits, de services, de créances ou de dettes de même valeur. **On arrive à une étrange contradiction : la monnaie n'est pas un instrument d'échange, mais seulement un instrument d'achat. Et quand l'achat vient à être répété en double, triple, quadruple sur la base d'un même montant, alors la monnaie n'a plus aucune utilité.**

En fait la monnaie n'a de sens que pour régler les soldes des opérations d'échange et de partage que l'on n'arrive pas à liquider ou à équilibrer. Si le solde est positif c'est un avoir ou une créance, et si le solde est négatif c'est une dette. Cette question du règlement des soldes (des dettes et des créances) est d'une grande importance pour clore un exercice en déterminant les grandeurs monétaires assignables à chacun et ouvrir un nouvel exercice qui permettra de relancer de nouvelles opérations pour le futur. Ce que l'on comprend dans cette question de l'ouverture / fermeture déterminante de l'accès aux moyens de paiement, c'est que la monnaie ne se constitue pas comme une égalité ($=$) ni comme une équivalence (\Leftrightarrow) mais comme une différence ($/=$), ou plus exactement comme l'écriture d'une différence. En tant qu'information (ou observation), elle est une différence qui produit une différence. Que l'on parle de différences de temps, d'espaces, de qualités, de quantités, de talents, de capacités, de potentialités, de poids, de longueurs, de couleurs, de saveurs... la monnaie se pose comme la mesure et l'expression quantifiée de toutes les différences de valeurs. C'est par elle que les différences sont articulées, mises en rapport, évaluées, comparées, transférées.

⁷ Aujourd'hui, grâce aux ordinateurs et aux langages numériques, l'usage de l'argent et ses mouvements deviennent un pur jeu d'information. Par là, la fonction monétaire numérique rejoint la fonction informationnelle car l'écriture de tout message n'exige plus que deux chiffres, 0 et 1 (langage digital équivalent à oui et non bien combinés). Et si beaucoup de choses peuvent s'exprimer en terme d'argent, reste que l'argent, comme langage numérique, devient de plus en plus une approche technique des valeurs. Cela révoltera peut-être ceux qui craignent de voir l'homme se réduire à de la technique avec l'image d'un système d'échange automatisé et potentiellement incontrôlable. Mais cela réjouira ceux qui comprennent qu'une telle approche est intimement liée aux progrès que nos sociétés réalisent dans le développement de tous les langages, que ceux-ci soient mathématiques, informatiques, logiques, topologiques, économiques, philosophiques ou politiques.

On ne peut gagner ou perdre d'argent que par le jeu des différences de valeurs qui apparaissent et disparaissent dans les achats et dans les ventes. L'échange « juste » qui par définition se fonde sur l'équilibre permanent des valeurs échangées ainsi que sur l'égalité ou l'équivalence de ces valeurs semble totalement incompatible avec l'utilisation de l'argent.

D. La transformation : instrument de paiement

Alors que la « transitivité » était définie traditionnellement en référence à la « relation d'ordre fixe », nous trouvons dans la « théorie mathématique des catégories » une autre définition de la « transitivité » qui est liée à la notion de « transformation » et qui se révèle très intéressante dans la perspective d'une « action monétaire programmable ». Cette définition de la « transitivité » se trouve dans la théorie mathématique des catégories dont il est important de préciser qu'elle généralise la théorie des ensembles qui elle-même généralisait l'arithmétique sur les objets. Une « catégorie » est un « groupe algébrique » composé d'un « ensemble » « d'objets » et d'un « ensemble » de « morphismes », c'est à dire d'une relation entre deux objets et d'une loi de composition des morphismes. La loi de composition est « transitive » si nous avons un morphisme $f : A \Rightarrow B$ et un morphisme $g : B \Rightarrow C$ alors nous obtenons une composition de ces morphismes appelée *après* : $(g \text{ après } f) : A \Rightarrow C$. C'est parce qu'ils respectent cette propriété de « transitivité » que l'on peut noter ces objets avec des flèches. De plus l'ensemble des « morphismes » ne peut être vide. Il doit exister au moins un « morphisme » de A vers A pour tout objet A. On appelle généralement ce morphisme « identité » mais il est également possible de l'appeler « réflexivité » ou « référence » si l'on préfère. Ce morphisme « ref » est un « élément neutre » pour la « loi de composition » (tout comme devrait l'être l'usage de la monnaie) car il n'affecte pas les « morphismes ». Ainsi $(f \text{ après } \text{ref}) = (\text{ref après } f) = f$. Au travers de la « théorie mathématique des catégories », nous comprenons finalement qu'il est possible de représenter de façon logique une « identité » comme une « transitivité », une « transitivité » comme une « symétrie » et une « symétrie » comme une « identité » et que ces notions peuvent se généraliser de façon très utile.

Parmi les outils fondamentaux de la théorie des catégories et de la programmation fonctionnelle, *la transformation fait office d'instrument de paiement*.⁸ Il existe deux catégories de transformations : le foncteur qui opère des transformations sur les contenus (par exemple une pomme qui devient une compote de pomme) et la fonction de transformation naturelle qui opère des transformations sur les contenant (par exemple un coffre qui devient un porte-monnaie). Dans le domaine du paiement, le foncteur correspond à une conversion (par laquelle une pièce de deux euros devient deux pièces de deux euros par exemple) tandis que la fonction de transformation naturelle correspond à une représentation (par laquelle une valeur d'actif est représentée sous la forme d'un titre offrant un droit aux revenus et un droit de vote par exemple). Ces deux opérations de transformation sont fondamentalement différentes : la conversion ne travaille que sur les mêmes catégories d'objets (les monnaies entre elles, les billes entre elles selon leurs propres référentiels de mesures et d'unités de compte) alors que la représentation est un « saut » d'une catégorie d'objet vers une autre catégorie d'objet, ce qui permet à l'objet représentant d'englober sans prendre le risque de le modifier l'objet représenté. La transformation naturelle offre un langage très puissant en terme opérationnel

⁸ Qu'est-ce qu'un foncteur ? C'est tout simplement quelque chose que l'on peut cartographier. Par « quelque chose », nous définissons une collection d'objets ou un ensemble de valeurs. Par « mappage », nous définissons une fonction que l'on applique à cette collection d'objets ou ensemble de valeurs. Il est intéressant de constater que si la forme et la structure doivent rester identiques, le type et la quantité peuvent changer, la fonction de mappage n'ayant pas besoin de renvoyer à la même quantité ou au même type. Cela permet de dire que toute fonction numérique appliquée à une collection d'objets ou à un ensemble de valeurs est monétaire.

car il est capable de changer autant l'habit / le conteneur / l'effet / le contexte, que l'objet / le contenu / la cause / le texte de tout ensemble de valeur.

Quelle est la différence entre le mode de règlement beaucoup plus général et puissant basé sur la fonction de transformation naturelle et la représentation des valeurs et le mode de règlement beaucoup plus particulier et restreint basé sur le foncteur et la conversion des valeurs ? La réponse est sans appel : le mode de règlement basé sur la représentation témoigne d'un codage numérique de l'information alors que le mode de règlement basé sur la conversion repose sur un codage analogique de l'information. C'est peut-être sur cette différence de codage que s'établit la différence entre une monnaie réelle et une monnaie virtuelle (token). La fonction de transformation fondamentale est l'opération qui permet de transformer une monnaie réelle en son image (la monnaie virtuelle) et qui permet de re-transformer une image (la monnaie virtuelle) en monnaie réelle. Si l'on considère que les smart contracts sont des interfaces qui réglementent l'accès vers des mondes possibles, et si l'on considère les tokens comme des systèmes de valeurs qui définissent les valeurs des mondes possibles, alors on comprend que la fonction de transformation naturelle est adaptée à la généralité des utilisations du token quand celui-ci devient instrument de transformation du monde. Comparé au token, la monnaie réelle ne se produit que dans un seul monde nécessaire et souvent incertain. Combinée au token, la monnaie réelle se produit elle-même (auto-poiesis) au travers de ses différentes images qui représentent autant de monnaies virtuelles, de droits nouveaux et de valeurs potentielles. En séparant les questions monétaires des questions de gestion des valeurs, des droits et des actifs, nos systèmes sociaux, économiques, juridiques et politiques étaient incohérents. Avec la transformation de nos valeurs, de nos droits et de nos actifs en tokens, il se pourrait que nos systèmes deviennent beaucoup plus cohérents et satisfaisants pour le plus grand nombre de personnes qui se sentiront mieux représentées.⁹

La monnaie virtuelle est une monnaie d'engagement alors que la monnaie réelle est une monnaie d'endettement. La différence entre les deux notions est subtile : psychologiquement l'engagement est un désir alors que l'endettement est un devoir (obligation, contrainte). La transformation d'une monnaie réelle en monnaie virtuelle est une application (ou projection, ou vecteur, ou image) de la première dans la seconde, alors que la conversion d'une monnaie réelle en une autre monnaie réelle est un changement de substance qui fait courir un risque de change. Voilà pourquoi la formule de l'involution mathématique est une fonction de paiement spécifique qui ne concerne que les opérations de représentation mais pas celles de conversion. Dans la virtualisation (ou potentialisation) d'une monnaie réelle, nous ne sommes pas tant dans une recherche d'équivalence arithmétique que dans une recherche de similitude géométrique. L'involution mathématique $M \text{ Réelle} \rightarrow M \text{ Virtuelle} \rightarrow M \text{ Réelle}$ dans laquelle chaque objet est son propre inverse convient tout à fait pour représenter cette opération de transformation monétaire. On peut voir dans cette formule l'algèbre fondamentale de tous les morphismes monétaires du plus simple au plus complexe. L'intérêt de créer des images monétaires tient essentiellement dans la volonté de remédier à une économie qui veut fonder

⁹ L'informatique ne sait pas traiter l'information. En tout cas pas telle quelle. Certes, c'est ce qu'elle fait croire, mais c'est de l'esbroufe. L'informatique sait traiter la *représentation de l'information*, pas *l'information*. La nuance est capitale. De 2 choses l'une : soit vous savez représenter l'information en machine, et alors vous savez la traiter. Ou plus exactement vous savez faire des traitements sur cette représentation de l'information qui sont adaptés à cette représentation (et seulement ces traitements-là) ; soit vous ne savez pas comment représenter l'information en machine, et l'ordinateur ne sait rien faire avec cette information, et ne peut rien faire de cette information (en fait, pour l'ordinateur, elle n'existe même pas, puisqu'on n'arrive pas à lui « donner à manger », c'est-à-dire à la représenter pour la mettre dans sa mémoire). Dans cette perspective, la transformation de la monnaie réelle en monnaie virtuelle a pour unique but de créer une information monétaire que l'on peut traiter avec une machine afin de proposer une gamme d'opérations beaucoup plus étendues aux agents.

le réel, s'enfermer dans le réel ou monopoliser le discours sur le réel. Or le réel, comme Clément Rosset l'a bien exprimé, c'est ce qui n'a pas de double, « idiots » en grec signifiant « ce qui n'a pas de double ». D'où la formule : le réel est idiot. De même, la monnaie est idiote si elle se développe sans recourir à des images d'elle-même qui lui confèrent une existence informationnelle et permettent de générer de nouveaux et inattendus moyens de règlement.

E. L'analogie : instrument de comparaison

Une analogie est un processus de pensée par lequel on remarque une similitude de forme ou de valeur entre deux choses, par ailleurs de différentes natures ou classes. Dans le discours, une analogie explicite est une comparaison, tandis qu'une analogie implicite est une métaphore. La comparaison entre deux routes tortueuses n'est pas une analogie, car ce sont deux objets de même type : c'est une simple ressemblance. En revanche, dire qu'une route *serpente* est une analogie : on repère ici la similitude entre deux choses de type différent. C'est à ce moment là qu'une commensurabilité peut s'établir entre elles. En grec, *ἀναλογία* (*analogia*, composé de *ἀνα*, *ana* : « selon » ; et de *λογία*, *logia* : « ratio ») signifie *proportion*. Le terme désigne ainsi à l'origine une similitude ou une égalité de rapports entre des choses distinctes, selon les définitions d'Aristote et d'Euclide. De là, au sens figuré, on est passé à une similitude de forme, une ressemblance schématique.

Quand une égalité de rapport s'établit entre les choses, celles-ci deviennent substituables et échangeables. Le raisonnement par analogie a donc pour principale fonction de rendre les choses commensurables entre elles, afin de pouvoir les mettre en rapport de façon rationnelle.

La définition stricte de l'analogie est *A est à B ce que C est à D*. Par conséquent, en affirmant une telle analogie, j'affirme que tout ce qui est vrai dans le rapport entre *A* et *B*, l'est aussi dans le rapport entre *C* et *D*; et aussi que tout ce qui est faux dans le rapport entre *A* et *B*, l'est aussi dans le rapport entre *C* et *D*. L'analogie est souvent utilisée en science et en philosophie, car elle permet de reporter les résultats qui sont connus dans un premier domaine vers un second domaine, ceci de manière efficace. Il suffit en effet pour appliquer la même logique en parallèle, de substituer fidèlement tant *A* par *C* que *B* par *D* pour obtenir des résultats à coup sûr corrects dans le rapport entre *C* et *D*. De ce point de vue, l'analogie est une opération parfaitement rationnelle. C'est un simple calcul en parallèle. Si la substitution donne des résultats erronés, c'est que l'analogie est fautive. À noter que dans l'analogie *A est à B ce que C est à D*, ni *A*, ni *B*, ni *C*, ni *D* n'ont besoin d'être définis explicitement, seul leur rapport respectif compte. Ce qui permet ainsi de ne pas instancier les objets comme en algèbre.

La proportion est un rapport d'égalité entre deux quantités, traduit sous forme d'équivalence entre deux rapports ($A/B = C/D$). La proportion est un mode de pensée multiplicatif qui se distingue d'un mode de pensée additif qui ne considère pas les rapports mais seulement les différences. En mathématiques, on dit que deux séries de nombres sont proportionnelles quand on peut passer de l'une à l'autre en multipliant ou en divisant la première par une même constante non nulle. Exprimé par un nombre ou par un symbole qui le représente, un coefficient de proportionnalité¹⁰ est un facteur constant qui s'applique à une grandeur variable ou à une fonction d'une ou plusieurs variables. La proportionnalité est le fondement de tous les raisonnements de type économique, comme le montrent les exemples ci-dessous :

10 Ajoutons à cette définition un détail intéressant : les coefficients de proportionnalité permettent de mettre en rapport tout type de grandeurs différentes, alors que les coefficients scalaires ne permettent de mettre en rapport que des grandeurs de même nature. Cela permet de comprendre la puissance de tels instruments.

- Calcul des prix : si 1 kg de tomates vaut 8 euros, combien coûteront 3 kg de tomates ? La proportionnalité sera $1/8 = 3/24$ avec un coefficient de 3.
- Variation des prix : si l'ensemble des prix a diminué de 50%, de combien ont diminué la salade à 1 euro et le poulet à 12 euros ? La proportionnalité sera $1/0,5 = 12/6$. Dans les variations sur l'ensemble des prix, nous obtenons un coefficient de 2.
- Justice distributive : si A est à B dans la proportion de 2 à 1, alors dans une juste répartition les choses C ou D données à A ou à B seront dans une même proportion l'une par rapport à l'autre. Aux personnes inégales des parts inégales.¹¹
- Section harmonieuse : le nombre d'or est une proportion, définie initialement en géométrie comme l'unique rapport entre deux longueurs A et B telles que le rapport entre la plus petite longueur et la plus grande longueur soit égal au rapport entre la plus grande longueur et le tout : si $(A + B) / A = A / B$ alors le rapport $A / B = 1,61$ ¹²
- Croissance de la population : Dans son essai sur le principe de population, Malthus formule la loi de population selon laquelle la population d'un pays tend à s'accroître de façon géométrique alors que les ressources s'accroissent de façon arithmétique.
- Optimisation de la croissance économique : La loi de Phelps stipule que le seul moyen d'assurer une croissance de la consommation régulière et identique pour toutes les générations est de fixer un taux de productivité marginale du capital (ou taux d'intérêt) à une valeur égale au taux de croissance démographique à chaque période.
- Comparaison des rendements : si un investissement R rapporte 4% par an et si un investissement T rapporte 12% par an, alors l'investissement T possède un taux d'intérêt annuel 3 fois plus grand que le taux d'intérêt annuel de l'investissement R.
- Comparaison des efficacités : s'il faut dépenser 1 million d'euros pour produire une école dans un premier cas et seulement 100 euros pour produire une école dans un second cas, alors la seconde solution sera 10.000 fois plus efficace que la première.
- Volume des échanges : en terme d'entrées et de sorties, une égalité telle que $1/1 = 1.000.000/1.000.000 = 0,00.000.1/0,00.000.1$ respecte une proportion (avec un coefficient de 1) alors que les volumes des échanges sont très différents.¹³
- Masse budgétaire : en terme de recettes et de dépenses, une égalité telle que $10.000.000/5.000.000 = 100/50 = 0,000.000.1/0,000.005$ respecte une proportion (avec un coefficient de 0,5) alors que les masses budgétaires sont très différentes.¹⁴

11 A l'inverse de la justice commutative qui établit une égalité arithmétique portant sur des quantités (valeurs équivalentes), la justice distributive repose sur l'égalité proportionnelle ou géométrique portant sur des grandeurs (valeurs proportionnelles). Son raisonnement se fonde donc sur une analogie plus que sur un calcul.

12 Le nombre d'or ou proportion harmonieuse est utilisé dans de nombreux domaines comme pour la construction de procédures mettant en rapport des grandeurs de nature différente, ou comme pour le calcul prédictif de certains cours de bourse basés sur la suite de Fibonacci. Il est intéressant de savoir qu'il existe plusieurs façons de construire le nombre d'or qui correspondent à la distinction que nous faisons entre les nombres, les quantités et les grandeurs. Ainsi quand on se place sur le plan quantitatif, on peut calculer le nombre d'or par la formule arithmétique suivante : lorsque dans une suite de nombres entiers naturels, le nombre qui suit est égal à la somme des deux précédents nombres, alors on peut conjecturer que cette suite de nombres se développe selon un coefficient de croissance qui tend vers une valeur qui est égale au nombre d'or.

13 Une telle approche nous permet de définir un échange circulaire non pas comme le fait pour tous les acteurs de la chaîne d'échange de faire circuler une même quantité de valeur ou d'argent (approche additive, arithmétique et comptable limitative) mais comme le fait pour tous les acteurs de la chaîne d'utiliser un même coefficient de proportionnalité dans leurs échanges. Une telle définition est libératrice au sens où elle ne repose que sur un facteur d'équilibre, de croissance ou de décroissance qui s'applique à tous les acteurs indépendamment des quantités échangées, et suffit pour structurer un système d'échange circulaire qui respecte la transitivité.

14 Quand on calcule un budget avec des plus pour les recettes et des moins pour les dépenses, on obtient un solde budgétaire positif ou négatif, c'est à dire une quantité d'argent déterminée. Quand on met en rapport les recettes et les dépenses comme des valeurs absolues sans utiliser de signe positif ou négatif, on obtient un équilibre budgétaire. Le premier raisonnement est additif, alors que le second est multiplicatif. La différence

- Système de coordination multi-agents : La seule contrainte des balances commerciales équilibrées entre chaque couple d'agent échangiste suffit pour garantir l'équilibre de tout le système, sa transitivité ainsi que l'indépendance de chaque agent.¹⁵ Un tel système ne nécessite la création d'aucune chaîne car chaque échange est autonome.
- Taux d'utilisation : mécanisme d'incitation automatisé applicable dans une logique de marché émergent au moyen d'un contrat à terme dans lequel le prix d'une monnaie est corrélée aux données du nombre d'utilisateurs et du volume de transactions afin que les échanges oscillent constamment autour d'une valeur de référence définie à l'avance.
- Taux d'intérêt : mécanisme d'incitation automatisé applicable dans une logique de marché émergent au moyen d'un contrat à terme dans lequel on garantit la parité absolue d'une cryptomonnaie avec une fiat monnaie en offrant un taux d'intérêt positif (pour créer de la monnaie) ou négatif (pour détruire de la monnaie) selon que le prix de la cryptomonnaie se situe au dessus ou en dessous de la valeur de référence.
- Contrôle de bonne utilisation : rapport entre le montant de la production financée et la valeur de la production créée sur une certaine période temporelle. Rapport entre le montant de la production financée et la valeur de la production distribuée sur une certaine période. Ces études d'impact permettent d'éviter l'inflation et la corruption.

Il est intéressant de remarquer que pour Euclide, le rapport de deux grandeurs A / B n'est pas perçu comme un « nombre » mais comme une « manière d'être » ou un « état » entre deux grandeurs homogènes dans laquelle la proportion indique la notion de rapport.¹⁶

Incidentement, cela permet d'inventer des notions ad hoc, par exemple une grandeur D telle que *C soit à D ce que A est à B*, donc d'étendre les concepts de manière cohérente avec le savoir déjà acquis. Par exemple le moment d'inertie fut inventé de telle manière que *celui-ci soit au mouvement de rotation ce que la masse inertielle est au mouvement de translation* ou encore le moment cinétique fut inventé de telle manière que *celui-ci soit au mouvement de*

subtile entre les deux est qu'on passe d'un raisonnement basé sur les quantités à un raisonnement basé sur les grandeurs. Certes le second raisonnement ne permet pas de savoir quand j'ai deux fois moins de recettes que de dépenses si j'ai perdu 10 euros ou 1 million d'euros. Mais il permet de paramétrer un système économique et d'instaurer une règle d'équilibre budgétaire qui s'applique indépendamment des quantités que l'on utilise. A l'aube d'une époque où chaque acteur économique et social sera doté de sa propre capacité de création monétaire, il ne sert plus à rien de raisonner de façon quantitative, et seule la règle d'équilibre budgétaire basée sur les coefficients de proportionnalité permettra de garantir l'équilibre de tout le système économique.

15 Si un agent A est en équilibre comptable avec un agent B et que l'argent B est en équilibre comptable avec un agent C, alors l'agent A est en équilibre comptable avec l'agent C. Cette règle de transitivité est vérifiée dès lors que le système de coordination met en place un mécanisme de compensation collective supporté par tous les agents et destiné à réparer les pertes d'utilités liées aux déséquilibres des balances comptables des agents. On considère ainsi que le système global d'échange est améliorant (et réalisé) dès lors que les acteurs s'accordent de façon bilatérale sur des opérations d'échanges réciproques portant sur des biens de valeurs égales.

16 J.Z. Young explique dans *Doubt and Certainly in Science* que l'électricité n'est pas quelque chose qui passe ou qui est contenue dans un corps, mais un état observable quand deux ou plusieurs corps ont une certaine relation dans l'espace. Nous parlons encore du « courant » électrique ou d'une « décharge électrique » comme s'il s'agissait d'un flux. Mais tout comme dans la magie esthétique de la force de la peinture, « l'électricité est un état observable quand les choses ont une certaine relation dans l'espace et dans le temps ». De la même façon, il faut résister à la conception chosifiante qui consiste à percevoir l'information comme un fluide qui circulerait dans un système informatique et avec lequel on remplirait une mémoire réservoir : elle n'existe que sous la forme d'états de systèmes magnétiques ou électroniques, interprétés à l'aide de codes. Néanmoins le langage est souvent celui du contenu. La même tendance existe au niveau de l'analyse monétaire : *on parle, on écrit, on pense encore comme si un flux de monnaie vidait un compte, se déplaçait et remplissait un autre compte, alors qu'il s'agit en réalité d'un changement d'état numérique, du remplacement d'un nombre par un autre*. Voilà pourquoi il convient de définir le système monétaire et financier comme un système de traitement de l'information numérique. En modifiant l'état des dettes et des créances entre les agents, les opérations monétaires n'ont d'autre fonction que de produire une modification de l'état des relations chiffrées entre les agents du système.

rotation ce que la quantité de mouvement est au mouvement de translation. À noter également le fait qu'une analogie n'exprime pas explicitement le rapport entre des notions, mais indique simplement l'existence d'un rapport identique. La nature du rapport n'apparaît que dans l'idée de celui qui s'y penche, non dans l'expression littérale. C'est donc à l'entendement que l'analogie fait appel. Dans cette perspective, on peut dire que le raisonnement par analogie est la mère de toutes mesures. Ce qui se joue par là est la construction d'une économie de plus en plus rationnelle dans laquelle toutes les grandeurs deviennent commensurables entre elles.

F. La similitude : instrument de mesure

Afin de comprendre ce qui différencie des valeurs égales, équivalentes et similaires, nous allons reprendre l'exemple cité dans le paragraphe précédent sur le jeu dans lequel on demande à deux équipes de deviner la distance entre la terre et la lune. Sachant que la vraie distance de la terre à la lune est de 384.000 km, et que l'équipe A donne une réponse à 3,84 km et l'équipe B donne une réponse à 3.840.000 km, quelle est l'équipe qui remporte le jeu ? En fait, il existe trois réponses possibles selon la méthode de calcul que l'on utilise :

- Si l'on veut déterminer une différence en se basant sur l'exactitude, alors c'est l'équipe A qui l'emporte sur l'équipe B. En effet, l'écart absolu donné par l'équipe A est $384.000 - 3,84 = 383.996,16$ km alors que l'écart absolu donné par l'équipe B est $3.840.000 - 384.000 = 3.456.000$ km. Aussi déconcertant cela puisse-t-il être, l'équipe qui a dit que la lune est à 3,84 km de la terre est la meilleure avec cette méthode !
- Si l'on veut déterminer un rapport, alors on va calculer des proportions et dans ce cas c'est l'équipe B qui gagne. En effet, l'équipe B a donné une réponse 10 fois supérieure à la distance réelle alors que l'équipe A a donné une réponse 100.000 fois inférieure à la distance réelle ! Il est donc bien évident qu'en évaluant les distances de manière proportionnelle en termes d'écart relatif c'est l'équipe B qui gagne.
- Si l'on veut déterminer une scalabilité, alors on va considérer les évaluations des équipes A et B selon leurs similitudes. Sachant que l'équipe A et l'équipe B ont donné une valeur similaire de 384 que l'on peut noter $384 * 10^m$ dans lequel l'exposant m peut recevoir n'importe quelle valeur négative ou positive. Ainsi en représentant les réponses des équipes A et B sous la forme d'une grandeur (ou nombre réel) on s'aperçoit que les deux équipes sont gagnantes ex-aequo !

La mesure désigne le principe de justice systémique et le raisonnement monétaire qui pousse les agents à rendre un système commensurable. En ayant recours à différents types de transformations telles que les homothéties, la similitude, les rotations, l'écrasement, la mise à l'échelle, l'extrusion, l'inclinaison, l'effet miroir, le dégradé de formes, le morphisme, la symétrie, la translation, l'interpolation, les coniques ou bien les formes de révolution, l'approche par la mesure développe une représentation spatiale des grandeurs monétaires et offre de très puissants instruments de paramétrage micro et macro économiques. Nous réservons volontairement ici la notion de mesure à la question du passage à l'échelle en laissant de côté la comparaison et la substitution que nous classons dans les opérations régies par le principe d'équivalence. Même s'il est vrai que la comparaison est une méthode bien commode pour mesurer des valeurs relatives et prendre des décisions d'achat ou de vente, nous préférons isoler volontairement les opérations basées sur la similitude en leur réservant la notion de mesure. En effet, ces opérations sont de loin les plus puissantes mais aussi les plus méconnues et il est donc nécessaire de les différencier pour les définir précisément.

Tout système économique est confronté à l'incommensurabilité de certaines grandeurs ce qui aboutit à d'énormes problèmes tels que l'injustice sociale, écologique, économique ou financière. La plus connue de ces injustices s'appelle l'inégalité. Entre la première fortune du monde à 100 milliards de dollars et la plus petite fortune du monde à 1 dollar, nous ne sommes plus sur des ordres de grandeurs comparables en terme de raisonnement économique : l'écart entre eux est incommensurable car le premier ne pourra jamais rattraper le premier. Une autre forme d'injustice est celle de la consommation d'énergie liée à la croissance. Comme la croissance est une courbe exponentielle, la projection de notre niveau de consommation dans mille ans nous met devant des chiffres gigantesques et inconcevables : il s'agit d'une autre forme d'incommensurabilité. Or tant que l'on demeure avec des raisonnements économiques basés sur le comptage (approche additive) ou la comparaison (approche multiplicative), il est certain que nous ne pourrions rien faire pour aller contre le développement de ces grandeurs incommensurables. Il est nécessaire de disposer d'outils beaucoup plus puissants or c'est précisément ceux-là que nous fournissent les approches basées sur les grandeurs similaires car elles autorisent la mise à l'échelle des valeurs.

L'idée maîtresse ici est que la mesure basée sur l'approche par grandeurs similaires constitue un instrument de paramétrage très puissant pour tous les systèmes économiques de production, d'échange et de distribution de la richesse. Dans cette perspective, nous estimons que la compréhension de la similitude est le fondement de toute l'économie programmable.

H. Grandeurs extensives et intensives

Les grandeurs extensives et intensives sont applicables aux mesures monétaires. Par exemple la grandeur d'orientation est une grandeur physique qui se limite à décrire l'orientation de la grandeur physique scalaire associée, par exemple un flux monétaire qui va d'un point A vers un point B. Le volume permet de mesurer l'extension dans l'espace physique de n'importe quel objet, de même que l'aire d'une figure dans le plan mesure « l'extension » qu'elle possède dans les deux directions en même temps. Ainsi, on peut considérer le volume physique (de production, de transaction) comme une grandeur extensive, sachant que la grandeur intensive qui lui est associée s'appelle la pression (on parle ainsi de pression fiscale, de pression sur les salaires). En mathématiques et plus précisément en géométrie euclidienne, le volume d'un parallélépipède est engendré par le produit mixte de 3 vecteurs non coplanaires que l'on réunit dans une intégrale triple. D'une façon générale, l'utilisation des grandeurs extensives et intensives devrait avoir un grand intérêt pour les études et le calcul car chacune d'elles apporte des informations clefs sur la taille des systèmes économiques, monétaires et financiers considérés : la masse monétaire, la quantité de matière, le volume des transactions, la puissance financière sont des grandeurs physiques intensives.

A l'opposé, une grandeur intensive permet de caractériser l'homogénéité d'un système. Ainsi, une grandeur monétaire G est dite intensive si et seulement si sa valeur reste identique pour toute partie d'un système homogène, et réciproquement on qualifie un système d'homogène si toutes les grandeurs intensives considérées y prennent une valeur identique dans toutes ses sous-parties. On retrouve ici les bases conceptuelles des études sur les systèmes économiques à l'équilibre qui permettent de comprendre les dynamiques de marché notamment sur la question fondamentale dont le marché opère le fameux équilibre de l'offre et de la demande. On ne saurait toutefois limiter la mesure intensive à cet aspect là ; en effet la mesure des grandeurs intensives pourrait être utilisée dans beaucoup d'autres domaines tel que celui de la distribution et l'allocation des ressources (homogénéité de la répartition des richesses dans

l'espace et dans le temps entre les différentes composantes de la population). On retrouve la grandeur intensive dans la plupart des fonctions de paramétrage systémique : la vitesse de circulation de la monnaie, l'accélération de la monnaie, la volatilité de la monnaie, la couleur de la monnaie, l'inflation, la stagflation et la déflation, la densité des monnaies (qui conditionne leur évaluation et leur dévaluation), la diffusion, la distribution, l'accessibilité des monnaies, la concentration des richesses, la chaleur (entropie du système monétaire)...

On voit ainsi que la plupart des grandeurs intensives renvoient à des paramètres macro-économiques, alors que les grandeurs extensives renvoient pour leur part à des grandeurs micro-économiques qui peuvent être qualifiées ainsi de « spécifiques ». La mesure d'une grandeur extensive porte nécessairement sur l'ensemble du système considéré, et sa valeur est en proportion de la « taille » de ce système. Plus précisément, en physique et en chimie, on dit d'une grandeur G qu'elle est extensive lorsque la somme des valeurs de cette grandeur pour deux systèmes disjoints est égale à la valeur de la grandeur pour la réunion des systèmes. $G(S1) + G(S2) = G(S1 \cup S2)$. Ainsi on voit que contrairement à la grandeur intensive dans laquelle on a une indépendance de la mesure correspondante relativement à la taille ou la quantité de matière présente dans le système (comme pour la température, la pression, la densité), la grandeur extensive est additive (relativement à ses parties indépendantes et sans interactions), autrement dit la propriété est proportionnelle à la quantité, au volume et la masse de matière présente dans tout le système. Par exemple la masse et le volume du diamant sont des propriétés extensives, alors que la dureté est une propriété intensive. Intensif et extensif s'opposent et se complètent comme intérieur et extérieur. Une propriété intensive ne dépend que du point considéré et peut donc s'apprécier de l'intérieur du système. En revanche une propriété extensive dépend de l'ensemble du système, et ne peut s'apprécier que de l'extérieur, au moment où le système est appréhendé dans sa globalité.

La mesure révèle la monnaie dans ses caractéristiques profondes et effectives. L'ensemble des phénomènes et des opérations monétaires sont représentables sous la forme de fonctions numériques qui évitent la chosification de la monnaie qui est si néfaste pour l'analyse. La grandeur intensive est une information de type scalaire (un seul nombre réel uniformément réparti) qui manifeste la distributivité de la monnaie. La grandeur extensive est une information de type vectorielle (une seule direction uniformément appliquée) qui manifeste l'accroissement de la monnaie. Le remplacement de l'unité de compte par l'unité de mesure a pour conséquence d'augmenter l'accessibilité de l'instrument monétaire pour chaque homme et pour tous les hommes en tout point de l'espace et du temps. Cette accessibilité est garantie par des lois universelles qui sont celle de la mathématique qui nous enseignent le bon usage de la monnaie. La Justice économique et sociale ne dépend donc pas de la multiplication des unités de compte (par laquelle on serait censé mesurer le revenu des individus et la richesse des nations), mais du perfectionnement dans l'utilisation de nos instruments de mesure monétaire. Dans le cas de l'économie, le statut de science lui sera définitivement acquis si ce sont les mesures monétaires qui produisent les phénomènes matériels que l'on désire et pas l'inverse. Le passage d'un système empirique de mesure de la valeur à un système scientifique de mesure de la valeur représente un enjeu majeur pour la modernisation et le progrès des connaissances dont dépend la réalisation des droits monétaires universels.

Olivier ROCCA

Vallauris, le 04 / 06 / 2020

© Copyright Olivier Rocca tous droits réservés

Pour citer cet article, veuillez mentionner son titre « Prolégomènes à une définition mathématique de l'échange monétaire » et le nom de son auteur Olivier Rocca.

Annexe : Tableau des trois propriétés de la monnaie

<u>Instrument de compte</u>	<u>Instrument de paiement</u>	<u>Instrument de mesure</u>
Comptage	Calcul	Mesure
Nombre	Quantité	Grandeur

Nullitude	Multitude	Magnitude
Arithmétique	Algèbre	Géométrie
Position	Proposition	Interposition / Transposition
Addition	Soustraction	Multiplication, Division
Nombre augmenté par un autre nombre	Nombre diminué par un autre nombre	Nombre multiplié ou divisé par lui-même
Nécessité	Contingence	Possibilité
Ordre d'appartenance	Ordre de substitution	Ordre de scalabilité
Conservation	Comparaison	Transformation
Regroupement	Remplacement	Convergence / Divergence
Somme	Différence	Produit / Quotient
Procédure	Etat	Processus
Valeur absolue	Valeur relative	Valeur standard (référence)
Cardinal	Ordinal	Proportionnel
Montant	Solde	Ratio
Matière	Information	Energie
Exactitude (égalité)	Ressemblance (équivalence)	Approximation (similitude)
Pareil, Même, Identique	Comparable, Correspondant, Concordant	Quasiment, Infiniment, Approchant
Entier	Distance	Commensurable
Nombre naturel (N)	Nombre relatif (Z)	Nombre rationnel (R)
Univalent	Polyvalent	Intervalent
Egal en quantité, en degré, en nombre, en taille	Equivalent en structure, en fonction, en valeur, en sens	Similaire sur toute échelle, sur tous les infinis petit et grands