

# Classes de symétrie et bases fonctionnelles via les Invariants et covariants de tenseurs

---

Équipe Géométrie et Matériaux

Marc Olive, Boris Kolev, Rodrigue Desmorat

Nuage, le 28 Mai 2020

Séminaire LMT - MSSMAT - ENS Paris–Saclay

# Plan de présentation

Introduction

Les tenseurs symétriques d'ordre 2

Modèle de la dilatation thermique

Des solutions immédiates

Invariants et covariants de l'espace ( $\mathbb{S}^2, \text{SO}(3)$ )

Base de covariants

Le tenseur d'élasticité

Base de covariants et anisotropie

Base cubique propre

# Plan de présentation

## Introduction

### Les tenseurs symétriques d'ordre 2

Modèle de la dilatation thermique

Des solutions immédiates

Invariants et covariants de l'espace ( $\mathbb{S}^2, SO(3)$ )

Base de covariants

### Le tenseur d'élasticité

Base de covariants et anisotropie

Base cubique propre



- Nous considérons ici les modèles faisant intervenir des **tenseurs**
- Le cas linéaire se formule par l'intermédiaire de **tenseurs de comportement** (tenseur thermique, d'élasticité, piézoélectrique, etc)
- Ces tenseurs ont une expression qui dépend de l'**anisotropie**
- Pour le cas non-linéaire, on peut exploiter une **énergie libre** qui se postule en fonction de l'anisotropie

## **Classification de l'anisotropie**

Pour un espace de tenseurs de comportements donné (tenseur d'élasticité, piézoélectrique, etc), comment définir et déterminer les différentes anisotropies possibles ?

## **Caractérisation de l'anisotropie**

Connaissant le tenseur de comportement d'un matériau donné, peut-on déterminer le type d'anisotropie et les caractéristiques géométriques du matériau ?

## **Formulation de l'énergie libre**

Quelle est la forme la plus "générale" possible d'une énergie libre ?

# Plan de présentation

Introduction

Les tenseurs symétriques d'ordre 2

Modèle de la dilatation thermique

Des solutions immédiates

Invariants et covariants de l'espace ( $\mathbb{S}^2, SO(3)$ )

Base de covariants

Le tenseur d'élasticité

Base de covariants et anisotropie

Base cubique propre

# Plan de présentation

Introduction

Les tenseurs symétriques d'ordre 2

Modèle de la dilatation thermique

Des solutions immédiates

Invariants et covariants de l'espace ( $\mathbb{S}^2, SO(3)$ )

Base de covariants

Le tenseur d'élasticité

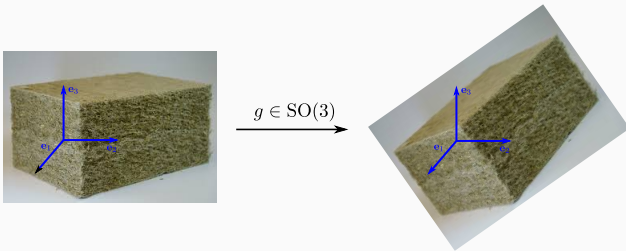
Base de covariants et anisotropie

Base cubique propre

# Le tenseur de dilatation thermique

- On fixe l'espace  $\mathbb{S}^2$  des tenseurs symétriques d'ordre 2 sur  $\mathbb{R}^3$
- A priori, un tenseur de dilatation thermique  $\mathbf{d} \in \mathbb{S}^2$  d'un matériau est donné dans une **orientation fixée au préalable**
- Tout changement d'orientation donnée par une rotation  $g \in \text{SO}(3)$  du matériau induit un **nouveau tenseur thermique**

$$\bar{\mathbf{d}} := g\mathbf{d}g^t, \quad \bar{d}_{ij} = g_{ip}g_{jq}d_{pq}$$





# Une représentation linéaire du groupe $SO(3)$

- Un matériau thermique homogène est caractérisé par l'ensemble de tous les tenseurs

$$g\mathbf{d}g^t, \quad g \in SO(3)$$

- Pour  $g \in SO(3)$  on remarque que l'application

$$\mathbf{d} \in \mathbb{S}^2 \mapsto g \star \mathbf{d} := g\mathbf{d}g^t$$

est **linéaire et bijective**

- On parle mathématiquement d'une **représentation linéaire** du groupe  $SO(3)$  sur l'espace  $\mathbb{S}^2$
- Un matériau thermique homogène est une certaine **orbite** d'un tenseur donné

$$\text{Orb}(\mathbf{d}) := \{g\mathbf{d}g^t, \quad g \in SO(3)\}$$

## Problématiques étudiées : un premier bilan

- Un modèle tensoriel fait intervenir une représentation linéaire du groupe  $SO(3)$ , notée  $(\mathbb{V}, SO(3))$ , où  $\mathbb{V} = \mathbb{S}^2$  dans le cas de la thermique
- On cherche des caractéristiques indépendantes de l'orientation donc des **caractéristiques des orbites**

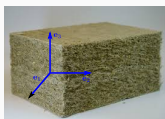
| Notion physique        | Notion mathématique                                 |
|------------------------|---|
| Comportement physique  | Tenseur de comportement $\mathbf{T} \in \mathbb{V}$ |
| Modèle du comportement | Représentation linéaire $(\mathbb{V}, SO(3))$       |
| Matériau homogène      | Orbite d'un tenseur $\text{Orb}(\mathbf{T})$        |
| Anisotropie            | Symétrie caractéristique d'une orbite               |

# L'anisotropie en thermique

- Une fois fixée une orientation de l'espace et donc un tenseur thermique  $\mathbf{d} \in \mathbb{S}^2$ , une **symétrie** est caractérisée par

$$G_{\mathbf{d}} := \{g \in \text{SO}(3), \quad g \star \mathbf{d} = \mathbf{d}\}$$

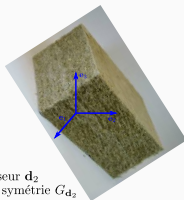
- Pour une nouvelle orientation et donc un nouveau tenseur  $\mathbf{d}_1 = g_1 \star \mathbf{d}$ , on obtient un **nouveau groupe de symétrie**  $G_{\mathbf{d}_1}$
- L'anisotropie du matériau est donc caractérisée par **tous les sous-groupes**  $G_{\mathbf{d}}, G_{\mathbf{d}_1}, \dots$



Tenseur  $\mathbf{d}$   
Groupe de symétrie  $G_{\mathbf{d}}$



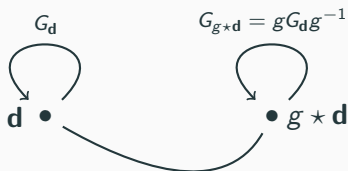
Tenseur  $\mathbf{d}_1$   
Groupe de symétrie  $G_{\mathbf{d}_1}$



Tenseur  $\mathbf{d}_2$   
Groupe de symétrie  $G_{\mathbf{d}_2}$

## Anisotropie et classes de symétrie (Forte–Vianello 1996)

- Les groupes de symétrie  $G_{\mathbf{d}}, G_{\mathbf{d}_1}, \dots$  associés à une même orbite  $\text{Orb}(\mathbf{d})$  sont en fait **conjugués**



$$[G_{\mathbf{d}}] = \{gG_{\mathbf{d}}g^{-1}, g \in \text{SO}(3)\}$$

Un même matériau :  $\text{Orb}(\mathbf{d})$

- Selon Forte–Vianello (1996), une anisotropie est donc une **classe de conjugaison**  $[G_{\mathbf{d}}]$  d'un certain groupe de symétrie  $G_{\mathbf{d}}$

# Plan de présentation

Introduction

Les tenseurs symétriques d'ordre 2

Modèle de la dilatation thermique

Des solutions immédiates

Invariants et covariants de l'espace ( $\mathbb{S}^2, SO(3)$ )

Base de covariants

Le tenseur d'élasticité

Base de covariants et anisotropie

Base cubique propre

# Rappel de la problématique

## Classification de l'anisotropie

Quelles sont toutes les **classes de symétrie** possibles pour l'espace  $(\mathbb{S}^2, SO(3))$  ?

## Caractérisation de l'anisotropie

Connaissant un tenseur  $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$ , quelle est sa classe de symétrie et quelles sont les caractéristiques de cette symétrie ?

## Formulation de l'énergie libre (cas isotrope)

Quelle est la forme la plus "générale" possible d'une énergie libre isotrope qui dépend d'un tenseur d'ordre 2 symétrique ?

## Classes de symétrie et formes normales

- Tout tenseur  $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$  se diagonalise dans une base orthonormée
- Pour toute orbite  $\text{Orb}(\mathbf{a})$ , on peut trouver une **forme normale** écrite sous forme diagonale

$$\exists g \in \text{SO}(3), \quad g \star \mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

- L'anisotropie peut se "lire" sur cette forme normale
  - Trois valeurs propres distinctes : tenseur **orthotrope**
  - Deux valeurs propres distinctes : tenseur **isotrope transverse**
  - Trois valeurs propres identiques : tenseur **isotrope**
- Les caractéristiques de l'anisotropie sont données par les **vecteurs propres**

- Tout tenseur  $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$  possède trois invariants fondamentaux

$$I_1 := \text{tr}(\mathbf{a}), \quad I_2 := \text{tr}(\mathbf{a}^2), \quad I_3 := \text{tr}(\mathbf{a}^3)$$

- Un résultat classique : tout polynôme invariant  $I$  est fonction polynomiale de  $I_1, I_2, I_3$
- On dit que  $\{I_1, I_2, I_3\}$  forme une base d'intégrité de l'espace  $(\mathbb{S}^2, \text{SO}(3))$
- Une énergie libre fonction de  $I_1, I_2, I_3$  semble donc être très "générale"



# Le problème est résolu...

## Classification de l'anisotropie

Il n'y a que trois classes de symétrie pour l'espace  $(\mathbb{S}^2, \text{SO}(3))$  : orthotrope, isotrope transverse et isotrope

## Caractérisation de l'anisotropie

La classe de symétrie d'un tenseur  $\mathbf{a}$  est déterminée à partir de ses valeurs propres, et les caractéristiques géométriques sont données par ses vecteurs propres

## Formulation de l'énergie libre (cas isotrope)

Toute base d'intégrité de l'espace  $(\mathbb{S}^2, \text{SO}(3))$  fournit des modèles assez généraux

## ...seulement dans ce cas très particulier

- L'outil principal est celui de la **diagonalisation**, qui est très spécifique à l'espace  $(\mathbb{S}^2, \text{SO}(3))$
- Se cache le fait qu'ici toute orbite possède le même type de **forme normale**
- La détermination d'une base d'intégrité peut aussi s'établir par cette propriété des orbites de  $(\mathbb{S}^2, \text{SO}(3))$

# Plan de présentation

Introduction

Les tenseurs symétriques d'ordre 2

Modèle de la dilatation thermique

Des solutions immédiates

Invariants et covariants de l'espace ( $\mathbb{S}^2, \text{SO}(3)$ )

Base de covariants

Le tenseur d'élasticité

Base de covariants et anisotropie

Base cubique propre

# Un approche géométrique

- Objectif : simplifier le problème complet pour le ramener à des problèmes plus simples
- Ingrédients essentiels : outils de la théorie des représentations des groupes
- Par exemple :
  - comment connaître la classe de symétrie d'un tenseur  $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$  sans diagonaliser ?
  - Une piste : passer par le polynôme caractéristique et donc des invariants

## Orthotropie d'un tenseur d'ordre 2 symétrique

- $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$  est orthotrope  $\iff$  trois valeurs propres distinctes, donc

$$\Delta = \text{disc}(p_{\mathbf{a}}) \neq 0 \quad (\text{pol. caractéristique})$$

- En reprenant la base d'intégrité  $l_1 = \text{tr}(\mathbf{a})$ ,  $l_2 = \text{tr}(\mathbf{a}^2)$  et  $l_3 = \text{tr}(\mathbf{a}^3)$

$$6\Delta^2 = -l_1^6 + 9 l_1^4 l_2 - 21 l_1^2 l_2^2 - 8 l_1^3 l_3 + 3 l_2^3 + 36 l_1 l_2 l_3 - 18 l_3^2$$

- Equation algébrique de degré 6 en les coordonnées de  $\mathbf{a}$

## Axes caractéristiques de l'orthotropie

- Pour un tenseur  $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$  orthotrope, les vecteurs propres forment une base orthogonale
- Pour obtenir explicitement ces vecteurs propres, résoudre l'équation vectorielle

$$\mathbf{a}\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu} = 0$$

d'inconnues  $\boldsymbol{\nu} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

## Une première simplification

- Tenseur symétrique d'ordre 2 : partie sphérique/déviatorique

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{a})\mathbf{q}, \quad \text{tr}(\mathbf{a}') = 0$$

où  $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$  et  $\mathbf{q}$  le tenseur métrique.

- Le tenseur  $\mathbf{a}'$  est dit **harmonique** (totalement symétrique et de trace nulle)

## Et pourquoi donc harmonique ?

Isomorphisme tenseur symétriques/polynômes homogènes :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \mapsto p(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

### Tenseurs harmoniques

Un tenseur  $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$  est de trace nulle si et seulement si  $p$  est harmonique :

$$\Delta(p) = 2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = 2 \operatorname{tr}(\mathbf{a})$$

On dit alors que  $\mathbf{a}$  est **harmonique**, et l'espace associé est noté  $\mathbb{H}^2$ .



## Décomposition harmonique de $\mathbb{S}^2$

- Pour tout tenseur  $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$  on note

$$a_0 = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{a}) \in \mathbb{H}^0 = \mathbb{R}, \quad \mathbf{a}' = \mathbf{a} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{a}) \mathbf{q} \in \mathbb{H}^2$$

- On a alors la **décomposition harmonique**

$$\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2 \mapsto (\mathbf{a}', a_0) \in \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0$$

- On ne peut pas "faire mieux que cela" :

$$\left[ \mathbb{V} \subset \mathbb{H}^k \text{ stable, i.e } g\mathbb{V} = \mathbb{V} \right] \Rightarrow \left[ \mathbb{V} = \{0\} \text{ ou } \mathbb{V} = \mathbb{H}^k \right]$$

- On dit que  $\mathbb{H}^2$  et  $\mathbb{H}^0$  sont **irréductibles** sous  $\mathrm{SO}(3)$ .

## Un déviateur est un covariant

- Le déviateur d'un tenseur  $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$  "bouge" de la même façon que  $\mathbf{a}$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{a} \in \mathbb{S}^2 & \xrightarrow{\text{dev}} & \mathbf{a}' \in \mathbb{H}^2 \\ \downarrow g \in \text{SO}(3) & & \downarrow g \\ g \star \mathbf{a} \in \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & (g \star \mathbf{a})' = g \star \mathbf{a}' \in \mathbb{H}^2 \end{array}$$

- On dit que  $\mathbf{a}'$  est un **covariant** (linéaire) de  $\mathbf{a}$ .
- Il en est de même de la partie sphérique.

- $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$  orthotrope  $\iff$  partie harmonique  $\mathbf{a}' \in \mathbb{H}^2$  orthotrope
- Plus que deux invariants :  $J_2 = \text{tr}((\mathbf{a}')^2)$ ,  $J_3 = \text{tr}((\mathbf{a}')^3)$
- Condition sur le discriminant  $\tilde{\Delta}$  du pol. caractéristique de  $\mathbf{a}'$  :

$$2\tilde{\Delta}^2 = 6J_3^2 - J_2^3 \neq 0$$

## Caractérisation de l'anisotropie

- On considère la **décomposition harmonique**  
 $\mathbf{a} = (\mathbf{a}', a_0) \in \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0$
- Les deux tenseurs  $\mathbf{a}'$  et  $a_0$  sont des **covariants**, et seul  $\mathbf{a}'$  porte la classe de symétrie
- $\mathbf{a}$  est orthotrope si et seulement si  $6J_3^2 - J_2^3 \neq 0$  avec  
 $J_2 = \text{tr}((\mathbf{a}')^2)$ ,  $J_3 = \text{tr}((\mathbf{a}')^3)$
- Une base propre s'obtient en résolvant  $\mathbf{a}'\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu} = 0$  d'inconnues  
 $\boldsymbol{\nu} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

# Plan de présentation

Introduction

Les tenseurs symétriques d'ordre 2

Modèle de la dilatation thermique

Des solutions immédiates

Invariants et covariants de l'espace ( $\mathbb{S}^2, SO(3)$ )

Base de covariants

Le tenseur d'élasticité

Base de covariants et anisotropie

Base cubique propre

# Covariants polynomiaux

- La décomposition harmonique fournit des covariants linéaires
- Un tenseur  $\mathbf{T}(\mathbf{a})$  est un **covariant** de  $\mathbf{a}$  si

$$\mathbf{T}(g \star \mathbf{a}) = g \star \mathbf{T}(\mathbf{a}), \quad \forall g \in \text{SO}(3)$$

- Si les coordonnées de  $\mathbf{T}$  sont **fonctions polynomiales** des coordonnées de  $\mathbf{a}$ , on parle alors de **covariant polynomial**

## Exemples

Les tenseurs  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}^2$ , etc sont tous des covariants polynomiaux d'ordre 2. En notant  $\odot$  le **produit tensoriel symétrisé**, on peut construire les covariants

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{a} \in \mathbb{S}^4, \quad \mathbf{a} \odot \mathbf{a} \odot \mathbf{a} \in \mathbb{S}^6, \dots$$

## Groupe de symétrie et covariants

- Observation : si  $g \in SO(3)$  est une symétrie de  $\mathbf{a}$ , alors  $g$  est une symétrie de tout covariant  $\mathbf{T}(\mathbf{a})$

$$g \star \mathbf{a} = \mathbf{a} \Rightarrow g \star \mathbf{T}(\mathbf{a}) = \mathbf{T}(g \star \mathbf{a}) = \mathbf{T}(\mathbf{a})$$

- Conséquence 1 : tout covariant d'un tenseur  $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$  est **au moins orthotrope**
- Conséquence 2 : un tenseur  $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$  **ne possède pas de covariant non nul d'ordre 1**
- Argument : un tenseur d'ordre 1 orthotrope est nécessairement nul !

- Si  $\mathbf{T}_1(\mathbf{a})$  et  $\mathbf{T}_2(\mathbf{a})$  sont deux covariants polynomiaux de  $\mathbf{a}$  alors

$$\alpha_1 \mathbf{T}_1(\mathbf{a}) + \alpha_2 \mathbf{T}_2(\mathbf{a}), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{T}_1(\mathbf{a}) \odot \mathbf{T}_2(\mathbf{a})$$

sont encore des covariants polynomiaux

- Les covariants polynomiaux forment une algèbre notée  $\mathbf{Cov}(\mathbb{S}^2)$



## Produit vectoriel généralisé et base d'intégrité

- Le produit vectoriel s'écrit par contraction

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}, \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i = v_p \varepsilon_{piq} u_q$$

- Pour  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  dans  $\mathbb{S}^2$ , on définit le produit vectoriel généralisé

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{a})^s \in \mathbb{S}^3, \quad (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{b})_{ijk} = b_{ip} \varepsilon_{pjq} a_{qk}$$

où  $(\cdot)^s$  est la partie totalement symétrique d'un tenseur.

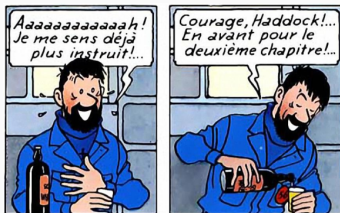
- Par un détour du côté de la **théorie classique des invariants** (née au début du 19ième siècle), une base d'intégrité de  $\mathbf{Cov}(\mathbb{H}^2)$  est

$$J_2, \quad J_3, \quad \mathbf{q}, \quad \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}^2, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a}^2$$

# Conclusion pour $\mathbb{S}^2$

## Deux conséquences

- $\mathbf{a} \in \mathbb{H}^2$  est isotrope transverse  $\Rightarrow \mathbf{a}^2 \times \mathbf{a} = 0$  ( $\mathbf{H} \in \mathbb{S}^3$  ne peut pas être Iso-T).
- $\mathbf{a}$  orthotrope  $\iff \mathbf{a}^2 \times \mathbf{a} \neq 0$



# Plan de présentation

Introduction

Les tenseurs symétriques d'ordre 2

Modèle de la dilatation thermique

Des solutions immédiates

Invariants et covariants de l'espace ( $\mathbb{S}^2, SO(3)$ )

Base de covariants

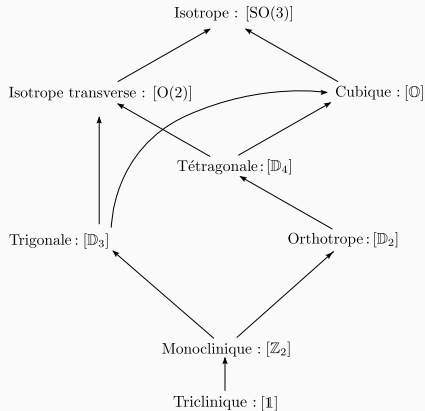
**Le tenseur d'élasticité**

Base de covariants et anisotropie

Base cubique propre

# Les 8 classes de symétries (Forte–Vianello 1996)

- Forte–Vianello (1996) : il n'existe que 8 anisotropies possibles en élasticité linéaire
- Rappel : ce sont les **classes de symétrie** de  $(\mathbb{E}la, SO(3))$ , où  $\mathbb{E}la$  est l'espace des tenseurs d'élasticité (dimension 21).
- Pour chaque anisotropie, il existe des **formes normales** définies dans une orientation donnée



## Base d'intégrité et premiers covariants

- Une base d'intégrité de l'espace  $\mathbb{E}a$  est composée de 297 invariants (résultat de 2017)
- Une décomposition harmonique est donnée par cinq covariants linéaires

$$(\lambda, \mu, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{H}) \in \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^4$$

- Expressions explicites par opérations de traces (Backus 1970)

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &:= \text{tr}_{12} \mathbf{E} & \mathbf{a} &= 5\mathbf{d}' - 4\mathbf{v}' & \lambda &= \frac{1}{9} \text{tr}(\mathbf{d}) \\ \mathbf{v} &:= \text{tr}_{13} \mathbf{E} & \mathbf{b} &= 3\mathbf{v}' - 2\mathbf{b}' & \mu &= \frac{1}{15} (3 \text{tr}(\mathbf{v}) - \text{tr}(\mathbf{d})) \end{aligned}$$

## Une étude par classe de symétrie

- Si on restreint aux tenseurs isotropes : il n'y a plus que deux invariants !
- Pour se restreindre aux autres classes : il faut trouver des caractérisations indépendantes de l'orientation
- Piste exploitée : utiliser une **base de covariants** de l'espace  $\mathbb{H}^4$ , obtenue via la théorie classique des invariants
- On obtient ces covariants par opérations de contraction et par le **produit vectoriel généralisé**

# Plan de présentation

Introduction

Les tenseurs symétriques d'ordre 2

Modèle de la dilatation thermique

Des solutions immédiates

Invariants et covariants de l'espace ( $\mathbb{S}^2, SO(3)$ )

Base de covariants

**Le tenseur d'élasticité**

Base de covariants et anisotropie

Base cubique propre

# Covariants de $\mathbb{H}^4$

| degree / order | 0 | 1  | 2  | 3  | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | #  | Cum |
|----------------|---|----|----|----|---|---|---|---|---|----|-----|
| 0              | - | -  | 1  | -  | - | - | - | - | - | 1  | 1   |
| 1              | - | -  | -  | -  | 1 | - | - | - | - | 1  | 2   |
| 2              | 1 | -  | 1  | -  | 1 | - | 1 | - | - | 4  | 6   |
| 3              | 1 | -  | 1  | 1  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 8  | 14  |
| 4              | 1 | -  | 2  | 1  | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 10 | 24  |
| 5              | 1 | 1  | 2  | 2  | 1 | 3 | - | 1 | - | 11 | 35  |
| 6              | 1 | 1  | 2  | 3  | 1 | 1 | - | - | - | 9  | 44  |
| 7              | 1 | 2  | 2  | 3  | - | - | - | - | - | 8  | 52  |
| 8              | 1 | 2  | 2  | 2  | - | - | - | - | - | 7  | 59  |
| 9              | 1 | 3  | 1  | -  | - | - | - | - | - | 5  | 64  |
| 10             | 1 | 2  | -  | -  | - | - | - | - | - | 3  | 67  |
| 11             | - | 2  | -  | -  | - | - | - | - | - | 2  | 69  |
| 12             | - | 1  | -  | -  | - | - | - | - | - | 1  | 70  |
| Tot            | 9 | 14 | 14 | 12 | 6 | 7 | 3 | 3 | 2 | 70 |     |

|   |  |   |
|---|--|---|
| Ordre 2                                     | Ordre 1  | Ordre 3 ...                                 |
| $\mathbf{d}_2 := \text{tr}(\mathbf{H}^2)$   | $\mathbf{v}_5 := \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{d}_2 \mathbf{c}_3$ | $\text{tr}(\mathbf{H} \times \mathbf{d}_2)$ |
| $\mathbf{c}_3 := \mathbf{H} : \mathbf{d}_2$ | $\mathbf{v}_6 := \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{d}_2 \mathbf{c}_3$ | $\mathbf{d}_2 \times \mathbf{c}_3$          |



## Théorème (2018 – Extrait)

Soit  $\mathbf{E} = (\lambda, \mu, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{H})$  un tenseur d'élasticité, avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{H}^0$  (des scalaires),  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{H}^2$  et  $\mathbf{H} \in \mathbb{H}^4$ . Alors

- (1)  $\mathbf{E}$  est isotrope si et seulement si  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{d}_2 = 0$
- (2)  $\mathbf{E}$  est cubique si et seulement si  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{d}'_2 = 0$  et  $\mathbf{d}_2 \neq 0$
- (3)  $\mathbf{E}$  est isotrope transverse si et seulement si  $(\mathbf{d}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  est isotrope transverse et

$$\mathbf{H} \times \mathbf{d}_2 = \mathbf{H} \times \mathbf{a} = \mathbf{H} \times \mathbf{b} = 0.$$

# Plan de présentation

Introduction

Les tenseurs symétriques d'ordre 2

Modèle de la dilatation thermique

Des solutions immédiates

Invariants et covariants de l'espace ( $\mathbb{S}^2, SO(3)$ )

Base de covariants

**Le tenseur d'élasticité**

Base de covariants et anisotropie

Base cubique propre

- Tenseur d'élasticité

$$\mathbf{E} = (\lambda, \mu, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{H}) \in \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^4$$

- Covariant d'ordre 2 quadratique (Boehler–Kirilov–Onat)

$$\mathbf{d}_2 := \text{tr}(\mathbf{H}^2)$$

- Théorème précédent : le tenseur  $\mathbf{E}$  est cubique si et seulement si  $\mathbf{d}'_2 = \mathbf{a} = \mathbf{b} = 0$  et  $\mathbf{d}_2 \neq 0$ .
- Conséquence : le "cube" d'un tenseur cubique est porté par la partie  $\mathbf{H} \in \mathbb{H}^4$ .

## Théorème

*On note  $\mathbf{E}_{cubic}$  un tenseur d'élasticité cubique et  $\mathbf{H}$  sa composante harmonique d'ordre 4. Alors il existe un tenseur  $\mathbf{c}$  symétrique d'ordre 2 orthotrope solution de l'équation linéaire*

$$\text{tr}(\mathbf{H} \times \mathbf{c}) = 0$$

*Toute base propre de  $\mathbf{c}$  donne une base propre de  $\mathbf{E}_{cubic}$ .*

- Tenseur  $\mathbf{E}^\gamma$  d'un **Superalliage monocristallin à base de Nickel**, approximation cubique

$$[\mathbf{E}^\gamma_{cubic}] = \begin{pmatrix} 240.131 & 144.442 & 125.76 & 6.39666 & 41.9737 & -21.1614 \\ 144.442 & 223.957 & 141.935 & -27.7808 & 2.27754 & 16.6041 \\ 125.76 & 141.935 & 242.638 & 21.3841 & -44.2512 & 4.55736 \\ 6.39666 & -27.7808 & 21.3841 & 133.268 & 4.55736 & 2.27754 \\ 41.9737 & 2.27754 & -44.2512 & 4.55736 & 117.094 & 6.39666 \\ -21.1614 & 16.6041 & 4.55736 & 2.27754 & 6.39666 & 135.776 \end{pmatrix} \text{ GPa}$$

- Partie  $\mathbf{H} \in \mathbb{H}^4$

$$[\mathbf{H}^\gamma_{cubic}] = \begin{pmatrix} -59.1358 & 38.9089 & 20.2269 & 6.39666 & 41.9737 & -21.1614 \\ 38.9089 & -75.3102 & 36.4013 & -27.7808 & 2.27754 & 16.6041 \\ 20.2269 & 36.4013 & -56.6282 & 21.3841 & -44.2512 & 4.55736 \\ 6.39666 & -27.7808 & 21.3841 & 36.4013 & 4.55736 & 2.27754 \\ 41.9737 & 2.27754 & -44.2512 & 4.55736 & 20.2269 & 6.39666 \\ -21.1614 & 16.6041 & 4.55736 & 2.27754 & 6.39666 & 38.9089 \end{pmatrix}.$$

## Par de l'algèbre linéaire

- Système linéaire  $\text{tr}(\mathbf{H} \times \mathbf{c}) = 0$  : 5 inconnues  $\mathbf{c} \in \mathbb{H}^2$  et 3 équations.
- On trouve par exemple

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3.485 & 1 & 1 \\ 1 & -9.93526 & -2.23089 \\ 1 & -2.23089 & 6.45025 \end{pmatrix}$$

qui est orthotrope car  $\mathbf{c}^2 \times \mathbf{c} \neq 0$ .

- Vecteurs propres orthonormés de  $\mathbf{c}$ , et forme normale de  $[\mathbf{E}_{cubic}^\gamma]$  :

$$[\mathbf{E}_{cubic}^{normal}] = \begin{pmatrix} 213.355 & 148.489 & 148.489 & 0 & 0 & 0 \\ 148.489 & 213.355 & 148.489 & 0 & 0 & 0 \\ 148.489 & 148.489 & 213.355 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 139.823 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 139.823 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 139.823 \end{pmatrix} \quad (\text{GPa}).$$

**Merci pour votre attention**

