



HAL
open science

Modélisation Stochastique et Statistique Book of Proceedings

Kamal Boukhetala, Jean-François Dupuy

► **To cite this version:**

Kamal Boukhetala, Jean-François Dupuy (Dir.). Modélisation Stochastique et Statistique Book of Proceedings. 2019. hal-02593238

HAL Id: hal-02593238

<https://hal.science/hal-02593238>

Submitted on 15 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Le colloque international Modélisation Stochastique et Statistique, dans sa quatrième édition, est une rencontre scientifique de haut niveau regroupant chercheurs universitaires et experts praticiens du calcul stochastique et statistique et ses applications dans les domaines socio économique, industriel et environnemental. Par les différents thèmes abordés, cette rencontre constituera un cadre idéal pour débattre et discuter des développements récents. Un atelier sur les données massives et l'intelligence artificielle et leurs applications sera animé par des spécialistes en la matière. D'autre part, cette rencontre offrira une occasion de rapprochement entre académiciens et professionnels en matière d'échange d'idées et d'expériences dans le domaine de l'utilisation de l'outil stochastique et statistique en analyse, modélisation, simulation et prospection pour l'aide à la prise de décision.

ISBN 978-9931-9222-2-3



9 789931 922223



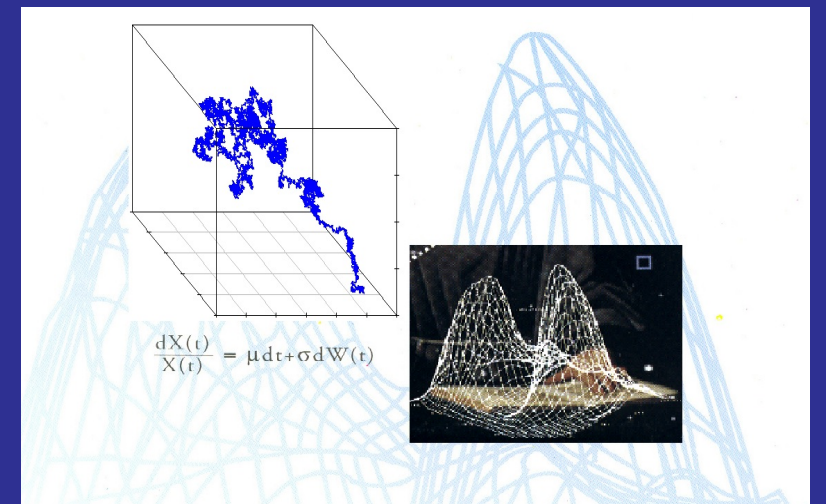
L MSS'2019 — Book of Proceedings, 4ème édition



MSS'2019

Colloque International Modélisation Stochastique et Statistique

Book of Proceedings



Edité par

Prof. Kamal Boukhetala

Prof. Jean-François Dupuy

MSS'2019

Colloque International Modélisation Stochastique et Statistique

24-26 November 2019, 4th Edition.

Faculty of Mathematics, USTHB,
BP 32 El-Alia, 16111, Bab-Ezzouar,
Algeries, Algeria.

Edited by

Prof. Kamal BOUKHETALA

Prof. Jean François DUPUY

Professor Kamal Boukhetala
Faculty of Mathematics, USTHB
BP 32 El-Alia, 16111, Bab-Ezzouar
kboukhetala@usthb.dz
Algeria

Professor Jean François Dupuy
Institut de Recherche Mathématique de Rennes
et INSA de Rennes
20 avenue des Buttes de Coesmes
CS 70839,35707, Rennes Cedex 7
France
Jean-Francois.Dupuy@insa-rennes.fr
<http://dupuy.perso.math.cnrs.fr/>

Preface

La Faculté de Mathématiques (USTHB) en collaboration avec le Laboratoire de Modélisation Stochastique Traitement de Données de l'USTHB (Algérie), organise la 4ème édition du Colloque International "Modélisation Stochastique et Statistique (MSS'2019)", avec la participation de l'Institut de recherche mathématique de Rennes, du Laboratoire Jean Kuntzmann (IMAR UMR CNRS 5224, Université de Grenoble), du Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS), du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville (LMPA), et de l'université Laval and Qatar Computing Research Institute (QCRI).

Objectifs du Colloque

Le colloque international Modélisation Stochastique et Statistique, dans sa quatrième édition, est une rencontre scientifique de haut niveau regroupant chercheurs universitaires et experts praticiens du calcul stochastique et statistique et ses applications dans les domaines socio économique, industriel et environnemental. Par les différents thèmes abordés, cette rencontre constituera un cadre idéal pour débattre et discuter des développements récents. Un atelier sur les données massives et l'intelligence artificielle et leurs applications sera animé par des spécialistes en la matière. D'autre part, cette rencontre offrira une occasion de rapprochement entre académiciens et professionnels en matière d'échange d'idées et d'expériences dans le domaine de l'utilisation de l'outil stochastique et statistique en analyse, modélisation, simulation et prospection pour l'aide à la prise de décision.

Thèmes du Colloque

- Analyse des Données, Applications.
- Calcul Numérique Stochastique Intensif et Optimisation.
- Modèles Econométriques, Applications Financières et Actuarielles.
- Processus Aléatoire.
- Statistique Computationnelle, Simulation.

Remerciements

Les organisateurs de la conférence et les éditeurs de ce volume souhaitent d'abord exprimer leur sincère gratitude aux auteurs des documents dans le présent volume, pour leur précieuse contribution et pour leur participation enthousiaste qui a fait de cette conférence un forum utile pour l'échange d'idées. Et remercie aussi les sponsors qui ont bien voulu contribuer à l'aboutissement de ce colloque. Nous tenons à exprimer notre gratitude aux membres du comité scientifique, et à tous les membres du comité local d'organisation.

Alger,
Novembre, 2019

K. Boukhetala
J.F. Dupuy

Comité d'Organisation

Ameraoui A	(USTHB, DZ)	Kadem S	(USTHB, DZ)
Bedrouni M	(USTHB, DZ)	Laouar A	(USTHB, DZ)
Benraouda A	(USTHB, DZ)	Medkour T	(USTHB, DZ)
Chouh M	(USTHB, DZ)	Tatachak A	(USTHB, DZ)
Fersi K	(TN)	Yahi M	(USTHB, DZ)
Guidoum A.C	(USTHB, DZ)		

International Scientific Committee

Adjabi S	(U. Béjaia, DZ)	Gamboa F	(U. Toulouse, FR)
Adjaoud F	(U. Ottawa, CA)	Guerbyenne H	(USTHB, DZ)
Aider M	(USTHB, DZ)	Guessoum Z	(USTHB, DZ)
Aïssani A	(USTHB, DZ)	Hamadouche M	(U. Tizi-Ouzou, DZ)
Aïssani D	(U. Béjaia, DZ)	Hamdi F	(USTHB, DZ)
Baggag A	(U. Laval, CA)	Khaldi K	(U. Boumerdes, DZ)
Benchettah A	(USTHB, DZ)	Marion J.M	(U. Angers, FR)
Benhenni K	(U. Grenoble, FR)	Mezerdi B	(U. Biskra, DZ)
Beninel F	(U. Poitiers, FR)	Mohdeb Z	(U. Constantine, DZ)
Boukhetala K	(USTHB, DZ)	Mourid T	(U. Tlemcen, DZ)
Bousbaine A	(Nestlé, SW)	Necir A	(U. Biskra, DZ)
Boutabia H	(U. Annaba, DZ)	Ould-Said E	(U. Littoral, FR)
Chauvet P	(U. Angers, FR)	Oulidi A	(U. Angers, FR)
Coeurjolly J.F	(U. Grenoble, FR)	Rachedi M	(U. Grenoble, FR)
Dahmani A	(U. Béjaia, DZ)	Radjef M.S	(U. Béjaia, DZ)
D'Aubigny G	(U. Grenoble, FR)	Rahmani F.L	(U. Constantine, DZ)
Djaballah K	(USTHB, DZ)	Rebbouh A	(USTHB, DZ)
Drouilhet R	(U. Grenoble, FR)	Remita R	(U. Annaba, DZ)
Dupuy J.F	(INSA Rennes, FR)	Sabre R	(U. Dijon, FR)
El Methni M	(U. Grenoble, FR)	Sadki O	(USTHB,DZ)
Fellag H	(U. Tizi-Ouzou, DZ)	Tatachak A	(USTHB, DZ)
Ferraty F	(U. Toulouse, FR)	Yousfate A	(U. Sid Bel Abbes, DZ)

Conférenciers Invités

Baggag A.	(U. Laval, Canada)	Louhichi S.	(IMAG, Grenoble, France)
Dupuy J.F	(INSA Rennes, France)	Ould-Said E.	(LMPA Joseph Liouville, France)

Contents

Preface	i
A. Conférences Plénières	3
Modèles de régression à inflation de zéros et applications en économétrie de la santé <i>Jean-François DUPUY</i>	5
Nonparametric relative error estimation of the regression function with application to real data <i>Elias OULD SAID</i>	9
Processus empiriques en apprentissage statistique <i>Sana LOUHICHI</i>	14
The Measure of Intelligence and Interpretability <i>Abdelkader BAGGAG</i>	22
B. Communications Orales	67
Part I: Analyse des Données, Applications	69
Improved estimation of the precision matrix of mixtures of Wisharts distributions when p is less than n <i>D.Boukehil, D. Fourdrinier, F. Mezoued, WE. Strawderman</i>	70
La factorisation en matrices non négatives pour la représentation des données actuarielles <i>M. Chouh, K.Boukhetala</i>	73
Ordres stochastiques sur les lois normales asymétriques et applications aux distributions de sélection <i>S. Merabet, R.Messaci</i>	77
Part II: Processus Aléatoire, Modèles Économétriques, Applications Financières et Actuariales	81
Estimation paramétrique dans un processus de diffusion transient <i>I. Abi-ayad, T. Mourid</i>	82
Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion <i>T.Akeb, O.Mellah, N. Challali</i>	87

A kernel estimator of the conditional quantile function with functional explanatory variable under censored data <i>F.Akkal</i>	91
Le modèle Markov-switching GARCH périodique: Théorie et application <i>B. Aliat, F.Hamdi,</i>	95
On Periodic INARMA (1,1) Models <i>N. Aries, M.Bentarzi</i>	99
Modèle de longue mémoire pure à coefficients de mémoire périodique <i>A.Amimour, K.Belaide</i>	103
Identification d'un modèle autorégressif à seuils avec zones tampons <i>I.Benameur, F.Hamdi</i>	107
On optimal control of mean field forward backward stochastic differential equations <i>R.Benbrahim, B.Gherbal</i>	112
Immersion des filtrations et transformations browniennes <i>A. Bouaka</i>	115
An inequality for tail probabilities and complete convergence for weighted sequences of LNQD random variables with application to first-order autoregressive processes model <i>Z.Boulenoir</i>	119
On the Orbital Search of Customers <i>Z. Boussaha, N. Oukid, H. Zaghdoudi</i>	122
Testing Discrete-Valued Time Series for Whiteness <i>H. Brairi, T. Medkour</i>	126
Structure Probabiliste d'une Classe de Modèles GARCH en Puissance Périodiques et à Seuil <i>H.Guerbyenne, A.Kessira</i>	130
Bernstein-Frechet inequalities for partial sums of NOD random variables and application to AR(1) model based on NOD errors. <i>I.Chebbab, S. Benaïssa</i>	135
Condition d'optimalité suffisante pour un contrôle sensibles au risque <i>S. Haddad, K. Belaide</i>	139
Testing Discrete-Valued Time Series for Whiteness <i>D.Hafayed, A.Chala</i>	143
Influence des données manquantes sur la prédiction des champs aléatoires stationnaires <i>A. Hamaz, O. Arezki</i>	143
The optimal portfolio with Levy process in incomplete markets model <i>M.Hammad, F.Limam-Belarbi</i>	148
Taylor series approximation of the MRSP N models the M-G-1-N-N queue with repeated attempts and server vacations <i>L. Ikhlef, D.Aïssani</i>	151
Normalité asymptotique locale (condition LAN) pour un processus ARH(1) <i>N. Kara Terki, T. Mourid</i>	155
Statistical Inference for Periodic Self-Exciting Threshold Integer-Valued Autoregressive Model <i>A. Mana, W. Bentarzi</i>	159
La Classe de Distribution de Survie NBU et ses variantes: Classification et Conservation <i>G. Saïdi</i>	163
Processus de Rosenblatt, Définitions et Description de sa distribution <i>B.Laala</i>	167
Modélisation et analyse de la communication RF dans les réseaux de capteurs via les files d'attente <i>O.Lekadir</i>	171

Nonparametric local linear estimator of the conditional hazard function in the functional single-index model <i>T.Merouan, B.Mechab, A. Chouaf</i>	175
Modèles à volatilité stochastique avec effet de levier, erreurs asymétriques et à queues épaisses <i>Y.Messaci, K.Boukhetala</i>	179
Efficient estimation in semiparametric PINAR(p) model <i>M.Sadoun, M. Bentarzi</i>	182
Options à barrière discrète <i>N.Zehani, R.Zehani</i>	186
Estimation de l'indice des valeurs extrêmes en présence de censure Etude de cas : Les durées de chômage en Algérie <i>N.Zouadi, G.Saidi</i>	190
Part III: Statistique Computationnelle, Simulation	195
Propriétés asymptotique de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel pour des données associées <i>L.Adjoudj, A. Tatachak</i>	196
Strong consistency rate of a kernel conditional hazard function estimator for truncated-dependent data <i>S.L. Affane, A. Tatachak, E. Ould Said</i>	200
Some simulations in a local scale regression model for truncated data <i>S.Aliouche, O. SADKI</i>	203
On the robust nonparametric regression estimation for a functional regressor <i>A.Bakhtaoui</i>	207
A Bayesian procedure for bandwidth selection in circular kernel density estimation <i>K.Bedouhene, N.Zougab</i>	211
Deconvolving Hazard Function for Associated Random Processes <i>M.E.Benjrada, K.Djaballah</i>	215
Asymptotic Results for Robust Regression Estimation with Incomplete and Dependent Data <i>H. Benseradj, Z.Guessoum</i>	220
Nonparametric estimation of the regression function for twice censored data <i>S.Benzamouche, E.Ould Said, O.Sadki</i>	224
Simulation de Données Incomplètes et Dépendantes et Calcul de l'Estimateur Non-Paramétrique de la Fonction de Régression <i>S.Bey, Z.Guessoum, A.Tatachak</i>	228
Application des divergences à l'estimation semi-paramétrique des copules pour des données censurées <i>M. Boukeloua</i>	232
Kernel conditional quantile estimator under LTRC model with functional regressors <i>H.Chemerik, Z. Guessoum</i>	236
A new size biased distribution : properties and application <i>S. Chouia, H.Zeghdoudi</i>	240
Asymptotic normality of a kernel conditional quantile estimator for censored-associated data <i>W.Djelladj, A.Tatachak</i>	243
Nonparametric relative error regression under random censorship data <i>O.Fetitah</i>	248

Asymptotic normality of robust kernel estimation under truncated and associated model <i>A.Gheliem, Z. Guessoum</i>	256
A New Type of An Asymmetric Kernel Estimators for non-negative and censored data <i>S. Ghettab, Z. Guessoum</i>	259
Singular optimal control of stochastic differential equations of McKean-Vlasov type via the differentiability with respect to probability law <i>L. Guenane, M.Hafayed</i>	263
Monte-Carlo simulation of first passage time in stochastic differential equations through time varying boundaries <i>A.Guidoum, K.Boukhetala</i>	266
Estimation du taux des rappels dans le système M.G.1 avec rappels linéaires <i>H.Hameche, L. Berdjoudj</i>	274
Consistance forte de l'estimateur à noyau de la régression relative pour des données tronquées à gauche et associées <i>F. Hamrani, Z. Guessoum, E.Ould Said, A. Tatachak</i>	278
Inférence statistique des modèles de survie <i>L.Harrouche, H.Fellag, L. Atil</i>	282
Uniform convergence of a Kernel conditional quantile estimator under left truncated data and functional regressors <i>N.Helal, E.Ould Said</i>	286
Bivariate copulas statistics and semi-parametric estimation <i>N.Idiou, F.Benatia, B.Brahimi</i>	290
Déviations Modérées et Grandes Déviations en Estimation à noyau de la densité sous censure <i>N.Kebir, O.Sadki</i>	290
Régression non-paramétrique relative dans le cas des variables quasi-associées <i>W.C. Mechab, A.Laksaci</i>	295
Le Système M.G.1 avec rappels, pannes et priorité <i>L. Raiah, N. Oukid</i>	299
Asymptotic normality of a kernel conditional mode function estimator for x-weakly dependent data <i>S.Rih, A. Tatachak</i>	304
Programme Unifié pour une étude comparative des modèles neuronaux et des modèles standards <i>F.Saadi, A.Chibat</i>	308
Quelques égalités pour les covariances entre statistiques d'ordre de vecteurs aléatoires trivariés <i>Z.Tabbech, R. Messaci</i>	312
Nonparametric estimation of the regression function for left truncated and right censored data <i>M. Yassa, O.Sadki</i>	316
Estimation non paramétrique du point de saut de la fonction de hasard pour des données censurées <i>N.Zaboot, Z. Guessoum</i>	320
Part IV: Calcul Numérique Stochastique Intensif et Optimisation	321
Observer Design for Nonlinear Systems by Using the enhanced High-Gain and LPV-LMI-Based Technique <i>H.Arezki, F.Bedouhene, A. Zemouche</i>	322

Approximation numérique des équations différentielles stochastiques sous fractionnaires <i>A.Belhadj, A.Kandouci</i>	326
Asymptotic comparaison of eigenvalues for GE-Wishart fractional <i>M.Belksier, H.Boutabia, R.Bougherra</i>	330
Necessary and sufficient conditions of optimality for linear FBDSDEs of mean field type <i>N. Berrouis, B.Gherbal</i>	334
Almost periodically unitary mild solution to semilinear stochastic differential equations <i>K.Slimi, M.Smaal, O.Mellah</i>	337
Application of the adaptive method on the semi-infinite optimization <i>A.Zaarat, S.Radjef</i>	341
C. Posters	345
Validation croisée non biaisée et estimation à noyau discret dans le modèle de stock de type (R,s,S) <i>F.Afroun, D.Aïssani, D.Hamadouche</i>	347
Estimation dans un modèle exponentiel généralisé en présence de censure progressive <i>K.Aïdi, N.Seddik-Ameur</i>	351
A kernel estimator of the conditional quantile function with functional explanatory variable under censored data <i>F. Akkal</i>	355
Estimators of continuous semi-Markov processus <i>C.Ayhar</i>	359
Bivariate copulas statistics and semi-parametric estimation <i>N.Idiou, F.Benatia, B.Brahimi</i>	364
L'estimation du paramètre de fitness <i>S.Bouhrara</i>	370
An inequality for tail probabilities and complete convergence for weighted sequences of LNQD random variables with application to first-order autoregressive processes model <i>Z.Boulenoir</i>	373
Bernstein-Frechet inequalities for partial sums of NOD random variables and application to AR(1) model based on NOD errors <i>I.Chebbab, S.Benaïssa</i>	376
A new size biased distribution : proprieties and application <i>S.Chouia, H.Zeghdoudi</i>	380
Locally modelled regression estimator for functional data <i>A.Gagui, A.Chouaf</i>	382
Asymptotic normality of a recursive estimator of a conditional hazard with functional stationary ergodic data <i>A.Goutal, B. Mechab, M.A. Issa, Y. Souddi</i>	385
Singular optimal control of stochastic differential equations of McKean-Vlasov type via the differentiability with respect to probability law <i>L.Guenane, M.Hafayed</i>	389
Maximizing The Utility Functions Of Consumption With a Complete Market <i>N.Sekal, F.Limam Belarbi</i>	392
Évaluation d'options européennes en présence d'une volatilité stochastique et d'une composante de saut <i>S.Kadem, K.Boukhetala</i>	396

Bayesian inference and prediction of the Exponential-Pareto distribution based on censored data <i>S.Kermoune, A. Chadli</i>	400
La théorie de crédibilité et l'estimation de la prime actuarielle <i>A.Khenoussi, H.Kherch Medjeden</i>	404
Nonparametric local linear estimator of the conditional hazard function in the functional single-index model <i>T.Merouan, B.Mechab, A.Chouaf</i>	408
Asymptotic study of robust nonparametric regression for a functional regres- sor <i>I.Metmous, M.K.Attouch</i>	412
For conditionally negatively associated random variables of partial sums, application to AR(1) model generated by F-NA errors <i>A.Zebalah, S.Benaissa</i>	416

A. Conférences Plénières

Modèles de régression à inflation de zéros et applications en économétrie de la santé

Jean-François Dupuy*

*INSA de Rennes, 20 Avenue des Buttes de Coesmes, 35708 Rennes, France
Jean-Francois.Dupuy@insa-rennes.fr,
<http://dupuy.perso.math.cnrs.fr/>

Résumé. Dans cet exposé, nous nous intéressons à l'estimation du modèle de régression binomial à inflation de zéros (modèle ZIB) lorsque les observations des régresseurs peuvent être manquantes aléatoirement. Nous décrivons tout d'abord la méthode d'estimation IPW ("Inverse-probability-weighting"), qui est une méthode générale d'estimation dans les problèmes à données manquantes. Nous l'appliquons au modèle ZIB et établissons les propriétés asymptotiques des estimateurs obtenus. Nous en évaluons les propriétés à distance finie au moyen de simulations puis nous illustrons la méthodologie sur un jeu de données réelles en économétrie de la santé.

1 Introduction

Les modèles de régression pour données de comptage (tels que les modèles binomial, binomial négatif, Poisson) sont couramment utilisés dans de nombreux domaines (épidémiologie, économétrie, assurance, etc), où ils permettent, par exemple, d'estimer la probabilité de survenue d'un événement donné chez un individu identifié par un ensemble de prédicteurs. Ces modèles permettent également d'identifier les déterminants de la survenue de cet événement (maladie, sollicitation d'une consultation auprès d'un praticien de santé, accident, etc). L'inférence statistique dans ces modèles est bien établie et repose généralement sur la méthode du maximum de vraisemblance, qui fournit des estimateurs consistants et asymptotiquement Gaussiens des paramètres du modèle (McCullagh et Nelder, 1983).

Ces modèles ont été étendus pour prendre en compte la présence de zéros en sur-nombre dans les données de comptage (on parle d'"excès de zéros" ou d'"inflation de zéros"), phénomène que l'on rencontre dans de nombreux champs d'applications : assurance (automobile en particulier, en raison du système de bonus-malus), économie (de la santé par exemple, dans l'étude de la consommation de soins et des déterminants du renoncement aux soins médicaux), épidémiologie, sociologie (étude des déterminants du non-recours aux prestations sociales) (Dupuy, 2018).

Hall (2000) a ainsi introduit le modèle de régression binomial à inflation de zéros (modèle "ZIB" pour "zero-inflated binomial"). Diallo et al. (2017) ont établi les propriétés asymptotiques des estimateurs du maximum de vraisemblance (emv) dans ce modèle.

Motivés par un jeu de données réelles en économétrie de la santé, nous nous intéressons ici au problème de l'estimation dans le modèle ZIB lorsque les observations des prédicteurs peuvent être manquantes aléatoirement.

2 Modèle de régression ZIB et données manquantes

2.1 Le modèle ZIB en bref

Notons Z_i l'observation du comptage sur l'individu i , $i = 1, \dots, n$. Un modèle ZIB est défini comme le mélange d'une loi dégénérée en 0 (c'est-à-dire, qui prend la valeur 0 avec probabilité 1) et du modèle de régression binomial :

$$Z_i \sim \begin{cases} 0 & \text{avec probabilité } p_i, \\ \mathcal{B}(m_i, \pi_i) & \text{avec probabilité } 1 - p_i, \end{cases} \quad (1)$$

où $\mathcal{B}(m_i, \pi_i)$ désigne la loi binomiale de paramètres m_i et π_i . Ici, p_i représente la probabilité pour que Z_i soit systématiquement égal à 0 (on l'appelle la probabilité d'inflation de zéros). Ce modèle se ramène au modèle binomial classique lorsque $p_i = 0$.

On modélise généralement les probabilités p_i et π_i par des régressions logistiques, c'est-à-dire, $\text{logit}(p_i) = \gamma^\top \mathbf{W}_i$ et $\text{logit}(\pi_i) = \beta^\top \mathbf{X}_i$, où $\mathbf{X}_i = (1, X_{i2}, \dots, X_{ip})^\top$ et $\mathbf{W}_i = (1, W_{i2}, \dots, W_{iq})^\top$ sont des ensembles de prédicteurs. Les vecteurs β et γ sont les paramètres inconnus du modèle et nous noterons $\psi = (\beta^\top, \gamma^\top)^\top$.

La log-vraisemblance de ψ au vu d'un échantillon indépendant d'observations $(Z_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i)$, $i = 1, \dots, n$ de $(Z, \mathbf{X}, \mathbf{W})$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \ell\ell_n(\psi) &= \sum_{i=1}^n \left\{ J_i \log \left(e^{\gamma^\top \mathbf{W}_i} + (1 + e^{\beta^\top \mathbf{X}_i})^{-m_i} \right) - \log \left(1 + e^{\gamma^\top \mathbf{W}_i} \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - J_i) \left[Z_i \beta^\top \mathbf{X}_i - m_i \log \left(1 + e^{\beta^\top \mathbf{X}_i} \right) \right] \right\}, \\ &:= \sum_{i=1}^n \ell_i(\psi), \end{aligned}$$

où $J_i := 1_{\{Z_i=0\}}$ (Hall, 2000). L'emv $\hat{\psi}_n$ de ψ est obtenu en résolvant (numériquement, car elle n'admet pas de solution explicite) l'équation de vraisemblance $U_n(\psi) = 0$, où :

$$U_n(\psi) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial \ell\ell_n(\psi)}{\partial \psi} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(\psi)}{\partial \psi} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \dot{\ell}_i(\psi).$$

Cet estimateur est consistant et asymptotiquement Gaussien (Diallo et al., 2017).

2.2 Estimation IPW dans le modèle ZIB à données manquantes

On s'intéresse à la situation, très courante dans les applications, où les prédicteurs sont observés avec des données manquantes. Supposons que les ensembles de prédicteurs \mathbf{X} et \mathbf{W} se décomposent sous la forme $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(obs)}, \mathbf{X}^{(miss)})^\top$ et $\mathbf{W} = (\mathbf{W}^{(obs)}, \mathbf{W}^{(miss)})^\top$,

où $\{\mathbf{X}^{(obs)}, \mathbf{W}^{(obs)}\}$ et $\{\mathbf{X}^{(miss)}, \mathbf{W}^{(miss)}\}$ contiennent respectivement les parties observées et manquantes de $\{\mathbf{X}, \mathbf{W}\}$. Notons $\mathbf{S} = (Z, \mathbf{X}^{(obs)\top}, \mathbf{W}^{(obs)\top})^\top$ l'ensemble des prédicteurs qui sont toujours observés. Alors $\{Z, \mathbf{X}, \mathbf{W}\} = \{\mathbf{S}, \mathbf{X}^{(miss)}, \mathbf{W}^{(miss)}\}$.

For chaque individu $i = 1, \dots, n$, nous définissons la variable indicatrice δ_i qui vaut 1 si $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i\}$ est complètement observé et 0 sinon. Nous supposons que $\{\mathbf{X}_i^{(miss)}, \mathbf{W}_i^{(miss)}\}$ sont manquants aléatoirement (ou ‘‘MAR’’, dans la typologie des données manquantes, voir Rubin (1983)), ce qui s'exprime de la façon suivante, en terme de probabilité d'observation des données :

$$\mathbf{P}(\delta_i = 1 | \mathbf{S}_i, \mathbf{X}_i^{(miss)}, \mathbf{W}_i^{(miss)}) = \mathbf{P}(\delta_i = 1 | \mathbf{S}_i).$$

La méthode IPW (‘‘Inverse-probability-weighting’’, ou pondération par l'inverse de la probabilité d'observation des données) est une méthode générale d'estimation dans les problèmes à données manquantes (Tsiatis, 2007). Elle consiste à utiliser pour l'estimation les individus complètement observés et à pondérer leur contribution par la probabilité d'observation. Ainsi, l'estimateur IPW de ψ dans le modèle (1) est-il obtenu en résolvant l'équation d'estimation suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\mathbf{P}(\delta_i = 1 | \mathbf{S}_i)} \dot{\ell}_i(\psi) = 0. \quad (2)$$

En pratique, bien sûr, les probabilités $\mathbf{P}(\delta_i = 1 | \mathbf{S}_i)$ sont inconnues et doivent être estimées. Un choix naturel consiste à les modéliser par une régression logistique. Posons $r_i(\alpha) := \mathbf{P}(\delta_i = 1 | \mathbf{S}_i)$ et supposons :

$$r_i(\alpha) = \frac{\exp(\alpha^\top \mathbf{S}_i)}{1 + \exp(\alpha^\top \mathbf{S}_i)},$$

où α est un paramètre de régression inconnu. Ce paramètre peut être estimé par maximum de vraisemblance. On obtient donc tout d'abord $\hat{\alpha}_n = \arg \max_{\alpha} \prod_{i=1}^n \{r_i(\alpha)^{\delta_i} (1 - r_i(\alpha))^{1-\delta_i}\}$, sur la base de l'ensemble des n observations. Puis on estime ψ par la solution $\hat{\psi}_n$ de l'équation d'estimation

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{r_i(\hat{\alpha}_n)} \dot{\ell}_i(\psi) = 0, \quad (3)$$

qui est une version approchée de l'équation (2).

3 Résultats

Nous montrons que l'estimateur IPW $\hat{\psi}_n$, solution de l'équation d'estimation (3), est un estimateur consistant et asymptotiquement Gaussien. Nous obtenons un estimateur consistant de sa variance asymptotique, ce qui autorise la construction d'intervalles de confiance et de règles de décision pour des problèmes de test. Nous présentons ensuite les résultats d'une étude de simulations qui évalue les propriétés de $\hat{\psi}_n$ pour différentes tailles d'échantillons, différents niveaux d'inflation de zéros et différentes proportions de données manquantes.

Nous comparons également l'estimateur IPW à l'estimateur obtenu par imputation multiple. Nous évaluons enfin la robustesse de l'estimateur IPW à une mauvaise spécification du modèle pour les probabilités d'observation. Nous montrons que le modèle de régression logistique non-paramétrique, combiné à une méthode d'estimation spline, fournit une alternative robuste pour modéliser ces probabilités d'observation dans la méthode IPW.

Références

- Diallo, A. O., A. Diop, et J.-F. Dupuy (2017). Asymptotic properties of the maximum likelihood estimator in zero-inflated binomial regression. *Communications in Statistics - Theory and Methods* 46, 9930–9948.
- Dupuy, J.-F. (2018). *Méthodes statistiques pour l'analyse de données de comptage sur-dispersées*. ISTE Ltd, Londres.
- Hall, D. B. (2000). Zero-inflated poisson and binomial regression with random effects: a case study. *Biometrics* 56, 1030–1039.
- McCullagh, P. et J. A. Nelder (1983). *Generalized Linear Models*. Springer Verlag.
- Rubin, D. B. (1983). Inference and missing data. *Biometrika* 63, 581–592.
- Tsiatis, A. (2007). *Semiparametric Theory and Missing Data*. Springer Series in Statistics, Springer, New York.

Summary

In this talk, we focus on estimation in the zero-inflated binomial regression model (ZIB model) when some regressors are missing at random. First, we briefly review the IPW estimation method, which is a general estimation method for missing data problems. We adapt this method to the setting of ZIB model and we establish asymptotic properties of the resulting estimate. We evaluate finite-sample properties of the estimate via simulations. The methodology is illustrated on a data set in health econometric.

Nonparametric relative error estimation of the regression function with application to real data

BOUHADJERA Ferie ^{*,**} OULD SAÏD Elias. ^{**}
REMITA Mohamed Riad ^{*}

^{*} Université Badji-Mokhtar, Lab. de Probabilités et Statistique. BP 12, 23000 Annaba, Algérie.
ferielbouhadjera@gmail.com, medriad.remita@univ-annaba.dz,

^{**} Université du Littoral Côte d'Opale. L.M.P.A. IUT de Calais. 19, rue Louis David. Calais, 62228, France
elias.ould-said@univ-littoral.fr

Résumé. Dans un modèle de censure, la variable d'intérêt est assujétie par une autre variable aléatoire. Dans ce travail nous construisons un nouvel estimateur à noyau obtenu par minimisation de l'erreur relative. Sous des conditions standards, nous établissons la convergence presque sûre avec vitesse sur un compact. La normalité asymptotique est établie en explicitant la variance asymptotique, ce qui a permis d'établir des intervalle de confiance.. Des simulations ont montrées la supériorité du nouvel estimateur. Une application à des données réelles sur la durée de vie suite à une intervention du cancer de la peau

1 Introduction

Let (X, T) be a random pair of variables valued in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ where T is a response for which we want to build a model based on the factor X . For that purpose, the classical regression function $m(\cdot) = \mathbf{E}[T|\mathbf{X} = \cdot]$ is known to be the minimizer of the mean squared error $MSE(\cdot) := \mathbf{E}[(T - m(\mathbf{X}))^2 | \mathbf{X} = \cdot]$, but the latter is very sensitive to outliers. To overcome this drawback, several methods have been used, we quote the M-estimation method (see Huber (1981), Collomb and Härdle 1986, and the local polynomial method see Fan and Gijbels (1996). In this paper we consider another approach which allows to build an efficient predictor even if the data are affected by the presence of very high outliers. Our regression function is obtained as a minimizer of the following mean squared relative error,

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{T - r(\mathbf{X})}{T}\right)^2 | \mathbf{X}\right]. \quad (1)$$

The latter is a more meaningful measure of performance for a predictor than the usual MSE in the presence of outliers. It is easy to see that the solution of the minimization problem of (1) is given by

$$r(X) = \frac{\mathbf{E}[T^{-1}|\mathbf{X}]}{\mathbf{E}[T^{-2}|\mathbf{X}]} \quad (2)$$

Nonparametric relative error estimation of the regression function

Park and Stefansky (1998) showed that the solution given by (2) satisfies

$$\frac{\mathbf{E}[\mathbf{T}^{-1}|\mathbf{X}]}{\mathbf{E}[\mathbf{T}^{-2}|\mathbf{X}]} \leq \mathbf{E}[\mathbf{T}|\mathbf{X}] \quad (3)$$

almost surely, provided that the two first conditional inverse moments are finite. Because of the robustness of relative error estimation against outliers, the latter is often more adequate than the classical MSE-based method. Recall that Jones *et al.* studied relative error prediction via kernel regression smoothers. They stated asymptotic results for bias and variance terms. In many practical problems, the data under study are not always completely available for the practitioner. For example, in medical follow-up studies, it often happens for various reasons, that the duration of interest cannot be observed. This may be due to the withdrawal of patients at the beginning or end of the study period. These values are censored. Although unknown, these values must be taken (by the means of the censoring dates) into account to obtain a correct estimate and precise predictions. For such practical data, conventional statistical procedures are no longer valid and more elaborate techniques are used to model such data.

One of the classical cases of incomplete data is the right-censoring model where instead of observing the interest r.v., we observe another r.v. C . Thus, the observed data reduce to the triplet (X, Y, δ) where $Y = T \wedge C$ and $\delta = I_{\{T \leq C\}}$, with \wedge denotes the minimum and I_A is the indicator function of the event A .

The literature on censored data is very huge and without pretending to exhaustivity, we quote the works of Beran (1981), Dabrowska (1987). Since the last two decades, several authors like Carbonez *et al.* (1995), Lemdani and Ould Said (2017) used the so-called synthetic data in modeling censorship in order to take into account the censoring effect via the distribution function G of the r.v. C . For that, we consider the observable couple (Y, δ) and we put :

$$T^{*, -\ell} = \frac{\delta Y^{-\ell}}{\overline{G}(Y)}, \quad \ell = 1, 2$$

where $\overline{G} := 1 - G$ denotes the survival function.

All along this paper, we suppose that :

$$(T, X) \quad \text{and} \quad C \quad \text{are independent.}$$

This condition is plausible whenever the censoring is independent of the characteristics of the patient under the study. Then from the two last conditions we get,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[T^{*, -\ell}|\mathbf{X}] &= \mathbf{E}\left[\frac{\delta Y^{-\ell}}{\overline{G}(Y)}|\mathbf{X}\right] \\ &= \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left[\frac{\delta Y^{-\ell}}{\overline{G}(Y)}|\mathbf{T}, \mathbf{X}\right]|\mathbf{X}\right\} \\ &= \mathbf{E}\left\{\frac{\mathbf{T}^{-\ell}}{\overline{G}(\mathbf{T})}\mathbf{E}[I_{\{T \leq C\}}|\mathbf{T}]|\mathbf{X}\right\} \\ &= \mathbf{E}[T^{-\ell}|\mathbf{X}]. \end{aligned}$$

2 Definition of the estimator

We consider independent and identically distributed (i.i.d.) random vectors $(T_i, C_i, X_i), i = 1, \dots, n$ where T_i are the variables of interest with distribution function (d.f.) F , C_i are right censoring variables with d.f. G and the \mathbf{R} -valued random variables X_i denote the covariates with density function f_X . We assume that the r.v.'s. T_i and C_i are almost surely nonnegative and independent of each other. From now on, when no confusion is possible, for any generic strictly positive constant M , we assume

$$\forall T > 0, \exists M, \text{ such that } M \geq T^{-\ell}, \text{ for } \ell = 1, 2.$$

The study we perform below is to estimate

$$r(x) = \frac{\int t^{-1} f_{T|X}(t|x) dt}{\int t^{-2} f_{T|X}(t|x) dt} = \frac{r_1(x)}{r_2(x)} =: \frac{\mu_1(x)}{\mu_2(x)} \quad (4)$$

where $r_\ell(\cdot) = \mathbf{E}[T^{-\ell} | \mathbf{X} = \cdot]$ and $\mu_\ell(\cdot) = r_\ell(\cdot) f_X(\cdot)$ for $\ell = 1, 2$. Thus, the direct analogous well known Nadaraya-Watson (1964) (NW) estimator of (4) is given by

$$r_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n T_i^{-1} K_h(x - X_i)}{\sum_{i=1}^n T_i^{-2} K_h(x - X_i)},$$

where the bandwidth $h := h_n$ is a sequence of positive real numbers that decreases to zero when $n \rightarrow +\infty$ and $K_h(\cdot) = K(\cdot/h)$ is a kernel function defined in \mathbf{R} .

In modelling censored data and following Carbonez *et al.*, we define $\tilde{r}(x)$ as a "pseudoe estimator" of $r(x)$, given by, for any $x \in \mathbf{R}$

$$\tilde{r}(x) =: \frac{\tilde{\mu}_1(x)}{\tilde{\mu}_2(x)} \quad (5)$$

where

$$\tilde{\mu}_\ell(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i Y_i^{-\ell}}{\bar{G}(Y_i)} K_h(x - X_i). \quad (6)$$

The latter can not be calculated as \bar{G} is unknown. Then to define a genuine estimator of $r(\cdot)$, we replace \bar{G} by its Kaplan and Meier (1958) estimator which is defined by

$$\bar{G}_n(t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1 - \delta_i}{n - i + 1}\right)^{I_{\{Y_i \leq t\}}} & \text{if } t < Y_{(n)}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (7)$$

Nonparametric relative error estimation of the regression function

where $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(n)}$ are the order statistics of the Y_i 's and δ_i is the indicator of non-censoring. The properties of $\widehat{G}_n(t)$ have been studied by many authors. So a calculable estimator of $r(\cdot)$ is given by

$$\widehat{r}(x) =: \frac{\widehat{r}_1(x)}{\widehat{r}_2(x)} \quad (8)$$

where

$$\widehat{r}_\ell(x) = \frac{\widehat{\mu}_\ell(x)}{\widehat{f}_X(x)} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i Y_i^{-\ell}}{\widehat{G}_n(Y_i)} K_h(x - X_i)}{\sum_{i=1}^n K_h(x - X_i)} \quad (9)$$

for $\ell = 1, 2$ and $\widehat{f}_X(\cdot)$ is the well-known kernel estimator of the marginal density function $f_X(\cdot)$.

3 Results

Our results are the following. The first theorem is a strong uniform consistency result with a rate for $\widehat{r}(\cdot)$.

Theorem 1

Under standard assumptions concerning the kernel, bandwidth and the regression function and its first and second derivatives we have :

$$\sup_{x \in \mathcal{C}} |\widehat{r}(x) - r(x)| = O_{a.s.} \left\{ \max \left(\left(\frac{\log n}{nh} \right)^{1/2}, h^2 \right) \right\} \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

The second theorem focuses on the asymptotic normality of the estimator. Note that,

$$\Sigma(x) = \begin{pmatrix} \Upsilon_2(x) & \Upsilon_3(x) \\ \Upsilon_3(x) & \Upsilon_4(x) \end{pmatrix}$$

is the covariance matrix, with

$$\Upsilon_j(x) = \int \frac{t^{-j}}{\widehat{G}(t)} f_{T,X}(t, x) dt, \quad \text{for } j = 2, 3, 4. \quad (10)$$

Now we are in position to give our asymptotic normality result.

Theorem 2

Suppose that assumptions of Theorem hold and other assumptions concerning $\Upsilon_j(\cdot)$ $j = 2, 3, 4$ hold. Let $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{C} \text{ and } \mu_\ell(x) \neq 0, \ell = 1, 2 \text{ and } \Upsilon_j(x) \neq 0, j = 2, 3, 4\}$, we have

$$\sqrt{nh}(\widehat{r}(x) - r(x)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x)) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

where

$$\sigma^2(x) = \kappa \frac{\Upsilon_2(x)\mu_2^2(x) - 2\Upsilon_3(x)\mu_1(x)\mu_2(x) + \Upsilon_4(x)\mu_1^2(x)}{\mu_2^4(x)}$$

for $\kappa = \int K^2(t)dt$ and $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ denotes the convergence in distribution.

Références

- [1] Carbonez A., Györfi L., Van Der Meulen E.C. (1995). Partitioning estimates of a regression function under random censoring. *Statist. and Decisions*, **76**, 1335-1344.
- [2] Dabrowska, D. (1987). Nonparametric regression with censored survival data. *Scand. J. Statist.*, **14**, 181-197.
- [3] Fan, J., Gijbels, I. *Local Polynomial Modelling and Its Applications*. **66**, 1996.
- [4] Jones, M.C., Park, H., Shin, K.I., Vines, S.K., Jeong, S .O. (2008). Relative error prediction via kernel regression smoothers. *Journal of Statist. Plann. and Infer.*, **138**, 2887-2898.
- [5] Kaplan, E.L., Meier, P. (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations. *J. Amer. Stat. Assoc.*, **53**, 458-481.
- [6] Lemdani, M., Oud Saïd, E. (2017). Nonparametric robust regression estimation for censored data. *Statist. Papers*, **58**, 505-525.

Summary

In censorship models the random variable (r.v.) of interest is subject to random censoring by another random variable. In this framework, we build a new kernel estimator based on the so-called synthetic data of the mean squared relative error for the regression function. We establish its strong uniform convergence with a rate over a compact set and asymptotic normality. The asymptotic variance is explicitly given and as a product we give confidence bands. A simulation study is conducted to support our theoretical results and show the advantages compared with other methods. Finally, we apply our methodology to real data to show the superiority of the relative error regression (RER) estimator to other estimators.

Processus empiriques en apprentissage statistique MSS'2019

Sana Louhichi*,

* Laboratoire Jean Kunzmann
sana.louhichi@univ-grenoble-alpes.fr,

Résumé. L'objectif de cet exposé est de présenter quelques techniques issues de la théorie des processus empiriques utiles pour la prédiction en apprentissage statistique.

1 Introduction

Un objectif majeur de l'apprentissage statistique est d'apprendre des données afin d'expliquer et de prédire un phénomène. Lorsque les données se présentent sous la forme (entrée, sortie), on parlera de l'apprentissage statistique supervisé. Lorsque les sorties prennent des valeurs discrètes (typiquement, binaire) pour chaque entrée, on parlera d'un problème de classification supervisée. La classification supervisée est le contexte d'étude de cet exposé.

Sur n individus tirés au hasard, on observe les couples aléatoires $(X_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n}$, qu'on suppose de même loi que le couple (X, Y) de loi inconnue. La variable aléatoire X (respectivement Y) est définie sur un espace métrique \mathcal{X} (respectivement \mathcal{Y}).

Un des objectifs de la classification supervisée est alors de prédire une sortie pour une entrée donnée, cela revient donc à construire, en se basant sur les observations $\mathcal{D}_n = \{(X_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n}\}$, une fonction de prédiction (appelée aussi classifieur), il s'agit donc d'une fonction :

$$\begin{aligned} f &: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \\ x &\mapsto f(x) := f(x, \mathcal{D}_n) \end{aligned}$$

La prédiction d'une entrée observée x est alors $f(x)$. Cela va de soi que l'intérêt portera sur la construction du "meilleur classifieur". Le classifieur est qualifié de "meilleur" parmi un ensemble de classifieurs s'il a le plus petit risque, dans cet ensemble de classifieurs, de se tromper dans la classification.

Une manière de construire ce "meilleur classifieur" est de le prendre celui qui minimise l'erreur empirique de la classification, parmi tous les classifieurs d'une classe de fonctions \mathcal{F} . L'erreur de la classification est définie par le risque empirique suivant,

$$\mathcal{R}_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{Y_i \neq f(X_i)},$$

et on s'intéresse, donc, au classifieur \hat{f} définie par,

$$\hat{f} \in \operatorname{argmin}_{f \in \mathcal{F}} \mathcal{R}_n(f).$$

Processus empiriques en apprentissage statistique

Afin d'étudier les qualités de ce classifieur, on peut comparer son risque à celui du risque minimal "abstrait" sur la classe des classifieurs \mathcal{F} , définie (en notant $R(f) = P(Y \neq f(X))$) par,

$$\inf_{f \in \mathcal{F}} R(f) = \inf_{f \in \mathcal{F}} P(Y \neq f(X)).$$

Son risque étant

$$R(\hat{f}) = P(Y \neq f(X) | (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n))$$

Il s'agit donc d'étudier l'erreur stochastique,

$$R(\hat{f}) - \inf_{f \in \mathcal{F}} R(f)$$

Puisque,

$$R(\hat{f}) - \inf_{f \in \mathcal{F}} R(f) \leq 2 \sup_{f \in \mathcal{F}} |\mathcal{R}_n(f) - R(f)|,$$

la question revient à étudier l'écart uniforme sur la classe des classifieurs \mathcal{F} de $|\mathcal{R}_n(f) - R(f)|$.

2 Objectifs de l'exposé

L'objectif de cet exposé est de présenter des inégalités dite de concentration utile afin d'étudier cette déviation uniforme

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |\mathcal{R}_n(f) - R(f)|.$$

Ces inégalités de concentration donnent des bornes pour la probabilité de déviation uniforme de $\sup_{f \in \mathcal{F}} |\mathcal{R}_n(f) - R(f)|$ en fonction de n la taille des données d'apprentissage et d'une certaine quantité en rapport avec la complexité de la classe des classifieurs \mathcal{F} .

On discutera le cadre où les données d'apprentissage $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ sont indépendantes et aussi dépendantes.

Références

O. Bousquet, S. Boucheron, and G. Lugosi, (2004). Introduction to statistical learning theory. in O. Bousquet, U.v. Luxburg, and G. Rätsch (editors), *Advanced Lectures in Machine Learning*, Springer, pp. 169–207, 2004.

Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J.(2001) *The elements of statistical learning*, Springer.

W. Hoeffding (1963). Probability inequalities for sums of bounded random variables. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 58, no. 301, 13-30.

C. McDiarmid. On the method of bounded differences. In J. Siemons, editor, *Surveys in Combinatorics*, volume 141 of *London Mathematical Society Lecture Notes*, pages 148-188. Cambridge University Press, 1989.

M. Simon, A.M. -Reza, S. Louhichi, M. Clausel, (2018). Rademacher Generalization Bounds for Classifier Chains, <https://arxiv.org/abs/1807.10166>.

E. Rio, (2000). Inégalités de Hoeffding pour les fonctions Lipschitziennes de suites dépendantes. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 330(10) :905-908.

V. Vapnik, A. Chervonenkis (1971). On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities. *Theory of Probability and Its Applications*, 16(2) :264-280.

Summary

The purpose of this paper is to present some techniques from the theory of empirical processes useful for prediction in statistical learning.

Nonparametric relative error estimation of the regression function with application to real data

BOUHADJERA Ferie ^{*,**} OULD SAÏD Elias. ^{**}
REMITA Mohamed Riad ^{*}

^{*} Université Badji-Mokhtar, Lab. de Probabilités et Statistique. BP 12, 23000 Annaba, Algérie.
ferielbouhadjera@gmail.com, medriad.remita@univ-annaba.dz,

^{**} Université du Littoral Côte d'Opale. L.M.P.A. IUT de Calais. 19, rue Louis David. Calais, 62228, France
elias.ould-said@univ-littoral.fr

Résumé. Dans un modèle de censure, la variable d'intérêt est assujétie par une autre variable aléatoire. Dans ce travail nous construisons un nouvel estimateur à noyau obtenu par minimisation de l'erreur relative. Sous des conditions standards, nous établissons la convergence presque sûre avec vitesse sur un compact. La normalité asymptotique est établie en explicitant la variance asymptotique, ce qui a permis d'établir des intervalle de confiance.. Des simulations ont montrées la supériorité du nouvel estimateur. Une application à des données réelles sur la durée de vie suite à une intervention du cancer de la peau

1 Introduction

Let (X, T) be a random pair of variables valued in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ where T is a response for which we want to build a model based on the factor X . For that purpose, the classical regression function $m(\cdot) = \mathbf{E}[T|\mathbf{X} = \cdot]$ is known to be the minimizer of the mean squared error $MSE(\cdot) := \mathbf{E}[(T - m(\mathbf{X}))^2 | \mathbf{X} = \cdot]$, but the latter is very sensitive to outliers. To overcome this drawback, several methods have been used, we quote the M-estimation method (see Huber (1981), Collomb and Härdle 1986, and the local polynomial method see Fan and Gijbels (1996). In this paper we consider another approach which allows to build an efficient predictor even if the data are affected by the presence of very high outliers. Our regression function is obtained as a minimizer of the following mean squared relative error,

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{T - r(\mathbf{X})}{T}\right)^2 | \mathbf{X}\right]. \quad (1)$$

The latter is a more meaningful measure of performance for a predictor than the usual MSE in the presence of outliers. It is easy to see that the solution of the minimization problem of (1) is given by

$$r(X) = \frac{\mathbf{E}[T^{-1}|\mathbf{X}]}{\mathbf{E}[T^{-2}|\mathbf{X}]} \quad (2)$$

Nonparametric relative error estimation of the regression function

Park and Stefansky (1998) showed that the solution given by (2) satisfies

$$\frac{\mathbf{E}[\mathbf{T}^{-1}|\mathbf{X}]}{\mathbf{E}[\mathbf{T}^{-2}|\mathbf{X}]} \leq \mathbf{E}[\mathbf{T}|\mathbf{X}] \quad (3)$$

almost surely, provided that the two first conditional inverse moments are finite. Because of the robustness of relative error estimation against outliers, the latter is often more adequate than the classical MSE-based method. Recall that Jones *et al.* studied relative error prediction via kernel regression smoothers. They stated asymptotic results for bias and variance terms. In many practical problems, the data under study are not always completely available for the practitioner. For example, in medical follow-up studies, it often happens for various reasons, that the duration of interest cannot be observed. This may be due to the withdrawal of patients at the beginning or end of the study period. These values are censored. Although unknown, these values must be taken (by the means of the censoring dates) into account to obtain a correct estimate and precise predictions. For such practical data, conventional statistical procedures are no longer valid and more elaborate techniques are used to model such data.

One of the classical cases of incomplete data is the right-censoring model where instead of observing the interest r.v., we observe another r.v. C . Thus, the observed data reduce to the triplet (X, Y, δ) where $Y = T \wedge C$ and $\delta = I_{\{T \leq C\}}$, with \wedge denotes the minimum and I_A is the indicator function of the event A .

The literature on censored data is very huge and without pretending to exhaustivity, we quote the works of Beran (1981), Dabrowska (1987). Since the last two decades, several authors like Carbonez *et al.* (1995), Lemdani and Ould Said (2017) used the so-called synthetic data in modeling censorship in order to take into account the censoring effect via the distribution function G of the r.v. C . For that, we consider the observable couple (Y, δ) and we put :

$$T^{*, -\ell} = \frac{\delta Y^{-\ell}}{\overline{G}(Y)}, \quad \ell = 1, 2$$

where $\overline{G} := 1 - G$ denotes the survival function.

All along this paper, we suppose that :

$$(T, X) \quad \text{and} \quad C \quad \text{are independent.}$$

This condition is plausible whenever the censoring is independent of the characteristics of the patient under the study. Then from the two last conditions we get,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[T^{*, -\ell}|\mathbf{X}] &= \mathbf{E}\left[\frac{\delta Y^{-\ell}}{\overline{G}(Y)}|\mathbf{X}\right] \\ &= \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left[\frac{\delta Y^{-\ell}}{\overline{G}(Y)}|\mathbf{T}, \mathbf{X}\right]|\mathbf{X}\right\} \\ &= \mathbf{E}\left\{\frac{\mathbf{T}^{-\ell}}{\overline{G}(\mathbf{T})}\mathbf{E}[I_{\{T \leq C\}}|\mathbf{T}]|\mathbf{X}\right\} \\ &= \mathbf{E}[T^{-\ell}|\mathbf{X}]. \end{aligned}$$

2 Definition of the estimator

We consider independent and identically distributed (i.i.d.) random vectors $(T_i, C_i, X_i), i = 1, \dots, n$ where T_i are the variables of interest with distribution function (d.f.) F , C_i are right censoring variables with d.f. G and the \mathbf{R} -valued random variables X_i denote the covariates with density function f_X . We assume that the r.v.'s. T_i and C_i are almost surely nonnegative and independent of each other. From now on, when no confusion is possible, for any generic strictly positive constant M , we assume

$$\forall T > 0, \exists M, \text{ such that } M \geq T^{-\ell}, \text{ for } \ell = 1, 2.$$

The study we perform below is to estimate

$$r(x) = \frac{\int t^{-1} f_{T|X}(t|x) dt}{\int t^{-2} f_{T|X}(t|x) dt} = \frac{r_1(x)}{r_2(x)} =: \frac{\mu_1(x)}{\mu_2(x)} \quad (4)$$

where $r_\ell(\cdot) = \mathbf{E}[T^{-\ell} | \mathbf{X} = \cdot]$ and $\mu_\ell(\cdot) = r_\ell(\cdot) f_X(\cdot)$ for $\ell = 1, 2$. Thus, the direct analogous well known Nadaraya-Watson (1964) (NW) estimator of (4) is given by

$$r_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n T_i^{-1} K_h(x - X_i)}{\sum_{i=1}^n T_i^{-2} K_h(x - X_i)},$$

where the bandwidth $h := h_n$ is a sequence of positive real numbers that decreases to zero when $n \rightarrow +\infty$ and $K_h(\cdot) = K(\cdot/h)$ is a kernel function defined in \mathbf{R} .

In modelling censored data and following Carbonez *et al.*, we define $\tilde{r}(x)$ as a "pseudo-estimator" of $r(x)$, given by, for any $x \in \mathbf{R}$

$$\tilde{r}(x) =: \frac{\tilde{\mu}_1(x)}{\tilde{\mu}_2(x)} \quad (5)$$

where

$$\tilde{\mu}_\ell(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i Y_i^{-\ell}}{\bar{G}(Y_i)} K_h(x - X_i). \quad (6)$$

The latter can not be calculated as \bar{G} is unknown. Then to define a genuine estimator of $r(\cdot)$, we replace \bar{G} by its Kaplan and Meier (1958) estimator which is defined by

$$\bar{G}_n(t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1 - \delta_i}{n - i + 1}\right)^{I_{\{Y_i \leq t\}}} & \text{if } t < Y_{(n)}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (7)$$

Nonparametric relative error estimation of the regression function

where $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(n)}$ are the order statistics of the Y_i 's and δ_i is the indicator of non-censoring. The properties of $\widehat{G}_n(t)$ have been studied by many authors. So a calculable estimator of $r(\cdot)$ is given by

$$\widehat{r}(x) =: \frac{\widehat{r}_1(x)}{\widehat{r}_2(x)} \quad (8)$$

where

$$\widehat{r}_\ell(x) = \frac{\widehat{\mu}_\ell(x)}{\widehat{f}_X(x)} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i Y_i^{-\ell}}{\widehat{G}_n(Y_i)} K_h(x - X_i)}{\sum_{i=1}^n K_h(x - X_i)} \quad (9)$$

for $\ell = 1, 2$ and $\widehat{f}_X(\cdot)$ is the well-known kernel estimator of the marginal density function $f_X(\cdot)$.

3 Results

Our results are the following. The first theorem is a strong uniform consistency result with a rate for $\widehat{r}(\cdot)$.

Theorem 1

Under standard assumptions concerning the kernel, bandwidth and the regression function and its first and second derivatives we have :

$$\sup_{x \in \mathcal{C}} |\widehat{r}(x) - r(x)| = O_{a.s.} \left\{ \max \left(\left(\frac{\log n}{nh} \right)^{1/2}, h^2 \right) \right\} \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

The second theorem focuses on the asymptotic normality of the estimator. Note that,

$$\Sigma(x) = \begin{pmatrix} \Upsilon_2(x) & \Upsilon_3(x) \\ \Upsilon_3(x) & \Upsilon_4(x) \end{pmatrix}$$

is the covariance matrix, with

$$\Upsilon_j(x) = \int \frac{t^{-j}}{\widehat{G}(t)} f_{T,X}(t, x) dt, \quad \text{for } j = 2, 3, 4. \quad (10)$$

Now we are in position to give our asymptotic normality result.

Theorem 2

Suppose that assumptions of Theorem hold and other assumptions concerning $\Upsilon_j(\cdot)$ $j = 2, 3, 4$ hold. Let $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{C} \text{ and } \mu_\ell(x) \neq 0, \ell = 1, 2 \text{ and } \Upsilon_j(x) \neq 0, j = 2, 3, 4\}$, we have

$$\sqrt{nh}(\widehat{r}(x) - r(x)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x)) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

where

$$\sigma^2(x) = \kappa \frac{\Upsilon_2(x)\mu_2^2(x) - 2\Upsilon_3(x)\mu_1(x)\mu_2(x) + \Upsilon_4(x)\mu_1^2(x)}{\mu_2^4(x)}$$

for $\kappa = \int K^2(t)dt$ and $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ denotes the convergence in distribution.

Références

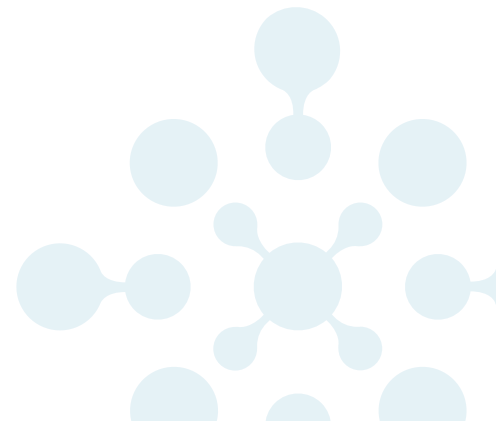
- [1] Carbonez A., Györfi L., Van Der Meulen E.C. (1995). Partitioning estimates of a regression function under random censoring. *Statist. and Decisions*, **76**, 1335-1344.
- [2] Dabrowska, D. (1987). Nonparametric regression with censored survival data. *Scand. J. Statist.*, **14**, 181-197.
- [3] Fan, J., Gijbels, I. *Local Polynomial Modelling and Its Applications*. **66**, 1996.
- [4] Jones, M.C., Park, H., Shin, K.I., Vines, S.K., Jeong, S .O. (2008). Relative error prediction via kernel regression smoothers. *Journal of Statist. Plann. and Infer.*, **138**, 2887-2898.
- [5] Kaplan, E.L., Meier, P. (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations. *J. Amer. Stat. Assoc.*, **53**, 458-481.
- [6] Lemdani, M., Oud Saïd, E. (2017). Nonparametric robust regression estimation for censored data. *Statist. Papers*, **58**, 505-525.

Summary

In censorship models the random variable (r.v.) of interest is subject to random censoring by another random variable. In this framework, we build a new kernel estimator based on the so-called synthetic data of the mean squared relative error for the regression function. We establish its strong uniform convergence with a rate over a compact set and asymptotic normality. The asymptotic variance is explicitly given and as a product we give confidence bands. A simulation study is conducted to support our theoretical results and show the advantages compared with other methods. Finally, we apply our methodology to real data to show the superiority of the relative error regression (RER) estimator to other estimators.

The Measure of Intelligence and Interpretability

Dr. Abdelkader Baggag



Good vs Bad

- If you're on the apocalyptic end of the spectrum, the AI revolution will automate millions of jobs, eliminate the barrier between reality and artifice, and, eventually, force humanity to the brink of extinction.
 - What I argue is that most AI *right now* is only useful in narrow, niche domains for which its underlying software has been specifically trained, like playing an ancient Chinese board game or translating text in one language into another.
 - Hence there is a crying need to clearly define and measure "Intelligence" and "interpret" results obtained from "AI systems".
-

Outline

- Big Data, Machine Learning, Deep Learning, Artificial Intelligence
 - Representation Learning
 - Generative Models
 - Human-Imitative AI – Building Blocks
 - Intelligence Augmentation (IA)
 - Intelligent Infrastructure (II)
 - Measure of Intelligence
 - Failures of current AI systems
 - Interpretability – LIME, SHAP
-

last 2 years	-●	\geq	total size of data created since beginning of history
2002	-●	\approx	5 ExaBytes = since the beginning of history (Intel)
2002 – 2012	-●	\approx	2.7 ZettaBytes = 10^{12} GigaBytes
2018	-●	\approx	4.4 ZettaBytes
2020	-●	\approx	44 ZettaBytes = 44×10^{12} GB
every minute	-●		300 video-hours uploaded on YouTube
every minute	-●		200 emails exchanged
every second	-●		40,000 documents searched (Google)
scale	-●		We can store \approx 3,333 books in 1 GB

- We are drowning in (big) data !
 - China, EU, USA: developed (independently) a comprehensive research strategy for big data, to become world leaders in the field.
-

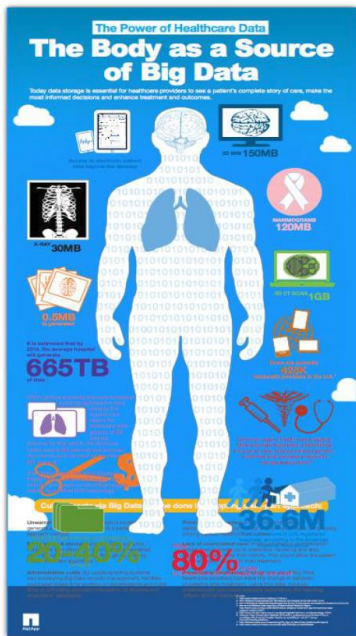
Artificial Intelligence – a Revolution in the Making

- Artificial Intelligence (AI) is the mantra of the current era.
 - The phrase is used by technologists, academicians, journalists and venture capitalists alike.
 - The idea that our era is somehow seeing the emergence of an intelligence that rivals our own entertains all of us — charming us and frightening us in equal measure.
 - And, unfortunately, it distracts us.
 - **Whether or not we come to understand “intelligence”, we do have a major challenge on our hands in bringing together computers and humans in ways that enhance human life.**
 - In this case, “artificial intelligence,” can be viewed as the creation of a new branch of engineering. Much like civil engineering and chemical engineering in decades past, this new discipline (i.e., AI Engineering) aims to put together the power of a few key ideas, bringing new resources and capabilities to people, and doing so safely.
-

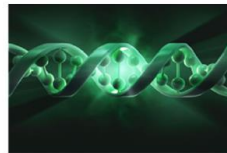
AI Engineering – New Branch

- Whereas civil engineering and chemical engineering were built on physics and chemistry, this new engineering discipline will be built on ideas from the preceding century.
 - ideas such as information, algorithm, data, uncertainty, computing, inference, and optimization.
 - Moreover, since much of the focus of the new discipline will be on data from and about humans, its development will require perspectives from the social sciences and humanities.
 - While the building blocks have begun to emerge, the principles for putting these blocks together have not yet emerged, and so the blocks are currently being put together in ad-hoc ways.
-

ML in Biomedical Research



Drug research



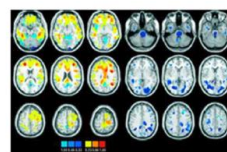
Genomics



Patient records



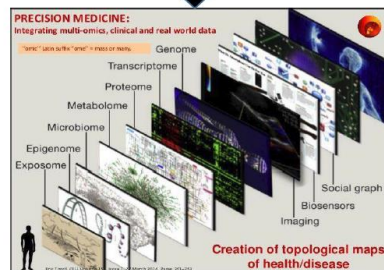
Social media



Diagnostic test



Home monitoring

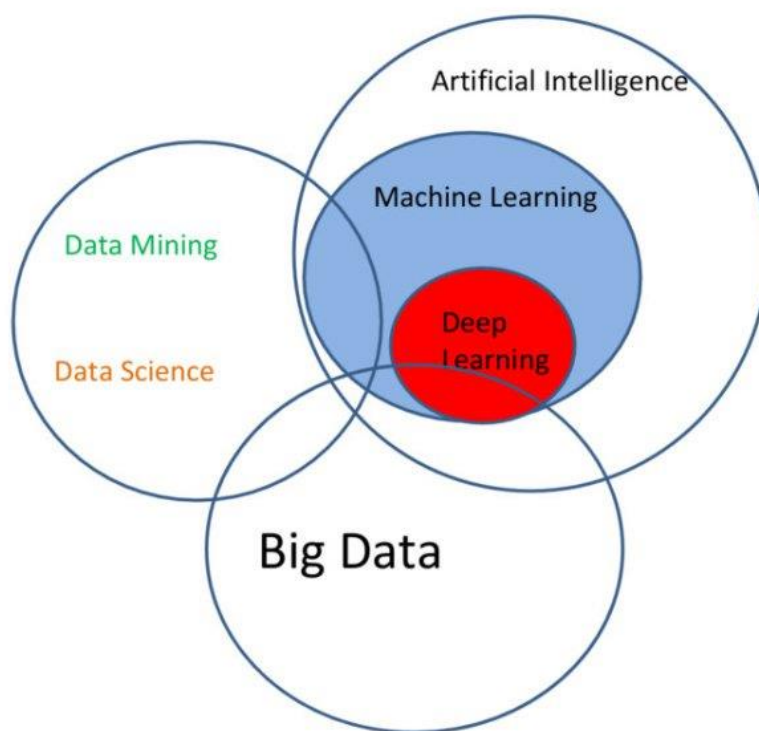


Artificial Intelligence vs. Machine Learning

- Let us begin by considering more carefully what “AI” has been used to refer to, both recently and historically.
 - Most of what is being called “AI” today, is what has been called “Machine Learning” (ML) for the past several decades.
 - ML is an algorithmic field that blends ideas from statistics, computer science and many other disciplines to design algorithms that process data, make predictions and help make decisions.
 - In terms of impact on the real world, ML is the real thing, and not just recently.
 - E.g., forward-looking companies such as Amazon were already using ML throughout their business, solving mission-critical back-end problems in fraud detection and supply-chain prediction, and building innovative consumer-facing services such as recommendation systems.
 - As datasets and computing resources grew rapidly, it became clear that ML would soon power not only Amazon but essentially any company in which decisions could be tied to large-scale data.
-

Data Science

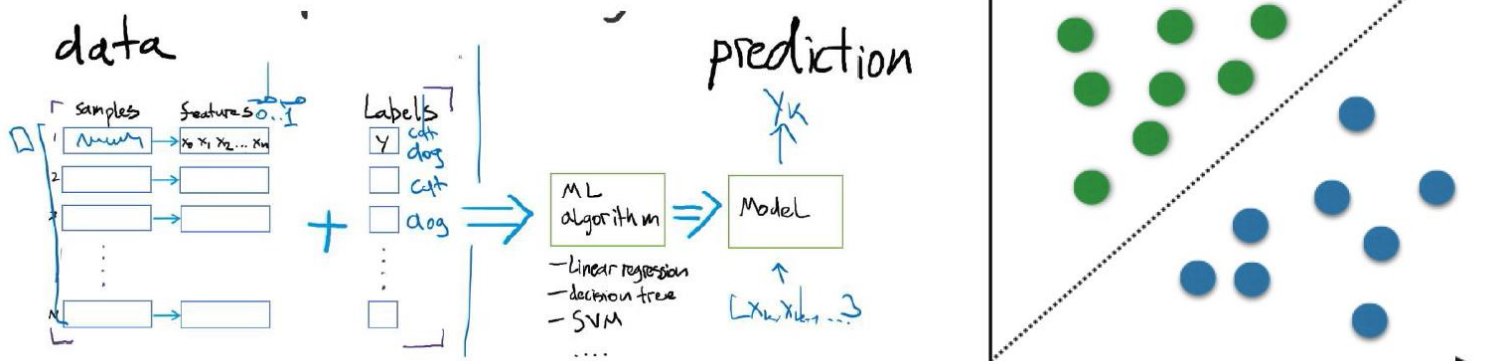
- The phrase “Data Science” began to be used to refer to this phenomenon, reflecting the need of ML algorithms experts to partner with database and distributed-systems experts to build scalable, robust ML systems, and reflecting the larger social and environmental scope of the resulting systems.
 - *This confluence of ideas and technology trends has been rebranded as “AI” over the past few years.*
 - Historically, the phrase “AI” was coined in the late 1950’s to refer to the aspiration of realizing in software and hardware an entity possessing human-level intelligence.
 - We will use the phrase “**human-imitative AI**” to refer to this aspiration, emphasizing the notion that the artificially intelligent entity should seem to be one of us.
-



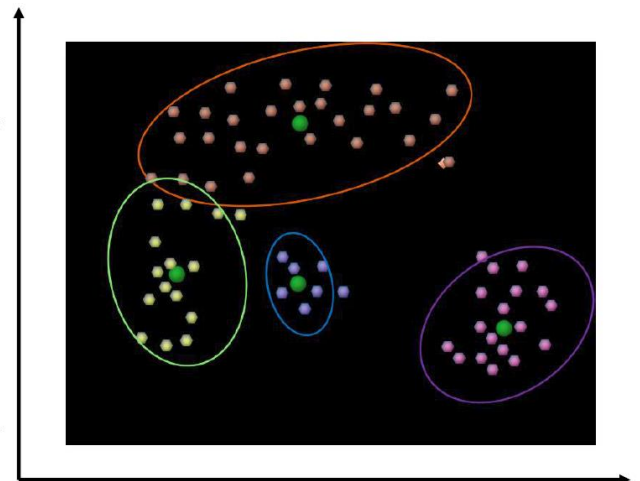
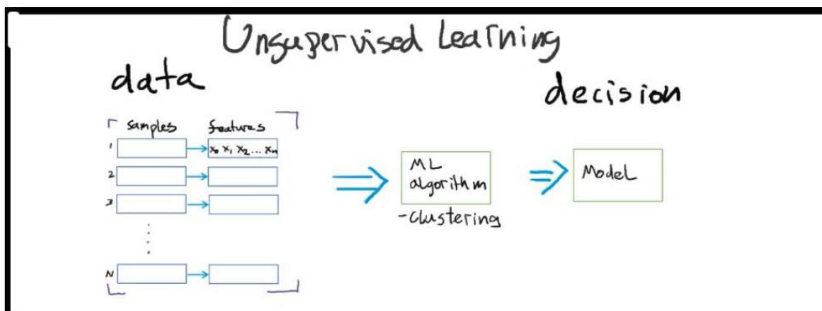
Learning From Data – Learning Paradigms

- **Supervised Learning:** use labeled training data to generalize labels to new instances.
 - Function approximation: learning to map input to output.
 - **Unsupervised Learning:** make sense of unlabeled data.
 - Data description: taking the data that you've got and finding some more compact way of describing it.
-

Supervised learning

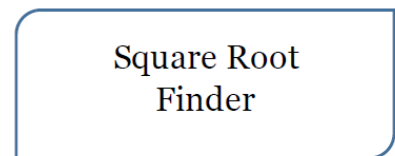
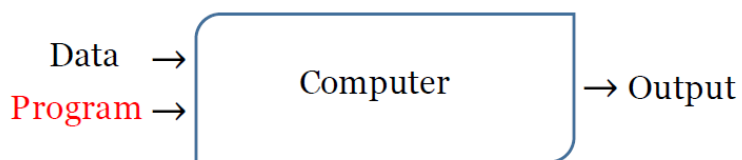


Unsupervised learning

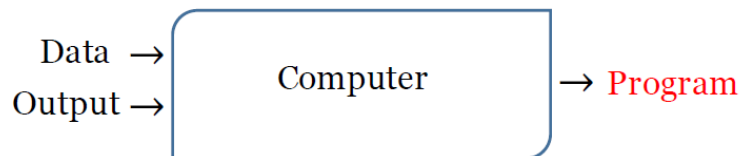


Change in Paradigm

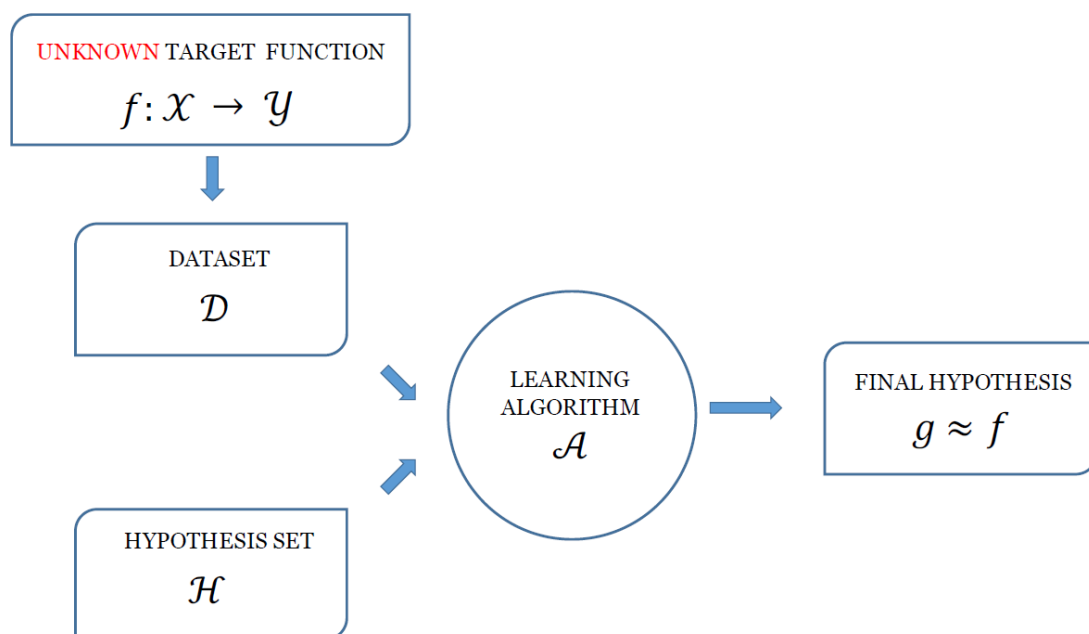
Traditional Programming



Learning From Data



Learning From Data



Empirical (Structural) Risk Minimization

Framework to Design Learning Algorithms

- Learning is cast as Optimization

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{w}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell(y_i, f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{w})) + \lambda \mathcal{R}_{\mathcal{D}}(\mathbf{w})$$

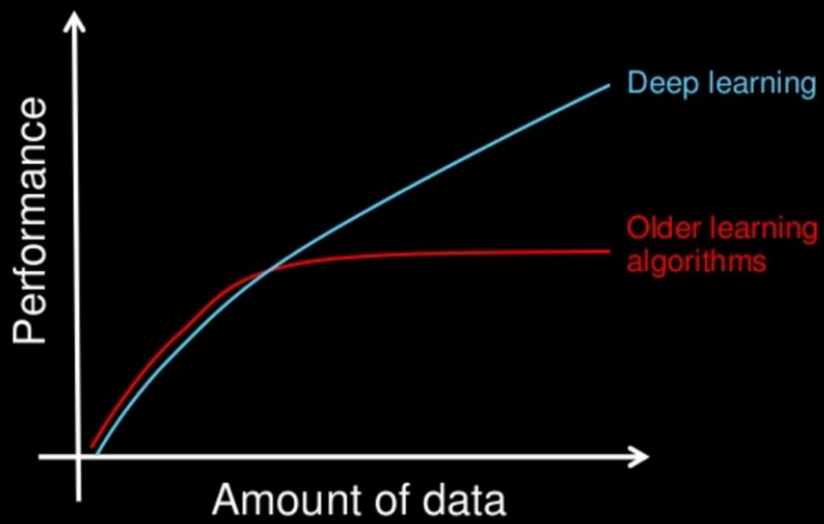
- $f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{w})$
 - $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}(\mathbf{w})$: regularizer penalizes certain values of \mathbf{w}
 - Optimization technique, e.g., gradient descent (and its variants).
-

Optimization Procedure

To apply this algorithm (to neural networks) we need

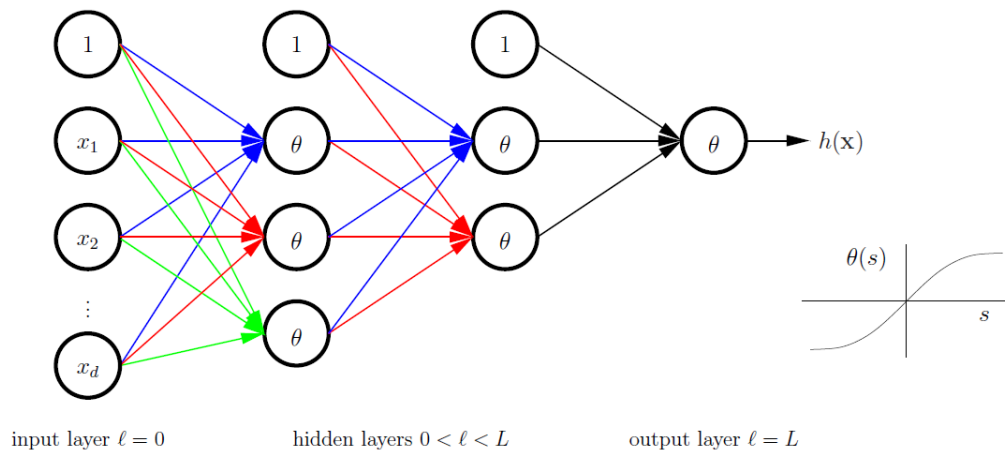
- 1 The loss function $\ell(y_i, f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}))$
- 2 a procedure to compute the parameter gradients $\partial_{\mathbf{w}} [\ell(y_i, f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}))]$
- 3 the regularizer $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}(\mathbf{w})$ and its gradient $\partial_{\mathbf{w}} \mathcal{R}_{\mathcal{D}}(\mathbf{w})$
- 4 initialization method for the parameters \mathbf{w}

Why deep learning

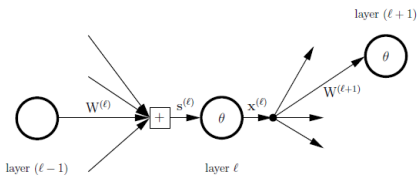
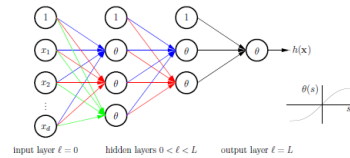


How do data science techniques scale with amount of data?

- Deep learning allows for efficient modeling of nonlinear functions.
- The advantage of deep hidden layers is for a high dimensional input variable $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^T$ is that the activation functions are univariate, which implicitly requires the specification of the number of hidden units N_ℓ for each layer ℓ .



Zooming into a Hidden Node



layer ℓ parameters

signals in	$\mathbf{s}^{(\ell)}$	$d^{(\ell)}$ dimensional input vector
outputs	$\mathbf{x}^{(\ell)}$	$d^{(\ell)} + 1$ dimensional output vector
weights in	$W^{(\ell)}$	$(d^{(\ell-1)} + 1) \times d^{(\ell)}$ dimensional matrix
weights out	$W^{(\ell+1)}$	$(d^{(\ell)} + 1) \times d^{(\ell+1)}$ dimensional matrix

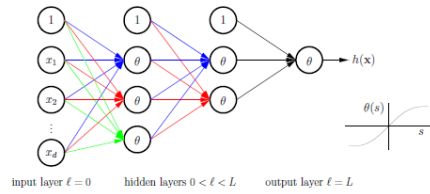
layers $\ell = 0, 1, 2, \dots, L$
 layer ℓ has "dimension" $d^{(\ell)} \implies d^{(\ell)} + 1$ nodes

$$W^{(\ell)} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^{(\ell)} & \mathbf{w}_2^{(\ell)} & \dots & \mathbf{w}_{d^{(\ell)}}^{(\ell)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Linear Signal

Input $s^{(\ell)}$ is a linear combination (using weights) of the outputs of the previous layer $\mathbf{x}^{(\ell-1)}$.

$$\mathbf{s}^{(\ell)} = (\mathbf{W}^{(\ell)})^T \mathbf{x}^{(\ell-1)}$$



$$\begin{bmatrix} s_1^{(\ell)} \\ s_2^{(\ell)} \\ \vdots \\ s_j^{(\ell)} \\ \vdots \\ s_{d(\ell)}^{(\ell)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{w}_1^{(\ell)})^T \\ (\mathbf{w}_2^{(\ell)})^T \\ \vdots \\ (\mathbf{w}_j^{(\ell)})^T \\ \vdots \\ (\mathbf{w}_{d(\ell)}^{(\ell)})^T \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(\ell-1)}$$

$$s_j^{(\ell)} = (\mathbf{w}_j^{(\ell)})^T \mathbf{x}^{(\ell-1)}$$

(recall the linear signal $s = \mathbf{w}^T \mathbf{x}$)

$$\mathbf{s}^{(\ell)} \xrightarrow{\theta} \mathbf{x}^{(\ell)}$$

Machine Learning Tools

- Programming libraries for development:
 - TensorFlow
 - Theano
 - Torch
 - Programming language: Python
 - BigML is Machine Learning made easy
 - Gym – Reinforcement Learning
-

Google, Netflix, Facebook, Amazon, etc.

- Although not visible to the general public, research and systems-building in areas such as document retrieval, text classification, fraud detection, recommendation systems, personalized search, social network analysis, planning, etc., have been a major success.
 - These are the advances that have powered companies such as Google, Netflix, Facebook and Amazon.
 - One could simply agree to refer to all of this as "AI"
 - and indeed that is what appears to have happened.
 - Such labeling may come as a surprise to optimization or statistics researchers, who wake up to find themselves suddenly referred to as "AI researchers."
-

Intelligence Augmentation (IA)

- The past two decades have seen major progress — in industry and academia — in a complementary aspiration to human-imitative AI that is often referred to as “Intelligence Augmentation” (IA).
 - Here computation and data are used to create **services that augment human intelligence and creativity**. A search engine can be viewed as an example of IA (it augments human memory and factual knowledge), as can natural language translation (it augments the ability of a human to communicate).
 - Services of this kind mostly perform various kinds of string-matching and numerical operations that capture patterns that humans can make use of.
-

Intelligent Infrastructure (II)

- Such infrastructure is beginning to make its appearance in domains such as transportation, medicine, commerce and finance, with vast implications for individual humans and societies.
 - For example, we might imagine living our lives in a “societal-scale medical system” that sets up data flows, and data-analysis flows, between doctors and devices positioned in and around human bodies, thereby able to aid human intelligence in making diagnoses and providing care.
 - The system would incorporate information from cells in the body, DNA, blood tests, environment, population genetics and the vast scientific literature on drugs and treatments.
 - It can focus on a single patient and a doctor, and/or on relationships among group of people (e.g., family, etc.)
-

Challenges in Intelligent Infrastructure

- It is not hard to pinpoint algorithmic and infrastructure challenges in II systems that are not central themes in human-imitative AI research.
 - II systems require the ability to manage distributed repositories of knowledge that are rapidly changing and are likely to be globally incoherent.
 - Such systems must cope with multiple interactions in making timely, distributed decisions and they must deal with phenomena whereby there is lots of data on some individuals and little data on most individuals.
 - They must address the difficulties of sharing data across administrative and competitive boundaries.
-

Current Flaws in AI Systems

- Thus, just as humans built buildings and bridges before there was civil engineering, humans are proceeding with the building of societal-scale, inference-and-decision-making systems that involve machines, humans and the environment.
 - Just as early buildings and bridges sometimes fell to the ground — in unforeseen ways and with tragic consequences — many of our early societal-scale inference-and-decision-making systems are already exposing serious **conceptual flaws**.
 - Unfortunately, we are not very good at anticipating what the next emerging serious flaw will be. What we're missing is an engineering discipline with its principles of analysis and design.
-

Remember the Uber self-driving car that killed a woman crossing the street? The AI had no clue about jaywalkers

- The self-driving Uber car that hit and killed a woman walking her bike across a street wasn't designed to detect "jaywalking pedestrians."
 - That's according to an official dossier published by the US National Safety Transportation Board (NTSB) on Tuesday, Nov. 6, 2019
 - An investigation by the NTSB into the crash has pinpointed a major contributing factor: **the code couldn't recognize her as a pedestrian, because she was not at an obvious designated crossing.**
 - Rather than correctly anticipating her movements as a person moving across the road, it ended up running right into her.
 - The system had initially classified her as an 'other' object which are not assigned goals.
 - The computer-vision systems in self-driving cars are trained to identify things, such as other vehicles, trees, sign posts, bicycles, and so on, and make decisions on what to do next using that information.
-

Uber's Self-Driving Car Accident

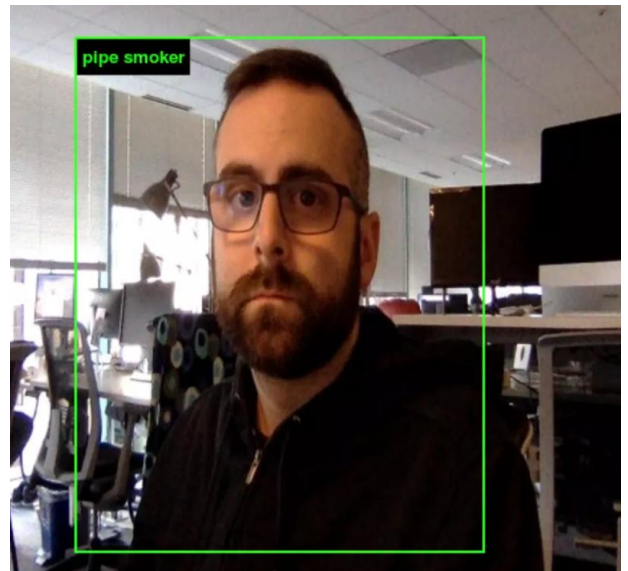
- Crucially, the software was "unable to correctly predict the path" of Elaine Herzberg, the report noted.
 - Perhaps if it had correctly identified her early on as a person crossing the street, it could have dramatically slowed down or otherwise tried to avoid her.
 - But it did not anticipate the collision because, for the most part, it considered her to be some unknown object not in the way.
 - So how smart are "smart cars"?
-

See how an AI system classifies you based on your selfie

- ImageNet Roulette will take a try at categorizing you, and it will fail.
 - ImageNet Roulette uses an open source Caffe deep learning framework trained on the images and labels in the “person” categories
 - When a user uploads a picture, the application first runs a face detector to locate any faces. If it finds any, it sends them to the Caffe model for classification.
 - The application then returns the original images with a bounding box showing the detected face and the label the classifier has assigned to the image. If no faces are detected, the application sends the entire scene to the Caffe model and returns an image with a label in the upper left corner.
-

ImageNet Roulette Example 1

- He does not even smoke.
- But for some reason, ImageNet Roulette thinks that he does.



ImageNet Roulette Example 2

- He is in an open office.
- ImageNet Roulette thinks that he is located in an airplane.



ImageNet

- ImageNet contains a number of problematic, offensive and bizarre categories.
 - Some use racist terminology.
 - Hence, the results ImageNet Roulette returns will also draw upon those categories.
 - That is by design: we want to shed light on what happens when technical systems are trained on problematic training data.
 - AI classifications of people are rarely made visible to the people being classified.
 - ImageNet Roulette provides a glimpse into that process and shows the ways things can go wrong.
-

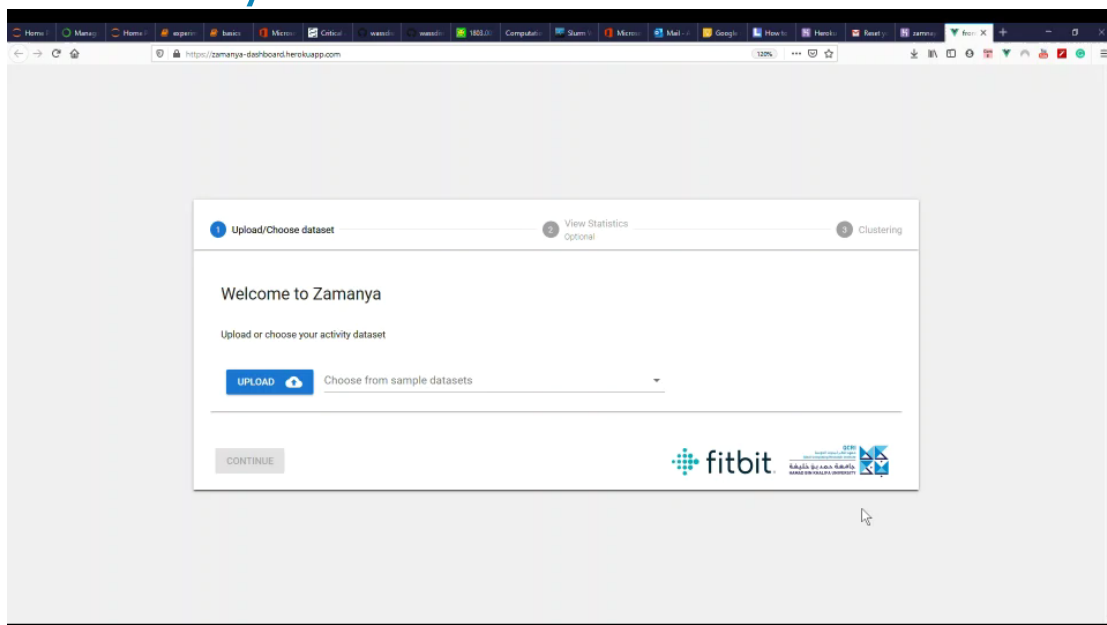
Random Selection at the Airport

- Being selected at the airport for deeper checking.
- Is it really random?

Data Changes Everything – How Data Scientists Understand Machine Learning Models

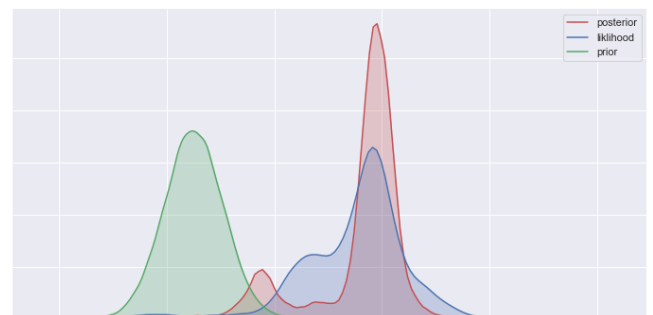
- Without good models and the right tools to interpret them, data scientists risk making decisions based on hidden biases, spurious correlations, and false generalizations.
 - This has led to a rallying cry for **model interpretability**.
 - Yet the concept of interpretability remains vague and ill-defined, such that researchers and tool designers lack actionable guidelines for how to incorporate interpretability into models and accompanying tools.
 - One solution is to designing a visual analytics system to explore how interactive interfaces could better support model interpretation, to explain machine learning models.
-

Zamanya – Framework for Time-Series Abstractions for Health Analytics



Interpretable Bayesian Learning for Health Analytics

- Incorporating Bayesian methods to Deep Learning models can help solve several issues currently faced in the Machine Learning field.
- Need to interpret decisions of such models.
- Installing black-box models in rich production environments without knowing its uncertainties, and biases may lead to intolerable mistakes.



$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Building Blocks of Interpretability

- With the growing success of neural networks, there is a corresponding need to be able to explain their decisions — including building confidence about how they will behave in the real-world, detecting model bias, and for scientific curiosity.
 - The machine learning community has primarily focused on developing powerful methods, such as
 - feature visualization (what is a neuron looking for?), attribution (how does it affect the output?), and
 - dimensionality reductionfor reasoning about neural networks.
 - On the other hand, the human-computer interaction (HCI) community has begun to explore rich user interfaces for neural networks, but they have not yet engaged deeply with these abstractions.
 - Build interfaces that show *what* the network detects and explain *how* it develops its understanding, while keeping the amount of information *human-scale*.
-

Feature Visualization

- Feature visualization allows us to see how GoogLeNet, trained on the ImageNet dataset, builds up its understanding of images over many layers.

Activation Atlas

- By using feature inversion to visualize millions of activations from an image classification network, we create an explorable *activation atlas* of features the network has learned which can reveal how the network typically represents some concepts.

The Measure of Intelligence

- To make deliberate progress towards more intelligent and more human-like artificial systems, we need to be able to define and evaluate intelligence in a way that enables comparisons between two systems, as well as comparisons with humans.
 - Only measuring skill at any given task falls short of measuring intelligence, because skill is heavily modulated by prior knowledge and experience. Hence, unlimited priors hinders generalization.
 - Describing intelligence as skill-acquisition efficiency is not sufficient.
 - To make progress towards the promise of AI, we need precise, quantitative definitions and measures of intelligence.
 - These would not be merely definitions, but precise, explanatory definitions meant to serve as an objective function showing the way towards a clear target, capable of acting as a reliable measure of our progress.
-

AI Evaluation

- “Intelligence measures an agent’s ability to achieve goals in a wide range of environments.”
 - **Task specific skill** (achieving goals);
 - **Generality and adaptation** (in a wide range of environments).
 - To truly achieve generality, the agent would have to be able to learn to handle new tasks (skill acquisition).
 - From measuring skills to measuring broad abilities.
 - **System-centric generalization**: it is the ability of a learning system to handle situations it has not itself encountered before.
 - **Developer-aware generalization**: it is the ability of a system to handle situations that neither the system nor the developer of the system have encountered before.
 - There are critical pieces to be accounted for in characterizing intelligent systems.
 - Must be integrated in the II systems.
-

•



B. Communications Orales

Part I: Analyse des Données, Applications

Improved estimation of the precision matrix of mixtures of Wisharts distributions when p is less than n

Djamila Boukehil^{*,**}, Dominique Fourdrinier^{**}
 Fatiha Mezoued^{*}, William E. Strawderman^{***}

^{*}École Nationale Supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée
 LAMOPS, Tipaza, Algeria
 famezoued@yahoo.fr,

^{**}Université de Normandie, UNIROUEN, UNIHAVRE, INSA Rouen
 LITIS; avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Étienne-du-Rouvray, France
 djamila.boukehil@etu.univ-rouen.fr, Dominique.Fourdrinier @univ-rouen.fr

^{***}Rutgers University, Department of Statistics and Biostatistics
 561 Hill Center, Busch Campus Piscataway NJ 08854, USA
 straw@stat.rutgers.edu

Résumé. In this note, we consider estimation of the precision matrix Σ^{-1} of a scale mixture of Wishart matrices under Efron-Morris type losses $\text{Tr}\{[\hat{\Sigma}^{-1} - \Sigma^{-1}]^2 S^k\}$ for $k = 0, 1, 2, \dots$, where S is the sample matrix. We provide estimators improving on the standard estimators of the form $a S^{-1}$ where a is a positive constant and S^{-1} is the inverse of S .

1 Introduction

Consider the mixture distributional model

$$\begin{cases} S | V \sim \mathcal{W}_p(n, V \Sigma) \\ V \sim \mathcal{H} \end{cases} \quad (1)$$

where $(n, V \Sigma)$ denotes the Wishart distribution with n degrees of freedom and covariance matrix $V \Sigma$ and where \mathcal{H} is a distribution on R_+ . Note that $\tilde{S} = S/V \sim \mathcal{W}_p(n, \Sigma)$.

We deal with estimation of the precision matrix Σ^{-1} under the risks given by

$$R_k(\Sigma^{-1-1}, \hat{\Sigma}^{-1}) = E_{\Sigma}[\text{Tr}\{[\hat{\Sigma}^{-1} - \Sigma^{-1}]^2 S^k\}], k = 0, 1, 2, \dots$$

where E_{Σ} denotes the expectation with respect to the model in (1) and $\text{Tr}[A]$ denotes the trace of a matrix A .

Our development is structured as follows. In Section 2, we give the reference estimators of Σ^{-1} . In Section 3, we consider alternative estimators and we express the risk difference between these estimators and the standard estimators $a S^{-1}$. In Section 4, we give dominance results for Haff type estimators. Conclusions are stated in Section 5.

2 Reference estimators $a S^{-1}$

The usual estimators of Σ^{-1} are of the form

$$\hat{\Sigma}_a^{-1} = a S^{-1},$$

where a is a positive constant. For $k = 1, 2$ and 3 , the best constant of a is

$$\begin{array}{ll} - n - p - 1 & \text{if } k = 1; \\ - n & \text{if } k = 2; \\ - n + p + 1 & \text{if } k = 3. \end{array}$$

For $k = 0$ and $k \geq 4$, the best constant a does not exist however we suggest an alternative value of a which give a reasonable estimators as follows

When $k = 0$ and $a_0 = n - p - 2$, the reasonable estimator $a_0 S^{-1}$ improves on $a S^{-1}$ for any $a \geq a_0$. When $k \geq 4$ and $a_0 = n + p + k - 2$, the reasonable estimator $a_0 S^{-1}$ improves on $a S^{-1}$ for any $a \leq a_0$.

3 Alternative estimators

We consider alternative inverse scatter matrix estimators to $a S^{-1}$ of the forme

$$\hat{\Sigma}_{a,c}^{-1} = a S^{-1} + c S G(S)$$

where c is a constant and $G(S)$ is a homogeneous matrix function of degree α . To develop the risk difference between any alternative estimator in estimators and $a S^{-1}$, we need the so-called Stein-Haff identity for the Wishart distribution $\mathcal{W}_p(n, V \Sigma)$, derived by Fourdrinier, Haddouche and Mezoued [2].

lemma1 Stein-Haff type identity : Let \tilde{S} a $p \times p$ matrix having a Wishart distribution. For any $p \times p$ matrix function $G(\tilde{S})$ which is weakly differentiable with respect to \tilde{S} , we have

$$E_{\Sigma} \left[\text{Tr} \{ \Sigma^{-1} \tilde{S} G(\tilde{S}) \} \right] = E_{\Sigma} \left[\text{Tr} \{ (n - p - 1) G(\tilde{S}) \} + 2 D_{\tilde{S}} \{ G^{\top}(\tilde{S}) \tilde{S} \} \right],$$

where $D_{\tilde{S}}$ is the Haff differential operator for a matrix \tilde{S} defined by

$$D_{\tilde{S}} = \left(\frac{1}{2} (1 + \delta_{ij}) \frac{\partial}{\partial \tilde{S}_{ij}} \right)_{1 \leq i, j \leq p},$$

with $\delta_{ij} = 1$ when $i = j$ and $\delta_{ij} = 0$ when $i \neq j$.

Thanks to Lemma1, we have the expression of the risk difference between $\hat{\Sigma}_{a,c}^{-1} = a S^{-1} + c S G(S)$ and $\hat{\Sigma}_a^{-1} = a S^{-1}$ as follows

$$\begin{aligned} E_{\Sigma} \left[c^2 \mu_{k+2\alpha+2} \text{Tr} \{ \tilde{S}^k [\tilde{S} G(\tilde{S})]^2 \} + 2c [a \mu_{k+\alpha} - \mu_{k+\alpha+1} (n - p - 1)] \text{Tr} \{ \tilde{S}^k G(\tilde{S}) \} \right. \\ \left. - 4c \mu_{k+\alpha+1} \text{Tr} \{ D_{\tilde{S}} \{ G^{\top}(\tilde{S}) \tilde{S}^{k+1} \} \} \right], \end{aligned}$$

where, for $\beta \in R$, $\mu_{\beta} = E_{\mathcal{H}}[V^{\beta}]$ is the moment of order β of V .

4 Haff type estimators

We consider Haff type estimators of the form $\hat{\Sigma}_{a,c}^{-1} = a S^{-1} + c I_p / \text{Tr}\{S\}$. The above sufficient domination condition of $\hat{\Sigma}_{a,c}^{-1}$ over the optimal estimator $\hat{\Sigma}_a^{-1}$ where a is given in Section 2, when $k = 1, 2$ and 3 is as follows.

$$k = 1 : 0 \leq c \leq 2 \frac{(pn-2)}{\mu-1} - 2(n-p-1)p \text{ or } 2 \frac{(pn-2)}{\mu-1} - 2(n-p-1)p \leq c \leq 0.$$

$$k = 2 : 0 \leq c \leq 2 [(n+p-1)\mu_1 - n] \text{ or } 2 [(n+p+1-2p^{-1})\mu_1 - n] \leq c \leq 0$$

$$k = 3 : 0 \leq c \leq 2 \left[\frac{\mu_2}{\mu_1} [(n+p+3)p^{-1} - 2] - (n+p+1) \right]$$

The above sufficient domination condition of $\hat{\Sigma}_{a_0,c}^{-1}$ over the reasonable estimator $\hat{\Sigma}_{a_0}^{-1}$ where a_0 is given in Section 2, when $k = 0$ and $k \geq 4$ is as follows.

$$k = 0 : 0 \leq c \leq 2(n-p-3) \left[\frac{\mu-1}{\mu-2} - 1 \right] - 2, \text{ or } 2(n-p-1) \left[\frac{\mu-1}{\mu-2} - 1 \right] + 2 \leq c \leq 0,$$

$$k \geq 4 : 0 \leq c \leq 2 \left[\frac{\mu_k-1}{\mu_k-2} [(n+p+2k-3)p^{2-k} - 2] - (n+p+k-2) \right].$$

5 Concluding remarks

Model in model contains the Wishart distributions and provides a wide distributional framework for which we develop improved estimators of the precision matrix when the the sample covariance matrix S is invertible through an unbiased estimator of risk difference in riskdiff, and under a large class of data-based losses (based on S).

Références

- [1] D. Fourdrinier, F. Mezoued, M.T. Wells. *Estimation of the inverse scatter matrix of an elliptically symmetric distribution*. Journal of Multivariate Analysis, 143 : 32–55, 2016.
- [2] D. Fourdrinier, A.M. Haddouche, and F. Mezoued. *Covariance matrix estimation of an elliptically symmetric distribution*. Technical report, Université de Rouen and ENSSEA de Tipaza, 2018.
- [3] T.Kubokawa, M.S. Srivastava. *Estimation of the precision matrix a singular Wishart distribution and its application in high-dimentional data*. J.Multivariate Anal, 99 : 1906–1928, 2008.
- [4] H. Tsukuma and Y. Konno. *On improved estimation of normal precision and discriminant coefficients*. Journal of Multivariate Analysis, 97 : 1477–1500, 2006.

LA FACTORISATION EN MATRICES NON NÉGATIVES POUR LA REPRÉSENTATION DES DONNÉES ACTUARIELLES

Meriem Chouh*, Kamel Boukhetala**

Faculté de Mathématiques, USTHB, El-Alia BP 32, Bab-Ezzouar, 16111, Alger, ALGÉRIE

* mchouh@usthb.dz,

** kboukhetala@usthb.dz

Résumé. Dans ce travail, on va présenter quelques méthodes de l'analyse des données qui sont basées sur le concept de la factorisation matricielle d'un part, et servent pour régler différents problèmes dans le domaine des sciences actuarielles et de l'assurance. des exemples d'application seront traités et bien illustrés pour montrer l'intérêt de telles techniques.

1 Introduction

Chaque organisation qui échange de l'argent avec des clients, des prestataires de services ou des fournisseurs risque d'être victime de fraudes et d'abus. Partout dans le monde, les compagnies d'assurances perdent de plus en plus d'argent chaque année à cause de demandes d'indemnisation frauduleuses. Il faut qu'elles récupèrent cet argent afin de pouvoir continuer à fournir des services de qualité à leurs clients. Les méthodes de l'analyse des données peuvent souvent améliorer les modèles actuariels existants en trouvant des variables importantes supplémentaires, en identifiant les interactions, et en détectant les relations non linéaires. Ces méthodes peuvent aider les entreprises d'assurances à prendre des décisions d'affaires cruciales et transformer les nouvelles connaissances en résultats dans les pratiques commerciales telles que le développement de produits, le marketing, la gestion des actifs et de l'analyse de la solvabilité. L'utilisation des techniques de l'analyse des données dans les assurances permet de :

1- Interpréter les données : L'interface de l'analyse des données simplifie l'examen et la modélisation des dossiers de vérification. Par exemple : les dossiers utilisés pour modéliser les demandes de remboursement de frais de réparations des automobiles passées d'un sinistre peuvent inclure les relevés de facturation d'assurance automobiles avec des informations détaillées comme le numéro de police, le genre, l'usage, la puissance, etc.

2- Découvrir les relations existantes dans les données : A partir d'une classification des données,

3- Identifier les facteurs de risque : Une question critique dans l'évaluation des tarifs est la suivante : « Quels sont les facteurs de risque ou variables qui sont importantes pour prédire la probabilité des revendications et de la taille d'une réclamation ? ». Bien que de nombreux facteurs de risque qui affectent les taux sont évidents, des relations subtiles et non intuitives

peuvent exister entre les variables qui sont difficiles sinon impossibles à identifier sans procéder à des analyses plus sophistiquées. Par exemple les modèles d'explorations de données, comme les arbres de décision et réseaux de neurones peuvent plus prédire avec précision le risque que les modèles actuariels, donc les compagnies d'assurance peuvent fixer plus précisément des taux qui peuvent entraîner des prix plus précis et donc une meilleure position concurrentielle.

2 La factorisation en matrices non négatives

Le problème standard de la factorisation en matrices non négatives (**NMF**), sous la forme la plus générique possible, s'exprime comme suit :

Étant donné une matrice X de dimension $n \times p$ à coefficients non négatives, i.e., $X \in \mathbf{R}_+^{n \times p}$, la factorisation en matrices non négatives consiste à trouver une approximation :

$$X \approx AB = \tilde{X}, \quad (1)$$

telle que les matrices A et B soient à coefficients non négatives et de dimensions $n \times k$ et $k \times p$ respectivement (i.e., $A \in \mathbf{R}_+^{n \times k}$ et $B \in \mathbf{R}_+^{k \times p}$. et où l'opérateur \approx désigne une « approximation » à définir. L'ordre du modèle, k , est habituellement choisi tel que $nk + kp \ll np$, de façon à réduire la dimension des données.

3 Les différentes extensions du NMF

Le tableaux suivant illustre les différentes méthodes de décomposition en matrices non-négatives :

Variations du NMF	Le modèle	Perspectives
NMF standard	$X \approx AB, X \in \mathbf{R}_+^{n \times p}, A \in \mathbf{R}_+^{n \times k}, B \in \mathbf{R}_+^{k \times p}$	Réduction de dimension, classification non-supervisé (Clustering) [3]
La factorisation semi non négative Semi-NMF	$X \approx AB, X \in \mathbf{R}^{n \times p}, A \in \mathbf{R}_+^{n \times k}, B \in \mathbf{R}_+^{k \times p}$	Clustering, relaxation du k-means [1]
La factorisation non négative convexe Convex-NMF	$X \approx AB, X \in \mathbf{R}_+^{n \times p}, A \in \mathbf{R}_+^{n \times k}, B \in \mathbf{R}_+^{k \times p}$, sous $A = XW, W \in \mathbf{R}_+^{p \times k}$ et $\sum_{i=1}^p w_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, k$.	pour une raison d'interprétabilité [1]
La factorisation matricielle binaire B-NMF	$X \approx AB, X \in \{0, 1\}^{n \times p}, A \in \{0, 1\}^{n \times k}, B \in \{0, 1\}^{k \times p}$	Co-clustering sur des données d'expression génétique [4]
La trifactorisation non négative Tri-NMF	$X \approx ACB, X \in \mathbf{R}_+^{n \times p}, A \in \mathbf{R}_+^{n \times k}, C \in \mathbf{R}_+^{k \times k}, B \in \mathbf{R}_+^{k \times p}$, sous : $A^t A = I, B^t B = I$	Bi-Clustering (Classification des lignes et des colonnes à la fois)[2]

4 La décomposition de la matrice : prime Multi-Risques

L'assurance multirisque est un type d'assurance qui offre une couverture généralement complète des biens et des responsabilités de l'assuré.

Dans une assurance multirisques, l'assuré peut choisir cinq grands types de garanties :

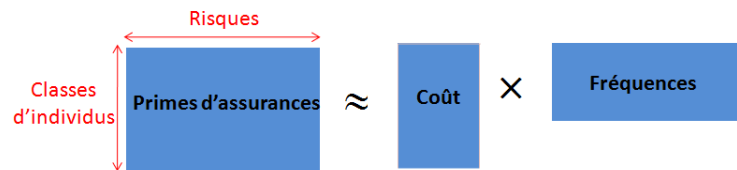
- Incendie
- Vol
- Dégats des eaux
- Bris de Glaces et RC exploitation ou RC professionnelle.

La prime d'assurance dans le cas multirisques est le prix que l'assuré doit payer pour pouvoir bénéficier de la couverture de plusieurs risques à la fois.

La prime d'assurance se calcul par les actuaires en utilisant des méthodes statistiques. La prime se divise en deux composantes principales : Le cout du sinistre et les fréquences correspondants.

Dans notre travail, on présente un modèle de factorisation en matrices non négatives pour la décomposition de la matrice : Prime d'assurance multirisques. Ce modèle mathématique peut servir les instances de contrôle d'assurance pour vérifier si les principes de calcul des primes dont biens considérés.

La figure ci-dessous illustre l'application du modèle **NMF** pour les primes d'assurance multirisques :



Références

- [1] L. B. Beasley and T. J. Laffey. Real rank versus nonnegative rank. *Linear Algebra and its applications*, V :432, Iss : 12, pp.2330-2335, 2009.
- [2] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press. p. 727, 2004.
- [3] P. S. Bradley and U. M. Fayyad. Refining initial points for k-means clustering. In *Proceedings of the Fifteenth International Conference on Machine Learning*, pp. 91–99. Morgan Kaufmann Publishers Inc. San Francisco, CA, USA, 1998.
- [4] M. Chouh, M. Hanafi and K. Boukhetala. Semi-nonnegative rank for real matrices and its connection to the usual rank. *Linear Algebra and its Applications* 466, 27 ?37, 2015.
- [5] M. Chouh and K. Boukhetala. Semi-nonnegative Matrix Factorization Algorithm Based on Genetic Algorithm Initialization. *International Journal of Machine Learning and Computing* vol. 6, no. 4, pp. 231-234, 2016.
- [6] M. T. Chu, R. E. Funderlik and G. H. Golub. A rank-one Reduction Formula and its Applications to Matrix Factorizations. *SIAM Rev*, 37, pp.512- 530, 1995.

- [7] J. E. Cohen and U. G. Rothblum. Nonnegative Ranks, Decompositions, and Factorizations of Nonnegative Matrices. *Linear Algebra and its applications*, V :190, pp.149-168, 1993.
- [8] C. Ding, T. Li and M.I. Jordan. Convex and Semi- nonnegative matrix factorizations. *Pattern Analysis and Machine Intelligence. IEEE V* : 32, Iss : 1, pp. 45-55, 2010.
- [9] C. Ding, X. He and H.D. Simon. On the equivalence of nonnegative matrix factorization and spectral clustering. *Proc. SIAM Data Mining Conf*, 2005.
- [10] N. Gillis and F. Glineur. On the Geometric Interpretation of the Nonnegative Rank. *Linear Algebra and its applications*, V :437, Iss11, pp.2685-2712, 2012.
- [11] N. Gillis and A. Kumar, Exact and Heuristic Algorithms for Semi-Nonnegative Matrix Factorization, *SIAM J. on Matrix Analysis and Applications* 36 (4), pp. 1404-1424, 2015.
- [12] G. Golub and C. Van Loan. *Matrix computations*. Johns Hopkins University Press Baltimore, MD, USA, 1996.
- [13] J.A. Hartigan and M.A. Wong. A K-means Clustering Algorithm. *Applied Statistics*, 28 :100{108},1979.
- [14] A. K. Jain. Data Clustering : 50 years beyond K-means. *Pattern Recongnition Letters*, V : 31, Iss : 8, pp. 651-666, 2010.
- [15] Kim and H. Park. Sparse nonnegative matrix factorization for clustering. Georgia institute of technology. Technical reports, GT-CSE-08-01, 2008.
- [16] D. Lee and H. Seung. Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization. *Nature*, 401(6755) :788–791, 1999.
- [17] Meyer and D. Carl. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, p. 514, ISBN 978-0-89871-454-8, 2000.
- [18] F. Shahnaz, M. Berry, V. Pauca and R. Plemmons. Document clustering using nonnegative matrix factorization. *Information Processing and Management*, 42(2) :373–386, 2006.
- [19] F. Wang, CH. Tan, P. Li and AC. Konig. Efficient document clustering via online non-negative matrix factorizations. *Proceedings of the SIAM International Conference on Data Mining*, 2011.
- [20] W. Xu, X. Liu and Y. Gong. Document clustering based on non-negative matrix factorization. In *SIGIR'03 : Proceedings of the 26th annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval*, pages 267–273, New York, NY, USA, ACM Press, 2003.

Summary

The nonnegative matrix factorization (NMF) for the multi-risk premium matrix can be well illustrated by numerical studies on real data, we need to do it in a more detailed paper version.

Ordres stochastiques sur les lois normales asymétriques et applications aux distributions de sélection

Souhila Merabet *, Rabah Messaci **

*Laboratoire MSTD-Faculté de Mathématiques. USTHB. BP 32, El-Alia 16111 Alger
souhila_merabet@yahoo.fr,

**Laboratoire MSTD-Faculté de Mathématiques. USTHB. BP 32, El-Alia 16111 Alger
lrabmes@yahoo.fr

Résumé. La famille des lois normales asymétriques: Unified Skew Normal $SUN_{n,p}$, est associée aux distributions de probabilités rencontrés dans les problèmes de sélection d'individus dans une population normale. Nous nous intéressons plus spécifiquement à la sous-famille $SUN_{1,q}$ qui correspond au cas où la variable d'intérêt dans le problème de sélection est réelle. Dans ce travail nous étudions l'ordonnement de cette famille, relativement à ses paramètres et pour certains ordres stochastiques (ordre usuel, ordre du second ordre, ordre du rapport de vraisemblance). Nous appliquons les résultats obtenus à certains problèmes de sélection.

1 Introduction

La sélection d'individus dans une population, au regard de certains critères, est un problème rencontré dans divers domaines (éducation, biologie, contrôle de qualité ect..).

Par exemple, soit (X, Y) un vecteur aléatoire gaussien bivarié où X représente le score obtenu par un individu à un test d'admission et Y une moyenne pondérée des scores obtenus lors d'examens précédents. On désire sélectionner les individus suivant la variable d'intérêt X , parmi ceux ayant une moyenne Y supérieure à un certain seuil. Birnbaum (1950) a étudié ce problème à travers la distribution de $X|Y > \tau$ et plusieurs autres questions, comme le choix du seuil de sélection τ pour avoir un taux d'admission final donné ou encore l'influence du coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$ sur ce seuil.

Plus généralement, en suivant Arellano-Valle et al. (2006), si $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$ et $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^q$ sont deux vecteurs aléatoires, et si on désigne par C un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R}^q , la distribution conditionnelle de $(\mathbf{X}|\mathbf{Y} \in C)$ est dite distribution de sélection et un vecteur aléatoire $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^p$ a une distribution de sélection si $\mathbf{Z} \stackrel{d}{=} (\mathbf{X}|\mathbf{Y} \in C)$.

Lorsque \mathbf{X} a une fonction de densité de probabilité $f_{\mathbf{X}}$, alors \mathbf{Z} a une fonction de densité de probabilité $f_{\mathbf{Z}}$ donnée par :

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{z}) \frac{P(\mathbf{Y} \in C | \mathbf{X} = \mathbf{z})}{P(\mathbf{Y} \in C)}. \quad (1)$$

L'un des cas les plus importantes porte sur la sélection dans des populations normales, \mathbf{X} et \mathbf{Y} ont alors une distribution conjointe normale multivariée comme suit,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \sim N_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}(\xi, \Omega^*) \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_{\mathbf{X}} \\ \xi_{\mathbf{Y}} \end{pmatrix} \quad \Omega^* = \begin{pmatrix} \Omega_{\mathbf{X}} & \Delta^{\mathbf{T}} \\ \Delta & \Gamma_{\mathbf{Y}} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

où : $\xi_{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^p, \xi_{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^q, \Omega_{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, \Gamma_{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q, \Delta \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et Ω^* est une matrice de variance covariance définie positive. La densité de \mathbf{Z} est alors donnée par :

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \phi_p(\mathbf{z}, \xi_{\mathbf{X}}; \Omega_{\mathbf{X}}) \frac{\Phi_q(C, \Delta^{\mathbf{T}} \Omega_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{z} - \xi_{\mathbf{X}}) + \xi_{\mathbf{Y}}; \Gamma_{\mathbf{Y}} - \Delta_{\mathbf{Y}}^{\mathbf{T}} \Omega_{\mathbf{X}}^{-1} \Delta_{\mathbf{Y}})}{\Phi_q(C, \xi_{\mathbf{Y}}; \Gamma_{\mathbf{Y}})} \quad (3)$$

où $\phi_n(\cdot, \Omega)$ et $\Phi_n(\cdot, \Omega)$ sont respectivement la densité et la fonction de répartition de la loi normale $N_n(0, \Omega)$ On note $\mathbf{Z} \sim SLCT_{N(p,q)}(\xi, \Omega^*, C)$.

Ces lois dépendent de la partie C de \mathbb{R}^q . L'un des cas les plus importants de sous-ensemble de sélection est défini par

$$C(\tau) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q \mid \mathbf{y} > \tau\}. \quad (4)$$

où l'inégalité entre vecteurs est entendue composante à composante. Dans ce cas les lois (1) et (2) se confondent avec la famille des lois Skew Normal (SN) introduites par (Azzalini, 1985) et ses diverses extensions . En particulier les lois $SLCT_{N(p,q)}(\xi, \Omega^*, C(\tau))$ sont identiques aux lois $SUN_{(p,q)}(\xi, \tau, \Omega^*)$ (Arellano-Valle et Azzalini, 2006). Si (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) est de loi à contours elliptiques, on retrouve les lois Unified Skew Elliptical (SUE) et enfin si ce vecteur est continu mais quelconque les distributions de sélection associées appartiennent à la famille des lois dites Fundamental Skew : FUS (Arellano-Valle et Genton, 2005).

Dans ce travail, nous considérons le cas des distributions $SUN_{(1,q)}$, où la variable d'intérêt est supposée réelle et la variable de sélection vectorielle. Dans le but d'étudier l'influence des paramètres du vecteur sous-jacent (X, \mathbf{Y}) sur la distribution de sélection induite, nous nous intéressons à étudier l'ordonnancement stochastique de ces dernières pour quelques ordres : ordre stochastique usuel (First order stochastic (FSD)), ordre stochastique du second ordre (Second SSD) et l'ordre en rapport de vraisemblance (Likelihood Ratio Order : LRO) (Shaked et Shankhikumar, 2007). Les résultats obtenus sont une extension de ceux donnés par Loperfido et al. (2007) dans le cas des lois SN. Nous appliquons les résultats obtenus à certains problèmes de sélection, et nous revisitons, via cette approche, de questions examinées par Birnbaum (1950) et Birnbaum et Chapman (1950).

Références

- Arellano-Valle, R. B. et A. Azzalini (2006). On the unification of families of skew-normal distributions. *Scandinavian Journal of Statistics* 33(3), 561–574.
- Arellano-Valle, R. B., M. D. Branco, et M. G. Genton (2006). A unified view on skewed distributions arising from selections. *Canadian Journal of Statistics* 34(4), 581–602.
- Arellano-Valle, R. B. et M. G. Genton (2005). On fundamental skew distributions. *Journal of Multivariate Analysis* 96(1), 93–116.

- Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics* 12(2), 171–178.
- Birnbaum, Z. W. (1950). Effect of linear truncation on a multinormal population. *The Annals of Mathematical Statistics*, 272–279.
- Birnbaum, Z. W. et D. G. Chapman (1950). On optimum selections from multinormal populations. *The Annals of Mathematical Statistics* 21(3), 443–447.
- Loperfido, N., J. Navarro, J. M. Ruiz, et C. J. Sandoval (2007). Some relationships between skew-normal distributions and order statistics from exchangeable normal random vectors. *Communications in Statistics-Theory and Methods* 36(9), 1719–1733.
- Shaked, J. et N. Shanthikumar (2007). *Stochastic Orders*. New York.

Summary

The family of probability distributions arising from selection procedures in a population is strongly related to a well know class of asymmetric distributions introduced by Azzalini. In particular, the Unified Skew Normal ($SUN_{n,p}$) class is related to a selection in a normal population. In this work, we study stochastic ordering of the elements of the $SUN_{1,q}$ subclass, regarding to their parameters by using different orders (First stochastic order, Second stochastic order, Likelihood ratio order). We apply the obtained results for some selection problems.

Part II: Processus Aléatoire, Modèles Économétriques, Applications Financières et Actuarielles

Estimation paramétrique dans un processus de diffusion transient

Ilham Abi-Ayad*, Tahar Mourid**

*

ilham.abiayad@yahoo.fr,

**Université abou Bakr Belkaïd Tlemcen

ta_mourid@yahoo.fr

Résumé. Nous étudions le comportement asymptotique de solution d'équation différentielle stochastique avec drift positif dépendant d'un paramètre à estimer en se basant sur l'articles de G.Keller, G. Kersting et U. Rösler (1984) et un article de Dietz et Kutoyants (2001).

1 Introduction et notations

Sous certaines conditions, la solution de l'EDS possède un comportement déterministe donné par une équation différentielle ordinaire.

Soit $(X_t, t \geq 0)$ défini par l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = g(X_t)dt + \sigma_1(X_t)dW_t, \quad X_0 = 1, \quad (1)$$

où les fonctions g et σ_1 sont positives et (W_t) est un mouvement brownien standard. Notons $\mu(t)$ la solution de l'équation différentielle ordinaire donnée par

$$d\mu_t = g(\mu_t)dt, \quad \mu_0 = 1, \quad (2)$$

nous introduisons les fonctions suivantes :

$$G(t) = \int_{x_0}^t \frac{dx}{g(x)}, \quad h(t) = \frac{g'(t)}{g^2(t)}$$
$$\rho_t := \int_0^t g(\mu_s)ds \quad \chi_t := \int_0^t \rho_s^2 ds \quad \psi(t) = \int_{x_0}^t \frac{dx}{g^3(x)}$$
$$\Phi_t := \int_0^t \rho_s ds \quad \sigma_T^2 := \int_0^T (\Phi_T - \Phi_t)^2 dt$$

Pour une fonction f nous notons par

$$\tilde{f}(t) = f(\mu(t)) = f(\mu_t)$$

Estimation paramétrique dans les processus de diffusions transients

En suivant [[4]] on définit les statistiques basées sur l'observation $(X_t, t \in [0, T])$

$$A_t = \int_0^t g(X_s) ds, \quad t \in [0, T]$$

$$X(\theta)_t = x_0 + \theta A_t$$

et le processus distance

$$D(\theta)_T = \int_0^T (X_t - X(\theta)_t)^2 dt$$

Une statistique \mathcal{F}_T -mesurable $\hat{\theta}_T$ est appelée estimateur d'ajustement trajectorien (ATE) si elle vérifie

$$\hat{\theta}_T = \arg \min_{\theta \in \Theta} D(\theta)_T$$

Dans notre cas, l'estimateur EAT $\hat{\theta}_T$ peut être calculé explicitement comme

$$\hat{\theta}_T = \frac{\int_0^T (X_t - x_0) A_t dt}{\int_0^T A_t^2 dt}, \quad T > 0$$

Rappelons que l'estimateur du maximum de vraisemblance est donné par

$$\tilde{\theta}_T = \frac{\int_0^T g(X_t) dX_t}{\int_0^T g(X_t)^2 dt}, \quad T > 0$$

Dans l'article de G.Keller, G. Kersting et U. Rösler (1984) les auteurs ont donné des conditions sur le drift g et le coefficient de diffusion σ_1 pour que le rapport $X_t/\mu_t \rightarrow 1$.

On s'intéresse au modèle suivant

$$dX_t = \theta a(X_t) dt + dW_t$$

où θ est le paramètre à estimer

En 1991 Hans Dietz étudie le modèle

$$dX_t = \theta |(X_t)|^\alpha dt + dW_t$$

et montre que l'estimateur du fitting (FTE) peut être calculé explicitement. Il a la forme suivante :

$$\hat{\theta}_T = \frac{\int_0^T (X_t - X_0) A_t dt}{\int_0^T A_t^2 dt}, T > 0$$

où $A_t := \int_0^t |(X_s)|^\alpha ds, t > 0$

2 Résultats

On se place sous les hypothèses **(A0)** $\sigma \equiv 1$

(A1) $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est à variation régulière $VR(\alpha)$ où $0 < \alpha < 1$, strictement positive et deux fois continument dérivables

(A2) Les fonctions $g, g', (\frac{1}{g})^2$ et \tilde{h} sont soit concaves ou convexes pour $t > t_0$ où $t_0 > 0$. Si $\psi(\infty) = \infty$ nous imposons le même comportement pour la fonction $\tilde{h} \circ \tilde{\psi}^{-1}$

une condition **(A3)** sera donnée à l'exposé

et on a les résultats suivants

Proposition 2. Supposons **(A0)** et que g vérifie **(A1)**-**(A2)**-**(A3)** et $\theta_0 > 0$. Alors l'estimateur EAT est fortement consistant :

$$\hat{\theta}_T \longrightarrow \theta_0 \quad \mathbb{P} - p.s. \quad \text{quand } T \rightarrow \infty$$

Proposition 3. Supposons **(A0)** -**(A1)**-**(A2)**-**(A3)** et $\theta_0 > 0$. Alors

$$\kappa_T(\hat{\theta}_T - \theta_0) \Longrightarrow \xi \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } T \rightarrow \infty$$

avec $\kappa_T = \frac{\chi_T}{\sigma_T}$ où χ_T et σ_T sont définies plus haut.

3 Simulations numériques

Pour simuler les trajectoires des processus de diffusion solutions de (1) et leurs processus déterministes correspondants, on utilise le package *Sim.DiffProc* ([9] disponible sur <http://r.meteo.uni.wroc.pl/web/packages/Sim>)

On effectuera des simulations numériques pour observer les trajectoires des diffusions ainsi que l'estimateur d'ajustement trajectorien pour différentes valeurs de α et de T

Références

- [1] I. Abi-ayad and T. Mourid. Parametric estimation for non recurrent diffusion processes. *Statistics and Probability Letters* 141 (2018) 96102.
- [2] B. M. Bibby and M.Sorensen, Martingale Estimation Functions for Discretely Observed Diffusion Processes. *Bernoulli* 1995, Volume 1, pp. 17-39.
- [3] D. Dacunha-Castelle and D. Florens-Zmirou, Estimation of the Coefficients of a Diffusion from Discrete Observations. *Stochastics* 1986, Volume 19, pp. 263-284.
- [4] H.M. Dietz, Asymptotic Behaviour of Trajectory Fitting Estimators For Certain Non-Ergodic SDE. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 2001, vol. 4, pp. 249-258.
- [5] H.M. Dietz, and Y. Kutoyants, Parameter Estimation For some non Recurrent solutions of SDE. *Statistics and Risk Modeling*, 2003, vol. 21, issue 1, pp. 29-46.

- [6] G. Donahl, On Estimating the Diffusion Coefficient. *Journal of Applied Probability*, 1987, volume. 24, pp. 105-114.
- [7] V. Genon-Catalot and J. Jacod, On the estimation of the diffusion coefficient for multidimensional diffusion processes. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Statist.*, 1993 vol. 29, pp. 119-151.
- [8] I. Gikhman and A.V. Skorohod, *Stochastic differential equations*. New York : Springer 1972.
- [9] A. Guidoum and K. Boukhetala, *R-Package Sim.DiffProc* CRAN 2016 (<http://r.meteo.uni.wroc.pl/web/packages/Sim.DiffProc/Sim.DiffProc.pdf>).
- [10] A. Gut, *Probability : A graduate course*. Springer Statistics 2005.
- [11] R. Hopfner and Y. Kutoyants, "On a problem of statistical inference in null recurrent diffusion", *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 2003, 6, 1, 25-42.
- [12] R. Hopfner and Y. Kutoyants, Estimating discontinuous periodic signals in a time inhomogeneous diffusion. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 2010, vol. 13, pp. 193-230.
- [13] N. Ikeda, S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. 2nd Ed. North Holland/Kodansha 1989.
- [14] J. Jacod and Shiryaev, A. : *Limit theorems for stochastic processes*. Springer 1987.
- [15] J. Jacod, Parametric inference for discretely observed non-ergodic diffusions. *Bernoulli*, 2006, 12, (3), 383-401.
- [16] Y. Shimizu. Estimation of parameters for discretely observed diffusion processes with a variety of rates for information. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 2012, 64, (3), 545-575.
- [17] I., Karatzas and Shreve, S. : *Brownian motion and stochastic calculus*. 2nd Ed. Springer 1991.
- [18] G. Keller, G. Kersting and U. Rosler, On the asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations. *Z. Wahr. verw. Geb.*, 1984, vol. 68, pp. 163-189.
- [19] M. Kessler, Estimation of an ergodic diffusion from discrete observations. *Scandinavian Journal of Statistics*, 1997, vol. 24, pp. 211-229.
- [20] Y. Kutoyants, *Parameter Estimation for Stochastic Processes*, Heldermann, Berlin, 1984.
- [21] Y. Kutoyants, Minimum distance parameter estimation for diffusion type processes. *C.R. Acad. Paris S^{er} I*, 312, 637-642, 1991.
- [22] Y. Kutoyants, *Statistical Inference For Ergodic Diffusion Processes*. Springer, Berlin 2004.

Annexe

Summary

We study parametric estimation in non recurrent diffusion processes introduced in the paper of Keller, G. et al. (in *Z.W.verw.* 68,163-189.1984). The estimator is defined by trajectory fitting. We give its strong consistency and a limiting distribution. We also discuss existing results in similar situations.

Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion

AKEB Tassadit *, MELLAH Omar**
CHALLALI Nordine***

* Université MOULOUD MAMMERY; Tizi-Ouzou -15000 Algérie.
tassakeb@hotmail.com,

** Université MOULOUD MAMMERY; Tizi-Ouzou -15000 Algérie.
omellah@yahoo.fr

*** Université MOULOUD MAMMERY; Tizi-Ouzou -15000 Algérie.
challalin@yahoo.fr

Résumé. Dans ce travail nous traitons un problème d'existence et unicité de solution presque périodique pour une équation différentielle stochastique dirigée par un mouvement brownien fractionnaire. En utilisant l'approche de la décomposition en chaos, sous certaines conditions sur les coefficients on a démontré que la solution est presque périodique en loi unidimensionnelle.

1 Introduction

Self-similar processes are invariant in laws under a certain scale of space and time. They are particularly important in modeling. Among them, we will present in particular the fractional Brownian motion (or fBm for short), is very popular, its covariance function being particularly simple. The fBm of Hurst parameter $H \in (0, 1)$ is a centered Gaussian process $B^H = \{B^H(t), t \in R\}$ with the covariance function

$$E(B^H(t)B^H(s)) = R_H(t, s) = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad (1)$$

notice that if $H = \frac{1}{2}$, the process B^H is a standard Brownian motion, but if $H \neq \frac{1}{2}$, it does not have independent increments. The main difference between fBm and usual Brownian motion is that it is neither Markovian, nor a semimartingale, so most standard tools from stochastic calculus cannot be applied to its analysis.

There are essentially two different approaches to construct stochastic integrals with respect to the fBm

1. Pathwise approach : this method is particularly useful in the case $H > \frac{1}{2}$ because B^H has Hölder continuous paths with all exponents less than H .
2. Malliavin calculus : Divergence (Skorohod stochastic equation).

The concept of almost periodicity for random processes was introduced for the first time by Slutsky (1938) in the late 1930s. In recent decades, this concept has been extensively developed and studied in connection with problems stochastic differential equations by many authors. For

example, we can mention, the work of Kamenskii et al. and his collaborators Kamenskii et al. (2015). The question of the existence of almost periodic solutions in p th-mean ($p \geq 2$) for semilinear stochastic differential equations driven by fBm was examined in Bezandry (2012); Diop et al. (2015) where the integrand with respect to the fBm is assumed to be deterministic. The purpose of this work is to generalise in the case random by using the stochastic calculus of variation.

2 Preliminaries

In this section, we recall some basic definitions which are used throughout this paper.

Let (E, d) be a separable metric space, we denote by $C_b(E)$ the Banach space of continuous and bounded functions $f : E \rightarrow R$ with $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$, and by $\mathcal{P}(E)$ the set of all probability measures onto σ -Borel field of E . For $f \in C_b(E)$ we define

$$\|f\|_L = \sup \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{d_E(x, y)} : x \neq y \right\}, \quad (2)$$

$\|f\|_{BL} = \max \{ \|f\|_\infty, \|f\|_L \}$, and we define $BL(E) = \{ f \in C_b(E); \|f\|_{BL} < \infty \}$. For $\mu, \nu \in \mathcal{P}(E)$ we define

$$d_{BL}(\mu, \nu) = \sup_{\|f\|_{BL} \leq 1} \left| \int_E f d(\mu - \nu) \right|, \quad (3)$$

which is a complete metric on $\mathcal{P}(E)$ and generates the weak topology.

2.1 Almost periodic functions

A continuous function $f : R \rightarrow E$ is said to be Bohr almost periodic if for each $\varepsilon > 0$ there exists $l(\varepsilon) > 0$ such that any interval of length $l(\varepsilon)$ contains at least a number τ for which

$$\sup_{t \in R} \|f(t + \tau) - f(t)\| < \varepsilon. \quad (4)$$

We have following characterization of almost periodicity due to Bochner.

Let $f : R \rightarrow E$ be continuous. The the following statements are equivalent

1. f is almost periodic.
2. f satisfies Bochner's double sequences criterion, that is, for every pair of sequences $(\alpha'_n) \subset R$ and $(\beta'_n) \subset R$, there are subsequences $(\alpha_n) \subset (\alpha'_n)$ and $(\beta_n) \subset (\beta'_n)$ respectively with same indexes such that, for every $t \in R$, the limits $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} f(t + \alpha_n + \beta_m)$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + \alpha_n + \beta_n)$, exist and are equal.

2.2 Almost periodic stochastic processes

For a stochastic process $X(t) : \Omega \rightarrow R$, we denote $\text{law}(X(t))$ the distribution of the random variable $X(t)$. A stochastic process X has almost periodic one dimensional distributions if the mapping $t \mapsto \text{law}(X(t))$ from R to $(\mathcal{P}(E), d_{BL})$ is almost periodic.

If X has continuous trajectories, we say that X is almost periodic in distribution if the mapping $t \mapsto (X(t + \cdot))$ from R to $\mathcal{P}(C(R, R))$ is almost periodic.

Let $L^2(\mathbf{P}, R)$ be the space of R -valued random variables with a finite quadratic-mean, a such stochastic process is said to be square-mean continuous if for every $s \in R$,

$$\lim_{t \rightarrow s} E |X(t) - X(s)|^2 = 0. \quad (5)$$

A square-mean continuous stochastic process $X : R \rightarrow L^2(\mathbf{P}, R)$ is said to be square mean almost periodic if for each $\varepsilon > 0$ such that any interval of length $l(\varepsilon)$ contains at least a number τ for which

$$\sup_{t \in R} E |X(t + \tau) - X(t)|^2 < \varepsilon. \quad (6)$$

2.3 Malliavin calculus with respect to fractional Brownian motion

Let S be the set of smooth and cylindrical random variables of the form

$$F = f(B(\phi_1), \dots, B(\phi_n)), \quad (7)$$

$f \in C_b^\infty(R^n)$ and $\phi_i \in \mathcal{H}$.

The derivative operator D of a smooth and cylindrical random variable F of the form for :2 is defined as the \mathcal{H} -valued random variable

$$DF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(B(\phi_1), \dots, B(\phi_n)) \phi_i. \quad (8)$$

The derivative operator D is the closable from $L^p(\Omega)$ into $L^p(\Omega, \mathcal{H})$. The Hilbert space $D^{1,2}$ is the closure of S with respect to the scalar product

$$\langle F, G \rangle_{1,2} = E(FG) + E\langle DF, DG \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (9)$$

The divergence operator δ is the adjoint of the derivative operator. We say that a random variable in $L^2(\Omega; \mathcal{H})$ belongs to the domain of the divergence operator if

1.

$$|E(\langle DF, u \rangle_{\mathcal{H}})| \leq c \|F\|_{L^2(\Omega)},$$

for any $F \in D^{1,2}$. In this case $\delta(u)$ is defined by the duality relationship

2.

$$E(F\delta(u)) = E(\langle DF, u \rangle_{\mathcal{H}}),$$

for any $F \in D^{1,2}$.

3 Almost periodicity in one dimensional distribution for solutions of SDEs driven by fractional Brownian motion

We consider the linear Stochastic differential equation

$$X(t) = \eta + \int_{t_0}^t [a_0(s) - X(s)]ds + \int_{t_0}^t [b_0(s) + b(s)X(s)]dB^H(s), \quad (10)$$

where $\eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $a_0, b_0, b : R \rightarrow R$ are continuous functions. In the sequel we suppose that

Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion

1. $B^H(t)$ is a fractional Brownian motion defined on a stochastic basis $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \in R}, \mathbf{P})$ with Hurst parameter $H > \frac{1}{2}$, and the stochastic integral is understood in the Skorohod sense.
2. The mappings a_0, b_0, b are almost periodic in $t \in R$.

Let the assumptions 1. and 2. be fulfilled then there exists a unique evolution solution

$$X(t) = U(t, s)\eta + \int_s^t U(t, s)a_0(s)ds + \int_s^t U(t, s)[b_0(s) + b(s)X(s)]dB^H(s), \quad (11)$$

to (10), furthermore X has almost periodic one dimensional distributions.

Références

- Bezandry, P. H. (2012). Existence of almost periodic solutions for semilinear stochastic evolution equations driven by fractional brownian motion. *Electronic Journal of Differential Equations* 2012.
- Diop, M. A., K. Ezzinbi, et M. M. Mbaye (2015). Existence and global attractiveness of a pseudo almost periodic solution in p-th mean sense for stochastic evolution equation driven by a fractional brownian motion. *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes* 87(6), 1061–1093.
- Kamenskii, M., O. Mellah, et P. R. De Fitte (2015). Weak averaging of semilinear stochastic differential equations with almost periodic coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 427(1), 336–364.
- Slutsky, E. (1938). Sur les fonctions aléatoires presque périodiques et sur la decomposition des fonctions aléatoires. *Actualités Sceintifiques et industrielles, Herman, Paris*, 33–55.

Summary

In this work we prove the existence and uniqueness of the almost periodic solution to a affine stochastic differential equation driven by a fractional Brownian motion, using the chaos decomposition approach. Under sufficient condtions we state the almost periodicity in one dimensional distribution of the solution.

A kernel estimator of the conditional quantile function with functional explicatory variable under censored data

Fatima Akkal

Laboratory of Statistics and Stocastic Processes, University of Djillali Liabes, BP 89, Sidi Bel Abbes 22000, Algeria
akkalfatima22@yahoo.com

Abstract. In this work, we investigate the conditional quantile estimation of a randomly censored scalar response variable given a functional random covariate when the data are sampled from an ergodic process. A kernel-type estimator of the conditional quantile function is introduced. Then, a strong consistency rate of the estimator is established under some mild assumptions.

1 Introduction

Functional data analysis (FDA) is an important field of statistics that has received much attention in the last 20 years, and good overviews on this topic can be found in Ramsay and Silverman (2005) or Bosq (2000) in addition to Ferraty and Vieu (2006).

Quantile regression is a common way to describe the dependence structure between a response variable T and some covariate X . Many authors are interested in the estimation of the conditional quantile of a scalar response given a functional covariate. Ferraty et al. (2005) introduced a nonparametric estimator of the conditional quantile defined as the inverse of the conditional cumulative distribution function (df) when data are dependent. They stated its rate of almost complete consistency and used it to forecast the well-known El Nino time series and build a confidence prediction band. Ezzahrioui and Ould-Said (2008) established the asymptotic normality of the kernel conditional quantile estimator under an α -mixing assumption. Recently, Dabo-Niang and Laksaci (2012) provided the consistency in L^p norm of the conditional quantile estimator for functional dependent data.

2 The model

2.1 Conditional quantile under a random censorship

Consider $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ a sequence of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables, and suppose that they form a strictly stationary sequence of lifetimes. In the censorship situations, the lifetime T_i may not be directly observable. Instead, we observe only censored lifetimes of items under study. We assume that there exists a sample of i.i.d. censoring random variable (r.v) $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$ with common unknown continuous distribution function (df) G .

Conditional quantile estimation under functional censored data

In the censored setup, the observed random variables are not couples $(T_i, X_i)_{1 \leq i \leq n}$, but rather the triplets $(Y_i, \delta_i, X_i)_{1 \leq i \leq n}$ with

$$Y_i = \min\{T_i, C_i\} \quad \text{and} \quad \delta_i = \mathbb{1}_{\{T_i \leq C_i\}}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

where $\mathbb{1}_A$ denotes the indicator function of the set A .

To follow the convention in biomedical studies, and as indicated before, we assume that $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$ and $(T_i, X_i)_{1 \leq i \leq n}$ are independent; this condition is plausible whenever the censoring is independent of the patients modality.

Let (X, T) be $E \times \mathbb{R}$ -valued random elements, where E is some semi-metric abstract space. Denote by $d(\cdot, \cdot)$ a semi-metric associated with the space E . Suppose now that we observe a sequence $(X_i, T_i)_{i \geq 1}$ of copies of (X, T) that is assumed to be ergodic. For $x \in E$, we denote the conditional probability distribution function (df) of T given $X = x$ by

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t|x) = \mathbb{P}(T \leq t | X = x).$$

We denote the conditional quantile, of the order $\alpha \in (0, 1)$, of T given $X = x$, by

$$q_\alpha(x) = \inf\{t : F(t|x) \geq \alpha\}.$$

We suppose that, for any fixed $x \in E$, $F(\cdot|x)$ is continuously differentiable real function and admits an unique conditional quantile.

For any fixed $\alpha \in (0, 1)$, the α -th conditional quantile, $q_\alpha(x)$, satisfies the following equation:

$$F(q_\alpha(x)|x) = \alpha.$$

2.2 A nonparametric estimator of the conditional quantile

It is clear that an estimator of $q_\alpha(x)$ can easily be deduced from an estimator of $F(t|x)$. Let us recall that in the case of complete data, a well-known kernel estimator of the conditional df is given by

$$F_n(t|x) = \frac{\sum_{i=1}^n K(h_{n,K}^{-1}d(x, X_i))H(h_{n,H}^{-1}(t - T_i))}{\sum_{i=1}^n K(h_{n,K}^{-1}d(x, X_i))},$$

where $K(\cdot)$ is a real-valued kernel function, $H(\cdot)$ a cumulative df of the response variable T and $h_K = h_{n,K}$ (resp. $h_H = h_{n,H}$) a sequence of positive real numbers which decrease to zero as n tends to infinity.

Now, we consider a "pseudo-estimator" of $F(t|x)$ given by

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(t|x) &= \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i \bar{G}^{-1}(Y_i) K(h_K^{-1}d(x, X_i)) H(h_H^{-1}(t - Y_i))}{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(x, X_i))} \\ &= \frac{\tilde{F}_n(x, t)}{\ell_n(x)}, \end{aligned}$$

where

$$\tilde{F}_n(x, t) = \frac{1}{n\mathbb{E}(\Delta_1(x))} \sum_{i=1}^n \delta_i \bar{G}^{-1}(Y_i) H(h_H^{-1}(t - Y_i)) \Delta_i(x),$$

and

$$\ell_n(x) = \frac{1}{n\mathbb{E}(\Delta_1(x))} \sum_{i=1}^n \Delta_i(x),$$

with $\Delta_i(x) = K(d(x, X_i)/h_K)$.

Since $\bar{G}(\cdot) = 1 - G(\cdot)$ is unknown in practice, one can estimate it using the Kaplan and Meier (1958) estimator defined as

$$\bar{G}_n(t) = 1 - G_n(t) \begin{cases} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1 - \delta_{(i)}}{n - i + 1}\right)^{\mathbb{1}_{\{Y_{(i)} \leq t\}}}, & \text{if } t < Y_{(n)}, \\ 0 & \text{Otherwise,} \end{cases}$$

where $Y_{(1)} < Y_{(2)} < \dots < Y_{(n)}$ are the order statistics of $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ and $\delta_{(i)}$ is concomitant with $Y_{(i)}$.

Therefore, a kernel-based estimator of $F(t|x)$ is given by

$$\hat{F}_n(t|x) = \frac{\tilde{F}_n(x, t)}{\ell_n(x)},$$

where

$$\tilde{F}_n(x, t) = \frac{1}{n\mathbb{E}(\Delta_1(x))} \sum_{i=1}^n \delta_i \bar{G}_n^{-1}(Y_i) H(h_H^{-1}(t - Y_i)) \Delta_i(x).$$

Finally, a natural estimator of $q_\alpha(x)$ is given by

$$\hat{q}_{n,\alpha}(x) = \inf\{y : \hat{F}_n(y|x) \geq \alpha\},$$

which satisfies:

$$\hat{F}_n(\hat{q}_{n,\alpha}(x)|x) = \alpha.$$

3 Main results

Theorem 1 *Under some hypotheses, we have as n goes to infinity*

$$\sup_{t \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}} |\hat{F}_n(t|x) - F(t|x)| = O_{a.s.}(h_K^{\beta_1} + h_H^{\beta_2}) + O_{a.s.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}}\right).$$

Theorem 2 *Under some hypotheses, we have as n goes to infinity*

$$|\hat{q}_{n,\alpha}(x) - q_\alpha(x)| = O_{a.s.}(h_K^{\beta_1} + h_H^{\beta_2}) + O_{a.s.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}}\right).$$

References

- Bosq, D. (2000). *Linear Processes in function spaces: Theory and applications. Lecture notes in statistics*. Berlin: Springer Verlag.
- Chaouch, M. and S. Khardani (2015). Randomly censored quantile regression estimation using functional stationary ergodic data. *Journal of nonparametric statistics* 27, 65–87.
- Dabo-Niang, S. and A. Laksaci (2012). Nonparametric quantile regression estimation for functional dependent data. *Communications in statistics-Theory and methods* 41, 1254–1268.
- Ezzahrioui, M. and E. Ould Said (2008). Asymptotic results of a nonparametric Conditional quantile estimator for functional time series. *Communications in statistics-Theory and methods* 37, 2735–2759.
- Ferraty, F. , A. Rabhi, and P. Vieu (2005). Conditional quantiles for dependent functional data with application to the climatic el ni no phenomenon. *Sankhya* 67, 378–398.
- Ferraty, F. and P. Vieu (2006). *Nonparametric functional data analysis: theory and practice*. New York: Springer.
- Ramsay, J. O. and B. W. Silverman (2005). *Functional data analysis (2nd ed)*. New York: Springer Verlag.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions l'estimation du quantile conditionnelle d'une variable réponse censuré aléatoirement et a valeurs dans \mathbb{R} (scalaire) étant donné une covariable aléatoire fonctionnelle, où les données sont échantillonnées d'un processus ergodique. Un estimateur de type noyau de la fonction quantile conditionnelle est introduit. Ensuite, la vitesse de convergence de l'estimateur est établi sous certaines conditions.

Le modèle Markov-switching GARCH périodique: Théorie et application

Billel ALIAT*,** Fayçal HAMDI*

* Laboratoire RECITS, Faculté des Mathématiques, USTHB

** Centre de Recherche en Economie Appliquée pour le Développement

Résumé. Dans cet article, nous proposons d'étendre le modèle $GARCH$ périodique ($PGARCH$) au modèle $PGARCH$ à changement de régimes markovien ($MS - PGARCH$), et nous fournissons quelques propriétés probabilistes de cette classe de modèles. En particulier, nous abordons la question liée à l'existence de solutions strictement et faiblement périodiquement stationnaires. Nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'existence de moments d'ordre supérieur. De plus, nous fournissons des expressions explicites pour calculer les moments d'ordre pair ainsi que les autocovariances des carrés d'un processus $MS - PGARCH$. Enfin, nous proposons une méthode d'estimation des paramètres de notre modèle, et nous l'appliquons pour modéliser des données réelles

1 Introduction

La modélisation de la volatilité des marchés financiers demeure un domaine de recherche important étant donné le rôle qu'elle joue dans une variété de problèmes financiers tels que les prix d'achat des actifs et la gestion des risques. Parmi les modèles de volatilité, nous retrouvons le modèle $GARCH$ proposé par Bollerslev (1986). Ce modèle est l'un des plus populaires, car il représente un outil puissant pour l'analyse et la prévision de la volatilité des marchés financiers. Le modèle $GARCH$ paramétrise explicitement la volatilité instantanée en utilisant à la fois les variances conditionnelles et les carrés des observations. Après son introduction dans la littérature des séries temporelles, le modèle $GARCH$ a permis de capturer plusieurs régularités statistiques qui caractérisent les séries financières, telles que le regroupement de volatilité et l'excès de kurtosis. Cependant, d'autres traits tels que la multimodalité et les changements récurrents de régime restent non capturés par ce genre de modèles. Ces dernières sont mieux représentées par les modèles à changement de régimes.

Les modèles MS ont connu un fort développement depuis leurs introductions par Hamilton en 1989. Ils ont rajouté plus de flexibilité aux modèles de séries chronologiques classiques. Hamilton et Susmel (1994) ont introduit les modèles $ARCH$ à changement de régime Markovien ($MS - ARCH$). Gray (1996) a proposé une formulation $GARCH$ à changement de régimes Markovien ($MS - GARCH$), comptant sur l'hypothèse que la variance conditionnelle, sachant le régime en cours, dépend de l'espérance des variances conditionnelles antérieures, plutôt que de leurs valeurs. Cette formulation a des inconvénients importants, particulièrement

en ce qui concerne la prévision de la volatilité, à un horizon $h > 1$, qui s'avère très compliquée. Ceci a motivé Klaassen (2002) de proposer une nouvelle spécification qui rend les prévisions à un horizon quelconque plus pratiques tout en préservant les caractéristiques intéressantes du modèle de Gray (1996). Une étude approfondie de la structure probabiliste du modèle $MS - GARCH$ a été établie par Francq et Zakoïan (2005). D'autres travaux ont été élaborés sur les modèles $MS - GARCH$, nous citons par exemple, Bauwens et al. (2010), Augustyniak (2014), Billio et al. (2016) et bien d'autres.

D'autre part, dans ces dernières décennies, la notion de processus périodiquement corrélés a été exploitée avec succès dans une variété de modèles de séries chronologiques, tels que les modèles $PARMA$ (Vecchia, 1985 ; Bentarzi et Hallin, 1994 ; Lund et Basawa, 2000), les modèles $PGARCH$ (Bollerslev et Ghysel, 1996 ; Franses et Paap, 2000) et le mélange de modèles $PGARCH$ (Hamdi et Souam, 2017). En effet, il a été observé que, pour de nombreuses données journalières en finance, les autocorrélations des rendements et des rendements au carré varient au cours de la semaine (e.g. Franses et Van Dijk, 2000 ; Regnard et Zakoïan, 2010). Ainsi, les analystes des séries chronologiques financières sont devenus, de nos jours, plus convaincus de la nécessité d'inclure la périodicité et l'hétéroscédasticité conditionnelle dans un seul modèle. En effet, la classe de modèles $PGARCH$ a montré son adéquation pour capturer la périodicité dans la variance conditionnelle, une propriété qui ne peut pas être expliquée ni par les modèles $ARMA$ linéaires classiques ni par les modèles $GARCH$ stationnaires.

Il est bien connu que les autocorrélations des rendements des données financières tendent, généralement, à être plus importantes pendant les périodes de faible volatilité et plus faibles pendant les périodes de forte volatilité (e.g. Franses et Van Dijk, 2000). Par conséquent, les périodes de volatilité faible et élevée peuvent être interprétées comme deux régimes différents. Ainsi, le niveau de volatilité peut être considéré comme un processus déterminant du régime. Contrairement à la périodicité, le niveau de volatilité à l'avenir n'est pas connu avec certitude ce qui rend les modèles $PGARCH$ inconsistants en présence de ce type de changement de régime non déterministe. Afin d'ajouter plus de flexibilité à la famille des modèles $PGARCH$, nous proposons, dans ce papier, une extension du modèle $MS - GARCH$ au cas périodique.

2 Définitions et notations

Le modèle $GARCH$ périodique à changement de régimes Markovien ($MS - PGARCH$), que nous proposons, peut être vu comme un processus bivarié $\{(\epsilon_t, \Delta_t) ; t \in Z\}$ dans lequel le processus (Δ_t) , qui gouverne le changement de régime est une chaîne de Markov à espace d'états fini, homogène et ergodique, et (ϵ_t) est un processus $PGARCH$.

Définition (Aliat et Hamdi) On dit qu'un processus stochastique $\{\epsilon_t, t \in Z\}$ est représenté par un modèle $GARCH$ périodique à changement de régimes markovien d'ordres $(1, 1)$ et de période $S \geq 1$, noté $MS - PGARCH_S(1, 1)$, s'il est solution de l'équation aux différences stochastique suivante

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t, t \in Z \\ h_t = \sum_{k=1}^d \omega_t^{(k)} \mathbf{1}_{(\Delta_t=k)} + \sum_{k=1}^d \alpha_t^{(k)} \epsilon_{t-1}^2 \mathbf{1}_{(\Delta_t=k)} + \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \beta_t^{(k)} h_{t-1}^{(l)} \mathbf{1}_{(\Delta_t=k, \Delta_{t-1}=l)}, \end{cases} \quad (1)$$

où $h_t = E[\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$, avec \mathcal{F}_{t-1} désigne l'information disponible jusqu'à l'instant $t-1$, $\mathbf{1}_{(\cdot)}$ désigne la fonction indicatrice, (Δ_t) est une chaîne de Markov homogène à espace d'états fini $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, d\}$, et $\{\eta_t; t \in Z\}$ est une suite de variables aléatoires *i.i.d.* telles que $E(\eta_t) = 0$ et $E(\eta_t^2) = 1$. Les paramètres $\omega_t^{(k)}$, $\alpha_t^{(k)}$ et $\beta_t^{(k)}$, pour $1 \leq k \leq d$, sont des fonctions S -périodiques (i.e. $\omega_{t+\tau S}^{(k)} = \omega_t^{(k)}$, $\alpha_{t+\tau S}^{(k)} = \alpha_t^{(k)}$ et $\beta_{t+\tau S}^{(k)} = \beta_t^{(k)}$), tels que $\omega_t^{(k)} > 0$, $\alpha_t^{(k)} \geq 0$ et $\beta_t^{(k)} \geq 0$, pour $1 \leq k \leq d$. Notons que dans la définition précédente les paramètres du modèle dépendent aussi de l'état de la chaîne de Markov inobservable (Δ_t) .

Afin de réécrire le modèle (1) sous une forme plus simple à manipuler, posons

$$\begin{aligned} \omega_t(\Delta_t) &:= \sum_{k=1}^d \mathbf{1}_{(\Delta_t=k)} \omega_t^{(k)}, \alpha_t(\Delta_t) := \sum_{k=1}^d \mathbf{1}_{(\Delta_t=k)} \alpha_t^{(k)}, \\ \beta_t(\Delta_t) &:= \sum_{k=1}^d \mathbf{1}_{(\Delta_t=k)} \beta_t^{(k)}, h_{t-1} := \sum_{k=1}^d \mathbf{1}_{(\Delta_{t-1}=k)} h_{t-1}^{(k)}, \end{aligned}$$

par conséquent, le modèle (1) peut être réécrit comme suit

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t, \\ h_t = \omega_t(\Delta_t) + \alpha_t(\Delta_t) \epsilon_{t-1}^2 + \beta_t(\Delta_t) h_{t-1}, \end{cases} \quad t \in Z \quad (2)$$

Tout au long de ce papier, nous allons utiliser les hypothèses suivantes : les processus $\{\eta_t\}$ et (Δ_t) sont supposés indépendants. En outre, (Δ_t) est une chaîne de Markov homogène, stationnaire, irréductible et apériodique à espace d'état fini $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, d\}$.

Les probabilités stationnaires de (Δ_t) sont notées par $\pi(k) = P(\Delta_1 = k)$, et la matrice de probabilités de transition est notée par P et elle est écrite sous la forme suivante

$$P = (p(k, l))_{k, l=1, \dots, d} = \begin{pmatrix} p(1, 1) & p(1, 2) & \cdots & p(1, d) \\ p(2, 1) & p(2, 2) & \cdots & p(2, d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(d, 1) & p(d, 2) & \cdots & p(d, d) \end{pmatrix},$$

où $p(k, l) = P(\Delta_t = l | \Delta_{t-1} = k)$, et les probabilités de transition en i étapes sont notées $p^{(i)}(k, l) = P(\Delta_t = l | \Delta_{t-i} = k)$, pour $k, l \in \mathcal{E}$ et $i \geq 1$.

En utilisant ces définitions et notations, nous avons étudié les propriétés probabilistes de ce modèle et nous avons proposé une méthode pour estimer les paramètres inconnus du modèle pour pouvoir à la fin l'appliquer dans la modélisation de données réelles.

Bibliographie

- Augustyniak, A., (2014) Maximum likelihood estimation of the Markov-switching *GARCH* model. *Computational Statistics and Data Analysis* **76**, 61–75.
- Bauwens, L., Preminger, A., Rombouts, J. V. K., (2010) Theory and inference for Markov switching *GARCH* model, *Econometrics Journal*, volume **13**,. 218-244.
- Bentarzi, M., Hallin, M. (1994). On the Invertibility of Periodic Moving Average Models. *Journal of Time Series Analysis*, **15**, 263-268.

- Billio, M., Casarin, R., Osuntuyi, A., (2016) Efficient Gibbs sampling for Markov switching *GARCH* models. *Computational Statistics and Data Analysis*, **100**, 37-57.
- Bollerslev, T., (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.
- Bollerslev, T., Ghysels, E. (1996) Periodic autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Business and Economic Statistics*, **14**, 139–152.
- Franco, C., Zakoïan, J. M., (2005) The L^2 -structures of standard and switching-regime *GARCH* models, *Stochastic Processes and their Applications*, **115**, 1557-1582.
- Franses, P.H., Paap, R. (2000) . Modeling Changing Day-of-the-week Seasonality in Stock Returns and Volatility, *Applied Financial Economics*, **10**, 483-488.
- Franses, P. H., Van Dijk, D. (2000). *Non-linear time series models in empirical finance*. Cambridge University Press.
- Gray, S. F. (1996). Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process. *Journal of Financial Economics*, **42**, 27-62.
- Hamdi, F., Souam, S. (2017). Mixture periodic GARCH models : theory and applications. *Empirical Economics*, 1-32.
- Hamilton, J.D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica*, **57**, 357-384.
- Hamilton, J. D., Susmel, R. (1994) Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime, *Journal of Econometrics*,
- Klaassen, F. (2002) Improving *GARCH* volatility forecasts, *Empirical Econometrics*, **27**, 363-394.
- Lund, R., Basawa, I. V., (2000). Recursive prediction and likelihood evaluation for periodic *ARMA* models. *Journal of Time Series Analysis*, **21**, 75-93.
- Vecchia, A. V. (1985). Periodic autoregressive-moving average (*PARMA*) modeling with applications to water resources. *Journal of the American Water Resources Association*, **21**, 721-730.

Summary

In this paper, we propose an extension of a periodic *GARCH* (*PGARCH*) model to a Markov-switching periodic *GARCH* (*MS – PGARCH*) one, and provide some probabilistic properties of this class of models. In particular, we address the question related to the existence of strictly and weakly periodically stationary solutions. We establish necessary and sufficient conditions ensuring the existence of higher-order moments. We further provide closed-form expressions for calculating the even-order moments as well as the autocovariances of the squares of a *MS – PGARCH* process. Finally, we propose a method to estimate the parameters of our model and we apply it to model real data.

On Periodic INARMA (1,1) Models

Nawel Aries, Mohamed Bentarzi

Faculty of Mathematics, University of Science and Technology Houari Boumediene, Algiers, Algeria.
aries.nawel@hotmail.com, mohamedbentarzi@yahoo.com

Abstract. This paper deals with the study of some probabilistic and statistical properties of a Periodic Integer-Valued Autoregressive Moving Average Model (PINARMAS(1,1)). Necessary and sufficient conditions for the periodically stationary in the first and second order, are established. The closed forms of the mean and the variance are obtained. The autocovariance structure is studied, while providing closed form of the periodic autocorrelation function. The estimation of the underlying parameters are obtained by the Yule-Walker method and the Conditional Least Squares method (CLS). Their performance is compared through a simulation study.

1 Introduction

Because of the consistent presence of non-negative integer values time series in numerous fields such as epidemiology (e.g., Number of cases of campylobacteriosis infections time series, Ferland *et al.* (2006)), economics (e.g., Number of transactions in intra-day data of stocks, Brännäs and Quoreshi (2010)), environment (e.g., monthly number of forest fires, Monteiro *et al.* (2016)), criminology (e.g., count of drugs reported in the police, Zhang *et al.*, (2010)), etc., the development of models intended to accurately modelling the behavior of these type of time series is crucial. Indeed, most of the investigations were dedicated to the real valued times series, whereas, those on non-negative integer values time series are relatively neglected. However, during the last decades, several efforts have been given to the modelling and studying of the probabilistic and statistical properties of linear and nonlinear non-negative integer-valued time series models (see, Al-Osh and Alzaid (1987, 1988), McKenzie (1988), Alzaid and Al-Osh (1990), Du and Li (1991) and many others).

It should be noted that many non-negative integer-valued time series encountered in the aforementioned domains and many others reveal the periodicity feature in their autocovariance structures (as examples, *Monthly counts of claims of short-term disability benefits* originally studied by Freeland (1998), *The daytime and nighttime road accidents in Schiphol area, in the Netherlands for the year 2001*, studied by Pedeli and Karlis (2011), *Number of cases of campylobacteriosis infections time series* studied by Ferland *et al* (2006), *Monthly number of short-term unemployed people in Penamacor County Portugal*, studied by Monteiro *et al.* (2010)). However, it seems that the study of periodic integer-valued time series (linear and non linear) models has not received much attention in the literature of count time series. Indeed, there exists only a few papers dealing with the modeling of the periodically correlated, in the Gladyshev's sense (1963), non-negative integer-valued process (see Monteiro *et*

al. (2010,2015), Bentarzi and Bentarzi (2017a, b), Sadoun and Bentarzi (2019), Bentarzi and Aries (2019)). Thereby, the main aim of this paper is to present some particular Periodic Integer-valued Autoregressive Moving Average Models, $PINARMA_S(1, 1)$, as well as studying their probabilistic and statistical properties.

This communication aims to treat the Periodic Integer-Valued Autoregressive Moving Average ($PINARMA$). In the second section we define the model and some notations and assumptions. Sufficient conditions of the periodic stationarity in the mean and second order moment are provided in the third section. Furthermore, the closed-form expressions of the first two moments are obtained, under these conditions. In Section 4, we study the autocovariance structure of the underlying model, while providing the explicit expression of the autocorrelation function. In Section 5, we adopt the two usual estimation methods, namely, Yule-Walker method and Conditional Least Squares method. Finally, the performance of these methods is shown through a simulation study.

2 Notations, Definitions and main Assumptions

A periodically correlated Integer-Valued process $\{X_t, t \in Z\}$ in the sense of Gladyshev (1963), with period S (where $S \geq 2$), is said to satisfy a Periodic Integer-Valued Autoregressive Moving Average model, with order p and q , noted $PINARMA_S(p, q)$, if it is a solution of the following linear stochastic difference equation

$$X_t = \sum_{i=1}^p \varphi_{i,t} \circ X_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_{j,t} \circ \varepsilon_{t-j}, \quad t \in Z \quad (1)$$

where $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ is a sequence of uncorrelated non-negative integer-valued random variables, with a periodic mean $\lambda_{\varepsilon,t}$ and a finite periodic variance $\sigma_{\varepsilon,t}^2$, and the parameters $\varphi_{i,t}$, $\theta_{i,t}$ for $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, $\lambda_{\varepsilon,t}$ and $\sigma_{\varepsilon,t}^2$ are periodic in t , with period S ($S \geq 2$), i.e., $\varphi_{i,t+rS} = \varphi_{i,t}$, $\theta_{i,t+rS} = \theta_{i,t}$, $\lambda_{\varepsilon,t+rS} = \lambda_{\varepsilon,t}$ and $\sigma_{\varepsilon,t+rS}^2 = \sigma_{\varepsilon,t}^2$, $\forall t, r \in Z$ and where " \circ " stands, as usual, for the thinning Steutel-Van Harn operator, Steutel-Van Harn (1979), which is defined, for the integer stochastic processes X_{t-i} and ε_t and any counting sequences of independent non-negative integer-valued random variables $\{Y_{i,t}, i \in N, t \in Z\}$ and $\{Z_{j,t}, j \in N, t \in Z\}$ respectively, where $P(Y_{i,t} = 1) = 1 - P(Y_{i,t} = 0) = \varphi_{i,t} \in [0, 1]$ and $P(Z_{j,t} = 1) = 1 - P(Z_{j,t} = 0) = \theta_{j,t} \in [0, 1]$ respectively by

$$\varphi_{i,t} \circ X_{t-i} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{X_{t-i}} Y_{i,t}, & \text{if } X_{t-i} > 0, \\ 0, & \text{if } X_{t-i} = 0, \end{cases}$$

and

$$\theta_{j,t} \circ \varepsilon_{t-j} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\varepsilon_{t-j}} Z_{j,t}, & \text{if } \varepsilon_{t-j} > 0, \\ 0, & \text{if } \varepsilon_{t-j} = 0. \end{cases}$$

Letting $t = s + \tau S$ for $s = 1, 2, \dots, S$ and $\tau \in Z$, the last model (1) can be rewritten in the equivalent form

$$X_{s+\tau S} = \sum_{i=1}^p \varphi_{i,s} \circ X_{s-i+\tau S} + \varepsilon_{s+\tau S} + \sum_{j=1}^q \theta_{j,s} \circ \varepsilon_{s-j+\tau S}, \quad s = 1, 2, \dots, S \text{ and } \tau \in Z \quad (2)$$

Particularly, we have, for $p = q = 1$, the periodic model, $INARMA_S(1, 1)$, which is the object of our study

$$X_t = \varphi_t \circ X_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_t \circ \varepsilon_{t-1}, \quad t \in Z, \quad (3)$$

where the parameters φ_t and $\theta_t \in [0, 1]$, are periodic in t , with period S , i.e. $\varphi_{t+rS} = \varphi_t$, $\theta_{t+rS} = \theta_t, \forall t, r \in Z$. Letting $t = s + \tau S$ for $s = 1, 2, \dots, S$ and $\tau \in Z$, the last model (3) can be rewrite in the equivalent form

$$X_{s+\tau S} = \varphi_s \circ X_{s-1+\tau S} + \varepsilon_{s+\tau S} + \theta_s \circ \varepsilon_{s-1+\tau S}, \quad s = 1, 2, \dots, S \text{ and } \tau \in Z \quad (4)$$

References

- [1] Al-Osh, M. A. and Alzaid, A. A. (1987) First order integer-valued autoregressive ($INAR(1)$) processes. *Journal of Time. Series Analysis*, 8, 261 – 275.
- [2] Al-Osh, M. A and Alzaid, A. A. (1988) Integer-Valued moving average ($INMA$) process. *Statistische Hefte*, 29, 281 – 300.
- [3] Alzaid, A. A., and Al-Osh, M. A. (1990) Integer-Valued p th-Order Autoregressive Structure ($INAR(p)$) Process. *Journal of Applied. Probability*, 27, 314 – 324.
- [4] Bentarzi, M. and Aries, N. (*Submitted*). On Some Periodic $INARMA(p, q)$ Models.
- [5] Bentarzi, M. and Bentarzi, W. (2017a). Periodic integer-valued $GARCH(1, 1)$ model. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46, 1167 – 1188.
- [6] Bentarzi, M. and Bentarzi, W. (2017b). Periodic integer-valued bilinear time series model. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46, 1184 – 1201.
- [7] Brännäs, K. and Quoreshi, A. M. M. S. (2010). Integer-valued moving average modelling of the number of transactions in stocks. *Applied Financial Economics*, 20, 1429 – 1440.
- [8] Du, J. G. and Li, Y. (1991). The integer-valued autoregressive ($INAR(p)$) model. *Journal of Time Series Analysis*, 12, 129 – 142.
- [9] Ferland, R., Latour, A. and Oraichi, D. (2006). Integer-Valued $GARCH$ Process. *Journal of Time. Series Analysis*, 27. No. 6, 923 – 942.
- [10] Freeland, R. K. (1998). Statistical analysis of discrete-time series with applications to the analysis of workers compensation claims data [Ph.D. thesis]. Canada: University of British Columbia.
- [11] Gladyshev, E. G. (1963). Periodically and almost PC random processes with continuous time parameter. *Theory Probability and Application*, 8, 173 – 177.
- [12] McKenzie, E. (1988). Some $ARMA$ models for dependent sequences of Poisson counts. *Advances in Applied Probability*, 20, 822 – 835.
- [13] Monteiro, M., Scotto, M. G., Pereira, I. (2010). Integer-valued autoregressive processes with periodic structure. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 140, 1529 – 1541.
- [14] Monteiro, M., Scotto, M. G. and Pereira, I. (2015). A periodic bivariate integer-valued autoregressive model. *Dynamics, Games and Science*, 455 – 477.
- [15] Monteiro, M., Pereira, I. and Scotto, M. G. (2016). Dynamic factor Models for bivariate Count Data: an application to fire activity.

- [16] Pedeli, X. and D. Karlis (2011). A bivariate $INAR(1)$ process with application. *Statistical Modelling*, 11 (4), 325 – 349.
- [17] Sadoun, M. and Bentarzi, M. (2019). Efficient estimation in periodic $INAR(1)$ model : parametric case. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 49, 1 – 21.
- [18] Steutel, F.W. and Van Harn, K. (1986) Discrete operator self-decomposability and queueing networks. *Communications in Statistics. Stochastic. Models*, 2, 161 – 169.
- [19] Zhang, H. Wang, D and Zhu, F. (2010). Inference for $INAR(p)$ processes with signed generalized power series thinning operator. *Journal of Statical Planning and Inference*, 140, 667 – 683.

Résumé

Dans ce travail nous traitons certaines propriétés probabilistes et statistiques d'un modèle Moyenne mobile Autorégressive à valeurs entières périodique ($PINARMA_S(1, 1)$). Les conditions nécessaires et suffisantes pour le stationnaire périodique dans le moyenne et le second ordre sont établies. Les formes explicites de la moyenne et la variance sont obtenues. La structure d'autovariance est étudiée, tout en fournissant la forme explicite de la fonction d'autocorrélation périodique. L'estimation des paramètres sous-jacents est obtenue par la méthode de Yule-Walker et la méthode des moindres carrés conditionnels (CLS). Leur performance est comparée à travers une étude de simulation.

Modél de longue mémoire pure à coefficients de mémoire périodique

Amine.AMIMOUR*, Karima.BELAIDE**

Département de mathématiques, Laboratoire Mathématiques appliquées
Université de Bejaia, Algérie

* (E-mail: amineamimour@gmail.com),

** (E-mail: k_tim2002@yahoo.fr)

Résumé. Le but de notre travail est d'étudier le comportement asymptotique de la fonction d'autocovariance et d'autocorrélation périodique du modèle qui présente à la fois un phénomène de longue mémoire et un effet périodique, ce comportement est illustré dans la simulation, aussi de donner une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de ce modèle au lieu de la condition suffisante.

1 Introduction

La plupart des techniques d'estimation reposent sur l'hypothèse que la série soit stationnaire, une classe spéciale des séries temporelles non stationnaires a été définie par Gladyshev [1961,1963], appelé les séries temporelles périodiquement corrélées, ces séries temporelles sont non stationnaires mais ont des moyennes et des covariances périodiques, donc ils peuvent être considérés comme un pont stationnaire et un processus non stationnaire. Dans la statistique inférentielle une série temporelle contiendra une composante de mémoire longue si l'influence de la valeur passée sur la valeur présente décroît très faiblement, les processus ARFIMA sont des modèles de dépendance à long terme ou à longue mémoire les plus simples à identifier, nous retiendrons ici ces processus où le paramètre de mémoire a une variation périodique d'une période p dans \mathbb{N} . Ces processus permettent une avancée significative dans l'étude des séries temporelles et disposent de techniques d'estimations satisfaisantes, ils ont été introduits par Granger et Joyeux [1980] et Hosking [1981] c'est une extension des modèles ARIMA de Box et Jenkins [1977] en autorisant des valeurs réelles et non plus entières du coefficient de différentiation, ces coefficients peuvent avoir une périodicité dans ce cas on parle des processus ARFIMA périodiquement stationnaires. Nous nous intéressons dans notre étude à cette classe de processus, ce travail est divisé en deux chapitres portant sur la définition du modèle et quelques propriétés de ce modèle.

2 Définition

Le processus ARFIMA pure et périodique $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ avec une période p (noté par $\text{PARFIMA}_p(0; d_1, d_2, \dots, d_p; 0)$) est défini par l'équation stochastique suivante

Processus fractionnaire périodique

$$(1 - B)^{d_t} X_t = \varepsilon_t \iff (1 - B)^{d_i} X_{i+pM} = \varepsilon_{i+pM}, \quad (2.1)$$

où $\forall t \in \mathbb{Z}, \exists i = \{0, \dots, p-1\}, M \in \mathbb{Z}$, tel que $t = i + pM$ et p représente la période $\in \mathbb{N}$, d_t est le paramètre de longue mémoire périodique ses valeurs sont dans $(0, \frac{1}{2})$, et $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ est un variable aléatoire de moyen zéro et de variance fini σ_ε^2 .

— **Inversibilité**

Si $d_i > 0$. Le processus (2.1) est inversible et admet une représentation autoregressive infini donnée par

$$\varepsilon_{i+pM} = (1 - B)^{d_i} X_{i+pM} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j^i X_{i+pM-j}, \quad (2.2)$$

$$\text{avec } \pi_j^i = \frac{\Gamma(j-d_i)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d_i)},$$

— **Causalité**

Si $d_i < \frac{1}{2}$. Le processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est causal et admet une représentation moyen mobile infini donnée par

$$X_{i+pM} = (1 - B)^{-d_i} \varepsilon_{i+pM} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^i \varepsilon_{i+pM-j}, \quad (2.3)$$

$$\text{avec } \psi_j^i = \frac{\Gamma(j+d_i)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d_i)}.$$

— La condition suffisante d'inversibilité et de causalité de ce processus

$$X_{i+pM} = (1 - B)^{-d_i} \varepsilon_{i+pM} = \begin{cases} X_{1+pM} = (1 - B)^{-d_1} \varepsilon_{1+pM} \\ X_{2+pM} = (1 - B)^{-d_2} \varepsilon_{2+pM} \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{p+pM} = (1 - B)^{-d_p} \varepsilon_{p+pM} \end{cases}.$$

Le passage à un ARFIMA vectoriel permet de considérer sous une condition suffisante l'inversibilité et la causalité du modèle (2.1) (Hosking, 1981).

3 Résultats principaux

Proposition 1. *Le modèle (2.1) est un modèle de dépendance à long terme multivariée (p -vecteur).*

Proposition 2. *Le modèle (2.1) est inversible sous une condition nécessaire est suffisante donnée par*

$$X_{i+pm} = \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j(i) \varepsilon_{i+pm-j}. \quad (3.1)$$

Les coefficients $\Pi_j(i)$ $j \geq 1$ satisfont la relation suivante

$$\Pi_j(i) = -[\psi_j(i) + \sum_{l=1}^{j-1} \Pi_l(i)\psi_j(i+k)], \quad (3.2)$$

avec $\psi_j(i)$ $j \geq 0$ est donnée par (2.3) et $l \equiv k[p]$, $\Pi_0(i) = 1$ et $\sum_{j=0}^{\infty} |\Pi_j(i)| < \infty$, $\sum_{j=0}^{\infty} |\Pi_j(i)|^2 < \infty$ quand $-\frac{1}{2} < d_i < \frac{1}{2}$.

Proposition 3. Le modèle (2.1) appartient à une classe des processus périodiquement corrélés.

Proposition 4. La fonction d'autocovariance périodique du modèle (2.1) pour une période $p = 2$ est donnée par

$$\gamma_X^i(h) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \frac{\Gamma(1-2d_i)\Gamma(d_i+h)}{\Gamma(d_i)\Gamma(1-d_i)\Gamma(1+h-d_i)} & \text{si } h \text{ pair} \\ \sigma_\varepsilon^2 \frac{\Gamma(1-d_i-d_{i+1})\Gamma(d_{i+1}+h)}{\Gamma(d_{i+1})\Gamma(1-d_{i+1})\Gamma(1+h-d_i)} & \text{si } h \text{ impair} \end{cases}, \quad (3.3)$$

et pour $p \in \mathbb{N}$

$$\gamma_X^i(h) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\Gamma(1-d_i-d_{i+k})\Gamma(d_{i+k}+h)}{\Gamma(d_{i+k})\Gamma(1-d_{i+k})\Gamma(1+h-d_i)}. \quad (3.4)$$

La fonction d'autocorrelation périodique pour $p=2$

$$\rho_X^i(h) = \begin{cases} \frac{\Gamma(1-d_i)\Gamma(d_i+h)}{\Gamma(d_i)\Gamma(1+h-d_i)} & \text{si } h \text{ pair} \\ \frac{[\Gamma(1-d_i)]^2\Gamma(1-d_i-d_{i+1})\Gamma(d_{i+1}+h)}{\Gamma(d_{i+1})\Gamma(1-d_{i+1})\Gamma(1-2d_i)\Gamma(1+h-d_i)} & \text{si } h \text{ impair} \end{cases}, \quad (3.5)$$

et pour $p \in \mathbb{N}$

$$\rho_X^i(h) = \frac{[\Gamma(1-d_i)]^2\Gamma(1-d_i-d_{i+k})\Gamma(d_{i+k}+h)}{\Gamma(1-2d_i)\Gamma(d_{i+k})\Gamma(1-d_{i+k})\Gamma(1+h-d_i)}, \quad (3.6)$$

$h \equiv k[p]$.

4 Conclusion

Un modèle ARFIMA(0, d_i , 0) multivarié p -vecteur est équivalent au modèle ARFIMA(0, d_i , 0) périodique de période p .

Le modèle ARFIMA(0, d_i , 0) périodique est un modèle périodiquement corrélé.

Le modèle ARFIMA(0, d_i , 0) périodique est causal et inversible sous une condition nécessaire et suffisante.

La fonction d'autocovariance périodique décroît très lentement vers 0 avec une vitesse hyperpolique et présente un comportement périodique.

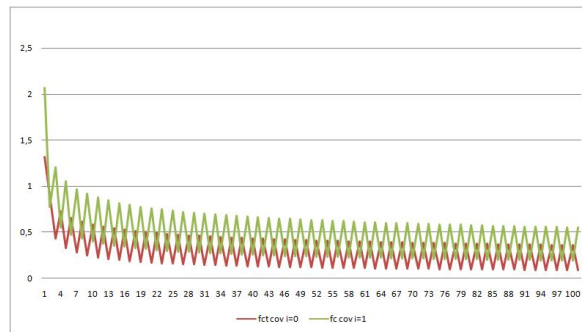


FIG. 1 – *Fonction d'autocovariance periodique pour $p = 2$, $d_1 = 0.3$, $d_2 = 0.4$, $h = 0, 1, 2, \dots, 100$.*

Références

- Abramowitz, M. and. Stegun, I. (1965), Handbook of Matematical Functions ; New York ; Dover Publications.
- Gladyshev, E. G. (1961), Periodically correlated random sequences ; Soviet. Mathematics, 2, 385-388.
- Gladyshev, E. G. (1963), Periodically and almost PC random processes with continuous time parameter ; Theory Probability and its Applications, 8.
- Hosking J.R.M. (1981), Fractionnal Differencing ; Biometrika. Edited by Ptrice Abry, Vol 68.
- Hui Y.V. and Li.W.K. (1995), On Fractionally Differenced Periodic Processes ; The Indian Journal of Statistics, Vol 57, Series B, Pt. 1, pp, 19–31 edition.
- Odaki .M. (1993), On the invertibility of fractionally differenced ARIMA processes ; Biometrika, 80, 3, pp. 703-9.

Summary

The aim of our work is to study the asymptotic behavior of the periodic autocovariance and autocorrelation function of a model which presents both a long memory phenomenon and a periodic effect, this behavior is investigated through a simulation study, also to give a necessary and sufficient condition of invertibility of this model instead of the sufficient condition

Identification d'un modèle autorégressif à seuils avec zones tampons

Imane BENAMEUR*, Fayçal HAMDI**

*Laboratoire RECITS, Faculté de Mathématiques, USTHB, Alger, Algérie
benameur1013@gmail.com,

**Laboratoire RECITS, Faculté de Mathématiques, USTHB, Alger, Algérie
fhamdi@usthb.dz

Résumé. Dans cette communication, on considère la classe des modèles autorégressifs à seuils avec zones tampons où il est question d'étudier le problème de sélection conjointe du paramètre de délai et des ordres autorégressifs. Ces modèles ont été proposés afin de pallier la brutalité de la transition entre les régimes dans les modèles autorégressifs à seuils (*TAR*) et ceci en introduisant une zone tampon dans la structure de transition afin d'autoriser un passage lisse entre les régimes. Nous proposons un critère fondé sur la fonction de densité prédictive et qui généralise celui proposé par Djuric et Kay (1992) dans le cadre des modèles autorégressifs linéaires. La performance du critère *PDC* proposé est évaluée via une étude de simulation.

1 Introduction

Les modèles de mélange sont un outil puissant et flexible et un moyen d'obtenir des distributions relativement complexes, tout en s'appuyant sur des lois très simples, comme les lois normales. Bien que le mélange de modèles statistiques soit apparu en 1894 avec les recherches de Pearson, il n'a été introduit qu'en 1978 dans l'analyse des séries chronologiques avec les modèles à seuil (Tong, 1978). Depuis, ce type de modélisation non-linéaire est considérée comme une alternative intéressante à la modélisation linéaire. En effet, il est bien connu que les modèles linéaires tels que les modèles *ARMA* ne permettent pas souvent de reproduire la dynamique de certaines séries économiques caractérisées par la présence d'une asymétrie dans la distribution et éventuellement des ruptures, comme des crises, ou de nouvelles politiques économiques qui peuvent entraîner une certaine instabilité temporelle dans les relations. Tandis que les modèles de mélange permettent d'autoriser une série chronologique à posséder une dynamique différente suivant les régimes dans laquelle elle se trouve. En particulier, les modèles Self-Exciting *TAR* (*SETAR*), introduits par Tong et Lim (1980) et développés par Hansen (1997) reposent sur l'idée qu'une relation peut être non linéaire sur la période globale considérée, mais linéaire par sous périodes. Un modèle *SETAR* est ainsi un mélange fini de modèles autorégressifs où le changement de régime est régi par une variable endogène retardée et des seuils qui forment une partition de l'espace des réels. Notons que le mécanisme de transition, d'un modèle *SETAR*, est brutale car la transition d'un régime à l'autre est immédiate,

i.e. le passage d'un régime à l'autre pouvant s'effectuer en une période, même si cette évolution est minime. Ce qui fait que les modèles *SETAR* fonctionnent généralement bien, sauf autour des frontières entre les différents régimes (voir par exemple Wu et Chen, 2007). Cependant, afin de pallier la brutalité de la transition entre les régimes dans les modèles *SETAR* Li et al. (2015) ont introduit, comme une alternative, la classe des modèles autorégressifs à seuils avec zones tampons (Buffered threshold AutoRegressive (*BAR*)). La particularité de ces modèles repose sur le mécanisme de transition. En effet, la proposition du modèle *BAR* est motivée par le fait qu'il pourrait y avoir une région tampon qui assure une transition lisse entre les différents régimes, i.e. une observation sera générée à partir de la même composante du mélange de celle qui la précède si sa valeur retardée se trouve dans la zone tampon.

Sans perdre de généralité, nous ne considérerons dans cette communication qu'un modèle *BAR* possédant deux régimes distincts. Rappelons qu'une série chronologique (y_1, y_2, \dots, y_n) est issue d'un modèle *BAR* à deux régimes et d'ordres (p_1, p_2) , noté $BAR(2; p_1, p_2)$, si et seulement si

$$y_t = \phi_{k,0} + \sum_{i=1}^{p_k} \phi_{k,i} y_{t-i} + \sigma_k \varepsilon_t, \text{ si } R_t = k, \quad (1)$$

où

$$R_t = \begin{cases} 1 & y_{t-d} \leq r_l, \\ 2 & y_{t-d} > r_u, \\ R_{t-1} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où l'ensemble des coefficients $\phi_{k,i}$ ($k = 1, 2$ et $i = 1, \dots, p_k$) sont des réels et d est un entier positif appelé paramètre de délai (ou de retard). La condition suivante doit être imposée $r_l \leq r_u$ et $[r_l, r_u]$ est la zone tampon pour laquelle le système, à l'instant t , est autorisé à conserver son régime à l'instant $t - 1$, lorsque la valeur de $y_{t-d} \in [r_l, r_u]$. $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus bruit blanc gaussien de variance unitaire. Enfin, les constantes σ_k , $k = 1, 2, \dots, K$, sont des réelles strictement positives.

2 Critère de la densité prédictive pour un modèle *BAR*

Cette section est dédiée à notre contribution. Comme le modèle *BAR* est un modèle autorégressif linéaire par morceaux, il semble naturel d'étendre le critère de densité prédictive (*PDC*) proposé par Djuric et Kay (1992) pour le modèle autorégressif linéaire à ce modèle non linéaire. Cependant, la sélection du meilleur modèle *BAR* doit être effectuée en fonction de ses caractéristiques et nécessite un traitement plus minutieux, car le problème d'identification du modèle, en plus de la sélection de l'ordre, consiste à déterminer le paramètre de délai et la zone tampon. Pour dériver la version *PDC* pour la sélection du modèle *BAR*, nous devons déterminer explicitement l'expression de la fonction de densité prédictive de chaque observation. Nous supposons dans cette section que la zone tampon est connue et nous nous concentrerons uniquement sur le problème de sélection conjointe du paramètre de délai et des ordres autorégressifs. Nous supposons également les valeurs initiales $(y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$ sont données, où $m = \max\{p_1, p_2, d\} + 1$.

Considérons une réalisation donnée $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ du modèle (1), que nous supposons stationnaire. Soient $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\alpha = (\mathbf{p}, d)$ et $\mathbf{y}_{r,s} = (y_r, y_{r+1}, \dots, y_s)'$, tel que $r < s$.

Alors, la densité prédictive de y_t sachant l'information disponible à l'instant $t - 1$, peut être exprimée comme suit

$$f(y_t | \mathbf{y}_{1,t-1}, \alpha) = \int_{\sigma} \int_{\Phi} f(y_t | \mathbf{y}_{1,t-1}, \alpha, \sigma, \Phi) f(\sigma, \Phi | \mathbf{y}_{1,t-1}, \alpha) d\Phi d\sigma, \quad (2)$$

où $\Phi = (\Phi'_{1,p_1}, \Phi'_{K,p_2})'$, $\Phi_{k,p_k} = (\phi_{k,0}, \phi_{k,1}, \dots, \phi_{k,p_k})'$, pour $k = 1, 2$, et $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)'$.

Selon le théorème de Bayes, la densité a posteriori des paramètres σ et Φ après avoir observé le vecteur $\mathbf{y}_{1,t-1}$, est donnée par

$$f(\sigma, \Phi | \mathbf{y}_{1,t-1}, \alpha) \propto f(\mathbf{y}_{m,t-1} | \mathbf{y}_{1,m-1}, \alpha, \sigma, \Phi) f(\sigma, \Phi | \alpha),$$

où

$$f(\mathbf{y}_{m,t-1} | \mathbf{y}_{1,m-1}, \alpha, \sigma, \Phi) = \prod_{i=m}^{t-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{R_i}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{R_i}^2} \left(y_i - \phi_{R_i,0} - \sum_{j=1}^{p_{R_i}} \phi_{R_i,j} y_{i-j} \right)^2 \right\} \right).$$

Du fait que nous ne disposons d'aucune information a priori sur les paramètres σ et Φ , la loi souvent utilisée dans ce cas et pour ces deux paramètres est une loi a priori non informative. Dans notre cas, elle est choisie comme suit

$$f(\sigma, \Phi | \alpha) \propto \prod_{k=1}^2 \frac{1}{\sigma_k}, \quad \Phi_{k,p_k} \in \mathbb{R}^{p_k+1} \text{ et } \sigma_k \in \mathbb{R}_+^*, \text{ pour } k = 1, 2.$$

Dans le cadre des modèles *SETAR*, Hamdi et Khalfi (2016), ont exploité la représentation de Tsay (1989), afin de réécrire (2) d'une manière qui peut simplifier son évaluation. Dans notre cas, nous proposons d'utiliser un double arrangement au lieu d'un seul car les valeurs y_{t-d} qui sont dans la zone tampon ne sont pas forcément ordonnées dans leurs régimes. Soient $E_{t,d} = \{y_m, y_{m+1}, \dots, y_{t-d}\}$ et $[t, i, k]$ l'indice de la $i^{\text{ème}}$ petite valeur du $k^{\text{ème}}$ régime parmi les éléments de cet ensemble $E_{t,d}$. Ainsi,

$$f(y_t | \mathbf{y}_{1,t-1}, \alpha) = \frac{C}{(2\pi)^{\frac{t-m+1}{2}}} \times \int_{\sigma} \int_{\Phi} \prod_{k=1}^2 \left(\frac{\exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1+(k-1)n_{t,1}}^{n_{t,1}+(k-1)n_{t,2}} \left(y_{[t,i,k]+d} - \phi_{k,0} - \sum_{j=1}^{p_k} \phi_{k,j} y_{[t,i,k]+d-j} \right)^2 / 2\sigma_k^2 \right\}}{\sigma_k^{n_{t,k}+1}} \right) d\Phi d\sigma,$$

où $n_{t,k} = 0$, $k = 1, 2$, est le nombre d'observations issues du $k^{\text{ème}}$ régime et C est la constante de normalisation à déterminer à la fin du calcul.

Le résultat suivant donne l'expression explicite et généralise celui de Djuric et Kay (1992) ainsi que celui de Hamdi et Khalfi (2016).

Proposition 1 Si $n_{t-1,k} > p_k + 1$, pour tout $k = 1, 2$, la densité prédictive du modèle (1) est donnée par,

$$f(y_t | \mathbf{y}_{1,t-1}, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{k=1}^K g_{p_k,d}(t, k),$$

où

$$g_{p_k,d}(t,k) = \frac{|\Sigma_\alpha(t-1,k)|^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n_{t,k}-p_k-1}{2}\right) \left(\frac{Y'_\alpha(t-1,k)P_\alpha(t-1,k)Y_\alpha(t-1,k)}{2}\right)^{\frac{n_{t-1,k}-p_k-1}{2}}}{|\Sigma_\alpha(t,k)|^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n_{t-1,k}-p_k-1}{2}\right) \left(\frac{Y'_\alpha(t,k)P_\alpha(t,k)Y_\alpha(t,k)}{2}\right)^{\frac{n_{t,k}-p_k-1}{2}}},$$

et

$$\begin{aligned} Y_\alpha(l,k) &= (y_{[l,s_{l,k-1}+1,k]+d}, y_{[l,s_{l,k-1}+2,k]+d}, \dots, y_{[l,s_{l,k},k]+d})', \\ H_\alpha(l,k) &= \begin{bmatrix} 1 & y_{[l,s_{l,k-1}+1,k]+d-1} & y_{[l,s_{l,k-1}+1,k]+d-2} & \dots & y_{[l,s_{l,k-1}+1,k]+d-p_k} \\ 1 & y_{[l,s_{l,k-1}+2,k]+d-1} & y_{[l,s_{l,k-1}+2,k]+d-2} & \dots & y_{[l,s_{l,k-1}+2,k]+d-p_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_{[l,s_{l,k},k]+d-1} & y_{[l,s_{l,k},k]+d-2} & \dots & y_{[l,s_{l,k},k]+d-p_k} \end{bmatrix}, \\ \Sigma_\alpha(t,k) &= H'_\alpha(t,k) H_\alpha(t,k), \\ P_\alpha(t,k) &= \mathbf{I}_{n_{t,k}} - H_\alpha(t,k) \Sigma_\alpha^{-1}(t,k) H'_\alpha(t,k). \end{aligned}$$

Ici $\mathbf{I}_{n_{t,k}}$ est la matrice d'identité de dimension $n_{t,k}$.

Enfin, dans le même esprit de la stratégie de Djuric et Kay (1992) et Hamdi et Khalfi (2016), nous pouvons calculer l'estimateur $\hat{\alpha} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{d})$ comme étant la valeur qui minimise le critère $PDC^*(\alpha)$ défini par

$$PDC^*(\alpha) = - \sum_{t=t_0}^{t_\alpha-1} \sum_{k=1}^2 \log(g_{\min\{n_{t-1,k}-2, p_k\}, d}(t,k)) - \sum_{t=t_\alpha}^n \sum_{k=1}^2 \log(g_{p_k,d}(t,k)),$$

où t_α est le premier $t \geq t_0$ satisfaisant la contrainte $n_{t-1,k} > p_k + 1$, pour tout $k = 1, 2$.

Références

- Djuric, P.M., S. M. Kay (1992). Order Selection of Autoregressive Models, *IEEE Tranaction on Signal Processing* 40, 2829-2833.
- Hamdi, F., A. Khalfi (2016). Identification des modèles SETAR par le critère de la densité prédictive. *Les Annales RECITS* 3, 83-91.
- Hansen, B. E. (1997). Inference in TAR models. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics* 2, 1-14.
- Li, G., B. Guan, W. K. Li, P. L. Yu (2015). Hysteretic autoregressive time series models. *Biometrika* 102, 717-723.
- Tong, H., K. S. Lim (1980). Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 245-292.
- Wu, S., R. Chen (2007). Threshold variable determination and threshold variable driven switching autoregressive models. *Statistica Sinica* 17, 241-264.

Summary

In this talk, we consider the class of Buffered threshold AutoRegressive (*BAR*) models where it is question to study the problem of joint determination of the delay parameter and autoregressive orders of the model. These models have been proposed in order to overcome the brutality of the transition between the regimes in threshold autoregressive models (*TAR*) and this by introducing a buffer zone in the transition structure to allow a smooth transition between the regimes. We propose a criterion based on the predictive density function which generalizes the one proposed by Djuric and Kay (1992). The performance of this variant is evaluated by means of Monte Carlo experiments.

On optimal control of mean field forward backward stochastic differential equations

Radhia Benbrahim*, Boulakhras Gherbal**

* ** Laboratory of Applied Mathematics, University of Mohamed Khider, P.O.Box 145, Biskra 07000, Algeria,

* benbrahim.radhia@yahoo.com,

** bgherbal@yahoo.fr, b.gherbal@univ-biskra.dz

Abstract. In this work, we study the existence of optimal control for systems, governed by non linear forward-backward stochastic differential equations of mean-field type with controlled diffusion. The proof of the main result is based on tightness results of the distributions of the processes defining the control problem and the Skorokhod representation theorem on the Skorokhod space, equipped with the S-topology of Jakubowski . Furthermore, when the Roxin convexity condition is fulfilled, we prove that the optimal relaxed control is in fact strict...

1 Introduction

The purpose of this paper is to study the problem of existence of optimal control for systems, governed by non linear forward-backward stochastic differential equations of mean-field type, of the forme :

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t \int_U b(s, X_s, E[\alpha(X_s)], u) \mu_s(du) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, E[\beta(X_s)]) dW_s \\ Y_t = g(X_T, E[\lambda(X_T)]) + \int_t^T \int_U f(s, X_s, E[\gamma(X_s)], Y_s, E[\delta(Y_s)], u) \mu_s(du) ds \\ \quad - \int_t^T Z_s dW_s - (N_T - N_t). \end{cases} \quad (1)$$

Accordingly, the cost functional to be minimized over the set \mathcal{R} of admissible relaxed control, will be given by :

$$J(\mu) := E[l(X_T, E[\theta(X_T)])] + k(Y_0, E[\rho(Y_0)]) + \int_0^T h(t, X_t, E[\varphi(X_t)], Y_t, E[\psi(Y_t)], u) \mu_t(du) dt. \quad (2)$$

where b, σ, f, l, h, g and are given functions. $(W_t, t \geq 0)$ is a standard Brownian motion, defined on some filtered probability space (ω, F, F_t, P) , satisfying the usual conditions. X, Y, Z are square integrable adapted processes and N is a square integrable martingale which is orthogonal to W

2 Main results

The following assumptions will be our main assumptions.

(H1) Assume that the functions

$$\begin{aligned} b &: [0, T] \times R^n \times R^n \times U \rightarrow R^n, \\ \sigma &: [0, T] \times R^n \times R^n \rightarrow R^{n \times d}, \\ f &: [0, T] \times R^n \times R^n \times R^m \times R^m \times U \rightarrow R^m, \\ g &: R^n \times R^n \rightarrow R^m, \\ \alpha, \beta, \lambda, \gamma &: R^n \rightarrow R^n, \\ \delta &: R^m \rightarrow R^m, \end{aligned}$$

are bounded and continuous. Moreover, assume that there exist a constant $K > 0$, such that for every $(x_1, x_2, x'_1, x'_2) \in R^{4n}, (y_1, y_2, y'_1, y'_2) \in R^{4m}$,

$$\begin{aligned} |f(t, x_1, x_2, y_1, y_2, u) - f(t, x'_1, x'_2, y'_1, y'_2, u)| &\leq K (|x_1 - x'_1| + |x_2 - x'_2| + |y_1 - y'_1| + |y_2 - y'_2|), \\ |b(t, x_1, x_2, u) - b(t, x'_1, x'_2, u)| &\leq K (|x_1 - x'_1| + |x_2 - x'_2|), \\ |\sigma(t, x_1, x_2) - \sigma(t, x'_1, x'_2)| &\leq K (|x_1 - x'_1| + |x_2 - x'_2|), \\ |\alpha(x_1) - \alpha(x'_1)| \leq K |x_1 - x'_1|, \quad |\beta(x_1) - \beta(x'_1)| &\leq K |x_1 - x'_1|, \\ |\gamma(x_1) - \gamma(x'_1)| \leq K |x_1 - x'_1|, \quad |\lambda(x_1) - \lambda(x'_1)| &\leq K |x_1 - x'_1|, \\ |\delta(y_1) - \delta(y'_1)| \leq K |y_1 - y'_1|, \quad |g(x_1, x_2) - g(x'_1, x'_2)| &\leq K (|x_1 - x'_1| + |x_2 - x'_2|). \end{aligned}$$

(H2) Assume that the functions

$$\begin{aligned} h &: [0, T] \times R^n \times R^n \times R^m \times R^m \times U \rightarrow R, \\ l &: R^n \times R^n \rightarrow R^n \\ k &: R^m \times R^m \rightarrow R^m \\ \theta, \varphi &: R^n \rightarrow R^n, \\ \rho, \psi &: R^m \rightarrow R^m, \end{aligned}$$

are bounded and continuous and there exist a constant $K > 0$, such that for every $(x_1, x_2, x'_1, x'_2) \in R^{4n}, (y_1, y_2, y'_1, y'_2) \in R^{4m}$,

$$|h(t, x_1, x_2, y_1, y_2, u) - h(t, x'_1, x'_2, y'_1, y'_2, u)| \leq K (|x_1 - x'_1| + |x_2 - x'_2| + |y_1 - y'_1| + |y_2 - y'_2|).$$

The main result is the following

Theorem : Under conditions **(H1)** – **(H2)**, the relaxed control problem has an optimal solution.

Références

- K. Bahlali, B. Gherbal and B. Mezerdi, *Existence of optimal controls for systems driven by FBSDEs*, Systems and Control Letters, (2011), 344–349.
- K. Bahlali, M. Mezerdi and B. Mezerdi, *Existence of optimal controls for systems governed by mean-field stochastic differential equations*, Afrika Statistika, Vol. 9, (2014), 627–645.
- J. Yong and X.Y Zhou, *Stochastic controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations*, Springer, New York, (1999).

Résumé

Dans ce travail, nous étudions l'existence de contrôle optimal pour les systèmes des ED-SPR non linéaire de type champ moyen avec le coefficient de diffusion contrôlé. La preuve de l'existence de contrôle optimal relaxé est basée sur des arguments de tension des lois associées aux processus en question et le théorème de représentation de Skorokhod sur l'espace de Skorokhod (des processus càdlàg), muni par la S -topologie de Jakubowski. On montre aussi que si la condition de convexité de Roxin est satisfaite, le contrôle optimal relaxé est en fait strict

Immersion des filtrations et transformations browniennes

Aicha Bouaka

Laboratoire des modèles stochastiques, statistique et applications (LMSSA)
Université Dr. Tahar Moulay de Saida, Algérie
aicha.bouaka@univ-saida.dz

Résumé. Dans ce travail, on montre que si $F \hookrightarrow G \hookrightarrow H$ (où le symbole (\hookrightarrow) désigne la propriété d'immersion), et si F et H sont des filtrations browniennes et si G est le grossissement progressif de F avec un temps honnête τ évitant tous les F -temps d'arrêt, alors G est faiblement brownienne, i.e., $G = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0} = \sigma(\int_0^s H_u dB_u, s \leq t)$, autrement dit, toutes les martingales de G sont des transformations browniennes d'un mouvement brownien B , pour ça, on étudie quelques cas particuliers des transformations browniennes pour lesquelles la filtration G soit brownienne.

1 Introduction

Étant donnée une filtration sur un espace probabilisé, comment reconnaître si elle est engendrée par un mouvement brownien ou non ? Cette question s'intéresse à une filtration faiblement brownienne F , i.e., toute F -martingale peut s'écrire comme un intégrale stochastique d'un processus prévisible par rapport à un certain F -mouvement brownien B . L'intégrale stochastique $\hat{B} = \int H dB$ définit un nouveau mouvement brownien pour un processus prévisible H convenablement choisi, et la filtration naturelle de \hat{B} est évidemment immergée dans celle de B . En toute généralité, il existe des filtrations faiblement browniennes, qui ne sont pas browniennes, et le caractère non-brownienne d'une filtration faiblement browniennes reste beaucoup plus délicat.

2 Immersion des filtrations browniennes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, F, P)$ un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions habituelles.

Propriété d'immersion

On a la définition suivante.

Définition 1. Soient F et G deux filtrations dans le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que F est **immergée** dans G et on écrit $F \hookrightarrow G$, si F est incluse dans G , i.e., $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, pour tout $t \geq 0$ et toute F -martingale est une G -martingale (Émery (2002)).

Filtrations faiblement et fortement browniennes

On rappelle la définition des filtrations faiblement et fortement browniennes, voir par exemple (Nikeghbali (2006), Définitions 8.39 et 8.40).

Définition 2.

- Une filtration F dans (Ω, \mathcal{A}, P) est dite **faiblement brownienne** si \mathcal{F}_0 est $P.p.s$ triviale, et s'il existe un F -mouvement brownien B tel que, toute F -martingale locale M peut s'écrire comme

$$M_t = c + \int_0^t H_s dB_s, \quad \forall t$$

où $c \in \mathbb{R}$, et H est un processus F -prévisible unique satisfaisant $\int_0^t H_s^2 ds < \infty$.

- Une filtration dans (Ω, \mathcal{A}, P) est dite **fortement brownienne** (ou seulement **brownienne**) si elle est engendrée par un mouvement brownien standard.

Temps honnête

Supposons maintenant que $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration brownienne engendrée par un mouvement brownien (MB) B .

Un temps honnête est un temps aléatoire mais n'est pas un temps d'arrêt, voir (Dellecherie et Meyer (1978), p. 72).

Définition 3. Soit τ la fin d'un ensemble F -prévisible Γ telle que

$$\tau = \sup\{t : (t, \omega) \in \Gamma\}$$

alors, τ est un F -temps honnête.

Grossissement progressif

On grossit la filtration F avec le processus $(\tau \wedge t)_{t \geq 0}$, alors la nouvelle filtration grossie G est la plus petite filtration contenant F et faisant de τ un temps d'arrêt, i.e.,

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{t+} := \bigcap_{s > t} \mathcal{G}_s = \bigcap_{s > t} (\mathcal{F}_s \vee \sigma(\tau \wedge s))$$

et $G = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ est appelée le **grossissement progressif** de F avec τ .

Résultat principal

Notre résultat principal est le suivant.

Proposition 1. (Bouaka et Kandouci (2017), Proposition 4.1.) Si $F \hookrightarrow G \hookrightarrow H$, où F et H sont des filtrations browniennes, et si G est le grossissement progressif de F avec un temps honnête τ qui évite tous les F -temps d'arrêt, alors G est faiblement brownienne.

Donc, la question qui se pose : Sous quelles conditions la filtration G est-elle brownienne ? Cette question conduit à la section suivante.

3 Transformations browniennes

On donne la définition suivante ; voir par exemple (Attal et al. (1995), p. 62).

Définition 4. On appelle **transformation brownienne** toute application mesurable $B \circ T$ de Ω dans lui même qui préserve la mesure de Wiener P . Dans ce cas $B \circ T$ est un mouvement brownien sur l'espace de Wiener, tel que

$$B \circ T = \int H dB$$

où H est un processus prévisible de carré 1.

Il y a des cas particuliers de $(H_t)_{t \geq 0}$ pour lesquels G soit brownienne.

1. Lane (1978) a étudié les cas suivants :

Pour une subdivision $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de $]0, +\infty[$, on définit

(a) $H_t(\omega) = \sum_{i=1}^n H_{t_i}(\omega) 1_{[t_i, t_{i+1})}(t)$ où H_{t_i} est \mathcal{G}_{t_i} -adapté et $P(H_{t_i} < \infty) = 1$ pour $1 \leq i \leq n$. Si $P(H_{t_i} = 0) = 0$, $1 \leq i \leq n$, alors $\sigma(\int_0^s H_u dB_u, s \leq t)$ est brownienne (Lane (1978), Exemple 1, p. 500).

(b) Supposons que H est déterministe, i.e., $H_t(\omega) = f(t)$ avec $\int_0^t f^2(s) ds < \infty, \forall t$. Si $\lambda\{s : f(s) = 0\} = 0$, alors $\sigma(\int_0^s H_u dB_u, s \leq t)$ est brownienne, où λ désigne la mesure de Lebesgue (Lane (1978), Exemple 2, p. 500).

(c) Pour le théorème suivant, on a les notations suivantes :

Soit f une fonction continue. On définit les ensembles suivants :

$$Z_f = \{x : f(x) = 0\}, C_f = \{x : f(x) = 0 \text{ et } \lim_{s \downarrow x} \text{sgn} f(s) \neq \lim_{s \uparrow x} \text{sgn} f(s)\}$$

Pour x dans C_f , on définit

$$\gamma_f(x) = \inf\{s \geq 0 : f(x+s) \neq -f(x-s)\},$$

$$\gamma C_f = \{s : s = \gamma_f(x) \text{ pour } x \in C_f\}.$$

Théorème 1 (Lane (1978), Théorème, p. 502.) Supposons que f est une fonction continue, telle que $\lambda Z_f = 0$ et C_f n'a pas des points d'accumulation. Alors

i. Si $\gamma C_f = \{0\}$, $\sigma(\int_0^s f(B_u) dB_u, s \leq t)$ est brownienne.

ii. Si $\gamma C_f = \{0\} \cup \{\infty\}$, $\sigma(\int_0^s f(B_u) dB_u, s \leq t) = \sigma(|B_s|, s \leq t)$.

2. Si B est un MB à valeurs dans \mathbb{R}^n issu de l'origine, et A est une matrice $n \times n$ à coefficients réels, Yor (1979) a donné le résultat suivant.

Théorème 2 (Yor (1979), Théorème 2, p. 431.) Si $A \in \mathcal{M}_n$ est symétrique, $\sigma(\int_0^s \langle AB_u, dB_u \rangle, s \leq t)$ est brownienne engendrée par un mouvement brownien à valeurs dans \mathbb{R}^k , issu de 0, où k est le nombre de valeurs propres distinctes et non nulles de A .

3. Strock et Yor (1981) ont prouvé le résultat suivant (voir Strock et Yor (1981), Proposition 2.5, p. 595) : $\forall n \geq 1$, $\sigma(\int_0^s B_u^{2n} dB_u, s \leq t) = \sigma(B_s, s \leq t)$

et $\sigma(\int_0^s B_u^{2n+1} dB_u, s \leq t) = \sigma(|B_s|, s \leq t)$.

4. **Transformation de Lévy.** voir par exemple (Revuz et Yor (1991), p. 141).

$\sigma(\int_0^s \text{sgn}(B_u) dB_u, s \leq t)$ est brownienne.

5. **Filtration de Goswami-Rao.** Attal et al. (1995) ont étudié les cas suivants :
- Étant donnée une subdivision $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de $]0, +\infty[$,
 $\sigma(\int_0^s H_u dB_u, s \leq t)$ est brownienne, avec
- (a) $H = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{sgn}(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) 1_{]t_n, t_{n+1}]}$ (voir Attal et al. (1995), Proposition 3, p. 63).
 - (b) $H = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_n 1_{]V_n, V_{n+1}]}$ (voir Attal et al. (1995), Proposition 4, p. 64),
 où G_t est le dernier zéro de B avant t ; $]U_0, V_0[$ est l'intervalle de la plus longue excursion de B avant G_1 ;
 pour $n < 0$, $]U_n, V_n[$ porte la plus longue excursion de B avant U_{n+1} ;
 pour $n > 0$, $]U_n, V_n[$ porte la première excursion plus longue que $V_{n-1} - U_{n-1}$;
 e_n est le signe de B sur $]U_n, V_n[$.

Références

- Attal, S., K. Burdzy, M. Émery et Y. Yun Hu (1995). Sur quelques filtrations et transformations browniennes. *Séminaire de Probabilités XXIX, volume 1613 of Lecture Notes in Maths*, Springer-Verlag : 56–59.
- Bouaka, A., A. Kandouci (2017). Immersion of stong Brownian filtrations with honest time avoiding stopping times. *Bol. Soc. Paran. Mat*, (3s.) V 35 3 : 255–261.
- Dellacherie, C., P. A. Meyer (1978). A propos du travail de Yor sur le grossissement des tribus. *Séminaire de probabilités XII*, Springer : 70–77.
- Émery, M. (2002). Espaces probabilisés filtrés : de la théorie de Vershik au mouvement Brownien, via des idées de Tsirelson. *In Séminaire Bourbaki, 53 ième année*, V 282, Astérisque : 63–83.
- Lane, D. (1978). On the fields of some brownian martingales. *Ann. Probability* 6, 499–508.
- Nikeghbali, A. (2006). An essay on the general theory of stochastic processes. *Probability Surveys*, 3 : 345–412.
- Revuz, D., M. Yor (1991). *Continuous martingales and brownian motion*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer.
- Strock, D. W., M. Yor (1981). Some remarkable martingales. *Séminaire de Probabilités XV, volume 850 of Lecture Notes in Maths*, Springer-Verlag : 590–603.
- Yor, M. (1979). Les filtrations de certaines martingales du mouvement brownien dans R^n . *Séminaires de probabilités (Strasbourg) 13*, 427–440.

Summary

In this work, we show that if $F \hookrightarrow G \hookrightarrow H$ (where the symbol (\hookrightarrow) indicates the immersion property), and if F and H are two strong brownian filtrations, and if G is the progressive enlargement of F with an honest time τ avoiding all F -stopping times, then G is a weak brownian filtration, i.e., $G = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0} = \sigma(\int_0^s H_u dB_u, s \leq t)$, in other words, all the martingales of G are brownian transformations of a brownian motion B , for that, we study some special cases of brownian transformations for which G is brownian filtration.

An inequality for tail probabilities and complete convergence for weighted sequences of LNQD random variables with application to first-order autoregressive processes model

Zouaouia Boulenoir*

*Laboratory of Statistics and Stochastic Processes
boulenoir_zouaouia@yahoo.fr

Résumé. Dans ce travail, nous établissons une nouvelle inégalité de concentration et la convergence complète des suites de variables aléatoires linéairement négatifs de quadrants dépendantes (LNQD, en bref) et obtenons un résultat traitant de la convergence complète des processus autorégressifs de premier ordre avec ζ est identiquement distribué LNQD innovations.

1 Introduction

The concept of complete convergence of a sequence of random variables was introduced by Hsu et Robbins (1947) as follows. A sequence $\{X_n, n \geq 1\}$ of random variables converges completely to the constant C if $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - C| > \varepsilon) < \infty$ for all $\varepsilon > 0$. By the Borel-Cantelli lemma, this implies $X_n \rightarrow C$ almost surely (a.s.), and the converse implication is true if the $\{X_n, n \geq 1\}$ are independent. Hsu et Robbins (1947) proved that the sequence of arithmetic means of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables converges completely to the expected value if the variance of the summands is finite. Erdős (1949) proved the converse. The Erdős (1949), Hsu et Robbins (1947) result may be formulated as follows. This result has been generalized and extended in several directions and carefully studied by many authors.

The following lemmas play an essential role in our main result.

2 Main results

Theorem 1 *Let $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ be a sequence of row-wise identically distributed LNQD random variables and $\{X_{p,ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$, $p = 2, 3$, be defined by :*

$$\begin{aligned} X_{1,ni} &= -a_n I_{\{X_{ni} < -a_n\}} + X_{ni} I_{\{|X_{ni}| \leq a_n\}} + a_n I_{\{X_{ni} > a_n\}}, \\ X_{2,ni} &= (X_{ni} - a_n) I_{\{X_{ni} > a_n\}}, \quad X_{3,ni} = (X_{ni} + a_n) I_{\{X_{ni} < -a_n\}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Assume that there exists a $\tau > 0$ satisfying $\sup_{|\mu| \leq \tau} E(e^{\mu X_{11}}) \leq A_\tau < \infty$, where A_τ is a positive constant depending only on τ , $\sum_{i=1}^n b_{ni}^2 = O((\log n)^{-1})$.

An inequality for tail probabilities and complete convergence for weighted sequences of LNQD random variables with application to first-order autoregressive processes model

Then for any $\varepsilon > 0$ and $\mu \in (0, \tau]$, $P\left(\left|\sum_{i=1}^n b_{ni}(X_{p,ni} - EX_{p,ni})\right| \geq \varepsilon\right) \leq \Phi(\mu, \varepsilon, \tau, a) \frac{1}{n^{a/2} \log n}$, $p = 2, 3$. Where $\Phi(\mu, \varepsilon, \tau, a) = \frac{2^{a+1} a^a e^{-a} DD' A_\tau}{\mu^{2+a} K_1^a (E(X_{11})^2)^{a/2} \varepsilon^2}$, choosing $a > 2$

Theorem 2 Let $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ be an array of row-wise identically distributed LNQD random variables such that $EX_{ni} = 0$ satisfying $E|X_{11}|^{\gamma+1} < \infty$ for some $\gamma \geq 1$. Assume that $\{b_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ is an array of constants satisfying $\max_{1 \leq i \leq n} |b_{ni}| = O(c_n^{-\delta})$, $0 < c_n \uparrow \infty$, for all any $\delta > 0$ and $a_n c_n^{-\delta} \leq 1$,

$$\sum_{i=1}^n b_{ni}^2 = O\left(\frac{1}{\log n}\right).$$

Then $\sum_{i=1}^n b_{ni} X_{ni}$ converges completely to zero.

3 Applications to the results to AR(1) model

The basic object of this section is applying the results to first-order autoregressive processes(AR(1)).

We consider an autoregressive time series of first order AR(1) defined by

$$X_{n+1} = \theta X_n + \zeta_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

where $\{\zeta_n, n \geq 0\}$ is a sequence of identically distributed LNQD random variables with $\zeta_0 = X_0 = 0$, $0 < E\zeta_k^4 < \infty$, $k = 1, 2, \dots$ and where θ is a parameter with $|\theta| < 1$. Here, we can rewrite X_{n+1} in (2) as follows :

$$X_{n+1} = \theta^{n+1} X_0 + \theta^n \zeta_1 + \theta^{n-1} \zeta_2 + \dots + \zeta_{n+1}. \quad (3)$$

Theorem 3 If $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ is a sequence of identically distributed LNQD random variables such that $|\zeta_1|^4 < \alpha$, then for any $R > 0$ real, $\tilde{\varepsilon} > \frac{E\zeta_1^2}{R^2}$ and $0 < \beta < \frac{\alpha}{e^\alpha - \alpha - 1}$

$$P\left(\left|\sum_{j=1}^n (\zeta_j^2 - E\zeta_j^2)\right| \geq (R^2 \tilde{\varepsilon} - E\zeta_1^2)n\right) \leq 2 \exp\left\{-\beta \frac{(R^2 \tilde{\varepsilon} - E\zeta_1^2)^2 n}{36}\right\} + 2 \frac{\tilde{\Phi}(\tilde{\varepsilon}, \tau, a)}{n^{a/2+1}} \quad (4)$$

Where $\tilde{\Phi}(\tilde{\varepsilon}, \tau, a) = 9 \frac{2^{a+1} a^a e^{-a} DD' A_\tau}{\mu^{a+2} K_1^a (E\zeta_1^4)^{a/2} (R^2 \tilde{\varepsilon} - E\zeta_1^2)^2}$

Corollary 1 The sequence $(\hat{\theta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ completely converges to the parameter θ of the first-order autoregressive process.

Références

Erdős, P. (1949). On a theorem of hsu and robbins. *Ann. Math. Statist*, 286–291.

Hsu, P. L. et H. Robbins (1947). Complete convergence and the law of large numbers. pp. 25–31.

Summary

In this work, a new concentration inequality and complete convergence of weighted sums for arrays of row-wise linearly negative quadrant dependent ($LNQD$, in short) random variables has been established, we also obtained a result dealing with complete convergence of first-order autoregressive processes with identically distributed $LNQD$ innovations.

On the Orbital Search of Customers.

Zina Boussaha*, Nadia Oukid**
Halim Zaghoudi***

*Military Academy of Cherchell, Tipaza, ALGERIA.
boussaha_z@yahoo.fr,

**Department of Mathematics, Saad Dahlab,
University, Blida 1.ALGERIA.
oukidnad@yahoo.fr

***LaPS laboratory, Badji-Mokhtar University,
Box 12, Annaba, 23000,ALGERIA
hzeghdoudi@yahoo.fr

Abstract. In this paper, we discuss an $M/G/1$ retrial queue system with orbit search of customers. The steady state probability generating function for the system size is obtained by using the supplementary variable method.

1 Introduction

Retrial queueing system is characterized by the feature that the arriving customers who encountering the server being busy join a retrial queue called orbit. Such queueing systems play important roles in the analysis of computer communication networks, telecommunication systems, manufacturing, and inventory systems, etc. About detailed overviews of the related literature on retrial queues, readers are referred to the book Artalejo and Gómez-Corral (2008), and the survey papers of Artalejo (2010). Most of the literature on retrial queues assumes that after completion of each service the server will remain idle in the system until the arrival of the next primary or retrial customer. But in the real life, we always want to minimize the idle time of the server and minimize the holding costs. So it is necessary to study the retrial queue with orbital search. That is, after completion of each service, the server may actively search the customer from the orbit. Then a service is followed by another service if a search is made, otherwise a service is followed by an idle period. So far seldom research work on retrial queue with orbital search has been done, readers are referred to Artalejo and Krishnamoorthy (2002), and Chakravarthy and Joshua (2006). In this paper we will introduce the orbital search policy into the $M/G/1$ retrial queue.

The rest of the paper is organized as follows. In section 2, we give the system description. Section 3 presents the stable condition of the system, in section 4, the steady-state analysis including the joints distribution of the orbit size and the server state at a random epoch and some system characteristics.

2 Model formulation

we consider a single queueing system to which primary customers arrive according to a Poisson process with rate λ . Any customer who, upon arrival, finds the server busy immediately leaves the service area and joins the orbit. The interval between two successive repeated attempts is exponentially distributed with rate θ . Service times are independent with distribution function $B(x)$, $(B(0) = 0)$. Let $\tilde{B}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB(x)$, be the Laplace-Stieltjes transform of the $B(x)$, $\beta_k = (-1)^k \tilde{B}^{(k)}(0)$ be the k^{th} moment of the service time about the origin, $\gamma = \frac{1}{\beta_1} > 0$, be the service rate, $b(x) = \frac{B'(x)}{1-B(x)}$ be the instantaneous service intensity given that the elapsed service time is equal to x . Let t_n be the time at which the n^{th} service completion occurs. Immediately after this, the server goes for a search of customers in the orbit with a probability p , with a probability $q = 1 - p$ the server remains free. In the latter case the event to follow depends on the competition between primary arrival rate λ and the flow of repeated of rate θ . The search time is assumed to be negligible. The flow of primary arrivals, the service times, the intervals between repeated attempts, the idle times of service, and searching times of customers are assumed to be mutually independent. Let $N(t)$ be the number of customers in the orbit and $C(t)$ be the state of the server at time t . We have $C(t)$ equal to 1 or 0 according to whether the server is busy or free. Note that the state space of the process $X(t) = \{C(t), N(t)\}$ is $S = \{0, 1\} \times \mathbb{N}$.

3 The stability of the system

Let t_n^+ be the time of the n^{th} departure and N_n the number of customers in the orbit just after the time t_n^+ , then $C(t_n^+) = 0$ and $N_n(t_n^+) = N_n, \forall n \geq 1$. We have fundamental recursive equation:

$$N_{n+1} = N_n - \delta_{N_n} + V_{n+1}.$$

Here, V_{n+1} is the number of primary customers arriving at the system during the $(n+1)^{th}$ service time interval. It does not depend on events have occurred before the beginning of the $(n+1)^{th}$ service, its distribution is given by $P(V_n = i) = k_i = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x} dB(x)$. The random variable δ_{N_n} is defined as:

$$\delta_{N_n} = \begin{cases} 1 & \text{if the } (n+1)^{th} \text{ served customer is the orbiting one,} \\ 0 & \text{if the } (n+1)^{th} \text{ served customer is the primary one.} \end{cases}$$

Note that $\{N_n\}_{n=1}^\infty$ is irreducible and aperiodic so to investigate the positive recurrent, we shall use Foster's criterion which state that an irreducible and aperiodic Markov chain is positive recurrent if there exist a non-negative function $f(j), j \in \mathbb{N}$, and $\varepsilon > 0$ such that the mean drift $\varphi_j = E[f(N_{n+1}) - f(N_n) | N_n = j]$ is finite for all $j \in \mathbb{N}$, and $\varphi_j \leq -\varepsilon$ except perhaps for a finite number. By choosing the test function $f(j) = j$, we obtain $\varphi_j = E[N_{n+1} - N_n | N_n = j] = E[-\delta_{N_n} + V_{n+1} + U | N_n = j] = \lambda\beta_1 - \frac{j\theta}{\lambda - j\theta}$. Then we have that $\lim_{j \rightarrow +\infty} \varphi_j = \lambda\beta_1 - 1 < 0$. Therefore the sufficient condition is $\rho = \lambda\beta_1 < 1$. To prove that there is also a necessary condition for our embedded Markov chain, we apply Kaplan's condition: an irreducible and aperiodic Markov chain is not ergodic if $\varphi_j < \infty$ for all $j \geq 1$.

and there exists an index j_0 such that $\varphi_j \geq 0$, for $j \geq 1$. Furthermore, Kaplan's condition is satisfied, because there exist an index k such that $p_{i,j} = 0$, for $j < i - k, i > 0$, where $P = (p_{i,j})$ is the one step transition matrix associated to $\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$.

4 Steady state analysis

If the system is in the steady state $\rho < 1$, then the joint distribution of the server state and queue (*orbit*) length.

$$\begin{aligned} p_{0,n} &= P \{C(t) = 0, N(t) = n\}, \\ p_{1,n}(x) &= \frac{d}{dx} P \{C(t) = 1, \xi(t) < x, N(t) = n\}; \end{aligned}$$

has partial generation functions,

$P_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{0,n}$, $P_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{1,n}$ and $P_1(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{1,n}(x)$. The set of statistical equilibrium equations are obtained as:

$$\begin{aligned} (\lambda + n\theta) p_{0,n} &= (1 - (1 - \delta_{n0})p) \int_0^{\infty} p_{1,n}(x) b(x) dx, \\ p'_{1,n}(x) &= -(\lambda + b(x)) p_{1,n}(x) + \lambda p_{1,n-1}(x), \\ p_{1,n}(0) &= \lambda p_{0,n} + (n+1)\theta p_{0,n+1} + p \int_0^{\infty} p_{1,n+1}(x) b(x) dx, \end{aligned}$$

where $p_{1,-1} = 0$. Transforming the above balance equations to generating functions we obtain,

$$\lambda P_0(z) + \theta z P'_0(z) = (1-p) \int_0^{\infty} P_1(z, x) b(x) dx + p \lambda p_{00}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P_1(z, x)}{\partial x} = -(\lambda - \lambda z + b(x)) P_1(z, x), \quad (2)$$

$$(z - p\tilde{B}(\lambda - \lambda z)) P_1(z, 0) + p \lambda p_{00} = \lambda z P_0(z) + \theta z P'_0(z). \quad (3)$$

Solving (2) yields,

$$P_1(z, x) = P_0(z, x) (1 - B(x)) e^{-\lambda(1-z)x}, \quad (4)$$

Combining (1), (3) and (4) and after some algebra we get :

$$\theta z (z - \tilde{B}(\lambda - \lambda z)) P'_0(z) + (\lambda z - ((1-p)\lambda z + \lambda p)\tilde{B}(\lambda - \lambda z)) P_0(z) = \lambda p P_{00} (z - \tilde{B}(\lambda - \lambda z)). \quad (5)$$

Coefficient of $P'_0(z)$ has two zeros $z_1 = 0$ and $z_2 = 1$. Choose an arbitrary point $a \in]0, 1[$. The solution of (5) for $z \in]0, a]$ is

$$P_0(z) = \left(\left(\frac{z}{a} \right)^{\frac{\lambda p}{\mu}} s(a, z) \right)^{-1} \left\{ P_0(a) + \frac{\lambda p P_{00}}{\theta(a)^{\frac{\lambda p}{\theta}}} \int_0^z (t)^{\frac{\lambda p}{\theta} - 1} s(a, t) dt \right\}.$$

On the Orbital Search of Customers.

Where

$$s(t_1, t_2) = \exp \left\{ \frac{\lambda(1-p)}{\theta} \int_{t_2}^{t_1} \frac{1 - \tilde{B}(\lambda - \lambda u)}{u - \tilde{B}(\lambda - \lambda u)} du \right\}.$$

As $z \rightarrow 0$, $P_0(0) < \infty$ and $\left(\frac{z}{a}\right)^{\frac{\lambda p}{\theta}}$ diverges. Thus,

$$P_0(a) = \frac{\lambda p P_{00}}{\theta(a)^{\frac{\lambda p}{\theta}}} \int_0^a (t)^{\frac{\lambda p}{\theta}-1} s(a, t) dt \quad (6)$$

On the other hand, solving (5) for $z \in [a, 1[$, and taking limit as $z \rightarrow 1^-$, we get

$$P_0(a) = \frac{P_0(1) s(a, 1)}{(a)^{\frac{\lambda p}{\theta}}} - \frac{\lambda p P_{00}}{\theta(a)^{\frac{\lambda p}{\theta}}} \int_a^1 (t)^{\frac{\lambda p}{\theta}-1} s(a, t) dt, \quad (7)$$

with the help that $\lim_{z \rightarrow 1^-} \left[\frac{1 - \tilde{B}(\lambda - \lambda z)}{z - \tilde{B}(\lambda - \lambda z)} \right] = \frac{\lambda \beta_1}{1 - \lambda \beta_1} < \infty$. Equating (6) and (7) we get

$$P_0(1) = \frac{\lambda p P_{00}}{\theta s(0, 1)} \int_0^1 (t)^{\frac{\lambda p}{\theta}-1} s(0, t) dt.$$

Then we can rewrite the solution of (5) as :

$$P_0(z) = \frac{\lambda p P_{00}}{\theta} (z)^{-\frac{\lambda p}{\theta}} \int_0^z (t)^{\frac{\lambda p}{\theta}-1} s(z, t) dt,$$

where

$$P_{00} = \frac{\theta(1 - \lambda \beta_1) s(0, 1)}{\lambda p \int_0^1 (t)^{\frac{\lambda p}{\theta}-1} s(0, t) dt}.$$

References

- Artalejo, J. and A. Gómez-Corral (2008). *Retrial queueing systems: a computational approach*. 2008.
- Artalejo, J. R. (2010). Accessible bibliography on retrial queues: progress in 2000–2009. *Mathematical and computer modelling* 51(9-10), 1071–1081.
- Artalejo, JR. and Joshua, V. C. and A. M. Krishnamoorthy (2002). An $m/g/1$ retrial queue with orbital search by the server. *Advances in stochastic modelling*, 41–54.
- Chakravarthy, S.R. and Krishnamoorthy, A. and V. C. Joshua (2006). Analysis of a multi-server retrial queue with search of customers from the orbit. *Performance Evaluation* 63(8), 776–798.

Résumé

Dans cet article, nous discutons un système de files d'attente $M/G/1$ avec recherche des clients en orbite par le serveur. La fonction génératrice pour le nombre de client dans le système en régime stationnaire est obtenue en utilisant la méthode des variables supplémentaires.

Testing Discrete-Valued Time Series for Whiteness

Housseem Brairi ^{*1}, Tarek Medkour ^{*2}

^{*}Faculty of Mathematics, BP 32 EL ALIA, 16111 Bab Ezzouar, Algiers.

¹ hbrairi@usthb.dz

² tmedkour@usthb.dz

Résumé. On considère le problème de tester la blancheur d'une série temporelle univariée à valeurs discrètes, en utilisant l'analyse de Walsh-Fourier. Nous montrons que la loi de probabilité de l'estimateur "lag window" de la densité spectrale de Walsh est une loi de Gamma, où ses deux paramètres dépendent du "bandwidth" de la fenêtre de lissage de l'estimateur. Pour adresser notre problème, on propose trois statistiques de test et on dérive lois de probabilité sous l'hypothèse nulle de blancheur. Les résultats de simulations sont rapportées sur les performances des tests.

1 Introduction

In view of their important role, discrete-valued time series is attracting considerable attention due to its many uses in several studies such as EEG sleep patterns, gene characterization, geomagnetic reversals in the polarity of the earth ... etc. Despite the growing interest in such type of time series, greater focus has been put on time domain methods. As a result, notably less work has been established in the spectral domain.

In this work, we consider a problem which is of fundamental importance and has not been addressed yet, namely testing a discrete-valued time series for whiteness in the frequency domain. The problem is formulated as follows : Let $X(0), X(2), \dots, X(N-1)$ be a sample of length $N = 2^p$ ($p > 0$), from weakly stationary discrete-valued time series, with mean 0 and autocovariance function $\Gamma(h)$. We consider the null hypothesis H_0 that $X(n)$, $n = 0, \dots, N-1$, is a white noise. Equivalently, in terms of the Walsh spectral density function $F(\lambda)$, the null hypothesis becomes :

$$H_0 : F(\lambda) = \Gamma(0) \quad \text{for } 0 \leq \lambda < 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \exists \lambda_0, F(\lambda_0) \neq \Gamma(0)$$

2 Walsh spectral density estimators

Let $M = 2^s$ ($s \in \mathbb{N}^*$, $s < p$) with $M \ll N$, and $W(n, \lambda)$ be the n^{th} sequency ordered Walsh function at sequency λ , with $0 \leq \lambda < 1$. Let $\phi_1(z) = 2z [\log z - \psi(z)]$ and $\phi_2(z) = 2z [z\psi'(z) - 1]$, where $\psi(z)$ denotes the psi function.

Testing Discrete-Valued Time Series for Whiteness

A natural estimator of $F(\lambda)$, is the Walsh periodogram $I_N(\lambda)$. It is defined as follows (Kohn, 1980a)

$$I_N(\lambda) = d_N^2(\lambda),$$

where $d_N(\lambda)$ is the discrete Walsh-Fourier transform of $X(n)$. Since $I_N(\lambda)$ is not consistent, (Kohn, 1980b) introduced a new class of estimators defined as follows (Kohn, 1980b)

$$\hat{F}_{M,N}(\lambda) = \sum_{i=0}^{N-1} k(i/M) \hat{\tau}(i) W(i; \lambda),$$

where $k(x)$ is a lag window function.

3 Test Statistics

In order to test H_0 , we consider the following test statistics :

$$\mathcal{P}_k = \frac{\sum_{i=1}^k I(\lambda_i)}{\sum_{i=1}^N I(\lambda_i)}, \quad M = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{I(\lambda_i)}{\hat{F}(0)^2} - 1 \right)^2$$

$$\text{and } W = \log \left[\frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} \hat{F}_{M,N}(\lambda_i) \right] - \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} \log [\hat{F}_{M,N}(\lambda_i)].$$

Theorem 1 *Under the null hypothesis H_0 , we have :*

1. \mathcal{P}_k converges to the Brownian bridge.
2. $\sqrt{N}(M - 2) \sim \mathcal{N}(0, 24)$
3. $vTW \sim \frac{1}{\kappa} \chi_v^2$, where v is the equivalent degrees of freedom of $\hat{F}_{M,N}(\lambda)$,

$$c_2 = \frac{T\phi_1(\frac{v}{2}) - \phi_1(\frac{Tv}{2})}{T\phi_2(\frac{v}{2}) - \phi_2(\frac{Tv}{2})} \quad \text{and} \quad v_2 = T\phi_1(\frac{v}{2}) - \phi_1(\frac{Tv}{2})c_2.$$

4 Simulation results

In order to investigate the power of the proposed tests, we simulate a Binomial AR model of order 1, It is defined as follows (McKenzie, 1985)

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \beta \circ (m - X_{t-1}) \quad \text{for } t \geq 1,$$

where \circ denotes the binomial thinning operator (Steutel et Van Harn, 1979), $X_0 \sim \text{Bin}(m, p')$,

$$p' \in]0, 1[, \quad \rho \in \left] \max \left\{ \frac{-p'}{1-p'}, \frac{-(1-p')}{p'} \right\}, 1 \right[, \quad \beta = p'(1-\rho) \quad \text{and} \quad \alpha = \beta + \rho.$$

We take $m = 5$ and $p' = 0.5$. The autocorrelation function of $\{X_t\}$ in this case is also of the form

$$\rho(k) = \rho^k \text{ for } k = 0, 1, \dots$$

We performed a 5000 repetition Monte Carlo simulation, with small, moderate and large sample sizes. The results of the simulations are reported in Table 1.

ρ	$N = 64$			$N = 256$			$N = 512$			$N = 1024$		
	D	M	W	D	M	W	D	M	W	D	M	W
-0.9	1	0,990	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-0.8	1	0,927	0,988	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-0.6	0,947	0,565	0,833	1	0,979	1	1	1	1	1	1	1
-0.3	0,340	0,113	0,227	0,942	0,251	0,75	1	0,407	0,942	1	0,638	1
-0.1	0,060	0,044	0,075	0,188	0,053	0,099	0,361	0,063	0,108	0,641	0,071	0,141
0	0,030	0,035	0,053	0,038	0,042	0,052	0,043	0,050	0,055	0,041	0,043	0,050
0.1	0,056	0,040	0,071	0,191	0,056	0,082	0,360	0,064	0,104	0,650	0,068	0,127
0.3	0,335	0,107	0,233	0,944	0,256	0,713	0,999	0,403	0,934	1	0,627	1
0.5	0,811	0,347	0,650	1	0,835	1	1	0,9756	1	1	1	1
0.7	0,984	0,736	0,956	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.9	1	0,973	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

TAB. 1 – Empirical power of D , M and W for $BAR(1)$ model with the marginal $B(5, 0.5)$. $\alpha = 0.05$.

These results suggest that for small sample sizes, the choice of the test based on the statistic W is more appropriate : it performs better under H_0 , whereas under H_1 , it performs better than M and nearly the same as D . However, for large sample sizes, the test based on D is clearly the most powerful. In contrast, the test based on M seems to be the least powerful for small and large sample sizes.

Références

Kohn, R. (1980a). On the spectral decomposition of stationary time series using Walsh functions. I. *Advances in Applied Probability* 12(1), 183–199.

Kohn, R. (1980b). On the spectral decomposition of stationary time series using Walsh functions. II. *Advances in Applied Probability* 12(2), 462–474.

McKenzie, E. (1985). Some simple models for discrete variate time series 1. *JAWRA Journal of the American Water Resources Association* 21(4), 645–650.

Steutel, F. et K. Van Harn (1979). Discrete analogues of self-decomposability and stability. *The Annals of Probability*, 893–899.

Summary

We consider the problem of testing a univariate discrete-valued time series for whiteness in the sequency domain, using Walsh-Fourier analysis. We show that the distribution of the

Testing Discrete-Valued Time Series for Whiteness

lag window estimator of the Walsh spectral density is a scaled chi-square distribution, where the scale and degrees of freedom, both depend on the bandwidth of the smoothing window associated with the estimator. The definition of the bandwidth is extended from the frequency to the sequence domain. To address our problem, we propose three test statistics and derive their distributions under the null hypothesis of whiteness. Simulations are reported on the performance of the tests.

Structure Probabiliste d'une Classe de Modèles GARCH en Puissance Périodiques et à Seuil

Hafida GUERBYENNE*, Abderrahim KESSIRA**

**Faculty of Mathematics, University of Sciences and Technology
Houari Boumediene, (USTHB), BP 32 El Alia Bab Ezzouar, Algiers, 16111, Algeria

* hguerbyenne@usthb.dz,

**abderrahimkessira@gmail.com

Résumé. Dans ce travail, nous étudions une nouvelle classe de modèles conditionnellement hétéroscédastiques en puissance et à seuil, dont les coefficients sont évolutifs dans le temps de façon périodique. Ceci permet de prendre en charge à la fois l'effet du jour existant dans les séries de données financières ainsi que d'autres faits stylisés qui les caractérisent, notamment, le regroupement de volatilité, l'effet de levier : la volatilité ayant une amplitude plus ou moins importante selon la tendance des cours boursiers en particulier. Des propriétés probabilistes telles que la stationnarité stricte, l'existence des moments d'ordres supérieurs et l'ergodicité géométrique ont été établies. L'ergodicité géométrique nécessite l'obtention de la condition de Foster-Lyapounov ainsi que la propriété de ϕ -irréductibilité de la chaîne de Markov sous-jacente. Cette propriété est obtenue par le biais de la condition d'additivité dénombrable uniforme.

Mots clés. Modèle GARCH à seuil; transformation en puissance; coefficients périodiques; moments; ergodicité géométrique; β -mélange; stationnarité stricte; condition d'additivité dénombrable uniforme.

1 Modèle PPTGARCH et structure probabiliste

Nous définissons le modèle $PPTGARCH(p_t, q_t)$ par :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t \\ h_t^\delta = \omega_t + \sum_{i=1}^{p_t} \gamma_{t,i}^+ (\varepsilon_{t-i}^+)^{2\delta} + \gamma_{t,i}^- (\varepsilon_{t-i}^-)^{2\delta} + \sum_{j=1}^{q_t} \beta_{t,j} h_{t-j}^\delta \end{cases} \quad (1)$$

où $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), définies sur le même espace de probabilité. posons $t = s + S\tau$; $\varepsilon_{s+S\tau}$ se réfère à l'observation correspondant à la saison $s, s = 1, \dots, S$, dans la période $\tau, \tau \in \mathbb{Z}$. Dans l'expression ci-dessus, $(\varepsilon_{s+S\tau}^+)^{2\delta} = h_{s+S\tau}^\delta (\eta_{s+S\tau}^+)^{2\delta}$ et $(\varepsilon_{s+S\tau}^-)^{2\delta} = h_{s+S\tau}^\delta (\eta_{s+S\tau}^-)^{2\delta}$, où $(x^+)^{2\delta} = \max(0, x)^{2\delta}$ et $(x^-)^{2\delta} = \max(0, -x)^{2\delta}$. Par commodité, on pose $(x^+)^r = x^{+r}$ et $(x^-)^r = x^{-r}$ pour $r > 0$. Nous supposons que ε_t est indépendant de $\eta_{t'}$ quand $t < t'$, et que $\delta > 0$. Les coefficients sont S -périodiques (c'est-à-dire, $\theta_{s+S\tau} = \theta_s$, où θ est n'importe quel paramètre). Sans restreindre la généralité, nous supposons que les ordres sont invariants dans le temps; sinon, nous pouvons définir $p = \max_s p_s$ et $q = \max_s q_s$ et prendre $\gamma_{s,i}^+ = \gamma_{s,i}^- = 0$

pour $p_s < i \leq p$ et $\beta_{s,j} = 0$ pour $q_s < j \leq q$. Alors, (1) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{s+S\tau} = \sqrt{h_{s+S\tau}} \eta_{s+S\tau} \\ h_{s+S\tau}^\delta = \omega_s + \sum_{i=1}^p \gamma_{s,i}^+ \varepsilon_{s-i+S\tau}^{+2\delta} + \gamma_{s,i}^- \varepsilon_{s-i+S\tau}^{-2\delta} + \sum_{j=1}^q \beta_{s,j} h_{s-j+S\tau}^\delta \end{cases} \quad (2)$$

$\omega_s > 0$, $\gamma_{s,i}^+ \geq 0$, $\gamma_{s,i}^- \geq 0$ et $\beta_{s,j} \geq 0$, $s = 1, \dots, S$, $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, q$.

1.1 La représentation markovienne

Pour $s = 1, \dots, S$ et $\tau \in \mathbb{Z}$. Posons

$$\begin{aligned} y_{s+S\tau} &:= (h_{s+S\tau}^\delta, h_{s-1+S\tau}^\delta, \dots, h_{s-q+1+S\tau}^\delta, \varepsilon_{s+S\tau}^{+2\delta}, \varepsilon_{s+S\tau}^{-2\delta}, \dots, \varepsilon_{s-p+1+S\tau}^{+2\delta}, \varepsilon_{s-p+1+S\tau}^{-2\delta})', \\ \beta_s &:= \begin{pmatrix} \beta_{s,1} & \dots & \beta_{s,q-1} & \beta_{s,q} \\ & \mathbf{I}_{(q-1)} & & \mathbf{0}_{(q-1) \times 1} \end{pmatrix}, \quad \gamma_s := \begin{pmatrix} \gamma_{s,1}^+ & \gamma_{s,1}^- & \dots & \gamma_{s,p}^+ & \gamma_{s,p}^- \\ & & \mathbf{0}_{(q-1) \times 2p} & & \end{pmatrix}, \\ \beta_s(\eta_{s+S\tau}) &:= \begin{pmatrix} C_s(\eta_{s+S\tau}) \\ \mathbf{0}_{2(p-1) \times q} \end{pmatrix} \text{ où } C_s(\eta_{s+S\tau}) := (\beta_{s,1} \dots \beta_{s,q}) \otimes \begin{pmatrix} \eta_{s+S\tau}^{+2\delta} \\ \eta_{s+S\tau}^{-2\delta} \end{pmatrix} \\ \gamma_s(\eta_{s+S\tau}) &:= \begin{pmatrix} D_s(\eta_{s+S\tau}) \\ \mathbf{I}_{2(p-1)} & \mathbf{0}_{2(p-1) \times 2} \end{pmatrix} \text{ où} \\ D_s(\eta_{s+S\tau}) &:= (\gamma_{s,1}^+ \quad \gamma_{s,1}^- \quad \dots \quad \gamma_{s,p}^+ \quad \gamma_{s,p}^-) \otimes \begin{pmatrix} \eta_{s+S\tau}^{+2\delta} \\ \eta_{s+S\tau}^{-2\delta} \end{pmatrix} \\ A_s(\eta_{s+S\tau}) &:= \begin{pmatrix} \beta_s & \gamma_s \\ \beta_s(\eta_{s+S\tau}) & \gamma_s(\eta_{s+S\tau}) \end{pmatrix}, \\ B_s(\eta_{s+S\tau}) &:= (\omega'_s, \omega_s(\eta_{s+S\tau}))'. \end{aligned}$$

$A_s(\eta_{s+S\tau})$ et $B_s(\eta_{s+S\tau})$ sont respectivement une matrice aléatoire d'ordre $(2p+q) \times (2p+q)$ et $(2p+q)$ un vecteur aléatoire où $\omega_s := (\omega_s, 0, \dots, 0)' \in \mathbb{R}^q$ et $\omega_s(\eta_{s+S\tau}) := (\omega_s \eta_{s+S\tau}^{+2\delta}, \omega_s \eta_{s+S\tau}^{-2\delta}, 0, \dots, 0)' \in \mathbb{R}^{2p}$. (I_k est la matrice d'identité d'ordre $k \times k$ et $0_{m \times n}$ la matrice nulle d'ordre $m \times n$). Le modèle (2) est équivalent à

$$y_{s+S\tau} = A_s(\eta_{s+S\tau}) y_{s-1+S\tau} + B_s(\eta_{s+S\tau}) \quad (3)$$

qui est une chaîne de Markov périodiquement homogène. Itérer (3) S -fois donne

$$y_{s+S\tau} = \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau}) y_{s+S(\tau-1)} + \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau}), \quad (4)$$

avec $\underline{\eta}_{s,\tau} = (\eta_{s+S\tau}, \eta_{s-1+S\tau}, \dots, \eta_{s+1+S(\tau-1)})'$,

$$\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau}) := \prod_{k=0}^{S-1} A_{s-k}(\eta_{s-k+S\tau}) \text{ et } \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau}) := \sum_{k=0}^{S-1} \left(\prod_{i=0}^{k-1} A_{s-i}(\eta_{s-i+S\tau}) \right) B_{s-k}(\eta_{s-k+S\tau}),$$

avec, par convention, $A_{s-k}(\eta_{s-k+S\tau}) = A_{S+s-k}(\eta_{S+s-k+S(\tau-1)})$ et $B_{s-k}(\eta_{s-k+S\tau}) = B_{S+s-k}(\eta_{S+s-k+S(\tau-1)})$ si $s-k \leq 0$.

Pour une valeur fixée s , la suite $(A_s(\underline{\eta}_{s,\tau}), B_s(\underline{\eta}_{s,\tau}))_{\tau \in \mathbb{Z}}$ est *i.i.d.* la chaîne de Markov $(y_{s+S\tau})_{\tau \in \mathbb{Z}}$ associée à (2) et donnée par (4) est homogène.

2 Stationnarité stricte et existence de moments

2.1 Stationnarité stricte

Soit $\|\cdot\|$ n'importe quelle norme sur M^{2p+q} , l'espace des matrices réelles carrées de dimension $2p + q$. Le théorème suivant est basé sur les résultats de [Bougerol et Picard \(1992\)](#). On peut prouver que $E\{\log^+ \|A_s(\underline{\eta}_{s,0})\|\} < +\infty$, où $\log^+ x = \max(\log x, 0)$, ce qui assure que le plus grand exposant de Lyapunov $\gamma^S(\cdot)$ introduit par [Aknouche et Guerbyenne \(2009\)](#), associé à une suite *i.i.d* de matrices $(A_s(\underline{\eta}_{s,\tau}))_{\tau \in \mathbb{Z}}$, est bien défini.

Théorème 1 (Guerbyenne et Kessira, 2018) *L'équation (4) a une solution unique strictement stationnaire et ergodique si et seulement si*

$$\gamma^S(A) = \inf_{\tau > 0} \left\{ E \frac{1}{\tau} \log \|\prod_{i=0}^{\tau-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i})\| \right\} < 0. \quad (5)$$

L'unique solution stationnaire et ergodique est causale et est donnée par

$$y_{s+S\tau} = \sum_{k \geq 0} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) \right) \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-k}), \quad (6)$$

qui converge presque sûrement et $(\varepsilon_{s+S\tau})$ donnée par (2) est strictement périodiquement stationnaire et périodiquement ergodique.

2.2 Existence des moments

Le théorème suivant donne les conditions sous lesquelles les moments du processus strictement périodiquement stationnaire $PPTGARCH(p, q)$ existent. Pour cela, nous avons besoin de la condition suivante.

A1. $P(\eta_t > 0) \in]0, 1[$ et si $P(\eta_t \in S)$ pour un ensemble S , alors S a un cardinal $|S| > 2$ et il existe $\kappa > 0$ tel que $E(|\eta_t|^\kappa) < \infty$.

Théorème 2 (Guerbyenne et Kessira, 2018) *(i) Si $(\varepsilon_{s+S\tau})$ est une solution strictement périodiquement stationnaire de (2), sous A1, il existe une constante $\Delta > 0$ tel que*

$$E\{|\varepsilon_{s+S\tau}|^\Delta\} < +\infty$$

(ii) Soit $(y_{s+S\tau})_{\tau \in \mathbb{Z}}$ une solution stationnaire de (4), on suppose que $E\{|\eta_{s+S\tau}|^{2\delta}\} < +\infty$, alors $y_{s+S\tau}$ est dans L^1 si et seulement si

$$\rho \left[E \left\{ \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau}) \right\} \right] < 1. \quad (7)$$

(iii) De plus, si pour un entier $\nu \geq 2$, $E\{|\eta_{s+S\tau}|^{2\delta\nu}\} < +\infty$, alors $y_{s+S\tau}$ est dans L^ν si et seulement

$$\rho \left[E \left\{ \mathcal{A}_s^{\otimes \nu}(\underline{\eta}_{s,\tau}) \right\} \right] < 1. \quad (8)$$

3 Ergodicité géométrique et β -mélange

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ une chaîne de Markov homogène avec un espace d'état métrique complet séparable localement compact $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B})$. $P^n(x, A) = \Pr(X_n \in A \mid X_0 = x)$, $x \in \mathbb{R}^k$, $A \in \mathcal{B}$, est la probabilité de transition en n étapes. La chaîne de Markov (X_t) est ϕ -irréductible si, pour une certaine mesure, ϕ sur $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B})$ et pour un $x \in \mathbb{R}^k$, $\sum_{n>0} P^n(x, A) > 0$ chaque fois que $\phi(A) > 0$. Notons $\|\cdot\|_V$ la norme de la variation totale. (X_t) vérifie la condition de dérive s'il existe une fonction mesurable positive (fonction test) $g \geq 1$ sur \mathbb{R}^k , un small set $K \in \mathcal{B}$ et des nombres réels $\nu > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que

$$E\{g(X_{t+1}) \mid X_t = x\} \leq \rho g(x) - \nu, \quad x \notin K \quad (9)$$

et

$$\sup_{x \in K} E\{g(X_{t+1}) \mid X_t = x\} < \infty. \quad (10)$$

Le résultat suivant est donné dans [Tweedie \(1983\)](#).

Théorème 3 (Tweedie, 1983) *Supposons que (X_t) est une chaîne de Markov ϕ -irréductible satisfaisant (9)-(10) avec une fonction test g et un small set K . Alors (X_t) est géométriquement ergodique et $E_\pi\{g(X_0)\} < \infty$.*

Le théorème ci-dessus montre que la ϕ -irréductibilité, souvent pénible à montrer, est nécessaire pour prouver l'ergodicité géométrique. La condition d'additivité dénombrable uniforme ([Tweedie, 2001](#)) peut être exploitée pour remédier aux difficultés; (voir également [Fonseca et Tweedie, 2002](#)). Nous introduisons maintenant la condition d'additivité dénombrable uniforme. Si B_n est une suite dans \mathcal{B} telle que $B_n \downarrow \emptyset$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} P(x, B_n) = 0$$

pour tout ensemble compact $K \in \mathcal{B}$.

Le théorème suivant montre que, sous la condition d'additivité dénombrable uniforme, l'existence d'une mesure invariante unique implique la ϕ -irréductibilité.

Théorème 4 (Tweedie (2001), Theorem 3) *Supposons que (9)-(10) sont vérifiées pour certains K et g et que la condition d'additivité dénombrable uniforme est vérifiée pour le même ensemble K . Alors, il existe une mesure invariante unique pour (X_t) si et seulement si (X_t) est ϕ -irréductible.*

Nous donnons maintenant le résultat principal de cette section.

Théorème 5 (Guerbyenne et Kessira, 2018) *$(y_{s+S\tau})_\tau$ est géométriquement ergodique si et seulement si $\rho \left[E\{\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})\} \right] < 1$. Dans ce cas, $(y_{s+S\tau})_\tau$ est β -mélangeant à un taux exponentiel.*

Références

1. Aknouche, A., and H. Guerbyenne. 2009. Periodic stationarity of random coefficient periodic autoregressions. *Statistics and Probability Letters* 79 (7) :990-6.
2. Bougerol, P., and N. Picard. 1992. Stationarity of GARCH processes and of some nonnegative time series. *Journal of Econometrics* 52 (1-2) :115-27.

3. Fonseca, G., and R. L. Tweedie. 2002. Stationary measures for non-irreducible non-continuous Markov chains with time series applications. *Statistica Sinica* 12 :651-60.
4. Tweedie, R. L. 1983. Criteria for rates of convergence of Markov chains with application to queueing and storage theory. In *Probability, statistics and analysis*, ed. J. F. Kingman, and G. E. H. Reuter. Cambridge : Cambridge University Press.
5. Tweedie, R. L. 2001. Drift conditions and invariant measures for Markov chains. *Stochastic Processes and Their Applications* 92 (2) :345-54.

Summary

In this paper, we introduce and study the Power Periodic Threshold GARCH Model (PPTGARCH). We give the necessary and sufficient conditions for the existence of the unique strictly periodically stationary solution of the model and the necessary and sufficient conditions for the existence of moments. A sufficient condition for the periodic geometric ergodicity and β -mixing property using the uniform countable additivity condition is given. We prove the consistency and asymptotic normality of the Quasi-Maximum Likelihood estimator (QMLE) of the parameters. Simulation studies to illustrate consistency and asymptotic normality of the estimators for different underlying error distributions are presented.

Bernstein-Frechet inequalities for partial sums of NOD random variables and application to AR(1) model based on NOD errors.

Ikhlasse Chebbab*, Samir Benaissa**

*Laboratory of Statistics and Stochastic Processes University of Djillali Liabes, Algeria.
ikhlasse-ch@outlook.fr

**Laboratory of Statistics and Stochastic Processes University of Djillali Liabes, Algeria.
benaissamir@yahoo.fr

Résumé. Les inégalités de probabilité exponentielles jouent un rôle important dans les probabilités et les statistiques. Dans ce travail, nous établissons une inégalité de concentration de Bernstein pour les variables aléatoires NOD qui nous permettent de prouver la convergence presque complète pour l'estimateur de ce paramètre. En utilisant ces inégalités, un intervalle de confiance est obtenu.

1 Introduction

The autoregressive process takes an important part in predicting problems leading to decision making. Let us consider the autoregressive process order 1 defined by

$$Y_k = \theta Y_{k-1} + \zeta_k$$

Where θ is the autoregressive parameter. and where $(\zeta_k)_k$ is a sequence of normally distributed random variables, with zero mean. Consider Y_{k-1} as NOD output variables. We use the least squares method to estimate the parameter θ .

Lehmann (1966) introduced a simple and natural definition of negative dependence : A sequence $\{Y_i, 1 \leq i \leq n\}$ of random variables is said to be pairwise negative quadrant dependent (pairwise NQD) if for any real y_i, y_j and $i \neq j$, $\mathbf{P}(Y_i > y_i, Y_j > y_j) \leq \mathbf{P}(Y_i > y_i)\mathbf{P}(Y_j > y_j)$. The concept of negatively orthant dependent random variables was introduced by Ebrahimi and al., (1981).

Now, we will recall the definition of NOD sequences and some lemmas.

Definition 1 The sequence $\{Y_n, n \geq 1\}$ of random variables are said to be lower negatively orthant dependent (LNOD), if for any $n \geq 1$

$$\mathbf{P}(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2, \dots, Y_n \leq y_n) \leq \prod_{j=1}^n P(Y_j \leq y_j).$$

for every $y_1, \dots, y_n \in R$

The sequence $\{Y_n, n \geq 1\}$ of random variables are said to be upper negatively orthant dependent (UNOD), if for any $n \geq 1$

Bernstein-Frechet inequalities for partial sums of NOD random variables...

$$\mathbf{P}(Y_1 > y_1, Y_2 > y_2, \dots, Y_n > y_n) \leq \prod_{j=1}^n P(Y_j > y_j).$$

for every $y_1, \dots, y_n \in R$

The sequence $\{Y_n, n \geq 1\}$ of random variables are said to be negatively orthant dependent (NOD) if $\{Y_n, n \geq 1\}$ are both LNOD and UNOD.

Lemma 1 (see Bozorgnia and al 1966).

Let Y_1, Y_2, \dots, Y_n be the random variables NOD, then

(i) If h_1, h_2, \dots, h_n are all non decreasing (or non increasing) function, then random variables $h_1(Y_1), h_2(Y_2), \dots, h_n(Y_n)$ are NOD.

(ii) Let Y_1, Y_2, \dots, Y_n be nonnegatively NOD. Then

$$\mathbf{E}\left(\prod_{j=1}^n Y_j\right) \leq M \prod_{j=1}^n \mathbf{E}(Y_j)$$

Proposition 2 (see Dahmani and al 2005).

Let μ_Y measure generated by (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) and μ_ζ is a measure generated by $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ Then the density ρ of the measure μ_Y in comparison with the measure μ_ζ is equal to

$$\rho(x) = \exp\left(\theta \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} - \frac{\theta^2}{2} \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2\right) \quad (1)$$

MODEL AND HYPOTHESES

Let us consider the first order autoregressive process AR(1) defined by

$$Y_k = \theta Y_{k-1} + \zeta_k$$

Where θ is the autoregressive parameter with $|\theta| < 1$, The $\{\zeta_n, n \geq 0\}$ is a sequence of normally distributed random variables and finite variance. with $\zeta_0 = X_0 = 0$

Consider Y_{k-1} as NOD exogene variable

The parameter θ is estimated least squares, given the estimator

$$\theta_n = \frac{\sum_{k=1}^n Y_{k-1} Y_k}{\sum_{k=1}^n Y_{k-1}^2} \quad (2)$$

and

$$\theta_n - \theta = \frac{\sum_{k=1}^n \zeta_k Y_{k-1}}{\sum_{k=1}^n Y_{k-1}^2} \quad (3)$$

Let us introduce now the following hypothesis :

H1 : We assume that the sequence $(\zeta_n)_n$ and $(Y_{n-1})_n$ are bounded. Then there exist positive constants L and γ such that

$$|Y_{n-1}| \leq L, |\zeta_n| \leq \gamma.$$

H2 : Suppose that $E(\zeta_k) = 0$, for each $k \geq 1$.

2 Main results

Theorem 3 For any $\epsilon < \frac{1}{4} \log 3$ positive and for R rather large, we have

$$\mathbf{P}(\sqrt{n}|\theta_n - \theta| > R) \leq 2 \exp(-\frac{1}{2}R^2\epsilon^2 A_1) + 3^{-(n-1)/4} \exp(n\epsilon) \quad (4)$$

Where $A_1 = \frac{1}{\gamma^2 L^2}$ is a positive constant.

Corollary 4

The sequence of estimators $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges almost completely to the parameter θ of the autoregressive process of order 1.

Corollary 5

The inequalities (4) give us the possibility to construct a confidence interval for the parameter θ .

Références

- Bozorgnia, A., Patterson, R, F. and Taylor, R, L. (1966), Limit theorems for dependent random variables, World Congress Nonlinear Analysts 92, 1137-1153.
- Dahmani, A. and Tari, M. (2005), Bernstein-fréchet inequalities for the parameter of the order 1 autoregressive process, Statist. C.R.Acad.Sci.Paris, I340, 309-314.
- Ebrahimi, N. and Ghosh, M. (1981), The dynamics of chain formation in *Oecophylla longinoda*, Comm. Statist. Theory Methods, (10), 307-336.
- Lehmann, E, L. (1966), Some concepts of dependence, Ann. Math. Statist, (37), 1137-1153.

Bernstein-Frechet inequalities for partial sums of NOD random variables...

Summary

Our work consists in establishing new exponential inequalities of Bernstein-Fréchet type that allowed us to construct a confidence interval for the parameter of the first order autoregressive process under NOD assumption. Using these inequalities , We proved the almost complete convergence for the estimator of this parameter.

Local asymptotic normality for long-memory process with strong mixing noises

Soraya HADDAD*, Karima BELAIDE**

Department of Mathematics, Applied Mathematics Laboratory, University of Bejaia, 06000, Algeria

*haddad.soraya.1993@gmail.com

**k_tim2002@yahoo.fr

Résumé. Nous établissons la normalité asymptotique locale (LAN) pour un modèle autorégressif fractionnaire à mémoire longue dans le cas des erreurs fortement mélangeantes. Cela ouvre la voie dans les travaux futurs pour construire un estimateur adaptatif et construire des tests optimaux pour les paramètres. Pour vérifier la faisabilité et la validité de nos résultats théoriques, une étude de simulation est considérée.

1 Introduction

The concept of local asymptotic normality is the most important and most sophisticated foundation of the general asymptotic statistic, it was introduced by Lucien LeCam, this concept is very important in the asymptotic theory of estimation, discriminant test and analysis, and so one.

The central idea of LeCam's theory is the concept of convergence of the statistical model which makes it possible to approach a family of probability measures with another family that is simpler to study. The major ingredient is the LAN property, from which we can deduce that the model considered is locally and asymptotically equivalent to a simple Gaussian model. Intuitively this is due to the fact that the development of the likelihood ratio, in terms of remainder near, resembles the likelihood ratio of a Gaussian model.

Since the optimal procedures for Gaussian statistical models are well known, it is possible to use them to obtain inferential procedures asymptotically "optimal" for the model under consideration.

The LAN approach has been adopted in the study of variety of times series models. In our work we consider a fractional autoregressive long memory model of order 1 ($FAR(1)$), since the long memory processes makes it possible to better take into account the dependence of long term. Frequently, it is assumed that the innovation of $FAR(1)$ are *i.i.d.* However, independence are rather strong assumption to make about the errors in most empirical econometric fields, In this paper I relax these assumption to when the innovation process is strong mixing, the strong mixing errors is motivated by its broad applicability .

Recall that a fractional autoregressive long memory model of order 1 with strong mixing noises is a stochastic equation which takes the following form :

$$(1 - L)^d X_t = \varepsilon_t \quad (1)$$

With L is lag operator and $d \in]0, \frac{1}{2}[$.

$(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a sequence of strong mixing random variables with 0 mean and finite variance ($\sigma^2 < \infty$).

2 Notations and hypothesis

Consider the following series of fractional models

$$(1 - L)^{d+n-\frac{1}{2}} \delta^{(n)} X_t = \varepsilon_t(d^{(n)}), \quad n = 1, 2, \dots, t \in Z \quad (2)$$

With $d^{(n)}$ a local deviation of the parameter d of the model (1) of the form :

$$d^{(n)} = d + n^{-\frac{1}{2}} \delta^{(n)}$$

such as $\sup \|\delta^{(n)}\| < \infty$ where $\|\cdot\|$ any norm on R .

First, we start by giving some technical assumption which are required.

- (S1) $f(x) > 0$, $x \in R$: $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 0$; $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \sigma^2$; $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x) dx < \infty$.
- (S2) f is absolutely continuous over finite intervals, i.e., there exists a function f' such that, for all $-\infty < a < b < \infty$, $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$.
- (S3) letting $\phi_f = \frac{f'}{f}$, f has a finite Fisher information, i.e., $0 < I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_f^2 f(x) dx < \infty$ and $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^4 f(x) dx < \infty$
- (S4) f is strongly unimodal, i.e. the $-\log(x)$ function is convex on the open intervals $]a; b[$, $-\infty < a < b < \infty$ or again ϕ_f is increasing on R .
- (S5) The sequence of random variables $(\varepsilon_t)_{t \in Z}$ satisfy the Cramer condition given by :

$$E |\varepsilon_i|^m \leq \frac{m!}{2} E |\varepsilon_1|^2 K^{m-2}; \quad m \in N, \quad m \geq 2 \quad (3)$$

where K is a positive constant.

- (S6) $\exists u_n \in N^*$, $o(n[\alpha(u_n)]^{\frac{p-2}{2}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

To establish the local asymptotic normality we will use an extension of the lemma of Swensen 1985. So, we will focus on the asymptotic distribution of the log of the conditional likelihood ratio

$$\Lambda_{f, d+n^{-\frac{1}{2}} \delta^{(n)}/d}^{(n)}(X^{(n)}) = \log \tilde{K}_{f, d+n^{-\frac{1}{2}} \delta^{(n)}/d}(X^{(n)})$$

With

$$\tilde{K}_{f, d+n^{-\frac{1}{2}} \delta^{(n)}/d}(X^{(n)}) = \frac{I_{d^{(n)}, f}(X^{(n)})}{I_{d, f}(X^{(n)})}$$

and

$$I_{d^{(n)}, f}(X^{(n)}) = f_{d^{(n)}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), \quad I_{d, f}(X^{(n)}) = f_d(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

3 Main results and discussions

Theorem

Under the assumptions (S1) to (S6), we have for any integer $p > 2$ and $k \geq 1$

$$\Delta_f^{(n)}(d) = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^q \frac{1}{j} \sum_{t=j+1}^n \phi_f(Z_t) Z_{t-k}$$

and

(i)

$$E(\Delta_f^{(n)}) \leq \pi \sqrt{\frac{n-k}{6n}} \left[(I_f^2 + I_f^{\frac{2}{p}} C_0) (\sigma^4 + \sigma^{\frac{4}{p}} C_0) \right]^{\frac{1}{4}} \quad (4)$$

(ii)

$$\begin{aligned} \text{Var}(\Delta_f^{(n)}) &\leq \pi^2 \frac{n-k}{6n} \left[\left((I_f^2 + I_f^{\frac{2}{p}} C_0) (\sigma^4 + \sigma^{\frac{4}{p}} C_0) \right)^{\frac{1}{2}} - 2I_f \sigma^2 \right] \\ &\quad + \frac{\pi^2}{3} \left[\left(I_f^2 + C_0 I_f^{\frac{2}{p}} n \alpha (k+1)^{1-\frac{2}{p}} \right) (\sigma^4 + C_0 \sigma^{\frac{4}{p}} n \alpha (k+1)^{1-\frac{2}{p}}) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5)$$

with C_0 a positive constant.

Proposition

Under the assumptions (S1) to (S6), for all $d \in]0; \frac{1}{2}[$ and all bounded sequences $\delta^{(n)}$ we have (LAN property)

1.

$$\Lambda_{f, d+n^{-\frac{1}{2}}\delta^{(n)}/d}^{(n)}(X^{(n)}) = \delta^{(n)} \Delta_f^{(n)}(d) - \frac{1}{2} (\delta^{(n)})^2 \frac{\pi^2}{6} \left(I_f^2 + C_0 I_f^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{1}{2}} (\sigma^4 + C_0 \sigma^{\frac{4}{p}})^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

(Local asymptotic quadratic (LAQ) decomposition)

With the central sequence

$$\Delta_f^{(n)}(d) = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^q \frac{1}{j} \sum_{t=j+1}^n \phi_f(Z_t) Z_{t-k} \quad (7)$$

and

$$C_0 = 8C^{\frac{2}{p}}, \text{ where } C = \frac{p!}{2} K^{p-2}; \quad p \in \mathbb{N}; \quad p > 2, \quad K > 0$$

2. The central sequence, $\Delta_f^{(n)}(d)$ is asymptotically normal under $H_f^{(n)}(d)$ with the mean

$$\frac{\pi}{\sqrt{6}} \left[\left(I_f^2 + I_f^{\frac{2}{p}} C_0 \right) (\sigma^4 + \sigma^{\frac{4}{p}} C_0) \right]^{\frac{1}{4}} \text{ and variance } \frac{\pi^2}{6} (\delta^{(n)})^2 \left[\left(I_f^2 + C_0 I_f^{\frac{2}{p}} \right) (\sigma^4 + C_0 \sigma^{\frac{4}{p}}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

3.1 Tables, Figures

We conduct some simulations studies to illustrate our local asymptotic normality theory results. To characterize the structure dependence of noises its be taken to be arithmetic strong mixing.

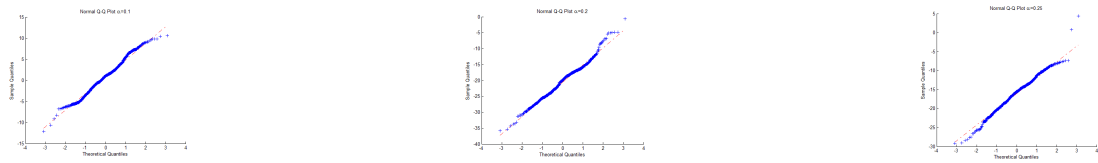


FIG. 1 – qqplot of Δ_f^n sample

Figure (1) shows that the qqplot of the sample is almost in line for different value of the strong mixing parameter, which indicate that Δ_f^k has normal limit distribution .

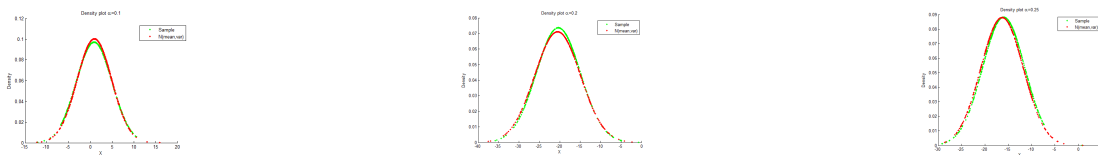


FIG. 2 – Density plot of Δ_f^n sample

As we can see, the two curves are close to each other in different case of the strong mixing parameter. Thus, both figures indicate that Δ_f^k obeys a standard normal law .

Références

- Doukhan, P. (1994). *Mixing : Properties and examples*, Lecture Notes in Statistics (Vols.85), Springer.
- Li, L., and Y.Xiao. 2016. Wavelet-based estimation of regression function with strong mixing errors under fixed design. *Comm. Statist.- Theory and Methods*, 46(10).
- Serroukh, A. 1996. *Inférence asymptotique paramétrique et non paramétrique pour les modèles ARMA fractionnaires*. Ph.D. thesis, Institut Statist., Univ. Libre Bruxelles.
- Swensen, A. R. 1985. The asymptotic distribution of the likelihood ratio for autoregressive time series with a regression trend. *J. Multivariate Anal.* 16 54-70.
- Rosenblatt, M.(1956). A central limit theorem and a strong mixing condition, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 42 :43-47, USA.

Summary

We will establish the local asymptotic normality (LAN) for fractional autoregressive long memory model in the case of strong mixing noises. This opens the way in future work to construct an adaptive estimator and construct optimal tests for the parameters. To check the feasibility and validity of our theoretical results a simulations study is considered.

Influence des données manquantes sur la prédiction des champs aléatoires stationnaires

Abdelghani HAMAZ* and Ouerdia AREZKI*

*Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou
Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées
ghani.hamaz@ummo.dz

Résumé. Le but de cette note est de traiter les problèmes de prédiction d'un champ aléatoire stationnaire lorsque le troisième quadrant est altéré par un nombre fini de données manquantes. Notre objectif est de quantifier l'influence des valeurs manquantes sur la prédiction en donnant les bornes de la variances d'erreur de cette prédiction. Ces bornes permettent de caractériser les champs aléatoires pour lesquels la perte d'information n'affecte pas la prédiction. Une illustration par simulation sera présentée.

1 Introduction

Le problème de prédiction des champs aléatoires stationnaires à passé incomplet a été traité dans [7]. Les auteurs ont fourni une méthode unifiée de prédiction spatiale en étendant certaines œuvres de séries chronologiques stationnaires citées dans leur bibliographie, telles que [2], [3] et [10]. Leurs solutions mènent à des expressions informatives et explicites faisant intervenir les coefficients de la représentation moyenne ajustée (MA). En voulant enrichir leurs résultats afin de donner les expressions des variances des erreurs de prédiction en fonction des paramètres de la représentation autorégressive (AR), ils se sont heurtés à des difficultés techniques formulées à la fin de leur papier sous forme d'un problème ouvert.

Les aspects théoriques et pratiques de cette problématique ont attiré l'attention de plusieurs auteurs. En se plaçant dans le cas gaussien, Cheng (2015) a donné une solution au problème posé sans résoudre pour autant les difficultés techniques formulées dans [7]. Hamaz [5], a établi une formule explicite pour la variance de l'erreur de prédiction d'une valeur future d'un champ aléatoire faiblement stationnaire, quand le passé infini est altéré par certaines observations manquantes. Cette formule explicite permet de dériver la représentation AR de $\hat{X}'(0, 0)$. Il convient de souligner que cette représentation peut être considérée comme une solution alternative au problème posé dans [7].

Le but de cette note est de quantifier l'impact des observations manquantes du passé dont l'idée centrale consiste à utiliser les représentations MA et AR du champ aléatoire. En effet, nous établissons des limites inférieure et supérieure pour la variance d'erreur de prédiction en fonction de ces coefficients dans Théorème 1. ce qui constitue l'originalité de notre travail. Cette propriété de limitation de la variance de l'erreur de prédiction montre que la dégradation de la prévision due aux données manquantes augmente avec la valeur maximale des paramètres AR

des données manquantes, ce qui met en évidence le rôle important que jouent les coefficients de cette représentation. Nos résultats permettent également de conclure que plus les indices des valeurs manquantes sont élevés, meilleure est la précision de la borne de la variance de l'erreur de prédiction. De plus, ils caractérisent les champs aléatoires pour lesquels les observations manquantes n'affectent pas la prédiction de $X(0, 0)$.

2 Limites inférieure et supérieure de la variance d'erreur de prédiction à passé incomplet

Soit \mathcal{H} l'espace de Hilbert des variables aléatoires d'espérances nulles et de carrés intégrables définies sur le même espace de probabilité. La suite $\{X(s, t); (s, t) \in \mathbb{Z}^2\}$ avec $X(s, t) \in \mathcal{H}$ est dite champ aléatoire stationnaire si pour tout s_1, s_2, t_1 et t_2 , la covariance entre $X(s_1, t_1)$ et $X(s_2, t_2)$ dépend seulement de $(s_1 - s_2, t_1 - t_2)$.

Il est à rappeler que le champ aléatoire stationnaire admet de représentation unilatérale $MA(\infty)$ sur \mathcal{Q} s'il existe un bruit blanc $\{\epsilon(s, t)\}$ tel que $X(s, t) = \epsilon(s, t) + \sum_{(k,l) \in -\mathcal{Q}} \sum b_{k,l} \epsilon(s-k, t-l)$,

où $\{b_{k,l}, (k, l) \in \mathbb{Z}^2\}$ est la suite de la représentation MA. Elle vérifie $b_{0,0} = 1$, $b_{k,l} = 0$ pour $k < 0$ ou $l < 0$. et $\sum_{(k,l) \in -\mathcal{Q}} \sum |b_{k,l}|^2 < \infty$. Il est bien connu que les coefficients de la

représentation MA et AR du champs aléatoire sont liés par les relations de récurrences suivantes :

$$\begin{aligned} b_{0,0} &= a_{0,0} = 1 \\ b_{i,j} &= \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j b_{k,l} a_{i-k, j-l}. \end{aligned} \quad (1)$$

Notons $\hat{X}(0, 0)$ la projection orthogonale de $X(0, 0)$ sur $\mathcal{P} = \{X(i, j); (i, j) \in \mathcal{Q}\}$, $-\mathcal{M} = \{(n_1, m_1), \dots, (n_N, m_N); n_i \geq 0, m_i \geq 0, (n_i, m_i) \neq (0, 0)\}$ les indices des données manquantes, $n_N^* = \max_{1 \leq i \leq N} n_i$, $m_N^* = \max_{1 \leq i \leq N} m_i$, et $\hat{X}'(0, 0)$ la projection de $X(0, 0)$ sur $\mathcal{P}' = \{X(i, j); (i, j) \in \mathcal{Q}_1\}$ où $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q} \setminus \mathcal{M}$.

Théorème 1 (Hamaz et al, [6].) Soit $\{X(s, t); (s, t) \in \mathbb{Z}^2\}$ un champ aléatoire stationnaire de processus d'innovation $\{\epsilon(s, t)\}$, dont les paramètres des représentations MA et AR sont $\{b_{s,t}\}$ $\{a_{s,t}\}$ respectivement. Alors,

$$\begin{aligned} \sigma_\eta \max_{(i,j) \in \mathcal{M}} |a_{i,j}| &\leq \|\hat{X}(0, 0) - \hat{X}'(0, 0)\| \\ &\leq \sigma_\epsilon \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} \varphi_{i,j} |a_{i,j}| \leq \sigma_X \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} |a_{i,j}| \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{où } \varphi_{s,t} = \left(\sum_{k=0}^{n_N^*+s} \sum_{l=0}^{m_N^*+t} b_{k,l}^2 + \sum_{k=0}^{n_N^*+s} \sum_{l=m_N^*+t+1}^{+\infty} b_{k,l}^2 + \sum_{k=n_N^*+s+1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{m_N^*+t} b_{k,l}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. La preuve sera détaillée dans la version finale au cas d'acceptation. \square

Remarque. Pour un champ aléatoire faiblement stationnaire $\{X(s, t); (s, t) \in \mathbb{Z}^2\}$ dont les

coefficients AR satisfont $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}^2 < \infty$, la borne inférieure de (2) montre que la dégradation de la variance de prédiction dépend des coefficients de la représentation AR. Plus précisément du $\max_{(i,j) \in \mathcal{M}} |a_{i,j}|$. Dans le cas particulier, où $\mathcal{M} = \{(n_N, m_N), n_N > 0, m_N > 0\}$, l'inégalité (2) entraîne

$$\frac{\sigma_{\epsilon} |a_{n_N, m_N}|}{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}^2 \right)^{1/2}} \leq \left\| \hat{X}(0, 0) - \hat{X}'(0, 0) \right\| \leq \sigma_{\epsilon} |a_{n_N, m_N}|, \quad (3)$$

et il s'en suit

$$\left\| \hat{X}(0, 0) - \hat{X}'(0, 0) \right\| = \frac{\sigma_{\epsilon} |a_{n_N, m_N}|}{\left(\sum_{\substack{i=0 \\ (i,j) \neq (n_N, m_N)}}^{n_M} \sum_{j=0}^{m_N} a_{i,j}^2 \right)^{1/2}}. \quad (4)$$

Par conséquent, plus les valeurs de n_N et m_N sont élevées, meilleure est la précision dans les bornes de (3).

Théorème 2 (Hamaz et al, [6].) *Soit $\{X(s, t); (s, t) \in \mathbb{Z}^2\}$ un champ aléatoire stationnaire de processus d'innovation $\{\epsilon(s, t)\}$, dont les paramètres des représentations MA et AR sont $\{b_{s,t}\}$ et $\{a_{s,t}\}$ respectivement. Alors,*

- (a) $\hat{X}'(0, 0) = \hat{X}(0, 0)$ ssi $a_{i,j} = 0, \forall (i, j) \in M$,
- (b) $\hat{X}'(0, 0) \rightarrow \hat{X}(0, 0)$ dans L_2 lorsque $n_N^-, m_N^- \rightarrow \infty$.

3 Simulation

Afin d'illustrer numériquement l'impact des données manquantes, nous présentons dans cette section une étude de simulation réalisée à l'aide du logiciel R. Les données sont générées sous forme de grille rectangulaire $n \times m$ à partir du modèle autorégressif multiplicatif spatial (5).

$$X(s, t) = \alpha X(s-1, t) + \beta X(s, t-1) - \alpha\beta X(s-1, t-1) + \epsilon(s, t) \quad (5)$$

où $\{\epsilon(s, t); (s, t) \in \mathbb{Z}^2\}$ sont des variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbf{E}(\epsilon(s, t)) = 0$, $\mathbf{Var}(\epsilon(s, t)) = \sigma^2 = 25$, $|\alpha| < 1$ and $|\beta| < 1$. Pour plus de détails sur ce modèle voire [1]

A base des notations présentées en section 2, le critère retenu pour quantifier cet impact est

$$MSPI = \sqrt{\frac{1}{\text{rep}} \sum_{i=1}^{\text{rep}} \left(\hat{X}(n, m) - \hat{X}'(n, m) \right)^2}. \text{ Ces simulations sont réalisées en considérant}$$

plusieurs valeurs de n, m et diverses valeurs des paramètres α et β . Les résultats de simulation montrent que l'indice MSPI est plus petit pour les valeurs α et β pour lesquelles le produit $\alpha.\beta$ est petit. Cela confirme la validité de la théorie car le coefficient de $X(-1, -1)$ est $\alpha.\beta$. En outre, il semble que pour toutes les valeurs de (α, β) , l'indice MSPI diminue à mesure que la

taille de la grille augmente. De plus, les simulations mettent en évidence une certaine symétrie des résultats. En effet, le MSPI pour les valeurs $\alpha = a$ et $\beta = b$ sont très proches de $\alpha = b$ à $\beta = a$, c'est-à-dire qu'en permutant les valeurs de α et β , le MSPI reste presque identique.

Remarque. Ces conclusions se confirment en considérant le modèle (6) étudié dans [9]

$$X(s, t) = \alpha_1 X(s-1, t) + \alpha_2 X(s, t-1) + \alpha_3 X(s-1, t-1) + \alpha_4 X(s-2, t-1) + \alpha_5 X(s-2, t-1) + \epsilon(s, t). \quad (6)$$

References

- [1] Basu, S., & Reinsel, G. C. (1993). Properties of the spatial unilateral first-order ARMA model. *Advances in applied Probability*, 25(3), 631-648.
- [2] Bondon, P. (2002). Prediction with incomplete past of a stationary process. *Stochastic processes and their applications*, 98(1), 67-76.
- [3] Cheng, R., & Pourahmadi, M. (1997). Prediction with incomplete past and interpolation of missing values. *Statistics & probability letters*, 33(4), 341-346.
- [4] Cheng, R. (2015). Prediction of stationary Gaussian random fields with incomplete quarter-plane past. *Journal of Multivariate Analysis*, 139, 245-258.
- [5] Hamaz, A. (2018). Prediction of random fields with incomplete quarter-plane past. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 1-12.
- [6] Hamaz, A., & Arezki, O. (2019) Impact of missing data on the prediction of random fields. *Journal of Applied Statistics*, Under revision.
- [7] Kohli, P., & Pourahmadi, M. (2014). Some prediction problems for stationary random fields with quarter-plane past. *Journal of Multivariate Analysis*, 127, 112-125.
- [8] Levelt, P. F., van den Oord, G. H., Dobber, M. R., Malkki, A., Visser, H., de Vries, J., ... & Saari, H. (2006). The ozone monitoring instrument. *IEEE Transactions on geoscience and remote sensing*, 44(5), 1093-1101.
- [9] Mojiri, A., Waghei, Y., Sani, H. N., & Borzadaran, G. M. (2018). Comparison of predictions by kriging and spatial autoregressive models. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 47(6), 1785-1795.
- [10] Pourahmadi, M. (1989). Estimation and interpolation of missing values of a stationary time series. *Journal of Time Series Analysis*, 10(2), 149-169.

Summary

The purpose of this paper is to treat the prediction problems where a number of observations are missing to the quarter-plane past of a stationary random field. Our aim is to quantify the influence of missing values on the prediction by giving the simple bounds for the prediction error variance. These bounds allow to characterize the random fields for which the missing observations do not affect the prediction. Simulation experiments are presented.

The optimal portfolio with Levy process in incomplete markets model

Malika-HAMMAD *, Faiza-LIMAM-BELARBI**

*BP 89, SBA 22000-Algérie.

mk_hammad@yahoo.fr,

**BP 89, SBA 22000-Algérie.

faiza_belarbi@yahoo.fr

Résumé. Nous considérons un problème optimal d'investissement et de consommation en temps continu pour un modèle de marché incomplet lorsque les prix des actions suivent un processus de Lévy géométrique avec des coefficients déterministes sur l'intervalle d'investissement $[0, T]$. En utilisant les conditions d'existence de politiques de portefeuille optimales pour construire la densité de prix d'état et sur l'ensemble de toutes les mesures martingales équivalentes EMM, nous introduisons et étudions la fonction convexe duale (transformée de Legendre) de la fonction utilité puissance. Lié à ce concept, nous formulons et résolvons notre problème.

1 Introduction

We consider the problem of the investment and consumption portfolio on stock whose price at time t , P_t , is modelled by a geometric Lévy process HAMMAD et LIMAM BELARBI (2017) : $dP_t = \rho_t P_t dt + \sigma_t P_t dY_t$, where Y is a general Lévy process. Fajardo (2003) proves that when the stocks returns follow a geometric Lévy processes and using stochastic calculus for semimartingales, it is possible to obtained conditions for the existence of optimal policies. We HAMMAD et LIMAM BELARBI (2017) take back the latter result, using the martingale method of convex duality approach Karatzas et Shreve (1998) and for a particular utility function we formulate and study the value function for our problem.

2 The model

We consider a financial market M consisting of 2 assets HAMMAD (2017). The first is riskless bond and the second is risky stock. The evolution of their respective prices are modeled by the following equations :

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \quad B(0) = 1$$

$$dP(t) = P(t^-)[\rho_t dt + \sigma_t dY_t], \quad P(0) \in (0, \infty)$$

The sources of risk are modeled by Lévy process $\{Y(t), 0 \leq t \leq T\}$.

3 Optimzation problem portfolio

For $x > 0$, a portfolio $\pi(\cdot)$, a consumption processes $\{c(t), 0 \leq t \leq T\}$ and the terminal wealth process $X^{x,\pi,C}(T)$ defining : $\mathcal{A}_0(x) \triangleq \{(\pi, C) \in \mathcal{A}(x) / E[\int_0^T u^-(t, c(t))dt + g^-(X^{x,\pi,C})(T)] < \infty\}$ where g and $u(t, \cdot)$ are the utility functions. The value function is given by

$$V_{\mathcal{Z}}(x) = \sup_{(\pi, C) \in \mathcal{A}_0(x)} E[\int_0^T u(t, c(t))dt + g(X^{x,\pi,C})(T)] \quad (1)$$

To maximizing this quantity, a random variable \mathcal{F}_t -measurable ξ and a consumption process C that satisfy

$$E[H^{\mathcal{Z}}(T)\xi + \int_0^T H^{\mathcal{Z}}(t^-)dC(t)] = x > 0 \quad (2)$$

Then if there exist a pair $(\pi, C) \in \mathcal{A}(x)$ and $X^{x,\pi,C}(T) = \xi$, If $y > 0$: the optimum of last optimization problem is attained if

$$\xi_{\mathcal{Z}} = I_g(yH^{\mathcal{Z}}(T)) \text{ and } c_{\mathcal{Z}}(t) = I_u(t, yH^{\mathcal{Z}}(t^-)), 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Fajardo (2003) Suppose $x \in (0, \infty)$ and $V_{\mathcal{Z}}(x) < \infty, \forall x \in (0, \infty)$. For any $x > 0$, consider the optimization problem with value function $V_{\mathcal{Z}}(x)$ as in (1) and define $\xi_{\mathcal{Z}}$ and $c_{\mathcal{Z}}(\cdot)$ as in (3). Then if there is a portfolio process $\pi_{\mathcal{Z}}(\cdot)$ such that $(\pi_{\mathcal{Z}}, C_{\mathcal{Z}}) \in \mathcal{A}(x)$ and $X^{x,\pi_{\mathcal{Z}},C_{\mathcal{Z}}}(T) = \xi_{\mathcal{Z}}$.

Then $(\pi_{\mathcal{Z}}, C_{\mathcal{Z}})$ are the solution of the optimal problem and the value function is given by : $V_{\mathcal{Z}}(x) = \mathcal{G}(\mathcal{Y}^{\mathcal{Z}}(x))$ where $\mathcal{G}(y) \triangleq E[\int_0^T u(t, I_u(t, yH^{\mathcal{Z}}(t^-)))dt + g(I_g(yH^{\mathcal{Z}}(T)))]$, $\forall y \in (0, \infty)$

and the convex dual of $V_{\mathcal{Z}}(\cdot)$ is $\widehat{V}_{\mathcal{Z}}(y) = \mathcal{G}(y) - y\mathcal{X}_{\mathcal{Z}}(y) = E[\int_0^T \widehat{u}(t, yH^{\mathcal{Z}}(t^-))dt] + E[\widehat{g}(yH^{\mathcal{Z}}(T))]$.

4 Main result

HAMMAD et LIMAM BELARBI (2017) Suppose $x \in (0, \infty)$ and the constraints (2), (3) satisfied, the optimal value of $V_{\mathcal{Z}}(x)$ for Problem (1) is given by : $V_{\mathcal{Z}}(x) = \frac{x^{1-p}}{1-p} (\mathcal{X}_{\mathcal{Z}}(1))^p, 0 < x < \infty$.

The optimal terminal wealth is given by : $\xi_{\mathcal{Z}} = \frac{x}{\mathcal{X}_{\mathcal{Z}}(1)} (H^{\mathcal{Z}}(T))^{-\frac{1}{p}}$.

The optimal consumption process is given as : $c_{\mathcal{Z}}(t) = \frac{x}{\mathcal{X}_{\mathcal{Z}}(1)} (H^{\mathcal{Z}}(t^-))^{-\frac{1}{p}}$.

Where $\mathcal{X}_{\mathcal{Z}}(1) = E\left[\int_0^T (H^{\mathcal{Z}}(t^-))^{\frac{p-1}{p}} dt + (H^{\mathcal{Z}}(T))^{\frac{p-1}{p}}\right]$.

5 Conclusion

Taken the sufficient conditions for the existence of optimal consumption and investment policies obtained by Fajardo (2003), with a particular utility function and the martingale method of convex duality approach. We have examined the optimal investment and consumption problem.

Références

- Fajardo, J. (2003). Optimal consumption and investment with levy processes. *Optimal consumption and investment with lévy processes* 57(4), 825–848.
- HAMMAD, M. (2017). *Consommation et Investissement Optimaux pour Les Processus de Levy avec Les Fonctions D'utilité de type puissance*. Thèse de doctorat, Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbas.
- HAMMAD, M. et F. LIMAM BELARBI (2017). Optimal consumption and investment with lévy processes for power utility functions. *International Journal of Statistics and Economics* 18(03), 01–08.
- Karatzas, I. et S. Shreve (1998). *Methods of mathematical Finance*. New York: Springer Verlag.

Summary

We consider an optimal portfolio problem in continuous time for incomplete markets model when the security prices follow a Geometric Levy process with deterministic coefficients. Using the conditions for the existence of optimal portfolio policies to construct the state price density, we introduce and study the convex dual function of the power utility. Finally we formulate and solve our problem.

Taylor series approximation of the $MRSPN$ models the $M/G/1/N/N$ queue with repeated attempts and server vacations

Lyes Ikhlef *, Djamil Aïssani **

* University of Algiers, faculté des sciences
Unité de recherche LAMOS
l.ikhlef@univ-alger.dz

**Unité de recherche LAMOS, Université Abderrahmane Mira de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie
lamos_bejaia@hotmail.com

Résumé. In this paper, we apply a computational approach based on a Taylor series expansion for the steady state analysis and performance measures of the Markov regenerative stochastic Petri net ($MRSPN$). Like example, we develop a functional approximation of the stationary distribution of $M/G/1/N/N$ queueing system with retrials and vacations, where the parameter of interest is the vacation rate. Numerical results are provided to illustrate the efficiency of the Taylor series expansion algorithm.

1 Introduction

In retrial queues, the service of customer is preceded and followed by the server's idle time because of the ignorance of the status of the server and orbital customers by each other. Many researchers try to reduce the idle time by introducing the orbital search mechanism (see, Artalejo et al. (2002), Ikhlef et al. (2016), etc) or to exploit this idle time for other secondary jobs by introducing the vacation phenomenons (see, Doshi (1991), Takagi (1991), Levy et Yechiali (1975), Teghem (1986), Gharbi (2008), Oliver et Kishor (1991), Ramanath et Lakshmi (2006), Yang (2015) , etc). By vacation time, we mean that the server becomes unavailable for occasional intervals of time.

Li et Yang (1995) derive formulas for the limiting probability distribution and some performance measures of the queueing system $M/G/1/N/N$ with retrials and vacation using the method of supplementary variable and the generating functions. They discuss its application to the analysis of a communication protocols $CSMA/CD$. Gharbi (2008) presented an approach of modeling and analyzing markovian finite source multi-server queues with retrials and vacations, using Generalized Stochastic Petri Net tool.

The lack of analytical solutions for this kind of queue have led to the development of approximations in the literature. These approximations can be very accurate, but, can also be

inaccurate under certain conditions. Therefore, it is very important to justify this approximation and to estimate the resultant error. An efficient method to approximate the performance measures is the so called Taylor series expansion. This approach was applied for performance approximation to a wide class of stochastic models including : Markov chains Cao (1998); Heidergott et Hordijk (2003); Heidergott et al. (2010), queueing systems Abbas et al. (2013); Ouazine et Abbas (2014); Girish et Hu (1996); Gong et Hu (1992) and inventory systems Berkhout et Heidergott (2014).

In this paper, we consider a perturbation analysis of the queueing system allowing the simultaneous presence of the repeated attempts and the server vacations. Therefore, we develop the stationary distribution of the considered system into a Taylor series with respect to the vacation parameter. We use the *MRSPN* model which allows an easier description of the behavior of such queueing systems and an automatic generation of the Embedded Markov Chain (*EMC*) for the performance analysis.

2 *MRSPN* Model

The *MRSPN* describes this systems is depicted in the following figure (see Figure. 1).

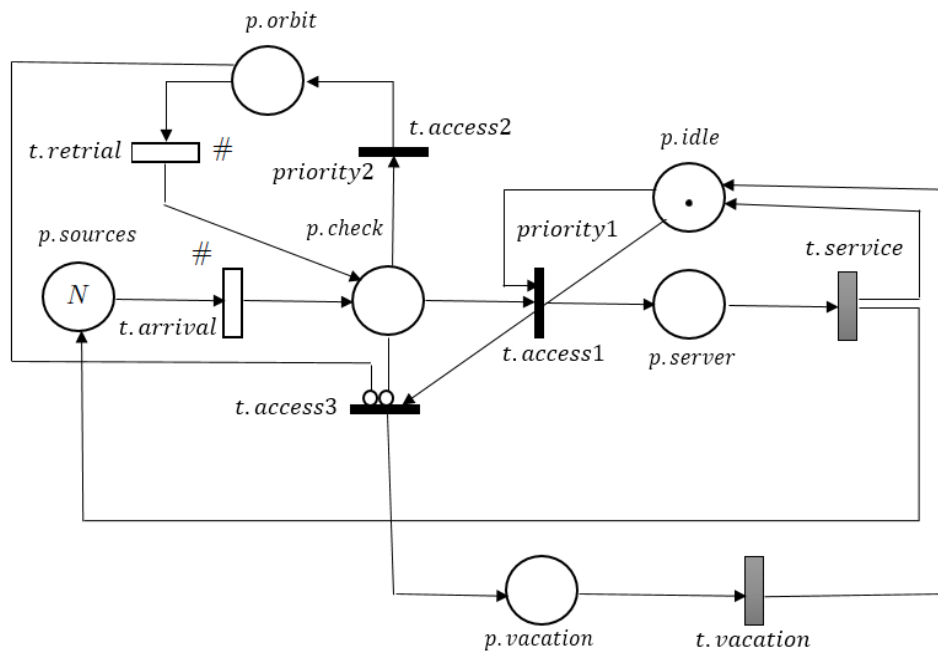


FIG. 1 – *MRSPN* models the $M/G/1/N/N$ retrial queue with classical retrial policy and multiple vacation of server.

3 Application to the $M/G/1/N/N$ with retrials and vacations

In this section, we present theoretical and numerical results obtained by applying Taylor's series expansion to the queue $M/G/1/N/N$ with retrials and vacations. We develop the stationary distribution of the $MRSPN$ into a Taylor series with respect to the vacation rate α , in order to see the effect of the vacation rate on the characteristics of the queue considered.

The n -th order derivative of P_α with respect to α is given by :

$$P_{\alpha M_i M_j}^{(n)} = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1} n! \left(N - \left(\frac{i+1}{3}\right)\right) \lambda}{\left(\alpha + \left(N - \frac{i+1}{3}\right) \lambda\right)^{n+1}}, & \text{if } 0 \leq k \leq N-1, i = 3k+2 \text{ and } j = i+1; \\ -\frac{(-1)^{n+1} n! \left(N - \left(\frac{i+1}{3}\right)\right) \lambda}{\left(\alpha + \left(N - \frac{i+1}{3}\right) \lambda\right)^{n+1}}, & \text{if } 0 \leq k \leq N-1, i = 3k+2 \text{ and } j = i+3; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

and the n -th order derivative of A_α with respect to α is given by :

$$a_{\alpha M_i M_j} = \begin{cases} \frac{-1}{\left[\alpha + \left(N - \frac{i+1}{3}\right) \lambda\right]^2}, & \text{if } 0 \leq k \leq N-1, i = 3k+2 \text{ and } j = i; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\pi_{\alpha+\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n}{n!} \left(\sum_{p=0}^n C_n^p \left(\frac{1}{v_\alpha A_\alpha \mathbf{I}}\right)^{n-p} \left(\sum_{l=0}^p C_p^l v_\alpha^{(p-l)} A_\alpha^l \right) \right).$$

Thus,

$$H_\alpha(k, \Delta) = \sum_{n=0}^k \frac{\Delta^n}{n!} \left(\sum_{p=0}^n C_n^p \left(\frac{1}{v_\alpha A_\alpha \mathbf{I}}\right)^{n-p} \left(\sum_{l=0}^p C_p^l v_\alpha^{(p-l)} A_\alpha^l \right) \right).$$

Références

- Abbas, K., B. Heidergott, et D. Aïssani (2013). A functional approximation for the $m/g/1/n$ queue. *Discrete Event Dynamic Systems* 23, 93–104.
- Artalejo, J. R., J. V. C., et A. Krishnamoorthy (2002). An $m/g/1$ retrial queue with orbital search by the server. *In Advances in Stochastic Modelling*, 41–54.
- Berkhout, J. et B. Heidergott (2014). A series expansion approach to risk analysis of an inventory system with sourcing. *12th IFAC/IEEE Workshop on Discrete Event Systems Cachan, France. May 14-16*.
- Cao, X. R. (1998). The maclaurin series for performance functions of markov chains. *Advances in Applied Probability* 30, 676–692.

- Doshi, B. (1991). Single server queues with vacation: A survey. *Queueing Systems 1*, 00–00.
- Gharbi, N. (2008). On the applicability of stochastic petri nets for analysis of multiserver retrial systems with different vacation policies. *Cha et al. (Eds.): ATVA 2008, LNCS 5311*.
- Girish, M. et J. Hu (1996). Higher order approximations for tandem queueing networks. *Queueing Systems 22*, 249–276.
- Gong, W. et J. Hu (1992). The maclaurin series for the $g/g/1$ queue. *Journal of Applied Probability 29*, 176–184.
- Heidergott, B. et A. Hordijk (2003). Taylor series expansions for stationary markov chains. *Advances in Applied Probability 35*, 1046–1070.
- Heidergott, B., A. Hordijk, et N. Leder (2010). Series expansions for continuous-time markov processes. *Operations Research 58*, 756–767.
- Ikhlef, L., O. Lekadir, et D. Aïssani (2016). Mrspn analysis of semi-markovian finite source retrial queues. *Annals of Operations Research 247*, 141–167.
- Levy, Y. et U. Yechiali (1975). Utilization of idle time in an $m/g/1$ queueing system. *Management Science 22*, 202–211.
- Li, H. et T. Yang (1995). A single-server retrial queue with server vacations and a finite number of input sources. *European Journal of Operational Research 85*, 149–160.
- Oliver, C. I. et S. T. Kishor (1991). Stochastic petri net analysis of finite-population vacation queueing systems. *Queueing Systems 8*, 111–127.
- Ouazine, S. et K. Abbas (2014). A numerical analysis of the $m/g/1/n$ queue with vacations. *12th IFAC/IEEE Workshop on Discrete Event Systems Cachan, France. May 14-16*.
- Ramanath, K. et P. Lakshmi (2006). Modelling $m/g/1$ queueing systems with server vacations using stochastic petri nets. *ORiON 22*, 131–154.
- Takagi, H. (1991). Queueing analysis: A foundation of performance evaluation: Vacation and priority systems. *Elsevier 1*.
- Teghem, J. (1986). Control of the service process in a queueing system. *Eur. J. Oper. Res. 13*, 202–211.
- Yang, W. S. (2015). Algorithmic approach to markovian multi-server retrial queues with vacations. *Applied Mathematics and Computation 22*, 00–00.

Summary

Dans ce travail, nous avons appliqué pour la première fois les formules de développements en séries de Taylor sur les réseaux de Petri stochastiques markoviens régénératifs (*MRSPN*). Comme exemple, on a considéré l'approximation des caractéristiques de *MRSPN* associé au système d'attente $M/G/1/N/N$ avec rappels et vacations. En effet, nous avons analysé l'effet de taux de vacance sur la probabilité d'être dans l'état initiale et le nombre de clients dans l'orbite. Des résultats numérique ont été donnée pour illustré l'efficacité de l'approche utilisée.

Normalité asymptotique locale (Condition LAN) pour un processus ARH(1)

Nesrine Kara Terki*, Tahar Mourid**

* kara.nesrine@yahoo.fr,

**Laboratoire de statistiques et modélisations aléatoires ,Université de Tlemcen
t_mourid@mail.univ – tlemcen.dz

Résumé. Nous considérons les processus stochastiques autorégressifs à valeurs dans un espace de Hilbert séparable ARH(1) avec un opérateur dépendant d'un paramètre. Nous montrons la condition de normalité asymptotique locale (LAN condition) et la normalité asymptotique local uniforme (ULAN condition) sous certaines conditions . Nous en déduisons une borne minimax de Hajek, la convergence et la normalité asymptotique des estimateurs du maximum de vraisemblance.

1 Introduction

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité et (H, \langle, \rangle) un espace de Hilbert séparable muni de sa tribu borélienne \mathcal{B}_H .

Nous considérons un processus stochastique $X = (X_n, n \geq 0)$ défini sur (Ω, \mathcal{A}, P) et à valeurs dans H défini par

$$X_n = \rho_\theta(X_{n-1}) + \varepsilon_n \quad (1)$$

où ρ_θ un opérateur linéaire borné de H vers H , θ un paramètre dans Θ (Θ un ouvert de \mathbb{R}), et $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ un H bruit blanc fort d'opérateur de covariance B . Sous la condition $\forall \theta, \exists j_0 \geq 1$ tel que $\forall j \geq j_0 \|\rho_\theta^j\| < 1$ le processus défini dans (1) admet une solution strictement stationnaire (voir Bosq.D. (2000)). Dans ce travail nous allons considérer la condition de Normalité asymptotique locale (LAN condition), une notion très utile en statistiques des processus . Plus particulièrement la normalité asymptotique locale uniforme(ULAN condition) (voir Ibragimov.I.A et Hasminski.R.Z. (1981)) on peut voir aussi ROUSSAS.G.G et PHILIPPOU.A.N (1973) ou Swensen.A.R. (1985)). Si on note $P_{n,\theta}$ la loi de (X_1, \dots, X_n) de (1) et $\theta \in \Theta$ l'espace des paramètres un ouvert de \mathbb{R} , le rapport de vraisemblance est donné par

$$\tilde{\Lambda}_n = \log(p_{n,\theta_n}/p_{n,\theta}), \quad \theta_n = \theta + h/\sqrt{n}$$

où $p_{n,\theta}$ est la densité de $P_{n,\theta}$ par rapport à une mesure σ -finie et $h \in \mathbb{R}$.

Rappelons la définition de la condition LAN et ULAN .

Définition 1 La famille des lois $\{P_{n,\theta}, \theta \in \Theta\}$ vérifie la normalité asymptotique locale (condition LAN) au point θ s'il existe une suite de v.a. $\{S_n(\theta)\}$ et un nombre positif $\Gamma(\theta)$ tels que sous $P_{n,\theta}$:

Condition LAN pour un processus ARH(1)

1. pour tout h

$$\tilde{\Lambda}_n = hS_n(\theta) - 1/2h^2\Gamma(\theta) + o_p(1)$$

2.

$$S_n(\theta) \rightarrow^d N(0, \Gamma(\theta))$$

où $S_n(\theta), \Gamma(\theta)$ représentent respectivement la fonction score et l'information.

Définition 2 La famille $\{P_{n,\theta}, \theta \in \Theta\}$ vérifie la condition de la normalité asymptotique locale uniforme (condition ULAN) si pour tout $\theta \in \Theta$ la condition LAN est satisfaite et pour tout M , sous P_θ :

$$\sup_{|h| \leq M} |\tilde{\Lambda}_n - hS_n(\theta) + 1/2h^2\Gamma(\theta)| = o_p(1)$$

On suppose que $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ est un H bruit blanc fort gaussien d'opérateur de covariance B .
X est un processus de Markov homogène et ergodique (voir Mourider (1995)) de noyau de transition Q_θ , défini par

$$Q_\theta(x, dy) := P(X_1 \in dy / X_0 = x) = P_{\varepsilon_1 + \rho_\theta(x)}(dy)$$

Le log du rapport de vraisemblance Λ_n conditionnel à X_0 est défini par :

$$\Lambda_n = \log(L_n(\theta_n) / L_n(\theta))$$

où $L_n(\theta)$ est la vraisemblance de (X_1, \dots, X_n) sous P_θ conditionnel à X_0 et $\theta_n = \theta + h/\sqrt{n}$, θ un point fixé de Θ

Notons $\{e_i, i \geq 1\}$ une base hilbertienne de l'espace H formée de vecteurs propres de l'opérateur de covariance B de $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ et $(\sigma_k^2, k \geq 1)$ ses valeurs propres .
L'opérateur de covariance B étant symétrique positif et à trace , on a :

$$Bx = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \langle x, e_k \rangle e_k \quad \forall x \in H$$

En gardant les notations précédentes , le log du rapport de vraisemblance conditionnel à X_0 du processus défini par 1 s'écrit :

$$\begin{aligned} \Lambda_n &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{2\sigma_k^2} \langle \rho_{\theta_n} X_{i-1}, e_k \rangle [\langle \rho_{\theta_n} X_{i-1}, e_k \rangle - 2 \langle X_i, e_k \rangle] \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sigma_k^2} \langle \rho_\theta X_{i-1}, e_k \rangle [\langle \rho_\theta X_{i-1}, e_k \rangle - 2 \langle X_i, e_k \rangle] \end{aligned}$$

Nous avons les quatre résultats principaux suivants :

Théorème 1 Sous des conditions , la famille des lois $\{P_{n,\theta}, \theta \in \Theta\}$ du processus X (ARH(1)) satisfait la condition LAN de la définition 1 avec

$$S_n(\theta) = \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{2\sigma_k^2} \frac{d}{d\theta} \langle \rho_{\theta} X_{i-1}, e_k \rangle [\langle \rho_{\theta} X_{i-1}, e_k \rangle - \langle X_i, e_k \rangle]$$

et

$$\Gamma(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k^2} E_{\theta} \left[\frac{d}{d\theta} \langle \rho_{\theta} X_{i-1}, e_k \rangle \right]^2$$

Théorème 2 Sous des conditions , la famille des lois $\{P_{n,\theta}, \theta \in \Theta\}$ du processus X (ARH(1)) satisfait la condition ULAN de la définition 2 sur tout compact $K \subset \Theta$ et $S_n(\theta), \Gamma(\theta)$ sont définis dans le théorème 1.

Si on définit l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ alors ,nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 3 Sous des conditions la famille des lois $\{P_{n,\theta}, \theta \in \Theta\}$ du processus X (ARH(1)) nous avons :

1. sur tout K compact de Θ :

$$\sqrt{n\Gamma(\hat{\theta}_n)}(\hat{\theta}_n - \theta) \Rightarrow \zeta$$

où $\zeta \hookrightarrow N(0, 1)$

2. Pour une classe de fonctions de risque w

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_{\theta} [w(\sqrt{n\Gamma(\hat{\theta}_n)}(\hat{\theta}_n - \theta))] = Ew(\zeta).$$

Extention Dans le cas où l'espace des paramètres Θ est un ouvert de $\mathbb{R}^p, p \geq 1$ les quantités $S_n(\theta), \Gamma(\theta)$ se définissent par :

$$S_n(\theta) = \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{2\sigma_k^2} \nabla \langle \rho_{\theta} X_{i-1}, e_k \rangle [\langle \rho_{\theta} X_{i-1}, e_k \rangle - \langle X_i, e_k \rangle]$$

et

$$\Gamma(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k^2} E_{\theta} [\nabla \langle \rho_{\theta} X_{i-1}, e_k \rangle \nabla^T \langle \rho_{\theta} X_{i-1}, e_k \rangle]$$

$\nabla \langle \rho_{\theta} X_{i-1}, e_k \rangle$ désigne le vecteur des dérivées partielles.

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 4 Sous des conditions , la famille des lois $\{P_{n,\theta}, \theta \in \Theta\}$ du processus X (ARH(1)) satisfait pour tout $\theta \in \Theta$,les propriétés suivantes : sous $P_{n,\theta}$,

1. pour tout h

$$\Lambda_n = h^T S_n(\theta) - 1/2h^T \Gamma(\theta)h + o_p(1)$$

Condition LAN pour un processus ARH(1)

2.

$$S_n(\theta) \rightarrow^d N(0, \Gamma(\theta))$$

3. Pour tout $M > 0$:

$$\sup_{|h| \leq M} |\Lambda_n - h^T S_n(\theta) + 1/2 h^T \Gamma(\theta) h| = o_p(1)$$

Références

- Bosq.D. (2000). *Linear Processes in Function Spaces: Theory and Applications*. Springer.
- Ibragimov.I.A et Hasminski.R.Z. (1981). *Statistical Estimation .Asymptotic Theory*. New York: Springer.
- Mourid, T. . (1995). *Contribution à la statistique des processus autorégressifs à temps continu*. Thèse de doctorat, université Paris 6.
- ROUSSAS.G.G et PHILIPPOU.A.N (1973). Asymptotic distribution of the likelihood function in the independent not identically distributed case. *Statist,Anal 3*, 454–471.
- Swensen.A.R. (1985). The asymptotic distribution of the likelihood ratio for autoregressive time series with a regression trend. *J.Multivariate Anal 16*, 54–70.

Summary

We consider an Hilbert valued random autoregressive process ARH(1). we give the local asymptotic normality property (LAN condition) and uniform local asymptotic normality property (ULAN condition).we then deduce an asymptotically minimax Hajek- bound for the risks , convergence and asymptotic normality of maximum likelihood estimators.

Statistical Inference for Periodic Self-Exciting Threshold Integer-Valued Autoregressive Model

A. Manaa*, W. Bentarzi**

*,**University of Sciences and Technology Houari Boumediene, U.S.T.H.B. ALGERIA
*manaa.abderrahmen@gmail.com, **wissambentarzi@gmail.com

Abstract. This communication deals with the estimation problems of the Periodic Integer-Valued Self-Exciting Threshold Autoregressive model, denoted by PSETINAR. The estimation parameters were obtained using two well known methods, namely, the conditional least squares (CLS) and the conditional maximum likelihood (CML). The estimation of the threshold parameters is based on the *NeSS* algorithm which will be presented. Finally, an intensive simulation study will be carried out to illustrate the performance of our obtained estimations.

1 Introduction

Nowadays, it has become necessary to deal with non-negative integer-valued time series, and this in many areas, for examples, medical field (Number of cases of campylobacteriosis infections time series studied by Ferland et al. (2006), and by Bentarzi and Bentarzi (2017), sociological field (Monthly number of short-term unemployed people in Penamacor County Portugal, studied by Monteiro et al. (2010)) and many others. Therefore, their modeling using mathematical tools designed for real-valued problems are inappropriate, as long as it does not reflect the discreteness nature of the time series under study.

This major drawback has motivated many researchers to suggest more of time series models that take account the discretion of a data, we refer some of their works, the INAR model which is a similar version of the autoregressive (introduced by Al-Osh and Alzaid (1987)), the SETINAR model that modelizes the piece-wise phenomenon of discrete-valued time series, frequently encountered in life (introduced by Monteiro et al. (2012)) and Yang et al (2018) proposed also a new integer-valued threshold autoregressive process based on negative binomial thinning operator Ristić et al. (2009)) and among others.

However, other researchers tend to work around the problem of periodicity by adopting the principle of seasonal differentiation (deseasonality of Box and Jenkins), but this technique shows flaws because on one hand, the positivity of the obtained series cannot be guaranteed, and on the other hand, the assumption of homogeneity of the mean and the variance is often refuted. In addition, the seasonal adjustment does not reflect the periodicity frequently hidden in the autocovariance structure as was well explained by Tiao and Grupe (1980), and this gave us a good motivation to extend an integer-valued time series model, namely the integer valued self exciting threshold autoregressive process SETINAR from the time invariant parameters to the periodically time-varying parameters.

2 Model definition and main assumptions

A stochastic process $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ is said to follow the periodic, with a period S ($S \geq 2$), self exciting threshold integer-valued autoregressive model of order one, with tow regimes, if it is a solution of the following periodic stochastic difference equation :

$$y_t = (\alpha_{1,t} \circ y_{t-1}) I_t^{(1)}(c_t) + (\alpha_{2,t} \circ y_{t-1}) I_t^{(2)}(c_t) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

where the innovation process $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ is a sequence of independent and periodically distributed Poisson random variables, with a periodic parameter $\lambda_{\varepsilon,t}$. In addition, the symbol " \circ " is the Steutel and Van Harn (1979) operator. The parameters $\alpha_{1,t}$, $\alpha_{2,t}$, c_t and $\lambda_{\varepsilon,t}$ are periodic in time with period S . Furthermore, $I_t^{(1)}(c_t)$ is a sequence of Bernoulli random variable takes 1 if $y_{t-1} \leq c_t$, 0 otherwise, and $I_t^{(2)}(c_t) = 1 - I_t^{(1)}(c_t)$. Also, the process $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ is assumed to be independent of y_{t-1} and $\phi_t \circ y_{t-1}$. Throughout the paper, we will omit (c_t) in $I_t^{(1)}(c_t)$ to make the notation easy without ambiguity

3 Parameters estimation

Denote by $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ a realization of size n of a periodically correlated autoregressive process $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfying the model given in (1). Let be a vector $\underline{y}_{s,\tau} = (y_{s-1+\tau S} I_{s,\tau}^{(1)}, y_{s-1+\tau S} I_{s,\tau}^{(2)}, 1)'$ and $\underline{\theta}_s = (\theta_{1,s}, \theta_{2,s}, \theta_{3,s})' = (\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}, \lambda_{\varepsilon,s})'$, vector of unknown parameters. To estimate these parameters, two methods have been proposed: conditional least squares (CLS) and conditional maximum likelihood (CML). However, to estimate the threshold parameter c_t , we adopt the NeSS algorithm.

3.1 Conditional least square estimators

Recall that the CLS-estimators $\hat{\underline{\theta}}_{s,CLS} = (\hat{\alpha}_{1,s}, \hat{\alpha}_{2,s}, \hat{\lambda}_{\varepsilon,s})'$ of the vector of parameters $\underline{\theta}_s$, is obtained by minimizing the following expression

$$Q(\underline{\theta}_s; \underline{y}) = \sum_{t=2}^n (y_t - \mathbb{E}(y_t | y_{t-1}))^2, \quad (2)$$

when we take a simple size n multiple of S (i.e. $n = NS$), and we replace t by $s + \tau S$, $s = 1, \dots, S$ and $\tau \in \mathbb{Z}$, the last expression can be written as follow

$$Q(\underline{\theta}_s; \underline{y}) = \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{N-1} (y_{s+\tau S} - \underline{\theta}'_s \underline{y}_{s,\tau})^2. \quad (3)$$

Hence, the CLS-estimators $\hat{\underline{\theta}}_{s,CLS}$, since \mathbf{A}_s is invertible matrix, is given by

$$\hat{\underline{\theta}}_{s,CLS} = \mathbf{A}_s^{-1} \underline{\mathbf{b}}_s \quad s = 1, \dots, S, \quad (4)$$

where,

$$\underline{\mathbf{b}}_s = \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S} y_{s+\tau S} I_{s,\tau}^{(1)} \quad \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S} y_{s+\tau S} I_{s,\tau}^{(2)} \quad \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s+\tau S} \right)'. \quad (5)$$

and

$$\mathbf{A}_s = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 I_{s,\tau}^{(1)} & 0 & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S} I_{s,\tau}^{(1)} \\ 0 & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 I_{s,\tau}^{(2)} & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S} I_{s,\tau}^{(2)} \\ \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S} I_{s,\tau}^{(1)} & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S} I_{s,\tau}^{(2)} & N \end{pmatrix}. \quad (6)$$

3.2 Conditional maximum likelihood estimators

The CML-estimators $\hat{\underline{\theta}}_{s,CML} = (\hat{\alpha}_{1,s}, \hat{\alpha}_{2,s}, \hat{\lambda}_{\varepsilon,s})'$ of the vector of parameters $\underline{\theta}_s$, is obtained by maximizing the log-conditional likelihood function:

$$\mathcal{L}(\underline{\theta}_t; \underline{y}) = \sum_{t=1}^n \log p(x_{t-1}, x_t, \alpha_{t,1} I_t^{(1)} + \alpha_{t,2} I_t^{(2)}, \lambda_{\varepsilon,t}), \quad (7)$$

where,

$$p(x_{t-1}, x_t, \alpha_{k,t}, \lambda_{\varepsilon,t}) = \sum_{i=0}^{m^*} \binom{x_{t-1}}{i} I_t^{(k)} \alpha_{k,t}^i (1 - \alpha_{k,t})^{x_{t-1}-i} \frac{\lambda_{\varepsilon,t}^{x_t-i} \exp(-\lambda_{\varepsilon,t})}{(x_t - i)!}, \quad k = 1, 2, \quad (8)$$

with $m^* = \min(x_{t-1}, x_t)$. For $t = s + \tau S$, $s = 1, \dots, S$ and $\tau \in \mathbb{Z}$, we have

$$\mathcal{L}(\underline{\theta}_s; \underline{y}) = \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{s=1}^S \log p(x_{s-1+\tau S}, x_{s+\tau S}, \alpha_{1,s} I_{s,\tau}^{(1)} + \alpha_{2,s} I_{s,\tau}^{(2)}, \lambda_{\varepsilon,s}). \quad (9)$$

Then, the normal equation obtained via the partial derivatives of $\mathcal{L}(\underline{\theta}_s)$ with respect to $\alpha_{1,s}$, $\alpha_{2,s}$ and $\lambda_{\varepsilon,s}$, $s = 1, 2, \dots, S$, are given for $k = 1, 2$, by

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha_{k,s} - \alpha_{k,s}^2} \sum_{\tau=0}^{N-1} I_{s,\tau}^{(k)} \left((x_{s+\tau S} - \alpha_{k,s} x_{s-1+\tau S}) - \lambda_{\varepsilon,s} \frac{p(x_{s-1+\tau S}, x_{s+\tau S} - 1, \alpha_{t,k}, \lambda_{\varepsilon,s})}{p(x_{s-1+\tau S}, x_{s+\tau S}, \alpha_{t,k}, \lambda_{\varepsilon,s})} \right) = 0, \\ \sum_{\tau=0}^{N-1} \left(\frac{p(x_{s-1+\tau S}, x_{s+\tau S} - 1, \alpha_{t,1}, \lambda_{\varepsilon,s})}{p(x_{s-1+\tau S}, x_{s+\tau S}, \alpha_{t,1}, \lambda_{\varepsilon,s})} I_{s,\tau}^{(1)} + \frac{p(x_{s-1+\tau S}, x_{s+\tau S} - 1, \alpha_{t,2}, \lambda_{\varepsilon,s})}{p(x_{s-1+\tau S}, x_{s+\tau S}, \alpha_{t,2}, \lambda_{\varepsilon,s})} I_{s,\tau}^{(2)} - N \right) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

It is worth noting that, this system can not be explicitly solved, thus numerical methods of nonlinear optimization have been used.

3.3 Estimation of the threshold parameter c_t

The threshold parameter c_s , in each period $s = 1, \dots, S$, can be estimated by using the nested sub-sample search (*NeSS*) algorithm proposed by Li and Tong (2016). Using standard least squares, we get the sum of squared errors function as follows :

$$S_n(c_s) = \sum_{\tau=0}^{N-1} \left(y_{s+\tau S} - \sum_{k=1}^2 \frac{\sum_{\tau_1=0}^{N-1} (y_{s+\tau_1 S} - \lambda_{\varepsilon,s}) y_{s+\tau_1 S-1} I_{s,\tau_1}^{(k)}(c_s)}{\sum_{\tau_1=0}^{N-1} y_{s+\tau_1 S}^2 I_{s,\tau_1}^{(k)}(c_s)} y_{s+\tau S-1} I_{s,\tau}^{(k)}(c_s) - \lambda_{\varepsilon,s} \right)^2, \quad (11)$$

from which c_s $s = 1, \dots, S$, can be estimated as : $\hat{c}_s = \arg \min_{c_s \in [\underline{c}_s, \bar{c}_s]} S_n(c_s)$. Following Li and Tong (2016), let : $J_n(c_s) = S_n - S_n(c_s)$, where

$$S_n = \sum_{\tau=0}^{N-1} \left(y_{s+\tau S} - \frac{\sum_{\tau_1=0}^{N-1} (y_{s+\tau_1 S} - \lambda_{\varepsilon,s}) y_{s-1+\tau_1 S}}{\sum_{\tau_2=0}^{N-1} y_{s+\tau_2 S}^2} y_{s-1+\tau S} - \lambda_{\varepsilon,s} \right)^2 \quad (12)$$

Then, the threshold c_s can be estimated by maximizing $J_n(c_s)$, i.e.,

$$\hat{c}_s = \arg \max_{c_s \in [\underline{c}_s, \bar{c}_s]} J_n(c_s), \quad (13)$$

where, \underline{c}_s and \bar{c}_s can be selected as the minimum and maximum values of the samples, respectively and $\lambda_{\varepsilon,s}$ can be taken any positive integer value.

References

- Al-Osh, M. and A. A. Alzaid (1987). First-order integer-valued autoregressive (inar(1)) process. *Journal of Time Series Analysis* 8, 261–275.
- Bentarzi, M. and W. Bentarzi (2017). Periodic integer-valued garch (1, 1) model. *Communications in Statistics-Simulation and Computation* 46, 1167–1188.
- Ferland, R., A. Latour, and D. Oraichi (2006). Integer-valued garch process. *Journal of Time Series Analysis* 27, 923–942.
- Monteiro, M., M. G. Scotto, and I. Pereira (2010). Integer-valued autoregressive processes with periodic structure. *Journal of Statistical Planning and Inference* 140, 1529–1541.
- Monteiro, M., M. G. Scotto, and I. Pereira (2012). Integer-valued self-exciting threshold autoregressive processes. *Communications in Statistics-Theory and Methods* 41, 2717–2737.
- Ristić, M. M., H. S. Bakouch, and A. S. Nastić (2009). A new geometric first-order integer-valued autoregressive (nginar (1)) process. *Journal of Statistical Planning and Inference* 139, 2218–2226.
- Stutel, F. and K. Van Harn (1979). Discrete analogues of self-decomposability and stability. *The Annals of Probability*, 893–899.
- Tiao, G. and M. Grupe (1980). Hidden periodic autoregressive-moving average models in time series data. *Biometrika* 67, 365–373.

Résumé

Cette communication traite des problèmes d'estimation du modèle auto-excité autorégressif à seuil à valeur entier périodique, noté PSETINAR, en utilisant deux méthodes d'estimation, à savoir les moindres carrés conditionnels (CLS) et le maximum de vraisemblance conditionnel (CML). L'estimation des paramètres de seuil est basée sur l'algorithme *NeSS* qui sera présenté. Enfin, une étude de simulation intensive sera réalisée pour illustrer la performance de nos estimations.

La Classe de Distribution de Survie NBU et ses variantes: Classification et Conservation

Ghania SAIDI

Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Economie Appliquée
Pôle Universitaire de Koléa, Tipasa
E-mail: ghsaidi@yahoo.fr

May 30, 2019

Abstract

Dans notre travail, nous nous intéressons à la classe NBU (New Better than Used) et ses variantes. Nous donnons une classification de ces classes. Nous présentons les bornes de la fonction génératrice des moments des classes HNBUE (Harmonic New Better than Used in Expectation), HNRBUE (Harmonic New Renewal than Used in Expectation) et HNBRUE (Harmonic New Better than Renewal Used in Expectation) suivi par une application sur le modèle de chocs poissonien stationnaire. Nous montrons que la classe NWUCA (New Worse than Used in Convex Average) est conservée par rapport au mélange de distributions sous certaines conditions et elle n'est pas conservée par rapport à la formation des systèmes cohérents et le produit de convolution.

1 Introduction

En théorie de fiabilité, des lois appelées lois non paramétriques "de survie" ou "de vieillissement/de rajeunissement" ou encore "d'âge" ont été introduites pour y remédier à certains problèmes rencontrés dans la pratique tels que le manque des données, des données censurées ou aberrantes ainsi que le choix de la loi adéquate sur la base d'un échantillon statistique. Ces lois n'ont pas une certaine allure, mais regroupent des familles de distributions ayant en commun une certaine propriété qualitative (rajeunissement, maturité et vieillissement).

Les premières lois non paramétriques telles que *IFR*, *IFRA*, *NBU*, *NBUE* et *DMRL* ont été introduites vers les années 70 par Barlow et Proschan, et depuis à nos jours de nouvelles classes sont définies par plusieurs auteurs tels que Cao et Wang (1991), Fagioli et Pellerey (1993), Abouammoh et al. (2000), Bhattacharjee et al. (2000), Klefsjö (1985), Ahmad et al. (2006), Belzunce et al. (2001), etc. La littérature scientifique sur les lois non paramétriques concerne l'étude des propriétés de conservation par rapport aux opérations de

fiabilité (formation des systèmes cohérents, produit de convolution, mélange de distributions, modèles de chocs), le calcul des bornes de la fonction de fiabilité et de la fonction génératrice des moments, et leur utilisation dans la modélisation stochastique.

Dans notre travail, nous nous intéressons à la classe *NBU* (New Better than Used) et ses variantes. Nous présentons la classification de ces classes. Nous donnons la caractérisation des distributions non paramétriques *HNBUE* et *HN-RBUE* et nous montrons que la fonction génératrice des moments de la classe *HNBUE* est majorée par celle de la distribution exponentielle de même moyenne, d'autres résultats sont obtenus pour deux plus grandes familles de distribution non paramétriques à savoir *HNRBUE* et *HNBRUE*. Les résultats obtenus sont appliqués dans le modèle de chocs poissonien stationnaire.

Nous montrons que la classe *NWUCA* est conservée par rapport au mélange de distributions sous certaines conditions et elle ne l'est pas par rapport à la formation des systèmes cohérents et le produit de convolution. À la fin, nous présentons la borne de la fonction génératrice des moments pour la classe *NWUCA*.

2 Définitions

Soit X une variable aléatoire non négative de fonction de densité f , de fonction de fiabilité \bar{F} et de moyenne μ . La pseudo-variable de X , notée \tilde{X} , est une variable aléatoire de fonction de densité $f_{\tilde{X}}$ définie à partir de la queue de la distribution de X par

$$f_{\tilde{X}}(t) = \frac{\bar{F}(t)}{\mu},$$

de moyenne $\tilde{\mu}$ finie définie par

$$\tilde{\mu} = E(\tilde{X}) = \frac{\mu_{(2)}}{2\mu}, \quad \text{où } \mu_{(2)} = E(X^2).$$

- F est *HNBUE* (*Harmonic New Better than Used in Expectation*) si

$$\int_t^\infty \bar{F}(u) \, du \leq \mu e^{-\frac{t}{\mu}}, \quad \forall t \geq 0.$$

- F est *HNRBUE* (*Harmonic New Renewal is Better than Used in Expectation*) si

$$\int_x^\infty \bar{F}(u) \, du \leq \tilde{\mu} e^{-\frac{x}{\tilde{\mu}}}, \quad \forall x \geq 0.$$

- F est *HNBRUE* (*Harmonic New is Better than Renewal Used in Expectation*) si

$$\int_x^\infty \bar{F}_{\tilde{X}}(u) \, du \leq \mu e^{-\frac{x}{\mu}}, \quad \forall x \geq 0.$$

- F est NWUCA (New Worse than Used in Convex Order) si

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \bar{F}(u+t) \, du \, dx \leq \bar{F}(t) \int_0^\infty \int_x^\infty \bar{F}(u) \, du \, dx.$$

3 Principaux résultats

Theorem 1 Si X possède la propriété HNBUE (resp. HNRBUE) et $\text{Var}(X) = \mu^2$ (resp. $\text{Var}(\tilde{X}) = \tilde{\mu}^2$), alors X a pour fonction de distribution la fonction:

$$\bar{F}(x) = \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right), \quad \text{pour } x \geq 0.$$

Theorem 2 1) Si X est HNBUE, alors la fonction génératrice des moments (fgm) $M(t) = E(e^{tX})$ existe et elle est finie pour tout $t < \frac{1}{\mu}$, et

$$M(t) \leq \frac{1}{1 - \mu t}, \quad t < \frac{1}{\mu}.$$

2) Si X est HNRBUE, alors la fonction génératrice des moments $M(t) = E(e^{tX})$ existe et elle est finie pour tout $t < \frac{2\mu}{\mu_{(2)}}$. De plus,

$$M(t) \leq \frac{(2\mu^2 - \mu_{(2)})t + 2\mu}{2\mu - \mu_{(2)}t}, \quad t < \frac{2\mu}{\mu_{(2)}}.$$

3) Si X est HNBRUE, alors la fonction génératrice des moments $M(t) = E(e^{tX})$ existe et elle est finie pour tout $t < \frac{1}{\mu}$. De plus,

$$M(t) \leq \frac{\mu^3 t^3 - (\mu \tilde{\mu} - \mu^2) t^2 + 1}{1 - \mu t}, \quad t < \frac{1}{\mu}.$$

Theorem 3 1) La classe NWUCA n'est pas conservée par rapport à la formation des systèmes cohérents et le produit de convolution.

2) La classe NWUCA est conservée par rapport au mélange de distributions possédant la même moyenne et qui ne se croisent pas.

Références

Abouammoh A. M., Ahmad A. N., et Khaliq A. (2000). On new renewal better than used classes of life distributions. *Statistics and Probability Letters* 48, 189-194.

Ahmad I. A., Ahmad A., Elbatal I., et Kayid M. (2006). An aging notion derived from the increasing convex ordering: the NBUCA class. *Journal of Statistical Planning and Inference* 136, 555-569.

Barlow R. E., et Proschan F. (1975). Statistical Theory of Reliability and Life Testing. *Holt, Rinehart & Winston, Inc.*, New York.

Belzunce F., Ortega E., et Ruiz J. (2001). A note on stochastic comparisons of excess lifetimes of renewal processes. *Journal of Applied Probability* 38, 747-753.

Bhattacharjee M.C., Abouammoh A. M., Ahmad A. N., et Barry A. M. (2000). Preservation result of life distributions based on comparisons with asymptotic remaining life under replacements. *Journal of Applied Probability* 37, 999-1009.

Cao J., et Wang Y. (1991). The NBUC and NWUC classes of life distributions. *Journal of Applied Probability* 28, 473-479.

Fagioli E., et Pellerey F. (1993). *New partial ordering and applications*, Naval Research Logistics 40. 829-842.

Klefsjö B. (1985). The HNBUE and HNWUE classes of life distributions. *Naval Research Logistics Quarterly* 29, 301-308.

Marshall A. W., et Olkin I. (2007). Life Distributions, Structure of Nonparametric, Semiparametric and Parametric Families. *Springer Series in Statistics*, New York.

Saidi G., et Aissani A. (2010). Bounds on moment generating functions of HNBUE class and its variants. *Advances and Applications in Statistics* 15 (2), 181-194.

Shaked J., et Shanthikumar N. (1994). Stochastic Orders and their Applications. *Academic Press*, New York.

Shaked J. , et Shanthikumar N. (2007). Stochastic Orders. *Springer-Verlag*, New York.

Summary

In this work, we give first a classification of the *NBU* class of life distributions and its extensions. We find bounds for the moment generating function of the Harmonic New Better than Used in Expectation (*HNBUE*), the Harmonic New Renewal Better than Used in Expectation (*HNRBUE*) and the Harmonic New Better than Renewal Used in Expectation (*HNBRUE*) and an application to stationary Poisson shock model is used for illustration. We prove that the *NWUCA* class is not closed under the formation of coherent systems and convolution. We find also that the *NWUCA* property is not preserved under arbitrary mixtures and a stronger hypothesis (of non-increasing mixtures and a common mean) required. Finally, we prove that the moment generating function for *NWUCA* distribution provided that the life has finite two moments.

Processus de Rosenblatt, Définitions et Description de sa distribution

Barkahoum LAALA

Laboratoire de Mathématique et science de la Décision
laala_mouna@yahoo.fr

Résumé. La distribution de Rosenblatt, c'est la distribution non gaussienne la plus simple, qui se découle d'un théorème limite non centrale, impliquant sur des variables aléatoires de dépendance de longue portée. Il apparaît également dans un contexte statistique, la distribution asymptotique de certains estimateurs. Ce travail est un recherche bibliographie basé sur les propriétés de la distribution de Rosenblatt avec un degré de précision élevé.

1 Introduction

Le théorème de la limite centrale classique (CLT) est dit que la distribution des sommes correctement normalisées des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées converge vers la distribution normale. Ce résultat reste valable s'il existe une certaine dépendance, par exemple si la suite aléatoire m dépendantes, c'est-à-dire si les variables aléatoires sont indépendantes lorsqu'elles sont séparées par m décalages. Si nous augmentons la portée de la dépendance, y aura-t-il une limite naturelle? c-à-d, quelle est la structure de dépendance de laquelle le CLT ne tiendra pas?

Murray Rosenblatt qui l'a modélisé pour la première fois, ainsi, il a été nommé le processus Rosenblatt, voir Taqqu (2011) ?. Il a voulu poursuivre l'idée de Markov "selon laquelle on s'attend à ce que le théorème de la limite centrale soit valable pour X_1, X_2, \dots , si les variables aléatoires se comportent davantage comme des variables aléatoires indépendantes (en supposant que les moments appropriés existent) .

En 1961, Rosenblatt a montré que si (X_n) est un processus gaussien stationnaire centré tel que $Cov(X_1, X_n) \simeq |n|^{-D}$ à l'infini avec $0 < D < 1/2$, alors la loi limite de $N^{-1+D} \sum_{j=1}^N (X_j^2 - E(X_1^2))$ est non gaussienne. Cet exemple célèbre montre que, dans le résultat du théorème de Donsker-Prohorov, la non indépendance peut occasionner à la fois la perte de la normalité asymptotique des sommes partielles et de la normalisation par \sqrt{N} .

La distribution de Rosenblatt est la loi du processus de Rosenblatt évalué au temps $t = 1$. ils présentent un intérêt, car ils constituent l'extension la plus simple du mouvement brownien fractionnaire gaussien au cas non gaussien, il apparaît comme la limite des séries stationnaires à une dépendance forte. Les premiers résultats liés à cette loi ont été donnés par

Albin (1998). Récemment, Taqqu (2011) a fait la représentation temporelle et spectrale, dans le travail de Veillette et Taqqu (2013) ont calculé, entre autres, sa loi de mesure, ses cumulants et ses moments. Ils ont également dérivé numériquement la forme de la densité. Maejima et Tudor (2013) ont montré qu'une variable aléatoire qui suit la distribution de Rosenblatt peut être représentée comme une intégrale de Wiener dans le cadre de certains processus de Lévy.

2 Processus

2.1 Processus à Accroissements Stationnaire (stationary increments)

2.1.1 Définitions

Soit une variable aléatoire X_t à tout instant $0 \leq t$.

Les accroissements (les incréments) d'un tel processus sont les différences $(X_s - X_t)$ entre ses valeurs à différents instants $t < s$.

Dire que les accroissements sont stationnaires, ou accroissement indépendant du temps, ou incréments stationnaire, si la loi de chaque accroissement (incrément) $X_s - X_t$ ne dépend que de la longueur $(s - t)$ de l'intervalle de temps, c-à-d, pour tout $s < t$, $X_t - X_s$ est égale en loi à X_{t-s} .

2.1.2 Exemples

- Pour un processus de Wiener, la loi de $X_s - X_t$ est une loi normale d'espérance 0 et de variance $(s - t)$.
- Pour un processus de Poisson homogène, la loi de $X_s - X_t$ est une loi de Poisson d'espérance $\lambda(s - t)$, où $\lambda > 0$ est l'intensité ou le "taux" du processus.

2.2 Processus Auto-similaire

2.2.1 Définitions

Un objet auto-similaire est un objet qui conserve sa forme, quelle que soit l'échelle à laquelle on l'observe.

En mathématique, un processus $\{X(t); 0 \leq t\}$ est auto-similaire (self-similarity process) avec le paramètre $H > 0$ si, pour tout réel a , les distributions à une dimension finie de $\{X(at); 0 \leq t\}$ sont les mêmes que ceux de $\{a^H X(t); 0 \leq t\}$.

2.2.2 Exemples

Les processus auto-similaire les plus connus sont :

- Processus trivial $X(t) = Xt$ est auto-similaire avec $H = 1$.
- Le mouvement brownien est auto-similaire avec $H = 1/2$.
- Le mouvement brownien fractionnaire est auto-similaire avec $0 < H < 1$. La propriété d'auto-similarité seule ne permet pas de caractériser convenablement la classe de processus en question. Pour présenter un intérêt connu, les processus auto-similaires doivent posséder d'autres propriétés telles que l'indépendance ou la stationnarité des

accroissements, la propriété gaussienne.

Remarque : Si $H = 0$, alors le processus X est p.s.constant, i.e. $X_t = X_0$, pour tout t , presque sûrement.

2.3 Processus de Rosenblatt

2.3.1 Définitions

Nous commencerons par motiver la distribution de Rosenblatt en considérant une suite gaussienne stationnaire $X_i, i = 1, 2, \dots$, qui a une structure de covariance de la forme $EX_0X_k \simeq k^{-D}$ comme $k \rightarrow \infty$ avec $0 < D < 1/2 (D = 1 - 2d)$. Utiliser la transformation $Y_i = X_i^2 - 1$, on peut définir une suite de sommes normalisées

$$Z_D^N = \frac{\sigma(D)}{N^{1-D}} \sum_{i=1}^N Y_i,$$

où $\sigma(D)$ est une constante de normalisation et est donnée par $\sigma(D) = \sqrt{1/2(1-2D)(1-D)}$. La suite Z_D^N converge vers une limite non Gaussien Z_D pour $N \rightarrow \infty$ de moyenne nulle et variance 1. Cette distribution limite a été nommée distribution de Rosenblatt dans Taquq (1975).

Définition

1- Soit $0 < D < 1/2$, on considère un processus de Rosenblatt $Z_D(t)$, pour $t \geq 0$,

$$Z_D(t) := C(D) \int_{R^2}' \left(\int_0^t (u - s_1)^{-(1+D)/2} (u - s_1)^{-(1+D)/2} du \right) dB(s_1) dB(s_2), \quad (1)$$

où $\{B(s), s \in R\}$ est un mouvement brownien standard, \int_{R^2}' est l'intégrale sur R^2 sauf l'hyperplan $s_1 = s_2$, $C(D) = \frac{\sigma(D)}{b((1-D)/2, D)}$ et $b(\cdot, \cdot)$ est la fonction bêta.

2- Le processus $\{Z_D(t), t \geq 0\}$ est un processus $H (= 1 - D = 2d)$ Auto-similaire et d'incrément stationnaire où $1/2 < H < 1$, la distribution $Z_D(1)$ est la distribution de Rosenblatt, qui est la première distribution limite non gaussienne des sommes partielles normalisées de certaines variables aléatoires stationnaires fortement dépendantes découvertes par Rosenblatt (1961).

3 Propriétés de Processus de Rosenblatt

- Représentation Stochastique : Un processus auto-similaire ($1/2 < H < 1$) de moyenne nulle, $EZ(t)^2 = \sigma^2 t^{2H}$ et $EZ(t_1)Z(t_2) = \frac{\sigma^2}{2} \{t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}\}$.
- Représentation Temporelle : Processus de Rosenblatt est représentée par une double (m=2) intégrale de Wiener-Itô la formule (1). En prenant \int_{R^2}' comme $2 \int_{x_1 < x_2}$, on obtient : $Z_d(t) = 2C(D) \int_{x_1 < x_2 < t} \left[\int_0^t (v - x_1)_+^{d-1} (v - x_2)_+^{d-1} dv \right] W(dx_1) W(dx_2)$.
- Représentation spectrale

$$Z(t) = C(H) \int_{R^2}'' \frac{e^{i(\lambda_1 + \lambda_2)t} - 1}{i(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{1}{|\lambda_1|^{H/2}} \frac{1}{|\lambda_2|^{H/2}} dB(\lambda_1) dB(\lambda_2)$$

où

$$C(H) = \sqrt{\frac{H(2H-1)}{2(2\Gamma(1-H)\sin(H\pi/2))^2}}$$

- Fonction caractéristique : $\phi(\theta) = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (2\theta i \sigma(D))^k \frac{c_k}{k}\right)$, où $c_k \leq \left(\frac{1}{2\sigma^2(D)}\right)^{k/2}$,
- Cumulants :
Moyenne : $\kappa_1 = 0$, variance : $\kappa_2 = 2(\sigma(D))^2 c_2 = 1$ et $\kappa_k = 2^{k-1}(k-1)!(\sigma(D))^k c_k$.
- Distribution en dimension finie est valable. En fait, le processus Rosenblatt a une version de chemin continu presque sûre depuis $E(Z(t_1) - Z(t_2))^2 = |t_1 - t_2|^{2H}$
- Il est non différentiable en moyenne car $\lim_{t \rightarrow 0} E\left(\frac{Z(t)}{t}\right)^2 = \lim_{t \rightarrow 0} t^{2H-2} = \infty$
- $P[Z(1) > u] < C \exp\left(-\frac{u}{2\sigma}\right)$, $u > 0$, où $E(Z(1))^2 = \sigma^2$

4 Conclusion

Les propriétés précédentes de ces processus nous ont permis de distinguer la distribution asymptotique de processus stationnaire à une dépendance forte ainsi sa densité spectrale, dans le cas où la suite d'autocovariance n'est pas de carré sommable.

Références

- Bai, S. et M. S. Taqqu (2016). *Behavior of the generalized Rosenblatt process at extreme critical exponent values*. The Annals of Probability, 45, No. 2, 1278-1324.
- Giraitis, L. et M. S. Taqqu (1999) *Whittle Estimator for Finite- Variance Non- Gaussian Time Series with Long Memory*. The Annals of Statistics, Vol. 27, No. 1, 178-203.
- Leonenko, N. et V. V. Anh (2001). *Rate of Convergence to the Roseblatt Distribution for Additive Functionals of Stochastic Processes with Long-Range Dependence*. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 14, 1, 27- 46.
- Maejima, M. et A. Tudor (2013) *The distribution of the Rosenblatt process - Examples of distributions in the Thorin class -*. 7th International Conference on Lévy processes, Wrocław.
- Taqqu, M. S. (2011). *The Rosenblatt process*. In *Selected Works of Murray Rosenblatt* New York: Springer. 1, 81–106.
- Veillette, M. S, et M. S. Taqqu (2013). *Properties and numerical evaluation of the Rosenblatt distribution*. Bernoulli 19(3), 982-1005.

Summary

The Rosenblatt distribution is the simplest non-Gaussian distribution which arises in a non-central limit theorem involving long-range dependent random variables. It also appears in a statistical context as the asymptotic distribution of certain estimators. This work is a bibliography search based on the properties of the Rosenblatt distribution with a high degree of precision.

Modélisation et analyse de la communication RF dans les réseaux de capteurs via les files d'attente

Lekadir Ouiza*

* Unité de Recherche LaMOS (Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes),
Université A/Mira de Béjaia, Targua Ouzemour, 06000, Algérie.
ouizalekadir@gmail.com

Résumé. Dans ce travail, nous donnons une brève analyse des systèmes de file d'attente avec rappels et différentes priorités: relative, absolue et nous introduisons une nouvelle politique de priorité qui est un mélange de ces deux dernières politiques et ceci afin d'analyser un système de files d'attente avec rappels et vacances en considérant ces différents types de priorité. Avec ce système de files d'attente, la communication RF (Radio-Fréquence) dans les réseaux de capteurs sera modélisée. Après cette analyse et cette modélisation, une simulation des modèles obtenus sera réalisée. Cette simulation permettra de calculer les mesures de performance des différents modèles considérés. Une interprétation des résultats de la simulation illustrera la nécessité d'introduire la politique de mélange des deux priorités (relative et absolue).

1 Introduction

La plupart des systèmes rencontrés dans différents domaines technologiques peuvent être représentés par des modèles de files d'attente. C'est le cas par exemple des réseaux de télécommunications. En effet, afin d'analyser le comportement de ces systèmes, d'évaluer et d'optimiser leurs performances, il faut d'abord les représenter par des modèles mathématiques qu'on peut obtenir avec des outils de modélisation tels que la théorie des files d'attente. Un modèle typique de files d'attente nécessite la définition des processus d'inter-arrivées et de durées de service des clients, la taille de la file, ainsi que la discipline de service. Dans certains systèmes, on est souvent amené à imposer des priorités aux clients, que ce soit au niveau de leurs arrivées et/ou au niveau de leurs services.

La planification des priorités est toujours un sujet d'actualité dans la théorie des files d'attente. Dans de nombreux systèmes de file d'attente, dans des situations réelles impliquant particulièrement des systèmes informatiques, de télécommunication, de transport, etc ..., différents types de clients ont besoin de différents types de services. Dans les systèmes de télécommunication, par exemple, on peut penser à des paquets appartenant à une application de vidéoconférence. Pour garantir la qualité d'une telle conférence, il est nécessaire que ces paquets ne soient pas trop retardés. Quand tous les paquets sont transmis à partir d'un certain noeud de réseau dans l'ordre dans lequel ils arrivent à ce noeud, aucune différenciation de service ou de retard n'est possible entre différents types de paquets. En donnant la priorité à la transmission

des paquets appartenant à la vidéoconférence (dans certains voire même dans tous les nœuds), il est possible d'obtenir la différenciation de service requise.

Les disciplines de planification prioritaires sont principalement divisées en deux catégories et ce relativement à la manière dont elles traitent les nouveaux clients ayant une priorité supérieure à celle des clients actuellement en service. C'est deux principales disciplines sont : la priorité relative et la priorité absolue.

Dans une file d'attente avec priorité absolue, le service d'un client de priorité inférieure n'est pas interrompu lorsqu'un client de priorité supérieure arrive au système. Une fois que le service du client de priorité inférieure est terminé, le serveur commence à traiter le client de priorité supérieure. En revanche, dans le cas d'une file d'attente avec priorité absolue, le service d'un client moins prioritaire sera immédiatement interrompu si un client hautement prioritaire arrive et ne sera pas repris tant que le système n'aura plus été vidé de ses clients plus prioritaires.

On voit facilement que la priorité absolue est favorable aux clients à priorité élevée, car ils ne sont pas du tout influencés par les clients à priorité inférieure. D'autre part, avec une priorité relative, les clients à faible priorité sont au moins certains d'être complètement servis une fois leur service démarré. De nombreuses recherches ont été effectuées sur ces disciplines de planification (priorité relative et priorité absolue), voir par exemple, Walraevens et al. (2002, 2008). Ces deux catégories de priorité présentent cependant plusieurs inconvénients dans les applications pratiques. Dans le cas de la priorité relative, les clients à priorité élevée peuvent être obligés d'attendre même lorsque le service d'un client à priorité inférieure vient de commencer, tandis que dans le cas de la priorité absolue, le service presque terminé d'un client à priorité inférieure peut être interrompu pour des raisons suivantes : l'arrivée de clients plus prioritaires (causant possiblement un retard supplémentaire important). Pour remédier à ces inconvénients constatés, dans ce travail, nous proposons une discipline d'ordonnancement prioritaire dans laquelle les deux situations susmentionnées sont évitées autant que possible. En particulier, nous introduisons un paramètre γ qui est défini comme la fraction du temps de service qui doit déjà être écoulé pour que le service d'un client de priorité inférieure ne soit plus interrompu lorsqu'un client de priorité supérieure arrive au système. En d'autres termes, le rapport entre le temps de service écoulé d'un client moins prioritaire lors de l'arrivée d'un client de priorité supérieure, sa durée totale de service est comparée à γ . Si ce rapport est inférieur à γ , le service du client de priorité inférieure est interrompu. Sinon, son service est terminé avant celui d'un client prioritaire. Notez que les disciplines prioritaires (absolue et relative) sont deux cas particuliers (extrêmes) de cette discipline nouvellement définie, à savoir qu'elles correspondent à $\gamma = 1$ et $\gamma = 0$, respectivement.

Cette nouvelle discipline de planification prioritaire ressemble à la discipline de priorité introduite dans Avi-Itzhak et al. (1964) et étudiée plus en détail dans Kim et Chae (2010). Dans cette dernière discipline prioritaire, les auteurs ont fixé un seuil absolu au temps de service écoulé des clients de priorité inférieure pour interrompre leur service, alors que dans ce travail un seuil relatif est proposé, ce qui a plus de sens à notre avis.

Afin d'analyser et d'évaluer les performances de la communication (Radio Fréquence) dans les réseaux de capteurs, on propose de modéliser ce système de communication par un modèle de files d'attente avec rappels, vacances et priorité. Ainsi, en plus des deux disciplines prioritaires classiques (relative et absolue), on introduira l'application de cette nouvelle discipline d'ordonnancement prioritaire définie précédemment.

2 Modélisation de la communication RF dans les réseaux de capteurs via un modèle de file d'attente

Les paramètres du modèle choisi pour décrire le fonctionnement de la communication RF dans les réseaux de capteurs sont résumés par :

1. **Processus d'arrivées** : Deux types de requêtes sont considérées dans ce modèle, à savoir : celles avec haute priorité et celles avec faible priorité.
2. **Processus de service** : Le service dans ce modèle l'unité RF (serveur) peut être dans deux états : en état ON (accessible), ou à l'état OFF, dans cette cas, l'unité RF prendre des vacances.
3. **Capacité** : est infinie,
4. **Source** : Les sources respectives de ces requêtes sont considérées fini N_1 pour les requêtes prioritaire (respectivement N_2) pour les requêtes non prioritaires,
5. **Les rappels** : notre modèle est avec rappels, il se caractérise par le fait qu'une requête qui trouve le serveur occupé à son arrivée, rejoint l'orbite pour rappeler ultérieurement.
5. **Les vacances (service exhaustif)** : Dans notre modèle un système avec vacances et service exhaustif, chaque fois que le serveur revient d'une vacance, il servira tous les clients en attente dans le système avant de commencer une autre vacance.
6. **Disciplines de planification prioritaire** : Les trois catégories de discipline déjà citées seront considérées, à savoir : la priorité relative, la priorité absolue, ainsi que la nouvelle discipline, γ -priorité proposée, qui est le mélange de ces deux disciplines principales (relative et absolue). Après cette modélisation, une analyse de ces modèles est réalisée et en parallèle des simulations de ces modèles sont établies. Ces simulations nous ont permis de calculer les mesures de performance des différents modèles considérés. Une interprétation des résultats des simulations illustrera la nécessité d'introduire la politique de mélange des deux priorités (relative et absolue).

3 Les différents dimulateurs définis

En voulant évaluer la performance de la nouvelle discipline " γ -priorité" que nous avons adoptée dans le modèle de files d'attente qu'on a retenu comme modèle qui décrit le mieux la communication RF dans les réseaux de capteurs, nous avons défini les simulateurs relatifs aux systèmes de files d'attente avec rappels, vacances et :

1. priorité relative,
2. priorité absolue,
3. γ -priorité.

Il est à signaler que tous ces simulateurs ont été validés par des résultats analytiques.

Conclusion

Les détails de ce travail, qui seront exposé dans l'extension de ce résumé, illustreront que cette nouvelle discipline prioritaire proposée est plus prometteuse.

Références

- Avi-Itzhak, B., I. Brosh, et P. Naor (1964). On discretionary priority queueing. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 44(6), 235–242.
- DOSHI, B. (1986). Queueing systems with vacations, a survey. *Queueing Systems-Theory and Applications* 1, 29–66.
- Kim, K. et K. Chae (2010). Discrete-time queues with discretionary priorities. *European Journal of Operational Research* 200(2), 473–485.
- Walraevens, J., B. Steyaert, et H. Bruneel (2002). Delay characteristics in discretetime $gi/g/1$ queues with non-preemptive priority queueing discipline. *Performance Evaluation* 186(1), 182–201.
- Walraevens, J., B. Steyaert, et H. Bruneel (2008). Analysis of a discrete-time preemptive resume priority buffer. *European Journal of Operational Research* 186(1), 182–201.

Summary

In this work, we give a brief analysis of the retrial queueing systems with the different priorities (relative, absolute and we introduce the mixing of these two priorities) and this in order to study a system of retrial queues with vacancy and with these different priorities. With this system the RF (Radio-frequency) communication in sensors networks will be modeled. After this analysis and modeling, a simulation of the models obtained will be carried out. This simulation will permit to compute the performance measures of the different considered models. An interpretation of the simulation results will illustrate the necessary of introducing the policy of mixing the two priorities (preemptive and nonpreemptive).

Nonparametric local linear estimator of the conditional hazard function in the functional single-index model

Torkia MEROUAN*, Boubaker MECHAB**
Abdelhak CHOUAF ***

* ** *** University of Djillali Liabes
L.P 89, Sidi Bel Abbas 22000, Algeria
* merouan-to@hotmail.com
** mechaboub@yahoo.fr
*** abdo_stat@yahoo.fr

Résumé. Dans ce papier, nous présentons l'estimation de la fonction de hasard conditionnelle par la méthode locale linéaire quand la variable réponse est scalaire et la variable explicative hilbertienne dans le modèle à indice simple. Sous certaines conditions, nous établissons la convergence presque-complète uniforme, et nous donnons également les vitesses de convergence.

1 Introduction

The nonparametric estimation of conditional hazard function is important to a large degree in statistics. For example, we find their use in survival analysis and in seismology, medicine, reliability, etc. Concerning the first dealing with this function, when the regressors are functional, we refer to the work of Ferraty et al. (2008). They proved the almost complete convergence (with rate) of the kernel estimation. Quintela-Del-Río (2008) has studied the asymptotic normality of the same estimator in α -mixing data case. On the other hand, the local linear regression model has been considered by others authors, Baíllo et Grané (2009) proposed a local linear estimator of the regression operator when the explanatory variable takes values in a Hilbert space. We can cite also the work of Barrientos-Marin et al. (2010), they introduce the functional locally modeled regression method which is a direct extension of the functional nonparametric regression model. Demongeot et al. (2013) used the same approach to estimate the conditional density. Recently, Massim et Mechab (2016) established the almost complete convergence of conditional hazard function in the same set of estimation.

The single-index model is one of the most important methods for reducing the dimensionality, where we find their application in econometrics, which its a tradeoff between nonparametric and parametric models. In nonparametric functional statistics, this model was introduced by Ferraty et al. (2003) of the kernel regression estimation. Attaoui et al. (2011) specified the pointwise and the uniform almost complete convergence (with the rate) for the conditional density of this model. After that, this method has been used to estimate the conditional hazard function in the quasi-associated data see Hadjila et Ahmed (2018).

The aim of this paper is to study the local linear kernel estimator of the conditional hazard function in the single functional index structure when the data are independent and identically

Estimation of the conditional hazard function

distributed. We prove the uniform almost complete convergence with rate of the constructed estimator.

The paper is organized as follows : in section 2, we present our model and estimator. In section 3, we introduce our assumptions and give the main results. Finally, in Section 4, we give The proofs of our results.

2 Single Functional Index Model and Estimator

Consider the sample $(X_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ of n independent pairs identically distributed as a couple of random variables (X, Y) , taking its values in $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$, where \mathcal{H} is a separable real Hilbert space with the norm $\|\cdot\|$ generated by an inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$. We consider the semi metric d_θ , associated to the single index $\theta \in \mathcal{H}$ defined by $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{H} : d_\theta(x_1, x_2) := |\langle x_1 - x_2, \theta \rangle|$. In our context, we suppose that the functional index θ is known and we assume that the conditional hazard function of Y given X has a single-index structure θ in \mathcal{H} , where this latter denoted by $h_\theta^x(\cdot)$ and is given by

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad h_\theta^x(y) := h(y | \langle x, \theta \rangle).$$

Distinctly, the identifiability of the model is assured such that for all $x \in \mathcal{H}$, we get,

$$h_1(y | \langle \cdot, \theta_1 \rangle) = h_2(y | \langle \cdot, \theta_2 \rangle) \Rightarrow h_1 \equiv h_2 \text{ and } \theta_1 = \theta_2.$$

The expression of the conditional hazard function is defined as follows by

$$h_\theta^x(y) = \frac{f_\theta^x(y)}{1 - F_\theta^x(y)}, \quad F_\theta^x(y) < 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

In this paper, we define the local linear estimator $\widehat{h}_\theta^x(y)$ of $h_\theta^x(y)$ by

$$\widehat{h}_\theta^x(y) = \frac{\widehat{f}_\theta^x(y)}{1 - \widehat{F}_\theta^x(y)}$$

where, $\forall y \in \mathbb{R}$

$$\widehat{F}_\theta^x(y) = \frac{\sum_{1 \leq i, j \leq n} W_{\theta, ij}(x) H(h_H^{-1}(y - Y_j))}{\sum_{1 \leq i, j \leq n} W_{\theta, ij}(x)}, \quad \widehat{f}_\theta^x(y) = \frac{\sum_{1 \leq i, j \leq n} W_{\theta, ij}(x) H'(h_H^{-1}(y - Y_j))}{h_H \sum_{1 \leq i, j \leq n} W_{\theta, ij}(x)}$$

with

$$W_{\theta, ij}(x) = \beta_\theta(X_i, x) \left(\beta_\theta(X_i, x) - \beta_\theta(X_j, x) \right) K(h_K^{-1} d_\theta(x, X_i)) K(h_K^{-1} d_\theta(x, X_j))$$

and $\beta_\theta(X_i, x) = \langle x - X_i, \theta \rangle$ is a known bi-functional operator from \mathcal{H}^2 into \mathbb{R} , such that $\forall x' \in \mathcal{H}$, $\forall \theta \in \mathcal{H}$, $\langle x' - x', \theta \rangle = 0$, with the function K is a kernel, H is a distribution function (respectively, H' is the derivative of H) and $h_K = h_{K, n}$ (respectively, $h_H = h_{H, n}$) is a sequence of positive real numbers.

2.1 Uniform almost complete convergence

For uniform almost complete convergence, we need the following assumptions :

- (U1) We put $\mathbb{P}(| < X - x, \theta > | < h_K) =: \phi_{\theta, x}(h_K) > 0$ and there exists a differentiable function $\phi(\cdot)$ such that $\forall x \in S_{\mathcal{H}}$ and $\forall \theta \in \Theta_{\mathcal{H}}$

$$0 < C\phi(h_K) \leq \phi_{\theta, x}(h_K) \leq C'\phi(h_K) \leq \infty \quad \text{and} \quad \exists \eta_0 > 0, \forall \eta < \eta_0, \phi'(\eta) < 0,$$

where ϕ' is the first derivative function of ϕ and $\phi(0) = 0$.

- (U2) The Operators F_{θ}^x and f_{θ}^x satisfy the Hölder condition :

- (i) $\forall (x, y) \in \mathcal{H} \times S_{\mathbb{R}}, \forall \theta \in \Theta_{\mathcal{H}}, \exists 0 < \tau < 1, F_{\theta}^x(y) \leq 1 - \tau, \exists b_1, b_2 > 0, \forall (y, y') \in S_{\mathbb{R}}^2, \forall (x, x') \in \mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_x,$

$$|F_{\theta}^x(y) - F_{\theta}^x(y')| \leq C(\|x - x'\|^{b_1} + |y - y'|^{b_2}).$$

- (ii) $\forall (x, y) \in \mathcal{H} \times S_{\mathbb{R}}, \forall \theta \in \Theta_{\mathcal{H}}, \exists \alpha < \infty, f_{\theta}^x(y) \leq \alpha,$

$$|f_{\theta}^x(y) - f_{\theta}^x(y')| \leq C(\|x - x'\|^{b_1} + |y - y'|^{b_2}).$$

- (U3) The function $\beta_{\theta}(\cdot, \cdot)$ satisfies (H3) and the following Lipschitz's condition :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \forall \theta \in \Theta_{\mathcal{H}}, \forall x' \in \mathcal{H}, |\beta_{\theta}(x_1, x') - \beta_{\theta}(x_2, x')| \leq Cd_{\theta}(x_1, x_2).$$

- (U4) The kernel $K_{\theta, i}(\cdot)$ is a Lipschitzian function and differentiable, supported within $(-1, 1)$.

- (U5) For $v_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ the sequences $q_n^{S_{\mathcal{H}}}$ and $q_n^{\Theta_{\mathcal{H}}}$ satisfy :

$$\begin{aligned} \frac{(\ln n)^2}{n\phi(h_K)} &< \ln q_n^{S_{\mathcal{H}}} + \ln q_n^{\Theta_{\mathcal{H}}} < \frac{n\phi(h_K)}{\ln n}, \\ \frac{(\ln n)^2}{nh_H\phi(h_K)} &< \ln q_n^{S_{\mathcal{H}}} + \ln q_n^{\Theta_{\mathcal{H}}} < \frac{nh_H\phi(h_K)}{\ln n}, \end{aligned}$$

and for some $\lambda > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\lambda} h_H = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{(\lambda+1)/2} (q_n^{S_{\mathcal{H}}} q_n^{\Theta_{\mathcal{H}}})^{1-m} < \infty, \quad \text{for some } m > 1.$$

Theorem 2.1. *Under assumptions (U1)-(U5), we have*

$$\sup_{\theta \in \Theta_{\mathcal{H}}} \sup_{x \in S_{\mathcal{H}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} |\widehat{h}_{\theta}^x(y) - h_{\theta}^x(y)| = O(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + O_{a.co.} \left(\sqrt{\frac{\ln q_n^{S_{\mathcal{H}}} + \ln q_n^{\Theta_{\mathcal{H}}}}{nh_H\phi(h_K)}} \right).$$

Proof of Theorem 2.1.

The proof can be deduced from Lemmas 2.2-2.4, also, Corollary 2.5, which is given as follow :

Lemma 2.2. *Under assumptions (U1),(U2) and (H4), we obtain*

$$\sup_{\theta \in \Theta_{\mathcal{H}}} \sup_{x \in S_{\mathcal{H}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} |F_{\theta}^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_{\theta, N}^x(y)]| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2})$$

and

$$\sup_{\theta \in \Theta_{\mathcal{H}}} \sup_{x \in S_{\mathcal{H}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} |f_{\theta}^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{f}_{\theta, N}^x(y)]| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}).$$

Estimation of the conditional hazard function

Lemma 2.3. Under assumptions (U1), (U3), (U4)(i) and (U5), we obtain

$$\sup_{\theta \in \Theta_{\mathcal{H}}} \sup_{x \in S_{\mathcal{H}}} |1 - \widehat{g}_{\theta, D}^x| = O_{a.co.} \left(\sqrt{\frac{\ln q_n^{S_{\mathcal{H}}} + \ln q_n^{\Theta_{\mathcal{H}}}}{n\phi(h_K)}} \right) \text{ and } \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\inf_{\theta \in \Theta_{\mathcal{H}}} \inf_{x \in S_{\mathcal{H}}} \widehat{g}_{\theta, D}^x < 1/2 \right) < \infty.$$

Lemma 2.4. Under assumptions (U1)-(U5), we obtain

$$\sup_{\theta \in \Theta_{\mathcal{H}}} \sup_{x \in S_{\mathcal{H}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} |\widehat{F}_{\theta, N}^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_{\theta, N}^x(y)]| = O_{a.co.} \left(\sqrt{\frac{\ln q_n^{S_{\mathcal{H}}} + \ln q_n^{\Theta_{\mathcal{H}}}}{n\phi(h_K)}} \right)$$

and

$$\sup_{\theta \in \Theta_{\mathcal{H}}} \sup_{x \in S_{\mathcal{H}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} |\widehat{f}_{\theta, N}^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{f}_{\theta, N}^x(y)]| = O_{a.co.} \left(\sqrt{\frac{\ln q_n^{S_{\mathcal{H}}} + \ln q_n^{\Theta_{\mathcal{H}}}}{nh_H\phi(h_K)}} \right).$$

Corollary 2.5. Under the conditions of Theorem 2.1, we obtain

$$\exists \epsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\inf_{\theta \in \Theta_{\mathcal{H}}} \inf_{x \in S_{\mathcal{H}}} \inf_{y \in S_{\mathbb{R}}} |1 - \widehat{F}_{\theta}^x(y)| < \epsilon \right) < \infty.$$

Références

- Attaoui, S., A. Laksaci, et E. O. Said (2011). A note on the conditional density estimate in the single functional index model. *Statistics & probability letters* 81(1), 45–53.
- Baïllo, A. et A. Grané (2009). Local linear regression for functional predictor and scalar response. *Journal of Multivariate Analysis* 100(1), 102–111.
- Barrientos-Marin, J., F. Ferraty, et P. Vieu (2010). Locally modelled regression and functional data. *Journal of Nonparametric Statistics* 22(5), 617–632.
- Demongeot, J., A. Laksaci, F. Madani, et M. Rachdi (2013). Functional data : local linear estimation of the conditional density and its application. *Statistics* 47(1), 26–44.
- Ferraty, F., A. Peuch, et P. Vieu (2003). Modèle à indice fonctionnel simple. *Comptes Rendus Mathématique* 336(12), 1025–1028.
- Ferraty, F., A. Rahbi, et P. Vieu (2008). Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle. *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées* 53(1), 1–18.
- Hadjila, T. et A. S. Ahmed (2018). Estimation and simulation of conditional hazard function in the quasi-associated framework when the observations are linked via a functional single-index structure. *Communications in Statistics-Theory and Methods* 47(4), 816–838.
- Massim, I. et B. Mechab (2016). Local linear estimation of the conditional hazard function. *International Journal of Statistics and Economics* 17, 1–11.
- Quintela-Del-Río, A. (2008). Hazard function given a functional variable : Non-parametric estimation under strong mixing conditions. *Journal of Nonparametric Statistics* 20(5), 413–430.

Summary

In this paper, we present a nonparametric estimate of the conditional hazard function by the local linear approach of a scalar response variable given a hilbertian random variable via the single-index structure. We establish the uniform consistency (with rate) of the constructed estimator under some general conditions.

Modèles à volatilité stochastique avec effet de levier, erreurs asymétriques et à queues épaisses

Yasmina Messaci*, Kamel Boukhetala**

* Faculté de Mathématiques. USTHB. BP 32, El-Alia 16111 Alger.
ymessaci@usthb.dz,

** Laboratoire MSTD-Faculté de Mathématiques. USTHB. BP 32, El-Alia 16111 Alger.
km_boukhetala@yahoo.fr,

Résumé. Dans ce travail, nous présentons une méthode d'estimation bayésienne des modèles à volatilité stochastique avec effet de levier et avec des erreurs asymétriques et/ou leptokurtiques. Ce type de modèles tient compte des principales caractéristiques empiriques des séries de rendements financiers. L'approche choisie modélise le couple d'erreurs (associées au rendement et à la volatilité) par des lois bivariées skew normal et skew-t. Le logiciel WinBUGS est utilisé pour les simulations MCMC nécessaires à l'estimation des paramètres. L'efficacité de cette méthode est testée en utilisant des séries de données financières simulées et réelles.

1 Introduction

Les modèles à volatilité stochastique (Stochastic Volatility : SV) sont très largement utilisés pour la modélisation de l'évolution dynamique de la volatilité des séries à haute fréquence en finance. C'est notamment un moyen de décrire la variabilité dans le temps de la volatilité des rendements d'actifs financiers. Il offre une alternative aux modèles du type ARCH. Car plus réaliste et plus flexible pour la modélisation des séries temporelles financières.

Le modèle, sous sa forme basique avec erreurs gaussiennes, s'écrit :

$$y_t = e^{h_t/2} \varepsilon_t \quad t \geq 1 \quad (1)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \sigma_\eta \eta_t \quad (2)$$

$$h_1 \sim N(\mu, \sigma^2(1 - \phi^2)) \quad (3)$$

- h_t est la log volatilité au temps t qui est supposée être un processus stationnaire ($|\phi| < 1$).
- ε_t et η_t sont des normales standards non corrélées entre elles et non corrélées avec h_1 .
- ϕ est la persistance de la volatilité.
- σ_η est la volatilité de la log volatilité.

Modèles à volatilité stochastique avec effet de levier

Cependant, les études empiriques effectuées sur les séries de rendements d'actifs financiers, montrent que ces dernières possèdent un certain nombre de caractéristiques non prises en compte par le modèle précédent. Les caractéristiques les plus importantes sont notamment un excès de kurtosis et une asymétrie aussi bien pour les rendements que pour la volatilité, une hétéroscédasticité telle que la volatilité des rendements change dans le temps ainsi que des regroupements de volatilité (volatility clustering) exprimé par des périodes de haute et d'autres de basse volatilité. Cette dernière est connue sous le nom d'effet levier. Il est mesuré par le coefficient de corrélation des deux termes d'erreur ε_t (erreur de mesure) et η_t (erreur d'état) qui sont dans ce cas dépendants. On parle alors de modèles à volatilité stochastique asymétrique ou avec leverage (SVL).

Il est défini comme suit (Tsiotas, 2012) :

$$y_t = e^{h_t/2} \varepsilon_t, t \geq 1 \quad (4)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \sigma_\eta \eta_t \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim N(0, \Sigma), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Une modification naturelle du modèle basique, pour tenir compte de ces caractéristiques, consiste à remplacer la distribution normale de l'erreur des rendements et/ou la volatilité par des distributions asymétriques et/ou à queues lourdes. Plusieurs distributions ont été utilisées dans la littérature telles que la loi normale asymétrique ou skew normal : SN (Azzalini, 2013) si la série des rendements présente une asymétrie ou une loi de Student (t) dans le cas où elle présente une queue importante, et une Student asymétrique (skew t : ST) si la série présente les deux (Abanto-Valle et al., 2015). Ainsi de nouveaux modèles ont été introduits dans la littérature tels que : les modèles SV-SN, SV-t et SV-ST. Par exemple, Abanto-Valle et al. (2015) se sont intéressés au modèle SV-ST. Mayer et Yu (2000) ont étudié le modèle SVL en modélisant la paire (ε_t, η_t) par une distribution normale bivariée. Asai (2008) a modélisé (ε_t, η_t) en utilisant respectivement une distribution de Student et normale, tandis que Choy et al. (2009) ont évalué ce modèle en utilisant une distribution de Student bivariée. Wang et al. (2011) ont développé un modèle SV à queue lourde avec effet de levier, où une distribution t bivariée est utilisée. Tsiotas (2012) a présenté différents modèles SV qui intégraient les caractéristiques des séries financières telles que le kurtosis, l'asymétrie et l'asymétrie de la volatilité en utilisant trois distributions alternatives : la distribution de Student non centrée, la distribution Skew normale ainsi que la distribution Skew-t, avec et sans effet de levier.

Dans notre travail nous nous intéressons à l'estimation bayésienne des paramètres des modèles SVL avec erreurs asymétriques et/ou leptokurtiques. Nous proposons une approche où le couple d'erreurs (ε_t, η_t) est modélisé par des lois bivariées skew normal et skew-t particulières. Ce choix permet, via les paramétrisations utilisées, de traiter dans le premier cas, le modèle SVL avec erreur de mesure asymétrique et erreur d'état symétrique, et dans le deuxième cas le même modèle avec erreur de mesure asymétrique et leptokurtique et erreur d'état symétrique et leptokurtique.

Par ailleurs, elles permettent aussi une implémentation aisée des algorithmes de simulation MCMC en utilisant le logiciel WinBUGS (Lunn et al., 2000). Un autre avantage de cette approche est le calcul direct du coefficient de corrélation entre les deux erreurs. Enfin, nous

testons l'efficience de cette méthode sur des données simulées d'une part et sur des données réelles d'autre part.

Références

- Abanto-Valle, C., V. Lachos, et D. K. Dey (2015). Bayesian estimation of a skew-student-t stochastic volatility model. *Methodology and Computing in Applied Probability* 17(3), 721.
- Azzalini, A. (2013). *The skew-normal and related families*, Volume 3. Cambridge University Press.
- Choy, B., W. Y. Wan, et C. M. Chan (2009). Bayesian student-t stochastic volatility models via scale mixtures.
- Lunn, D. J., A. Thomas, N. Best, et D. Spiegelhalter (2000). Winbugs &ndash ; a bayesian modelling framework : Concepts, structure, and extensibility. *Statistics and Computing* 10(4), 325–337.
- Tsionas, G. (2012). On generalised asymmetric stochastic volatility models. *Computational Statistics & Data Analysis* 56(1), 151–172.
- Wang, J. J., J. S. Chan, et S. B. Choy (2011). Stochastic volatility models with leverage and heavy-tailed distributions : A bayesian approach using scale mixtures. *Computational Statistics & Data Analysis* 55(1), 852–862.

Summary

In this work, we develop a Bayesian approach for estimation in stochastic volatility models with leverage effect, taking in account asymmetric and excess kurtosis for the innovations. The empirical studies show that this model is more realist than the basic stochastic volatility models with normal and independent errors. We model the joint distribution of errors by a bivariate skew normal and a bivariate skew-t distributions. The WinBUGS software is used for the MCMC simulations. This method is applied to simulated and real data.

Efficient estimation in semiparametric PINAR(p) model

Mohamed SADOUN*, Mohamed BENTARZI**

*BP 32, El-Alia 16111 Alger
mo-hamedsadoun@outlook.fr,
**BP 32, El-Alia 16111 Alger
mohamedbentarzi@yahoo.com

Abstract. The efficient estimation problem of a semi-parametric Periodic Integer-Valued Autoregressive of arbitrary order (PINAR(p)) model is considered. The unspecified distribution of the innovation process of this model is supposed to satisfy only some mild technical assumptions. We therefore provide efficient estimates for both parameters of the model, namely a periodic autoregressive parameter and a periodic probability law of the innovation non-negative integer values process which is seen as an infinite dimensional parameter. The performances of these efficient estimations are shown through intensive simulations studies and an application on real data set.

Résumé. Ce travail se focalise sur le problème de l'estimation efficace, dans un cadre semi-paramétrique, pour les paramètres du modèle autorégressif à valeurs entières non-négatives d'ordre arbitraire ($PINAR_S(p)$) à coefficients périodiques. Notre estimateur est vu comme étant un estimateur de dimension infinie basé sur le principe de la maximisation de la vraisemblance semi paramétrique où la distribution d'innovation est totalement inconnue mais satisfait seulement à certaines conditions générale. Les performances de ces estimateurs efficaces sont montrées via une étude de simulation et une étude sur données réelles.

1 Introduction

It is well known, nowadays, that many economic, financial and environmental integer-valued time series, encountered in practice, exhibit a periodical autocorrelation structure (as examples, *The daytime and nighttime road accidents in Schiphol area, in the Netherlands for the year 2001*, studied by Pedeli and Karlis (2011), *Number of cases of campylobacteriosis infections time series* studied by Ferland *et al* (2006), *Monthly counts of claims of short-term disability benefits* studied, separately by Freeland (1998), Zhu and Joe (2006), Fokianos (2012) and recently Bourguignon *et al* (2016)). In this communication, we consider a periodic integer-valued autoregressive with arbitrary-order p , ($PINAR(p)$) model where the discrete probability distribution of its innovation process is supposed unspecified but satisfies only some mild technical assumptions and we are mainly interested in the semiparametric estimation of both parameters of the model, namely a periodic autoregressive parameters and a periodic discrete probability law of the non-negative integer values innovation process which is seen as an infinite dimensional parameter. Indeed, we establish, while following the methodology of

Drost *et al* (2009), an efficient semiparametric estimator on the one hand for the periodic autoregressive parameters and on the other hand for the unspecified periodic distribution of the innovation process. Our estimator might be viewed as an efficient semi-parametric maximum likelihood estimator ($SPMLE$) which extends the one obtained by Drost *et al* (2009) for the time-invariant $INAR(p)$ to the periodic one.

2 Definitions and Main Background Properties

Briefly, a periodically correlated, in the sense of Gladyshev (1963) with period S (where S is a strictly positive integer; $S \geq 2$), integer-valued process $\{y_t; t \in Z\}$, is said to satisfy a semiparametric Periodic Integer-Valued Autoregressive of p -order, ($PINAR_S(p)$) model, if it is a solution of the following non linear difference stochastic equation :

$$y_t = \sum_{i=1}^p \varphi_{t,i} \circ y_{t-i} + \varepsilon_t, t \in Z, \quad (2.1a)$$

where the underlying non-negative integer-valued process $\{y_t, t \in Z\}$, is a periodically correlated, with the positive integer period S ($S \geq 2$) and the innovation process, $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$, is a sequence of periodic sequence of independent non-negative integer-valued random variables, with certain probability mass function $g_t(\cdot)$ which is supposed unspecified but satisfies only some mild technical assumptions. The column vector parameters $\varphi_t = (\varphi_{t,1}, \varphi_{t,2}, \dots, \varphi_{t,p})'$ and the infinite dimensional parameter g_t are periodic, with respect to t , with period S ($S \geq 2$), where S is the smallest positive integer such that $\varphi_{t+rS} = \varphi_t$ and $g_{t+rS} = g_t$. Finally the symbol " \circ " stands, as usual, for the thinning *Steutel-Van Harn* (1979) operator, which is defined, for the integer-valued stochastic process y_{t-i} and any counting periodic sequences of independent nonnegative integer-valued random variables $\{Y_{k,t,i}, k \in N, t \in Z\}$ where $P(Y_{k,t,i} = 1) = 1 - P(Y_{k,t,i} = 0) = \varphi_{t,i} \in [0, 1], i = 1, \dots, p$ by

$$\varphi_{t,i} \circ y_{t-i} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{y_{t-i}} Y_{k,t,i}, & \text{if } y_{t-i} > 0, \\ 0, & \text{if } y_{t-i} = 0. \end{cases} \quad (2.1b)$$

Where the sequences $\{Y_{k,t,i}\}_{k \in N, t \in Z, i=1, \dots, p}$ are independents. Moreover, the innovation process $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ is supposed to be independent of y_{t-i} and $\varphi_{t,i} \circ y_{t-i}$. It is worth noting that any properties of the periodic model (2.1) and the CLS and CML Estimations, of its parameters has not been addressed before, except in the case $p = 2$ for the CML method in *Moriña et al* (2011), and in the particular parametric case.

Throughout the paper, we make the following assumptions :

Assumption (A.1). Let $\tilde{\mathcal{G}}_s$ denotes the set of all probability measures on Z_+ . We suppose that G_s is the distribution of $\varepsilon_{s+\tau S}$ with mass function $g_s(\cdot)$ such that : $G_s = \mathcal{L}(\varepsilon_s) \in \tilde{\mathcal{G}}_s = \{G_s \in \tilde{\mathcal{G}}_s : 0 < G_s(0) = P(\varepsilon_s = 0) = g_s(0) < 1\}$. Furthermore, we note that $E(\varepsilon_s) = \mu_{G_s} < \infty$ and $E(\varepsilon_s^2) < \infty \Rightarrow \sigma_{G_s} < \infty, s = 1, \dots, S$.

Assumption (A.2). The support, A , of the periodic discrete law, G_s , is compacted into $A = \{u_{s-}, \dots, u_{s+}\}, s = 1, \dots, S$. Such as :

$$u_{s-} = \sup(0, \min_{\tau=0, \dots, m-1} (y_{s+\tau S} - \sum_{i=1}^p \varphi_{s,i} y_{s(i)+\tau S}))$$

$$u_{s+} = \max_{\tau=0, \dots, m-1} (y_{s+\tau S})$$

Assumption (A.3). Our parameter space, $[0, 1]^p \times \mathcal{G}_s$, is viewed as a subset of a Banach space of the form $R_+^p \times l^1(Z_+)$. We specify the chosen topology, identify $G_s \in \mathcal{G}_s$ with its point periodic mass function $k \in Z_+, g_s(k) = G_s\{k\}$ and view the $g_s(k)$ as an element of the Banach space $l^1(Z_+)$, i.e., the space of real-valued sequences $(a_k)_{k \in Z_+}$ such as

$\|a\|_1 = \sum_{k \in Z_+} |a_k| < \infty$. In what follows, the space of the linear applications of \mathcal{G}_s in \mathcal{G}_s , $\text{lin}(\mathcal{G}_s)$ and its subsets are always regarded as subsets of $l^1(Z_+)$.

Assumption (A.4). $G_s = (g_s(k))_{k \in N}$, and we write $\|G_s\|_1 = \|g_s\|_1$. $[0, 1]$ is equipped by the Euclidian topology, and equip the product space $R_+ \times l^1(Z_+)$ with the product topology, which can be metrized by the sum-norm $\|(\varphi_s, G_s)\| = |\varphi_s| + \|G_s\|_1$.

Assumption (A.5). The strict periodic stationarity condition $\sum_{i=1}^p \prod_{s=1}^S \varphi_{s,i} < 1$, is supposed verified.

3 Estimator, Consistency and Efficiency

The next proposition 3.1, which follows by standard arguments, states that any conditional maximum likelihood estimator is consistent.

Proposition 3.1. *For all $t \in Z_+$ where $t = s + \tau S$, $\tau \in Z_+$, $S \in N^*$ with $\forall s \in \{1, \dots, S\}$ being fixed, then $\forall \underline{\theta}_{s,0} = (\varphi_{s,0}, G_{s,0}) \in [0, 1]^p \times \mathcal{G}_s$ a "truth" parameter, and all initial probability measures ν_0 on Z_+ , any SPMLE $(\hat{\varphi}_{s,m}, \hat{G}_{s,m}) = (\hat{\varphi}_{s,m}, \hat{g}_{s,m}(u_{s-}), \dots, \hat{g}_{s,m}(u_{s+}))$ of (φ_s, G_s) is consistent in the following sense :*

$$\hat{\varphi}_{s,n} \xrightarrow{p} \varphi_{s,0} \text{ and } \sum_{e=0}^{\infty} |\hat{g}_{s,m}(e) - g_{s,0}(e)| \xrightarrow{p} 0 \text{ under } H_g^{(n)}(\underline{\theta}_0)$$

The following proposition is on the one hand an immediate consequence of an infinite dimensional analogue of the famous Hájek-Le Cam convolution theorem (1972) (see, for example, Bickel *et al* (1998), theorem 5.2.1), and the other hand establishes the regularity of our SPMLE $\hat{\theta}_n$ estimator.

Proposition 3.2. *Assuming that A.1 – A.5 hold, then we have, For all $t \in Z_+$ where $t = s + \tau S$, $\tau \in Z_+$, $S \in N^*$ with $\forall s \in \{1, \dots, S\}$ being fixed, then,*

i) Infinite dimensional Hájek-Le Cam convolution theorem

Let $\underline{\theta}_s = (\varphi_s, G_s) \in [0, 1]^p \times \mathcal{G}_s$ and let $\{Z_m\}$ be an estimator of $\underline{\theta}_s$ which is regular under $H_g^{(n)}(\underline{\theta}_s)$, In particular :

$$\mathcal{L}\left(\sqrt{m}\left(Z_m - (\varphi_s, G_s)\right) \mid H_g^{(n)}(\underline{\theta}_s)\right) w \rightarrow \mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{\varphi_s, G_s, (Z_n)_{m \in N}},$$

then there are independent random elements $L_{\underline{\theta}_s}$, which is a centred Gaussian process only depending on the model, and $N_{\underline{\theta}_s, (Z_n)_{m \in N}}$, which generally depends on both the model and the estimator, such that :

$$\mathcal{Z}_{\varphi_s, G_s, (Z_n)_{m \in N}} = \mathcal{L}\left(L_{\underline{\theta}_s} + N_{\underline{\theta}_s, (Z_n)_{m \in N}}\right).$$

ii) Regularity of SPMLE

Let $\underline{\theta}_s = (\varphi_s, G_s) \in [0, 1]^p \times \mathcal{G}_s$. Any SPMLE $\hat{\underline{\theta}}_{s,m} = (\hat{\varphi}_{s,m}, \hat{G}_{s,m})_{m \in Z_+}$ is regular estimator of (φ_s, G_s) under $H_g^{(n)}(\underline{\theta}_s)$.

Proposition 3.3. *Assuming that A.1–A.5 hold, then we have, Any SPMLE $\widehat{\theta}_{s,m} = \left(\widehat{\varphi}_{s,m}, \widehat{G}_{s,m}\right)_{m \in Z_+}$ is an efficient estimator of $\left(\varphi_s, G_s\right)$ under $H_g^{(n)}(\theta_{s,0})$. So we have (see proposition 4.1), for all $\theta_{s,0} = \left(\varphi_{s,0}, G_{s,0}\right) \in [0, 1]^p \times \mathcal{G}_s$,*

$$\mathcal{L}\left(L_{\theta_{s,0}}\right) = \mathcal{L}\left(-\Psi_{s,\theta_{s,0}}^{-1} \Delta_{s,\theta_{s,0}}^{\theta_{s,0}}\right).$$

Références

- [1] Bickel, P. J. Klaassen, C.A.J. and Wellner, J.A. (1998). Efficient and adaptive estimation for semiparametric models (2nd edn). *Berlin : Springer*.
- [2] Bourguignon, M. Vasconcellos, K L. P. Reisen, V. A. and Ispany, M. (2016). A Poisson $INAR(1)$ process with a seasonal structure. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 86(2) : 373 – 387.
- [3] Drost, C. van den Akker, R. and Werker, B. (2009). Efficient estimation of auto-regression parameters and innovation distributions for semiparametric integer-valued $AR(p)$ models. *J. R. Statist. Soc. B* 71, Part 2, pp. 467 – 485.
- [4] Ferland, R., Latour, A. and Oraichi, D. (2006). Integer-Valued GARCH Process. *J. Time Ser. Anal.*, Vol. 27. No. 6, 923 – 942.
- [5] Fokianos K, (2012). *Count Time Series Models*. Time Series Analysis : Methods and Applications, Vol. 30.
- [6] Freeland R. K, (1998). *Statistical analysis of discrete-time series with applications to the analysis of workers compensation claims data* [Ph.D. thesis]. Canada : University of British Columbia.
- [7] Gladyshev, E.G. (1963). Periodically and Almost-Periodically Correlated Random Processes With Continuous Time Parameter. *Theory Probab & its App*. 8 (2) : 173 – 177.
- [8] Hájek, J. (1972). Local Asymptotic Minimax and Admissibility in Estimation. *Proceeding of Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley, CA : University of California Press, Vol.1.pp. 175 – 194.
- [9] Moriña, D. Puig, P. Rios, J. Viella, A. and Trilla, A (2011). A statistical model for hospital admissions caused by seasonal diseases. *Journal of statistics in Medecine*. Volume 30, Issue26,Pages 3125 – 3136.
- [10] Steutel, F. W. and Van Harn, K. (1979). Discrete analogues of self-decomposability and stability. *The Annals of Probability*, Vol. 7, No. 5, 893 – 899.
- [11] Pedeli, X. and Karlis, D. (2011). A bivariate $INAR(1)$ process with application. *Statistical Modeling : SAGE Journals*. Volume : 11 issue : 4, page(s) :325 – 349.
- [12] Zhu, R. and Joe, H. (2006). Modelling Count Data Time Series with Markov Processes Based on Binomial Thinning . *Journal of Time Series Analysis*, 27, Issue 5, pp. 725–738.

Options à barrière discrète

Nadjla Zehani*, Rim Zehani**

*Université Chadli Bendjedid, El Tarf, Algérie
zehaninadjla@yahoo.fr

**Université Badji Mokhtar, Annaba, Algérie
rim_loubna@yahoo.fr

Résumé. Dans la pratique, la plupart des options à barrière sont discrètement surveillées à des dates précises. Cet article étudie le problème d'évaluation d'options à barrière discrète, nous allons présentées les étapes nécessaires afin d'obtenir une formule explicite pour ce type d'option en suivant le raisonnement risque-neutre.

1 Introduction

En 1973, Black-Scholes ont découvert la première formule d'évaluation des options sur actions. Celle-ci a permis une meilleure compréhension de ces outils financiers tant au niveau des stratégies d'investissements que des couvertures de portefeuilles. Elle s'appliquait aussi bien aux options standards qu'aux options à barrière. Les options à barrière sont un nom générique donné aux produits dérivés dont les pay-offs dépendent du fait que le sous-jacent a atteint ou non un niveau donné (ou barrière) durant la durée de vie de l'option. Il existe deux catégories : les options à barrière désactivantes "Out" et les options à barrière activantes "In". Généralement, l'actif sous-jacent est observé en temps continu par rapport à la barrière. Cependant dans la pratique, la plupart des options à barrière sont discrètement surveillées à des dates précises. Ces options sont appelées des options à barrière discrète.

Dans cet article, nous allons commencé par donner le prix d'un actif sous-jacent contrôlé discrètement puis nous démontrons la méthode employer afin d'obtenir une forme explicite d'une option à barrière discrète.

2 Evaluation d'Options à barrière discrète

Nous supposons que le prix de l'actif est contrôlé discrètement seulement aux instants $t_n = n\Delta t$ avec $\Delta t = \frac{T}{m}$ et $1 \leq n \leq m$, où T est la date d'échéance et $m - 1$ est le nombre de points de contrôle ($n = 1, \dots, m - 1$). Sous la mesure de probabilité \mathbb{P}^* , au n^{th} point de contrôle, le prix de l'actif sous-jacent est donné par :

$$\begin{aligned} S_n &= S_0 \exp \left(\mu n \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^n Z_i \right) \\ &= S_0 \exp \left(\sigma \sqrt{\Delta t} W_n \right) \text{ avec } n = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (1)$$

Options à barrière discrète

Avec,

- W_n représente le pas aléatoire, donné par : $W_n = \sum_{i=1}^n \left(Z_i + \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\Delta t} \right)$,
 - μ est le drift, donné par : $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$,
 - Z_i sont des variables aléatoires normales standards indépendantes.
- Par analogie, le prix d'une option discrète Up and In, sous \mathbb{P}^* , est :

$$V_m(B) = \mathbb{E}^* \left[e^{-rT} (S_m - K)^+ 1_{\{\tilde{\tau}(B,S) \leq m\}} \right] \quad (2)$$

Pour calculer ce prix, nous avons besoin de la proposition suivante :

Proposition 1 (Théorème de Girsanov à temps discret) *Pour toute mesure de probabilité \mathbb{P}^* , soit $\hat{\mathbb{P}}$ définie par :*

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}^*} = \exp \left(\sum_{i=1}^m a_i Z_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m a_i^2 \right) \quad (3)$$

Où $a_i (i=1, \dots, m)$ sont des constantes arbitraires et Z_i sont des variables aléatoires normales standards indépendantes sous la mesure de probabilité \mathbb{P} .

Alors sous la mesure de probabilité arbitraire $\hat{\mathbb{P}}$, pour tout $1 \leq i \leq m$, $\hat{Z}_i = Z_i - a_i$ est une variable aléatoire normale standard.

Ainsi, notre prix devient :

$$\begin{aligned} V_m(B) &= \mathbb{E}^* \left[e^{-rT} (S_m - K) 1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}} \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[e^{-rT} S_m 1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}} \right] - K e^{-rT} \mathbb{E}^* \left[1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}} \right] \\ &= I - K e^{-rT} \mathbb{P}^* [S_m \geq K, \tilde{\tau}(B, S) \leq m] \end{aligned} \quad (4)$$

En utilisant le théorème discret de Girsanov, nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{E}^* \left[e^{-rT} S_m 1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}} \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[e^{-rT} \left(S_0 \exp \left(\mu m \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^m Z_i \right) \right) 1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}} \right] \\ &= S_0 \mathbb{E}^* \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \frac{a_i^2}{2} + \sum_{i=1}^m Z_i a_i \right) 1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}} \right] \\ &= S_0 \hat{\mathbb{E}} \left[1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}} \right] \\ &= S_0 \hat{\mathbb{P}} [S_m \geq K, \tilde{\tau}(B, S) \leq m] \end{aligned} \quad (5)$$

avec, $a_i = \sigma \sqrt{\Delta t}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} V_m(B) &= S_0 \hat{\mathbb{P}} [S_m \geq K, \tilde{\tau}(B, S) \leq m] - K e^{-rT} \mathbb{P}^* [S_m \geq K, \tilde{\tau}(B, S) \leq m] \\ &= S_0 \hat{\mathbb{P}} \left[W_m \geq \frac{\ln \left(\frac{K}{S_0} \right)}{\sigma \sqrt{\Delta t}}, \tilde{\tau} \left(\frac{a}{\sigma \sqrt{T}}, W \right) \leq m \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - Ke^{-rT} \mathbb{P}^* \left[W_m \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tilde{\tau}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}}, W\right) \leq m \right] \\
 & = S_0 \hat{\mathbb{P}} \left[W_m \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}} \sqrt{m}, \tilde{\tau}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}}, W\right) \leq m \right] \\
 & - Ke^{-rT} \mathbb{P}^* \left[W_m \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}} \sqrt{m}, \tilde{\tau}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}}, W\right) \leq m \right] \tag{6}
 \end{aligned}$$

avec, $a = \ln\left(\frac{B}{S_0}\right)$

Où sous $\hat{\mathbb{P}}$, $W_m = \sum_{i=1}^m \left(\hat{Z}_i + \left(\frac{\mu+\sigma^2}{\sigma}\right) \left(\frac{\sqrt{T}}{m}\right) \right)$ et sous \mathbb{P}^* , $W_m = \sum_{i=1}^m \left(Z_i + \left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \left(\frac{\sqrt{T}}{m}\right) \right)$ tels que \hat{Z}_i et Z_i sont des variables aléatoires normales standards indépendantes.

Maintenant, nous aurons besoin du Corollaire et Proposition suivants :

Corollaire 1 Pour toute constante $b \geq y$ et $b > 0$ quand $m \rightarrow \infty$

$$\mathbb{P}(U_m > y\sqrt{m}, \tilde{\tau}(b, U) \leq m) = \mathbb{P}(U(1) \geq y; \tau(b + \beta/\sqrt{m}, U) \leq 1) + o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \tag{7}$$

Ainsi, avec $y = \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)\sigma\sqrt{T}$ et $b = a\sigma\sqrt{T} = \ln\left(\frac{B}{S_0}\right)\sigma\sqrt{T} \geq y$ ($m \rightarrow \infty$).

Le prix $V_m(B)$ devient :

$$\begin{aligned}
 V_m(B) & = S_0 \hat{\mathbb{P}} \left[W_{\frac{(\mu+\sigma^2)\sqrt{T}}{\sigma}}(1) \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}, \tau\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\beta}{\sqrt{m}}, W_{\frac{(\mu+\sigma^2)\sqrt{T}}{\sigma}}\right) \leq 1 \right] \\
 & - Ke^{-rT} \mathbb{P}^* \left[W_{\frac{\mu\sqrt{T}}{\sigma}}(1) \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}, \tau\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\beta}{\sqrt{m}}, W_{\frac{\mu\sqrt{T}}{\sigma}}\right) \leq 1 \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \tag{8}
 \end{aligned}$$

Où $W_c(t)$ désigne un Mouvement Brownien avec drift c et une variance 1.

Proposition 2 (Propriété Rescaling) Par la proposition suivante, pour le Mouvement Brownien avec drift (au) et variance 1, nous avons :

$$\mathbb{P}(W_{au}(1) \geq x, \tau(c, W_{au}) \leq 1) = \mathbb{P}(W_u(a^2) \geq xa, \tau(ac, W_u) \leq a^2) \tag{9}$$

En utilisant cette dernière et les notations suivantes $a = \sqrt{T}$, $u = \frac{(\mu+\sigma^2)}{\sigma} / \frac{\mu}{\sigma}$, $x = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$ et $c = \frac{a}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\beta}{\sqrt{m}}$, notre prix s'écrit :

$$V_m(B) = S_0 \hat{\mathbb{P}} \left[W_{\frac{(\mu+\sigma^2)}{\sigma}}(T) \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma}, \tau\left(\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\beta}{\sqrt{m}}\right)\sqrt{T}, W_{\frac{(\mu+\sigma^2)}{\sigma}}\right) \leq T \right]$$

Options à barrière discrète

$$\begin{aligned}
& -Ke^{-rT} \mathbb{P}^* \left[W_{\frac{\mu}{\sigma}}(T) \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma}, \tau \left(\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\beta}{\sqrt{m}} \right) \sqrt{T}, W_{\frac{\mu}{\sigma}} \right) \leq T \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \\
& = S_0 \hat{\mathbb{P}} \left[W_{\frac{(\mu+\sigma^2)}{\sigma}}(T) \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma}, \tau \left(\frac{a}{\sigma} + \beta \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{m}}, W_{\frac{(\mu+\sigma^2)}{\sigma}} \right) \leq T \right] \\
& -Ke^{-rT} \mathbb{P}^* \left[W_{\frac{\mu}{\sigma}}(T) \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma}, \tau \left(\frac{a}{\sigma} + \beta \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{m}}, W_{\frac{\mu}{\sigma}} \right) \leq T \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \quad (10)
\end{aligned}$$

Puis, nous avons :

$$\tau \left(\frac{a}{\sigma} + \beta \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{m}}, W \right) \leq T \iff W \geq \frac{a}{\sigma} + \beta \sqrt{\frac{T}{m}} \iff S \geq B \exp \left(\sigma \beta \sqrt{\frac{T}{m}} \right)$$

Donc,

$$\tau \left(B \exp \left(\sigma \beta \sqrt{\frac{T}{m}} \right), S \right) \leq T \quad (11)$$

Aussi,

$$W(T) \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma} \iff S_0 \exp(\sigma W(T)) \geq K \quad (12)$$

Nous aurons au final, le prix d'une option à barrière discrète Call Up and In :

$$\begin{aligned}
V_m(B) & = S_0 \hat{\mathbb{P}} \left[S_0 e^{(\mu+\sigma^2)T + \sigma B T} \geq K, \tau \left(B e^{\beta \sqrt{\frac{T}{m}}}, S \right) \leq T \right] \\
& -Ke^{-rT} \mathbb{P}^* \left[S_0 e^{\mu T + \sigma B T} \geq K, \tau \left(B e^{\beta \sqrt{\frac{T}{m}}}, S \right) \leq T \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \quad (13)
\end{aligned}$$

Références

Broadie, M., P. Glasserman, and S. Kou (1997). A continuity correction for discrete barrier options. *Math. Finance* 1, 325-349.

Hull, J.C (2005). *Options, Futures, and Other Derivative Securities, fourth ed.* New York : Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Kou, S. (2003). On pricing of discrete barrier options. *Statistica Sinica* 13, 955-964.

Kou, S. (2008). Discrete Barrier and Lookback Options. *Handbooks in OR MS* 15, 343-373.

Summary

In practice, most of the barrier options are discretely monitored on specific dates. This article studies the problem of evaluating discrete barrier options. We will present the necessary steps to obtain an explicit formula for this type of option by following the risk-neutral reasoning.

Estimation de l'indice des valeurs extrêmes en présence de censure Etude de cas : Les durées de chômage en Algérie

ZOUADI Nihad, SAIDI Ghania

Laboratoire de Modélisation des Processus Stochastiques, *Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Economie Appliquée*, ENSSEA. Pôle universitaire de Koléa

zouadi_nihad@yahoo.fr
ghsaiidi@yahoo.fr

Résumé :

L'objectif de ce travail est d'analyser et comparer le comportement des estimateurs de l'indice des valeurs extrêmes (IVE), en prenant en considération la présence des données censurées aléatoirement à droite. Nous proposons d'améliorer la convergence de l'estimateur des moments, et cela en adaptant la fonction de vraisemblance à la censure pour une distribution de Pareto de paramètre $\xi > 0$. Le calcul des estimateurs des paramètres de forme et de dispersion est fait en appliquant l'algorithme de Newton Raphson.

Nous évaluons la performance en termes de convergence de cet estimateur au moyen de simulations en le comparant avec d'autres estimateurs non paramétriques (Hill et Moments). Nous illustrons l'estimateur amélioré sur un jeu de données réelles portant sur les durées de chômage en Algérie.

Introduction :

La Théorie des Valeurs Extrêmes (TVE), apparue entre 1920 et 1940, grâce à Fréchet, Fisher et Tippett, Gumbel et Gnedenko, joue un rôle de plus en plus important dans la modélisation des événements rares (événements à caractère imprévisible ayant une faible probabilité d'apparition). Elle a pour but d'étudier la loi du maximum d'une suite de variables aléatoires réelles même si, et spécialement si, la loi du phénomène n'est pas connue. Il s'agit dans un premier temps de sélectionner puis de modéliser les valeurs extrêmes, c'est-à-dire de déterminer quelles sont les valeurs les plus extrêmes de l'échantillon qui vont contenir l'information pertinente sur l'événement extrême.

Les domaines d'applications de la théorie des valeurs extrêmes sont très variés. En hydrologie, domaine dans lequel la prévision des crues, par exemple, est particulièrement importante, en météorologie où l'étude de la vitesse du vent, par exemple, permet d'évaluer le degré de résistance des matériaux face à la pression exercée par le vent sur les bâtiments, en assurance dont l'une des préoccupations est la prise en compte des grands sinistres, en économie, en biologie, en ingénierie, etc.

Dans la réalité, quel que soit le phénomène étudié, on se retrouve face aux données incomplètes que ça soit tronquées ou censurées. Les premiers travaux de la théorie des valeurs extrêmes en présence des censures ont été abordés par Reiss et Thomas (1997) sans qu'ils aient étudié le comportement asymptotique. Beirlant et al. (2007) ont proposé des

estimateurs pour le paramètre de forme et pour les quantiles extrêmes. Ensuite, Einmahl et al. (2008) ont adapté l'estimateur de l'indice des valeurs extrêmes (IVE) de Hill pour le cas des données censurées par un seuil aléatoire et ils ont montré sa normalité asymptotique sous certaines conditions pour l'utiliser dans l'estimation des quantiles. Gomes et Neves (2011) ont fait une étude de simulation et une application des procédures d'estimation sur certaines données de survie.

Dans notre travail, nous proposons d'améliorer l'estimation de l'indice des valeurs extrêmes dans le cas des données censurées aléatoirement à droite en appliquant l'algorithme de Newton-Raphson sur une vraisemblance adaptée aux censures. Nous montrons sa performance graphiquement par rapport aux estimateurs de Hill et des moments en faisant des simulations pour plusieurs niveaux de censure. Nous terminons par une application sur des données réelles portant sur les durées de chômage en Algérie.

1 Estimation de l'IVE sans censure :

La représentation standard de la distribution des valeurs extrêmes montre l'importance de la valeur réelle du paramètre de forme ξ , connue sous le nom de l'indice des valeurs extrême (IVE). Ce paramètre nous renseigne sur la fréquence de récurrence possible de certains phénomènes, il mesure le degré de lourdeur de la queue de distribution.

En ce référent à littérature, on trouve plusieurs techniques pour estimer l'indice des valeurs extrêmes (l'IVE). On trouve la méthode du maximum de vraisemblance, la méthode des moments pondérées, la méthode des moments ou encore des méthodes bayésiennes.

Parmi les estimateurs les plus répondus, on trouve l'estimateur de Pickands proposé en 1975 valable quelque soit le signe de ξ . L'estimateur de Hill (1975) valable seulement pour $\xi > 0$, qui est concédé comme le plus célèbre et le plus simple des estimateurs de l'indice de queue. Pour palier cette limitation, en 1989, Dekkers et al. ont proposé une extension aux deux autres domaines d'attractions, lui rendre valable quel que soit $\xi \in \mathbb{R}$, appelée estimateur des moments.

2 Estimation de l'IVE avec censure :

En prenant en considération la présence des censures, différents estimateurs de l'indice des valeurs extrêmes ont été proposés et tous étaient construits (normalisé) de la même manière. L'estimateur usuel non adapté à la censure, noté $(\hat{\xi})$, peut être n'importe quel estimateur (Hill, des moments, Pickands,...), divisé par la proportion d'observations non censurées au-delà d'un certain seuil (temps). En d'autres termes, on a :

$$\hat{\xi} = \frac{\dots}{\dots}$$

Cependant, les propriétés asymptotiques et la normalité de la plupart de ces estimateurs restent difficiles à obtenir.

Dans notre étude, nous considérons comme estimateur usuel non adapté à la censure, l'estimateur des moments défini par :

$$\bar{X}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k X_{(i)}$$

Tel que :

—

Avec \bar{X}_k est le moment empirique d'ordre « r », d'où l'appellation d'estimateur des moments et $X_{(k)}$ est k -ème statistique d'ordre de l'échantillon

Les propriétés de cet estimateur y compris sa normalité ont été établies sous des conditions de régularité convenables par Dekkers et al. (1989).

Nous proposons d'améliorer la convergence de l'estimateur des moments adapté à la censure et cela en adaptant la fonction de vraisemblance à la censure pour une distribution de Pareto de paramètre $\xi > 0$. La résolution du système d'équations non linéaires obtenu est faite en appliquant l'algorithme de Newton Raphson qui nous donne une solution explicite nous permettant de calculer les estimateurs de forme et de dispersion. Notre choix pour cet estimateur est justifié par le fait que la plupart des phénomènes économiques et financières étudié appartiennent au domaine d'attraction de Fréchet ($\xi > 0$), et d'autre part, en plus qu'il est plus général et valable pour $\xi \in \mathbb{R}$, l'estimateur des moments affiche un comportement meilleur que celui de Hill et de Pickands en terme de convergence.

Au moyen de simulation, nous évaluons graphiquement la performance de l'estimateur amélioré proposé. L'illustration numérique est présentée sur des données réelles, portant sur les durées de chômage en Algérie enregistrées entre le 01 janvier 2012 et le 31 décembre 2016 fournies par la Direction Générale de l'Agence Nationale de l'Emploi (DG/ANEM) couvrant tout le territoire national.

3 Conclusion :

A travers notre étude, nous avons tenté de proposer une amélioration pour l'estimation de l'indice des valeurs extrêmes dans le cas des données censurées aléatoirement à droite en appliquant l'algorithme de Newton-Raphson sur une vraisemblance adaptée aux censures. Nous avons constaté d'une part, qu'à fur et à mesure qu'on diminue le niveau de censure les courbes se rapprochent plus et ils devient plus rapidement linéaire et aligné avec le zéro, ce qui veut dire que les estimateurs converge plus rapidement vers la vraie valeur. Et de l'autre part, la suprématie de l'estimateur amélioré proposé sur ceux de Hill et de moments.

Références :

- Beirlant, J., Guillo, A., Dierckx, G., & Fils-Villetard, A. (2007). Estimation of the extreme value and extreme quantiles under random censoring. *Extremes*, 10(3), 151-174.
- Beirlant, J., Guillo, A. (2001). Pareto Index Estimation Under Moderate Right Censoring. *Scandinavian Actuarial Journal*, 111-125.
- Beirlant, J., Teugels, J., Vynckier, P. (1996). *Practical analysis of extreme values*.
- Dekkers, A.L., Einmahl, J.H., & De Haan, L. (1989). A Moment estimator for the index of an extreme value distribution. *The Annals of Statistics*, 17(4), 1833-1855.
- Dekkers, A.L. De Haan, L. (1989). On the estimation of the extreme-value index and large quantile estimation. *The Annals of Statistics*, 17(4), 1795-1832.
- Einmahl, J.H., Fils-Villetard, A., & Guillo, A. (2008). Statistics of extremes under random censoring. *Bernoulli*, 14(1), 207-227.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C., & Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Berlin: Springer-Verlag.
- Hill, B. (1975). A Simple general approach to inference about the tail of a distribution. *The Annals of Statistics*, 3(5), 1163-1174.
- Hosking, J.R.M., Wallis, J.R. (1987). Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution. *Technometrics*. vol. 29, 339-349.
- Mason, D. (1982). Laws of large numbers for sums of extreme values. *The Annals of Probability*, 10(3), 754-764.
- Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *The Annals of Statistics*, 3(1), 119-131.
- Reiss, R.D., Thomas, M. (2007). *Statistical Analysis of Extreme Values from Insurance, Finance, Hydrology and other Fields*. Basel: Birkhäuser.
- Smith, R. L. (1987). Estimating Tails of Probability Distributions. *The Annals of Statistics*, 15(3), 1174-1207.
- Zouadi, N. (2014). Modélisation des fluctuations maximales des rendements du marché pétrolier, mémoire de magister, ENSSEA. Algérie.

Summary:

The aim of this work is to analyze and compare the behavior of Extreme Value Index (IVE) estimators, taking into account the presence of randomly censored data on the right. We propose to improve the convergence of the moment estimator, by adapting the likelihood function to the censoring for a Pareto distribution of parameter $\xi > 0$. The computation of the estimators of shape and dispersion parameters is done by applying the Newton Raphson algorithm.

We evaluate the convergence performance of this estimator by simulations by comparing it with other non-parametric estimators (Hill and Moments). We illustrate the improved estimator on a real dataset of the duration of unemployment in Algeria.

Part III: Statistique Computationnelle, Simulation

Propriétés asymptotique de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel pour des données associées

Latifa Adjoudj*, Abdelkader Tatachak**

*Faculté Mathématique USTHB
BP 32, El-Alia 16111, Algiers, Algeria,
ladjoudj@usthb.dz

**Laboratoire MSTD, Faculté Mathématique, USTHB
BP 32, El-Alia 16111, Algiers, Algeria,
atachak@usthb.dz

Résumé. Le présent travail vise à établir les propriétés asymptotiques d'estimateurs à noyau de la fonction de distribution conditionnelle et du quantile conditionnel lorsque les observations de durée de vie et les covariables sont associées.

1 Introduction

Soit Y une variable aléatoire (v.a.) réelle d'intérêt de fonction de répartition (f.d.r.) continue F_Y , et \mathbf{X} un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^d de covariables de f.d.r. jointe $F_{\mathbf{X}}$ et de densité jointe v . La f.d.r. conditionnelle de Y sachant $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ est $F(y|\mathbf{x}) = \mathbb{E}(1_{Y \leq y} | \mathbf{X} = \mathbf{x})$ (où 1_A dénote la fonction indicatrice de l'ensemble A .) que nous réécrivons :

$$F(y|\mathbf{x}) = \frac{F_1(\mathbf{x}, y)}{v(\mathbf{x})}. \quad (1)$$

Avec $F_1(\mathbf{x}, y) = \frac{\partial F(\mathbf{X}, y)}{\partial \mathbf{X}}$, où $F(\cdot, \cdot)$ est la f.d.r. jointe du couple (\mathbf{X}, Y) . Dans toute la suite, nous allons noter $f(\cdot|\mathbf{x})$: la densité de probabilité conditionnelle de Y sachant $\mathbf{X} = \mathbf{x}$.

Pour $p \in (0, 1)$, le quantile conditionnel d'ordre p de Y sachant que $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ est donné par :

$$q_p(\mathbf{x}) := \inf\{y \in \mathbb{R} : F(y|\mathbf{x}) \geq p\}.$$

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés aux propriétés asymptotiques d'un estimateur à noyau du quantile conditionnel pour des données associées.

2 Notation et estimations

Soit $\{(\mathbf{X}_i, Y_i); 1 \leq i \leq N\}$ une suite strictement stationnaire de vecteurs aléatoires associés définis sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ ($d \geq 1$), ayant la

Propriétés asymptotique de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel pour des données associées

même distribution que (\mathbf{X}, Y) qui admet une densité jointe inconnue $f(\cdot, \cdot)$. Soit $f_N(y|\mathbf{x})$ un estimateur à noyau de $f(y|\mathbf{x})$ défini par :

$$f_N(y|\mathbf{x}) = \frac{f_N(\mathbf{x}, y)}{v_N(\mathbf{x})} 1_{\{v_N(\mathbf{x}) \neq 0\}},$$

où : $v_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{Nh_N^d} \sum_{i=1}^N K_d\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{X}_i}{h_{N,K}}\right)$, et $f_N(\mathbf{x}, y) = \frac{1}{Nh_{N,H}h_{N,K}^d} \sum_{i=1}^N K_d\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{X}_i}{h_{N,K}}\right) H^{(1)}\left(\frac{y-Y_i}{h_{N,H}}\right)$, avec

- $K_d : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction à noyau,
- $h_{N,K}$ et $h_{N,H}$ sont appelées fenêtres qui tendent vers 0 quand $N \rightarrow \infty$,
- $H^{(1)}$ est un noyau positif défini sur \mathbb{R} .

Un estimateur de la f. d. r. conditionnelle défini par Yu (1998) comme suit :

$$F_N(y|\mathbf{x}) = \frac{F_{1,N}(\mathbf{x}, y)}{v_N(\mathbf{x})} 1_{\{v_N(\mathbf{x}) \neq 0\}},$$

où $F_{1,N}(\mathbf{x}, y) = \frac{1}{nh_K^d} \sum_{i=1}^N K_d\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{X}_i}{h_K}\right) H\left(\frac{y-Y_i}{h_H}\right)$, avec $H(t) = \int_{-\infty}^t H^{(1)}(y)dy$.

Donc un estimateur naturel de $q_p(\mathbf{x})$ est donné par :

$$q_{p,N}(\mathbf{x}) = \inf\{y \in \mathbb{R} : F_N(y|\mathbf{x}) \geq p\}.$$

3 Propriétés asymptotiques

Convergence uniforme presque sûre

Théorème 1 : Sous des hypothèses standards, on a

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_0} \sup_{a \leq y \leq b} |F_N(y|\mathbf{x}) - F(y|\mathbf{x})| = O\left(\sqrt{\frac{\log N}{Nh_K^d}} + h_K^2 + h_H^2\right) \mathbb{P}\text{-p.s., quand } N \rightarrow \infty,$$

Corollaire 1 : Sous les hypothèses du Théorème précédent et pour tout $p \in (0, 1)$ et $\mathbf{x} \in \Omega_0$, si la densité conditionnelle $f(\cdot|\mathbf{x})$ et la f.d.r. conditionnelle $F(\cdot|\mathbf{x})$ satisfont $\inf_{x \in \Omega_0} f(q_{p,N}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) > 0$ et $F(a|\mathbf{x}) < p < F(b|\mathbf{x})$, alors on a,

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_0} |q_{p,N}(\mathbf{x}) - q_p(\mathbf{x})| = O\left(\sqrt{\frac{\log N}{Nh_K^d}} + h_K^2 + h_H^2\right) \mathbb{P}\text{-p.s., quand } N \rightarrow \infty.$$

Normalité asymptotique

Théorème 2 : Sous des hypothèses standards, on a

$$\sqrt{Nh_K^d} (F_N(y|\mathbf{x}) - F(y|\mathbf{x})) \rightarrow N(0, \sigma_F^2(\mathbf{x}, y)),$$

où $N(0, \sigma_F^2(\mathbf{x}, y))$ est la loi gaussienne centrée avec variance.

$$\sigma_F^2(\mathbf{x}, y) = \kappa_0 [v(\mathbf{x})\Sigma_0(\mathbf{x}, y) - 2\Sigma_1(\mathbf{x}, y)F_1(\mathbf{x}, y) + F_1^2(\mathbf{x}, y)] v^{-3}(\mathbf{x}),$$

où

$$\kappa_0 = \int K_d^2(\mathbf{u})d\mathbf{u}, \quad \Sigma_k(\mathbf{x}, y) = \int H^{2-k} \left(\frac{y-s}{h_H} \right) f(\mathbf{x}, s)ds; \quad k = 0, 1;$$

Corollaire 2 : Sous les hypothèses du Théorème précédent, on a

$$\sqrt{Nh_K^d} (q_{p,N}(\mathbf{x}) - q_p(\mathbf{x})) \rightarrow N \left(0, \frac{\sigma_F^2(\mathbf{x}, q_p(\mathbf{x}))}{f^2(q_p(\mathbf{x})|\mathbf{x})} \right).$$

4 Simulation

Le but principal de cette section est de montrer le comportement asymptotique de certains quantiles conditionnels particuliers. En considérant : l'ordre du quantile p , la taille de l'échantillon N , le type du modèle (cas linéaires et non linéaires) et la dimension de l'espace des covariables ($d=1$ ou $d=2$).

Covariable unidimensionnelle (d=1) : Dans la figure 1, nous nous sommes intéressés à l'estimateur de la fonction de répartition conditionnelle, dont on a tracé l'estimateur de la f. d. r. conditionnelle (et la f. d. r. théorique) pour plusieurs valeurs de $x \in [0.5, 4]$.

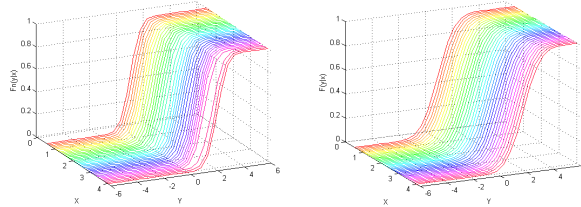


FIG. 1 – L'estimateur de la f. d. r. conditionnelle $F_N(y|x)$ et la théorique $F(y|x)$ pour $N = 100$

Covariable bidimensionnelle (d=2) :

Consistance Dans cette section, nous nous limitons à $p = 0.5$, le cas linéaire et non linéaire sont étudiés.

- Modèle 1 : Cas linéaire
- Modèle 2 : Cas non linéaire

Propriétés asymptotique de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel pour des données associées

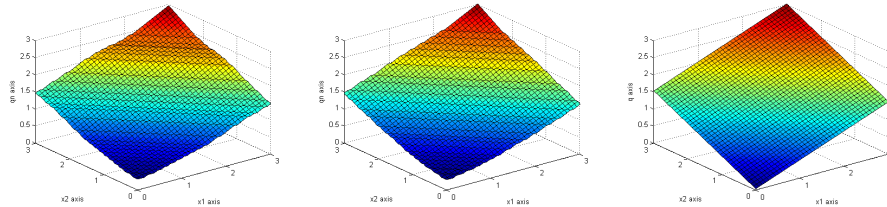


FIG. 2 – Surface de la médiane conditionnelle $p=0.5$: $N = 200$, $N = 500$ et fonction linéaire théorique (de gauche à droite)

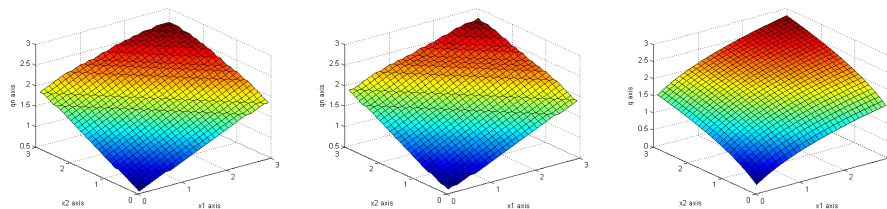


FIG. 3 – moy $q_{0.5,N}(x)$ et $q_{0.5}(x)$ pour $N = 200$, $N = 500$ et fonction non linéaire théorique (de gauche à droite)

Références

Yu, K. M. J. (1998). Local linear quantile regression. *J. Am. Stat. Assoc.* 93, 228–238.

Summary

This work aims to establish some asymptotic properties of kernel estimators of the conditional distribution function and the conditional quantile when the lifetime observations and the covariates are associated

Strong consistency rate of a kernel conditional hazard function estimator for truncated-dependent data

Setti Louiza Affane* Abdelkader Tatachak*
Elias Ould Said**

*Lab. MSTD, Faculté de mathématiques, USTHB, BP n32, El Alia, Alger, Algérie
affane.louiza@gmail.com, atatachak@usthb.dz

**Lab. MPA, IUT de Calais. 19, rue Louis David. Calais, 62228, France.
elias.ould-said@univ-littoral.fr

Résumé. Le but de notre travail est d'établir la convergence presque sûre d'un estimateur à noyau de la fonction de hasard conditionnelle sous un modèle tronqué à gauche lorsque les données présentent une forme de dépendance qui est l' α -mélange. Nous supposons la covariable dans un espace de dimension infinie et étendons le résultat obtenu par Ferraty et al. (2008) dans le cas des données complètement observées.

1 Introduction

Let $(\mathcal{Y}_i)_{i=1,\dots,N}$ be a sample of positive real random variables (r.v.) identically distributed, defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, with common unknown distribution function (d.f.) F . Let $(\mathcal{X}_i)_{i=1,\dots,N}$ be a corresponding sample of functional r.v.'s taking values in some infinite dimensional space \mathcal{S} endowed with the semi-metric $\|\cdot\|$. In some survival samples, the variable of interest \mathcal{Y} may not be completely observable. We are interested here in the left truncation model which appeared in astronomy and then was extended to several fields. We denote by $(\mathcal{T}_i)_{i=1,\dots,N}$ the sample of truncation r.v.'s with d.f. G . Then $(\mathcal{Y}_i, \mathcal{T}_i)$ are observed only when $\mathcal{Y}_i \geq \mathcal{T}_i$. Clearly, only n observations (among N) are obtained. We point out that n is random but known, whereas N is unknown but deterministic. As a consequence, our results will not be stated with respect to the probability measure \mathbb{P} (related to the N -sample). We need to introduce the conditional probability measure $\mathbf{P}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | \mathcal{Y}_i \geq \mathcal{T}_i)$.

As we are interested in reliability and survival analysis, it is more common to have dependent variables such as the strong mixing condition. In order to define it, denote by \mathcal{F}_1^k the σ -algebra generated by $(X_1, Y_1), \dots, (X_k, Y_k)$ and \mathcal{F}_{k+n}^∞ that generated by $(X_{k+n}, Y_{k+n}), \dots$. Set now, for any $n \geq 1$:

$$\alpha(n) = \sup \{ |\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|; A \in \mathcal{F}_1^k, B \in \mathcal{F}_{k+1}^{+\infty}, k \geq 1 \}$$

The process $(X_n, Y_n)_{n \geq 1}$ is said to be α -mixing (strongly mixing) if $\alpha(n)$ tends to 0.

In what follows, we denote $(X_i, Y_i, T_i)_{i=1,\dots,n}$ the observed sample, $\mathbf{E}(\cdot)$ and $\mathbb{E}(\cdot)$ the respective expectation operators of $\mathbf{P}(\cdot)$ and $\mathbb{P}(\cdot)$.

For $x \in \mathcal{S}$, we denote the conditional probability distribution of Y given $X = x$ by

Kernel conditional hazard function estimator

$$F(y|x) = \mathbb{P}(Y \leq y|X = x); \forall y \geq 0$$

The conditional density of Y given $X = x$ is defined by

$$f(y|x) = \frac{\partial F(y|x)}{\partial y}; \forall y \geq 0$$

Then the conditional hazard function of Y given $X = x$ is

$$\lambda(y|x) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(Y \leq y + \Delta y | Y \geq y, X = x)}{\Delta y} = \frac{f(y|x)}{1 - F(y|x)}; \forall y \geq 0,$$

provided that $F(y|x) < 1$.

An estimator for the conditional hazard is given by :

$$\lambda_n(y|x) := \frac{f_n(y|x)}{1 - F_n(y|x)},$$

where

$$F_n(y|x) = \frac{\frac{\mu_n}{n\Phi(h_K)} \sum_{i=1}^n G_n^{-1}(Y_i) K\left(\frac{\|x - X_i\|}{h_K}\right) H\left(\frac{y - Y_i}{h_H}\right)}{\frac{\mu_n}{n\Phi(h_K)} \sum_{i=1}^n G_n^{-1}(Y_i) K\left(\frac{\|x - X_i\|}{h_K}\right)}$$

and

$$f_n(y|x) = \frac{\frac{\partial F_n(y|x)}{\partial y}}{\frac{\mu_n}{n\Phi(h_K)} \sum_{i=1}^n G_n^{-1}(Y_i) K\left(\frac{\|x - X_i\|}{h_K}\right)} = \frac{\frac{\mu_n}{nh_H\Phi(h_K)} \sum_{i=1}^n G_n^{-1}(Y_i) K\left(\frac{\|x - X_i\|}{h_K}\right) H'\left(\frac{y - Y_i}{h_H}\right)}{\frac{\mu_n}{n\Phi(h_K)} \sum_{i=1}^n G_n^{-1}(Y_i) K\left(\frac{\|x - X_i\|}{h_K}\right)}$$

— μ_n is the estimator of $\mu := \mathbb{P}(\mathcal{Y} \geq \mathcal{T}) > 0$ given by

$$\mu_n = \frac{G_n(y) [1 - F_n(y)]}{C_n(y)}$$

Woodroffe pointed out that F and G could be completely observed if and only if

$$a_G \leq a_F, b_G \leq b_F \text{ and } \int_{a_F}^{+\infty} \frac{dF}{G} < \infty \text{ (identifiability conditions)}$$

where $[a_F, b_F]$ and $[a_G, b_G]$ are the supports of F and G respectively.

- h_K and h_H are nonnegative sequences tending to zero as n tends to infinity.
- $\Phi(h_K)$ is an increasing function which verifies $F_x(h_K) = g(x)\Phi(h_K) + o(\Phi(h_K))$ where $F_x(h) := \mathbf{P}(X \in \mathcal{B}(x, h))$ and $\mathcal{B}(x, h)$ is the ball of center x and radius h .
- G_n is Lynden-bell estimator given in Lynden-Bell (1971) of the d.f. G .
- K is a kernel function.
- H is a smooth d.f.
- H' is the derivative of H .

Theorem 1 Under some assumptions, we have

$$\sup_{x \in \Xi} \sup_{y \in [a, b]} |F_n(y|x) - F(y|x)| = O\left(h_K^{b_1}\right) + O\left(h_H^{b_2}\right) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\Phi(h_K)}}\right) \text{ a.s. as } n \rightarrow +\infty.$$

where b_1 and b_2 are positive constants.

Theorem 2 Under some assumptions, we have

$$\sup_{x \in \Xi} \sup_{y \in [a, b]} |f_n(y|x) - f(y|x)| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H \Phi(h_K)}}\right) \text{ a.s. as } n \rightarrow +\infty$$

where b_1 and b_2 are positive constants.

Theorem 3 Under some assumptions, we have

$$\sup_{x \in \Xi} \sup_{y \in [a, b]} |\lambda_n(y|x) - \lambda(y|x)| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H \Phi(h_K)}}\right) \text{ a.s. as } n \rightarrow +\infty$$

where b_1 and b_2 are positive constants.

Références

- Ferraty, F., A. Rabhi, et P. Vieu (2008). Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle. *Rev. Roumaine Math. Pures APPL.* 53, 1–18.
- Lynden-Bell, D. (1971). A method of allowing for known observational selection in small samples applied to 3cr quasars. *Monthly Notices Royal Astronomy Society* 155, 95–118.

Summary

The purpose of our study is to establish the strong uniform consistence of a kernel estimator of the conditional hazard function under strong mixing left truncated model. We assume that the explicative variable is functional. This study is an extension of that of ? made with complete data.

Some simulations in a local scale regression model for truncated data

Saloua ALIOUCHE *, Ourida SADKI **

*Laboratoire MSTD, Faculté Mathématique, USTHB
BP 32, El-Alia 16111, Algiers, Algeria,
saliouche@usthb.dz,
<http://www.usthb.dz/>

** Laboratoire MSTD, Faculté Mathématique, USTHB
BP 32, El-Alia 16111, Algiers, Algeria,
osadki@usthb.dz
<http://www.usthb.dz/>

Résumé. In this paper we present some simulation results on the estimation of the conditional distribution function in a local scale regression model for left truncated data to confirm the performance of the theoretical results for these model.

1 Introduction

Let (X_i, Y_i) , $1 \leq i \leq N$, be a vector of independent and identically distributed (iid) random variables (rv), where Y is a variable of interest, and X is a covariate, admit a distribution function (df) F and V respectively.

Often these v.a are considered as lifetimes that can not be fully observed. Soit $(T_i)_{1 \leq i \leq N}$ is a variable of left truncation with df G . We suppose that (X, Y) is independent of T .

In the random left-truncation model (RLT), we observe (X_i, Y_i, T_i) only if $Y_i \geq T_i$, whereas neither is observed if $Y_i < T_i$ ($i = 1, \dots, N$) with N is the sample size (N is deterministic and unknown). Without possible confusion, we still denote (X_i, Y_i, T_i) ($1 \leq i \leq n$), $n \leq N$ (n is random and known) the actually observed rv.

Let $\alpha = \mathbb{P}(T \leq Y)$, be the probability of observing at least one pair of (X, Y, T) .

The LT model has been studied by many authors, we mention mainly Lynden-Bell (1971) and Woodroffe (1985).

We consider the nonparametric location-scale model to describe the relation between X and Y :

$$Y = m(X) + \sigma(X)\varepsilon \tag{1}$$

Where we assume ε and X are independent, and where the functions $m(X)$ and $\sigma(X)$ are some unknown location and scale functions respectively. This means that we can write $m(x) = T(F_Y(\cdot|x))$ and $\sigma(x) = S(F_Y(\cdot|x))$ for some functional T and S , such that

$$T(F_{aY+b}(\cdot|x)) = aT(F_Y(\cdot|x)) + b$$

kernel estimation of the regression function in RLT model.

and

$$S(F_{aY+b}(\cdot|x)) = aS(F_Y(\cdot|x)).$$

for all $a > 0$ and all real b , where $F_Y(\cdot|x)$ denotes here the distribution of Y given $X = x$ (see also Huber (1981), (p. 59, 202)).

2 Definition of the estimator and results

Our goal is to estimate the conditional distribution $F(y | x)$ under model (1). We have

$$F(y | x) = \mathbb{P}(Y \leq y | X = x) = \frac{F_1(x, y)}{v(x)}$$

Where $F_1(\cdot, \cdot)$ is the first derivative with respect to x of the joint df of (X, Y) , and v is the density of the covariate.

Lemdani et al. (2009) proposed a kernel estimator of $F(\cdot|x)$ defined by

$$\tilde{F}(y | x) = \frac{F_{1,n}(x, y)}{v_n(x)} = \frac{\frac{\alpha_n}{na_n} \sum_{i=1}^n G_n^{-1}(Y_i) k\left(\frac{x-X_i}{a_n}\right) K_0\left(\frac{y-Y_i}{b_n}\right)}{\frac{\alpha_n}{na_n} \sum_{i=1}^n G_n^{-1}(Y_i) k\left(\frac{x-X_i}{a_n}\right)} \quad (2)$$

- . k is density function (kernel), K_0 is df,
- . a_n, b_n are two bandwidths towards 0 when $n \rightarrow \infty$,
- . G_n is the Lynden-Bell (1971) estimator of G ,
- . α_n is the He et Yang (1998) estimator of α .

In the case of $a_n = b_n = h_n$, X in R^d and under some assumptions on the bandwidths, the kernel, the joint and marginal densities, Lemdani et al. (2009) have established the following result :

$$\sup_{x \in \Omega} \sup_{a \leq y \leq b} |\tilde{F}(y|x) - F(y|x)| = O\left(\max\left\{\sqrt{\frac{\log n}{nh_n^d}}, h_n^2\right\}\right) \quad \mathbf{P} - a.s \quad n \rightarrow \infty$$

and they studied its asymptotic normality.

Now we consider a L-functional type estimators of m and σ , as follows

$$m(x) = \int_0^1 F^{-1}(s | x) J(s) ds, \quad \sigma^2(x) = \int_0^1 F^{-1}(s | x)^2 J(s) ds - m^2(x) \quad (3)$$

Where $F^{-1}(s | x) = \inf\{y : F(y | x) \geq s\}$ is the quantile function of Y given x , $J(\cdot)$ is the score function satisfied $\int_0^1 J(s) ds = 1$. Remark that

$$F(y | x) = \mathbb{P}\left(\varepsilon \leq \frac{y - m(X)}{\sigma(X)} \mid X = x\right) = F_e\left(\frac{y - m(x)}{\sigma(x)}\right)$$

with F_e is the distribution function of ϵ . The method proposed in this paper consists in first estimating the conditional distribution $F(y|x)$ by (2) and F_e by the Lynden-Bell estimator then we plug-in the obtained estimators in (3) (See Van Keilegom et Akritas (1999) and Heuchenne et Van Keilegom (2010)).

Under some regular assumptions on the bandwidths, the kernel, the joint and marginal densities, the score function, the position and the scale functions, we establish some asymptotic properties of our estimator. Our result is illustrated in the following theorem.

Theorem

$$\sup_{x \in \Omega} |\hat{m}_n(x) - m(x)| = O \left(\max \left\{ \sqrt{\frac{\log n}{na_n}}, a_n^2 + b_n^2 \right\} \right) \mathbf{P} - a.s \quad n \rightarrow \infty$$

2.1 Simulation

In this section, we realize simulations to study the performance of the estimator $\hat{m}_n(\cdot)$ of $m(\cdot)$.

First we consider a linear regression function with the model $Y_i = \delta_0 + \delta_1 X_i + \sigma \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, N$, where X_i and ε_i are two independent iid sequences distributed as $N(0, 1)$ and σ is adapted in order to get different values of the truncation probability α .

We also we simulate N iid rv $T_i \rightarrow \exp(1) - 2$, where $\exp(\lambda)$ is the exponential distribution with parameter λ . We then keep the data (X_i, Y_i, T_i) , $(i = 1, \dots, n)$ such that $Y_i \geq T_i$. We do it in a way to obtain a given number n of observed triplets (which means that in this case n is not random whereas N is).

We calculate the values of the estimator's $\hat{m}_n(\cdot)$ by choosing Gaussian kernels k and H , and a bandwidth $h_n = a_n = b_n = C * (\frac{\log n}{n})^{1/5}$.

It is well known that in non parametric estimation, optimally (in the MSE sense) is not seriously affected by the choice of the kernel k but is affected by that of the bandwidth h_n . about a score function, we choose $L(s) = \frac{1-s \leq b}{b}$, where $b = 0.8$.

We plot $m(\cdot)$ and its estimator, when n increases, we notice that the estimator was bad for small n , but had a good behavior for n large enough (see figure (1)).

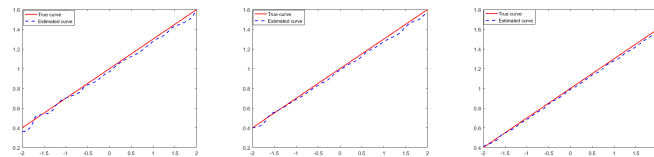


FIG. 1 – Curves of \hat{m}_m and $m(\cdot)$ with, $\alpha = 0.9$ and $n = 50, 100, 300$, respectively

To conclude this part, we consider the case of non linear regression by choosing the following model :

$$Y_i = \text{Cos}(X_i) + \sigma \varepsilon_i \quad \text{Cos case}$$

kernel estimation of the regression function in RLT model.

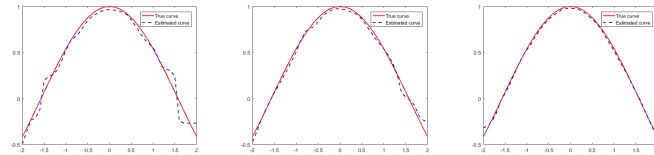


FIG. 2 – Curves of \hat{m}_m and $m(\cdot)$ with, $\alpha = 0.9$ and $n = 50, 100, 300$

Here again, we can see the good performance of our estimator for non linear regression function.

Références

- He, S. et G. Yang (1998). Estimation of the truncation probability in the random truncation model. *The Annals of Statistics*, 1011–1027.
- Heuchenne, C. et I. Van Keilegom (2010). Estimation in nonparametric location-scale regression models with censored data. *Ann. Statist.*, 439–463.
- Huber, P. J. (1981). *Robust statistics*. New York: Wiley.
- Lemdani, M., E. Ould Said, et N. Poulin (2009). Asymptotic properties of a conditional quantile estimator with randomly truncated data. *Journal of Multivariate Analysis*, 546–559.
- Lynden-Bell, D. (1971). A method of allowing for known observational selection in small samples applied to 3cr quasars. *Monthly Notices Royal Astronomy Society*, 95–118.
- Van Keilegom, I. et M. G. Akritas (1999). Transfer of tail information in censored regression models. *Ann. Statist.*, 1745–1784.
- Woodroffe, M. (1985). Estimating a distribution function with truncated data. *Ann. Statist.*, 163–177.

Summary

we have interested in this work of simulation to calculate the kernel estimator of the function of regression in the random left truncated (RLT) model, when the data are independent, in order to test the performance of the theoretical results founded for this models.

On the robust nonparametric regression estimation for a functional regressor

Ataouia BAKHTAOUI*

*University of Djillali Liabes
L.P 89, Sidi Bel Abbes 22000, Algeria
ataouia.01.30.1993@gmail.com

Résumé.

1 Introduction

Regression function estimation is the most important tool for nonparametric prediction problem. The goal is to study this functional parameter when the explanatory variable is a curve by using a robust approach. The robust method used is belongs to the class of M-estimates introduced by ?.

Our interest is to generalize, to infinite dimension, the robust nonparametric estimation of regression function developed by (Collomb et Härdle, 1986) in the real case. We establish, under suitable conditions, the almost complete (a.co.) convergence rate of the M-estimator with the regression function kernel weights when the observations are independent and identically distributed. This rate is closely related to the concentration property on small balls of the functional variables probability measure. Thus, by using recent results in the probability theory of small balls, we can clarify our results for some continuous-time stochastic processes.

2 THE MODEL AND THE ESTIMATES

Let (X, Y) be a pair of random variables (rv) in $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$, where the space \mathcal{F} is dotted with a semi-metric $d(\cdot, \cdot)$. In this framework, X can be a functional random variable. For any x in \mathcal{F} , let x be a real-valued Borel function satisfying some regularity conditions to be stated below. The nonparametric parameter, denoted by θ_x , is implicitly defined as a zero with respect to t of the equation

$$\Psi(t, x) = \mathbb{E}[\psi_x(Y - t)|X = x] = 0$$

We suppose that, for all $x \in \mathcal{F}$, θ_x exists and is unique. The model θ_x , called x -regression in Laib and Ould-Said (2000) is a generalization of the classical regression function. Indeed, if $x(t) = t$ we get $\theta_x = \mathbb{E}[Y|X = x]$.

Let $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ be n independent pairs, identically distributed as (X, Y) . We then estimate $\Psi(t, x)$ by

$$\Psi(t, x) = \frac{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(x, X_i))\psi_x(Y_i - t)}{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(x, X_i))}$$

Robust nonparametric regression

where K is a kernel function and $h_K = h_{K,n}$ is a sequence of positive real numbers which decreases to zero as n goes to infinity. A naturel estimator of θ_x denoted by $\hat{\theta}_x$, is a zero with respect to t of

$$\hat{\Psi}(t, x) = 0$$

Our main goal is to obtain the rate of the almost complete convergence for $\hat{\theta}_x$. Some simulation has been given to show how to implement our methodology for the functional data and the behavior of our estimator.

3 ASSUMPTIONS

In the following, x is a fixed point in \mathcal{F} , \mathcal{N}_x denotes a fixed neighborhood of x ,

(H1) $\mathbb{P}(X \in B(x, h)) = \phi_x(h) > 0 \forall h > 0$ and $\lim_{h \rightarrow 0} \phi_x(h) = 0$.

(H2) There exist $C_1 > 0$ and $b > 0$ such that

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{N}_x, \forall t \in \mathbb{R} |\Psi(t, x_1), \Psi(t, x_2)| \leq C_1 d^b(x_1, x_2).$$

(H3) The function ψ_x is strictly monotone, bounded, continuously differentiable, and its derivative is such that,

$$|\psi'_x(t)| > C_2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

(H4) K is a continuous function with support $[0, 1]$ such that

$$0 < C_3 < K(t) < C_4 < 1.$$

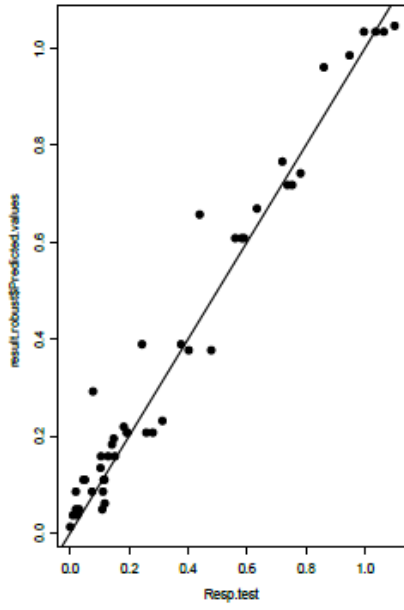
(H5) $\lim_{n \rightarrow \infty} h_K = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n\phi_x(h_K)} = 0$.

4 RESULT

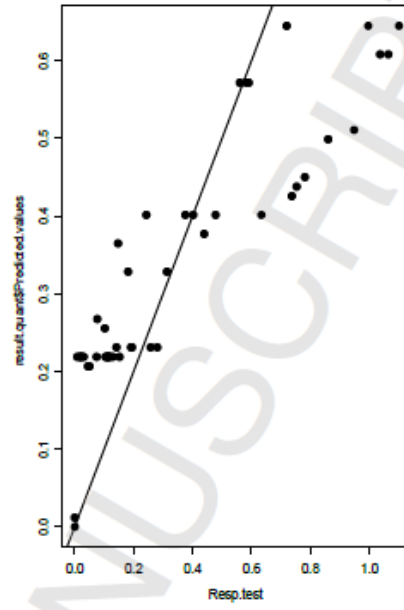
Theorem 4.1. *Assume that (H1) – (H5) are satisfied, then $\hat{\theta}_x$ exists and is unique a.s. for all sufficiently large n , and we have*

$$\hat{\theta}_x - \theta_x = O(h_K^b) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \quad a.co$$

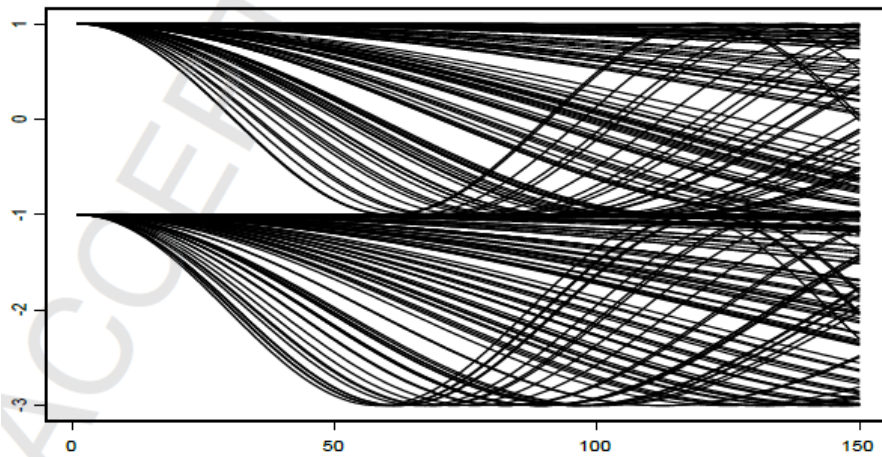
5 SIMULATION



Robust method SSR=0.002



KN-method SSR=0.020



The curves $X_{i=1, \dots, 200}(t), t_{j=1, \dots, 150} \in [0, 1]$

Références

Collomb, G. et W. Härdle (1986). Strong uniform convergence rates in robust nonparametric time series analysis and prediction : Kernel regression estimation from dependent observations. *Stochastic processes and their applications* 23(1), 77–89.

Summary

In this work, we study a family of robust nonparametric estimators for a kernel-based regression function when regressors are functional random variables. We establish the almost complete convergence rate of these estimators under the concentration property of the probability measure on small balls of the functional variable. Simulations are given to show the behavior of our estimator and the quality of the forecast for the functional data.

A Bayesian procedure for bandwidth selection in circular kernel density estimation

Kahina BEDOUHENE*, Nabil ZOUGAB**

*Department of Mathematics, University of Tizi-Ouzou, Algeria
kahina.bedouhene@yahoo.fr

** Research Unit LaMOS, University of Bejaia, Algeria
nabilzougab@yahoo.fr

Résumé. Donner le texte qui doit figurer ici avec la commande `\resume{Votre résumé . . . }` dans le préambule (avant le `\begin{document}`).

1 Introduction

Nonparametric circular kernel density estimation, for which many applications can be found in various domains such as biology, ecology, meteorology, sociology, bioinformatics, environmental science has received considerable attention in the statistical literature; see also Di Marzio et al. (2011a,b); Jammalamadaka et Sengupta (2001) for directional kernel density estimation for the estimation of the probability density function (pdf) derivatives with directional data. This approach can be considered as a good alternative to traditional parametric families for analyzing complex circular data, in particular for small and moderate sample size.

2 Circular kernel density estimation : A brief review

Let $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ be independent and identically distributed (i.i.d.) random sample of angles with an unknown probability density function (pdf) f on the support $\theta \in [0; 2\pi[$. A kernel circular density estimator of f can be defined as follows (see for example [3] and

$$\hat{f}(\theta; k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{k,\theta}(\Theta_i) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_k(\theta - \Theta_i). \quad (2)$$

where K_ν is a circular kernel function with concentration parameter $\nu > 0$. As a circular kernel, we can take the von Mises kernel. Then with this specific kernel, the circular estimator (1) is given by :

$$\hat{f}(\theta; \nu) = \frac{1}{n(2\pi)I_0(\nu)} \sum_{i=1}^n \exp\{\nu \cos(\theta - \Theta_i)\}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (3)$$

3 Bayesian global bandwidth selection

an independent random sample drawn from unknown pdf f . Our objective is to estimate the bandwidth, by using the Bayesian global approach. However, it is not possible to use the proper Bayesian analysis because ν is not a true parameter of the model. For this reason, we define $L(x_1, \dots, x_n; \nu) = \pi(x_1, \dots, x_n | \nu) = \prod_{i=1}^n f_\nu(x_i)$.

4 An MCMC algorithm

Because the posterior density given by (13) is not in closed form, we propose to use the wellknown Metropolis-Hastings (M-H) algorithm with random walk chain, for simulating samples from complicated posterior of ν . We can easily create a Markov chain ν^i by choosing an arbitrary initial value ν^0 and a proposal distribution $q(\tilde{\nu} | \nu^{k-1}, \gamma(k-1))$, where ν^{k-1} is the current realization, $\tilde{\nu}$ is the next realization and $\gamma(k-1)$ is the adaptive tuning parameter. After a burn-in period N_0 and a total number of iteration N , sufficiently large, the Markov chain converges to the posterior density. For this study we propose to use the random-walk M-H with normal density $N(\nu^{k-1}, \gamma(k-1))$ as version of q . The random-walk MH algorithm steps.

4.1 Choice of gamma prior parameters

Note that the implementation and the performance of the Bayesian approach depend on the choice of the gamma prior parameters α and β . We note that for the consistency of nonparametric circular kernel estimator with Bayesian bandwidth, we need to pick the shape parameter α of the gamma prior as a diverging sequence as $n \rightarrow \infty$. Then, following the idea of Zougab et al. (2016), we can choose $\alpha = n^{2/5}$ and fix the scale parameter $\beta \ll \alpha$. This choice of α which depends on the sample size n permits also the divergency of the Bayesian estimators to infinity when $n \rightarrow \infty$ with a rate close to that of the MISE optimal bandwidth given in Taylor (2008) and Oliveira et al. (2012).

5 Simulation results

In this section, we establish a simulation study to compare the performances of the Bayesian global approach with some classical selectors for bandwidth selection, via several circular distributions with varying complexity (von Mises, cardioid, various wrapped distributions and mixtures of them). Specially, we compare our approach with the following selectors :

- The rule of thumb proposed by Taylor (2008) and improved by Oliveira et al. (2013).
- The plug-in rule developed by Oliveira et al. (2012)
- The likelihood and the least-squares cross validation techniques (see Taylor (2008) and Oliveira et al. (2012))

5.1 Bayesian implementation and MCMC convergence

The Bayesian optimal bandwidth for the proposed method were implemented in the R software using the von Mises kernel and the gamma prior distribution. Note that the performance

of the Bayesian approach depends on the choice of the gamma prior parameters. In order to achieve the consistency of the von Mises kernel estimator with the Bayesian selectors, we choose $\alpha = n^{2/5}$ and fix $\beta \in \{1, 1.5, 2.5, 3, 3.5, 4\}$ as discussed in Subsection 4.1. However, to conserve space we only present the results with $\beta = 1.5$ (in general the results for different values of β are quite-similar). We have used the random-walk Metropolis–Hasting algorithm presented in subsection ???. The acceptance rate is fixed at 0.44, the burn-in period N_0 contains 1000 iterations and the following 4000 iterations were recorded for estimating ν_{Bayes1} and ν_{Bayes2} .

To measure the convergence of MCMC method, we calculate the BMSE and SIF. We used the model M7 to illustrate the results. Table 1 reports the sample size, the Bayes estimates (ν_{Bayes1} and ν_{Bayes2}), the BMSE and SIF. The plots of the chain $\nu^{(i)}$ for $i = N_0 + 1, \dots, N$ and the posterior of ν are also given in Figure ??? for the Model M7 with sample size $n = 50$. The values of indicators and plots show that the simulated chains have mixed very well.

TAB. 1 – Bayesian bandwidth estimators and associated BMSE and SIF indicators obtained from M7.

Model	n	ν_{Bayes1}	ν_{Bayes2}	BMSE	SIF
M7	10	4.9972	3.2890	0.1150	3.9997
	25	7.5104	6.4312	0.1148	6.0685
	50	7.0346	6.3706	0.0717	4.1781
	100	16.1461	13.0091	0.5391	10.6465
	200	21.7088	18.3260	0.2730	3.4843
	500	31.2948	27.6741	0.5992	10.2322

6 Conclusion

In this article, we have introduced the Bayesian MCMC sampling algorithm for bandwidth selection in the nonparametric circular kernel density estimation. The proposed approach can be considered as a good alternative to the existing classical methods. We have compared between the presented method, plug-in approaches and cross-validation methods. For evaluating their performances, we have computed the ISE criterion by using simulations for circular models with varying complexity. Our simulation studies show that the presented Bayesian approach for estimating the bandwidth ν gives results favorably comparable to those obtained with plug-in and cross-validation techniques in the sense of the ISE. We have also illustrated our procedure with two examples of real circular data, and the obtained results are satisfactory. This paper deals only with the univariate case. An extension of the Bayesian approach for bandwidth matrix selection in circular multivariate pdfs estimation will be given in a following paper.

Références

Di Marzio, M., A. Panzera, et C. C. Taylor (2011a). Kernel density estimation on the torus. *Journal of Statistical Planning and Inference* 141(6), 2156–2173.

circular kernel density estimation

- Di Marzio, M., A. Panzera, et C. C. Taylor (2011b). Kernel density estimation on the torus. *Journal of Statistical Planning and Inference* 141(6), 2156–2173.
- Jammalamadaka, S. R. et A. Sengupta (2001). *Topics in circular statistics*, Volume 5. world scientific.
- Oliveira, M., R. M. Crujeiras, et A. Rodríguez-Casal (2012). A plug-in rule for bandwidth selection in circular density estimation. *Computational Statistics & Data Analysis* 56(12), 3898–3908.
- Oliveira, M., R. M. Crujeiras, et A. Rodríguez-Casal (2013). Nonparametric circular methods for exploring environmental data. *Environmental and ecological statistics* 20(1), 1–17.
- Taylor, C. C. (2008). Automatic bandwidth selection for circular density estimation. *Computational Statistics & Data Analysis* 52(7), 3493–3500.
- Zougab, N., S. Adjabi, et C. C. Kokonendji (2016). Comparison study to bandwidth selection in binomial kernel estimation using bayesian approaches. *Journal of Statistical Theory and Practice* 10(1), 133–153.

Summary

A Bayesian procedure for bandwidth selection in kernel circular density estimation is investigated, when the Markov chain Monte Carlo (MCMC) sampling algorithm is utilized for Bayes estimates. Under the quadratic and entropy loss functions, the proposed method is evaluated through a simulation study and real data sets, which were already discussed in the literature. The proposed Bayesian approach is very competitive in comparison with the existing classical global methods, namely plug-in and cross-validation techniques.

Deconvolving Hazard Function for Associated Random Processes

Mohammed Es-salih Ben jrada*, Khadidja Djaballah **

* university of science and technology houari boumediene
esslihm1@gmail.com

** Kdjaballah@usthb.dz

Résumé. Nous considérons dans cet paper l'estimation des fonctions de Hasard par la méthode du noyau de déconvolution basé sur un processus strictement stationnaire pour des variables aléatoires positivement associées. le processus sous-jacent est supposé satisfaire à certaines conditions de mélange. Les propriétés asymptotiques de l'estimateur du taux de hasard dépendent fortement de la régularité de la distribution du bruit. la convergence en moyenne quadratique est donnée pour le cas ordinary smooth.

1 introduction

The main concern of this paper is to estimate non-parametrically the common Hazard rate function of a strictly stationary random process $\{X_i\}_{i=1}^n$, which consists of positively associated random variables, but due to the measuring tools and the nature of the experimental environment the variables X_i are not available to observe directly, instead of X_i we observe

$$Y_i = X_i + e_i \text{ for } i : 1..n, \quad (1)$$

where $\{e_i\}_{i=1}^n$ is the measurement error with a known distribution.

In data analysis, the Hazard rate plays the most important role, because it provides all information about the distribution of the variable under study, since it can reserve all functions (survival, density, and cumulative density) hence, it is a tool widely used by statisticians including survival analysis and reliability studies.

The model(1) called convolution problem, and it arises from various domains such as biological studies (Medgyessy 1977(6)), communication theory (Snyder, Miller and Schultz 1988 (7)), and applied physics (Jones and Misell 1967(4)) and some other fields. For example in communication theory and exactly in signal processing, Y_i may represent the voice heard when the i-th individual speaks, X_i might be its pure voice (real), e_i some noises heard when the i-th individual speaks, in this example, we recognize two different cases, direct communications : in most times the audible sound is the spoken sound itself ($Y_i = X_i$), communication through the phone : we observe ($Y_i = X_i + e_i$), where e_i is some perturbation due to a confusion of the phone-network

2 Estimation

The Hazard rate function of the random variable X is given by

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}, \tag{2}$$

where $f(x)$ and $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, its corresponding probability and cumulative density functions respectively.

In the case where no corrupted observations are present, the typical density estimator is so-called Parzen-Rosenblatt density estimator, given by

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - Y_i}{h_n}\right), \tag{3}$$

where $K(\cdot)$ is a kernel and it is defined usually as a probability density function of a gaussian random variable, and $\{h_n\}_{n=1}^{+\infty}$ is a sequence of positive numbers such that $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 0$. Otherwise, if we desire to estimate $f(x)$ under the convolution model given in (1), this is obviously a deconvolving density problem, the literature on deconvolution is very wide, but in order to keep the space restriction, we indicate only a few papers here, Masry(5) addressed how to estimate the unknown probability density of a stationary random processes, and studied its quadratic-mean convergence properties, Carrol and Hall(1) compute the rate of convergence for a normal errors. Fan (3) used of i.i.d observations to estimate the unknown density f , as well as its derivatives.

Such a model of measurements being contaminated by errors arises in many fields where the measurements can not be observed directly. The noise process $\{e_i\}_{i=1}^n$ consists of independent and identically distributed random variables, assume furthermore that it is independent of the process $\{X_i\}_{i=1}^n$, with known probability density $r(x)$, let $g(x)$ be the probability density function of the random process $\{Y_i\}_{i=1}^n$ which is given by

$$g(x) = \int_R f(x - u)r(u)du. \tag{4}$$

Denote by $\phi_g(t)$, $\phi_f(t)$, and $\phi_r(t)$ the characteristic functions corresponding to $g(x)$, $f(x)$, and $r(x)$ respectively, then we choose the kernel $k(x)$ as a bounded even probability density function, and let $\phi_k(t)$ be its Fourier transform given by

$$\phi_K(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(its)K(s)ds. \tag{5}$$

In all the sequel we consider the following definition set of $\lambda(x)$

$$D = \{x \in R : F(x) < 1\}.$$

Given the observations $\{Y_i\}_{i=1}^n$, we consider the estimator of $\lambda(x)$ defined by :

$$\lambda_n(x) = \frac{f_{h_n}(x)}{1 - F_{h_n}(x)}, \tag{6}$$

where

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n W_{h_n} \left(\frac{x - Y_i}{h_n} \right), \tag{7}$$

and

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_{h_n}(t)dt = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_{h_n} \left(\frac{x - Y_i}{h_n} \right), \tag{8}$$

with W_{h_n} is a deconvolution kernel given by

$$W_{h_n}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(its) \frac{\phi_K(h_nt)}{\phi_r(t)} dt, \tag{9}$$

and $M_{h_n}(x) = \int_{-\infty}^x W_{h_n}(t)dt$.

3 noise distributions

The objective of this paper is to study the Hazard rate estimator and derive the rates of convergence under different assumptions on the characteristic function ϕ_r of the random noise process $\{e_i\}_{i=1}^n$.

For a positive constants $B_j, j=1..3$, there are two cases which are usually distinguished

- ϕ_r decays algebraically at infinity $|t|^\beta |\phi_r(t)| |t| \rightarrow +\infty \rightarrow B_1$ with a real $\beta > 0$, in this case the tail called ordinary smooth.
- ϕ_r decays exponentially fast at infinity $B_2 e^{-m|t|^\alpha} |t|^\beta \leq |\phi_r(t)| \leq B_3 e^{-m|t|^\alpha} |t|^\beta$ for some reals β, α, m .

The process $\{X_i\}_{i=1}^{+\infty}$ is positively associated, or just associated, if every finite subcollection $\{X_i\}_{i=1}^n, n \geq 1$ holds the property given in the following definition.

A finite family of random variables $\{X_i\}_{i=1}^n$ is said to be associated if

$$Cov [\Phi_1(X_i, i \in A_1), \Phi_2(X_j, j \in A_2)] \geq 0, \tag{10}$$

for every pair of disjoint subsets A_1 and A_2 of $\{1, 2, \dots, n\}$, and Φ_j are coordinatewise increasing and the covariance exists for $j=1,2$.

Associated processes in this definition were introduced by Esary et al(2), and they constitute a distinct classes from mixing processes.

4 quadratic mean convergence

Now we will determine the necessary conditions on the bandwidth and the kernel concerning the consistency of the estimator $\lambda_n(x)$, and for this, we use the following bias-variance decomposition

$$E [(\lambda_n(x) - \lambda(x))^2] = var(\lambda_n(x)) + E [(\lambda_n(x) - \lambda(x))]^2, \tag{11}$$

When (11) tends to 0, we deduce that $\lambda_n(x) \xrightarrow{L_2} \lambda(x)$ which implies that $\lambda_n(x) \xrightarrow{p} \lambda(x)$. Firstly we trait the bias

4.1 bias

If the kernel k holds the two following assumptions

- $\int_{-\infty}^{+\infty} sk(s)ds = 0$,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} s^2k(s)ds < \infty$,

and if $f \in C^2(R)$ it is easy to see that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h_n)^{-2} \text{bias} [f_n(x)] = \frac{1}{2} f''(x) \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 k(s) ds, \quad (12)$$

if $F \in C^3(R)$ we find

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h_n)^{-2} \text{bias} [F_n(x)] = \frac{1}{2} F''(x) \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 k(s) ds. \quad (13)$$

4.2 variance

For the ordinary smooth case, E.masry(5) derived the asymptotic expression for the variance of the density estimator under some regularity conditions, and as $n \rightarrow +\infty$ we assume that $nh_n^{2\beta+1} \rightarrow +\infty$, then we have $\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n^{2\beta+1} \text{var}(f_n(x)) = g(x)Q_1$, at points x of continuity of g , where

$$Q_1 \Delta = \frac{1}{2\pi (\beta_1)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{2(\beta-l)} |\phi_k(t)|^2 dt. \quad (14)$$

For the variance of the cumulative density function, and if we assume that $nh_n^{2\beta-1} \rightarrow +\infty$ as $n \rightarrow +\infty$,

by the same regularity conditions, and for any point x of continuity of g , we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n^{2\beta-1} \text{var}(F_n(x)) = Q_2 g(x).$$

We note that the presence of contaminating noise reduces the mean-square convergence rate of $F_n(x)$ by a factor that depends on the rate of decay of the tail characteristic function $\phi_r(t)$ of $\{e_i\}_{i=1}^{+\infty}$.

4.3 delta method

In order to derive the bias and variance of $\lambda_n(x)$ we define the following mapping $\tau(x, y) = \frac{x}{y}$ for $y \neq 0$, and we assume that $v_n = \begin{pmatrix} f_n(x) \\ 1 - F_n(x) \end{pmatrix}$, it is easy to see $\lambda_n(x) = \tau(v_n)$, and its gradient in point v_n is given by $\nabla \tau(v_n) = \left(\frac{1}{1-F(x)}; \frac{-f(x)}{[1-F(x)]^2} \right)$. To evaluate the bias of this estimator, we start by giving an important asymptotic expression

$$E(\lambda_n(x)) = \tilde{E}(\lambda_n(x)) + O(h_n), \quad (16)$$

where $\tilde{E}(\lambda_n(x))$ is a centering term given by

$$\tilde{E}(\lambda_n(x)) = \frac{E[f_n(x)]}{1 - E[F_n(x)]}, \quad (17)$$

by convergence expressions in (12) and (13), it is easy to see that $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{E}(\lambda_n(x)) = \lambda(x)$, thus we can conclude that $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{bias}[\lambda_n(x)] = 0$. Next, we pass to deal with the variance, by the same approach as for the probability and the cumulative density functions, and if we assume that $\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n^{2\beta+2} \rightarrow +\infty$, then we find $\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n^{2\beta+2} \text{var}(\lambda_n(x)) = \frac{g(x)Q_2}{[1-F(x)]^2}$.

5 conclusion and perspective

From the results that have been done, and under suitable assumptions on the kernel $K(\cdot)$ and the smoothness parameters, it's possible to conclude that $\lambda_n(x) L_2 \rightarrow \lambda(x)$, in our future research, we intend to focus on the asymptotic normality and treat the super smooth case.

Références

- [1] Carroll, R. J. and Hall, P. (1988). Optimal rates of convergence for deconvolving a density. J. Amer. Statist. Assoc. 83, 1184- 1186.
- [2] Esary, J.D. Proschan, F. and Walkup, W. (1976). Association of random variable with applications, Ann math statist, 38, 1466-1474.
- [3] FAN, J. (1991). On the optimal rates of convergence for nonparametric deconvolution problems. Ann. Statist 19, 1257–1272.
- [4] Jones, A. F. and Misell, D. L. (1967). A practical method for deconvolution of experimental curves. Brit. J. Appl. Phys. 18, 1479-1483, 1967.
- [5] Masry, E. (1991). Multivariate probability density deconvolution for stationary random processes. IEEE Trans. Inform. Theory. 37, 1105-1115.
- [6] Medgyessy, P. (1977). Decomposition of Superpositions of Density Functions and Discrete Distributions. New York : Wiley.
- [7] Snyder, D. L. , Miller, M. I. and Schultz, T. J. (1988). Constrained probability density estimation from noisy data. in Proc. Conf. Information Science and Systems. 170?172.

Summary

The deconvolution kernel estimation of the Hazard rate functions of a strictly stationary process for positively associated random variables is considered, the underlying process is assumed to satisfy certain mixing conditions. The asymptotic properties of the hazard rate estimator depend heavily on the smoothness of the noise distributions, the quadratic mean convergence of the estimator is given for the ordinary smooth case.

Asymptotic Results for Robust Regression Estimation with Incomplete and Dependent Data

Hassiba Benseradj *, Zohra Guessoum **

*Faculty of Mathematics, UMBB,
avenue of independence Boumerdes, 35000, Algeria
h.benseradj@univ-boumerdes.dz,
<https://fs.univ-boumerdes.dz/>

**M.S.T.D Laboratory,
Faculty of Mathematics, USTHB
Po. Box 32, El-Alia1611, Algiers, Algeria
zguessoum@usthb.dz
<http://www.usthb.dz/>

Abstract. In this work, we establish weak Consistency, Asymptotic Normality and Asymptotic Mean Squared Error of an M-estimator of the regression function, under strong mixing hypothesis, from left truncated and right censored data.

1 Introduction

Let $(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)$ be a sequence of N strongly stationary mixing random variable, identically distributed as (X, Y) , taking value in the space $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Our purpose is to study the interaction between X and Y . One may choose, depending the situation under investigation, the conditional mean $\mathbb{E}[Y|X = x]$, which is known to be unstable if outliers are present in the data.

Robust regression is involved to overcome this problem, see (Huber, 1981). More precisely, let ψ_x be a real function which is strictly monotone and integrable on \mathbb{R} . For $x \in \mathbb{R}^d$ define the ψ_x -regression function $m_{\psi_x}(\cdot)$ as a zero with respect to θ of

$$\mathbb{E}[\psi_x(Y - \theta) | X = x] = 0, \quad (1)$$

In most works where the survival time Y is the variable of interest, referred here as the lifetime, two different problems appear: the first one, if the time origin of the lifetime precedes the start of the study. Only subjects that fail after the beginning of the study are being followed, otherwise they are left truncated. On the other hand, some of these subjects may not be completely observed due to different causes (death for a reason unrelated to the study, or be lost to follow-up), they are then right censored. We are typically in a left truncation and right censoring (LTRC) situation. This type of incomplete data is often encountered in medicine, economics, astronomy,...etc.

2 Model and Estimator

Let $\{(Y_k, T_k, W_k), 1 \leq k \leq N\}$ be a sequence of random vectors from (Y, T, W) , where Y denotes the lifetime under study with continuous distribution function (d.f) F . T and W are the variables of the left truncation and right censoring time with continuous (d.f's) L and G , respectively. Let

$$Z = (Y \wedge W) \quad \text{and} \quad \delta = \mathbf{1}_{\{Y \leq W\}},$$

where $(t \wedge u) := \min(t, u)$, and δ is the indicator of censoring status. In random LTRC model one observe (Z, T, δ) only if $Z \geq T$. Set $\mu = \mathbb{P}(T \leq Z)$, then we need to assume that $\mu > 0$, otherwise, nothing is observable. Consider the presence of a covariate X , and assume that X admits (d.f) $V(\cdot)$ and a density $v(\cdot)$. Then, denote by $(X_i, Z_i, T_i, \delta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$; ($n \leq N$) a stationary random sample from (X, Z, T, δ) which one really observe (ie, $T_i \leq Z_i$). Denoted by \mathbb{P} and \mathbf{P} the probability measure related to the N sample, and the actually observed n sample, respectively. Also \mathbb{E} and \mathbf{E} the expectation operators related to \mathbb{P} and \mathbf{P} respectively.

In regression analysis, one expects to identify the relationship between X and Y via the robust regression, this nonparametric model denoted $m(x)$, is implicitly defined as solution of equation (1), where its left hand side can be written as

$$\mathbb{E}[\psi_x(Y - \theta) | X = x] = \frac{\int \psi_x(y - \theta) f_{X,Y}(x, y) dy}{v(x)},$$

with $v(x) > 0$. Set

$$\Psi_x(x, \theta) := \mathbb{E}[\psi_x(Y - \theta) | X = x] v(x),$$

then $m(\cdot)$ can be viewed as a solution of $\Psi_x(x, \theta) = 0$.

Combining the ideas of robustness with those of smoothed regression, we define a pseudo estimator and a feasible estimator of $\Psi_x(x, \theta)$ respectively by

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_x(x, \theta) &:= \frac{\mu}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \frac{\delta_i \psi_x(Z_i - \theta)}{L(Z_i)(1 - G(Z_i))}, \\ \hat{\Psi}_x(x, \theta) &:= \frac{\mu_n}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \frac{\delta_i \psi_x(Z_i - \theta)}{L_n(Z_i)(1 - G_n(Z_i))}, \end{aligned}$$

where $K(\cdot)$ is some kernel function on \mathbb{R}^d and $h_n > 0$ is a bandwidth tending to 0 as $n \rightarrow \infty$. G_n , and L_n are the Kaplan-Meier, see (Kaplan EM, 1958) and the Lynden-Bell, see (Lynden-Bell, 1971) estimators, of the distributions functions G and L respectively. μ_n is a consistent estimate of μ .

Naturally a pseudo estimator and a feasible estimator of $m(x)$ denoted $\tilde{m}(x)$ and $\hat{m}(x)$ respectively, are a zero w.r.t θ of

$$\tilde{\Psi}_x(x, \theta) = 0, \quad \hat{\Psi}_x(x, \theta) = 0,$$

respectively. In the sequel, $\{(X_i, Z_i, T_i, \delta_i), 1 \leq i \leq n\}$ is assumed to be stationary α -mixing sequences of random vectors. Recall that a sequence $\{\zeta_k, k \geq 1\}$ is said to be α -mixing (strongly mixing) if the mixing coefficient

$$\alpha(n) \stackrel{def}{=} \sup_{k \geq 1} \sup \{ |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|; A \in F_{n+k}^\infty, B \in F_1^k \},$$

converge to zero as $n \rightarrow \infty$ where $F_l^m = \sigma \{ \zeta_l, \zeta_{l+1}, \dots, \zeta_m \}$ denotes the σ -algebra generated by $\zeta_l, \zeta_{l+1}, \dots, \zeta_m$ with $l \leq m$.

3 Main Results

3.1 Consistency

Proposition 3.1 *Under classical assumptions of the kernel robust regression estimation under α -mixing data, we have*

$$\widehat{\Psi}_x(x, \theta) \xrightarrow{P} \Psi_x(x, \theta) \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

where \xrightarrow{P} denotes convergence in probability.

Theorem 3.1 *Under conditions of above Proposition we have*

$$\widehat{m}(x) \xrightarrow{P} m(x) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

3.2 Asymptotic Normality

Proposition 3.2 *Under classical assumptions of the kernel robust regression estimation under α -mixing data, we have*

$$\sqrt{nh_n^d}(\widehat{\Psi}_x(x, \theta) - \Psi_x(x, \theta)) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_0^2(x, \theta)) \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

where

$$\sigma_0^2(x, \theta) := \Gamma_x(x, \theta) \int_{\mathbb{R}^d} K^2(w) dw, \quad \Gamma_x(u, \theta) := \mathbb{E} \left[\frac{\mu \psi_x^2(Y_1 - \theta)}{L(Y_1) \overline{G}(Y_1)} \middle| X_1 = u \right] v(u), \quad (2)$$

and \xrightarrow{D} denotes convergence in distribution.

Theorem 3.2 *Under conditions of Proposition 3.2 we have*

$$\sqrt{nh_n^d}(\widehat{m}(x) - m(x)) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2(x)) \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

where

$$\sigma^2(x) := \frac{\sigma_0^2(x, m(x))}{\left(\frac{\partial \Psi_x(x, m(x))}{\partial \theta} \right)^2},$$

and $\sigma_0^2(x, \cdot)$ is defined in (2).

Note that Theorem 3.1 and 3.2 extend the result of (Wang and Liang, 2012) from truncated dependent data, to both truncated censored data.

3.3 Theoretical optimal bandwidth

A commonly used criterion for selecting a local optimal bandwidth, where h_n is a function of x , $h_n := h_n(x)$, is the mean squared error (*MSE*) distance, defined by

$$MSE(\tilde{m}(x); h) := \mathbf{E} \left[(\tilde{m}(x) - m(x))^2 \right],$$

Proposition 3.3 *Under classical assumptions of the kernel robust regression estimation under α -mixing data, we have*

$$MSE(\tilde{m}(x)) = Avar + Abias^2 + o(h_n^4) + o\left(\frac{1}{nh_n^d}\right)$$

where

$$Avar(\tilde{m}(x)) := \frac{1}{nh_n^d} \frac{\Gamma_x(x, m(x))}{\left(\frac{\partial \Psi_x(x, m(x))}{\partial \theta}\right)^2} \int_{\mathbb{R}^d} K^2(w) dw,$$

and

$$Abias(\tilde{m}(x)) := \frac{h_n^2}{2} \left\{ \frac{-\sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{\partial^2 \Psi_x(x, m(x))}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^d} w_i w_j K(w) dw}{\frac{\partial \Psi_x(x, m(x))}{\partial \theta}} \right\}.$$

Theorem 3.3 *Under the same assumptions as Propositions 3.3 the optimal local bandwidth which minimize the MSE is given by*

$$h_{MSE}^{opt}(x) = \frac{1}{n^{(1/(d+4))}} \left(d\Gamma_x(x, m(x)) \int_{\mathbb{R}^d} K^2(w) dw \left\{ \sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{\partial^2 \Psi_x(x, m(x))}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^d} w_i w_j K(w) dw \right\}^{-2} \right)^{\frac{1}{d+4}}.$$

References

- Huber, P. (1981). *Robust Statistics*. New York: John Wiley & Sons.
- Kaplan EM, M. (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations. *J Am Stat Assoc* 53, 457–481.
- Lynden-Bell, D. (1971). A method of allowing for known observational selection in small samples applied to 3cr quasars. *Monthly Notices Roy. Astronom Soc* 155, 95–118.
- Wang, J. and H. Liang (2012). Asymptotic properties for an m-estimator of the regression function with truncation and dependent data. *J. Korean Stat. Soc* 41, 351–367.

Résumé

Dans ce travail, nous établissons la Consistance faible, la Normalité Asymptotique et l'Erreur Quadratique Moyenne Asymptotique du M-estimateur de la fonction de régression, sous l'hypothèse de forte mélangeance, pour des données tronquées à gauche et censurées à droite.

Nonparametric estimation of the regression function for twice censored data

Sabrina Benzamouche, Elias Ould-Saïd, ourida Sadki

Laboratoire MSTD, Faculté de Mathématiques, USTHB, BP 32, El-Alia 16111, Algiers, Algeria,
sabrina_benzamouche@yahoo.com,
osadki@usthb.dz,

Laboratoire LMPA, Faculté de Mathématiques, ULCO, IUT de Calais. 19, rue Louis David. Calais, 62228, France,
Elias.Ould-Saïd@univ-littoral.fr

Résumé. In this paper, we are interested in the nonparametric estimation of the regression function for incomplete data. At first, we recall some established results of some classical non-parametric estimator of the regression function, for twice censored data. In a second step, we focus on the nonparametric relative regression estimation. We construct a kernel type estimator of the regression function for twice censored data and we study its asymptotic behavior.

1 Introduction

Consider the regression model $Y = r(X) + \epsilon$, where Y is a random variable (rv) of interest, X is a random covariate such that the error ϵ has zero mean and is uncorrelated with X . In the classical regression model, the purpose is to find a function $r^*(x)$ which achieves the minimum of the mean squared error

$$\mathbb{E} \left[(Y - r(x))^2 | X \right], \quad (1)$$

however, this loss function which is considered as a measure of the prediction performance may be unadapted to some situations. So, in the following, we circumvent the limitations of this classical regression by estimating the operator of regression with respect to the minimization of the following mean squared relative error (MSRE), for $Y > 0$

$$\min_r \mathbb{E} \left[\left(\frac{Y - r(x)}{Y} \right)^2 | X \right] \quad (2)$$

it is easy to see that the solution of the minimization problem of (2) is given by

$$\frac{\mathbb{E}(Y^{-1}|X)}{\mathbb{E}(Y^{-2}|X)},$$

provided the first two conditional inverse moments of Y given X are finite. Unfortunately in practice, it is not always possible to have available complete data, so we will

relative error regression

have an incompleted data such as the case of : the right censorship, left censorship and twice censorship model, the latter is given by Patiliea et Rollin (2006). Kebabi et Messaci (2012) deal with the nonparametric estimation of the regression function in the case of classical regression. Our goal is to built a new kernel estimator of the mean squared relative error prediction for the regression function under twice censored data and establish his properties.

2 Twice censored model

Morales et al. (1991) investigate the cause of death of trees, which died before the end of the study and the date of infection was unknown. Clearly this study is of survival times that are called twice censored. It corresponds to model 1 in Patiliea et Rollin (2006), in this case and according to them, instead of observing the r.v. of interest Y we observe the couple (Z, A) along with $\{Z := (Y \wedge R) \vee L\}$ (\wedge mean the minimum and \vee the maximum), where Y is the survival time with distribution function df F_Y , L the left censoring with df F_L , R the right censoring with df F_R and A the indicator of censoring. More precisely, A is a discrete rv taking values in $\{0, 1, 2\}$ where 0 corresponds to the observation of Y , while 1 and 2 indicate

the observation of R and L respectively, $A = \begin{cases} 0, & \text{if } L < Y < R \\ 1, & \text{if } L < R \leq Y \\ 2, & \text{if } Y \wedge R \leq L \end{cases}$

Recall that to ensure the identifiability of the model, a sufficient condition is to assume the r.v.'s Y , R and L are be mutually independent. Patiliea et Rollin (2006) have proposed product limit estimators of the survival function of the latent variables Y , R and L , which have the advantage of being explicitly (contrary to the estimators given in Turnbull (1974)).

In practice, S_R and F_L are usually unknown we replace them by their corresponding estimates as follows, denote by $\{W_j, 1 \leq j \leq M\}$ the distinct values in increasing order of $\{Z_i, 1 \leq i \leq n\}$, define $D_{kj} = \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i=W_j, A_i=k\}}$ and the $N_j = \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i \leq W_j\}}$ the product limit estimator of S_R given in Patiliea et Rollin (2006) is

$$S_n(W_j) = \prod_{l=1}^j \left\{ 1 - \frac{D_{0l}}{U_{l-1} - N_{l-1}} \right\} \text{ where } U_{j-1} = n \prod_{l=j}^M \left\{ 1 - \frac{D_{2l}}{N_l} \right\},$$

reversing time, the obtained reverse estimate of the Kaplan et Meier (1958) one is an estimator of F_L (left censoring) and is given by

$$F_n(W_j) = \prod_{l=j}^M \left\{ 1 - \frac{1_{\{A_l=2\}}}{l} \right\}.$$

3 Nonparametric estimation of the regression function for censored data

We suppose that the joint density of (X, Y) denoted by $f_{X,Y}$ exists, then in model (1) $r(x)$ can be written as

$$r(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} y f_{X,Y} dy}{f(x)}.$$

In the case of no censoring, it is well known that a linear estimate of the conditional regression of model (1) is given by

$$r_n(x) = \sum_{i=1}^n W_{in} Y_i,$$

where $W_{in}(x) = W_{in}(x, X_1, X_2, \dots, X_n)$ are weights that depend on x and X_1, X_2, \dots, X_n . We recall that the well-known kernel estimator, which is obtained by choosing the following weights

$$W_{in}(x) = \frac{K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)},$$

where K is a kernel function on \mathbb{R} and (h_n) a non negative sequence which goes to zero as n goes to infinity.

In the twice censoring model, unfortunately, Y_i is not available in our setting. We can only observe a sample $(X_i, Z_i, A_i)_{1 \leq i \leq n}$ of i.i.d observations of (X, Z, A) , so a feasible estimator, constructed in Messaci (2010), is given by

$$r_n(x) = \sum_{i=1}^n W_{in}(x) \frac{Z_i}{S_n(Z_i)F_n(Z_i)},$$

the sum in the last equation is taken for subscripts i such that $S_n(Z_i) \neq 0$ and $F_n(Z_i) \neq 0$. Kebabi et Messaci (2012) established strong uniform convergence with a rate for this estimator.

4 Nonparametric relative error estimation of the regression function

Clearly, the solution of the minimization of the mean squared relative error (MSRE) in model (2), is expressed by

$$r(x) = \frac{\mathbb{E}(Y^{-1}|X = x)}{\mathbb{E}(Y^{-2}|X = x)}. \tag{3}$$

Bouhadjera et al. (2019) and Khardani et Slaoui (2019) studied the case of right censored data.

We focus on the nonparametric relative error estimation of the regression function under twice censored data. We define $r_n(x)$ as an estimator of $r(x)$, for any $x \in \mathbb{R}$ by

$$r_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n 1_{\{A_i=0\}} \frac{Z_i^{-1}}{S_n(Z_i)F_n(Z_i)} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^n 1_{\{A_i=0\}} \frac{Z_i^{-2}}{S_n(Z_i)F_n(Z_i)} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)}.$$

We proved strong uniform convergence with a rate for this kernel regression estimate and we study the asymptotic normality.

relative error regression

Références

- Bouhadjera, F., E. Ould-Saïd, et M. R. Remita (2019). Nonparametric relative error estimation of the regression function for censored data. (<https://arxiv.org/abs/1901.09555>).
- Kaplan, E. et P. Meier (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations. *the American Statistical Association* 53, 458–481.
- Kebabi, K. et F. Messaci (2012). Rate of the almost complete convergence of a kernel regression estimate with twice censored data. *Statistics and Probability Letters* 82, 1908–1913.
- Khardani, S. et Y. Slaoui (2019). Nonparametric relative regression under random censorship model. *Statistics and Probability Letters* 151, 116–122.
- Messaci, F. (2010). Local averaging estimates of the regression function with twice censored data. *Statistics and Probability Letters* 80, 1508–1511.
- Morales, D., L. Pardo, et V. Quesada (1991). Bayesian survival estimate for incomplete data when the life distribution is proportionally related to the censoring time distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods* 20, 831–850.
- Patiliev, V. et J. M. Rollin (2006). Product-limit estimators of the survival function with twice censored data. *The Annals of Statistics* 34, 925–938.
- Turnbull, B. (1974). Nonparametric estimation of a survivorship function with doubly censored data. *the American Statistical Association* 69, 169–173.

Summary

Dans cet article, nous nous intéressons à l'estimation non paramétrique de la fonction de régression pour les données incomplètes. Dans un premier temps, nous rappelons certains résultats établis sur les estimateurs non paramétriques classiques de la fonction de régression, dans un modèle de censure mixte. Dans un deuxième temps, nous nous intéressons à l'estimation par erreur relative de la fonction de régression, nous construisons un estimateur et nous étudions ses propriétés asymptotiques.

Simulation de Données Incomplètes et Dépendantes et Calcul de l'Estimateur Non-Paramétrique de la Fonction de Régression

Siham Bey, Zohra Guessoum, Abdelkader Tatachak

Lab MSTD, Faculté de Mathématiques, USTHB, BP 32 El Alia, 16111 Alger Algérie
sbey@usthb.dz,

Résumé. Un nouvel estimateur par noyau proposé pour la fonction de régression est calculé, dans les cas linéaire et non-linéaire, utilisant un échantillonnage simulé pour des données dépendantes tronquées à droite et censurées à gauche. Le calcul de l'erreur quadratique moyenne (EQM) permet de trouver le paramètre de lissage h optimal utilisé dans le calcul de notre estimateur. Les résultats de simulation avec le h optimal sont comparés à ceux obtenus dans le cas où h est fixé.

1 Introduction

Soit (\mathbf{X}, Y, T, C) un vecteur aléatoire, où Y est une durée de vie de fonction de distribution (fd) F , \mathbf{X} est le vecteur aléatoire des covariables reliées à Y à valeurs dans \mathbb{R}^d ayant une fd jointe V et une densité jointe v , T est le temps aléatoire de troncature à droite de fd G et C représente le temps aléatoire de censure à droite ayant la fd L . On suppose que la variable aléatoire (va) d'intérêt Y est bornée et positive et (\mathbf{X}, Y) , T et C sont indépendants entre eux. On estime Y pour $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ donné par la fonction de régression qui est l'espérance conditionnelle

$$m(\mathbf{x}) := \mathbb{E}(Y|\mathbf{X} = \mathbf{x})$$

qui peut s'écrire $m(\mathbf{x}) = \frac{\psi(\mathbf{x})}{v(\mathbf{x})}$ avec $\psi(\mathbf{x}) := \int y F_{\mathbf{X}, Y}(\mathbf{x}, dy)$. L'estimation de la fonction $m(\mathbf{x})$ revient à l'estimation de la fonction $\psi(\mathbf{x})$ et de la densité $v(\mathbf{x})$.

Soient $\{(\mathbf{X}_i, Z_i, T_i); i = 1, \dots, N\}$ N réalisations (qui ne sont pas toutes observées) de (\mathbf{X}, Z, T) où $Z_i = \min(Y_i, C_i)$ est une va de fd H et densité h , et $\delta = \mathbb{I}_{\{Y \leq C\}}$ est l'indicatrice de censure. On peut facilement vérifier que $H = 1 - \bar{F}\bar{L}$ puisque Y et C sont indépendantes.

On suppose que chacune des deux suites $\{T_i\}_{1 \leq i \leq N}$ et $\{C_i\}_{1 \leq i \leq N}$ soit une suite de va's indépendantes et identiquement distribuées (iid).

L'échantillon aléatoire stationnaire qui peut être observé est $\{(\mathbf{X}_i, Z_i, T_i, \delta_i); i = 1, \dots, n\}$, où $n \leq N$ avec N inconnu et $n = \sum_{i=1}^N \mathbb{I}_{\{Y_i \geq T_i\}}$ aléatoire et connu. Soit $\alpha := \mathbb{P}[Z \geq T]$ avec $\alpha > 0$. Si $\alpha = 0$ alors aucune donnée ne peut être observée.

On rappelle qu'une suite finie de va $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)$ est dite associée si, pour deux fonctions croissantes Φ_1 et Φ_2 de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} pour lesquelles la covariance existe, on a

$$Cov[\Phi_1(\mathbf{Y}), \Phi_2(\mathbf{Y})] \geq 0.$$

Les suites de va's $\{\mathbf{X}_i\}_{1 \leq i \leq N}$, $\{Y_i\}_{1 \leq i \leq N}$ et $\{Z_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sont supposées être associées. Dans le Cas de données associées, on cite à titre d'exemple, pour le cas de censure à droite, Cai et Roussas (1998) qui ont établi des résultats sur l'estimateur de Kaplan-Meier, pour le cas de troncature à gauche, Guessoum et al. (2012) ont établi des résultats de convergence pour l'estimateur de Lynden-Bell, et enfin, parmi les travaux les plus récents, Guessoum et Tatachak (2018) ont traité le cas tronqué et censuré pour l'estimateur produit-limite. L'estimateur de la fonction de régression $m(\mathbf{x})$ est

$$\tilde{m}_n(\mathbf{x}) = \frac{\tilde{\psi}_n(\mathbf{x})}{\tilde{v}_n(\mathbf{x})}. \quad (1)$$

avec la condition que $\tilde{v}_n(\mathbf{x}) \neq 0$ et les deux estimateurs $\tilde{\psi}_n(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i Z_i}{G(Z_i)\bar{L}(Z_i)} K_d\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{X}_i}{h_n}\right)$ et $\tilde{v}_n(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{G(Z_i)\bar{L}(Z_i)} K_d\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{X}_i}{h_n}\right)$, où $C(y) = \mathbf{P}[T \leq y \leq Z]$, $K_d : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est un noyau d'ordre deux et le paramètre de lissage h_n associé à K_d est une suite qui tend vers zero quand $n \rightarrow \infty$. Soit le support compact $\mathfrak{D} \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d / v(\mathbf{x}) > 0\} \subset \mathbb{R}^d$.

Théorème 1 *Sous certaines conditions de régularité, pour tout $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$, nous avons*

$$E \{[\tilde{m}_n(\mathbf{x}) - m(\mathbf{x})]^2\} = \frac{1}{nh_n^d} \sigma_1^2(\mathbf{x}) + \frac{h_n^4}{4} b_1^2(\mathbf{x}) + o\left(\frac{1}{nh_n^d}\right)$$

où

$$\begin{aligned} \sigma_1^2(\mathbf{x}) := & \frac{\kappa}{v^2(\mathbf{x})} \left\{ \int \frac{\alpha y^2}{G(y)\bar{L}(y)} f_{X,Y}(\mathbf{x}, y) dy - 2m(\mathbf{x}) \int \frac{\alpha y}{G(y)\bar{L}(y)} f_{X,Y}(\mathbf{x}, y) dy \right. \\ & \left. + m^2(\mathbf{x}) \int \frac{\alpha}{G(y)\bar{L}(y)} f_{X,Y}(\mathbf{x}, y) dy \right\}, \end{aligned}$$

$$b_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left\{ \frac{\partial^2 m(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{v(\mathbf{x})} \left[\frac{\partial m(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial m(\mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \right\} \int t_i t_j K_d(\mathbf{t}) d\mathbf{t},$$

et $\kappa := \int_{\mathbb{R}^d} K_d^2(\mathbf{t}) d\mathbf{t} < +\infty$

En minimisant l'EQM asymptotique nous obtenons le paramètre de lissage optimal local

$$hopt(\mathbf{x}) = n^{\frac{-1}{d+4}} \left\{ \frac{d\sigma_1^2(\mathbf{x})}{b_1^2(\mathbf{x})} \right\}^{\frac{1}{d+4}}.$$

Remarque 1 *Puisque les valeurs de α , G et L sont inconnues alors, en les remplaçant par certains estimateurs, on obtient un autre estimateur pour $m(\mathbf{x})$ qui sera calculable et pour lequel des résultats asymptotiques de convergence presque sûre existent.*

2 Simulation

Considérons que \mathbf{X} est unidimensionnel ($d=1$). Pour $B = 300$ itérations, on génère des échantillons de taille n , à chaque itération on calcule le $hopt_s(x_l)$ pour $x_l \in \mathfrak{D} = [0.5; 3.5]; l =$

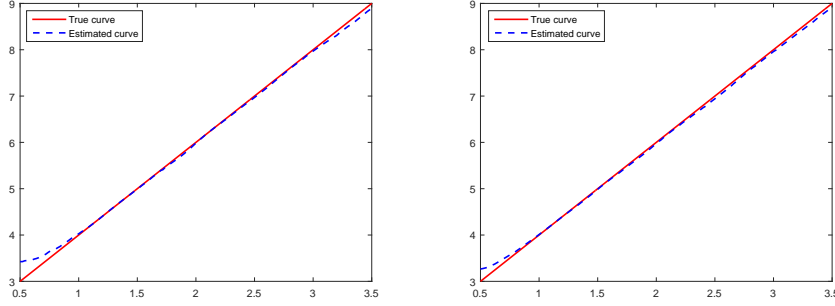


FIG. 1: $m(x) = 2x + 2$ et m_n pour $PT = 20\%$, $n = 100$ avec $PC = 10\%$ et $PC = 40\%$ respectivement.

$1, \dots, \mathcal{L}$ où l'intervalle \mathcal{D} est subdivisé avec un pas égal à 0.01. La moyenne des B valeurs obtenues de sera notée $hopt(x_l)$ qui sera injecté dans l'expression de notre estimateur après avoir généré B autres échantillons afin d'effectuer une représentation graphique utilisant la moyenne $\frac{1}{B} \sum_{s=1}^B m_{n,s}(x_l)$. On utilisera aussi $hopt(x_l)$ dans le calcul de l'EQM asymptotique globale suivante

$$EQMAG = \frac{1}{\mathcal{L}} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} EQMA(x_l),$$

avec $EQMA(x) = \frac{1}{nh_n^4} \sigma_1^2(x) + \frac{h_n^4}{4} b_1^2(x)$ obtenue du Théorème (1). Les résultats correspondants à ce calcul sont présentés dans les tableaux ci-dessous pour différentes valeurs de n en faisant varier le pourcentage de troncature (PT) et le pourcentage de censure (PC).

Pour une fonction de régression linéaire $m(x) = 2x + 2$ voici quelques résultats de simulation dont les valeurs de l'EQMAG sont dans le tableau ci-dessous, et cela pour un $PT = 20\%$.

	$PC = 10\%$	$PC = 40\%$
n=100	0.30×10^{-2}	1.01×10^{-2}
n=300	0.08×10^{-2}	0.17×10^{-2}

TAB. 1: EQMAG de m_n dans le cas linéaire pour $PT = 20\%$.

Pour une fonction de régression exponentielle $m(x) = exp(x/2)$ voici quelques résultats de simulation dont les valeurs de l'EQMAG sont dans le tableau ci-dessous, et cela pour un $PC = 20\%$.

	$PT = 10\%$	$PT = 40\%$
n=100	0.15×10^{-3}	1.50×10^{-3}
n=300	0.07×10^{-3}	0.44×10^{-3}

TAB. 2: EQMAG de m_n dans le cas non-linéaire pour $PC = 20\%$.

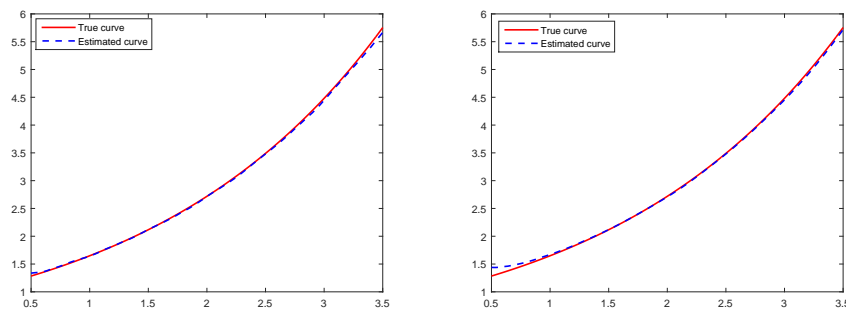


FIG. 2: $m(x) = \exp(x/2)$ et m_n pour $PC = 20\%$, $n = 100$ avec $PT = 10\%$ et $PT = 40\%$ respectivement.

Références

- Cai, Z. et G. Roussas (1998). Kaplan-meier estimator under association. *Journal. Multivariate Anal* 67, 318–348.
- Guessoum, Z., E. Ould Saïd, O. Sadki, et A. Tatachak (2012). A note on the lynden-bell estimator under association. *Statistics and Probability Letters* 82, 1994–2000.
- Guessoum, Z. et A. Tatachak (2018). Asymptotic results for truncated-censored and associated data. *The Indian Journal of Statistics* doi.org/10.1007/s13571-018-00185-4.

Summary

A new kernel estimator proposed for the regression function is computed, in the linear and non-linear cases, using simulated sampling for left truncated, right censored and dependent data. The calculation of the mean squared error makes it possible to find the optimal bandwidth h used in the calculation of our estimator. The simulation results with optimal h are compared to those obtained where h is fixed.

Application des divergences à l'estimation semi-paramétrique des copules pour des données censurées

Mohamed Boukeloua

Ecole Nationale Polytechnique de Constantine, Département de la classe préparatoire,
BP 75, A, Nouvelle ville RP, 25001 Constantine, Algérie
Laboratoire LAMASD, Département de Mathématiques, Université les Frères Mentouri,
route d'Ain El Bey, 25017 Constantine, Algérie
boukeloua.mohamed@gmail.com

Résumé. Dans un modèle semi-paramétrique de copule, nous supposons que la copule C de la loi étudiée appartient à une famille paramétrique $\{C_\theta, \theta \in \Theta\}$ ($\Theta \subseteq \mathbf{R}^d$) et que les lois marginales sont inconnues. Dans le but d'estimer la vraie valeur de θ (notée θ_T), Bouzebda et Keziou (2010) ont proposé une approche basée sur la théorie des divergences. L'avantage de cette approche est le fait qu'elle permet d'obtenir la normalité asymptotique sans supposer que θ_T est un point intérieur de Θ . Notre travail consiste à étendre cette approche au cas des données bivariées, censurées à droite. Nous construisons dans ce cadre, des estimateurs pour θ_T et nous montrons leur consistance faible ainsi que leur normalité asymptotique.

1 La copule empirique pour les données censurées

Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires réelles (v.a.r.) positives, de fonction de répartition F et de lois marginales continues F_1 et F_2 , et soit $R = (R_1, R_2)$ un couple de v.a.r. positives, indépendantes de X , qui représente les variables de censure. L'observation disponible consiste en un échantillon $(Z_{1i}, Z_{2i}, \delta_{1i}, \delta_{2i})_{1 \leq i \leq n}$ de n v.a. indépendantes et de même loi que le vecteur $(Z_1, Z_2, \delta_1, \delta_2)$, où $Z_j = \min(X_j, R_j)$ et $\delta_j = 1_{\{X_j \leq R_j\}}$, $j \in \{1, 2\}$ ($1_{\{\cdot\}}$ désigne la fonction indicatrice). Dans tout ce qui suit, pour toute v.a. V , nous notons F_V et S_V la fonction de répartition et la fonction de survie de V , respectivement.

Pour montrer nos résultats visés, nous avons besoin d'utiliser la convergence faible du processus empirique de copule dans le cas des données censurées. Une telle convergence est prouvée uniquement pour quelques modèles particuliers par Gribkova et Lopez (2015). A cet effet, nous nous restreignons à étudier ces modèles que nous présentons dans la suite.

Modèle I. Nous supposons que S_R peut s'écrire sous la forme $S_R(t_1, t_2) = C_R(S_{R_1}(t_1), S_{R_2}(t_2))$, où C_R est une copule de survie connue.¹ Dans ce cadre Gribkova et Lopez (2015) ont étudié

1. La copule de survie C_R de R est définie par $C_R(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + \tilde{C}(1 - u_1, 1 - u_2)$, où \tilde{C} est la fonction copule de R .

Estimation semi-paramétrique des copules pour des données censurées

la copule empirique suivante.

$$C_n^{(I)}(u_1, u_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{1i} \delta_{2i}}{C_R(\widehat{S}_{R_1}(Z_{1i}), \widehat{S}_{R_2}(Z_{2i}))} 1_{\{F_{1n}^{(I)}(Z_{1i}) \leq u_1, F_{2n}^{(I)}(Z_{2i}) \leq u_2\}}, (u_1, u_2) \in [0, 1]^2,$$

où \widehat{S}_{R_1} (resp. \widehat{S}_{R_2}) est l'estimateur de Kaplan-Meier de S_{R_1} (resp. S_{R_2}), $F_{1n}^{(I)}(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} F_n^{(I)}(t_1, t_2)$ et $F_{2n}^{(I)}(t_2) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} F_n^{(I)}(t_1, t_2)$, avec

$$F_n^{(I)}(t_1, t_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{1i} \delta_{2i}}{C_R(\widehat{S}_{R_1}(Z_{1i}), \widehat{S}_{R_2}(Z_{2i}))} 1_{\{Z_{1i} \leq t_1, Z_{2i} \leq t_2\}}$$

est un estimateur de F .

Sous des conditions appropriées sur C_R , Gribkova et Lopez (2015) ont montré que le processus empirique $\sqrt{n}(C_n^{(I)} - C)$ converge faiblement vers un processus gaussien $G^{(I)}$.

Modèle II. Dans ce modèle, nous supposons que seulement X_1 est censurée, en d'autres termes $R_2 = \infty$ presque sûrement (p.s.). La copule empirique est définie dans ce cas comme suit (voir Gribkova et Lopez (2015)).

$$C_n^{(II)}(t_1, t_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{1i}}{\widehat{S}_{R_1}(Z_{1i}^-)} 1_{\{F_{1n}^{(II)}(Z_{1i}) \leq u_1, F_{2n}^{(II)}(Z_{2i}) \leq u_2\}}, (u_1, u_2) \in [0, 1]^2,$$

où $F_{1n}^{(II)}(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} F_n^{(II)}(t_1, t_2)$ et $F_{2n}^{(II)}(t_2) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} F_n^{(II)}(t_1, t_2)$, avec

$$F_n^{(II)}(t_1, t_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{1i}}{\widehat{S}_{R_1}(Z_{1i}^-)} 1_{\{Z_{1i} \leq t_1, Z_{2i} \leq t_2\}}$$

est un estimateur de F .

Sous des conditions appropriées sur les lois de X et R_1 , Gribkova et Lopez (2015) ont obtenu la convergence faible du processus empirique $\sqrt{n}(C_n^{(II)} - C)$ vers un processus gaussien $G^{(II)}$.

Modèle III. Dans ce modèle, nous supposons que la différence entre les variables de censure est observée i.e. $R_2 = R_1 + \varepsilon$, où ε est une v.a.r. observée et indépendante de R_1 . Ce modèle a été étudié par Gribkova et al. (2013). En remarquant que R_1 est censurée à droite par $\max(X_1, X_2 - \varepsilon)$, Gribkova et al. (2013) ont proposé l'estimateur suivant de F

$$F_n^{(III)}(t_1, t_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{1i} \delta_{2i}}{\widetilde{S}_{R_1}(\max(Z_{1i}, Z_{2i} - \varepsilon_i)^-)} 1_{\{Z_{1i} \leq t_1, Z_{2i} \leq t_2\}},$$

où \widetilde{S}_{R_1} est l'estimateur de Kaplan-Meier de S_{R_1} . Par ailleurs, la copule empirique est définie par

$$C_n^{(III)}(t_1, t_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{1i} \delta_{2i}}{\widetilde{S}_{R_1}(\max(Z_{1i}, Z_{2i} - \varepsilon_i)^-)} 1_{\{F_{1n}^{(III)}(Z_{1i}) \leq u_1, F_{2n}^{(III)}(Z_{2i}) \leq u_2\}}, (u_1, u_2) \in [0, 1]^2,$$

où $F_{1n}^{(III)}(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} F_n^{(III)}(t_1, t_2)$ et $F_{2n}^{(III)}(t_2) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} F_n^{(III)}(t_1, t_2)$.
 Gribkova et Lopez (2015) ont montré la convergence faible du processus empirique $\sqrt{n}(C_n^{(III)} - C)$ (vers un processus gaussien $G^{(III)}$) sous des hypothèses appropriées sur les lois de X , R_1 et ε .

Nous avons besoin du théorème suivant qui concerne la normalité asymptotique des statistiques d'ordre multivariées.

Théorème 1 Soit $h : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue à droite qui admet des discontinuités de première espèce, nous avons pour le modèle (j)

$$\sqrt{n} \left[\int_{[0,1]^2} h(u_1, u_2) d \left(C_n^{(j)}(u_1, u_2) - C(u_1, u_2) \right) \right] \xrightarrow{\mathcal{D}} \int_{[0,1]^2} h(u_1, u_2) dG^{(j)}(u_1, u_2).$$

2 Les modèles semi-paramétriques de copules

Dans un modèle semi-paramétrique de copule, nous supposons que la copule $C(u_1, u_2)$ a une forme paramétrique $C_\theta, \theta \in \Theta \subseteq \mathbf{R}^d$ et que les marginales F_1 et F_2 sont complètement inconnues. Posons $c_\theta(u_1, u_2) = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C_\theta(u_1, u_2)$ la densité de $C_\theta(u_1, u_2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^2 , et notons, respectivement, θ_T et θ_0 la vraie valeur de θ et la valeur qui correspond à l'indépendance des marginales (lorsqu'elle existe). Pour estimer θ_T , nous utilisons la théorie des φ -divergences que nous rappelons dans la suite. Soit φ une fonction définie de \mathbf{R} dans $[0, +\infty]$, strictement convexe et deux fois continûment différentiable. Pour toutes mesures de probabilité P et Q définies sur un espace mesurable (E, \mathcal{B}) , la φ -divergence entre Q et P est définie, lorsque Q est absolument continue par rapport à P , par

$$D_\varphi(Q, P) = \int_E \varphi \left(\frac{dQ}{dP}(x) \right) dP(x).$$

Bouzebda et Keziou (2010) ont montré que la φ -divergence entre C_{θ_0} et C_{θ_T} peut être écrite comme suit

$$D_\varphi(\theta_0, \theta_T) = \sup_{\theta \in \Theta} \left\{ \int_I \varphi' \left(\frac{1}{c_\theta(u)} \right) du_1 du_2 - \int_I \left[\frac{1}{c_\theta(u)} \varphi' \left(\frac{1}{c_\theta(u)} \right) - \varphi \left(\frac{1}{c_\theta(u)} \right) \right] dC_{\theta_T}(u) \right\},$$

pourvu que

$$\int_I \left| \varphi' \left(\frac{1}{c_\theta(u)} \right) \right| du_1 du_2 < \infty, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

où $I = (0, 1)^2$ et $u = (u_1, u_2)$. De plus, le sup est unique et est atteint pour $\theta = \theta_T$.

Donc $D_\varphi(\theta_0, \theta_T)$ et θ_T peuvent être estimés par

$$\widehat{D}_\varphi^{(j)}(\theta_0, \theta_T) = \sup_{\theta \in \Theta_\varepsilon} \int_I m(\theta, u) dC_n^{(j)}(u) \quad \text{et} \quad \widehat{\theta}_\varphi^{(j)} = \arg \sup_{\theta \in \Theta_\varepsilon} \left\{ \int_I m(\theta, u) dC_n^{(j)}(u) \right\}$$

($j \in \{I, II, III\}$ suivant le modèle considéré), où

$$m(\theta, u) = \int_I \varphi' \left(\frac{1}{c_\theta(u)} \right) du_1 du_2 - \left\{ \frac{1}{c_\theta(u)} \varphi' \left(\frac{1}{c_\theta(u)} \right) - \varphi \left(\frac{1}{c_\theta(u)} \right) \right\} =: \int_I K_1(\theta, u) du_1 du_2 - K_2(\theta, u)$$

et

$$\Theta_e = \left\{ \theta \in \mathbf{R}^d / \int_I \left| \varphi' \left(\frac{1}{c_\theta(u)} \right) \right| du_1 du_2 < \infty \right\}$$

est une extension de Θ rendant θ_0 un point intérieur de Θ_e .

Notons par $\frac{\partial m}{\partial \theta}(\theta, u)$ et $\frac{\partial^2 m}{\partial \theta^2}(\theta, u)$ le gradient et la matrice hessienne de $m(\theta, u)$, respectivement. Nous allons montrer la consistance faible et la normalité asymptotique de $\widehat{\theta}_\varphi^{(j)}$ sous les hypothèses suivantes.

H1 Les fonctions $\frac{\partial m}{\partial \theta}(\theta_T, \cdot)$ et $\frac{\partial^2 m}{\partial \theta^2}(\theta_T, \cdot)$ sont continues à droite et admettent des discontinuités de première espèce.

H2 Il existe un voisinage $N \subset \Theta_e$ de θ_T , tel que la première et la deuxième dérivée par rapport à θ de $K_1(\theta, u)$ sont dominées sur N par des fonctions intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^2 .

H3 La matrice $S = - \int_I (\partial^2 / \partial \theta^2) m(\theta_T, u) dC_{\theta_T}(u)$ est inversible.

Théorème 2 *Sous les hypothèses H1–H3, nous avons pour le modèle (j)*

1. Pour $B(\theta_T, n^{-1/3}) = \{\theta \in \Theta_e, \|\theta - \theta_T\| \leq n^{-1/3}\}$ et avec une probabilité approchant un quand $n \rightarrow \infty$, la fonction $\theta \mapsto \int_I m(\theta, u) dC_n^{(j)}(u)$ atteint son maximum en un point $\widehat{\theta}_\varphi^{(j)}$ intérieur à $B(\theta_T, n^{-1/3})$, ce qui implique que l'estimateur $\widehat{\theta}_\varphi^{(j)}$ converge en probabilité vers θ_T .
2. $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_\varphi^{(j)} - \theta_T)$ converge en loi vers un vecteur gaussien centré, de matrice de covariance $S^{-1}M^{(j)}S$, où $M^{(j)}$ est la matrice de covariance de $\int_I \frac{\partial m}{\partial \theta}(\theta_T, u) dG^{(j)}(u)$.

Références

- Bouzebda, S. et A. Keziou (2010). New estimates and tests of independence in semiparametric copula models. *Kybernetika* 46, 178–201.
- Gribkova, S. et O. Lopez (2015). Non-parametric copula estimation under bivariate censoring. *Scandinavian Journal of Statistics* 42, 925–946.
- Gribkova, S., O. Lopez, et P. Saint-Pierre (2013). A simplified model for studying bivariate mortality under right-censoring. *Journal of Multivariate Analysis* 115, 181–192.

Summary

In a semiparametric copula model, we assume that the copula C of the studied distribution belongs to a parametric family $\{C_\theta, \theta \in \Theta\}$ ($\Theta \subseteq \mathbf{R}^d$) and that the marginal distributions are unknown. In order to estimate the true value of θ (denoted by θ_T), Bouzebda et Keziou (2010) proposed an approach based on the theory of divergences. The advantage of this approach is the fact that it allows to obtain the asymptotic normality without assuming that θ_T is an interior point of Θ . Our work consists in extending this approach to the case of bivariate right censored data. In this context, we construct estimates for θ_T and we prove their weak consistency and asymptotic normality.

Kernel conditional quantile estimator under LTRC model with functional regressors

Hamida Chemerik*, Zohra Guessoum**

*Faculty of Mathematics, UMBB,
avenue of independence Boumerdes, 35000, Algeria
hchemerik@yahoo.fr
<https://fs.univ-boumerdes.dz/>

**M.S.T.D Laboratory,
Faculty of Mathematics, USTHB
BP 32, El-Alia 16111, Algiers, Algeria
zguessoum@usthb.dz
<http://www.usthb.dz/>

Abstract. In this work, we study the kernel conditional quantile estimation when the random real response variable Y is subject to left truncation and right censoring (LTRC) data given a random variable X taking its values in a semi-metric space S . The almost sure convergence of this estimate are established when the considered sample is independent and identically distributed (i.i.d). The rate of convergence is expressed as a function of the small ball probability for the co-variable X .

1 Introduction

The goal of this paper is to give some contributions to the nonparametric estimation when the explanatory variable X takes its value in a semi metric space (S, d) (functional model), where d denotes the semi-metric and Y having a distribution function (df) F . Our aims is to study the relation between X and Y via the quantile regression estimation under LTRC model. It is well- Known that the quantile regression plays a central role in various statistical studies. In particular, nonparametric regression quantile obtained by inverting a kernel estimator of the conditional distribution.

The study of statistical models for infinite dimensional data has received the attention of several authors. In parametric case, the contribution of Ramsay and Silverman (2005) offers a wide range of statistical methods for functional variables, in particular for independent variables. While the book of Bosq (2000) treats dependent linear functional models. The book of Ferraty and Vieu (2006) constitutes a reference in the field for several functional nonparametric models.

There are few results for nonparametric estimation with incomplete functional data (censored and / or truncated), for instance Helal and Ould Said (2016) studied the conditional quantile in left truncation data and functional regressors for the i.i.d case.

Conditional quantile estimator in LTRC model

Horrigue and Ould Said (2011) studied the conditional quantile estimation for censorship model and functional regressors in dependent case .

For $x \in S$, we will denote the conditional distribution function of Y given $X = x$ by

$$\forall y \in \mathbb{R}, F(y/x) = \mathbb{P}(Y \leq y/X = x)$$

Then we will denote by $f(. / x)$ the conditional density of Y given $X = x$

Let $p \in (0, 1)$, the conditional quantile of order p is defined by

$$\xi_p(x) = \inf\{y, F(y/x) \geq p\}$$

Our goal is to estimate the function $\xi_p(x)$ which satisfies $F(\xi_p(x)/x) = p$, in LTRC model.

2 LTRC Models

Let $\{(Y_i, T_i, C_i), 1 \leq i \leq N\}$ be a sequence of i.i.d. random vectors from (Y, T, C) , in which Y is the variable of interest with continuous distribution function (df) F , T and C are the variables of left truncation and right censoring time with df L and G respectively. To ensure the identifiability of the model , The random variables which are in fact observed are (T, Z, δ) if $Z \geq T$, where $Z = \min(Y, C)$ and $\delta = I(Y \leq C)$ is the indicator of censoring status. When $Z < T$ nothing is observed. By independence between Y and C , Z has distribution function

$$H = (1 - F)(1 - G)$$

Denote by $(X_i, T_i, Z_i, \delta_i) i = 1, 2, \dots, n; (n \leq N)$ the actually observed sample (that is for i 's such that $Z_i \geq T_i$). We will denote by \mathbb{P} the absolute probability (related to N -sample) whereas $P(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot / Z \geq T)$ will be the conditional probability (related to the n -sample). Set $\theta = \mathbb{P}(Z \geq T) > 0$. A consistent estimate $\hat{\theta}$ of θ can be given by $\frac{n}{N}$, and by the law of large numbers we have as $N \rightarrow \infty$,

$$\hat{\theta} \rightarrow \theta, \mathbb{P} - as.$$

For any distribution function W , let $a_W = \inf \{x ; W(x) > 0\}$ and $b_W = \sup \{x ; W(x) < 1\}$ denote the left and right endpoints of support. In our works, we assume that

$$a_L \leq a_H, b_L \leq b_H, \text{ and } \int_{a_H}^{\infty} \frac{dF(z)}{L^2(z)} < \infty.$$

3 Definition of the estimator and results

For any $x \in S$, we denote by Ω some compact subset of S , $B(x, h)$ denotes the ball centered at x with radius h , for $h > 0$ and $d(x, X_i)$ is a random variable with distribution function $\phi_x(h) := P(d(x, X_i) \leq h) = P(X_i \in B(x, h))$.

In the case of LTRC model, we propose the kernel estimator of $F(y|x)$ defined as

$$F_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\bar{G}_n(Z_i)L_n(Z_i)} K\left(\frac{d(x, X_i)}{h_K}\right) H\left(\frac{y-Z_i}{h_H}\right)}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\bar{G}_n(Z_i)L_n(Z_i)} K\left(\frac{d(x, X_i)}{h_K}\right)}$$

with the convention $\frac{0}{0} = 0$. Where

- K is Kernel function and H is a distribution function;
- $h_K := h_{n,K}$ (resp $h_H := h_{n,H}$) is a sequence of positive real numbers tending to zero as n tends to infinity;
- \bar{G}_n is the Kaplan-Meier estimator of G in the case of right censoring;
- L_n is the Lynden-Bell estimator of L in the case of left truncation.

Then, a natural estimator of $\xi_p(x)$ is given by

$$\xi_{n,p}(x) = \inf\{y, F_n(y|x) \geq p\}$$

Which satisfies

$$F_n(\xi_{n,p}(x)/x) = p.$$

Now, we establish the following result.

Proposition 3.1 *Under convenient assumptions, For any $a_H < a < b < b_H$ we have*

$$\sup_{x \in \Omega} \sup_{y \in [a,b]} |F_n(y/x) - F(y/x)| = O\left(h_K^{\beta_1} + h_H^{\beta_2}\right) + O\left(\left(\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \text{ a.s as } n \rightarrow +\infty$$

Where β_1 and β_2 are strictly positive constants

Theorem 3.1 *Under convenient assumptions and if $f(y|x) > 0$ for all y in neighborhood of $\xi_p(x)$, we have*

$$\sup_{x \in \Omega} |\xi_{p,n}(x) - \xi_p(x)| = O\left(h_K^{\beta_1} + h_H^{\beta_2}\right) + O\left(\left(\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \text{ a.s as } n \rightarrow +\infty$$

References

- Bosq, D. (2000). *Linear Processus in Function Spaces, Theory and Application, Lecture Notes in Statistics*. New York: Springer Verlag.
- Ferraty, F. and P. Vieu (2006). *Nonparametric Functional Data Analysis, Theory and Practice*. New York: Springer Verlag.
- Helal, N. and E. Ould Said (2016). Kernel conditional quantile estimator under left truncation for functional regressors. *Opuscula Math* 36, 25–48.
- Horigue, W. and E. Ould Said (2011). Strong uniform consistency of a nonparametric estimator of a conditional quantile for censored dependent data and functional regressors. *Random Operators and Stochastic Equations* 19, 131–156.
- Ramsay, J. and B. Silverman (2005). *Functional Data Analysis, second edition*. New York: Springer Verlag.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions l'estimation à noyau du quantile conditionnel dans un modèle tronqué à gauche et censuré à droite (LTRC) lorsque la variable d'intérêt Y est réelle et la co-variable X est à valeurs dans un espace semi-metric S . La convergence presque sûre est établie lorsque les données sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d). La vitesse de convergence est exprimée en fonction de la probabilité des petites boules pour la co-variable X .

A new size biased distribution : proprieties and application

Chouia Sarra*, Zeghdoudi Halim**

*LaPS laboratory, Badji-Mokhtar University, Box 12, Annaba, 23000, Algeria
chouiasarra3@gmail.com,
hzeghdoudi@yahoo.fr

Abstract. The present paper offer a new extension to Zeghdoudi distribution[2] called size biased zeghdoudi distribution (SBZGD).Several properties of this distribution such as first four moments, coefficient of variation (C.V.), skewness and kurtosis are established. The estimation of its parameter has been discussed using the method of moments and the method of maximum likelihood estimation. A simulation study is carried out to examine the bias and mean square error of maximum likelihood estimator of the parameter.Finally, an application of the model to a real data set is presented and compared with the fit attained by some other well-known.

1 Introduction

Size-biased distributions are the special cases of the weighted distributions and arise in practice when observations from a sample are recorded with probability proportional to some measure of unit size and provide a unifying approach for the problems where the observations fall in the non-experimental, non-replicate, and non-random categories. Fisher, R. A.(1934) introduced the weighted distributions to model ascertainment bias and later was discussed by Rao, C. R (1965) . If the random variable X has the probability distributions function (pdf), $f(x; \theta)$ then the size-biased distribution is of the form:

$$f(x; \theta) = \frac{x^\alpha \cdot f_0(x; \theta)}{\mu'_\alpha}$$

Where $\mu'_\alpha = E(X^\alpha) = \int_0^\infty x^\alpha \cdot f_0(x; \theta) dx$

2 A new size biased distribution

We're going to present the Size biased of Zeghdoudi distribution (ZD) introduced by H. Zeghdoudi, H. Messadia (2016) which the density function is:

$$f_{ZGD}(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^3}{\theta+2} x(1+x)e^{-\theta x} & x, \theta > 0 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

In this section , we find a new size biased distribution and study its proprieties. This distribution called : size biased zeghdoudi distribution (SBZGD) :

A new size biased distribution

$$f_{SBZGD} = \frac{x \cdot f_{ZGD}(x; \theta)}{E_{ZGD}(x)}$$

where, $E_{ZGD}(x) = \frac{2(\theta+3)}{\theta(\theta+2)}$.

We have :

$$f_{SBZGD}(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^4 x^2 (1+x) e^{-\theta x}}{2(\theta+3)} & x, \theta > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

3 Maximum Likelihood Estimation and Moment Method

In this section , we are going to find method of moment estimation(MME) and maximum likelihood estimation(MLE) .

For MME:

From equating sample mean and population mean $E(x)$:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = E(x)$$

Putting the expression of $E(x)$ of SBZGD in the equation and solving the equation for θ , we will get $\hat{\theta}_{MoM}$

For MLE:

Let $X_i \sim SBZD(\theta)$, $i = 1 \dots n$ be n random variables, The M-likelihood function, $L(x_i; \theta)$ is:

$$\begin{aligned} L(x \mid \theta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i \mid \theta) \\ &= \left\{ \frac{\theta^4}{2(\theta+3)} \right\}_{i=1}^n n (x_i^2 + x_i^3) e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} \end{aligned}$$

From the SBZD (4), the method of moments (MoM) and the ML estimators of the parameter θ are the same:

$$\hat{\theta}_{MoM} = \hat{\theta}_{ML} = \frac{3(1 - \bar{X}) + \sqrt{3(3\bar{X}^2 + 10\bar{X} + 3)}}{2\bar{X}}$$

Finally , we present a real-data example for illustrative purpose and compare with another distributions

4 References

- [1]Fisher, R. A. (1934). effects of methods of ascertainment upon the estimation of frequencies. Ann. Eugenics, 6, 13-25.
- [2]H. Zeghdoudi, H. Messadia.Zeghdoudi Distribution and its Applications.submitted (2016).

Résumé

Le présent travail propose une nouvelle extension de la distribution zeghdoudi appelée distribution zeghdoudi biaisée par la taille. Plusieurs propriétés de cette distribution telles que les quatre premiers moments, le coefficient de variation, l'asymétrie et le kurtosis sont établies. L'estimation de ses paramètres est paramétrée à l'aide de la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance. Une étude de simulation pour examiner le biais et l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur. Enfin, une application du modèle à un ensemble de données réelles est présentée et comparée avec des autres distributions connues.

Asymptotic normality of a kernel conditional quantile estimator for censored-associated data

Wafaa Djelladj*, Abdelkader Tatachak**

*Faculté de Mathématiques, USTHB, BP 32, El-Alia 16111, Algiers, Algeria,
wdjelladj@usthb.dz,

**Laboratoire MSTD, Faculté de Mathématiques, USTHB BP 32, El-Alia 16111, Algiers, Algeria,
atatachak@usthb.dz

Résumé. We establish asymptotic normality results for a kernel conditional quantile estimator in a right censorship model and some dependance structure. We suppose that the lifetimes observations and the vector of covariates form an associated sequence. Our aim is to extend works of Sadki et Ould-Said (2011) who established the asymptotic normality of a smooth conditional quantile estimator in the case of a censored- α -mixing model.

1 Introduction

Let $(T_n)_{n \geq 1}$ be a lifetime variable, strictly stationary and associated with unknown absolutely continuous distribution function (df) F . This variable of interest may not be completely observable, hence we denote $(C_n)_{n \geq 1}$ as an independent and identically distributed (iid) random censoring variable with unknown continuous df G . Define also a real-valued d -dimensional covariable X strictly stationary and associated with a probability density function (pdf) f . Then, we observe the associated sequence (Y, δ, X) , where $Y_i = \min(T_i, C_i)$ and $\delta_i = \mathbf{1}_{\{T_i \leq C_i\}}$ ($\mathbf{1}_A$ is the indicator function of the event A). We suppose that $(X_i, T_i)_{i \geq 1}$ and $(C_i)_{i \geq 1}$ are independent so that we ensure the identifiability of the model.

Association is the appropriate way to model clinical trials, it is more common to have associated variables in reliability and survival analysis. Note that the random variables $(T_n)_{n \geq 1}$ are associated if for all nondecreasing functions Ψ_1, Ψ_2

$$\text{cov}(\Psi_1(T_1, \dots, T_n), \Psi_2(T_1, \dots, T_n)) \geq 0$$

We consider only functions Ψ_1, Ψ_2 for which the covariance exists. The conditional df $F(t|x)$ can be written

$$F(t|x) = \frac{F_1(x, t)}{l(x)},$$

where

Asymptotic normality of a kernel conditional quantile

$$F_1(x, t) = \frac{\partial F(x, \cdot)}{\partial x} := \frac{\partial^d F(x, \cdot)}{\partial x_1 \dots \partial x_d},$$

with $F(\cdot, \cdot)$ the joint df. The conditional quantile of T given $X = x$ for $p \in (0, 1)$ is given by the expression

$$\xi_p(x) = \inf\{t, F(t|x) \geq p\}.$$

A smooth estimate of the conditional df is defined by

$$F_n(t|x) =: \frac{F_{1,n}(x, t)}{l_n(x)} = \frac{\frac{1}{nh_1^d} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{G_n(Y_i)} K_d\left(\frac{x - X_i}{h_1}\right) H\left(\frac{t - Y_i}{h_2}\right)}{\frac{1}{nh_1^d} \sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{x - X_i}{h_1}\right)}. \quad (1)$$

- h_1 and h_2 are non negative sequences tending to zero as n tends to infinity.
- $l_n(\cdot)$ is the well-known kernel estimator of the marginal density $l(\cdot)$, it is not affected by the censoring.
- H is a smooth df.
- G_n is the Kaplan-Mier estimator (KME) of G in the case of a censoring model such that

$$G_n(t) = 1 - \prod_{i=1}^n \left[1 - \frac{1 - \delta_{(i)}}{n - i + 1} \right]^{\mathbb{1}_{\{Y_{(i)} \leq t\}}},$$

where $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(n)}$ are the order statistics of Y_i and $\delta_{(1)}, \delta_{(2)}, \dots, \delta_{(n)}$ are the indicators of no censoring corresponding. $G = 0$ is the uncensored case.

The estimation of (1) is obtained by estimating $F_{1,n}(x, t)$ and $f_n(x)$. Obviously, the natural estimator of $\xi_p(x)$ can be written

$$\xi_{p,n}(x) = \inf\{t, F_n(t|x) \geq p\}.$$

Applying a Taylor expansion on $F_n(\cdot|x)$ in the neighborhood of ξ_p , we obtain

$$F_n(\xi_{p,n}(x)|x) - F_n(\xi_p(x)|x) = (\xi_{p,n}(x) - \xi_p(x))f_n(\xi_p^*(x)|x),$$

such that ξ_p^* lies between ξ_p and $\xi_{p,n}$ and $f(\cdot|x)$ represents the conditional pdf of T given $X = x$. This approach gives asymptotic results of $(\xi_{p,n}(x) - \xi_p(x))$ from the asymptotic normality of $F_n(\xi_{p,n}(x)|x) - F_n(\xi_p(x)|x)$ and the convergence in probability of $f_n(\xi_p^*(x)|x)$.

2 Asymptotic normality

Proposition 1 *Under some assumptions, we have*

$$\sqrt{nh_1^d}(F_n(t|x) - F(t|x)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\mathbf{x}, t)) \quad \text{as } n \rightarrow +\infty$$

with \mathcal{D} the convergence in distribution. The variance is such that

$$\sigma^2(\mathbf{x}, t) = \frac{\kappa F(t|\mathbf{x})(1 - \overline{G}(t)F(t|\mathbf{x}))}{l(\mathbf{x})\overline{G}(t)} \quad (2)$$

and $\kappa = \int_{\mathbb{R}^d} K_d^2(\mathbf{u})d\mathbf{u} < +\infty$.

Theorem 1 Assume that $p \in (0, 1)$. Under assumptions of Proposition 1, for $f(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x}) \neq 0$, we have

$$\sqrt{nh_1^d}(\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x})) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_\xi^2(\mathbf{x}, \xi_p(\mathbf{x}))) \quad \text{as } n \rightarrow +\infty$$

with

$$\sigma_\xi^2(\mathbf{x}, \xi_p(\mathbf{x})) = \frac{\sigma^2(\mathbf{x}, \xi_p(\mathbf{x}))}{f^2(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x})}$$

3 Simulation studies

This part is established with the intention of giving the behaviour of the conditional quantile estimator. For this purpose, we only consider the cases of the conditional mean ($p = 1/2$) and the one dimensional covariate ($d = 1$). The simulation is conducted for different sample sizes and censoring rates (CR). The data are obtained as follows :

- Generate $n + 1$ iid rv's $Z_i \sim \Gamma(5, 0.5)$ which stands for a gamma distribution ;
- Generate n iid rv's $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$;
- Given Z_i , we generate the associated n -sequence (X_i, T_i) by the following bi-dimensional associated model :

$$\begin{cases} X_i = (Z_{i-1} + Z_{i-2})/2, \\ T_i = 3X_i/2 + 0.45 \varepsilon_i. \end{cases}$$

It is easily seen that $X_i \sim \Gamma(10, 0.5)$.

- Simulate n iid rv's $C_i \sim \exp(\lambda)$. The parameter λ varies according to the CR . Then, we keep the observed data (Y_i, X_i, δ_i) .
- In computing the estimators, we use the standardized normal df and a Gaussian kernel for H and K , respectively.

We plot both densities together, histograms and the QQ-plot.

The figures show that our estimator tends to perform slightly better with the increase of the sample size. However, the quality of fit is good even for low sample size.

Asymptotic normality of a kernel conditional quantile

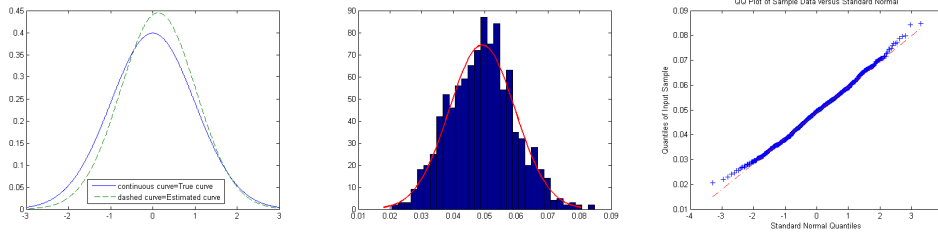


FIG. 1: Normal-probability plots of $\xi_{1/2,n}(x)$ with $n = 100$ and $CR = 25$

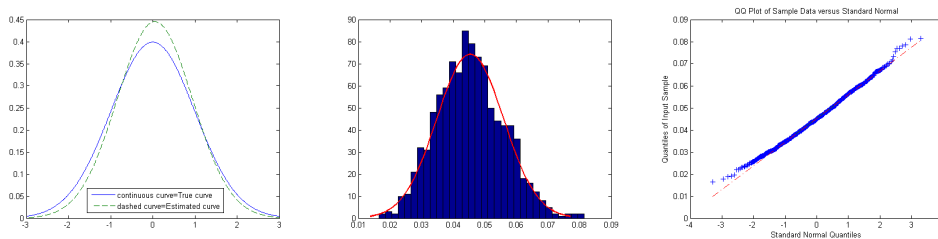


FIG. 2: Normal-probability plots of $\xi_{1/2,n}(x)$ with $n = 300$ and $CR = 25$

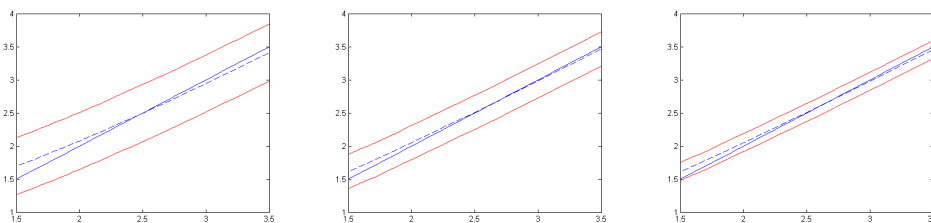


FIG. 3: 95% confidence intervals of $\xi_{1/2,n}(x)$ with $n = 50, 100$ and 300 and $CR = 25$

Références

Sadki, O. et E. Ould-Said (2011). Asymptotic normality for a smooth kernel estimator of the conditional quantile for censored time series. *South African Statistical Journal* 45, 65–98.

Summary

We establish asymptotic normality results for a kernel conditional quantile estimator in a right censorship model and some dependance structure. We suppose that the lifetimes observations and the vector of covariates form an associated sequence. Our aim is to extend works of

W. Djelladj and A. Tatachak.

Sadki et Ould-Said (2011) who established the asymptotic normality of a smooth conditional quantile estimator in the case of a censored- α -mixing model.

Nonparametric relative error regression under random censorship data

Omar FETITAH*,

*Laboratory of Statistics and Stochastic Processes,
University of Djillali Liabes, BP 89, Sidi Bel Abbas 2200, Algeria.
fetitah-omar@hotmail.com,

Résumé. Dans ce travail, nous étudions les propriétés asymptotiques d'un estimateur non paramétrique de la régression relative, dans le cas d'une variable réponse censurée scalaire, nous utilisons l'erreur relative quadratique moyenne comme fonction d'objectif pour construire un estimateur non paramétrique de la fonction de régression de ces données censurées. Nous établissons la convergence presque complet de cette estimateur.

1 Introduction

Let $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ be a sequence of independent and identically distributed (iid) random variables (rv), with a common unknown absolutely continuous distribution function (df) H .

In survival analysis, the random variables can be lifetimes of patients under study. In reality it is not possible to observe the survival time of all patients, and often some of them are still alive at the end of the study, or withdraw, or die from other causes than those addressed by the study (Ould-Saïd et Guessoum (2008); Khardani et al. (2010)). In those cases, we observe another rv C called censoring. Then the observable rv is the minimum of the survival time and the censoring time.

Assuming that $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$ is a sequence of iid censoring random variables with a common unknown continuous distribution function G .

Then in the right censorship model, we only observe the n pairs (T_i, δ_i) with $T_i = Y_i \wedge C_i$ and $\delta_i = \mathbb{I}_{\{Y_i \leq C_i\}}$, $1 \leq i \leq n$, where \mathbb{I}_A denotes the indicator function of the set A .

To follow the convention in biomedical studies and as indicated before, we assume that $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$ and $(Y_i, X_i)_{1 \leq i \leq n}$ are independent.

2 The Model And The Estimates

The ordinary way to study the relationship between X and Y is to suppose that $Y = r(X) + \varepsilon$, where ε is a random error variable independent to X and r is the regression function. Demongeot et al. (2016) propose Nonparametric relative regression to estimate the function r

Relative error regression under random censorship data

by an alternative loss function, then we obtain

$$r(x) = \frac{\mathbb{E}[Y^{-1}|X = x]}{\mathbb{E}[Y^{-2}|X = x]} =: \frac{g_1(x)}{g_2(x)}.$$

In censorship model only the $(X_i, T_i, \delta_i)_{1 \leq i \leq n}$ are observed, we define $\tilde{r}(x)$ as an estimate of $r(x)$ by

$$\tilde{r}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i T_i^{-1} \bar{G}(T_i)^{-1} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)}{\sum_{i=1}^n \delta_i T_i^{-2} \bar{G}(T_i)^{-1} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)} =: \frac{\tilde{g}_1(x)}{\tilde{g}_2(x)}, \quad (1)$$

In practice G is unknown, we use the Kaplan and Meier Deheuvels et Einmahl (2000) estimator of \bar{G} given by :

$$\bar{G}_n(t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1-\delta_{(i)}}{n-i+1}\right)^{\mathbb{I}\{T_{(i)} \leq t\}} & \text{if } t \leq T_{(n)} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2)$$

where $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \dots \leq T_{(n)}$ are the order statistics of $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ and $\delta_{(i)}$ is the concomitant of $T_{(i)}$.

Therefore, the estimator of $r(x)$ is given by :

$$\tilde{r}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i T_i^{-1} \bar{G}_n(T_i)^{-1} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)}{\sum_{i=1}^n \delta_i T_i^{-2} \bar{G}_n(T_i)^{-1} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)} =: \frac{\tilde{g}_{1,n}(x)}{\tilde{g}_{2,n}(x)}, \quad (3)$$

3 Assumptions and result

3.1 Assumptions

Let \mathcal{C} be a compact set of \mathbb{R} . And assume that, $(C_i)_{i \geq 1}$ are independent and let's consider the following hypotheses :

(A1) The bandwidth h_n satisfies : $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nh_n}{\log n} = +\infty$.

(A2) The kernel K is bounded, symmetric and has compact support. It is also Hölderian of order $\gamma > 0$.

Furthermore

$$\int_{\mathbb{R}} t|K(t)|dt < +\infty \text{ and } \int_{\mathbb{R}} t^2 K(t)dt < +\infty \text{ hold .}$$

(A3) The function $g_1(x)$ is twice differentiable and

$$\sup_{x \in \mathcal{C}} |g_1''(x)| < +\infty.$$

(A4) The marginal density f of X and $g_2(x)$ are twice differentiable and satisfies a Lipschitz condition.

Furthermore

$$g_2(x) > \Gamma \quad \text{for all } x \in \mathcal{C} \quad \text{and} \quad \Gamma > 0.$$

(A5) The functions $\bar{r}^2(x)$ and $\bar{r}^1(x)$ defined by $\bar{r}_2(x) = \int_{\mathbb{R}} y^{-2l} f_{X,Y}(x, y) dy$ and $\bar{r}_1(x) = \int_{\mathbb{R}} y^{-l} f_{X,Y}(x, y) dy$ are twice differentiable and

$$\sup_{x \in \mathcal{C}} |\bar{r}_2''(x)| < +\infty.$$

3.2 Result

Under (A1)-(A5), we have as n goes to infinity

$$\sup_{x \in \mathcal{C}} |\tilde{r}_n(x) - r(x)| = \mathcal{O}_{a.s.} \left(h_n^2 + \sqrt{\frac{\log n}{nh_n}} \right).$$

4 Simulation

In this part we will simulate 3 functions in the case of censored data, where the percentage of censure of each of the following models is 30%.

Linear case $Y_i = -5X_i + 2.5 + \epsilon_i$

Exponential case $Y_i = \exp(-4X_i - 2) + \epsilon_i$

Parabolic case $Y_i = 6X_i^2 + 3 + \epsilon_i$

Sinudoil case $Y_i = 8 \sin(1.2X_i) + \epsilon_i$

Relative error regression under random censorship data

4.1 Linear model

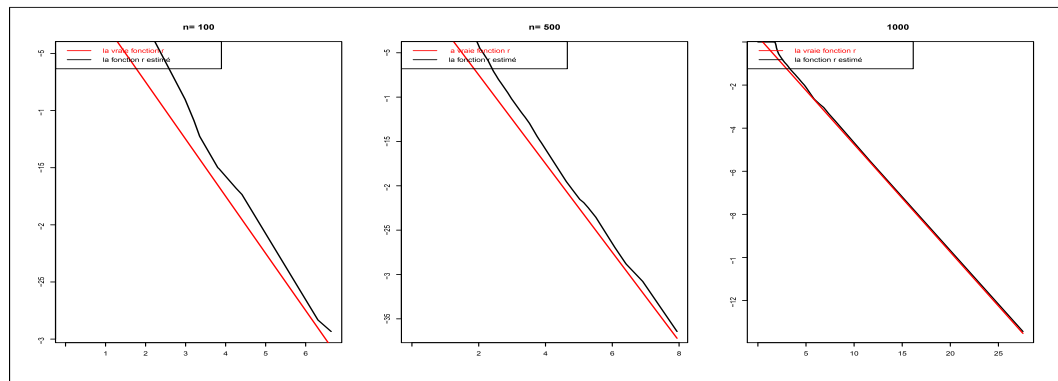


FIG. 1 – Linear model with $n = 100, 500$ and 1000 .

4.2 Nonlinear model

4.2.1 Parabolic model

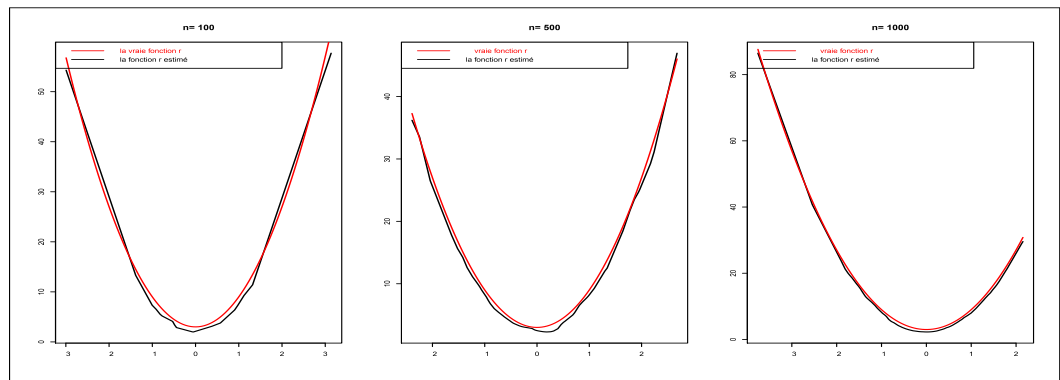


FIG. 2 – Parabolic model with $n = 100, 500$ and 1000 .

Relative error regression under random censorship data

4.2.2 Exponential model

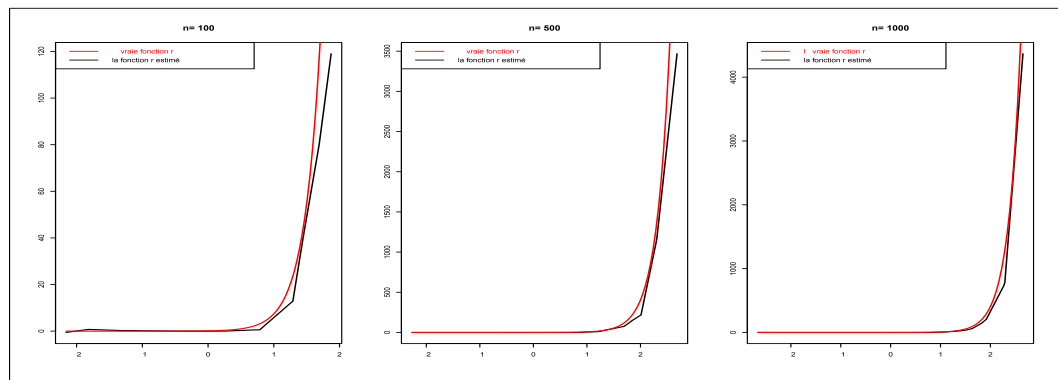


FIG. 3 – Exponential model with $n = 100, 500$ and 1000 .

4.2.3 Sinudoil model

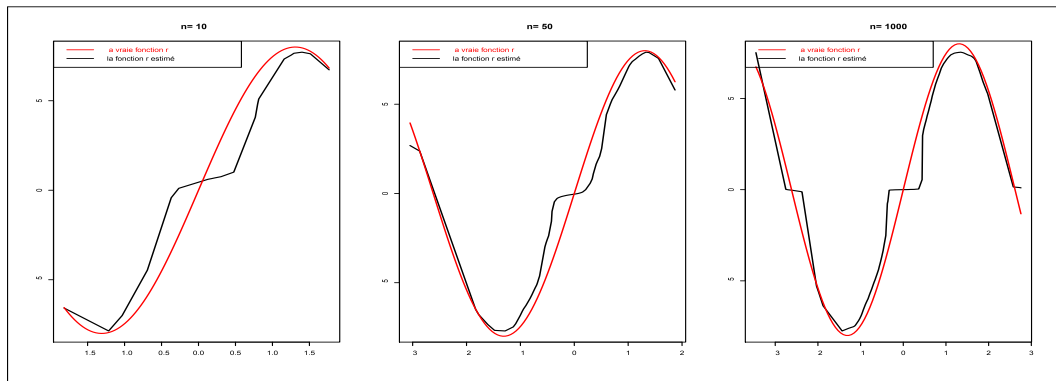


FIG. 4 – *Sinudoil model with $n = 100, 500$ and 1000 .*

Références

- Deheuvels, P. et J. Einmahl (2000). Functional limit laws for the increments of Kaplan Meier product-limit processes and applications. *The Annals of Probability* 28.
- Demongeot, J., A. Hamie, et M. Laksaci, A. Rachdi (2016). Relative-Error Prediction in Non-parametric Functional Statistics : Theory and Practice. *Statistica Neerlandica* 147.
- Khardani, S., M. Lemdani, et E. Ould-Saïd (2010). Some asymptotic properties for a smooth kernel estimator of the conditional mode under random censorship. *Journal of the Korean Statistical Society* 39.
- Ould-Saïd, E. et Z. Guessoum (2008). On nonparametric estimation of the regression function under random censorship model. *Statistics and Decisions* 26.

Summary

In this work, we investigate the asymptotic properties of a nonparametric estimator of the relative error regression, in the case of a scalar censored response, we use the mean squared

Relative error regression under random censorship data

relative error as a loss function to construct a nonparametric estimator of the regression function of these censored data. We establish the strong almost complete convergence rate of these estimators.

Asymptotic normality of robust kernel estimation under truncated and associated model

Asma GHELIEM , Zohra GUESSOUM

Laboratoire MSTD, Faculté de Mathématiques, USTHB, BP 32, El-Alia 16111, Algiers, Algeria,
 agheliem@usthb.dz,
 zguessoum@usthb.dz

Résumé. Dans cette contribution, nous établissons la normalité asymptotique d'un M-estimateur non paramétrique de la fonction de régression dans le modèle tronqué à gauche pour des données associées. Nous construisons des intervalles de confiance pour le M-estimateur. Certaines simulations sont établies pour conforter les résultats théoriques obtenus.

1 Introduction

Let $(X_k, Y_k), 1 \leq k \leq N$ be a sequence of associated random vector, where X is a random vector of covariates taking its values in \mathbb{R}^d with (df) V and continuous density v and Y is a real random variable (rv) of interest with distribution function (df) F and T be the truncation variable with continuous df G , defined on the same probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. We assume that T and (X, Y) are independent.

Under random left-truncated model (RLTM), the lifetime Y and T are observable only when $Y \geq T$, and $n \leq N$. Let $\mu =: \mathbf{P}(Y \geq T)$ be the probability to observe Y .

Under RLTM, we denote by $m(x)$ (robust regression) the implicit solution with respect to w.r.t s of

$$H(x, s) := \frac{1}{\mu} \mathbb{E}[\psi(Y_1 - s) | X_1 = x] v(x) = 0 \quad (1)$$

$\psi(\cdot)$ is a bounded function.

The M-estimator of $m(x)$, denoted by $\hat{m}_n(x)$, is defined as the implicit solution w.r.t. s of

$$\hat{H}_n(x, s) := \frac{1}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n \frac{1}{G_n(Y_i)} K_d \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right) \psi(Y_i - s) = 0, \quad (2)$$

where : K_d is a kernel function on \mathbb{R}^d and h_n is a sequence of positive real numbers (called bandwidth) which goes to zero as n goes to infinity and $G_n(x)$ is the well known Lynden-Bell estimator of $G(x)$ defined by Lynden-Bell (1971).

Theorem 1 *Under some regularity conditions*

$$\sqrt{nh_n^d} (\hat{m}_n(x) - m(x)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2(x, m(x))), \quad (3)$$

Asymptotic normality of robust kernel estimation

where

$$\sigma^2(x, m(x)) := \frac{\frac{\kappa}{\mu} \mathbb{E}[\psi^2(Y - m(x))G^{-1}(Y)|X = x]v(x)}{[\frac{\partial H}{\partial s}(x, m(x))]^2}. \quad (4)$$

1.1 Confidence interval

A plug-in estimate $\hat{\sigma}^2(x, m(x))$ of the asymptotic variance can easily be obtained by using $G_n(\cdot)$, $\hat{m}_n(x)$ and an estimator of the derivative $\frac{\partial H}{\partial s}(x, m(x))$. This yields, under assumptions of Theorem 1, to the following confidence interval of asymptotic level $1 - \lambda$ of $m(x)$

$$\left[\hat{m}_n(x) - \frac{u_{1-\lambda/2} \hat{\sigma}(x, m(x))}{\sqrt{nh_n^d}}, \hat{m}_n(x) + \frac{u_{1-\lambda/2} \hat{\sigma}(x, m(x))}{\sqrt{nh_n^d}} \right],$$

where $u_{1-\lambda/2}$ denotes the $(1 - \lambda/2)$ quantile of the standard normal distribution.

2 Simulation

The purpose of this section is to examine the asymptotic normality of our estimator for finite size samples in the case of $d = 1$. Since we can not find an explicit form of the M-estimator $\hat{m}_n(x)$, we applied a dichotomy method to get it. We choose the score function $\psi(u) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ (a bounded function). The kernel used here is the standard Gaussian kernel.

For the bandwidth, we choose $h_n = O\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$. We have to simulate N observations (X_i, Y_i, T_i) such that T_i has exponential distribution $\xi(\lambda_0)$, where λ_0 is adapted to obtain different values of μ . To insure the association effect, we use the model proposed by Chaubey et Li (2011) by simulating a sample W_i from standard normal distribution such that

$$\begin{cases} X_i = \exp(W(i-1)/2) \exp(W(i-2)/2), \\ Y_i = \log(1 + X_i) + \varepsilon_i, \end{cases} \quad (5)$$

where ε_i are N i.i.d. $\rightarrow N(0, 0.22)$. Finally we keep the triplet (X_i, Y_i, T_i) such that $Y_i \geq T_i$, to obtain a sample of size n .

We construct approximate 95% confidence curve obtained by $\hat{m}_n(x) \pm 1.96 \times \hat{\sigma}(x, m(x)) / \sqrt{nh_n^d}$. We give the plot for $(n = 50, 100 \text{ and } 300)$ with $\mu = 75\%$ and we draw in the same graph $m(x)$, $\hat{m}_n(x)$ and two other curves corresponding to 0.975%-lower and upper confidence curves for $x \in [0.2, 2]$. We calculate the coverage probabilities (CP) and the average width (AW) of 95% confidence intervals. The different values of CP and AW are reported in Table 1.

Figure 1, shows that the width of the estimated confidence intervals decreases when the size of the sample data increases. Table 1 shows that the CP of the confidence interval tends to increase along with the sample size n to be close to 95%.

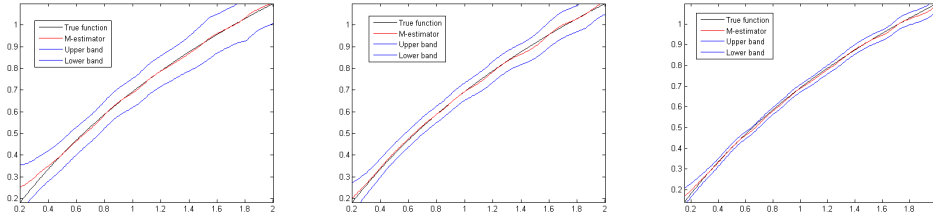


FIG. 1: ($\mu \approx 75\%$, $n = 50$, $n = 100$ and $n = 300$).

size of sample	n=50	n=100	n=300
AW	0.1584	0.1048	0.04 23
CP	0.8848	0.9227	0.9555

TAB. 1: The coverage probabilities and average widths of 95% confidence intervals.

Références

- Chaubey, Y.P., D. I. et J. Li (2011). An asymmetric kernel estimator of density function for stationary associated sequences. *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 41, 554–572.
- Lynden-Bell, D. (1971). A method of allowing for known observational selection in small samples applied to 3cr quasars. *Monthly Notices Royal Astronomy Society* 155, 95–118.

Summary

In this contribution we establish the asymptotic normality of a nonparametric M-estimator of the regression function in the left truncated model for associated data. We construct confidence bands for the M-estimator. Some simulations are drawn to comfort the obtained theoretical results.

A New Type of An Asymmetric Kernel Estimators for non-negative and censored data

Sarah Ghettab *, Zohra Guessoum **

* Ecole Supérieur Des Sciences Appliqués d'Alger (ESSA), Alger
s.ghettab@g.essa-alger.dz,
<http://www.essa-alger.dz>

** Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (USTHB), Alger
zguessoum@usthb.dz
<http://www.usthb.dz/fr>

Résumé. Nous proposons un nouveau type d'estimateur à noyau qui se comporte bien sur les bornes, lorsque la variable d'intérêt est censurée à droite. Pour illustrer cette méthode, nous nous concentrons sur les variables aléatoires non négatives. Les estimateurs sont construits à l'aide de noyaux asymétriques d'espérance égale à 1. Ici, on vise à établir la consistance forte uniforme et à étudier les propriétés asymptotiques des estimateurs résultant. Des comparaisons par simulation ont été effectuées pour conforter nos résultats.

1 Introduction and motivation

In the context of survival analysis, the random variable is typically non-negative, and to estimate the density function f with positive support $(0, \infty[$ the usual kernel method risk to give a positive probability for negative values near the boundary region. Different methods have been proposed in literature to remove the boundary bias, among these the asymmetric kernel estimators, for more details we refer to Chen S. (1999), that used beta kernels to estimate densities with compact supports. For densities supported on $[0, +\infty[$ Chen S. (2000) used gamma kernel. However, these papers assume that the observation are completely observed. In the incomplete case there are no much works, but we can cite Kuruwita (2010) and Bouauez-marni et al. (2011). Usually in the classical estimator, the estimation at x counts the number of observations X_i such that $X_i - x$ is close to 0. Here, to avoid a possible negative argument, the intuition is that the estimation at x count the number of observations X_i such that X_i/x is close to 1 to get away a little to the boundary. For given $x > 0$, we propose to estimate the value $f(x)$ by

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_{i,x} K\left(\frac{X_i}{x}\right),$$

where $\alpha_{i,x}$ is given so that the estimator $f_n(x)$ integrate to 1. Therefore $f_n(x)$ becomes

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{x^2} K\left(\frac{X_i}{x}\right), \quad (1)$$

then we replace the symmetric kernel $K(\cdot)$ by an asymmetric kernel $K_A(\cdot)$ satisfying some conditions that we will be discussed below. Now, if we make a perturbation around x by an appropriate sequence of positive numbers $h_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, we obtain

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{(x + h_n)^2} K_A \left(\frac{X_i}{x + h_n} \right). \quad (2)$$

This estimator is studied in the complete samples by Chaubey et Sen (2007) which used a gamma kernel without quantifying the rate of convergence. Here, we adapt this estimator for randomly right censored data to estimate the density and the hazard function, we show that both estimators are free of boundary bias and we establish the rate of strong convergence.

2 Estimators under censorship model

Let T_1, \dots, T_n (survival times) and C_1, \dots, C_n (censoring times) be two i.i.d. non-negative independent random sequences with distribution function F and G , respectively. Under the censoring model, we observe the pair (Y_i, δ_i) , where

$$Y_i = \min(T_i, C_i) \quad \text{and} \quad \delta_i = \mathbb{I}_{\{T_i \leq C_i\}}.$$

Then Y_i is the observable random variable, and δ_i is the indicator of non censoring. With uncensored data the density estimator given in (2) can be written as a weighted average over the empirical distribution function :

$$f_n(x) = \int_0^{+\infty} K_A(x, t, h_n) dF_n(t). \quad (3)$$

Therefore, when considering right-censored data we replace the empirical distribution by the most popular used in this case, the product limit (P.L) estimator, originally attributed to Kaplan et Meier (1958),

$$\hat{F}_n(t) = \begin{cases} 1 - \prod_{i: Y_{(i)} \leq t} \left(1 - \frac{1}{n - i + 1} \right)^{\delta_{(i)}} & \text{if } t < Y_{(n)} \\ 1 & \text{if } t \geq Y_{(n)}, Y_{(n)} \text{ non censored.} \end{cases} \quad (4)$$

Where $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$, denote the order statistics of Y_1, Y_2, \dots, Y_n and $\delta_{(i)}$ is the corresponding censoring indicator for $Y_{(i)}$. Then to avoid the boundary bias for right-censored data we propose a new estimator

$$\hat{f}_n(x) = \int_0^{+\infty} K_A(x, t, h_n) d\hat{F}_n(t),$$

since \hat{F}_n is a step function and to study the asymptotic propriety this estimator can be rewritten as an inverse-probability-of-censoring weighted as though

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n(x + h_n)^2} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i Y_i}{\hat{G}_n(Y_i)} K_A \left(\frac{Y_i}{x + h_n} \right). \quad (5)$$

On the other hand it is well Known that the hazard rate function $\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$, for any x such that $F(x) \neq 1$, is important in several fields of applied statistics (medicine, reliability, ...) for assessment of risks in survival studies. Recall that the non-parametric hazard rate estimation was introduced in statistical literature by Watson et Leadbetter (1964). Normally, using (5) and (4), the asymmetric kernel estimator that we propose for hazard function λ under right censored data is

$$\widehat{\lambda}(x) = \frac{\widehat{f}_n(x)}{1 - \widehat{F}_n(x)}. \tag{6}$$

3 Assumptions and Main results

In this section to establish the strong convergence of the proposed estimators, we need to impose the following assumptions

(H1) The kernel K is a Lipschitz-continuous density function with compact support on \mathbb{R}^+ , and satisfies :

- (i) $\int_0^{+\infty} uK_A(u)du = 1$,
- (ii) $v_n^2 := \int_0^{+\infty} u(u - 1)K_A(u)du \longrightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$,
- (iii) $\int_0^{+\infty} u^2K_A(u)du \longrightarrow 1$ as $n \rightarrow \infty$.

(H2) $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$, $\frac{\log n}{n} = o(h_n v_n)$, $\sqrt{\frac{\log \log n}{n}} = O\left(\frac{1}{nh_n v_n}\right)$.

(H3) Let $R_v := \lim_{v \rightarrow 0} v \int_0^{+\infty} K_A^2(w)dw$, suppose that $|R_v| < \infty$, and the normalised kernel

$$K_A^*(u) := K_A^2(u) / \int_0^{+\infty} K_A^2(w)dw, \text{ satisfies :}$$

- (i) $\mu_j(K_A^*) := \int_0^{+\infty} u^j K_A^*(u)du = 1 + O(v_n)$
- (ii) $\sigma^2(K_A^*) := \int_0^{+\infty} (u - \mu_j(K_A^*))^2 K_A^*(u)du = O(v_n^2)$.

(H4) The functions f and $\bar{f}(t) := \frac{f(t)}{\bar{G}(t)}$ are bounded and twice continuously differentiable on $[0, \tau]$ such that $\|g''\|_\infty := \sup_{0 < x < \tau} |g''(x)| < +\infty$, with g either the function f or \bar{f} .

(H5) Define $\tau_F = \sup\{x : \bar{F}(x) > 0\}$ and $\tau_G = \sup\{x : \bar{G}(x) > 0\}$ the upper endpoints of \bar{F} and $\bar{G}(x)$, respectively. We assume that $\tau_F < \infty, \bar{G}(\tau_F) > 0$, this implies that $\tau_F \leq \tau_G$.

An asymmetric kernel estimators for censored data

Remark 1 A kernel K satisfying $H1$ has expectation equal to 1, and variance v_n^2 converge to zero, for example the gamma density $G(1/v^2, v^2)$, for any real v .

Theorem 1 Under assumptions (**H1-H5**), then for any $0 < \tau < \tau_F$, we have

$$\sup_{0 \leq x \leq \tau} |\hat{f}_n(x) - f(x)| = O_{a.s} \left\{ \sqrt{\frac{\log n}{nh_n v_n}} + v_n^2 + h_n \right\}$$

Theorem 2 Under assumptions (**A1-A5**), then for any $0 < \tau < \tau_F$, we have

$$\sup_{0 \leq x \leq \tau} |\hat{\lambda}_n(x) - \lambda(x)| = O_{a.s} \left\{ \sqrt{\frac{\log n}{nh_n v_n}} + v_n^2 + h_n \right\}$$

Références

- Bouaezmarni, T., A. E. Gouch, et M. Mesfioui (2011). Beta kernel estimators for density functions. *Probability and Statistics 2011*, 1–16.
- Chaubey, Y. P., S. A. et P. K. Sen (2007). A new smooth density estimator for non-negative random variables. Technical report, Department of Mathematics and Statistics, Concordia University, Montreal, Canada.
- Chen S., X. (1999). Beta kernel estimators for density functions. *Comput Statist and Data Anal 31*, 131–145.
- Chen S., X. (2000). Probability density function estimation using gamma kernels. *Ann. Inst. Statist. Math 52*, 471–480.
- Kaplan, E. L. et P. Meier (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations. *J. Amer. Statist. Assoc 53*, 457–481.
- Kuruwita, C.N., K. K. P. W. (2010). Density estimation using asymmetric kernels and bayes bandwidths with censored data. *Journal of Statistical Planning and Inference 140*, 1765–1774.
- Watson, G. et M. Leadbetter (1964). Hazard analysis. *Biometrika 51*, 175–184.

Summary

Here we propose a new type of kernel estimator that performs well at the boundary, when the variable of interest is right censored. To illustrate the method, we focus on non-negative random variables. The estimators are constructed using kernels which are asymmetric with expectation 1. Here, we aim to establish the uniform strong consistency of the density and the hazard function estimators. Comparison by simulation are performed to consolidate our results.

Singular optimal control of stochastic differential equations of McKean-Vlasov type via the differentiability with respect to probability law

Guenane Lina*, Mokhtar Hafayed**

* Adresse postale complète
guenanelina07@gmail.com,

** Autre adresse
m.hafayed@univ-biskra.dz

Résumé. nous considérons le problème de contrôle stochastique dans le domaine de contrôle ne doit pas nécessairement être convexe, la variable de contrôle a deux composantes, la première étant absolument continue et le deuxième singulier. Les coefficients dépendent, non de manière linéaire, tant sur le processus de l'état que de sa loi sur l'absolue. Nous établissons un principe maximum en utilisant une variation de pointe sur le partie absolument continue du contrôle et une perturbation convexe sur le singulier. il en résulte une généralisation du principe maximum de peng au contrôle singulier problèmes

1 Introduction

We study general stochastic optimal singular control problem for McKean-Vlasov type. The coefficients of the system depend on the state of the solution process as well as of its probability law and the control variable. We establish a set of Peng's necessary conditions in the form of Pontryagin maximum principle for the optimal control. We also give additional conditions, under which the necessary optimality conditions turn out to be sufficient. The control domain is not assumed to be convex. The proof of our main result is based on the differentiability with respect to the probability law

2 Main results

we study general stochastic control problem for McKean-Vlasov stochastic differential equation (SDEs in short), on a given filtered filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$:

$$\begin{cases} dX^{u,\eta}(t) = f(t, X^{u,\eta}(t), P_{X^{u,\eta}(t)}, u(t)) dt + \sigma(t, X^{u,\eta}(t), P_{X^{u,\eta}(t)}, u(t)) dW(t) \\ \quad + G(t)d\eta(t), t \in [0, T] \\ X^{u,\eta}(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

Singular optimal control of stochastic differential equations of McKean-Vlasov type via the differentiability with respect to probability law

where $W(\cdot)$ is an \mathcal{F}_t -Brownian motion and $P_{X^{u,\eta}(t)} = P \circ X^{u,\eta}(t)^{-1}$ denotes the law of the random variable $X^{u,\eta}$. Here the control $(u(\cdot), \eta(\cdot))$ is a pair of measurable $U_1 \times U_2$ -valued, \mathcal{F}_t -adapted processes, such that $\eta(\cdot)$ is of bounded variation, nondecreasing continuous on the left with right limits and $\eta(0) = 0$. Moreover, $E \left[\sup_{t \in [0, T]} |u(t)|^2 + |\eta(T)|^2 \right] < \infty$.

The expected cost to be minimized over the class of admissible controls is also of McKean-Vlasov type, which has the form

$$J(u(\cdot), \eta(\cdot)) = E \left[\int_0^T \ell(t, X^{u,\eta}(t), P_{X^{u,\eta}(t)}, u(t)) dt + h(X^{u,\eta}(T), P_{X^{u,\eta}(T)}) \right. \\ \left. + \int_{[0, T]} K(t) d\eta(t) \right], \quad (2) \quad (3)$$

where $\ell : [0, T] \times R^n \times Q_2(R^n) \times A_1 \rightarrow R$, $h : R^n \times Q_2(R^n) \rightarrow R$, are deterministic functions. We remark that the cost functional (2) involves the law of the solution in a nonlinear way.

3 Conclusion

We were interested in the necessary conditions of optimality verified by optimal controls in the case of nonlinear coefficients for singular diffusions. The problems of the singular controls find directly applications in economics, management and especially in financial mathematics. There are excellent references dealing with this aspect.

Références

- [1] McKean, H.P. : A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. *Proc. Natl. Acad. Sci.* 1966;56 :1907-1911.
- [2] Wang G, Zhang C, Zhang W. : Stochastic maximum principle for mean-field type optimal control under partial information, *IEEE Transactions on automatic control*, 2014;59(2) :522-528.
- [3] Hafayed M., Abbas S., Abba A : On mean-field partial information maximum principle of optimal control for stochastic systems with Lévy processes, *J. Optim Theory Appl.* 2015;167 :1051-1069.
- [4] Hafayed M., Boukaf S., Shi Y., Meherrem S. : A McKean-Vlasov optimal mixed regular-singular control problem, for nonlinear stochastic systems with Poisson jump processes, *Neurocomputing*. 2016;182(19) :133-144.
- [5] Buckdahn, R., Li, J, Peng, S. : Mean-field backward stochastic differential equations and related partial differential equations. *Stochastic Processes and their Applications*, 2009;119 :3133-3154.
- [6] Buckdahn, R., Djehiche, B., Li, J. : A general stochastic maximum principle for SDEs of mean-field type. *Appl. Math. Optim.* 2011;64,197-216.

- [7] Lasry, J.M., Lions, P.L. : Mean field games. *Japan Jour. Math.* 2007 ;2, 229-260.
- [8] Buckdahn R., Li, J., Ma J. : A stochastic maximum principle for general mean-field system, *Appl Math Optim.* 2016;(74) :507-534.
- [9] Hafayed M., Meherrem S., Eren S. Guoclu D.H. : *On optimal singular control problem for general McKean-Vlasov differential equations : Necessary and sufficient optimality conditions*, *Optim Control Appl Meth* ; (39)1202–1219.(2018)

Summary

we consider the stochastique control problem in witch the control domain need not be convex, the control variable has two components, the first being absolutely continous and the second singular. The coefficients depend, non linearly, on both the state process as well as of its law on the absolutely. We establish a maximum principle, by using a spike variation on the absolutely continuous part of the control and a convex perturbation on the singular one. this results is a generalization of peng's maximum principle to singular control problems

Monte-Carlo simulation of first-passage-time in stochastic differential equations through time-varying boundaries

Arsalane Chouaib Guidoum*, Kamal Boukhetala**

*Department of mathematics, Institute of science and technology, University center of Tamanghasset, Algeria.

acguidoum@usthb.dz

**Faculty of mathematics-USTHB, PoBox 32, Bab Ezzouar, Algiers, Algeria
kboukhetala@usthb.dz

Résumé. Sim.DiffProc package (Guidoum et Boukhetala, 2019) contains many objects for symbolic and numerical computations on scalar and multivariate systems of stochastic differential equations in R language (R Core Team, 2019). It provides users with a wide range of tools to simulate, estimate, analyze, and visualize the dynamics of these systems in both forms Itô and Stratonovich. Statistical analysis with Monte-Carlo simulation. Enabled many searchers in different domains to use these equations to modeling practical problems in financial and actuarial modeling and other areas of application, e.g., modeling and simulate of first passage time problem in shallow water using the attractive center (Boukhetala, 1996).

1 Introduction

Let X_t be a diffusion process (Klebaner, 2005; Henderson et Plaschko, 2006) which is the unique solution of the following stochastic differential equation :

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_{t_0} = x_0 \quad (1)$$

if $S(t)$ is a time dependent boundary, we are interested in the simulation of the first passage time (FPT) (for more details see Roman et al., 2008, 2012) of the diffusion process through this boundary that is we will study the following random variable :

$$\tau_{S(t)} = \begin{cases} \inf_{t \geq t_0} \{t : X_t \geq S(t) | X_{t_0} = x_0\} & \text{if } x_0 \leq S(t_0) \\ \inf_{t \geq t_0} \{t : X_t \leq S(t) | X_{t_0} = x_0\} & \text{if } x_0 \geq S(t_0) \end{cases}$$

In general, there is no explicit expression for the first passage-time density of a diffusion process through a time-varying boundary. We mainly rely on Monte-Carlo techniques to simulate the random variable $\tau_{S(t)}$, and estimate the density in a general setting.

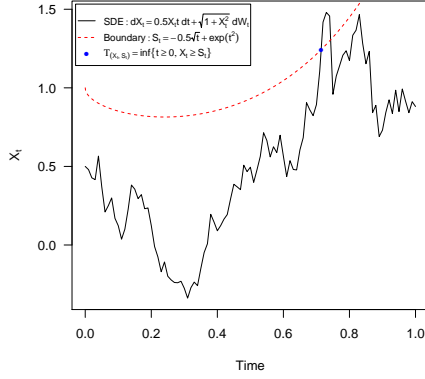


FIG. 1 – $\tau_{S(t)} = \inf_{t \geq t_0} \{t : X_t \geq S(t) | X_{t_0} = 0.5\}$.

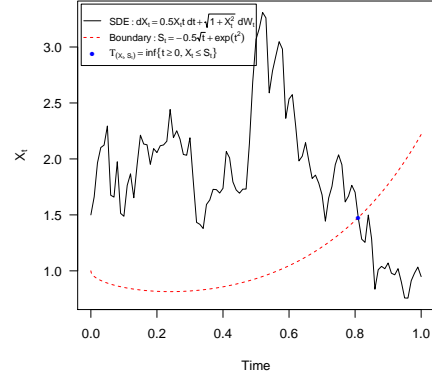


FIG. 2 – $\tau_{S(t)} = \inf_{t \geq t_0} \{t : X_t \leq S(t) | X_{t_0} = 1.5\}$.

2 FPT algorithm

The following algorithm for simulation of the first passage time $\tau_{S(t)}$:

$$\tau_{S(t)} = \begin{cases} \inf_{t \geq t_0} \{t : X_t \geq S(t) | X_{t_0} = x_0\} & \text{if } x_0 \leq S(t_0) \\ \inf_{t \geq t_0} \{t : X_t \leq S(t) | X_{t_0} = x_0\} & \text{if } x_0 \geq S(t_0) \end{cases}$$

Algorithm 1 Simulation of first passage time $\tau_{S(t)}$

1. Select a time interval $[t_0, T]$ and construct a partition $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$.
2. Simulate a path of the process $X_t = \{X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_T\}$ numerical solution of sde (1).
3. For $i = \{0, 1, \dots, N\}$, we set :
 - $\Lambda(t) = F(t_i, X_{t_i})$, where F is linear interpolation function between t and X_{t_i} .
 - $\Psi(t) = \Lambda(t) - S(t)$.
4. — if $x_0 > S(t_0)$
 - $\nu = \min \{\text{rang}(X_{t_i} \leq S(t_i))\}$
 - else
 - $\nu = \min \{\text{rang}(X_{t_i} \geq S(t_i))\}$
5. $\tau_{S(t)}$ is defined as the unique root of the function $\Psi(t)$ in the interval $[t_0, t_\nu]$,

$$\Psi(\tau_{S(t)}) \approx 0, \quad \forall t \in [t_0, t_\nu].$$

i.e., solve the equation $\Psi(t) = 0$ is finding the random variable $\tau_{S(t)}$ (using e.g., bisection method, Newton-Raphson,...).

3 Examples

3.1 Constant boundary

Consider the following Black-Scholes model and constant boundary :

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, & X_{t_0} = x_0 > 0. \\ S(t) = a \end{cases}$$

We apply the previous algorithm for simulation of the first passage time τ_a (FPT) of this model through this boundary, and we use the package `Sim.DiffProc`¹.

$$\tau_a = \inf_{t \geq t_0} \{t : X_t \geq a | X_{t_0} = x_0\} \quad \text{if } x_0 \leq a$$

Case 01 : $x_0 \leq a$

Step 1

```
R> library(Sim.DiffProc)
R> t0=0; T=1; N=10;
R> mu=2; sigma=0.5;
R> x0=1; S = 2
R> St <- function(t) eval(S)
R> W = BM(N)
R> t = as.vector(time(W))
R> t
[1] 0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
```

Step 2

```
R> Xt = x0*exp((mu-0.5*sigma^2)*t+sigma*W)
R> Xt
Time Series:
Start = c(0, 1)
End = c(1, 1)
Frequency = 10
X1
[1,] 1.000000
[2,] 1.191581
[3,] 1.711387
[4,] 1.466992
[5,] 1.632084
[6,] 2.334280
```

1. The package `Sim.DiffProc` is an object created in the R language for simulating of stochastic differential equations (SDEs), and statistical analysis of diffusion processes solution of SDEs, available from CRAN at <https://CRAN.R-project.org/package=Sim.DiffProc>

Monte-Carlo simulation of FPT in SDE through time-varying boundaries

```
[7,] 2.296503  
[8,] 3.341043  
[9,] 4.595592  
[10,] 5.722678  
[11,] 5.383104
```

Step 3

```
R> Lambda <- approxfun(t,Xt,method = "linear")  
R> Lambda  
function (v)  
.approxfun(x, y, v, method, yleft, yright, f)  
<bytecode: 0x0000000007fb89a0>  
<environment: 0x00000000063a1100>  
R> Psi <- function(t) Lambda(t)- St(t)  
R> Psi  
function(t) Lambda(t)- St(t)
```

Step 4

```
R> nu = min(which(Xt >= St(t)))  
R> nu  
[1] 6
```

Step 5

```
R> tau = uniroot(Psi ,lower=t0,upper=t[nu])$root  
R> tau  
[1] 0.452395  
R> Psi(tau)  
[1] 0
```

3.2 Varying boundary

Consider the following SDE and linear boundary :

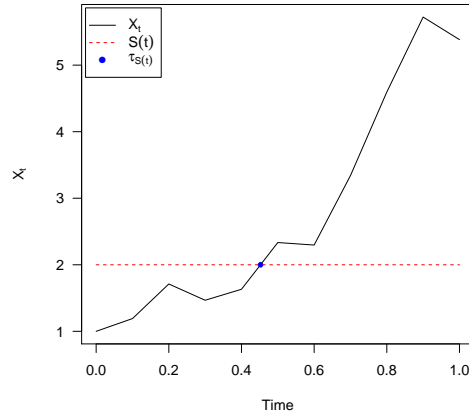
$$\begin{cases} dX_t = \frac{1}{2}\alpha^2 X_t dt + \alpha X_t dW_t, & x_0 \neq 0. \\ S(t) = a + bt \end{cases}$$

The analytical solution of this model is :

$$X_t = x_0 \exp(\alpha W_t)$$

We apply the previous algorithm for simulation of the first passage time τ_a (FPT) of this model through this boundary :

$$\tau_{S(t)} = \inf_{t \geq t_0} \{t : X_t \geq S(t) | X_{t_0} = x_0\} \quad \text{if } x_0 \leq S(t_0)$$

FIG. 3 – $dX_t = 2X_t dt + 0.5X_t dW_t$, $X_{t_0} = 1$. with $S(t) = 2$

Case 01 : $x_0 \leq S(t)$

```
R> t0=0; T=1; alpha=2; x0=0.5;
R> St <- function(t) -2*t+1
R> W <- BM(N=10)
R> t <- as.vector(time(W))
R> Xt <- x0*exp(alpha*W)
R> Lambda <- approxfun(t,Xt,method = "linear")
R> Psi <- function(t) Lambda(t)- St(t)
R> nu <- min(which(Xt >= St(t)))
R> tau <- uniroot(Psi ,lower=t[1],upper=t[nu])$root
R> tau
[1] 0.1358146
```

4 Monte-Carlo simulation with Sim.DiffProc package

The (S3) generic function `fptsde1d()` enable to simulate the random variable first passage time $\tau_{S(t)}$ in stochastic differential equations unidimensional (see Boukhetala, 1998a,b). We consider the following SDE and time varying boundary :

$$\begin{cases} dX_t = \frac{1}{2}\alpha^2 X_t dt + \alpha X_t dW_t, & x_0 \neq 0. \\ S(t) = -0.5\sqrt{t} + \exp(t^2) \end{cases}$$

We can simulate the first passage time $\tau_{S(t)}$ of this model through this boundary, with `fptsde1d()` function :

Monte-Carlo simulation of FPT in SDE through time-varying boundaries

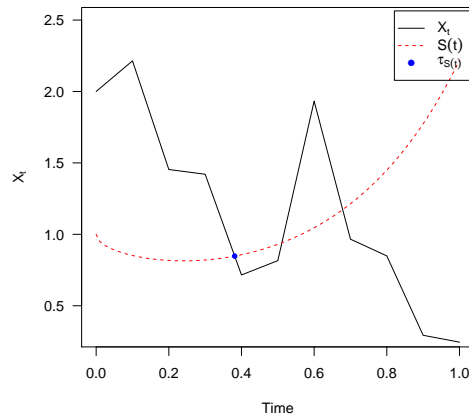


FIG. 4 – $dX_t = 2X_t dt + 2X_t dW_t$, $X_{t_0} = 0.5$. with $S(t) = -2t + 1$

```
R> library(Sim.DiffProc)
R> ## The model
R> f <- expression(2*x)
R> g <- expression(2*x)
R> mod <- snssde1d(drift=f,diffusion=g,x0=2,M=1000)
R> help(snssde1d) ## for more details.
R> ## FPT
R> St <- expression(-0.5*sqrt(t)+exp(t^2))
R> res <- fptsde1d(mod, boundary=St)
R> res
Itô Sde 1D:
| dX(t) = 2 * X(t) * dt + 2 * X(t) * dW(t)
| t in [0,1].
Boundary:
| S(t) = -0.5 * sqrt(t) + exp(t^2)
F.P.T:
| T(S(t),X(t)) = inf{t >= 0 : X(t) <= -0.5 * sqrt(t) + exp(t^2) }
| Crossing realized 735 among 1000.

R> head(res$fpt)
[1] 0.61701272 0.68593043 0.22313836 0.03422738 0.23971570 0.21964244

R> summary(res)

Monte-Carlo Statistics of F.P.T:
|T(S(t),X(t)) = inf{t >= 0 : X(t) <= -0.5 * sqrt(t) + exp(t^2) }
```

```

Mean           0.3514186
Variance       0.0762169
Median         0.2726903
Mode           0.1062634
First quartile 0.1103672
Third quartile 0.5625865
Minimum        0.0127001
Maximum        0.9993072
Skewness       0.7070227
Kurtosis       2.3137515
Coef-variation 0.7855988
3th-order moment 0.0148768
4th-order moment 0.0134406
5th-order moment 0.0055340
6th-order moment 0.0035436

```

```

R> # density approximate
R> den <- dfptsde1d(res)
R> plot(den)

```

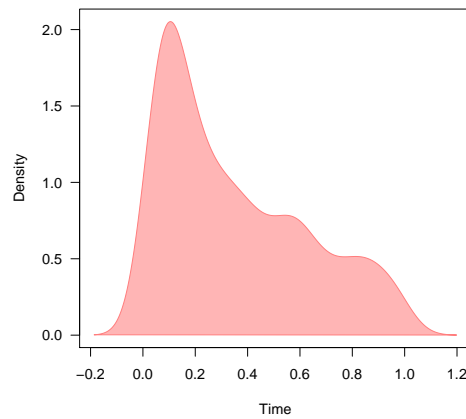


FIG. 5 - $dX_t = 2X_t dt + 2X_t dW_t$, $X_{t_0} = 0.5$. with $S(t) = -0.5\sqrt{t} + \exp(t^2)$

Références

Boukhetala, K. (1996). *Modelling and Simulation of a Dispersion Pollutant with Attractive Centre*, Volume 3, pp. 245-252. Boston, USA : Computer Methods and

- Water Resources, Computational Mechanics Publications.
- Boukhetala, K. (1998a). Estimation of the first passage time distribution for a simulated diffusion process. *Maghreb Mathematical Review* 7, 1–25.
- Boukhetala, K. (1998b). Kernel density of the exit time in a simulated diffusion. *The Annals of The Engineer Maghrebian* 12, 587–589.
- R Core Team (2019). *R : A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria : R Foundation for Statistical Computing.
- Guidoum, A. C. et K. Boukhetala (2019). *Sim.DiffProc : Simulation of Diffusion Processes*. R package version 4.4.
- Henderson, D. et P. Plaschko (2006). *Stochastic Differential Equations in Science and Engineering*. World Scientific.
- Klebaner, F. (2005). *Introduction to stochastic calculus with applications* (2 ed.). Imperial College Press.
- Roman, R., J. J. Serrano, et F. Torres (2008). First-passage-time location function : Application to determine first-passage-time densities in diffusion processes. *Computational Statistics and Data Analysis* 52, 4132–4146.
- Roman, R., J. J. Serrano, et F. Torres (2012). An r package for an efficient approximation of first-passage-time densities for diffusion processes based on the fptl function. *Applied Mathematics and Computation* 218, 8408–8428.

Summary

This work is about ready to be used the R functions `fptsde1d()` and `dfptsde1d()` available in `Sim.DiffProc` package version 4.4, for simulated and approximated the density of the first passage time based on discrete sampled observations from such models. The simulation studies implemented in R language seem very preferment and efficient, because it is a statistical environment, which permits to realize, to visualize and validate the simulations.

Estimation du taux des rappels dans le système M/G/1 avec rappels linéaires

Houssam Eddine HAMECHE*, Louiza BERDJOUJ**

*Laboratoire de Mathématiques Appliquées LMA
Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie
Housseam.hamache@gmail.com,

**Unité de Recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes)
Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie
l_berdjoudj@yahoo.fr

Résumé. L'objectif de ce travail est l'analyse du système M/G/1 avec rappels d'un point de vue statistique. Plus exactement nous nous intéressons à l'estimation du taux des rappels en généralisant les travaux de Rodrigo (1998 et 2006) dans les cas ergodique. Supposons que les inter-rappels sont distribués de manière exponentielle, et la politique des rappels est linéaire. L'estimateur du taux des rappels ainsi que sa variance ont été obtenus.

1 Introduction

Les files d'attente avec rappels ont été largement utilisées pour modéliser de nombreux problèmes dans les systèmes téléphoniques, informatiques, des réseaux locaux et des situations de la vie quotidienne. Une description complète de situations où les systèmes de files d'attente avec rappels se présentent peut se trouver dans la monographie de Falin et Templeton (1997) et Kim (2016). Une classification bibliographique est donnée dans les articles de Artalejo (1999) et (2010) et de Shekhar et al.(2016).

Dans la pratique, dans le cas où le taux des rappels est inconnu, son estimation paramétrique est difficile car on ne peut observer les clients en orbite par conséquent on ne peut distinguer entre les clients primaires et les clients secondaires, d'où l'importance de cette étude statistique.

Le nombre de publications sur l'analyse statistique des modèles de files d'attente avec rappels est très réduit comparé au nombre de publications disponibles dans la littérature sur l'analyse stochastique des ces modèles. Hoffman et Harris (1986) ont développé un algorithme pour estimer le taux des rappels en utilisant des données téléphoniques réelles. Falin (1995) et Rodrigo et al. (1998) ont proposé des estimateurs du taux des rappels pour M/M/1 et M/G/1 avec rappels classiques. Rodrigo et vazquez (1999) ont fait une analyse statistique du modèle G/G/1 avec distribution des rappels générale. Rodrigo (2006) a proposé des estimateurs du taux des rappels pour M/G/1 avec rappels constants et ceci dans le cas ergodique et non ergodique.

Dans ce travail, nous proposons un estimateur du taux des rappels du modèle M/G/1 avec rappels linéaire, en généralisant les travaux de rodrigo (1998 et 2006). Dans la section 2, nous donnons une description mathématique du modèle. La section 3, traite l'estimation du taux des rappels linéaires. La section 4, conclue le travail.

2 Description du modèle

Nous considérons un système M/G/1 à un seul serveur où les clients primaires arrivent suivant un flot poissonnien de taux $\lambda > 0$. Un client qui arrive et qui trouve le serveur non disponible, quitte l'espace de service pour rejoindre un groupe de clients bloqués appelé "orbite". Après un certain temps aléatoire, il renouvelle sa tentative d'entrer en service, une fois, deux fois, ..., jusqu'à ce qu'il le trouve disponible. La discipline d'accès au serveur à partir de l'orbite est gouvernée par une loi exponentielle avec une intensité mixte donnée par $\alpha(1 - \delta_{n,0}) + n\mu$, où n le nombre de clients en orbite et $\delta_{n,0}$ est la fonction de Kronecker, on l'appelle politique de rappels linéaires. Les temps de service sont des variables aléatoires indépendantes d'une loi arbitraire, de fonction de distribution $B(\cdot)$, ($B(0) = 0$), de transformée de Laplace-Stieltjes $\beta(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dB(t)$, $\beta_k = (-1)^k \beta^{(k)}(0)$, le système est ergodique si $\rho = \lambda\beta_1 < 1$. De plus on suppose que les temps inter-arrivées, les durées de service et les inter-rappels sont indépendants.

3 Estimation du taux des rappels

On considère un système M/G/1 avec rappels linéaires dont le taux global des rappels $\alpha(1 - \delta_{n,0}) + n\mu$. Quand le processus $\{N(t), t \geq 0\}$, représentant le nombre de clients dans l'orbite à l'instant t n'est pas observable l'estimation des paramètres (α, μ) devient plus difficile. Considérons alors le processus $\{M(t), t \geq 0\}$ qui représente le nombre total des rappels durant le service courant à l'instant t tel que $M(t) = \begin{cases} M_1(t), & \text{dans le cas classique;} \\ M_2(t), & \text{dans le cas constant.} \end{cases}$, on précise que $M_1(t)$ est observable par contre $M_2(t)$ n'est pas observable. Dans ce dernier cas on considère la variable supplémentaire $\xi(t)$ représentant le temps de service écoulé à l'instant t . Si le serveur est libre, $M_1(t) = 0$ et $\xi(t) = 0$ si $M_2(t) = 0$. Supposons qu'on peut observer le processus $\{M(t), t \geq 0\}$ dans l'intervalle du temps $(0, T)$ et que $\{M(t), t \geq 0\}$ est ergodique ($\rho < 1$), notre estimateur sera basé sur l'estimateur intégral $\hat{\xi}_T$ donné par la formule

$$\hat{\xi}_T = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T M_1(t) dt, & \text{dans le cas classique;} \\ \frac{1}{T} \int_0^T M_2(t) dt, & \text{dans le cas constant.} \end{cases}$$

$\hat{\xi}_T$ converge presque sûrement vers la moyenne stationnaire de $M_1(t)$ et de $M_2(t)$ et on a :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\xi}_T = \begin{cases} \mathbb{E}(M_1), & \text{dans le cas classique;} \\ \mathbb{E}(M_2), & \text{dans le cas constant.} \end{cases}$$

Avec

$$E(M_1) = \rho + (\lambda^2 + \lambda\mu E(N)) + \beta_2/2 + \lambda^2\mu\beta_3/6.$$

et

$$\mathbb{E}(M_2) = \frac{1 - \rho - \beta^*(\lambda)}{\lambda\beta_1^*(\lambda)}(\alpha - \rho(\alpha + \lambda)) + \frac{\lambda\beta_2}{2}(\alpha + \lambda) + \rho.$$

Donc,

$$\hat{\alpha} + n\hat{\mu} = (A_\alpha + nA)\hat{\xi}_T - (B_\alpha + nB), \quad (1)$$

avec

$$A_\alpha = \frac{2\lambda\beta^*(\lambda)}{\lambda^2\beta_2\beta^*(\lambda) + 2(1-\rho)(1-\rho-\beta^*(\lambda))},$$

$$B_\alpha = \frac{\lambda\beta^*(\lambda)(4\rho + \lambda^2\beta_2) - 2\lambda\rho(1-\rho)}{\lambda^2\beta_2\beta^*(\lambda) + 2(1-\rho)(1-\rho-\beta^*(\lambda))},$$

$$A = \frac{12(1-\rho)}{3\lambda^3\beta_2^2 + 2\lambda^2(1-\rho)\beta_3},$$

$$B = \frac{6\lambda^2\beta_2 + 12\rho(1-\rho)}{3\lambda^3\beta_2^2 + 2\lambda^2(1-\rho)\beta_3},$$

est l'estimateur consistant de $(\hat{\alpha} + n\hat{\mu})$.

La formule explicite de $\mathbf{Var}(\hat{\alpha} + n\hat{\mu})$ est donnée par la formule suivante

$$\mathbf{Var}(\hat{\alpha} + n\hat{\mu}) = (A_\alpha + nA)^2 \mathbf{Var}(\hat{\xi}_T). \quad (2)$$

Avec

$$\mathbf{Var}(\hat{\xi}_T) \simeq \frac{2}{T} [(\beta_1 + \frac{\lambda + \alpha}{2}\beta_2)V(0) - (\lambda + \alpha)(\mathbb{E}(M)F^3(0,0) - F^3(1,0)) - A - (\mathbb{E}(M) - 1)F^2(1,0) + F^2(2,0)],$$

avec

$$\mathbb{E}(M) = \mathbb{E}(M_1) + \mathbb{E}(M_2),$$

$$V(0) = -E(M)P'_0(1) - E(M)F^1(0,1) + F^1(1,1),$$

$$A = \frac{1-\rho-\beta^*(\lambda)}{\lambda^2\beta^*(\lambda)}(\alpha C + \frac{\lambda\alpha(1-E(M))}{\beta^*(\lambda)}P_{0,0}) + \frac{\alpha(1-E(M))}{\lambda\beta^*(\lambda)}(\frac{1-\beta^*(\lambda)}{\lambda} + \frac{d\beta^*(\lambda)}{d\lambda})P_{0,0},$$

$$C = \frac{1}{\beta^*(\lambda)}(E(M)P_{0,0} + \lambda V_{0,0} + \frac{\lambda(1-E(M))}{\beta^*(\lambda)}\frac{d\beta^*(\lambda)}{d\lambda}P_{0,0}),$$

$$V_{0,0} = \frac{1}{\alpha}((\lambda + \alpha)(E(M)F^2(0,0) - F^2(1,0)) - (1 + (\lambda + \alpha)\beta_1)V(0)),$$

et, $F^k(m, n)$ est le moment factoriel d'ordre k, pour plus de détail voir Rodrigo (2006).

4 Conclusion

Dans ce travail, on a obtenu l'estimateur du taux des rappels linéaires, du modèle M/G/1 avec rappels ainsi que sa variance explicite. L'illustration numérique de la variance de l'estimateur obtenu est la perspective de ce travail.

Références

- J. R. Artalejo and A. Gomez Corral (2008). Retrial Queueing Systems. A Computation approach. Berlin, Springer Edition.
- J. R. Artalejo (1999). Accessible bibliography on retrial queues. Mathematical and computer modelling 30. 1-6.
- J. R. Artalejo (2010). Accessible bibliography on retrial queues : Progress in 2000-2009. Mathematical and computer modelling 51, 1071-1081.
- G.I. Falin. Estimation of retrial rate in retrial queue (1995). Queueing Systems 19 231-246.
- G.I. Falin and J.G.C. Templeton (1997). Retrial Queues. Chapman and Hall.London.
- K. L. Hoffman and C.M. Harris (1986). Estimation of a caller retrial rate for a telephone information system. European Journal of Operational Research, 27, 215-228.
- J. Kim and B. Kim (2016). A survey of retrial queueing systems. Annals of Operations Research,1-34.
- A. Rodrigo, M Vazquez and GI Falin (1998). new Markovian description of the M/G/1 retrial queue. European Journal of Operational Research, 104 :231-240.
- A. Rodrigo and M. Vazquez (1999). Large sample inference in retrial queues. Mathematical and Computer Modelling, 30, 197-206.
- A. Rodrigo (2006). Estimators of the retrial rate in M/G/1 retrial queues. Asia-Pacific Journal of Operational Research, 23 : 193-213.
- C. Shekhar,Raina A.A and Kumar A (2016). A brief review on retrial queue : Progress in 2010-2015. Int. Journal of Applied Sciences and Engineering Research, Vol. 5, 324-336.

Summary

The objective of this work is the analysis of the M/G/1 retrial queue from a statistical point of view. More precisely, we are interested in estimating of the retrial rate by generalizing the works of Rodrigo (1998 and 2006) for ergodic case. Suppose that retrials are exponentially distributed, with linear policy. The estimator and its variance were obtained.

Consistance forte de l'estimateur à noyau de la régression relative pour des données tronquées à gauche et associées

Farida Hamrani *, Zohra Guessoum **
Elias Ould Saïd ***, Abdelkader Tatachak **

*Faculté Mathématique USTHB
BP 32, El-Alia 16111, Algiers, Algeria,
fhamrani@usthb.dz

**Laboratoire MSTD, Faculté Mathématique, USTHB
BP 32, El-Alia 16111, Algiers, Algeria,
zguessoum@usthb.dz
atatachak@usthb.dz

***Univ. Littoral Côte d'Opale, LMPA
CS: 80699, Calais, France
ouldsaid@lmpa.univ-littoral.fr

Résumé. Dans ce travail, nous définissons et étudions un nouveau estimateur pour la fonction de régression quand la variable d'intérêt sujette à la troncature aléatoire à gauche et les données présentent une forme de dépendance qui est l'association. L'estimateur est construit en minimisant la fonction de perte basée sur l'erreur quadratique moyenne relative. On a établi la convergence presque sûre (p.s.) uniforme de l'estimateur sur un compact avec une vitesse de convergence. Quelques simulations sont effectuées pour conforter nos résultats théoriques.

1 Introduction

Soit $\{(\mathbf{X}_i, Y_i); i = 1, \dots, N\}$ une suite strictement stationnaire de vecteurs aléatoires définie dans le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, ayant la même loi que (\mathbf{X}, Y) . Un problème courant en statistique non paramétrique est celui de prédire Y étant donné \mathbf{X} . Souvent, la relation entre \mathbf{X} et Y est modélisée par la relation de régression suivante

$$Y = m(\mathbf{X}) + \epsilon,$$

où m désigne la fonction de régression et ϵ est une variable aléatoire d'erreur indépendante de \mathbf{X} .

Classiquement, la fonction de régression est estimée en minimisant la fonction de perte suivante :

$$\mathbb{E} \left[(Y - m(\mathbf{X}))^2 | \mathbf{X} \right].$$

Cependant, ce type de fonction de perte est très sensible aux valeurs aberrantes. Pour cette raison, dans ce travail, nous surmontons ce problème en utilisant une alternative fonction de perte basée sur l'erreur quadratique relative définie pour $Y > 0$, par

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{Y - m(\mathbf{X})}{Y} \right)^2 \mid \mathbf{X} \right]. \quad (1)$$

En suivant Park et Stefanski (1998), La fonction de régression qui minimise (1) s'écrit comme suit

$$m(x) = \frac{\mathbb{E} [Y^{-1} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}]}{\mathbb{E} [Y^{-2} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}]} \quad (2)$$

Nous somme intéressés à estimer cette dernière par la méthode non paramétrique de type noyau lorsque la variable d'intérêt Y est tronquée aléatoirement à gauche par une variable aléatoire de troncature T . Sous ce modèle, nous n'observons que $\{(\mathbf{X}_i, Y_i, T_i); i = 1, \dots, N\}$ pour lesquelles $Y_i \geq T_i$, $\{T_i, i = 1, \dots, N\}$ désigne une suite de variables de troncature de même loi que T . Il est clair que nous disposons donc d'un échantillon observé $\{(\mathbf{X}_i, Y_i, T_i); i = 1, \dots, n\}$ tel que $n \leq N$.

En pratique, le fait de supposer que les données sont toujours indépendantes est peu réaliste, c'est pour cela depuis quelques années plusieurs auteurs ont concentrés leurs études sur des données présentant une certaine forme de dépendance. Dans ce travail, nous sommes intéressés aux données associées. Une famille finie de variables aléatoires $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$ est dite associée si

$$cov(f(Y), g(Y)) \geq 0$$

pour toutes fonctions f et g non décroissantes de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} pour lesquelles cette covariance existe. Une famille infinie est dite associée si toute sous famille finie est associée.

2 Définition de l'estimateur et présentation de résultat

Suivant les mêmes étapes que celles de Ould Saïd et Lemdani (2006), nous définissons un estimateur à noyau pour la fonction de régression relative définie en (2) qui prend en compte l'effet de troncature à gauche. Il est donné par

$$\hat{m}(\mathbf{x}) = \frac{\frac{\alpha_n}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i^{-1}}{G_n(Y_i)} K_d \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_n} \right)}{\frac{\alpha_n}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i^{-2}}{G_n(Y_i)} K_d \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_n} \right)} =: \frac{\hat{\psi}_1(\mathbf{x})}{\hat{\psi}_2(\mathbf{x})}. \quad (3)$$

- $K_d : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction à noyau,
- h_n est appelée fenêtre qui tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$,
- G_n est l'estimateur de Lynden-Bell (1971) de la fonction de répartition G de la variable aléatoire de troncature T ,
- α_n est l'estimateur de $\alpha := \mathbb{P}(Y \geq T)$ proposé par He et Yang (1998).

Nous supposons que $(\mathbf{X}_i, Y_i)_{i=1, \dots, N}$ sont associés dont leurs coefficients de covariance sont définis par :

$$\rho(s) := \sup_{|i-j| \geq s} \theta_{i,j}, \text{ pour } s > 0,$$

avec

$$\theta_{i,j} := \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \text{cov}(X_i^k, X_j^l) + 2 \sum_{k=1}^d \text{cov}(X_i^k, Y_j) + \text{cov}(Y_i, Y_j), \quad (4)$$

X_i^k est la k -ème composante de \mathbf{X}_i .

Sous certaines hypothèses classiques sur la fenêtre et des conditions de régularité sur le noyau, les densités conjointes et marginales, nous avons établi la convergence uniforme sur un compact $D \subset \mathbb{R}^d$ de l'estimateur \hat{m}_n quand le terme de covariance

$$\rho(s) \leq \gamma_0 e^{-\gamma s}$$

pour certaines constantes positives γ_0 et γ .

Notre résultat est énoncé dans le théorème suivant

Theorème :

$$\sup_{\mathbf{x} \in D} |\hat{m}_n(\mathbf{x}) - m(\mathbf{x})| = \mathcal{O} \left\{ \sqrt{\frac{\log n}{nh_n^d}} \vee \left(\frac{\log \log n}{n} \right)^\theta \vee h_n^2 \right\} \text{ p.s. quand } n \rightarrow \infty,$$

avec $0 < \theta < \frac{2\gamma}{4\gamma+9+3\kappa}$, $\kappa \geq 0$.

3 Simulation

Une étude de simulation a montré le bon comportement de notre estimateur pour différents taux de troncature et différentes tailles d'échantillon observé. Une comparaison par simulation entre l'estimateur pour la régression tronquée classique définie par Ould Saïd et Lemdani (2006) et l'estimateur de la régression tronquée relative défini en (3) a montré l'efficacité de cette approche par rapport à l'approche classique en présence des valeurs aberrantes.

Références

- He, S. et G. Yang (1998). Estimation of the truncation probability in the random truncation model. *The Annals of Statistics* 26, 1011–1027.
- Lynden-Bell, D. (1971). A method of allowing for known observational selection in small samples applied to 3CR quasars. *Monthly Notices Royal Astronomy Society* 155, 95–118.
- Ould Saïd, E. et M. Lemdani (2006). Asymptotic properties of a nonparametric regression function estimator with randomly truncated data. *Ann.Inst.Statist.Math* 58, 357–378.
- Park, H. et L. Stefanski (1998). Relative-error prediction. *Statist. Probab. Lett.* 40, 227–236.

Summary

In this work, we define and study a new estimator of the regression function which is at risk of being random right truncated and the data satisfies the association hypothesis. The estimator is constructed by minimizing a loss function based on the mean squared relative error. The uniform strong consistency rate over a real compact set of the estimator is established. The finite sample performance of the estimator is investigated through extensive simulation studies.

Inférence statistique des modèles de survie

Lyasmine Harrouche*, Hocine Fellag**, Lynda Atil***

* Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Tizi-Ouzou. 15000. Algérie
harrouche.lyasmine@yahoo.fr

**hfellag@yahoo.com

***atillynda@yahoo.fr

Résumé. *L'analyse de survie est modélisée par des lois de probabilité de variables aléatoires continues liées au temps écoulé jusqu'à la survenue d'un événement précis. Une panoplie de méthodes existent pour estimer les paramètres du modèle. Dans ce travail, nous proposons de passer en revue les principales méthodes d'estimation de ces modèles ainsi qu'une application sur des données réelles.*

1 Introduction

L'analyse des données de survie est l'étude qui s'intéresse à l'apparition aléatoire d'un événement d'intérêt au fil de temps mesuré sur un individu. La période allant du début d'observation jusqu'à l'apparition de l'évènement d'intérêt est une variable aléatoire, dite durée de survie. Les données de survie sont caractérisées par la prise en considération des données censurées, (Lawless,1982 et Oakes, 1984).

Les différentes approches fréquentiste et Bayésienne permettent de mettre en oeuvre des méthodes efficaces pour décrire les données de survie, fournir les estimations des paramètres et expliquer l'impact de certains facteurs sur la durée de survie. Beaucoup de travaux de recherche ont été publiés sur ces modèles avec des applications pertinentes dans plusieurs domaines, comme la médecine, la fiabilité, l'économetrie, etc.

Weier (1981) étudie l'estimation Bayésienne du modèle de survie bivarié basé sur les distributions exponentielles. Klein et Basu(1985) abordent l'estimation de la fonction de survie du modèle exponentiel bivarié avec l'approche classique. Cox et al (1991, 1992) effectuent un travail approfondi sur les modèles exponentiels de survie à deux variables. Kalbfleisch et Prentice(2002) donnent une présentation unifiée des modèles et des méthodes statistiques de l'analyse des données de survie. Hanagal et Ahmadi (2009) adoptent une approche Bayésienne empirique du problème exponentiel bivarié. Chadli et al (2013) publient un article sur la comparaison de l'estimateur de maximum de vraisemblance et de l'estimateur Bayésien de la distribution exponentielle bivariée symétrique sous différentes fonctions perte. Enfin, Hill et al (1990) et Paroissin (2015) donnent un large aperçu de ces modèles.

Dans ce travail, nous présentons les principales méthodes d'estimation des modèles de survie que nous compléterons par une analyse des données réelles.

2 Modèles et méthodes

On définit, sur un espace probabilisé $(R^+, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, une variable aléatoire T continue à valeurs réelles positives de densité f qui représente la durée de vie, c'est à dire, le délai entre la date initiale et la date où un événement particulier survient. Pour t fixé, la distribution de la survie est définie par $S(t) = P(T \geq t) = 1 - F(t)$. La fonction de risque instantané λ est définie par $\lambda(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + dt | T \geq t)}{dt}$.

Supposons que nous disposons d'un échantillon de n individus possédant des informations principales sur les dates qui définissent les durées de survie de chacun. Soit t_i la réalisation de la variable aléatoire T du i ème individu. Celui-ci représente le temps réellement observé et dépend des dates suivantes : La date d'origine DO ($t = 0$) qui est la date de début de l'observation, la date des dernières nouvelles DDN qui se produit d'une manière aléatoire, la durée de surveillance T_i qui est donnée par $T_i = DDN - DO$ et la date de point DP qui est la date au-delà de laquelle nous arrêtons l'observation. Le recul est donné par la formule $L_i = DP - DO$. Lorsque l'individu subit l'événement à la DDN , l'observation est complète. Sinon, l'observation est censurée et est définie par une variable de la censure d_i , engendrée par les cas suivants

- le sujet n'a pas subi l'événement à la date de point (exclu vivant).
- le sujet n'a pas subi l'événement à la date des dernières nouvelles (perdu de vue).

Les données de survie peut être caractérisées par la prise en compte des données censurées. Les observations sont alors présentées par n couples aléatoires (t_i, d_i) , $i = 1, \dots, n$, déterminées comme suit

$$d_i = \begin{cases} 0 & \text{si } T_i > L_i \\ 1 & \text{si } T_i \leq L_i \end{cases} \quad \text{et } t_i = \inf\{T_i, L_i\}$$

Pour estimer les paramètres d'un modèle de survie, différentes approches peuvent être mises en oeuvre. les méthodes classiques sont paramétriques, semiparamétriques ou nonparamétrique. On peut aussi faire appel aux méthodes Bayésiennes qui mènent à d'excellents résultats.

Le modèle paramétrique de survie est un modèle dans lequel la fonction risque dépend d'un ou plusieurs paramètres à estimer. Il existe plusieurs modèles paramétriques, comme le modèle de Weibull, exponentiel, Pareto, Log-normal, etc. Dans ce cas, on utilise, en général, la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer le paramètre du modèle. Dans le cas de présence de la censure, cette dernière peut être de type non aléatoire, aléatoire ou d'un autre type spécifique.

Dans le cas non paramétrique, l'estimation est dite fonctionnelle et ne nécessite aucune hypothèse sur la loi de probabilité des observations ordonnées par ordre croissant des temps de participation. L'une des méthodes d'estimation de la fonction de survie la plus utilisée est la méthode de Kaplan-Meier. La fonction de survie estimée par la méthode de Kaplan-Meier est représentée par une courbe décroissante sous forme d'escaliers, représentant la probabilité de survie estimée en fonction du temps.

La technique semiparamétrique est liée, entre autres, au modèle de Cox qui est un modèle multivarié régressif semi-paramétrique, utilisé afin d'évaluer l'effet de certaines variables explicatives sur la durée de survie de chaque individu indépendamment du temps. Une méthode particulière d'intérêt est la maximisation de la vraisemblance partielle de Cox.

Enfin, la démarche des méthodes Bayésiennes est de conduire au calcul d'une loi a posteriori après avoir choisi une loi a priori appropriée. Dans l'approche Bayésienne de l'analyse de modèles de survie, on peut se ramener aux méthodes semi paramétriques comme la méthode de Kalbfleisch, les méthodes non paramétriques comme la méthode de Florens et Rolin ainsi que la méthode paramétrique .

Dans ce travail, pour conclure, nous présentons une application réalisée sur des données réelles. Il ressort de cette étude des résultats pertinents aussi bien pour les chercheurs dans le domaine d'application ainsi que pour les décideurs dans le secteur de la statistique publique.

Références

Chadli Assia, Talhi Hamida and Fellag Hocine, (2013), *Comparison of the maximum likelihood and Bayes estimators for symmetric bivariate exponential distribution under different loss functions*, Afrika Statistika, 2316-090X , vol.8, pages 499-514.

Hanagal .D.D and Ahmadi. K.A, (2009), *Bayesian estimation of the parameters of bivariate exponential distribution*, Communications in Statistics - Simulation and Computation, 0361-0918, 38, Pages 1391-1413.

Hanagal. D. D, Kale .B. K, (1991a), *Large sample tests in the bivariate exponential distribution* Statistics and Probability Letters 12 :311-313.

Hanagal. D. D, Kale. B. K ,(1991b), *Large sample tests of independence in an absolutely continuous bivariate exponential distributions*, Communications in Statistics-Theory and Methods 20(4) :1301-1313.

Hanagal. D. D, Kale. B. K, (1992), *Large sample tests for testing symmetry and independence in some bivariate exponential models*, Communications in Statistics-Theory and Methods 21(9) :2625-2643.

Hill Catherine, Com-Nougué Catherine, Kramar Andrew, Moreau Thierry, O'Quigley John, Senoussi Rachid, Chastang Claude , (1990), *Analyse statistique des données de survie*, éd INSERM.

Kalbfleisch. J. D, Prentice. R, (2002), *The Statistical Analysis of Failure Time Data*, éd John Wiley and Sons.

Klein. J.P and Basu. A.P, (1985), *On estimating reliability for bivariate exponential distributions*, Sankhya, Series B, 47, 346-353.

Lawless . J. F, (1982), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, éd, John Wiley

Paroissin Christian, (2015), *Programmation et analyse statistique avec R*. Ellipses Eds.

Weier. D.R, (1981), *Bayes estimation for bivariate survival models based on the exponential distributions*, Communications in Statistics-Theory and Methods, 10. Pages 1415-1427.

Summary

Survival analysis concerns sequential occurrences of events governed by probabilistic laws. There are many methods for estimating the parameters of these models. In this work, we present a review of different estimation methods using classical and Bayesian approaches. It will be completed by a real data study.

Uniform convergence of a Kernel conditional quantile estimator under left truncated data and functional regressors

Nacera Helal*, Elias OULD SAID**

*Laboratory of Biomathématiques

helalnacera@yahoo.fr

**Univ. Lille Nord de France

Elias.Ould-Said@univ-littoral.fr

Résumé. Ces instructions pour la préparation des communications pour MSS'2014 sous \LaTeX doivent être respectées strictement pour assurer une présentation cohérente aux articles. Merci de ne pas modifier le formatage des différents textes. Ce résumé doit faire au plus 150 mots.

1 Introduction

Let (X, Y) be a couple of random variables (r.v.'s) valued in $\mathcal{F} \times \mathcal{R}$, where \mathcal{F} is a semi-metric space, d denoting the semi-metric and Y being with distribution function (d.f.) F . Our purpose is to study the co-variation between X and Y via the quantile regression estimation when the interest r.v. is subject to random left truncation and the regressors take values in an infinite dimensional space. Let T be another real r.v. with unknown d.f. G . We consider a sample $(Y_1, T_1), (Y_2, T_2), \dots, (Y_N, T_N)$, N copies of (Y, T) , where the sample size N is fixed but unknown. In this model (Y_i, T_i) is observed only if $Y_i \geq T_i$ no data is collected otherwise. Then the observed sample size n is random (but known) with $n \leq N$. In practice, such models are considered in many applications.

Now let $\{(X_i, Y_i, T_i), 1 \leq i \leq N\}$ be a sequence of iid random vectors where X_i takes values in some normed space $(\mathcal{S}, \|\cdot\|)$, Y_i and T_i are as before.

Since N is unknown and n is known (although random), our results will not be stated with respect to the probability measure P (related to the N -sample). Without possible confusion, we still denote (Y_i, T_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, ($n \leq N$) the observed pairs from the original N -sample. In all the remaining of this paper we suppose that T is independent of Y .

Now, for $x \in \mathcal{S}$, we consider the conditional probability distribution of Y_i given $X_i = x$ by

$$F(y|x) = P(Y_i \leq y | X_i = x) \quad (1)$$

where F is supposed strictly monotone. Let $p \in (0, 1)$, the conditional quantile is defined by :

$$\zeta_p(x) = \inf\{y : F(y|x) \geq p\}. \quad (2)$$

It is clear that an estimator of $\zeta_p(x)$ can easily be deduced from an estimator of $F(\cdot|x)$.

We point out that $\zeta_p(x)$ satisfies

$$F(\zeta_p(x)|x) = p. \quad (3)$$

Uniform convergence of a Kernel conditional quantile estimator under left truncated data and functional regressors

2 Background for truncation models

Recall that our original sample is $(X_i, Y_i, T_i)_{1 \leq i \leq N}$. Taking into account the truncation effect we denote by $(X_1, Y_1, T_1), \dots, (X_n, Y_n, T_n)$ the actually observed sample (i.e $Y_i \geq T_i, 1 \leq i \leq n$) and suppose that $\alpha := P(Y_1 \geq T_1) > 0$. Note here that n is a real random variable itself and that from the strong law of large numbers (SLLN) we have, as $N \rightarrow \infty$:

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{n}{N} \longrightarrow \alpha \quad P - a.s. \quad (4)$$

where $t \wedge u = \min(t, u)$. Following ? the distribution functions of Y and T are :

$$F^*(y) = \alpha^{-1} \int_{-\infty}^y G(u) dF(u) \quad \text{and} \quad G^*(t) = \alpha^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t \wedge u) dF(u)$$

respectively and are estimated by

$$F_n^*(y) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_i \leq y\}} \quad \text{and} \quad G_n^*(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{T_i \leq y\}}$$

respectively, where $\mathbf{1}_A$ is the indicator of the set A . Note that, in what follows, the star notation (*) relates to any characteristic of the actually observed data (that is, conditionally on n). Define

$$\begin{aligned} C(y) &= G^*(y) - F^*(y) \\ &= P(T_1 \leq y \leq Y_1 | Y_1 \geq T_1) \\ &= \alpha^{-1} G(y) (1 - F(y)), \quad y \in [a_F, +\infty[\end{aligned}$$

and consider its empirical estimate

$$\begin{aligned} C_n(y) &= n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{T_i \leq y \leq Y_i\}} \\ &= G_n^*(y) - F_n^*(y^-). \end{aligned}$$

It is well known that the respective nonparametric maximum likelihood of F and G are the product-limit estimators given by

$$F_n(y) = 1 - \prod_{Y_i \leq y} \left[\frac{nC_n(Y_i) - 1}{nC_n(Y_i)} \right] \quad \text{and} \quad G_n(y) = \prod_{T_i > y} \left[\frac{nC_n(T_i) - 1}{nC_n(T_i)} \right]$$

which were obtained by ?. provided $a_G \leq a_F, b_G \leq b_F$ and $\int dF/G < \infty$. Consequently, α is identifiable only if $a_G \leq a_F$ and $b_G \leq b_F$.

3 Quantile and distribution functions estimators

Our estimation of the conditional distribution function is based on the choice of weights. These are obtained in ?. As N is unknown, we have to adapt the weights given in ? which gives

the following values

$$\tilde{W}_{i,n}(x) = \frac{\alpha_n^{-1} K\left(\frac{\|x - X_i\|}{h_{n,K}}\right)}{\sum_{i=1}^n G_n^{-1}(Y_i) K\left(\frac{\|x - X_i\|}{h_{n,K}}\right)}. \tag{5}$$

Note that, in this formula and the forthcoming, the sum is taken only for i such that $G_n(Y_i) \neq 0$. This in turn yields an estimator of conditional distribution function $F(y|x)$ given by

$$\begin{aligned} F_n(y|x) &= \alpha_n \sum_{i=1}^n \tilde{W}_{i,n}(x) \frac{1}{G_n(Y_i)} H\left(\frac{y - Y_i}{h_{n,H}}\right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n G_n^{-1}(Y_i) K\left(\frac{\|x - X_i\|}{h_{n,K}}\right) H\left(\frac{y - Y_i}{h_{n,H}}\right)}{\sum_{i=1}^n G_n^{-1}(Y_i) K\left(\frac{\|x - X_i\|}{h_{n,K}}\right)} \\ &= \frac{\psi_n(x, y)}{g_n(x)} \end{aligned} \tag{6}$$

Here K is a real-valued kernel function, H is a d.f. and $h_{n,K} = h_K$ (resp $h_{n,H} = h_H$) is a sequence of positive real numbers which goes to zero as n goes to infinity.

Let $p \in (0, 1)$, a natural estimator of $\zeta_p(\cdot)$ is given by

$$\zeta_{p,n}(x) = \inf\{y : F_n(y|x) \geq p\} \tag{7}$$

which satisfies

$$F_n(\zeta_{p,n}(x)|x) = p. \tag{8}$$

We consider partial derivative of $\psi_n(x, y)$

$$\frac{\partial \psi_n(x, y)}{\partial y} = \psi'_n(x, y) = \frac{\alpha_n}{nh_H \phi(h_K)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{G_n(Y_i)} K\left(\frac{\|x - X_i\|}{h_K}\right) H'\left(\frac{y - Y_i}{h_H}\right)$$

where H' is derivative of H .

Making use of (3) and (8), we get

Now we are in position to state our main results :

Theorem 1 Under Assumptions **A1–A4**, we have

$$\sup_{x \in \Xi} \sup_{y \in [a,b]} |F_n(y|x) - F(y|x)| = O\left(h_K^\beta + h_H^\gamma\right) + O\left(\left(\frac{\log n}{n\phi(h_K)}\right)^{1/2}\right) \text{ a.s. as } n \rightarrow \infty.$$

Theorem 2 Under the same assumptions as those of Theorem 1 and if $f(y|x) > 0$ for all y in a neighborhood of $\zeta_p(x)$ and x fixed, we have

$$\sup_{x \in \Xi} |\zeta_{p,n}(x) - \zeta_p(x)| = O\left(h_K^\beta + h_H^\gamma\right) + O\left(\left(\frac{\log n}{n\phi(h_K)}\right)^{1/2}\right) \text{ a.s. as } n \rightarrow \infty.$$

Uniform convergence of a Kernel conditional quantile estimator under left truncated data and functional regressors

Summary

Let Y be a random real response which is subject to left-truncation by another random variable T . In this paper, we study the kernel conditional quantile estimation when the covariable X takes values in an infinite-dimensional space. A kernel conditional quantile estimator is given and under some regularity conditions, among which the small-ball probability, its strong uniform almost sure convergence with rate is established. Some special cases have been studied to show how our work extends some results given in the literature. Simulations are drawn to lend further support to our theoretical results and assess the behavior of the estimator for finite samples with different rates of truncation and sizes.

Déviations Modérées et Grandes Déviations en Estimation à noyau de la densité sous censure.

Nourelhouda KEBIR *, Ourida SADKI **

*Laboratoire MSTD, Faculté Mathématique, USTHB
BP 32, El-Alia 16111, Algiers, Algeria,
nkebir@usthb.dz,
<http://www.usthb.dz/>

** Laboratoire MSTD, Faculté Mathématique, USTHB
BP 32, El-Alia 16111, Algiers, Algeria,
osadki@usthb.dz
<http://www.usthb.dz/>

Résumé. Dans ce travail, nous étudions le principe des déviations modérées et le principe des grandes déviations pour un estimateur à noyau de la densité en présence de données censurées à droite.

1 Introduction

Soit $\{X_i, i \geq 1\}$ un échantillon de variables aléatoires i.i.d de f.d.r F et d'une densité f , et des temps de censure $\{C_i, i \geq 1\}$, i.i.d. et indépendants des $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, de fonction de répartition G . Dans le modèle de censure à droite on observe les couples $(Y_1, \delta_1), (Y_2, \delta_2), \dots, (Y_n, \delta_n)$. où $Y_i = \min(X_i, C_i)$, et $\delta_i = 1_{\{T_i \leq C_i\}}$. L'estimateur à noyau de la fonction de densité dans le cas complet, notée $f_n(x)$ est définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right), x \in \mathbb{R},$$

où K est appelé fonction poids ou noyau, et h_n est appelé paramètre de lissage ou fenêtre. On suppose que K est bornée, $\lim_{u \rightarrow \infty} |u|K(u) = 0$, $\int_{\mathbb{R}} K(u)du = 1$, $\int_{\mathbb{R}} |K(u)|du < \infty$.

$$\text{avec } h_n \rightarrow 0, nh_n \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

Ainsi dans le cas de données censurée à droite l'estimateurs à noyau de la densité est donnée par (pour plus de détails voir Ferrani(2014))

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - Y_i}{h_n}\right) \frac{\delta_i}{\bar{G}_n(Y_i)}. x \in \mathbb{R} .$$

Nous rappelons le principe de grandes déviations et le principes de déviations modérées pour l'estimateur f_n dans le cas complet i.i.d.(Dembo et Zeitouni)

1- Une suite de vecteurs aléatoires $(Z_n)_{n \geq 1}$ de \mathbb{R}^d satisfait un PGD de vitesse (ν_n) et de fonction de taux I si pour tout ouvert U de \mathbb{R}^d , et pour tout fermé V de \mathbb{R}^d ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \nu_n^{-1} \log P[Z_n \in U] \geq - \inf_{x \in U} I(x),$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \nu_n^{-1} \log P[Z_n \in V] \leq - \inf_{x \in V} I(x),$$

où ν_n est une suite positive telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_n = +\infty$.

2- On dit qu'une suite de vecteurs $(Z_n)_{n \geq 1}$ de \mathbb{R}^d satisfait un PDM si la suite $(\nu_n Z_n)_{n \geq 1}$ satisfait un PGD.

Théorème[1]. Sous les hypothèses précédentes, et si f est continue en x . Alors la suite $(f_n(x) - f(x))$ satisfait un PGD de vitesse (nh_n) et de fonction de taux donnée par :

$$I_x = \begin{cases} I_x : t \rightarrow f(x)I \left(1 + \frac{t}{f(x)} \right), & \text{si } f(x) \neq 0 \\ I_x(0) = 0 \text{ et } I_x(t) = +\infty \text{ pour } t \neq 0, & \text{si } f(x) = 0, \end{cases}$$

où

$$I(t) = \sup_{u \in \mathbb{R}} \{ut - \psi(u)\} \text{ et } \psi(u) = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{uK(z)} - 1 \right) dz.$$

2 Principe de Déviations Modérées(PDM) pour l'estimateur à noyau de la densité

2.1 PDM dans le cas données complètes

Gao(2003) a établi le résultat suivant :

Théorème [Gao(2003)]. Si f est continue, $\int_{\mathbb{R}} |K(u)| du < \infty$, $\psi(t) < \infty$ et $\mathfrak{F} = \left\{ K \left(\frac{x - \cdot}{h_n} \right); x \in \mathbb{R}, h_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ est une fonction VC classe borné mesurable alors pour tout $\lambda > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n}{b_n^2} \log P \left(\frac{nh_n}{b_n} \| f_n - E(f_n) \|_{\infty} > \lambda \right) = -I(\lambda),$$

où

$$I(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2 \| f \|_{\infty} \int_{\mathbb{R}} K^2(z) dz}.$$

où $(b_n)_{n \geq 1}$ est une séquence de nombre réelle positive telle que,

$$\frac{nh_n}{b_n} \rightarrow +\infty, \frac{nh_n \log h_n^{-1}}{b_n^2} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

2.2 PDM dans le cas des données incomplètes

Théorème[2].

Si f et \bar{G} sont continus, $\int_{\mathbb{R}} |K(u)| du < \infty$, $\psi(t) < \infty$ et $\mathfrak{F}_1 = \left\{ K \left(\frac{x-y}{h_n} \right) \frac{1_{\{\delta_i=0\}}}{\bar{G}(y)}; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, h_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$

est une fonction VC classe borné mesurable alors pour tout $\lambda > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n}{b_n^2} \log P \left(\frac{nh_n}{b_n} \| f_n - E(f_n) \|_\infty > \lambda \right) = -I(\lambda),$$

où

$$I(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2 \left\| \frac{f}{G} \right\|_\infty \int_{\mathbb{R}} K^2(z) dz} .$$

3 Simulation

cas complet. Nous voulons on utilisant des simulations vérifier le principe de grande déviation. Notons $A_n = P \left(nh_n \sup_x \left| \hat{f}_n(x) - E(\hat{f}_n(x)) \right| > b_n \lambda \right)$ et $B_n = \exp \left(-I(\lambda) \frac{b_n^2}{nh_n} \right)$, notre but est de comparer A_n et B_n et on utilise le noyau gaussien pour comparer. et on prend $h_n = h_{opt}$ de silverman tell-que $h_{opt} = 1.059 \hat{\sigma} n^{-\frac{1}{5}}$.

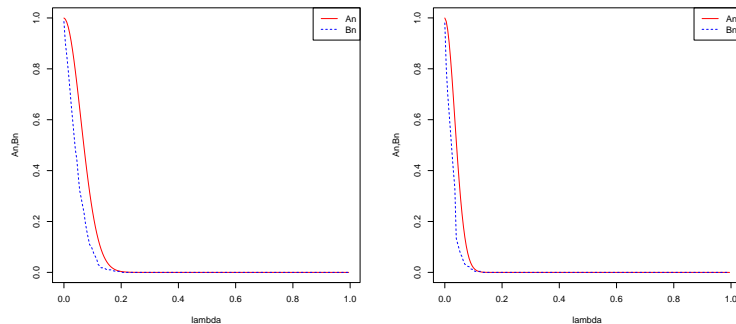


FIG. 1 – $n=100, n=1000, \exp(0.01), x=3.5, b_n = 2 * \log n$, respectivement.

La ligne continue rouge et la ligne pointillée bleu sont très proches, même pour la petite région de droite située à 0, La qualité de l'estimation s'améliore lorsque on augmente le n , cela confirme le résultat du PDM dans le théorème[Gao(2003)].

cas censurée. On choisit h_n par la méthode validation croisée et on utilise le noyau gaussien, et on fait la comparaison pour plusieurs lois de X pour n fixé, on précisant chaque fois le taux de censure.

choix de 1^{er} graphe $X \rightarrow \exp(0.2), C \rightarrow \exp(0.07)$, choix de 2^{ime} graphe $X \rightarrow N(0, 1), C \rightarrow N(0, 1)$ et le choix de 3^{ime} graphe $X \rightarrow W(2, 2), C \rightarrow W(4, 2)$

La ligne continue rouge et la ligne pointillée bleu sont très proches, même pour la petite région de droite située à 0, cela confirme le résultat du PDM dans le théorème[2] pour différentes lois.

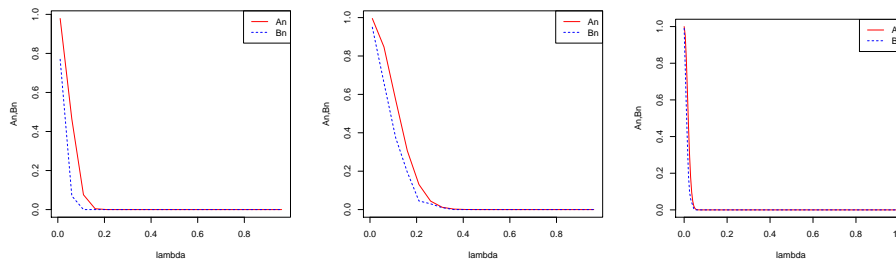


FIG. 2 – $n=200$, exp , $TC = 15\%$, $gaussien$, $TC = 17,3\%$, $weibull$, $TC = 20,2\%$, respectivement.

Références

- Dembo, A. et O. Zeitouni (1998). *Large Deviations Techniques and Applications*. Springer, New York.
- Diallo, A. O. K. et D. Louani (2013). Moderate and large deviation principles for the hazard rate function kernel estimator under censoring. *J.statist* 83, 735–743.
- Ferrani, Y., E. Ould Said, et A. Tatachak (2014). *Sur l'estimation non paramétrique de la densité et du mode dans les modèles de données incomplètes et associées*. These de doctorat, Université USTHB et ULCO.
- Gao, F. (2003). Moderate deviation and large deviation for kernel density estimators. *J. Theoret.Probab.* 16, 401–418.
- Jiang, H. et S. Wang (2017). Moderate deviation principles for classical likelihood ratio tests of high-dimensional normal distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, 1011–1027.

Summary

Nous nous sommes intéressés dans ce travail à réaliser des simulations pour étudier le principe des déviations modérées et le principe de grande déviations dans l'estimation non paramétrique de la densité dans le modèle complet et un modèle incomplet lorsque les données sont indépendante.

Régression non-paramétrique relative dans le cas des variables quasi-associées

Wardia Chahinez Mechab¹ and Ali Laksaci²

¹ESI Sidi Bel Abbès, Algérie/Laboratoire de statistique et processus stochastiques.

²King Khalid University Abha, Asir, Saudi Arabia.

10 mai 2019

Résumé

Le développement des systèmes informatiques et la puissance de calcul des machines sont à l'origine de l'accroissement constant du volume des données à traiter. Cette inflation ; toujours plus importante ; révèle à chaque fois les limites des techniques d'analyses utilisées, ce qui pose un réel défi aux statisticiens pour la construction et la mise au point de nouvelles méthodes statistiques, adaptées à cette profusion de données.

Le modèle de la régression relative est plutôt récent et les résultats significatifs datent de 1989 dans le travail de Campbell, M. Karen et Donner, Allan (Classification efficiency of multinomial logistic regression relative to ordinal logistic regression. *J. Amer. Statist. Assoc.* 84 (1989), no. 406, 587-591), où ce modèle a été utilisé comme outil de classification.

Le présent travail porte sur l'estimation non paramétrique relative sous des données quasi-associées, avec une variable explicative vectorielle. Nous aborderons les propriétés asymptotiques de l'estimateur construit à partir de la minimisation du carré moyen de l'erreur relative. Nous étudierons sa vitesse de convergence presque complète uniforme et sa normalité asymptotique.

Les résultats de cette communication ont été publiés dans *W. Mechab and A. Laksaci, Non-parametric relative regression for associated random variables. Metron 74, 75–97 (2016)*.

1 Présentation du modèle et son estimateur

Soit (X, Y) un couple des variables aléatoires défini sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans $R^d \times R$. La relation entre X et Y est exprimé par le modèle de régression suivant

$$(1) \quad Y = r(X) + \epsilon$$

où ϵ est une variable aléatoire réelle centrée et indépendante de X et r une fonction de R^d à valeurs dans \mathbb{R} . La régression relative est le cas où la fonction r est solution du problème d'optimisation suivant :

$$\min_r E \left[\left(\frac{Y - r(x)}{Y} \right)^2 \middle| X = x \right].$$

La solution de ce problème peut facilement être explicitée; en utilisant la dérivée par rapport à r de la fonction $E \left[\left(\frac{Y - r}{Y} \right)^2 \middle| X = x \right]$, on trouve comme solution :

$$r(x) = \frac{E[Y^{-1}|X = x]}{E[Y^{-2}|X = x]}.$$

Par ailleurs, on suppose que les fonctions $E[Y^{-1}|X = x]$ et $E[Y^{-2}|X = x]$ sont des fonctions de classe $C^2(\mathbb{R})$.

En utilisant la méthode du noyau, on estime la fonction r par

$$(2) \quad \tilde{r}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^{-1} K \left(\frac{d(x, X_i)}{h} \right)}{\sum_{i=1}^n Y_i^{-2} K \left(\frac{d(x, X_i)}{h} \right)}$$

où K est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $h = h_n$ un paramètre réel strictement positif.

Pour simplifier la notation on écrit :

$$\tilde{r}(x) = \frac{\tilde{g}_1(x)}{\tilde{g}_2(x)}$$

avec

$$\tilde{g}_1(x) = \frac{1}{n\mathbf{E} \left[K \left(\frac{d(x, X_i)}{h_n} \right) \right]} \sum_{i=1}^n K \left(\frac{d(x, X_i)}{h_n} \right) Y_i^{-1}$$

et

$$\tilde{g}_2(x) = \frac{1}{n\mathbf{E} \left[K \left(\frac{d(x, X_i)}{h_n} \right) \right]} \sum_{i=1}^n K \left(\frac{d(x, X_i)}{h_n} \right) Y_i^{-2}.$$

2 Hypothèses et résultats principaux

Soit S un compact de \mathbb{R}^d et f (resp. $f_{i,j}$) la densité de probabilité de la variable aléatoire X (resp. la densité conjointe de (X_i, X_j)).

Nous désignons par C et C' des constantes strictement positives et considérons $\lambda_k := \sup_{s \geq k} \sum_{|i-j| \geq s} \lambda_{i,j}$, avec

$$\lambda_{i,j} = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d |Cov(X_i^k, X_j^l)| + \sum_{k=1}^d |Cov(X_i^k, Y_j)| + \sum_{l=1}^d |Cov(Y_i, X_j^l)| + |Cov(Y_i, Y_j)|.$$

où X_i^k représente la k -ième composante de X_i .

Notons K le noyau et h_n Une suite de réels positifs qui converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini .

À cet effet, nous traitons la convergence presque complète uniforme du $\tilde{r}(x)$ vers $r(x)$ sur le compact S en posant les hypothèses suivantes :

(H1) La densité f de la variable X est strictement positive de class C^2 sur S et verifie :

$$\sup_{|i-j| \geq 1} \|f_{(X_i, X_j)}\|_{\infty} < \infty.$$

(H2) Les fonctions $r_l(\cdot) = E[Y^{-\gamma} | X = \cdot]$ avec $(l = 1, 2)$ sont de classe C^2 sur S .

(H3) Le processus $\{(X_i, Y_i), i \in \mathbb{N}\}$ est quasi-associé avec un coefficient de covariance λ_k qui satisfait

$$\exists a > 0, \exists C > 0 / \lambda_k \leq C \exp\{-ak\}.$$

(H4) La fonction K est une fonction Lipchitzienne, symétrique d'ordre 1 et à support compact.

(H5) $\exists \gamma \in (0, 1)$ et $\xi_1, \xi_2 > 0$ tels que

$$\frac{(\log n)^{\frac{1}{d}}}{n^{\frac{(1-\gamma-\xi_2)}{d}}} \leq h \leq \frac{C}{(\log n)^{\frac{1+\xi_1}{d}}}.$$

(H6) Soient Y^{-l} avec $l = 1, 2$, les moments inverses d'ordre $l = 1; 2$ de la variable réponse, tels que

$$\mathbb{E}[\exp(|Y^{-l}|)] \leq C \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[|Y_i^{-l} Y_j^{-l}| | X_i, X_j] \leq C' \quad \text{pour} \quad i \neq j.$$

2.1 Convergence presque complète uniforme de l'estimateur

Théorème 2.1 *Sous les conditions (H1)-(H6) et si $\inf_{x \in S} g_2(x) > 0$, on a*

$$(3) \quad \sup_{x \in S} |\tilde{r}(x) - r(x)| = O(h^2) + O_{a.co.} \left(\sqrt{\frac{\log n}{n^{1-\gamma} h^d}} \right) \quad a.co.$$

2.2 La normalité asymptotique

Cette partie est consacrée à la normalité asymptotique de l'estimateur $\tilde{r}(x)$. Nous maintenons les conditions adoptées dans la partie précédente et on remplace l'hypothèse (H5) par la suivante :

(H5') $\exists \gamma \in (0, 1)$ et $\xi_1, \xi_2 > 0$ tels que

$$\frac{1}{n^{2(1/2-\gamma/9-\xi_2)/d}} \leq h \leq \frac{C}{n^{(1+\xi_1)/(d+4)}}.$$

On obtient le résultat suivant :

Théorème 2.2 *Sous les conditions (H1)-(H4), (H5') et (H6) on a pour tout $x \in \mathcal{A}$:*

$$(4) \quad \left(\frac{nh^d}{\sigma^2(x)} \right)^{1/2} (\tilde{r}(x) - r(x)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

où

$$\sigma^2 = \frac{(g_2(x) - 2r(x)E[Y^{-3}|X=x] + r^2(x)E[Y^{-4}|X=x])}{g_2^2(x)} \int_{R^d} K^2(z) dz,$$

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in S, (g_2(x) - 2r(x)E[Y^{-3}|X=x] + r^2(x)E[Y^{-4}|X=x]) g_2^2(x) \neq 0 \right\}$$

et $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ désigne la convergence en loi.

Le Système M/G/1 avec rappels, pannes et priorité

Lila Raiah*, Nadia Oukid**

*Ecole supérieure de commerce, Kolea, Algérie
raiah.lila@yahoo.fr

**Université Saad Dahleb, Blida, Algérie
oukidnad@yahoo.fr

Résumé. Avec le développement technologique des réseaux de communication, la demande d'attribuer la priorité d'une tâche par rapport à d'autres tâches a augmenté rapidement, ainsi qu'en pratique, on rencontre souvent des cas où les serveurs sont sujets à des pannes aléatoires, par conséquent il est plus réaliste de considérer les files d'attente avec des répétitions d'appels et le serveur exposé à des interruptions aléatoires qui empêchent la continuité du service des clients. Dans ce travail, nous considérons un modèle semi markovien avec rappels à un seul serveur non fiable et priorité absolue. Notre analyse inclut : description de la chaîne de Markov induite, condition d'ergodicité, distribution stationnaire de l'état du système en appliquant la méthode des variables supplémentaires, obtention de mesures de performance et de quelques indices de fiabilité. Ces études théoriques sont soutenues par des illustrations numériques.

1 Introduction

Dans les dernières décennies, on constate un regain d'intérêt pour les modèles d'attente avec rappels, en raison de nouveaux développements technologiques des systèmes de télécommunications. Les systèmes avec rappels permettent en effet de mieux modéliser des protocoles spécifiques de communication, tels que CSMA (Carrier Sense Multiple Access) ou encore les disciplines Ring-back-when-free, Repeatlastnumber, Auto-repeat. Ils se caractérisent par le fait qu'un client qui ne peut être servi, libère l'espace du serveur mais après une durée aléatoire revient au système pour répéter sa demande de service. Entre les appels successifs, le client en question se trouve en "orbite". Une description complète de situations de systèmes de files d'attente avec rappels peut être trouvée dans la monographie de Falin, G.I. and Templeton, J.G.C. (1997).

Habituellement, lors de l'étude des problèmes de la théorie des files d'attente classique ou celle avec rappels, on supposait que le service s'effectue d'une manière continue et bien déterminée (sans interruptions). Cependant en pratique, on rencontre souvent des cas où le service d'un client est interrompu à cause d'arrivée d'un client prioritaire. Choi, B.D. and Chang, Y. (1999) ont analysé divers systèmes d'attente avec rappels et priorité et d'autres caractéristiques comme la perte géométrique, les pannes, etc. Artalejo, J.R and Dudin, A.N. and Klimenok, V.I. (2001) ont effectué une analyse stationnaire d'un système d'attente avec rappels préemptifs. Dimitriou, I. (2013) a étudié le système d'attente avec rappels, priorités, arrivées négatives, un

serveur non fiable et des vacances multiples et a exploré les conditions de stabilité ainsi que les probabilités d'état du système.

Ainsi qu'on rencontre des cas où les serveurs sont sujets à des pannes aléatoires (serveurs non fiables). Ces types de systèmes ont été étudiés indépendamment par Aissani (1988) et par Kulkarni et Choi (1990). Aissani (1988) a considéré un système de file d'attente M/G/1/1 avec rappels et un serveur non fiable. Kulkarni et Choi (1990) ont considéré deux modèles différents de types M/G/1. Dans le premier modèle, un client dont le service est interrompu par une défaillance du serveur rejoint l'orbite avec une probabilité P ou quitte le système avec une probabilité 1-P. Le deuxième modèle permet au client de rester à la station service pendant que le serveur est en réparation et le service est redémarré une fois la réparation terminée. Une variété importante de système M/G/1 avec rappels non fiable existent. Yang et Li (1994) et Li et Yang (1995) ont écrit deux ouvrages dans lesquels ils ont étudié davantage le système M/G/1 avec rappels et pannes et le système avec rappels et vacances du serveur.

Dans ce travail, nous considérons le système d'attente de type M/G/1 avec rappels, pannes et priorité. Premièrement, nous discutons la condition d'ergodicité, nous obtenons les fonctions génératrices partielles de la distribution stationnaire de l'état du système et quelques mesures de performances en utilisant la méthode des variables supplémentaires. Dans un deuxième temps, nous obtenons quelques indices de fiabilité d'un tel système

2 description du modèle

Nous considérons un système de files d'attente à un seul serveur avec deux types différents de clients primaires qui arrivent selon des processus de poisson indépendants de taux λ_1 et λ_2 . Les durées de services des deux types de clients suivent une distribution générale de fonction de répartition $B_i(x)$, $i \in \{1, 2\}$, de transformée de Laplace-Stieltjes $\tilde{B}_i(s) = \int_0^\infty \exp(-sx) dB_i(x)$ et $Re(s) > 0$. Soient les moments d'ordre k , $\beta_{i,k} = (-1)^k \tilde{B}_i^{(k)}(0)$ de la durée de service à partir de l'origine; $\beta_{i,k} = (-1)^k \tilde{B}_i^{(k)}(0)$ est l'intensité instantanée du service du client de type i , étant donné que la durée de service écoulée est égale à x . $K_i(z_1, z_2) = \tilde{B}_i(\lambda_1 - \lambda_1 z_1 + \lambda_2 - \lambda_2 z_2)$ est la fonction génératrice du nombre de clients primaires des deux types de clients arrivant dans le système durant le temps de service d'un client de type i . Les clients du premier flux de taux $\lambda_1 > 0$ ont une priorité absolue sur les clients du deuxième flux de taux $\lambda_2 > 0$. Si un client primaire trouve le serveur libre, il occupe immédiatement le serveur et il quitte le système après l'achèvement du service.

Nous supposons que le serveur est sujet à des pannes actives. Les pannes se produisent indépendamment via un processus de poison de taux α_1 et α_2 respectivement. Une fois le serveur occupé tombe en panne, la réparation commence immédiatement. Si le serveur tombe en panne au moment de servir les clients de type i , ($i = \{1; 2\}$) les durées de réparation sont des variables aléatoires suivent une distribution générale de fonction de répartition $G_i(x)$, de fonction de densité $g_i(x)$, de transformée de Laplace-Stieltjes $\tilde{G}_i(s) = \int_0^\infty \exp(-sx) dG_i(x)$ et $Re(s) > 0$. Soit $\gamma_i(x) = \frac{G'_i(x)}{1-G_i(x)}$ l'intensité instantanée de réparation lorsque la rupture du type i se produit, étant donné que la durée de réparation écoulée est égale à y . $A_i(z) = \tilde{G}_i(\lambda_1 - \lambda_1 z)$ est la fonction génératrice du nombre de clients primaires de deux types de clients arrivant dans le système durant le temps de réparation d'un client de type i .

Donc l'état du serveur peut être libre, occupé ou sous réparation. Si le serveur se trouve occupé ou sous réparation, le comportement d'un client primaire arrivant dépend de son type :

- Tout client primaire prioritaire arrivant et trouvant le serveur occupé par un autre client prioritaire ou sous réparation rejoint l'orbite. La durée entre deux rappels successifs d'un même client en orbite suit une loi exponentielle de taux $\theta > 0$.

- Tout client prioritaire arrivant et trouvant le serveur occupé par le service d'un client non prioritaire occupe immédiatement le serveur. Le client dont le service a été interrompu, persiste dans la zone de service jusqu'à ce que le serveur devient disponible pour reprendre son service d'où il a été interrompu.

- Tout client primaire non prioritaire arrivant et trouvant le serveur occupé quitte le système sans service.

Toutes les variables aléatoires définies précédemment vérifient l'hypothèse d'indépendance mutuelle.

L'état du système à la date t peut être décrit à l'aide d'un processus de Markov à temps continu, tel que $X(t) = \{C(t), N(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t), t \geq 0\}$,

Où

$N(t)$ est le nombre de clients prioritaires en orbite.

$C(t)$ représente l'état du serveur à la date t .

$C(t) = 0$ si le serveur est inoccupé.

$C(t) = 1$ si un client prioritaire est servi et il n'y a aucun client non prioritaire dont le service a été interrompu dans la station-service.

$C(t) = 2$ si un client non prioritaire est servi.

$C(t) = 3$ si un client prioritaire est servi et il y a un client non prioritaire dont le service a été interrompu dans la station-service.

$C(t) = 4$ si le serveur tombe en panne lorsqu'un client prioritaire est servi et il n'y a aucun client non prioritaire dont le service a été interrompu dans la station-service.

$C(t) = 5$ si le serveur tombe en panne lorsqu'un client non prioritaire est servi.

$C(t) = 6$ si le serveur tombe en panne lorsqu'un client prioritaire est servi et il y a un client non prioritaire dont le service a été interrompu dans la station-service.

Si $C(t) \in \{1, 3, 4, 6\}$ (If $C(t) \in \{2, 5\}$), $\xi_1(t)$, ($\xi_2(t)$) représente le temps de service écoulé du client prioritaire (du client non prioritaire) dans le serveur à la date t . Si $C(t) \in \{4, 5, 6\}$ ($\xi_3(t)$) représente le temps de réparation écoulé du serveur en cours de réparation.

3 Condition d'ergodicité

Soit $\rho_1 = \lambda_1 \beta_{11} (1 + \alpha_1 \gamma_{11})$, la condition nécessaire et suffisante pour que le système soit stable est $\rho_1 < 1$.

4 Distribution stationnaire de l'état du système

La fonction génératrice du nombre de clients en orbite

$$Q_o(z) = \left(\frac{(1-z)(1+\lambda_2(\int_0^\infty (1-B_2(x_2))dx_2))}{\lambda_2(K_1(z, A_1(z))-z)} + \frac{(\alpha_2 - \alpha_2 A_2(z))(\int_0^\infty (1-B_2(x_2))dx_2)}{\lambda_1(K_1(z, A_1(z))-z)} \right. \\ \left. + \frac{(\alpha_2 - \alpha_2 A_2(z))(1-K_1(z, A_1(z)))}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_1 z)(K_1(z, A_1(z))-z)} \right) \text{Hexp} \left\{ \int_1^z \frac{\lambda_1 - \lambda_1 K_1(z, A_1(z)) + \alpha_2 - \alpha_2 A_2(z)}{\theta(K_1(z, A_1(z))-z)} dz \right\}.$$

Système d'attente avec rappels, pannes et priorité

La fonction génératrice du nombre de clients prioritaires dans le système

$$Q_s(z) = \left(\frac{K_1(z, A_1(z))(1-z)(1+\lambda_2(\int_0^\infty (1-B_2(x_2))dx_2))}{\lambda_2(K_1(z, A_1(z))-z)} + \frac{K_1(z, A_1(z))(\alpha_2-\alpha_2 A_2(z))(\int_0^\infty (1-B_2(x_2))dx_2)}{\lambda_1(K_1(z, A_1(z))-z)} \right. \\ \left. + \frac{(\alpha_2-\alpha_2 A_2(z))(1-K_1(z, A_1(z)))}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_1 z)(K_1(z, A_1(z))-z)} \right) \text{Exp} \left\{ \int_1^z \frac{\lambda_1-\lambda_1 K_1(z, A_1(z))+\alpha_2-\alpha_2 A_2(z)}{\theta(K_1(z, A_1(z))-z)} dz \right\}.$$

4.1 Mesures de performance

A l'aide des fonctions génératrices obtenues, nous pouvons calculer plusieurs mesures de performance du système, telles que :

- La probabilité p_1 , un client prioritaire est servi et il n'y a aucun client non prioritaire dont le service a été interrompu dans la station-service

$$p_1 = P_1(1) = \frac{H\lambda_1\beta_{11}(1 + \alpha_2\gamma_{21})}{\lambda_2(1 - \rho_1)}.$$

- La probabilité p_2 , qu'un client non prioritaire est servi

$$p_2 = P_2(1) = H \int_0^\infty (1 - B_2(x_2))dx_2.$$

- La probabilité p_3 , un client prioritaire est servi et il y a un client non prioritaire dont le service a été interrompu dans la station-service

$$p_3 = P_3(1) = \frac{H\lambda_1\beta_{11}(1 + \alpha_2\gamma_{21})}{1 - \rho_1} \int_0^\infty (1 - B_2(x_2))dx_2.$$

- La probabilité p_4 , que le serveur tombe en panne lorsqu'un client prioritaire est servi et il n'y a aucun client non prioritaire dont le service a été interrompu dans la station-service

$$p_4 = P_4(1) = \alpha_1\gamma_{11} \frac{H\lambda_1\beta_{11}(1 + \alpha_2\gamma_{21})}{\lambda_2(1 - \rho_1)}.$$

4.2 Indices de fiabilité du serveur

Dans cette section, nous fournissons la disponibilité et la fréquence de panne du serveur.

Soit $A(t)$ la probabilité que le serveur soit disponible à l'instant t et définissons la disponibilité du serveur comme

$$A = t \longrightarrow \infty \lim A(t).$$

$$A = \frac{(1 + \lambda_1\beta_{11}(\alpha_2\gamma_{21} - \alpha_1\gamma_{11})) (1 + \lambda_2 \int_0^\infty (1 - B_2(x_2))dx_2)}{(1 + \lambda_2 \int_0^\infty (1 - B_2(x_2))dx_2) + \alpha_2\gamma_{21}(\rho_1 + \lambda_2 (\int_0^\infty (1 - B_2(x_2))dx_2))}.$$

Soit F la fréquence de panne du serveur. On obtient

$$F = \frac{\alpha_1\lambda_1\beta_{11}(1 + \alpha_2\gamma_{21}) (1 + \lambda_2 \int_0^\infty (1 - B_2(x_2))dx_2)}{(1 + \lambda_2 \int_0^\infty (1 - B_2(x_2))dx_2) + \alpha_2\gamma_{21}(\rho_1 + \lambda_2 \int_0^\infty (1 - B_2(x_2))dx_2)} + \alpha_2 H \int_0^\infty (1 - B_2(x_2))dx_2.$$

Références

- Falin,G.I. and Templeton,J.G.C. (1997). Retrial queues. *Chapman and Hall, London*.
- Aissani, A. (1988). On the $M/G/1/1$ queueing system with repeated orders and unreliable server. *Journal of Technology* 6, 98–123.
- Artalejo,J.R and Dudin,A.N. and Klimenok,V.I. (2001). Stationary analysis of a retrial queue with preemptive repeated attempts. *Oper. Res. Lett* 28, 173–180.
- Choi,B.D. and Chang,Y. (1999). single retrial queue with priority calls. *Mathematical and computer modeling* 30(3-4), 7–32.
- Dimitriou,I. (2013). A mixed priority retrial queue with negative arrivals, unreliable server and multiple vacations. *Appl. Math. Model* 37, 1295–1309.
- Kulkarni, V. G. et B. D. Choi (1990). Retrial queues with server subject to breakdowns and repairs. *Queueing Systems* 7(2), 191–208.
- Li, H. et T. Yang (1995). A single-server retrial queue with server vacations and a finite number of input sources. *European Journal of Operations Research* 85(1), 149–160.
- Wang, J., J. Cao, et Q. Li (2001). Reliability analysis of the retrial queue with server breakdowns and repairs. *Queueing Systems* 38(4), 363–380.
- Yang, T. et H. Li (1994). The $M/G/1$ retrial queue with the server subject to starting failures. *Queueing Systems* 16(1-2), 83–96.

Summary

With ever-fast growth in communication networks technology, the demand to assign priority to one type of jobs over other type of jobs has been growing rapidly. As a result while analyzing the queueing scenarios, almost every area seems to be affected by the priority service of one customer over another customer. The present study deals with analysis of a single server retrial queue with two different types of primary customers known as priority and non priority customers. Moreover, the server is unreliable and may breakdown while servicing either priority or non-priority customer. The necessary and sufficient condition for the system to be stable is investigated. Using a supplementary variable method, we obtain a steady-state solution for queueing measures as well as for reliability ones. We provide also some numerical illustrations.

Asymptotic normality of a kernel conditional mode function estimator for ψ -weakly dependent data

Soumia Rih*, Abdelkader Tatachak**

*Faculté de Mathématiques, USTHB, BP 32, El-Alia 16111, Algiers, Algeria,
srih@usthb.dz,

**Laboratoire MSTD, Faculté de Mathématiques, USTHB BP 32, El-Alia 16111, Algiers, Algeria,
atachak@usthb.dz

Résumé. Le but de notre étude est d'établir la normalité asymptotique de l'estimateur à noyau de la fonction mode conditionnel pour des données ψ faiblement dépendantes. Comme une application de la normalité asymptotique, nous obtenons les intervalles de confiance pour la fonction mode conditionnelle. Quelques simulations ont été établies pour illustrer le comportement de l'estimateur à tailles finies.

1 Introduction

The asymptotic normality of the kernel conditional mode estimator has been widely considered in many studies, Samanta et Thavaneswaran (1990) have studied the iid case while Louani et Ould-Said (1999) considered the case of α mixing data.

For the case of ψ -weak dependence, we establish the asymptotic normality of this estimator. This type of dependence unifies weak dependence conditions, including mixing, association, Gaussian sequences and Bernoulli shifts (see Doukhan et Louhichi (1999)).

Let $\{Z = (X_i, Y_i), 1 \leq i \leq n\}$ be a strictly stationary sequence of ψ -weak dependent random vectors distributed as the $Z = (X, Y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. We denote by $f(\cdot | x) = \frac{f(x, \cdot)}{v(x)}$ the conditional density function of Y given $X = x$ with $f(\cdot, \cdot)$ being the joint probability density function of (X, Y) and $v(x)$ is the marginal density of X . In the sequel we assume that $f(\cdot | x)$ possesses a unique mode function $\Theta(\cdot)$ and defined by

$$\Theta(x) = \arg \max_{y \in \mathbb{R}} f(y | x).$$

A kernel estimator of the conditional mode $\Theta(x)$ is defined as the random variable $\Theta_n(x)$ maximizing the kernel estimator $f_n(y | x)$ of $f(y | x)$ (see Collomb et al. (1987)), that is :

$$\Theta_n(x) = \arg \max_{y \in \mathbb{R}} f_n(y | x),$$

where

$$f_n(y | x) = \frac{f_n(x, y)}{v_n(x)},$$

Asymptotic normality of a kernel conditional mode estimator

with

$$f_n(x, y) = \frac{1}{nh_{n,K}^d h_{n,H}} \sum_{i=1}^n K_d \left(\frac{x - X_i}{h_{n,K}} \right) H \left(\frac{y - Y_i}{h_{n,H}} \right),$$

and

$$v_n(x) = \frac{1}{nh_{n,K}^d} \sum_{i=1}^n K_d \left(\frac{x - X_i}{h_{n,K}} \right).$$

Here K_d and H are kernels defined on \mathbb{R}^d and \mathbb{R} , respectively. The sequences $h_{n,K} =: h_K$ and $h_{n,H} =: h_H$ are positive bandwidths converging to zero as n goes to infinity.

2 Asymptotic normality

Based on the result of Bardet et al. (2008), we assess the asymptotic normality of $\Theta_n(x)$ for ψ -weakly dependent random variables. Our result is set out in the following theorem.

Theorem 1 *Under mild conditions, as $n \rightarrow \infty$ we have*

$$\sqrt{nh_K^d h_H^3} (\Theta_n(x) - \Theta(x)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x)),$$

where $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ denotes the convergence in distribution,

$$\sigma^2(x) = \frac{V(x, \Theta(x))}{(f^{(0,2)}(x, \Theta(x)))^2},$$

$$V(x, \Theta(x)) = f(x, \Theta(x)) \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} \left(K_d(u) H^{(1)}(v) \right)^2 dudv < +\infty, \quad V(x, \Theta(x)) \neq 0.$$

Now by using the estimators $f_n^{(0,2)}(\cdot, \cdot)$, $f_n(\cdot, \cdot)$ and $\Theta_n(x)$ we obtain an estimator $\sigma_n^2(x)$ for the asymptotic variance $\sigma^2(x)$ and then we have :

Corollary 1 *Under the assumptions of Theorem 1 and for each fixed $\zeta \in (0, 1)$, the approximate $(1 - \zeta)$ confidence interval for $\Theta(x)$ is :*

$$\Theta_n(x) \pm t_{1-\frac{\zeta}{2}} \sigma_n(x) / \sqrt{nh_K^d h_H^3},$$

where $t_{1-\frac{\zeta}{2}}$ denotes the $(1 - \frac{\zeta}{2})$ quantile of $\mathcal{N}(0, 1)$.

3 Simulation studies

In this part, we examine the asymptotic distribution of $\Theta_n(x)$ in the case $d = 1$, by using synthetic data. For that we compare the shape of the estimated density (suitably normalized) to that of the standard normal density in the case of the following linear model. The steps are as follows :

We consider the ψ -weak dependent sequence $(X_i, Y_i)_{\{1 \leq i \leq n\}}$ generated by :

$$\begin{cases} X_i = \sigma_{i-1}\varepsilon_i, & \sigma_i^2 = 1 + 0.45\sigma_{i-1}^2 + 0.45X_{i-1}^2, & X_0 = 0, & \sigma_0^2 = 10 \text{ and } \varepsilon_i \text{ are i.i.d. } \mathcal{N}(0, 1). \\ Y_i = X_i + \varepsilon_i, & i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

Under this model, the conditional mode function is $\Theta(x) = x$.

While computing the conditional mode $\Theta_n(x)$, we used Gaussian kernels K_d and H and global optimal bandwidths that minimized the Global Mean Square Error (GMSE).

The normalized deviation between the estimator and the theoretical value is evaluated at $x = 0.5$, i.e.,

$$\Theta^*(n) := \sqrt{nh_K^d h_H^3} \frac{(\Theta_n(0.5) - \Theta(0.5))}{\sigma_n(0.5)} =: \Theta^*.$$

Using this scheme, we draw $B = 300$ independent n -samples ($n = 50$ and 500). To estimate the density function of Θ^* by the kernel method we choose $h_B = cB^{-\frac{1}{5}}$ (see Silverman (1986), p. 45). We also plot the corresponding histograms against the standard normal density and the QQ plots (figures 1 and 2).

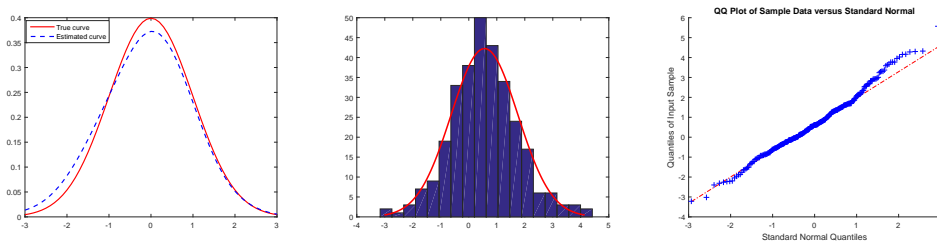


FIG. 1: The density of Θ^* against $\mathcal{N}(0, 1)$ and the corresponding histogram and QQ plot for $n=50$.

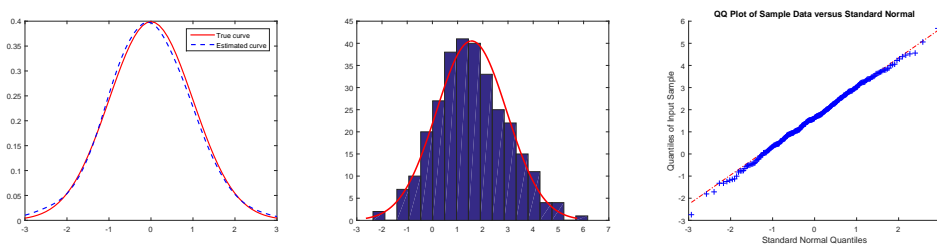


FIG. 2: The density of Θ^* against $\mathcal{N}(0, 1)$ and the corresponding histogram and QQ plot for $n = 500$.

All plots show that the sampling distribution of Θ^* fits reasonably the normal one. This fit becomes better as the sample size increases.

Asymptotic normality of a kernel conditional mode estimator

Finally, we construct approximate 95%-confidence curves for the conditional mode as in Corollary 1, with different sample sizes $n = 50, 100$ and 500 (see figure 3). For all $x \in [-2, 2]$, we remark that the lengths of the confidence intervals decrease as the sample size increases.

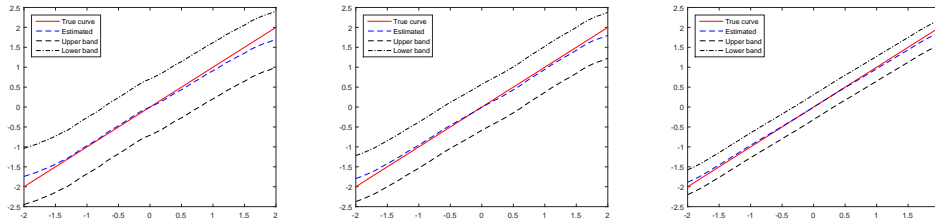


FIG. 3: 95% confidence intervals for $\Theta(x)$ with $n = 50, n = 500$.

Références

- Bardet, J. M., P. Doukhan, G. Lang, et N. Ragache (2008). Dependent lindeberg central limit theorem and some applications. *ESAIM: Probab. Stat* 12, 154–172.
- Collomb, G., W. Härdle, et S. Hassani (1987). A note on prediction via estimation of the conditional mode function. *Journal of Statistical Planning and Inference* 15, 227–236.
- Doukhan, P. et S. Louhichi (1999). A new weak dependence condition and applications to moment inequalities. *Stochastic Processes and their Applications* 84, 313–342.
- Louani, D. et E. Ould-Said (1999). Asymptotic normality of kernel estimators of the conditional mode under strong mixing hypothesis. *Journal of Nonparametric Statistics* 11, 413–442.
- Samanta, M. et A. Thavaneswaran (1990). Nonparametric estimation of the conditional mode. *Communications in Statistics-Theory and Methods* 14, 1123–1136.
- Silverman, B. (1986). *Density estimation for statistics and data analysis*. London: Chapman and Hall.

Summary

The purpose of our study is to establish the asymptotic normality of a kernel conditional mode function estimator under ψ -weak dependence condition. As an application, we construct confidence bands for the conditional mode function. Some simulations are drawn to illustrate the behaviour of the estimator for finite sample size.

Programme Unifié pour une étude comparative des modèles neuronaux et des modèles standards

Faiza Saadi*, Ahmed Chibat**

*Laboratoire des Mathématiques Appliquées et Modélisation,
Département des mathématiques, Rue Ain Bay, Constantine, Algérie
fifasaadi@hotmail.com,

**Laboratoire des Mathématiques Appliquées et Modélisation,
Département des mathématiques, Rue Ain Bay, Constantine, Algérie
achibat@gmail.com

Résumé. L'importance des modèles neuronaux dans le domaine statistique continue d'augmenter à l'heure actuelle à cause des résultats mathématiques solides et le progrès des techniques algorithmiques d'apprentissage rapides et précis. Ce travail permet d'illustrer l'efficacité des réseaux de neurones en faisant une étude comparative entre les modèles neuronaux et les modèles standards.

Nous allons, par un mis en œuvre, montrer que les modèles neuronaux ont des résultats supérieurs à ceux des modèles standards en présentant à l'étude deux critères de comparaison: la performance et la vitesse d'exécution.

L'ensemble des données étudiées, dans ce travail, est divisé en deux sous-ensembles: d'entraînement et de test.

Les données sont générées d'après un polynôme d'ordre quatre d'une manière analogue aux observations réelles par l'ajout d'un aléatoire compris entre -0.5 et $+0.5$.

Pour aboutir à notre objectif, nous utilisons le logiciel MATLAB, (Version *R2016a*, 64bit, Windows 64).

1 Introduction

La modélisation statistique standard est la plus habituellement mise en œuvre pour l'étude des données multidimensionnelles. Le but essentiel est l'extraction du meilleur modèle pour un ensemble de données en tenant une attention particulière à divers aspects du développement de modèles, tels que le test de la capacité de généralisation, où la minimisation de la complexité du modèle.

On remarque aujourd'hui que l'exploitation des résultats expérimentaux que ce soit en physique, en chimie, ou bien même en économie, nécessite très souvent l'emploi de la modélisation.

Grâce aux résultats théoriques et pratiques obtenus au cours des dernières années, un nouvel outil de calcul est devenu plus en plus utilisé, celui des réseaux de neurones, particulièrement dans le traitement des problèmes complexes. Cette méthode est très puissante et sert à traiter une grande diversité de tâches.

Programme Unifié pour une étude comparative des modèles neuronaux et des modèles standards

Les réseaux de neurones permettent de modéliser de grands problèmes complexes dans de différents domaines. Contrairement aux modèles standards, les réseaux de neurones sont capables de découvrir la forme optimale de la fonction qui lie les variables d'entrées aux variables de sorties à l'aide des mises à jour des valeurs de poids d'apprentissage.

Dans notre travail, nous allons étaler une étude comparative entre trois méthodes.

1. La régression polynomiale, 2. la méthode neuronale 3. et la méthode de l'Extreme Learning Machine.

Pour aboutir à notre objectif, nous utilisons le logiciel MATLAB, (version *R2016a*, 64bit, Windows 64).

La problématique que nous nous proposons à l'étude est de passer en revue ces différentes méthodes et de les analyser en fonction de deux critères : La performance et la vitesse d'exécution.

L'ensemble des données étudiées, dans ce travail, est divisé en deux sous ensembles : d'entraînement et de test.

Les données sont générées d'après un polynôme d'ordre quatre d'une manière analogue aux observations réelles par l'ajout d'un aléatoire compris entre -0.5 et $+0.5$.

Notre programme d'étude est composé de six fichiers MATLAB divisés en quatre fonctions et deux scripts.

2 Résultats principales

- Le premier fichier fonction sert à générer les données des deux ensembles (d'entraînement et de test) suivi par une représentation graphique du nuage de points de ces derniers.

- La méthode neuronale est effectuée par un deuxième fichier fonction qui sert à la création et l'entraînement d'un réseau en utilisant l'instruction "fitnet" qui sert la création d'un réseau ajusté à l'ensemble de données en cours.

L'entraînement dans notre étude est effectué avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

- Un fichier script qui sert à entraîner le fichier fonction précédent après l'exécution de la fonction de génération des données.

Ce script calcule les MSE et les temps pris par la méthode neuronale sur les deux ensembles de génération, et la représentation graphique des deux séries de performances.

Nous remarquons, d'après cette représentation, que le nombre optimal de neurones cachés égale à quatre, ce qui correspond à la plus petite performance obtenue par la méthode neuronale.

- La régression polynomiale est réalisée par un troisième fichier fonction qui détermine par la suite les MSE et les temps pris par la méthode de régression linéaire multiple standard. Cela en utilisant l'instruction "mvregress" sur les données générées précédentes.

L'instruction "mvregress" sert à donner les coefficients d'un modèle de régression multiple en utilisant la méthode d'estimation par moindres carrés ordinaire.

- Le quatrième fichier fonction utilise l'algorithme de l'Extreme Learning Machine et évalue les MSE et les temps pris par ce dernier sur les deux ensembles d'étude.

Le nombre de neurone cachés utilisé dans cette méthode est 20, dont la fonction d'activation est sigmoïde.

- La comparaison entre les trois méthodes précédentes sera accomplie dans le dernier fichier script, qui comporte une boucle dont laquelle le script appelle les quatre fichiers fonction précédentes.

La boucle calcule à chaque itération les performances et les temps pris par les trois méthodes sur les deux ensembles de traitement.

Les moyennes des MSE et des temps des trois méthodes sont réunis dans un tableau.

Les performances et les temps des trois méthodes, construit dans ce travail, sont exposés dans un histogramme.

Ce graphique montre que les performances et les temps de la méthode de l'Extreme Learning Machine (ELM), sont très petits par rapport aux deux autres méthodes.

Les résultats de la méthode des réseaux de neurones se classent à la deuxième position avec un petit changement dans la performance.

La méthode polynomiale standard se situe comme la méthode inactive par rapport aux deux autres méthodes.

3 Conclusion

D'après les résultats obtenus dans le tableau et le graphique précédents, nous remarquons que les performances et les temps, de la méthode de l'Extreme Learning Machine (ELM), sont très petits par rapport aux autres méthodes.

Donc, c'est la meilleure méthode parmi les trois méthodes utilisées dans ce pratique, car elle est capable de produire une bonne performance de généralisation avec un temps négligeable comparé aux deux autres.

Mais, n'oublions pas que notre intérêt dans ce mémoire, est de comparer la méthode standard à celle des réseaux de neurones.

Bien sur, d'après les aboutissements précédentes, nous pouvons illustrer bien que la méthode des réseaux de neurones est meilleur beaucoup plus que la méthode de régression polynomiale standard.

Références

- Parizeau. M. (2006). *Réseaux de neurones*. GIF-21140 et GIF-64326, Université Laval, Hiver.
- Samarasinghe. S. (2007). *Neural Networks for Applied Sciences and Engineering: From Fundamentals to Complex Pattern Recognition*.
- Shalabh. S. (2015). *Regression Analysis - Polynomial Regression Models*. Indian Institute of Technology, Kanpur.
- Laamayad. T. (2016). *Intelligence artificielle : Cours E-learn*, Université de Ouargle.

Summary

The importance of neural models in the statistical field continues to increase at present because of solid mathematical results and the progress of fast and accurate algorithmic learning techniques.

Programme Unifié pour une étude comparative des modèles neuronaux et des modèles standards

This work illustrates the effectiveness of neural networks by making a comparative study between neural models and standard models.

We will, by an implementation, shown that the neuronal models in results superior to those of the standard models by presenting to the study two criteria of appearing: the performance and the speed of execution.

All the data studied, in this work, is divided into two subsets: training and testing.

The data is generated from a fourth-order polynomial in a manner analogous to real observations by adding a random range between -0.5 and $+0.5$.

To achieve our goal, we use MATLAB software, (Version *R2016a*, 64bit, Windows 64).

Quelques égalités pour les covariances entre statistiques d'ordre de vecteurs aléatoires trivariés

Zineb Tabbech *, Rabah Messaci **

*Laboratoire MSTD-Faculté de Mathématiques. USTHB. BP 32, El-Alia 16111 Alger
zinebtab07@hotmail.com,

**Laboratoire MSTD-Faculté de Mathématiques. USTHB. BP 32, El-Alia 16111 Alger
lrabmes@yahoo.fr

Résumé. Sur la base de la distribution exacte des statistiques d'ordre (composante à composante) de deux vecteurs absolument continus trivariés et dépendants, nous montrons dans le cas gaussien et sous une hypothèse d'échangeabilité une égalité de type Olkin pour les covariances de ces statistiques d'ordre. On établit aussi, une égalité de type Siegel pour la covariance des statistiques d'ordre d'un vecteur trivarié avec une covariable. Enfin nous étudions le cas où les vecteurs considérés sont de loi de Student.

1 Introduction

La distribution des statistiques d'ordres de vecteurs aléatoires absolument continus, et à composantes dépendantes, a reçu beaucoup d'attention dans la littérature, du fait de leurs nombreuses applications. Des résultats récents établissent un lien avec une famille de lois asymétriques introduites par Azzalini à partir des lois normales : lois Skew-Normal (SN) univariées (Azzalini, 1985) et multivariées (Azzalini et Valle, 1996), puis la classe des lois Unified Skew Normal (SUN)(Arellano-Valle et Azzalini, 2006). Des familles plus générales sont obtenues en substituant aux lois normales, respectivement des lois à contour elliptique (Unified Skew Elliptical : SUE en abrégé) ou des lois absolument continues quelconques (Fundamental Unified Skew : FUS). On se reportera à Arellano-Valle et Genton (2005) pour cette dernière famille. Plus précisément les distributions de ces statistiques d'ordre sont des mixtures finies de telles distributions asymétriques (Arellano-Valle et Genton, 2007).

Le premier lien entre les statistiques d'ordre et ces familles de distributions se trouve dans le résultat suivant : la loi du maximum (et du minimum) de deux variables aléatoires gaussiennes centrées, réduites et corrélées appartient à la famille des lois SN. Cain (1994) a obtenu la formule exacte de la densité de $\min(X, Y)$, lorsque $(X, Y)^t$ est un vecteur aléatoire de distribution normale bivariée, Loperfido (2002) a montré que cette distribution est une mixture de deux lois SN si $E(X) = E(Y)$ tandis que Jamalizadeh et Balakrishnan (2009) ont établi que la distribution des statistiques d'ordre d'un vecteur gaussien (respectivement de loi de Student) trivarié est un mélange de lois SUN (respectivement SUT) particulières.

D'autre part, des résultats semblables existent pour les vecteurs des statistiques d'ordre, composante à composante, de plusieurs vecteurs aléatoires. Soit $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})^t$ $i = 1, 2, \dots, q$, des vecteurs aléatoires absolument continus quelconques, Messaci (2014) a montré

Egalités pour les covariances entre statistiques d'ordre de vecteurs aléatoires

que $\mathbf{Z} = (\max(X_{11}, \dots, X_{q1}), \dots, \max(X_{1n}, \dots, X_{qn}))^t$ est distribué comme une mixture de q^n lois FUS et étudie avec plus de détails le cas gaussien lorsque $n = 2$. Auparavant Loperfido (2008) a montré, sous ces dernières hypothèses et certaines conditions d'échangeabilité, que la loi de \mathbf{Z} appartient à la famille des lois normales asymétriques SUN.

Le travail que nous présentons ci-dessous s'inscrit dans ce cadre général. Nous exploitons la propriété de mixture finie, pour étudier certains cas particuliers, et obtenir les expressions exactes des distributions et des moments d'ordre un et deux (moments croisés) en fonction des paramètres des lois du vecteur $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_q)^t$ sous-jacent. On énonce aussi certaines conditions sous lesquelles le mélange de lois se simplifie et se réduit à une seule.

Considérons deux vecteurs aléatoires $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^t$ et $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^t$, notons $\mathbf{X}_{(i)}$ la $i^{\text{ème}}$ statistique d'ordre des composantes de \mathbf{X} obtenant ainsi lorsque i varie de 1 à 3, respectivement le minimum, la médiane et le maximum. Nous déterminons la distribution exacte des couples $(\mathbf{X}_{(i)}, \mathbf{Y}_{(i)})$, $i = \overline{1, 3}$.

Dans le cas gaussien, on montre, sous une hypothèse d'échangeabilité partielle de $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})^t$, que la loi de $(\mathbf{X}_{(i)}, \mathbf{Y}_{(i)})^t$ se réduit à une seule loi SUN. A titre d'exemple, les vecteurs $(X_{(3)}, Y_{(3)})^t$ et $(X_{(2)}, Y_{(2)})^t$, sont distribués, alors, suivant des lois $SUN_{2,4}$:

$$(X_{(3)}, Y_{(3)})^t \sim SUN_{2,4} \left(\xi, \gamma_1, \Omega_1 = \begin{pmatrix} \Omega & \Delta_1 \\ \Delta_1^t & \Gamma_1 \end{pmatrix} \right),$$

$$(X_{(2)}, Y_{(2)})^t \sim SUN_{2,4} \left(\xi, \gamma_2, \Omega_2 = \begin{pmatrix} \Omega & \Delta_2 \\ \Delta_2^t & \Gamma_2 \end{pmatrix} \right),$$

où il a été posé :

$\xi = E(\mathbf{U})$, $\gamma_1 = E(\mathbf{V})$, $\Omega = Cov(\mathbf{U})$, $\Gamma_1 = Cov(\mathbf{V}_1)$, $\Delta_1 = Cov(\mathbf{U}, \mathbf{V}_1)$, $\gamma_2 = E(\mathbf{V}_2)$, $\Gamma_2 = Cov(\mathbf{V}_2)$, $\Delta_2 = Cov(\mathbf{U}, \mathbf{V}_2)$, $\mathbf{U} = (X_1, Y_1)^t$, $\mathbf{V} = (X_1 - X_2, X_1 - X_3, Y_1 - Y_2, Y_1 - Y_3)^t$, $\mathbf{V}_2 = (X_1 - X_2, X_3 - X_1, Y_1 - Y_2, Y_3 - Y_1)^t$.

L'expression des moments d'ordre un et deux sont obtenus en fonction de ceux du vecteur sous-jacent, et on déduit une égalité de type Olkin et Viana (1995), traduisant l'invariance de la structure de covariance, à savoir

$$Cov(\mathbf{X}_{(i)}, \mathbf{Y}_{(i)}) = Cov(X_1, Y_1).$$

Un autre problème rencontré dans les applications, notamment à des fins de régression, concerne la distribution conjointe d'une statistique d'ordre $\mathbf{X}_{(i)}$, $i = \overline{1, 3}$, d'un vecteur $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^t$ et d'une covariable Y . En supposant que (\mathbf{X}, Y) suit une loi normale, nous donnons les expressions des moments jusqu'à l'ordre deux, en fonction de ceux de $(X_1, X_2, X_3, Y)^t$ et déduisons par une démonstration directe l'égalité de Siegel

$$Cov(X_{(i)}, Y) = \sum_{j=1}^3 P(X_{(i)} = X_j) Cov(X_j, Y).$$

Ce dernier auteur (Siegel, 1993) l'avait justifié, pour une covariable quelconque, par un passage à la limite.

Nous considérons, dans une deuxième partie, le cas où la distribution des vecteurs considérés est la loi de Student. Dans la mesure où l'hypothèse de normalité est souvent prise en défaut,

elle est utilisée comme une bonne alternative dans les applications. Cain (1996) a obtenu l'expression de $Cov(\max(X_1, X_2), X_1)$ si $(X_1, X_2)^t$ est de distribution de Student bivariable. Nous reprenons, les mêmes problèmes étudiés précédemment, dans ce cas. On montre que les distributions conjointes des vecteurs de statistiques d'ordre sont des mixtures finies de lois SUT. Les expressions exactes des moments jusqu'à l'ordre 2 sont déduites et nous montrons, en ce qui concerne les covariances que certaines propriétés vraies dans le cas gaussien, notamment l'égalité de Siegel, ne sont plus vérifiées.

Ces résultats permettent d'obtenir directement les estimateurs du maximum de vraisemblance des moments et des matrices de covariances de vecteurs de statistiques d'ordre.

Enfin, dans une dernière partie, on les applique, en utilisant une base de données réelle, à des modèles de régression du type : régression de $X_{(i)}$ sur une covariable Y ou encore de $X_{(i)}$ sur $Y_{(i)}$.

Références

- Arellano-Valle, R. B. et A. Azzalini (2006). On the unification of families of skew-normal distributions. *Scandinavian Journal of Statistics* 33(3), 561–574.
- Arellano-Valle, R. B. et M. G. Genton (2005). On fundamental skew distributions. *Journal of Multivariate Analysis* 96(1), 93–116.
- Arellano-Valle, R. B. et M. G. Genton (2007). On the exact distribution of linear combinations of order statistics from dependent random variables. *Journal of Multivariate Analysis* 98(10), 1876–1894.
- Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics* 12(2), 171–178.
- Azzalini, A. et A. Valle (1996). The multivariate skew-normal distribution. *Biometrika* 83(4), 715–726.
- Cain, M. (1994). The moment-generating function of the minimum of bivariate normal random variables. *The American Statistician* 48(2), 124–125.
- Cain, M. (1996). Forecasting with the maximum of correlated components having bivariate t -distributed errors. *IMA Journal of Management Mathematics* 7(3), 233–237.
- Jamalizadeh, A. et N. Balakrishnan (2009). Order statistics from trivariate normal and $t\nu$ -distributions in terms of generalized skew-normal and skew- $t\nu$ distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference* 139(11), 3799–3819.
- Loperfido, N. (2002). Statistical implications of selectively reported inferential results. *Statistics and Probability Letters* 56(1), 13–22.
- Loperfido, N. (2008). Modeling maxima of longitudinal contralateral observations. *Test* 17(2), 370–380.
- Messaci, R. (2014). Distribution and moments of the vector of the maximum of two absolutely continuous random vectors. *Statistics & Probability Letters* 92, 256–262.
- Olkin, I. et M. Viana (1995). Correlation analysis of extreme observations from a multivariate normal distribution. *Journal of the American Statistical Association* 90(432), 1373–1379.

Egalités pour les covariances entre statistiques d'ordre de vecteurs aléatoires

Siegel, A. F. (1993). A surprising covariance involving the minimum of multivariate normal variables. *Journal of the American Statistical Association* 88(421), 77–80.

Summary

On the basis of the exact distribution of the vector of orders statistics (component by component) of two absolutely continuous trivariate vectors, we derive, in the gaussian case and under some exchangeability hypothesis, an equality of Olkin type for their covariance. We derive, also, an equality of Siegel type for the covariance of order statistics of trivariate gaussian random vector with a covariable. Last, we study the case when the vectors follow a Student distribution.

Nonparametric estimation of the regression function for left truncated and right censored data

Malika Yassa*, Ourida Sadki**

*Faculty of Mathematics, UMBB,
avenue of independence Boumerdes, 35000, Algeria
yassa malika@yahoo.fr,
<https://fs.univ-boumerdes.dz/>

**M.S.T.D Laboratory,
Faculty of Mathematics, USTHB
Po. Box 32, El-Alia16111, Algiers, Algeria
osadki@usthb.dz
<http://www.usthb.dz/>

Abstract. In this paper, we study robust kernel regression model for left truncated and right censored (LTRC), through a method of selection trimming parameter and bandwidth. Under suitable conditions, we study the properties of the bias and the variance of our estimator and we drive the asymptotic normality of the robust kernel regression estimator under the model LTRC. Some simulations are drawn to illustrate our results.

1 Introduction

Let (Y, T, W) denote random variables, where Y is the interest variable called lifetime variable, with density function f and distribution function (d.f.) F . T is the random left truncation time with continuous d.f. L and W denote the random right censoring time with arbitrary d.f. G . In the random left truncated and right censored (LTRC) model one can observe (Z, T, δ) if $Z \geq T$, where $Z = \min(Y, W)$ and $\delta = I(Y \leq W)$ is the indicator of censoring status, and when $Z < T$ nothing is observed. Clearly, if Y is independent of W , then Z has d.f. $H = 1 - (1 - F)(1 - G)$: Taking into account the truncation and the censorship effects, we denote by $f(Z_i, T_i, \delta_i), i = 1, \dots, n$ the actually observed sample (*i.e.* $Z_i \geq T_i, \forall i$) and suppose that $\mu = P[T \leq Z] > 0$.

Let

$$C(y) = P[T \leq y \leq Z \mid T \leq Z] = \mu^{-1}L(y)(1 - H(y^-))$$

and define their empirical estimators as

$$C_n(y) = n^{-1} \sum_{i=0}^{i=n} I(T_i \leq y \leq Z_i)$$

For LTRC data, it is important to be able to obtain nonparametric estimators of the various

characteristics of the distribution function, TSAI and MC (1987) gave the nonparametric maximum likelihood estimator of F itself, called the product-limit (PL) estimator, as

$$1 - \hat{F}_n(t) = \prod_{i, Z_i \leq t} \left(1 - \frac{1}{nC_n(Z_i)}\right)^{\delta_i}$$

n reduces to the Kaplan-Meier product limit KAPLAN and P (1958) estimator when $T = 0$ and to the LYNDEN (1971) estimator when there is no right censoring.

The kernel methods estimators are sensitive to outliers, for that it is necessary to consider robustness, see for example Huber and Ronchetti (1979). Like in non parametric regression, bandwidth selection is more important. There are several methods are proposed both non robust and robust in selection bandwidth. For this selection, it have to minimize the asymptotic mean squared error(MSE). Ge and Ma (2016) proposed a robust trimming parameter selection method, in this method most important is to use the truncation function and derive its consistency and asymptotic normality under mild condition.

For LTRC data, we first select both the bandwidth and the trimming parameter then we study the properties of the bias and the variance of our estimator and we drive the asymptotic normality of a robust kernel regression estimator.

2 A robust kernel estimator

Consider the non parametric regression model $Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i$, where ε_i is a mean zero random variable. the basic goal in non parametric regression is to construct an estimate $m(\hat{x})$ of $m(x)$ from i.i.d samples $(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$. In our study, we use a robust non parametric method to estimate $m(\cdot)$; $m(\cdot)$ is the implicit solution of following equation

$$E(\psi(Z - \theta)/X = x) = 0, \quad (1)$$

where $\psi(S) = \psi_k(S) = SI(|S| < k) + kI(S \geq k) - kI(S \leq -k)$ (socalled the Huber robust regression model).

We consider a robust estimation of m as the solution of the following equation

$$H_n(x, m(x)) = 0, \quad (2)$$

where

$$H_n(x, m(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_n} \int_{s_{i-1}}^{s_i} K\left(\frac{x-u}{h_n}\right) \frac{\delta_i \alpha_n}{G(z_i)T(Z_i)} \psi(Z_i - m(x)) du. \quad (3)$$

3 Asymptions and main results

The assumptions needed for our results are listed below.

- 1- The kernel $K(\cdot)$ is a continuously differentiable compactly supported density function.
- 2- $\psi(\cdot)$ is an odd, monotone, bounded function with bounded first and second derivatives

- 3– $T(z)\overline{G(z)}$ are continuous and monotone
- 4– $R(x)$ is the inverse derivatives function of quantile
- 5– $m(x)$ is p-times differentiable at all x

We proved convergence in probability for this kernel regression estimate and we study the asymptotic normality in the following propositions and theorem.

Proposition1

Under assumptions 1, 2 and 5 we have

$$i) bias\{\hat{m}(x)\} = sup_z(\frac{1}{T(z)\overline{G(z)}}) \frac{((-h)^p)\delta^p E_u(\psi(Z_i - m(x)))}{E_x\psi'(Z - m(x))\delta^p} \int_{-1}^1 y^p k(y) dy + O\{(nh_n)^{-1} + h_n^{2p}\}$$

$$ii) var(\hat{m}) = sup_z(\frac{1}{T(z)\overline{G(z)}}) \frac{var(\psi(Z - m(x)))}{nh_n R(x) E_x^2 \psi'(Z - m(x))} \int_{-1}^1 K^2(u)^P du + O(n^{-1} + n^{-\delta} h_n^{-1} + n^{-2} h_n^{-3})$$

$$iii) \hat{m}(x) - m(x) \xrightarrow{P} 0$$

\xrightarrow{P} denote the convergence in probability

Proposition2

Under assumptions 1 and 5 we have

$$MSE(\hat{m}) = \frac{h_n^{2p}}{p!^2 E_x^2 \psi'(Z - m(x))} (\frac{\delta^p E_u \psi(Z - m(x))}{\delta u^p} \int_{-1}^1 K(u) u^2 du)^2 + \frac{var(\psi(Z - m(x)))}{nh_n R(x) E_x^2 \psi'(Z - m(x))} \int_{-1}^1 K^2(u) du + O(n^{-1} + h_n^{3p} + n^{-\delta} h_n^{-1} + n^{-2} h_n^{-3})$$

Theorem 1

Under assumptions 1,4 and 5 we have

$$\frac{(\hat{m}(x) - m(x) - R(x)) E_x \psi(Z - m(x))}{\sigma E_x \psi(Z - m(x))} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

$$with \sigma^2 = sup_z(\frac{1}{T(z)\overline{G(z)}}) \frac{E_u \psi(Z - m(x))}{(nh_n R(x))} \int_{-1}^1 K^2(u) du$$

\xrightarrow{D} denote the convergence in distribution

References

Ge, Z. and Y. Ma (2016). Robust nonparametric kernel regression estimator. *Statistic and probability letters* 8, 72–79.

Huber, P. and M. Ronchetti (1979). *Robust statistic*. New York: Wiley.

KAPLAN, E. and M. P (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations. *Am. Stat. Assoc* 53, 457–481.

LYNDEN, B. D. (1971). A method of allowing for known observational selection in small samples applied to 3cr quasars. *Springer 32*, 32, 254–267.

TSAI, WY. JEWELL, N. and W. MC (1987). A note on the product limit estimator under right censoring and left truncation. *Springer 74*, 883–886.

Résumé

Dans cet article, nous étudions un modèle de régression du noyau robuste pour les données tronqués à gauche et censurés à droite (CRTL), via une méthode de sélection du paramètre de trimmer et de la fenêtre. Dans des conditions appropriées, nous étudions les propriétés du biais et de la variance de notre estimateur et nous déterminons la normalité asymptotique de l'estimateur par la régression robuste sous le modèle LTRC. Des simulations sont réalisées pour illustrer nos résultats.

Part IV: Calcul Numérique Stochastique Intensif et Optimisation

Observer Design for Nonlinear Systems by Using the enhanced High-Gain and LPV/LMI-Based Technique

AREZKI Hasni*, BEDOUHENE Fazia**
ZEMOUCHE Ali***

* Université MOULOUD MAMMERY; Tizi-Ouzou.
arezki_hasni@yahoo.com,

** Université MOULOUD MAMMERY; Tizi-Ouzou.
fbedouhene@yahoo.fr

*** University of Lorraine, France
ali.zemouche@univ-lorraine.fr

Résumé. Dans cet article, nous synthétisons une nouvelle structure d'observateur pour la classe des systèmes de Lipschitz à multi-non-linéarités. Nous combinons la structure améliorée à gain élevé et la méthodologie LPV / LMI pour construire un observateur plus général nous permettant d'exploiter les avantages des deux approches. Un exemple numérique est étudié pour confirmer la supériorité de la méthode proposée.

1 Introduction

The analysis of nonlinear dynamical systems have received recently a great interest in several disciplines such as vehicle control Zemouche et al. (2017), Biological Systems Sundarapandian Vaidyanathan, hydraulic processes H Hammouri (2002), bioreactors J Gauthier (1992) etc

Among the different state estimation approaches for dynamical systems, let us look at some recent works on the design of state observers : the LPV/LMI methodology proposed in Zemouche et Boutayeb (2013) is based on the use of the Differential Mean Value Theorem (DMVT) for transforming the dynamics of the estimation error in a linear parameter variants systems (LPV systems), this permitted to decrease the gain power, but it has a weakness from the complexity point of view. Alessandri et Zemouche (2016), such an observer has a more general structure than the standard high-gain observer, it allows for additional degrees of freedom in the selection of the observer parameters.

In Zemouche et al. (2018) a new structure of observers for Lipschitz nonlinear systems was presented by combining the standard high-gain methodology with the LMI-based observer design technique, an extension of the obtained results to systems with multi-nonlinearities was also presented.

In this paper we develop a more systematic approach and discuss a general framework for nonlinear dynamical systems, we focus on the design of a new performant observer structure for the class of Lipschitz systems with multi-nonlinearities in triangular form or any system that can be transformed into a triangular structure. It generalizes the HG/LMI observer obtained

in Zemouche et al. (2018) by combining the enhanced high gain methodology developed in Alessandri et Zemouche (2016), with the LPV/LMI methodology proposed in Zemouche et Boutayeb (2013). Via analytic developments, it is shown that all the methods quoted above are a special case of our observer. Firstly, we can recover their structure by making a particular choice on the parameters. Secondly, our observer gives smaller gains, it reduces the number of LMIs related to the LPV/LMI method and modify the enhanced high-gain constraint which sufficiently reduces the Lipschitz constant to get a lower observer gain. It also decrease the sensitivity to high-frequency measurement noise, We give sufficient conditions under which we guarantee the convergence of the error asymptotically.

2 Preliminaries

Let us consider the class of nonlinear systems described by

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + f(x), \\ y &= Cx. \end{cases} \quad (1)$$

where $x \in^n$ is the state vector and $y \in$ is the measured output, $A \in^{n \times n}$, $C \in^n$ and the nonlinear continuous function $f :^n \rightarrow^n$ defined as follows

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C := [1 \ 0 \ \cdots \ 0],$$

$$f(x) := \begin{bmatrix} f_1(x_1) \\ f_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{bmatrix}.$$

We need to assume the following.

3 Observer Design

The observer structure is given by

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + f(\hat{x}) + G(\gamma, K)(y - C\hat{x})$$

where $\hat{x} \in R^n$ is the estimate of x and $G(\gamma, K) := [\gamma_1 k_1; \gamma_2 k_2; \dots; \gamma_n k_n]^T$ where $\gamma \in R_{>0}^n$ and $K \in R^n$.

The key idea is rewrite $\Delta f := f(x) - f(x - T(\gamma)e)$ as $\Delta f = \Delta f_1 + \Delta f_2$, where

$$\Delta f_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-j} \gamma_j \psi_{ij} e_n(i) e_j$$

and

$$\Delta f_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{j_i} \gamma_{k_i(j)} \psi_{i k_i(j)} e_n(i) e_{k_i(j)},$$

with

$$k_i(j) = i - (j_i - j), \quad 0 \leq j_i \leq i.$$

We deal with Δf_1 by relying non the approach behind the enhanced high-gain observer Alessandri et Zemouche (2016) and treat Δf_2 with the LPV-LMI methodology proposed in Zemouche et Boutayeb (2013).

The following theorem summarizes the necessary and sufficient conditions for asymptotic convergence of the error $e = \hat{x} - x$.

Theorem 1 *If there exist $\lambda > 0, a$ Lyapunov matrix $P > 0$, $\tilde{K} = PK$, $\gamma \in \Gamma^+$, $S > 0$ diagonal, $W \leq 0$ diagonal, such that for all $\Psi_\alpha^\sigma \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_\sigma}$*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}(\psi_\alpha^\sigma)^T P + P \mathcal{A}(\psi_\alpha^\sigma) - C^T \tilde{K}^T - \tilde{K} C + \lambda I & * \\ A_1^T P + W A_2 & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (2)$$

$$(\alpha - 1)S \leq W \quad (3)$$

The sequence γ is determined under the conditions

$$\gamma_1 > \max \left(\sigma, \left\{ \frac{2k_{f_1} \lambda_{\max}(P)}{\lambda \alpha^{j_{\min}}} \right\}^{\frac{1}{j_{\min}+1}} \right), \quad \gamma_1 \geq \frac{1}{\lambda_{\min}(Z) + 1} \quad (4)$$

where $Z = S^{-1}W$ and the observer gain is given by $G(\gamma, K) = T(\gamma)P^{-1}\tilde{K}$, then the estimation error e is asymptotically stable.

The obtained results are satisfactory since they involve existing results in the literature.

1. If we put $j_{\min} = 0$ and $z_k < 0$, we find exactly the enhanced high gain Alessandri et Zemouche (2016).
2. likewise if $j_{\min} = 0$ and $z_k = 0$, we get the standard high gain.
3. HG/LMI Observer in Zemouche (2017) is a particular case of our result corresponding to $j_{\min} > 0$ and $z_k = 0$.

Références

- Alessandri, A. et A. Zemouche (2016). On the enhancement of high-gain observers for state estimation of nonlinear systems. In *Decision and Control (CDC), 2016 IEEE 55th Conference on*, pp. 6278–6283. IEEE.
- H Hammouri, P Kabore, S. O. J. B. (2002). Failure diagnosis and nonlinear observer. application to a hydraulic process. *Journal of the Franklin Institute* 339(4), 455 – 478.
- J Gauthier, H Hammouri, S. O. (1992). A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on automatic control* 37(6), 875–880.
- Sundarapandian Vaidyanathan, C. V. e. *Advances and Applications in Nonlinear Control Systems*, Volume 635.

- Zemouche, A. (2017). Observer design for nonlinear systems by using high-gain and lpv/lmi-based technique. In *American Control Conference (ACC), 2017*, pp. 2624–2629. IEEE.
- Zemouche, A. et M. Boutayeb (2013). On lmi conditions to design observers for lipschitz nonlinear systems. *Automatica* 49(2), 585–591.
- Zemouche, A., R. Rajamani, G. Phanomchoeng, B. Boukroune, H. Rafaralahy, et M. Zasadzinski (2017). Circle criterion-based \mathcal{H}_∞ observer design for Lipschitz and monotonic nonlinear systems - Enhanced LMI conditions and constructive discussions. *Automatica* 85, 412–425.
- Zemouche, A., F. Zhang, F. Mazenc, et R. Rajamani (2018). High-gain nonlinear observer with lower tuning parameter. *IEEE Transactions on Automatic Control* PP, 1–1.

Summary

In this paper, we synthesis a new observer structure for the class of Lipschitz systems with multi-nonlinearities. We combine the enhanced high-gain structure and the LPV/LMI methodology to construct a more general observer that permits us to exploit the advantages of both approaches. A numerical example is investigated to confirm the superiority of the proposed method.

Approximation numérique des équations différentielles stochastiques sous fractionnaires

Amel Belhadj *, Abdeldjebbar Kandouci*

*Laboratoire des Modèles Stochastiques, Statistique et Applications,
Université Dr. Moulay Tahar de Saida,
BP 138, EN-NASR, Saida 20000. Algérie.
amlblh50@gmail.com, kandouci1974@gmail.com

Résumé. Nous présentons dans ce travail une simulation des équations différentielles stochastiques dirigées par le mouvement Brownien sous fractionnaire. Ce processus est un processus gaussien autosimilaire en fonction d'un paramètre $H \in (0, 1)$ avec des incréments non stationnaires, pour cela le schéma numérique de l'équation différentielle dirigée par ce type de processus sera perturbé par un bruit dont la distribution est inconnue. Nous proposons de e simuler chaque pas du mouvement Brownien sous fractionnaire avec la discrétisation de sa représentation intégrale.

1 Introduction

Récemment, la propriété de dépendance à long terme est devenue un aspect important des modèles stochastiques dans divers domaines scientifiques, notamment l'hydrologie, les télécommunications, la turbulence, le traitement de l'image et la finance. Le processus le plus connu et le plus largement utilisé qui présente la propriété de dépendance à long terme est le mouvement brownien fractionnaire (mbf en abrégé). Ce processus a été introduit pour la première fois par Kolmogorov en 1940 et étudié par Mandelbrot et Van Ness en 1969 [1]. Pour $H \in]0, 1[$, le mouvement brownien fractionnaire $B_t^H = (B_t^H)_{t \geq 0}$ d'indice H est un processus gaussien centré de fonction de covariance :

$$R_H(s, t) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}) \quad (1)$$

et de variance $V(B_t^H) = t^{2H}$, où l'indice H appelé le paramètre de Hurst.

Le cas où $H = \frac{1}{2}$, B_t^H correspond au mouvement brownien standard. Ce processus est le seul processus continu qui possède la propriété d'auto-similarité et la stationnarité au même temps, il a une dépendance à long terme si $H > \frac{1}{2}$. il n'est pas un processus markovien ni une semi-martingale si $H \neq \frac{1}{2}$.

Une extension du mouvement brownien qui préserve plusieurs propriétés du mouvement brownien fractionnaire mais pas la stationnarité, a été introduite en 2004 par Bojdecki, Gorostazia et Talarczyk, appelée mouvement brownien sous fractionnaire (en abrégé mBsf, en anglais : Sub fractional Brownian motion).

2 Définition et Propriétés

Definition : Le mouvement Brownien sous fractionnaire $(\xi_t)_{t \geq 0}$ de paramètre de Hurst $H \in]0, 1[$ est un processus gaussien centré de fonction de covariance

$$C_H(s, t) = s^{2H} + t^{2H} - \frac{1}{2}(|t + s|^{2H} - |t - s|^{2H}) \quad (2)$$

En particulier, si $H = \frac{1}{2}$, mBsf correspond à un mouvement Brownien standard.

Propriétés : Le mouvement Brownien sous fractionnaire satisfait les propriétés suivantes :

1. Pour tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$\xi_t^H = \frac{B_t^H + B_{-t}^H}{\sqrt{2}}$$

2. Auto-similarité :

$$(\xi_{at}^H)_{t \geq 0} \stackrel{law}{=} a^H (\xi_t^H)_{t \geq 0}$$

3. Trajectoires Höldériennes : Pour tout $\varepsilon < H$ et $T > 0$, \exists une variable aléatoire $K_{\varepsilon, T}$ tel que :

$$|\xi_t^H - \xi_s^H| \leq K_{\varepsilon, T} |t - s|^{H - \varepsilon} \quad s, t \in [0, T]; p.s$$

4. Non-stationnarité des incréments : (moment d'ordre 2)

$$- \mathbf{E} [|\xi_t^H - \xi_s^H|^2] = -2^{2H-1}(t^{2H} + s^{2H}) + (t + s)^{2H} + (t - s)^{2H}$$

$$- \mathbf{E} [|\xi_t^H|^2] = (2 - 2^{2H-1})t^{2H}$$

$$- (t - s)^{2H} \leq \mathbf{E} [|\xi_t^H - \xi_s^H|^2] \leq (2 - 2^{2H-1})(t - s)^{2H}, \quad \text{si } H < 1/2$$

$$- (2 - 2^{2H-1})(t - s)^{2H} \leq \mathbf{E} [|\xi_t^H - \xi_s^H|^2] \leq (t - s)^{2H}, \quad \text{si } H > 1/2$$

5. ξ^H n'est pas un processus de Markov ni une semimartingale si $H \neq \frac{1}{2}$

6. Représentation intégrale

- Représentation moyenne mobile

$$\xi_t^H = \frac{1}{C_1^H} \int_{\mathbf{R}} \left[(t - s)^+ \frac{(2H-1)}{2} + ((t + s)^-)^{\frac{(2H-1)}{2}} - 2((-s)^+)^{\frac{(2H-1)}{2}} \right] dW_s$$

$$\text{où } C_1^H = \left[2 \int_0^\infty \left((1 + s)^{\frac{(2H-1)}{2}} - s^{\frac{(2H-1)}{2}} \right)^2 ds + \frac{1}{2H} \right]^{\frac{1}{2}}$$

- Représentation spectrale

$$\xi_t^H = \frac{1}{C_2^H} \int_{\mathbf{R}} \frac{\cos(ts) - 1}{is} |s|^{\frac{(2H-1)}{2}} d\tilde{W}_s$$

où $\tilde{W} = W^{(1)} + iW^{(2)}$ est une mesure gaussienne complexe dans \mathbf{R}

$$\text{et } C_2^H = \left(\frac{\pi}{2H\Gamma(\pi H)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Représentation sur un intervalle fini

$$\xi_t^H = C^H \int_0^t K(t, s) dW_s$$

où W est un mouvement Brownien standard et $K(t, s)$ est le noyau défini par :

$$K_H(t, s) = \frac{2^{1-H} \sqrt{\pi}}{\Gamma(H - \frac{1}{2})} s^{3/2-H} \left(\int_s^t (x^2 - s^2)^{H-3/2} dx \right) \mathbf{I}_{[0,t]}(s) \quad (3)$$

3 Approximation des EDSs sous fractionnaires

Nous présentons dans cette section les schémas numériques d'Euler et de Milstein pour une équation différentielle dirigée par un mouvement Brownien sous fractionnaire ξ_t^H , écrite sous la forme :

$$X_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\xi_t^H; 0 \leq t \leq T \quad (4)$$

ou bien la forme intégrale de la solution :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)d\xi_s^H; 0 \leq t \leq T \quad (5)$$

Soit N un entier, $\Delta t = \frac{T}{N}$ et $t_n = n\Delta t$.

Posant l'approximation d'Euler suivante :

$$\begin{cases} \hat{X}_{n+1} = \hat{X}_n + b(\Delta t, \hat{X}_n)\Delta t + \sigma(\Delta t, \hat{X}_n)\Delta \xi_n^H \\ \hat{X}_0 = x \end{cases}$$

tel que \hat{X}_n présente la discrétisation numérique du processus X_t et $\xi_n^H = \xi_{n+1}^H - \xi_n^H$.

Le schéma de Milstein est obtenu en prenant le développement d'Itô-Taylor d'ordre 2 de de X .

$$\begin{cases} \hat{X}_{n+1} = \hat{X}_n + b(\Delta t, \hat{X}_n)\Delta t + \sigma(\Delta t, \hat{X}_n)\Delta \xi_n^H + \frac{1}{2}\sigma(\Delta t, \hat{X}_n)\sigma'(\Delta t, \hat{X}_n)((\Delta \xi_n^H)^2 - \Delta t) \\ \hat{X}_0 = x \end{cases}$$

Pour le cas des EDSs dirigées par un mouvement Brownien standard ou par un mouvement Brownien fractionnaire, la distribution des accroissements $B_t - B_s, W_t - W_s$ est gaussienne, mais ce n'est pas le cas pour les EDSs du type (4) à cause des accroissement non stationnaire du mBsf, le fait que nous amène à simuler les trajectoires de chacun de ξ_{n+1}^H et ξ_n^H . Nenghui et Huantian ont proposé un algorithme de simulation des trajectoires du mouvement Brownien sous fractionnaire en utilisant la représentation intégrale sur un intervalle fini, la formule est développée comme suit :

$$\begin{aligned} \xi_{t_{i+1}}^H &= C^H \left(\int_0^{t_i} K(t_{i+1}, s)dW_s + \int_{t_i}^{t_{i+1}} K(t_{i+1}, s)dW_s \right) \\ &= C^H \left(\int_0^{t_i} K(t_i, s)dW_s + \int_0^{t_i} [K(t_{i+1}, s) - K(t_i, s)]dW_s + \int_{t_i}^{t_{i+1}} K(t_{i+1}, s)dW_s \right) \\ &= \xi_{t_i}^H + C^H \left(\int_0^{t_i} [K(t_{i+1}, s) - K(t_i, s)]dW_s + \int_{t_i}^{t_{i+1}} K(t_{i+1}, s)dW_s \right) \end{aligned}$$

Approximation numérique des EDSs sous fractionnaires

$$\begin{aligned}
 &= \xi_{t_i}^H + C^H \left(\sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} [K(t_{i+1}, s) - K(t_i, s)] dW_s + \int_{t_i}^{t_{i+1}} K(t_{i+1}, s) dW_s \right) \\
 &\approx \xi_{t_i}^H + \frac{C^H}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^i [K(t_{i+1}, \frac{t_j + t_{j-1}}{2}) - K(t_i, \frac{t_j + t_{j-1}}{2})] \zeta_j + \frac{C^H}{\sqrt{n}} [K(t_{i+1}, \frac{t_i + t_{i+1}}{2})] \eta_i
 \end{aligned}$$

où $\zeta_j, j = \overline{1, i}$ et $\eta_i, i = \overline{0, n-1}$ sont des variables gaussiennes standards et $S_{t_0}^H = S_0^H = 0$

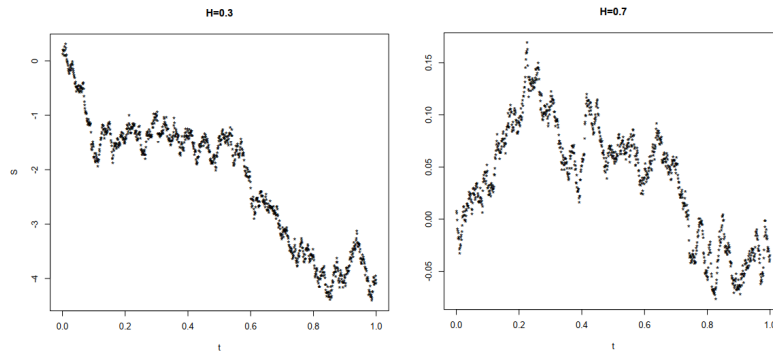


FIG. 1 – Trajectoires du mBsf pour $H=0.3$ et $H=0.7$ respectivement.

Références

Bojdecki. T, Gorostiza.L, and Talarczyk.A (2004). Sub fractional Brownian motion and its relation to occupation times. *Statistics & Probability Letters* 69.4 : 405-419.

Dzhaparidze.K and Van Zanten.H (2004), A series expansion of fractional Brownian motion. *Probab. Theory Relat. Fields.* 103, 39-55.

El-Nouty, Ch., (2012). The lower classes of the sub-fractional Brownian motion. *Stochastic Differential Equations and Processes*,7, 179-196.

Nenghui.K & Huantian. X (2014). Asymptotic behavior of weighted cubic variation of sub-fractional Brownian motion, *Communications in Statistics - Simulation and Computation.* 46.1, 215-229.

Summary

In this work, we present a simulation of stochastic differential equations driven by Fractional Brownian motion. This process is a self-similar Gaussian process with a parameter H in $(0, 1)$ with non-stationary increments. For this reason, the numerical scheme of the differential equation directed by this kind of process will be disturbed by a noise whose distribution is unknown. We propose to simulate each step of the fractional Brownian motion with the discretization of its integral representation.

Asymptotic comparison of eigenvalues for (G, ε) – Wishart fractional

Manel Belksier*, Hacène Boutabia**

Rania Bougherra***

*, **, *** Department of Mathematics, faculty of Science, Badji-Mokhtar University, Annaba, Algeria

* manelbelksier@gmail.com

** boutabiah@yahoo.fr

*** bougherraraniania@gmail.com

Résumé. Dans ce présent travail, nous définissons d’abord le G –mouvement Brownien fractionnaire multivarié (B_t^H) où le paramètre de Hurst H est une matrice diagonale. Ensuite, nous obtenons, sous l’hypothèse que tous les éléments diagonaux de H sont égaux dans $(\frac{1}{2}, 1)$, un système d’équations différentielles stochastiques pour les valeurs propres de (G, ε) –Wishart fractionnaire défini par $R_t^\varepsilon (R_t^\varepsilon)^*$. Enfin, un résultat de comparaison asymptotique intermédiaire concernant ces valeurs propres a été également obtenu.

1 Introduction

The fractional Brownian motion model (fBm for short) has found a wide range of applications in several fields since the seminal paper of Mandelbrot and Van Ness, 1968. Examples are mathematical finance, telecommunication engineering, internet traffic analysis, physical sciences, geosciences and neurosurgery. Since then, based on the study of fBm, various extensions were introduced by many authors, for example, the multivariate fractional Brownian motion (mfBm for short) which has also seen considerable and fruitful research in both applications and theory.

On the other hand, aspects of model ambiguity such as volatility uncertainty have been studied by Peng who introduced as a typical and important case, a new theory of nonlinear expectation space; the so-called G –expectation in an intrinsic way which does not rely on any particular probability space. It reveals the probability distribution uncertainty in a fundamental way which is crucial in many situations such as modeling risk uncertainty in mathematical finance. It can be regarded as a counterpart of the Wiener probability space in the linear case. Within this framework, a new kind of Brownian motion, called G –Brownian motion (GBm for short), was constructed and the corresponding stochastic calculus was also established. Moreover, a stochastic integral of Itô’s type under G –expectation was developed. A very interesting new phenomenon of the G –Brownian motion B is that its quadratic variation process $\langle B \rangle$ is a stochastic process not deterministic in general.

Inspired by the classical multi-dimensional fractional Brownian motion model, we define a new process called the multivariate G –fractional Brownian motion process (mGfBm for short)

in terms of the G –Brownian motion. This model is characterized by one parameter called the Hurst exponent H which is, in our case, a diagonal matrix.

Recently, the theory of random matrices which has received an increasing interest in different application fields such as physics, economics, psychology and so on, has in turn led to the discovery of a new interesting theory of "random matrices processes" in the nonlinear framework. Historically the earliest studied ensemble of random matrices is the Wishart ensemble, introduced by Wishart in 1928.

In the present paper, we introduce two new stochastic processes that is, the multivariate G –fractional Brownian motion process (B_t^H) and the (G, ε) –Wishart process related to its Riemann-Liouville part. Our ultimate goal is to investigate the process of eigenvalues of (G, ε) –Wishart process and we obtain an asymptotic comparison result which concerns these eigenvalues.

2 Preliminaries

We begin with a brief survey of the theory of sublinear expectation space and some preliminary results in the G –framework established by Peng

2.1 G –expectation and G –Brownian motion

Briefly speaking, a G –Brownian motion is a continuous process with independent and stationary increments under a given sublinear expectation. Let

$$\Omega := \{ \omega \in C(R_+, R^d) : \omega(0) = 0 \}, \quad d \geq 1,$$

be the space of all R^d –valued continuous path functions $(\omega_t)_{t \in R_+}$ such that $\omega_0 = 0$, endowed with the distance

$$\rho(\omega^1, \omega^2) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \max_{0 \leq t \leq i} |\omega_t^1 - \omega_t^2| \wedge 1.$$

Let $\mathcal{B}(\Omega)$ be the associated Borel σ –algebra, $\Omega_t := \{ \omega_{\cdot \wedge t} : \omega \in \Omega \}$ and B be the canonical process. Consider the following space of random variables :

$$Lip(\Omega_t) := \left\{ \varphi(B_{t_1 \wedge t}, \dots, B_{t_n \wedge t}) : t_1, \dots, t_n \in [0, \infty), \varphi \in C_{b, Lip}(R^d)^n \right\},$$

where $C_{b, lip}(R^d)^n$ denotes the space of all Lipschitzian and bounded functions on $(R^d)^n$. We further define

$$Lip(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Lip(\Omega_n).$$

Peng constructed the G –expectation $E : \mathcal{H} := Lip(\Omega) \rightarrow R$ as a sublinear expectation on the lattice \mathcal{H} of real functions that satisfies : for all $X, Y \in \mathcal{H}$,

- (a) Monotonicity : $E[X] \geq E[Y]$ if $X \geq Y$.
- (b) Preservation of constants : $E[c] = c$ for all $c \in R$.

- (c) Sub-additivity : $E[X] - E[Y] \leq E[X - Y]$.
- (d) Positive homogeneity : $E[\lambda X] = \lambda E[X]$, for all $\lambda \geq 0$.

The triple (Ω, \mathcal{H}, E) is called a sublinear expectation space. Let $X = (X_1, \dots, X_d)$ be a d -dimensional random variable on (Ω, \mathcal{H}, E) and let

$$G(A) := \frac{1}{2} E[(AX, X)], \quad A \in S_d,$$

where S_d is the space of $d \times d$ symmetric matrices and (\cdot, \cdot) is the Euclidian inner product of R^d . Peng showed that under the G -expectation E , the d -dimensional canonical process $\{B_t(\omega) = \omega_t, t \geq 0\}$ is a G -Brownian motion, that is, $B_0 = 0$,

- (i) For any $s, t \geq 0$, B_t and $B_{t+s} - B_s$ are $\mathcal{N}(0, t\Sigma)$ -distributed and
- (ii) For any $s, t \geq 0$, the increment $B_{t+s} - B_t$ is independent of $(B_{t_1}, \dots, B_{t_m})$ for each $t_0, t_1, \dots, t_m \in [0, t]$.

3 Main results

3.1 Multivariate G -fractional Brownian motion

The mfGBm $(B_t^H)_{t \geq 0}$ can be represented as an integral with respect to the d -dimensional G -Brownian motion (W_t) called also the Riemann-Liouville process R_t^H as follows :

$$B_t^H := \int_0^t (t-s)^D M_H dW_s, \quad t \geq 0. \quad \text{where } D = H - \frac{1}{2}I \text{ and } M_H = [2H \sin(\pi H) \Gamma(2H)]^{\frac{1}{2}} \Gamma(H + \frac{1}{2}I)^{-1}.$$

We introduce at first an approximation of R_t^H by G -Itô processes as follows :

$$R_t^{H,\varepsilon} = \int_0^t (t-s+\varepsilon)^D M_H dW_s.$$

Lemma 1 For every $\varepsilon > 0$, the process $(R_t^{H,\varepsilon})_{t \geq 0}$ is a d -dimensional G -Itô process satisfying the following G -SDE

$$dR_t^{H,\varepsilon} = \varepsilon^D M_H dW_t + \left(\int_0^t D(t-s+\varepsilon)^{D-I} M_H dW_s \right) dt \tag{1}$$

Lemma 2 The random variables $R_t^{H,\varepsilon}$ converges to R_t^H in $L_G^2(\Omega)$ when ε tends to 0 for each $t \geq 0$.

3.2 G -stochastic differential equations of eigenvalues

Theorem 1 Suppose that at time 0 all the eigenvalues are distinct. Then the process of the eigenvalues satisfies the following G -SDE

$$d\lambda_i^\varepsilon(t) = 2\varepsilon^{h-\frac{1}{2}} C_h \sqrt{\lambda_i^\varepsilon(t)} \sum_p O_t^{pi} d\delta_t^p + \left(h - \frac{1}{2} \right) C_h (O_t^* \eta_t O_t)^{ii} dt \tag{2}$$

Asymptotic comparison of eigenvalues for (G, ε) -Wishart fractional

$$+\varepsilon^{2h-1}C_h^2 \sum_l \left[(O_t^{li})^2 + \sum_{p \neq i} \left(\frac{\lambda_i^\varepsilon(t) (O_t^{lp})^2}{\lambda_i^\varepsilon(t) - \lambda_p^\varepsilon(t)} + \frac{\lambda_i^\varepsilon(t) (O_t^{li})^2}{\lambda_i^\varepsilon(t) - \lambda_p^\varepsilon(t)} \right) \right] du_t^l$$

where $(\delta^1, \dots, \delta^d)$ is G -Brownian motion and

$$\eta_t^{ij} := R_t^{\varepsilon j} \left(\int_0^t (t-s+\varepsilon)^{h-\frac{3}{2}} dW_s^i + R_t^{\varepsilon i} \left(\int_0^t t-s+\varepsilon)^{h-\frac{3}{2}} dW_s^j \right) \right)$$

3.3 Asymptotic comparison

Theorem 2 For each $t \geq 0$, the random variable $\lambda_i^\varepsilon(t) \in L_G^2(\Omega)$ and $\varepsilon^\alpha \lambda_i^\varepsilon(t) = o_{\varepsilon \rightarrow 0}(1)$ *q.s.*

Références

- Alòs E, Mazet O, Nualart D (2000). Stochastic calculus with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter lesser than $\frac{1}{2}$. *Stochastic Processes and their applications*; **86** (1) : 121 – 139.
- Dunga N. T, Thao T. H (2010). An approximate approach to fractional stochastic integration and its applications. *Brazilian Statistical Association*; **24** (1) : 57 – 67.
- Boutabia H, Meradj Si, Stihi S (2019). Stochastic differential equations for eigenvalues and eigenvectors of a G -Wishart process with drift. *Ukrainian Mathematical Journal*; **71** (4) : 502 – 515.
- Mandelbrot B, Van Ness J (1968). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*; **10** (4) : 422 – 437.
- Peng S (2008). Multi-dimensional G -Brownian motion and related stochastic calculus under G -expectation, *Stochastic Processes and their Applications*; **118** (12) : 2223 – 2253.
- Stihi S, Boutabia H, Meradji S (2018). Stochastic differential equations for Random matrices processes in the nonlinear framework, *Opuscula Mathematica* **38** (2) : 261 – 283.
- Yue J, Huang N. J (2018). Fractional Wishart Processes and ε -Fractional Wishart Processes with Applications. *Computers and Mathematics with Applications*; **75** (8) : 2955 – 2977.

Summary

In the present paper, we define at first the multivariate G -fractional Brownian motion process (B_t^H) where the Hurst parameter H is a diagonal matrix. Then we obtain, under the assumption that all the diagonal elements of H are equal in $(\frac{1}{2}, 1)$, a system of stochastic differential equations for eigenvalues of (G, ε) -Wishart fractional process defined by $R_t^\varepsilon (R_t^\varepsilon)^*$. Finally, An intermediate asymptotic comparison result concerning these eigenvalues was also obtained.

Necessary and sufficient conditions of optimality for linear FBDSDEs of mean field type

Nassima BERROUIS*, Boulakhras GHERBAL**

*Laboratory of Applied Mathematics, University of Mohamed Khider, P.O.Box 145, Biskra 07000, Algeria
bnesma@ymail.com,

**Laboratory of Applied Mathematics, University of Mohamed Khider, P.O.Box 145, Biskra 07000, Algeria
bgherbal@yahoo.fr

Résumé. In this work, we established necessary and sufficient conditions for optimality for linear forward backward doubly stochastic differential equations of mean field type (MF-FBDSDEs), where the control domain and the cost function were assumed convex. This result is based on the coneconv optimization principle.

1 Introduction

In this work, we study a stochastic control problem where the system is governed by a linear forward backward doubly stochastic differential equations of mean field type.

2 Preliminaries and Formulation of the problem

For any admissible control v , we consider an optimal control problem for the following linear MF-FBDSDEs

$$\begin{cases} X_t^v = \eta + \int_0^t (a_s^1 X_s^v + a_s^2 E[X_s^v] + a_s^3 v_s) ds + \int_0^t (b_s^1 X_s^v + b_s^2 E[X_s^v] + b_s^3 v_s) dW_s, \\ Y_t^v = \xi + \int_t^T (c_s^1 X_s^v + c_s^2 E[X_s^v] + c_s^3 Y_s^v + c_s^4 E[Y_s^v] + Z_s^v \alpha_s^1 + E[Z_s^v] \alpha_s^2 + c_s^5 v_s) ds \\ \quad + \int_t^T (d_s^1 X_s^v + d_s^2 E[X_s^v] + d_s^3 Y_s^v + d_s^4 E[Y_s^v] + Z_s^v \beta_s^1 + E[Z_s^v] \beta_s^2 + d_s^5 v_s) d\overleftarrow{B}_s - \int_t^T Z_s^v dW_s, \end{cases} \quad (1)$$

The cost functional to be minimized is defined as follows

$$J(v) = E \left[G(X_T^v, E[X_T^v]) + K(Y_0^v, E[Y_0^v]) + \int_0^T L(t, X_t^v, E[X_t^v], Y_t^v, E[Y_t^v], Z_t^v, E[Z_t^v], v_t) dt \right] \quad (2)$$

Necessary and sufficient conditions of optimality for linear FBDSDEs of mean field type

Now the control problem of system 1 is to minimize the cost function 2, over the set of admissible controls \mathcal{U}_{ad} , which are a \mathcal{F}_t -measurable processes and square integrable, valued in a compact metric space $A \subseteq R^k$. In this case we say that $u^* \in \mathcal{U}_{ad}$ is an *optimal control* if

$$J(u^*) = \inf J(v), v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (3)$$

The following assumptions will be our main assumptions :

- (A1) : the set $U \subseteq R^k$ is convex and compact,
- (A2) : G, K and L are continuous and convex,
- (A3) : G, K and L are continuously differentiable with respect to $(X, \bar{X}, Y, \bar{Y}, Z, \bar{Z})$;
- (A4) : the derivatives of G, K and L with respect to $X, \bar{X}, Y, \bar{Y}, Z, \bar{Z}$ are bounded.

3 Necessary and sufficient conditions for optimality

To establish a necessary and sufficient conditions for optimality, we use the convex optimization principle, to get

$$(\hat{u} \text{ minimize } J) \Leftrightarrow \langle J'(\hat{u}), v - \hat{u} \rangle \geq 0; \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (4)$$

The main result is the following (Necessary and sufficient conditions for optimality) Let \hat{u} be an admissible control and $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ are the trajectories corresponding to \hat{u} . Then \hat{u} is optimal if and only if, there exists a unique quadruple of \mathcal{F}_t -adapted process (q^v, p^v, Q^v, P^v) solution of the following two adjoint equations

$$\begin{cases} dq_t^v = -(H_X(t, X_t^v, E[X_t^v], Y_t^v, E[Y_t^v], Z_t^v, E[Z_t^v], v_t, q_t^v, p_t^v, Q_t^v, P_t^v) \\ \quad + E[H_{\bar{X}}(t, X_t^v, E[X_t^v], Y_t^v, E[Y_t^v], Z_t^v, E[Z_t^v], v_t, q_t^v, p_t^v, Q_t^v, P_t^v)])dt + p_t^v dW_t, \\ q_T^v = G_X(X_T^v, E[X_T^v]) + E[G_{\bar{X}}(X_T^v, E[X_T^v])]. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} dQ_t^v = (H_Y(t, X_t^v, E[X_t^v], Y_t^v, E[Y_t^v], Z_t^v, E[Z_t^v], v_t, q_t^v, p_t^v, Q_t^v, P_t^v) \\ \quad + E[H_{\bar{Y}}(t, X_t^v, E[X_t^v], Y_t^v, E[Y_t^v], Z_t^v, E[Z_t^v], v_t, q_t^v, p_t^v, Q_t^v, P_t^v)])dt \\ \quad + (H_Z(t, X_t^v, E[X_t^v], Y_t^v, E[Y_t^v], Z_t^v, E[Z_t^v], v_t, q_t^v, p_t^v, Q_t^v, P_t^v) \\ \quad + E[H_{\bar{Z}}(t, X_t^v, E[X_t^v], Y_t^v, E[Y_t^v], Z_t^v, E[Z_t^v], v_t, q_t^v, p_t^v, Q_t^v, P_t^v)])dW_t - P_t^v d\bar{B}_t, \\ Q_0^v = K_Y(Y_0^v, E[Y_0^v]) + E[K_{\bar{Y}}(Y_0^v, E[Y_0^v])]. \end{cases} \quad (6)$$

Such that

$$\left\langle H_v(t, \hat{X}_t, E[\hat{X}_t], \hat{Y}_t, E[\hat{Y}_t], \hat{Z}_t, E[\hat{Z}_t], v_t, \hat{q}_t, \hat{p}_t, \hat{Q}_t, \hat{P}_t), v_t - \hat{u}_t \right\rangle \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, a.e., a.s. \quad (7)$$

where the Hamiltonien function is defined by

$$\begin{aligned}
 &H(t, X, E[X], Y, E[Y], Z, E[Z], v, q, p, Q, P) := \\
 &\langle q, a^1 X + a^2 E[X] + a^3 v \rangle + \langle p, b^1 X + b^2 E[X] + b^3 v \rangle \\
 &+ \langle Q, c^1 X + c^2 E[X] + c^3 Y + c^4 E[Y] + \alpha^1 Z + \alpha^2 E[Z] + c^5 v \rangle \\
 &+ \langle P, d^1 X + d^2 E[X] + d^3 Y + d^4 E[Y] + \beta^1 Z + \beta^2 E[Z] + d^5 v \rangle \\
 &L(t, X, E[X], Y, E[Y], Z, E[Z], v).
 \end{aligned}$$

Références

- [1] I. Ekeland and Temam, *Analyse convexe et problème variationnel*, Dunod (1974).
- [2] Andersson D, Djehiche B. A maximum principle for SDEs of mean-field type. *Appl Math Optim* 63 :341-356,(2011)
- [3] B. Gherbal. Optimal control problems for linear backward doubly stochastic differential equations. *Random. Oper. Stoc. Equ.*, Vol. 22, No 3, 129-138, (2014).

Summary

In this work, we established necessary and sufficient conditions for optimality for linear forward backward doubly stochastic differential equations of mean field type (MF-FBDSDEs), where the control domain and the cost function were assumed convex. This result is based on the coneve optimization principle.

Almost periodically unitary mild solution to semilinear stochastic differential equations

Karima SLIMI*, Mannal SMAALI*
Omar MELLAH*

* Laboratory LMPA, Mouloud Mammeri University of Tizi-Ouzou
E-Mail: slimi_K@yahoo.fr, smaali_manel@yahoo.fr, omellah@yahoo.fr

Résumé. L'objet de ce papier est d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution presque périodiquement unitaire d'une équation différentielle stochastique semi-linéaire sur un espace de Hilbert séparable. Pour un processus stochastique, on peut parler de plusieurs notions de presque périodicité. Dans ce travail, nous étudions les liens existant entre elles, nous donnerons quelque exemples explicites de processus presque périodiquement unitaires et on discutera la presque périodicité unitaire d'une solution d'une classe d'équations différentielles stochastiques

1 Introduction

Many concepts of almost periodicity were introduced just after the appearance of the theory of almost periodicity to a class of stochastic processes. For a second order stochastic processes. E. G. Gladyshev introduced periodicity correlated (PC) and almost periodicity correlated (APC) processes, also called almost cyclostationarity. H. Hurd introduced unitary almost periodicity. Tudor and Moroza introduced almost periodicity in finite-dimensional distributions. C. Tudor in his article introduced almost periodicity in distribution or in law, almost periodicity in quadratic mean and almost periodicity sure.

He initiated a comparative study of different notions of almost periodicity for stochastic processes. Bedouhene et al. complete the work of Tudor by some links.

Our work, completes those of Tudor and Bedouhene et al. by some links between almost periodicity unitary and these different concepts of almost periodicity.

A natural application of all these types of almost periodicity is the stochastic differential equations. Several results on the study of almost periodic solutions to stochastic differential equations have been obtained. Tudor and Moroza have proved the existence of an almost periodic mild solution in finite-dimensional distribution for some class of affine stochastic differential equations with almost periodic coefficients. Tudor and Da Prato have shown the existence of almost periodic solutions in infinite-dimensional distribution to semilinear stochastic differential equations in Hilbert spaces. Kamenskii et al. have proved existence and unicity of almost periodic solution in distribution to a class of semilinear stochastic differential equations.

Mellah and Raynaud de Fitte proved the non-existence of a mean square almost periodic solution to the class of equation studied in Kamenskii et al.

The aim of this work is to study existence and uniqueness of almost periodically unitary solution to stochastic differential equation studied in Kamenskii et al. with the same conditions.

2 Main results

Let $(\mathbb{H}_1, \|\cdot\|_{\mathbb{H}_1})$ and $(\mathbb{H}_2, \|\cdot\|_{\mathbb{H}_2})$ be separable Hilbert spaces and $L(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ a space of all bounded linear operators from \mathbb{H}_1 to \mathbb{H}_2 with the norm $\|\cdot\|_{L(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)}$.

Recall that, $\mathcal{U} = \{U(\tau), \tau \in \mathbb{R}\}$ is a strongly continuous unitary operator group in $L^2(\Omega)$, if

1. $U(\tau)$ is a linear operator in L^2 , for each $\tau \in \mathbb{R}$;
2. $\|U(\tau)\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} = 1, U(0) = I_{L^2}$ ($\mathcal{L}(L^2, L^2)$ the space of linear operator on L^2) ;
3. $U(\tau_1 + \tau_2) = U(\tau_1) \circ U(\tau_2), \forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$;
4. $\forall X \in L^2(\Omega), \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(X, \tau) > 0$, for which $\|[U(\tau + h) - U(\tau)]X\|_{L^2} < \varepsilon$, whenever $|h| < \delta(X, \tau)$.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}, \mathbb{P})$ be a stochastic basis and $X : \mathbb{R} \rightarrow L^2(\Omega)$ a stochastic processes. X is said almost periodically unitary (APU for short), if there exists a strongly continuous unitary group (sometimes called a shift group) $\mathcal{U} = \{U(\tau); \tau \in \mathbb{R}\}$ in $L^2(\Omega)$ such that, for every $\varepsilon > 0$, there exists $l = l(\varepsilon) > 0$ such that any interval of length $l(\varepsilon)$ contains at least a number τ , for which $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|X(t + \tau) - U(\tau)X(t)\|_{L^2} < \varepsilon$.

In the aim to complete the study concerning almost periodic solutions to stochastic differential equations, we are interested in the problem of existence and uniqueness of an almost periodically unitary solutions to the following stochastic differential equation on a separable Hilbert space :

$$dX(t) = AX(t)dt + F(t, X(t))dt + G(t, X(t))dW(t), t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Where $A : D(A) \subset \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_2$ is a densely defined closed (possibly unbounded) linear operator, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_2$, and $G : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_2 \rightarrow L(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ are continuous functions, $W(t)$ is an \mathbb{H}_1 -valued Wiener process with nuclear covariance operator Q .

First we show existence and uniqueness of an almost periodically unitary solution to the following SDE :

$$dX(t) = aX(t)dt + F(t)dt + G(t)dW(t), t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Where, $a \in \mathbb{R}$, W is a standard Brownian motion on \mathbb{R} , $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are almost periodic functions.

In the second step, we generalize our result in case where the deterministic part is null :

$$dX(t) = AX(t)dt + G(t, X(t))dW(t), t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

We consider the following hypothesis :

- (H1) $W(t)$ is an \mathbb{H}_1 -valued Wiener process with nuclear covariance operator Q (we denote by $\text{tr } Q$ the trace of Q , defined on a stochastic basis $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}, \mathbb{P})$).

(H2) $A : D(A) \rightarrow \mathbb{H}_2$ is the infinitesimal generator of a C_0 -semigroup $(T(t))_{t \geq 0}$, exponentially stable. *i.e.*, there exists $\delta > 0$, $M \geq 1$ such that

$$\|T(t)\|_{L(\mathbb{H}_2)} \leq Me^{-\delta t}, \quad t \geq 0.$$

(H3) There exists a constant K such that the mappings $G : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_2 \rightarrow L(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ satisfy

$$\|G(t, x)\|_{L(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)} \leq K(1 + \|x\|_{\mathbb{H}_2}).$$

(H4) The function G is Lipschitz, more precisely there exists a constant K such that

$$\|G(t, x) - G(t, y)\|_{L(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)} \leq K\|x - y\|_{\mathbb{H}_2},$$

all for $t \in \mathbb{R}$, and all $x, y \in \mathbb{H}_2$.

(H5) The mapping G is almost periodic in $t \in \mathbb{R}$ uniformly with respect to x , in bounded subsets of \mathbb{H}_2 .

Theorem 2.1. Let the assumptions (H1)-(H5) be fulfilled and the constant $\theta = \frac{M^2 K^2 \text{tr} Q}{2\delta} < 1$. Then, there exists a unique APU mild solution to (3) in $L^2(\Omega)$ given by

$$X(t) = \int_{-\infty}^t T(t - \sigma) G(\sigma, X(\sigma)) dW(\sigma) \tag{4}$$

Reference

F. Bedouhene, O. Mellah, and P. Raynaud de Fitte (2012). *Bochner-almost periodicity for stochastic processes*, Stoch. Anal. Appl., 30(2) :322-342.

G. Da Prato and C. Tudor (1995). *Periodic and almost periodic solutions for semilinear stochastic equations*. Stochastic. Anal. Appl. 13(1) : 13-33.

E. G. Gladyshev (1963). *Periodically and almost periodically correlated random processes with continuous time parameter*. The. Prob. Appl.,8 :173-177.

H. L. Hurd (1991). *Almost periodically unitary stochastic processes*. Stochastic Processes. Appl., 43(1) :99-113.

O. Mellah, P. Raynaud De Fitte (2013). *Contrexamples to mean square almost periodicity of the solutions of some SDES with almost periodic coefficients*. No. 91, pp. 1-7.

T. Morozan and C. Tudor (1989). *Almost periodic solutions of affine Ito equations*, Stoch. Anal. Appl., 7(4),451-474.

M. Kamenskii, O. Mellah and P. Raynaud de Fitte (2014). *Weak averaging of semilinear stochastic differential equations with almost periodic*.

C. Tudor (1995), *Almost periodic stochastic processes*. In Qualitative problems for differential equations and control theory, pages 289-300. World Sci. Publ., River Edge, NJ.

Summary

Our aim in this paper is to study almost periodically unitary mild solution to some semilinear stochastic differential equations on a separable Hilbert space.

For a stochastic processes, we can talk about several notions of almost periodicity.

In this work, we study some relationships between them, we give some explicit examples for almost periodically unitary processes and we discuss the almost periodically unitary solution to some class of stochastic differential equations

Application of the adaptive method on the semi-infinite optimization

ZAARAT Ahlem* - RADJEF Sonia**
BP 1505, El M'naouer, 31000, Oran, Algeria.
*zarat.ahlam@gmail.com
**soniaradjef@yahoo.fr

Abstract:

The principle of a constructing algorithm of optimization for solution linear semi-infinite problems is presented. Our aim is to solve a semi-infinite optimization example of probability using the adaptive method.

1 Introduction

The adaptive method is an intermediate method between the interior method and the simplex one. It's usually used to solve linear programs with bounded variables. This approach is based on the use of support feasible solutions which are more general than basic feasible solutions. In addition, the standard scheme of the support method has not only an optimality criterion but also suboptimality conditions that are very useful for the investigation of large linear programming problems.

So here, this article is devoted to develop an algorithm to solve a semi-infinite linear program using the adaptive method approach.

Linear semi-infinite optimization (LSIO) primarily deals with linear optimization problems of finitely many unknowns and an arbitrary number of constraints; i.e., with problems of the form

$$\begin{cases} \inf c'x \\ a'_t x \geq b_t; \quad t \in T \end{cases}$$

where c' denotes the transpose of the column vector. $c \in \mathbb{R}^n$, T is arbitrary infinite index set, $a : T \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b : T \rightarrow \mathbb{R}$.

2 The simplex method

Choose a feasible non-optimal point x_0 , a finite set $T_0 \subset T$ with $A(x_0) = \text{cone}\{a_t, t \in T_0\}$ and a basic set $S_0 \subset T_0$. Set $r := 0$.

Phase I.

- I. If $|S_r| = n$ go to II (then x^r is an extreme point). Else, find a non-zero optimal solution y_r of P_{S_r} .
- II. Calculate $g_r = \inf_{t \in T} a'_t y^r$. If $g_r < 0$ go to step III. If $g_r \geq 0$ and $c' y^r < 0$, stop ! (then $v(P) = -\infty$). Else set $y^r := -y^r$.
- III. Calculate
$$\theta_r = \min\left\{\frac{a'_t x^r - b_t}{|a'_t y^r|} \mid a'_t y^r < 0, t \in T\right\}.$$
- IV. Set $x^{r+1} := x^r + \theta_r y^r$ and find a finite set $T_{r+1} \subset T$ with
$$A(x^{r+1}) = \text{cone}\{a_t, t \in T_{r+1}\}.$$
- V. Calculate the value v_{r+1} of the problem obtained by replacing $=$ by \geq in the first block constraints in $P_{T_{r+1}}$
- VI. If $v_{r+1} = 0$, stop! (then $v(P) = c' x^{r+1}$). Else choose a basic set $S_{r+1} \subset T_{r+1}$, set $r := r + 1$ and go to Step I.

Phase II.

- i. Mark the basic set S_r in order to avoid its repetition during this iteration. If $Y_1(A_{S_r})$, stop! (then x_r is optimal). Else choose
$$y^r \in Y_1(A_{S_r}).$$
- ii. Mark the vector y^r in order to avoid its repetition during this iteration.
- iii. Calculate $g_r = \inf_{t \in T} a'_t y^r$. If $g_r \geq 0$, stop! (then $v(P) = -\infty$). Else continue.
- iv. Calculate θ_r as in step III. If $\theta_r = 0$, replace y^r by another vector in $Y_1(A_{S_r})$ not yet marked and go to Step ii. If $\theta_r = 0$ for all the vectors in $Y_1(A_{S_r})$ replace S_r by another basic set contained in T_r not yet marked and go to Step i. Else continue.
- v. As step IV.
- vi. As step V.
- vii. As Step VI but with "Step I" replaced "Step i".

3 Example

Suppose that a proportion $p \in]0, 1[$ of people who have been in contact with a certain virus are infected and develop a particular disease, where p is known from previous epidemiological studies. At the end of each year, the number Y of people who are infected during this period of time is observed and some statistical inference must be carried out on the number of people, n , who have been in contact with the virus. In particular, suppose that we wish to test the hypothesis that this number n has just surpassed the worrying threshold n_0 . We have two hypotheses, namely

$$H_0 : n \leq n_0 \quad \text{against} \quad H_1 : n > n_0$$

to be contrasted, on the basis of one observation of the random variable Y with binomial distribution $B(n, p)$, n being the target parameter. The statistical advisor suggests that the possible values of Y are grouped into three sets $S_1 = \{1, 2, \dots, n_1\}$, where n_1 denotes the integer part of $p n_0$, $S_2 = \{n_1 + 1, \dots, n_0\}$ and $S_3 = \{n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$. Moreover, he proposes applying a randomized test where the null hypothesis H_0 is rejected with probability x_i if Y is observed in S_i , $i = 1, 2$. Observe that, trivially, $P(\text{reject } H_0 \mid Y \in S_3) = 1$ for any reasonable randomized test.

There are two types of possible errors: rejecting H_0 when it is true (Type I error) and not rejecting H_0 when it is not true (Type II error). If a significance level $\alpha \in]0, 1[$ is given.

So we need to keep the latter probabilities at a minimum, while at the same time guaranteeing the required significance level. In this way, the following LSIO model is formulated:

$$\begin{cases} \inf x_3 \\ \sum_{i=1}^2 P(Y \in S_i \mid n) x_i \leq \alpha; & n = 1, 2, \dots, n_0 \\ \sum_{i=1}^2 P(Y \in S_i \mid n) x_i + x_3 \geq \sum_{i=1}^2 P(Y \in S_i \mid n); & n = n_0 + 1, \dots \\ 0 \leq x_1 \leq 1, & 0 \leq x_2 \leq 1, & x_3 \geq 0. \end{cases}$$

References

- [1] Gabasov R. Adaptive method of linear programming. Preprints of the university of Karlsruhe: Germany, 1993.
- [2] Gabasov R and others. Constructive methods of optimization. P.I.-University Press, Minsk, 1984.
- [3] Radjef S. Doctorate Thesis: Application de la méthode adaptée aux problèmes multicritères: Bejaa A. Mira University, 2011.

- [4] Radjef S and Bibi MO. A New Algorithm for Linear Multiobjective Programming Problems with Bounded Variables. Arab J Math 2014; DOI 10.1007/s40065-013-0094-x.
- [5] Radjef S and Bibi MO. An effective Generalization of the Direct Support Method. Math Probl Eng 2011; Article ID 374390, 18 pages, doi:10.1155/2011/374390.
- [6] Edward J. Anderson, Miguel A. Goberna, Marco A. Lopez Simplex-Like Trajectories on Quasi-Polyhedral Sets: Maryland, USA, 2016.
- [7] M A. Goberna and M. A. Lopez Linear Semi-infinite Optimization Glasgow, Scotland, UK.

C. Posters

Validation croisée non biaisée et estimation à noyau discret dans le modèle de stock de type (R, s, S)

Faïrouz Afroun*, Djamil Aïssani**, Djamel Hamadouche *

*Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA),
Université de Tizi-Ouzou, 15000, Algérie.
afrounfairouz@gmail.com,
djhamad@yahoo.fr

**Unité de recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes),
Université de Bejaia, 06000, Algérie
lamos_bejaia@hotmail.com

Résumé. Dans ce travail, nous avons considéré l'estimation à noyau discret d'une matrice de transition associée à une chaîne de Markov décrivant un modèle de stock (R, s, S) . Plus précisément, nous avons proposé de sélectionner le paramètre de lissage dans cette situation par la minimisation de la norme matricielle $\|\cdot\|_2$. En effet, dans un premier lieu, nous avons développé la forme explicite de l'expression, issue de la norme matricielle $\|\cdot\|_2$, à minimiser afin de quantifier le paramètre de lissage. Dans un second lieu, on se base sur la méthode *UCV*, nous avons dégagé une expression pratique du paramètre de lissage en question. Enfin, dans le but d'illustrer et d'appuyer notre proposition, une application numérique comparative est réalisée.

1 Introduction

Récemment, Cherfaoui et al. (2015) ont abordé le problème du choix du paramètre de lissage dans le contexte d'estimation à noyau d'une chaîne de Markov décrivant un système d'attente. Dans ce dernier travail, afin de prendre en considération l'interaction des différentes composantes d'un système d'attente les auteurs ont proposé une procédure de sélection du paramètre de lissage qui se base sur les normes matricielles où ils ont démontré que l'estimateur du paramètre de lissage choisi, par la minimisation d'une certaine norme matricielle, donne de meilleurs résultats que les méthodes classiques.

L'objectif du présent travail est de vérifier la validité des conclusions dégagées par Cherfaoui et al. (2015), sur les chaînes de Markov continue, lorsque nous considérons la chaîne de Markov discrète associée au modèle de stock (R, s, S) . Autrement dit, dans ce document nous allons considérer l'estimateur à noyau discret de la matrice de transition P correspondante au modèle en question et analyser le problème du choix du paramètre de lissage via la norme matricielle $\|\cdot\|_2$. Pour ce faire, nous allons développer des formes explicites (théorique et pratique) des expressions, issues de la norme matricielle $\|\cdot\|_2$, à minimiser afin de sélectionner le paramètre de lissage optimale lors de l'estimation de la matrice de transition P . De plus, dans

Estimation à noyau discret dans le modèle de stock de type (R, s, S)

le but d'illustrer et d'appuyer nos propositions, une application numérique comparative basée sur des échantillons simulés sera réalisée.

Le reste du document est organisé comme suit : Dans la deuxième section nous allons présenter brièvement le modèle de gestion de stock de type (R, s, S) . Dans la troisième section, le problème du choix du noyau et du paramètre de lissage lors de l'estimation de la matrice de transition du modèle de stock de type (R, s, S) , sera présenté. Dans la quatrième section nous allons présenter notre application numérique.

2 Description du modèle

Considérons le problème de gestion des stocks de type (R, s, S) (Rabta et Aïssani, 2005), suivant : Au début de chaque période R on décide si on doit ou non commander une quantité d'articles dans le cas affirmative, combien commander. On suppose que le fournisseur est parfaitement fiable et que les commandes arrivent immédiatement. Durant la n ème période, $n \geq 1$, la demande totale est une variable aléatoire discrète X_n . On suppose également que les variables aléatoires X_n , $n \geq 1$, sont indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune :

$$a_x = \Pr(X = x), \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Pour un tel problème de gestion de stock, l'état du stock L_n est inspectée aux dates $t_n = nR$ ($n \geq 1$). Si le niveau du stock $L_n \leq s$, on passe une commande de manière à ramener le stock au niveau S , la taille de la commande est égale alors à $S - L_n$. Si par contre le niveau du stock est supérieure au seuil de risque s , on ne passe aucune commande et l'on attend jusqu'au prochain moment d'inspection. L'état du stock L_{n+1} à la fin de la $(n+1)$ ème période est alors donné par :

$$L_{n+1} = \begin{cases} (S - X_{n+1})^+, & \text{si } L_n \leq s; \\ (L_n - X_{n+1})^+, & \text{si } L_n > s; \end{cases} \quad (2)$$

où $(A)^+ = \max(A, 0)$. D'après l'expression (2), il est aisé à remarquer que L est donc une chaîne de Markov homogène, à espace d'état $E = \{0, 1, \dots, S\}$ dont la matrice des probabilités de transition $P_{ij} = \Pr(L_{n+1} = j \mid L_n = i)$ est définie par :

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & \dots & s & s+1 & \dots & S \\ \hline 0 & \sum_{s+1}^{+\infty} a_x & a_{S-1} & \dots & a_{S-s} & a_{S-s-1} & \dots & a_0 \\ 1 & \sum_{s+1}^{+\infty} a_x & a_{S-1} & \dots & a_{S-s} & a_{S-s-1} & \dots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s & \sum_{s+1}^{+\infty} a_x & a_{S-1} & \dots & a_{S-s} & a_{S-s-1} & \dots & a_0 \\ \hline s+1 & \sum_{s+1}^{+\infty} a_x & a_s & \dots & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ S & \sum_{s+1}^{+\infty} a_x & a_{S-1} & \dots & a_{S-s} & a_{S-s-1} & \dots & a_0 \end{array} \quad (3)$$

avec les éléments a_x sont définis par (1).

3 Estimation à noyau de la matrice de transition du modèle

Supposons qu'on est dans une situation où c'est la distribution des demandes qui est inconnue c'est-à-dire on ne dispose que d'une information partielle sur la distribution des demandes qui est donnée sous forme d'un échantillon X_1, X_2, \dots, X_n de taille n . De plus, notre intérêt est l'estimation de la matrice de transition P associée à ce modèle tout en utilisant la méthode du noyau définie par :

$$\hat{a}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i), \quad x \in \mathbb{N}; \quad (4)$$

où h est le paramètre de lissage et $K_{x,h}$ est le noyau discret de cible x et de fenêtre h .

Il est clair que la mise en œuvre de cette technique nécessite de fixer le noyau K et le paramètre de lissage h . Pour le choix du noyau K il suffit de le sélectionner parmi les noyaux, les plus usités dans le cadre d'estimation d'une densité discrète, suivants : Noyau Poissonien, Noyau Binomiale, Noyau Binomiale négatif et Noyau Triangulaire (voir Kokonendji et al. (2007); Kokonendji et Kiessé (2011)). Tandis que, pour le choix du paramètre de lissage h , on peut utiliser les techniques classiques telles : Minimisation du MISE ou du ISE, la validation croisée (UCV, LCV), la méthode "Excès des zéros"... (voir Kokonendji et al. (2007); Kokonendji et Kiessé (2011)). Cependant, ces dernières procédures nous ne permettent pas de prendre en considération le nombre de répétition des éléments a_x dans la matrice P .

A cet effet, dans le but de prendre en considération les répétitions, nous proposons l'utilisation de la norme matricielles $\|\cdot\|_2$. En effet, l'utilisation des normes matricielles d'une manière générale et en particulier la norme $\|\cdot\|_2$ nous permet d'inclure les répétitions des quantités \hat{a}_x dans l'expression \hat{P} . Dans ce cas, le paramètre de lissage optimal peut être calculer selon l'expression suivante :

$$h^* = \arg \min_h \|\hat{P} - P\|_2 = \arg \min_h \left[(S+1) \sum_{x=0}^s (\hat{a}_x - a_x)^2 + (s+2) \left(\sum_{x=0}^{S-1} (\hat{a}_x - a_x) \right)^2 + \sum_{x=s+1}^{S-1} (S+s+1-x) (\hat{a}_x - a_x)^2 + \sum_{i=s+1}^{S-1} \left(\sum_{x=0}^{i-1} (\hat{a}_x - a_x) \right)^2 \right]. \quad (5)$$

Il est clair que cette dernière procédure est restreinte dans un aspect théorique seulement. Pour cela et afin qu'elle soit exploitable dans la pratique nous proposons de la reformuler via la méthode de validation croisée. Ainsi, avec la même démarche suivie dans Rudemo (1982) et Bowman (1984), on peut démontrer que l'expression équivalente à (5) via la validation croisée est :

$$h_{cv}^* = \arg \min_h \|\hat{P} - P\|_2^{cv} = \arg \min_h \left\{ \sum_{i=0}^S \sum_{j=0}^S \hat{P}_{ij}^2 - 2 \left[\sum_{i=s+1}^{S-1} E(\hat{P}_i) + (s+2) E(\hat{P}_S) \right] \right\}, \quad (6)$$

tell que :

$$E(\hat{P}_i) = \frac{1}{(n_i + 1)(n - 1)} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n K_{(X_k, h)}(X_l) \right], \quad (7)$$

$E_i = \{0, \dots, i-1\}$ et $n_i = \text{card} \{X_k \in E_i\}$ pour $1 \leq k \leq n$.

4 Application numérique

L'objectif de la présente section est de comparer numériquement les performances de l'estimateur d'une matrice de transition associée à une chaîne de Markov décrivant un modèle de stock de type (R, s, S) lorsque le paramètre de lissage est sélectionné par (6) et par la méthode classique *UCV* et cela selon le noyau utilisé pour la construction de cet estimateur ($K \in \{\text{Poisson}; \text{Binomiale}; \text{Binomiale Négatif}; \text{Triangulaire}\}$).

Pour l'application numérique, dans un modèle $(R, s, S) = (1, 3, 6)$, nous avons considéré $m = 1000$ échantillons de taille $n \in \{100; 250; 500; 1000; 2000\}$ issus d'une distribution des demandes $f \in \{\text{Poisson}(5), \text{Géométrique}(1/6), \text{Binomiale}(12, 5/12)\}$.

Finalement, nos résultats nous permettent de pouvoir conclure d'une part que les paramètres de lissage sélectionnés via les normes matricielles nous fournissent, d'une manière générale, des estimateurs plus performants et d'autre part, que le choix du noyau est d'une grande importance où il est préférable d'utiliser le noyau Triangulaire et d'éviter le noyau Binomiale négative.

Références

- Bowman, A. W. (1984). An alternative method of cross-validation for the smoothing density estimates. *Biometrika* **71**, 553–560.
- Cherfaoui, M., M. Boualem, D. Aïssani, et S. Adjabi (2015). Choix du paramètre de lissage dans l'estimation à noyau d'une matrice de transition d'un processus semi-markovien. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **353**(3), 273–277.
- Kokonendji, C. C. et T. S. Kiessé (2011). Statistical methodology. *Journal of Nonparametric Statistics* **8**(6), 497–516.
- Kokonendji, C. C., T. S. Kiessé, et S. S. Zocchi (2007). Discrete triangular distributions and non-parametric estimation for probability mass function. *Journal of Nonparametric Statistics* **19**(6-8), 241–254.
- Rabta, B. et D. Aïssani (2005). Strong stability in an (r, s, s) inventory model. *International Journal of Production Economics* **97**(2), 159–171.
- Rudemo, M. (1982). Empirical choice of histograms and kernel density estimators. *Scandinavian Journal of Statistics* **9**, 65–78.

Summary

In this work, we have considered the discrete-kernel estimation of a transition matrix associated to a Markov chain describing an (R, s, S) inventory model. More precisely, we proposed to select the smoothing parameter in this situation by minimizing the matrix norm $\|\cdot\|_2$. Indeed, in a first place, we have developed a theoretical explicit form of the expression, derived from the matrix norm $\|\cdot\|_2$, to minimize in order to quantify the smoothing parameter. In a second place, based on the *UCV* method, we establish a practical expression of the smoothing parameter in question. Finally, in order to illustrate and support our proposal, a comparative numerical application is performed.

Estimation dans un modèle exponentiel généralisé en présence de censure progressive

AIDI Khaoula*, Seddik-Ameur N.**

*Université Badji Mokhtar Annaba, Algeria
khaoula.aidi@yahoo.fr,

Laboratoire de Probabilité et Statistique

**Université Badji Mokhtar Annaba, Algeria
Laboratoire de Probabilité et Statistique

Résumé. L'un des problèmes importants de la modélisation des données de fiabilité est celui des données manquantes ou données censurées. Divers auteurs se sont intéressés aux différents types de censure: censure gauche, censure droite, double censure, etc... .

La censure progressive, où l'expérimentateur retire, aléatoirement, un nombre déterminé d'unités après chaque défaillance, a attiré l'attention de beaucoup d'auteurs ces dernières années. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'estimation paramétrique dans quelques modèles exponentiels généralisés en présence de censure progressive

1 Introduction

Les distributions Weibull et gamma sont les distributions les plus utilisées pour modéliser les durées de vie et ceci est dû à leurs interprétations physiques et leur flexibilité. Néanmoins, la fonction de fiabilité de la distribution gamma ne peut être exprimée sous une forme explicite si le paramètre de forme n'est pas entier. Tandis que la convergence des estimateurs du maximum de vraisemblance pour la distribution Weibull est faible. Pour contourner ces inconvénients, une nouvelle distribution à deux paramètres ayant les mêmes caractéristiques que celles-ci, a été introduite par Gupta et Kundu (1999). Cette distribution appelée distribution exponentielle généralisée ou exponentielle exponentielle, a été étudiée par divers auteurs, Gupta et Kundu (1999, 2001, 2002); Raqab (2002), (2004), Raqab et Ahsanullah (2001), Zheng (2002). Ce modèle peut être considéré comme alternative au modèle gamma et au modèle Weibull dans de nombreuses situations. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'estimation paramétrique dans quelques modèles exponentiels généralisés en présence de censure progressive

2 Présentation du modèle

La distribution exponentielle généralisée de paramètre de forme α et de paramètre d'échelle λ et notée $GE(\alpha, \lambda)$, a pour fonction densité

$$f(x; \alpha, \lambda) = \alpha\lambda(1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$$

Estimation dans un modèle exponentiel généralisé en présence de censure progressive

La fonction de distribution cumulative est :

$$F(x; \alpha, \lambda) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha$$

et la fonction de survie, le taux de hasard sont donnés par :

$$S(x; \alpha, \lambda) = 1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha$$

$$H(x; \alpha, \lambda) = \frac{\alpha \lambda (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha}$$

3 Présentation graphique

La distribution exponentielle généralisée $GE(\alpha, \lambda)$ peut prendre différentes formes selon les valeurs du paramètre α . Pour montrer sa flexibilité, nous utilisons le logiciel R pour tracer les courbes correspondantes aux densités de probabilité et aux taux de hasard.

Densité de probabilité

On fixe le paramètre $\lambda = 1$ et on fait varier le paramètre α ($\alpha = 0.5$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha = 5$, $\alpha = 10$) les graphes sont représentés sur la FIG 1.

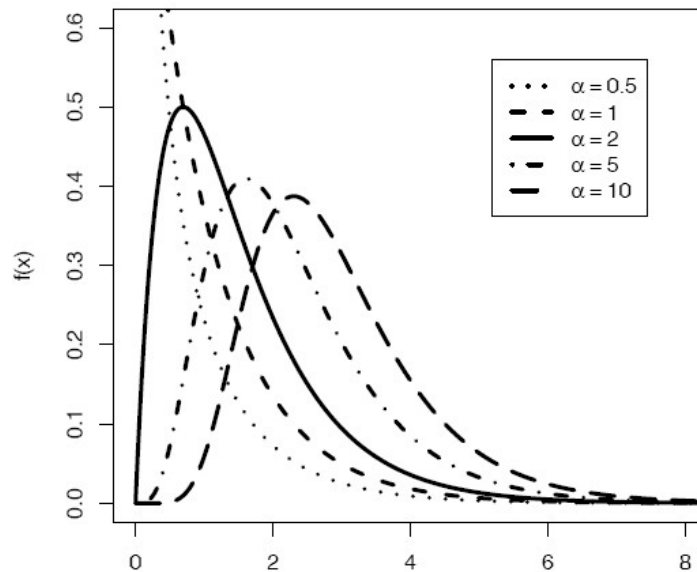


FIG. 1 –

Si le paramètre de forme $\alpha = 1$, on retrouve la distribution exponentielle
 si $\alpha > 1$, la distribution est unimodale,
 si $\alpha < 1$ la distribution est décroissante.

Fonction de hasard

On fixe le paramètre $\lambda = 1$ et on fait varier le paramètre α ($\alpha = 0.5, \alpha = 1, \alpha = 2, \alpha = 5, \alpha = 10$) les graphes sont représentés sur la FIG 2.

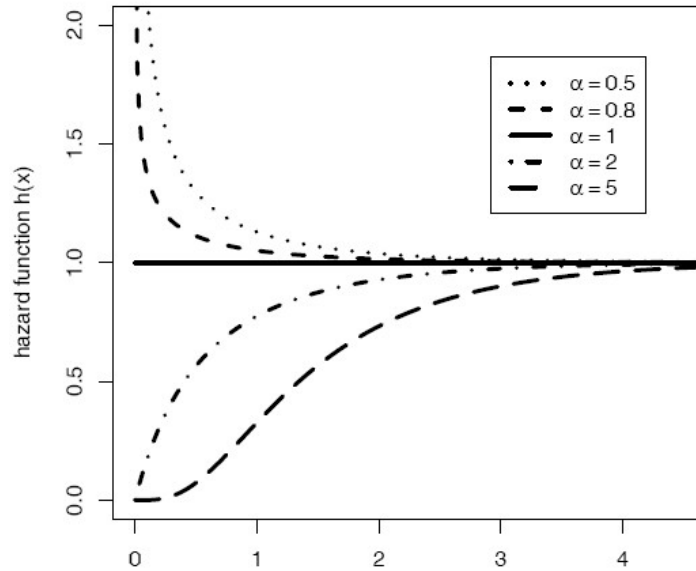


FIG. 2 –

lorsque le paramètre de forme $\alpha > 1$, la fonction du taux de panne est croissante
 décroissante lorsque $\alpha < 1$,
 et bien sûr constante quand $\alpha = 1$ (c'est la loi exponentielle).

4 Estimation des paramètres

Considérons X_1, X_2, \dots, X_n , un échantillon aléatoire de la loi exponentielle généralisée $EG(\alpha, \lambda)$,

La fonction de log-vraisemblance du modèle s'écrit :

$$L(\alpha, \lambda) = \ln(C(r)) + m \ln \alpha + m \ln \lambda + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\lambda x_i}) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \ln(1 - (1 - e^{-\lambda x_i})^\alpha)$$

et dès lors que la log-vraisemblance est dérivable, l'estimateur du maximum de vraisemblance annule le vecteur des scores :

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{m}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\lambda x_i}) - \sum_{i=1}^n \frac{(1 - e^{-\lambda x_i})^\alpha \ln(1 - e^{-\lambda x_i})}{1 - (1 - e^{-\lambda x_i})^\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{m}{\lambda} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}} - \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha x_i e^{-\lambda x_i} (1 - e^{-\lambda x_i})^{\alpha-1}}{1 - (1 - e^{-\lambda x_i})^\alpha} = 0$$

Puisque, nous ne pouvons pas trouver les formules explicites des estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres, nous utilisons alors des méthodes numériques telles que la méthode de Newton Raphson, la méthode de Monte Carlo, l'algorithme BB ou autres. Nous calculons les erreurs quadratiques moyennes de ces estimateurs pour étudier leur convergence.

Références

- [1] Gupta, R. D. and Kundu, D. (1999a) "Generalized Exponential Distributions", Australian and New Zealand Journal of Statistics, 41(2), 173 ± 188.
- [2] Gupta, R. D. and Kundu, D. (2001b), Generalized exponential distributions : different methods of estimation", Journal of Statistical Computation and Simulation. vol. 69, 315 - 338.
- [3] Gupta, R. D. and Kundu, D. (2002), Generalized exponential distributions : statistical inferences", Journal of Statistical Theory and Applications, vol. 1, 101 -118.
- [4] H. K. Yuen and S. K. Tse (1996), "Parameters Estimation for Weibull Distributed Lifetimes under Progressive Censoring with Random Removals," Journal of Statistical Com- putation

Summary

One of the important issues in modeling reliability data is that of missing data or censored data. Various authors have been interested in different types of censorship: left censorship, right censorship, double censorship, etc Progressive censorship, where the experimenter randomly removes a fixed number of units after each failure, has attracted the attention of many authors in recent years. In this work, we are interested in parametric estimation in some generalized exponential models in the presence of progressive censorship.

A kernel estimator of the conditional quantile function with functional explicatory variable under censored data

Fatima Akkal

Laboratory of Statistics and Stochastic Processes, University of Djillali Liabes, BP 89, Sidi Bel Abbes 22000, Algeria
akkalfatima22@yahoo.com

Abstract. In this work, we investigate the conditional quantile estimation of a randomly censored scalar response variable given a functional random covariate when the data are sampled from a stationary and ergodic process. A kernel-type estimator of the conditional quantile function is introduced. Then, a strong consistency rate of the estimator is established under some mild assumptions.

1 Introduction

Functional data analysis (FDA) is an important field of statistics that has received much attention in the last 20 years, and good overviews on this topic can be found in Ramsay and Silverman (2005) or Bosq (2000) in addition to Ferraty and Vieu (2006).

Quantile regression is a common way to describe the dependence structure between a response variable T and some covariate X . Many authors are interested in the estimation of the conditional quantile of a scalar response given a functional covariate. Ferraty et al. (2005) introduced a nonparametric estimator of the conditional quantile defined as the inverse of the conditional cumulative distribution function (df) when data are dependent. They stated its rate of almost complete consistency and used it to forecast the well-known El Nino time series and build a confidence prediction band. Ezzahrioui and Ould-Said (2008) established the asymptotic normality of the kernel conditional quantile estimator under an α -mixing assumption. Recently, Dabo-Niang and Laksaci (2012) provided the consistency in L^p norm of the conditional quantile estimator for functional dependent data.

2 The model

2.1 Conditional quantile under a random censorship

Consider $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ a sequence of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables, and suppose that they form a strictly stationary sequence of lifetimes. In the censorship situations, the lifetime T_i may not be directly observable. Instead, we observe only censored lifetimes of items under study. We assume that there exists a sample of i.i.d. censoring random variable (r.v) $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$ with common unknown continuous distribution function (df) G .

In the censored setup, the observed random variables are not couples $(T_i, X_i)_{1 \leq i \leq n}$, but rather the triplets $(Y_i, \delta_i, X_i)_{1 \leq i \leq n}$ with

$$Y_i = \min\{T_i, C_i\} \quad \text{and} \quad \delta_i = \mathbb{1}_{\{T_i \leq C_i\}}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

where $\mathbb{1}_A$ denotes the indicator function of the set A .

To follow the convention in biomedical studies, and as indicated before, we assume that $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$ and $(T_i, X_i)_{1 \leq i \leq n}$ are independent; this condition is plausible whenever the censoring is independent of the patients modality.

Let (X, T) be $E \times \mathbb{R}$ -valued random elements, where E is some semi-metric abstract space. Denote by $d(\cdot, \cdot)$ a semi-metric associated with the space E . Suppose now that we observe a sequence $(X_i, T_i)_{i \geq 1}$ of copies of (X, T) that is assumed to be stationary and ergodic. For $x \in E$, we denote the conditional probability distribution function (df) of T given $X = x$ by

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t|x) = \mathbb{P}(T \leq t | X = x).$$

We denote the conditional quantile, of the order $\alpha \in (0, 1)$, of T given $X = x$, by

$$q_\alpha(x) = \inf\{t : F(t|x) \geq \alpha\}.$$

We suppose that, for any fixed $x \in E$, $F(\cdot|x)$ is continuously differentiable real function and admits an unique conditional quantile.

For any fixed $\alpha \in (0, 1)$, the α -th conditional quantile, $q_\alpha(x)$, satisfies the following equation:

$$F(q_\alpha(x)|x) = \alpha.$$

2.2 A nonparametric estimator of the conditional quantile

It is clear that an estimator of $q_\alpha(x)$ can easily be deduced from an estimator of $F(t|x)$. Let us recall that in the case of complete data, a well-known kernel estimator of the conditional df is given by

$$F_n(t|x) = \frac{\sum_{i=1}^n K(h_{n,K}^{-1}d(x, X_i))H(h_{n,H}^{-1}(t - T_i))}{\sum_{i=1}^n K(h_{n,K}^{-1}d(x, X_i))},$$

where $K(\cdot)$ is a real-valued kernel function, $H(\cdot)$ a cumulative df of the response variable T and $h_K = h_{n,K}$ (resp. $h_H = h_{n,H}$) a sequence of positive real numbers which decrease to zero as n tends to infinity.

Now, we consider a "pseudo-estimator" of $F(t|x)$ given by

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(t|x) &= \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i \bar{G}^{-1}(Y_i) K(h_K^{-1}d(x, X_i)) H(h_H^{-1}(t - Y_i))}{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(x, X_i))} \\ &= \frac{\tilde{F}_n(x, t)}{\ell_n(x)}, \end{aligned}$$

where

$$\tilde{F}_n(x, t) = \frac{1}{n\mathbb{E}(\Delta_1(x))} \sum_{i=1}^n \delta_i \bar{G}^{-1}(Y_i) H(h_H^{-1}(t - Y_i)) \Delta_i(x),$$

and

$$\ell_n(x) = \frac{1}{n\mathbb{E}(\Delta_1(x))} \sum_{i=1}^n \Delta_i(x),$$

with $\Delta_i(x) = K(d(x, X_i)/h_K)$.

Since $\bar{G}(\cdot) = 1 - G(\cdot)$ is unknown in practice, one can estimate it using the Kaplan and Meier (1958) estimator defined as

$$\bar{G}_n(t) = 1 - G_n(t) \begin{cases} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1 - \delta_{(i)}}{n - i + 1}\right)^{\mathbb{1}_{\{Y_{(i)} \leq t\}}}, & \text{if } t < Y_{(n)}, \\ 0 & \text{Otherwise,} \end{cases}$$

where $Y_{(1)} < Y_{(2)} < \dots < Y_{(n)}$ are the order statistics of $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ and $\delta_{(i)}$ is concomitant with $Y_{(i)}$.

Therefore, a kernel-based estimator of $F(t|x)$ is given by

$$\hat{F}_n(t|x) = \frac{\hat{F}_n(x, t)}{\ell_n(x)},$$

where

$$\hat{F}_n(x, t) = \frac{1}{n\mathbb{E}(\Delta_1(x))} \sum_{i=1}^n \delta_i \bar{G}_n^{-1}(Y_i) H(h_H^{-1}(t - Y_i)) \Delta_i(x).$$

Finally, a natural estimator of $q_\alpha(x)$ is given by

$$\hat{q}_{n,\alpha}(x) = \inf\{y : \hat{F}_n(y|x) \geq \alpha\},$$

which satisfies:

$$\hat{F}_n(\hat{q}_{n,\alpha}(x)|x) = \alpha.$$

3 Main results

Theorem 1 *Under some hypotheses, we have as n goes to infinity*

$$\sup_{t \in \mathcal{S}_R} |\hat{F}_n(t|x) - F(t|x)| = O_{a.s.}(h_K^{\beta_1} + h_H^{\beta_2}) + O_{a.s.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}}\right).$$

Theorem 2 *Under some hypotheses, we have as n goes to infinity*

$$|\hat{q}_{n,\alpha}(x) - q_\alpha(x)| = O_{a.s.}(h_K^{\beta_1} + h_H^{\beta_2}) + O_{a.s.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}}\right).$$

References

- Bosq, D. (2000). *Linear Processes in function spaces: Theory and applications. Lecture notes in statistics*. Berlin: Springer Verlag.
- Chaouch, M. and S. Khardani (2015). Randomly censored quantile regression estimation using functional stationary ergodic data. *Journal of nonparametric statistics* 27, 65–87.
- Dabo-Niang, S. and A. Laksaci (2012). Nonparametric quantile regression estimation for functional dependent data. *Communications in statistics-Theory and methods* 41, 1254–1268.
- Ezzahrioui, M. and E. Ould Said (2008). Asymptotic results of a nonparametric Conditional quantile estimator for functional time series. *Communications in statistics-Theory and methods* 37, 2735–2759.
- Ferraty, F. , A. Rabhi, and P. Vieu (2005). Conditional quantiles for dependent functional data with application to the climatic el ni no phenomenon. *Sankhya* 67, 378–398.
- Ferraty, F. and P. Vieu (2006). *Nonparametric functional data analysis: theory and practice*. New York: Springer.
- Ramsay, J. O. and B. W. Silverman (2005). *Functional data analysis (2nd ed)*. New York: Springer Verlag.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions l'estimation du quantile conditionnelle d'une variable réponse censuré aléatoirement et a valeurs dans \mathbb{R} (scalaire) étant donné une covariable aléatoire fonctionnelle, où les données sont échantillonnées d'un processus stationnaire et ergodique. Un estimateur de type noyau de la fonction quantile conditionnelle est introduit. Ensuite, la vitesse de convergence de l'estimateur est établi sous certaines conditions.

Estimators of continuous semi-Markov process

Chafiàa ayhar*,

*Laboratory of Stochastic Models, Statistics and Applications, University Dr.Moulay Tahar, Bp 138,
Saida 20000, Algeria.
ayharchafiaa@yahoo.com,

Résumé. Dans ce travail, [4] confrontés au problème de l'estimation des éléments qui définissent un processus homogène semi-markovien. Étant donné le chemin d'échantillonnage observé du processus dans un intervalle fini $(0, M]$, il est possible de construire des estimateurs non paramétriques des entrées du noyau semi-markovien et de ses dérivés. Ces estimateurs présentent de bonnes propriétés comme consistence.

1 Introduction

Nonparametric estimation of the local characteristics defining a Semi-Markov process $\mathcal{Z} = \{Z_t, t \geq 0\}$ is an important issue in the study of renewal processes. Observing $\{Z_t, t \in [0, M]\}$ is equivalent to observing

$$\{N(M), J_0, J_1, \dots, J_{N(M)}, X_1, \dots, X_{N(M)}\},$$

and, from the observed trajectory $(n, j_0, \dots, j_n, x_1, \dots, x_n)$, one can construct some empirical estimators which have good asymptotic properties (for $M \rightarrow \infty$). Nonparametric statistical inference for semi-Markov processes in continuous-time is performed in several works, [2] studied efficiency of empirical estimators for linear functionals in the case of general state space. One problem with the empirical distribution function is that it is always a discontinuous function. Kernel smoothing avoids discontinuities in the empirical function. [4] are also focused on the L1-distance to derive consistency properties of our estimates and then we make use of this Theorem, [4] start from the kernel estimators of the Radon-Nikodym derivatives of the Semi-Markov kernel (denoted $\hat{q}_{ij}(t; M)$).

The outline of the work is as follows. In Section 2 we study empirical estimators of the elements of the semi-Markov kernel and give their asymptotic properties. In Section 3 we construct kernel-type estimators of the Radon-Nikodym derivatives of the semi-Markov kernel and give their L1 convergence properties.

2 Empirical estimators and their L1 convergence

2.1 Notation and assumptions

The process $Z = Z_t, t \geq 0$ is defined by $(J_n, S_n)_{n=0,1,\dots}$:

$$Z_t = J_n \text{ if } S_n \leq t \leq S_{n+1},$$

and the Semi-Markov kernel

$$Q(t) = \{Q_{ij}(t), i, j \in E\}, t = 0$$

Where

- E , the state space. We suppose E to be finite, with $|E| = s$.
- The stochastic process $J = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ with state space E for the system state at the n th jump, $\mathbb{N} = 0, 1, \dots$
- The stochastic process $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ with state space \mathbb{N} for the n th jump. We suppose $S_0 = 0$ and $0 < S_1 < S_2 < \dots < S_n < S_{n+1} < \dots$
- The stochastic process $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ with state space $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - 0$ for the sojourn time X_n in state J_{n-1} before the n th jump. Thus, $X_n = S_n - S_{n-1}$, for all $n \in \mathbb{N}^*$.
- Let $\nu = (\nu_i, i \in E)$ be the stationary distribution
- The measures associated with the Semi-Markov kernel, $Q_{ij}(\cdot)$, are given by

$$Q_{ij}(t) = P(J_{n+1} = j, X_{n+1} \leq t \mid J_0, \dots, J_n = i, X_1, \dots, X_n)$$

- The transition matrix $p = (p_{ij})_{i,j \in E}$ of the embedded Markov chain $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is defined by

$$p_{ij} := P(J_{n+1} = j \mid J_n = i), i, j \in E, n \in \mathbb{N}.$$

We do not allow virtual transitions, i.e. we take $p_{ii} = 0$ for all $i \in E$.

Let

Assumption 1 : $J_n, n = 0, 1, \dots$ is an ergodic Markov chain, with stationary distribution ν .

Assumption 2 : The mean sojourn times in the states are finite and there are no degenerate distributions, i.e., $0 < m_i < \infty, i \in E$.

Assumption 3 : $Q_{ij}(\cdot)$ are absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure, and let $q_{ij}(t)$ be the corresponding RadonNikodym derivative,

$$\int_0^\infty q_{ij}(t) dt = p_{ij} = 1.$$

The conditional distribution function associated to the sojourn time in state i before going to state j , defined by

$$F_{ij}(t) = P(X_{n+1} \leq t \mid J_n = i, J_{n+1} = j) = Q_{ij}(t)/p_{ij}$$

for $p_{ij} \neq 0$, has a probability density $f_{ij}(t)$, such that

$$F_{ij}(t) = \int_0^t f_{ij}(y) dy = \frac{1}{p_{ij}} \int_0^t q_{ij}(y) dy$$

2.2 The empirical estimator of the SemiMarkov kernel

Observing $\{Z_t, t \in [0, M]\}$ is equivalent to observing

$$\{N(M), J_0, J_1, \dots, J_{N(M)}, X_1, \dots, X_{N(M)}\},$$

and let $(n, j_0, \dots, j_n, x_1, \dots, x_n)$ be the observed trajectory.

where $N(M) := \max\{n \mid S_n = M\}$, is the discrete-time counting process of the number of jumps in $\subset N$ and $u_M = M - S_{N(M)}$,

For all $i, j \in E$ and $k = M$, we define :

- (i) $N_i(M) := \sum_{n=0}^{N(M)-1} 1_{\{J_n=i\}}$: the number of visits to state i , up to time M ;
- (ii) $N_{ij}(M) := \sum_{n=1}^{N(M)} 1_{\{J_{n-1}=i, J_n=j\}}$: the number of transitions from i to j , up to time M ;
- (iii) $N_{ij}(K, M) := \sum_{n=1}^{N(M)} 1_{\{J_{n-1}=i, J_n=j, X_n=k\}}$: the number of transitions from i to j , up to time M , with sojourn time in state i equal to k , $1 \leq k \leq M$.

Let us define the empirical estimator of the semi-Markov kernel, based on the observation in the time interval $[0, M]$, by the following relation

$$\hat{Q}_{ij}(t, M) = \frac{1}{N_i(M)} \sum_{k=1}^{N(M)} \mathbb{I}_{\{J_{k-1}=i, J_k=j, X_k \leq t\}}$$

We assume some appropriate regularity conditions on the semi-Markov process $\mathcal{Z} = \{Z_t, t \geq 0\}$, which are :

- finite state space ;
- irreducible embedded Markov chain ; and,
- finite sojourn time in all states.

proposition 2.1. [4] *The empirical estimator $\hat{Q}_{ij}(t, T)$ is uniformly strongly consistent :*

$$\max_{i,j} \sup_{t \in [0, M]} |\hat{Q}_{ij}(t, M) - Q_{ij}(t)| \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \text{ (a.s.)}$$

proposition 2.2. [4] *For all $i, j \in E$ and $t > 0$ fixed, $\sqrt{N_i(t)} \left(\hat{Q}_{ij}(t, M) - Q_{ij}(t) \right)$ converges in law, for $T \rightarrow \infty$, to a zero mean normal random variable with variance $Q_{ij}(t)(1 - Q_{ij}(t))$.*

2.3 Estimators of the distributions of the embedded Markov chain

We define

$$\hat{\nu}_i(M) = \frac{N_i(M)}{N(M)}, \quad i \in E$$

$$\hat{p}_{ij}(M) = \frac{N_{ij}(M)}{N_i(M)}, \quad i, j \in E$$

proposition 2.3. [4] For all i fixed, the estimator $\hat{\nu}_i$ is asymptotically unbiased and strongly consistent :

$$E(\hat{\nu}_i) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \nu_i,$$

and

$$\hat{\nu}_i \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \nu_i \text{ (a.s.)}$$

proposition 2.4. [4] Let us denote $\theta = (p_{11}, \dots, p_{1d}, \dots, p_{d1}, \dots, p_{dd})^t$ and $\hat{\theta}_{N(M)} = (\hat{p}_{11}, \dots, \hat{p}_{1d}, \dots, \hat{p}_{d1}, \dots, \hat{p}_{dd})^t$. Then $\hat{\theta}_{N(M)}$ is consistent,

$$\hat{\theta}_{N(M)} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \theta \text{ (a.s.)},$$

3 Kernel Estimators and their L1 Convergence

3.1 The kernel estimators of the Radon-Nikodym derivatives of the Semi-Markov kernel

Let us denote by X_{ijk} the k - th sojourn time in state i when the next visited state is j . The kernel estimator of the conditional probability density is

$$\hat{f}_{ij}(t, M) = \frac{1}{N_{ij}(T)} \sum_{k=1}^{N_{ij}(M)} \frac{1}{h_{ij,M}} K\left(\frac{t - X_{ijk}}{h_{ij,M}}\right), \text{ for } t \geq 0, \tag{1}$$

where K is a kernel function, which usually is a symmetric density function; and $h_{ij,T}$ is a smoothing parameter, for each pair of states $i, j \in E$. The kernel estimator of the Radon-Nikodym derivative $q_{ij}(t)$ is

$$\hat{q}_{ij}(t, M) = \hat{p}_{ij} \cdot \hat{f}_{ij}(t, M) = \frac{N_{ij}(T)}{N_i(M)} \cdot \hat{f}_{ij}(t, M),$$

$$\hat{q}_{ij}(t, M) = \frac{1}{N_i(M)} \sum_{k=1}^{N_{ij}(M)} \frac{1}{h_{ij,M}} K\left(\frac{t - X_{ijk}}{h_{ij,M}}\right), \text{ for } t \geq 0. \tag{2}$$

Because L_1 is the natural space for densities, we are interested in the L_1 -distances

$$\hat{V}_{ij}^M = \int_0^\infty | \hat{f}_{ij}(t, M) - f_{ij}(t) | dt, \tag{3}$$

$$\hat{D}_{ij}^M = \int_0^\infty | \hat{q}_{ij}(t, M) - q_{ij}(t) | dt \tag{4}$$

(the L_1 -distance is always well defined and it is invariant under monotone transformations of the coordinate axes). Let us consider

$$\hat{f}_{ij}^0(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{h_{ij,n}} K\left(\frac{t - X_{ijk}}{h_{ij,n}}\right)$$

and, as above,

$$\hat{f}_{ij}(t, M) = \frac{1}{N_{ij}(M)} \sum_{k=1}^{N_{ij}(M)} \frac{1}{h_{ij,M}} K\left(\frac{t - X_{ijk}}{h_{ij,M}}\right)$$

Lemma 3.1. [4] *If $\hat{f}_{ij}^0(t) \xrightarrow{a.s.} f_{ij}(t)$ as $n \rightarrow \infty$, then*

(a)

$$\hat{f}_{ij}(t, M) \xrightarrow{a.s.} f_{ij}(t), \quad \text{as } T \rightarrow \infty,$$

provided that $N_{ij}(T) \rightarrow \infty$ as $T \rightarrow \infty$; and

(b)

$$\int \left| \hat{f}_{ij}(t, M) - f_{ij}(t) \right| dt \xrightarrow{a.s.} 0.$$

proposition 3.1. [4] *For each $i, j \in E$, $V_{ij}^M \rightarrow 0$ and $D_{ij}^M \rightarrow 0$ almost sure, for $T \rightarrow \infty$, if and only if*

$$\lim_{M \rightarrow \infty} h_{ij,M} = 0,$$

for all $i, j \in E$.

Références

- [1] Çinlar, E., 1975, Introduction to Stochastic Processes (NY : Prentice Hall).
- [2] Greenwood PE, Wefelmeyer W. Empirical estimators for semi-Markov processes. Math. Methods Statist. 1996 ; 5(3) : 299315.
- [3] Limnios, N. and Opri, san, G., 2001, Semi-Markov Processes and Reliability (Boston : Birkhäuser).
- [4] M. Dumitrescu, M.L. Gàimizb and N. Limniosc, Minimum divergence estimators for the RadonNikodym derivatives of the Semi-Markov kernel, April 30, 2014

Summary

In this work [4] face the problem of estimating the elements that define a homogeneous semi-Markov process. Given an observed sample path of the process in a finite interval $(0, M]$, nonparametric estimators of the entries of the semi-Markov kernel and its derivatives can be constructed. These estimators exhibit good properties as consistency.

Bivariate copulas statistics and semi-parametric estimation

Nesrine Idiou*, Fatah Benatia** Brahim Brahimi***

*** Mohamed Khider Biskra, 07000 Biskra Algérie

* nesrine.idiou@univ-biskra.dz

** fatahbenatia@hotmail.com

*** brah.brahim@gmail.com

Résumé. Modeling copula dependence and estimating them of complete data is one of the most important areas of research. We will mention the methods of moments, L-moments and T.L-moments, recently developed by Brahimi et al (2012) (3) which they proposed an estimator of a parametric copula by the method of moments, as a logical continuation of the method of moments Benatia et al(2012) (2) have proposed also a new estimator, using the same classical procedure but for L-moments. After truncation of extreme values, using the T.L-moments introduced by Elamir and Seheult (2003) (1), China and Benatia (2017) (4) have proposed a new unbiased and asymptotically normal estimator, whose advantage is to be valid even for non-existent or infinite moments distributions (Cauchy, beta ...). One of the prospects for this work is the application of these results to the case of incomplete data.

1 Introduction

The theory of copula appeared in the 1960s, as a measure of dependence between two or more variables, thanks to the theorem of Sklar (1959) we put in relation the marginal laws and the joined law of a copula (a vector), their contributions in different fields is no longer to be demonstrated in statistics, finance, actuarial science, biology, hydraulics, etc.

Estimating the parameters of these copulas is one of the main topics to address in multivariate statistical analysis. In recent years, studies on copula and their modeling have been rapidly developed, so they have been developed in the literature, they have already been called pseudo-maximum likelihood and the inversion methods.

We will present in this work the methods of moments, L-moments and TL-moments, recently developed by Brahimi (2012) et al (3), Benatia et al, (2011) (2) and China and Benatia (2017) (4).

The application of these methods to real data and the comparison of results to those obtained by conventional methods One of the prospects for this work is the application of these results to the case of incomplete data.

2 The methods used

The theory of copula appeared in the 1960s as a measure of dependency a bivariate copula is a function. a bivariate copula is a function C of $I = [0, 1]^2$ in I having the following properties :

- (1) $C(u, 0) = C(0, u) = 0, \forall u, v \in I$.
- (2) $C(u, 1) = C(1, u) = u, \forall u, v \in I$.
- (3) $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) \geq 0, \forall u_1, v_1, u_2, v_2 \in I$ such that $u_1 \leq u_2$ and $v_1 \leq v_2$.

One of the most important theorems about this domain is Sklar's theorem which puts into relationship joint distribution and its marginal

$$H(x, y) = C(F(x), F(y)).$$

2.1 Method of moments

Brahimi et al (2012) proposed an estimator of a parametric copula C_θ by the method of moments. As with the classical method, the parameter estimator \hat{I}_k is obtained by equalizing the theoretical moments of order k at empirical moments of the same order :

$$M_k(C_\theta) = E(C_\theta(u)^k) = \int_{[0,1]^d} \hat{C}_n(u)^k d\hat{C}_n(u)$$

Such that $C_\theta(u)$ is a copula of the vector u

2.2 L-moments method

As a logical continuation of the method of moments, Benatia et al (2011) proposed a new estimator, using the same classical procedure but for L-moments defined by :

$$\lambda_k(C_\theta) = \int_{I^d} C_\theta(u) P_{k-1}(K_{c_\theta}(C_\theta(u))) dK_{c_\theta}(C_\theta(u)),$$

Such that $K_{c_\theta}(C_\theta(u))$ the distribution function of the r.v $C_\theta(u)$ and $P_{k-1}(x)$ are the polynomials of Legendre with $k = 1, 2, \dots$

2.3 TL-moments method

After truncation of extreme values, using the T.L-moments introduced by Elamir and Seheult (2003). China and Benatia (2017) have proposed a new unbiased and asymptotically normal estimator, whose advantage is to be valid even for non-existent or infinite moments distributions (Cauchy, beta ...).

3 Results and discussions

If we talk about the first method we have seen before we find that to evaluate and compare the performance of CM's estimator with the PML and (τ, ρ) -inversion estimators, a simulation study is carried out by considering the transformed bivariate Gumbel copula family . The evaluation of the performance is based on the bias and the RMSE defined as follows : Biases

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta} - \theta)$$

RMSE = $\left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N(\hat{\theta}-\theta)} (\hat{\theta} - \theta)^2 \right\}^{1/2}$ where $(\hat{\theta})$ is an estimator (from the considered method) of θ
 For $N = 1000$
 and $n = 30, 50, 100, 200$ obtain the CM-estimator for $i = 1, \dots, N$ and if we consider Kendall's τ as a dependence measure, then we should select values for copula parameters that correspond to specified values of τ by means of the equation :

$$\tau(\alpha, \beta) = 4 \int_{[0,1]^2} C_{\alpha,\beta}(u, v) dC_{\alpha,\beta}(u, v) - 1$$

The selected values of the true parameters are summarized in table of Figure.1.

$\tau = 0.5$			
$\alpha = 0.5$		$\beta = 1.6$	
Bias	RMSE	Bias	RMSE
-0.051	0.654	0.039	0.481
-0.043	0.487	0.018	0.367
-0.023	0.350	0.012	0.262
-0.009	0.243	0.006	0.180
-0.007	0.155	0.003	0.117

FIG. 1 – The bias and RMSE of the CM estimator.

n	$\tau = 0.01$				$\tau = 0.5$				$\tau = 0.8$				CPU
	$\alpha = 0.1$		$\beta = 1.059$		$\alpha = 0.5$		$\beta = 1.6$		$\alpha = 0.9$		$\beta = 3.45$		
	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE	
30	-0.081	0.330	0.032	0.180	-0.051	0.654	0.039	0.481	-0.073	0.907	-0.372	1.130	22.013 sec
50	-0.046	0.253	0.022	0.139	-0.043	0.487	0.018	0.367	-0.032	0.723	0.261	0.916	49.563 sec
100	-0.026	0.173	0.009	0.097	-0.023	0.350	0.012	0.262	-0.027	0.548	-0.089	0.733	2.789 mins
200	-0.011	0.122	0.002	0.064	-0.009	0.243	0.006	0.180	0.003	0.386	-0.056	0.506	10.370 mins
500	-0.005	0.075	0.000	0.041	-0.007	0.155	0.003	0.117	-0.007	0.241	-0.026	0.323	1.035 hours

FIG. 2 – Bias and RMSE of CM estimator of two-parameter transformed Gumbel copula.

	$\tau = 0.01$				$\tau = 0.2$				$\tau = 0.5$			
	$\alpha = 0.1$		$\beta = 1.059$		$\alpha = 0.2$		$\beta = 1.137$		$\alpha = 0.5$		$\beta = 1.6$	
	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE
$n = 30$												
CM	-0.082	0.313	0.039	0.190	-0.064	0.642	0.033	0.486	-0.068	0.567	0.074	0.466
PML	-0.067	0.068	-0.485	0.486	-0.117	0.128	-0.561	0.568	0.078	0.394	-0.426	0.594
$\rho-\tau$	1.236	2.895	-0.213	1.775	1.101	2.984	-0.913	1.641	-0.556	2.312	-0.975	1.142
$n = 50$												
CM	-0.046	0.245	-0.021	0.141	-0.052	0.468	0.029	0.357	-0.037	0.506	0.015	0.364
PML	-0.060	0.062	-0.478	0.482	0.102	0.112	-0.516	0.526	-0.072	0.240	-0.472	0.556
$\rho-\tau$	1.115	2.033	-0.289	1.378	1.035	2.537	-0.354	1.341	-0.478	2.110	-0.952	1.021

FIG. 3 – Bias and RMSE of CM, PML and $\tau-\rho$ estimators of two-parameter transformed Gumbel copula.

Titre court de votre communication en 10 mots maximum

In conclusion, the CM based estimation method performs well for the chosen model. Furthermore, its usefulness in the weak dependence case particularly makes it a good candidate for statistical tests of independence.

In the cas of the third method we select many different sample sizes with $n = 30 ; 50$ and 200 to assess their influence on the bias and RMSE of the estimators, and we choose different values of dependence parameters, according the degree of dependence calculated by Spearman's rho, that is consider three cases, corresponding to weak, moderate and strong dependence and marginalis parameters. we can summarize the procedure of simulation as follows :

- Determine the value of the parameters, sample sizes n and the number of simulated Samples $N = 1000$.
- Simulate a sample (u_1, u_2, \dots, u_n) of size n from the copula C_a (FGM and Gumbel copulas).
- Compare the parameter estimates with the true parameters by computing the biases and RMSE.

Sparman ρ	FGM		Gumbel	
	α_1	α_2	ρ	β
0.001	0.1	0	0.01	1.01
0.208	0.4	0.9	0.5	1.6
0.427	0.941	1.445	0.88	3.45

FIG. 4 – True parameters of FGM copula and Gumbel copula used for the simulation study

$\rho = 0.001$								
n	$\alpha_1 = 0.1$		$\alpha_2 = 0$		$\mu = -1$		$\sigma = 0.5$	
	Biais	RMSE	Biais	RMSE	Biais	RMSE	Biais	RMSE
30	1.600	0.620	1.005	0.552	-0.820	0.510	0.340	0.200
50	1.320	0.430	0.956	0.462	0.610	0.420	0.250	0.105
200	0.507	0.306	0.596	0.382	0.412	0.201	0.210	0.100
$\rho = 0.208$								
n	$\alpha_1 = 0.4$		$\alpha_2 = 0.9$		$\mu = -1$		$\sigma = 0.5$	
	Biais	RMSE	Biais	RMSE	Biais	RMSE	Biais	RMSE
30	0.650	0.340	0.493	0.330	0.613	0.312	0.260	0.201
50	0.520	0.250	0.402	0.250	0.512	0.212	0.120	0.098
200	0.430	0.200	0.360	0.335	0.200	0.100	0.101	0.055
$\rho = 0.941$								
n	$\alpha_1 = 0.941$		$\alpha_2 = 1.445$		$\mu = -1$		$\sigma = 0.5$	
	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE
30	0.420	0.301	-1.111	0.420	-0.111	0.076	0.200	0.121
50	0.340	0.210	-0.487	0.357	-0.0780	0.069	0.192	0.098
200	0.201	0.140	-0.250	0.220	0.065	0.032	0.079	0.052

FIG. 5 – Bias, RMSE of the dependence and margins estimator of FGM copula with cauchy margins

$\rho = 0.01$						
n	$\beta = 1.01$		$\gamma = 1.5$		$\kappa = 3$	
	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE
30	-0.339	0.276	0.760	0.520	0.811	0.650
50	0.205	0.110	0.494	0.320	0.540	0.320
200	-0.167	0.108	0.201	0.212	0.254	0.214
$\rho = 0.5$						
n	$\beta = 1.6$		$\gamma = 1.5$		$\kappa = 3$	
	Bias	RMSE	Bias	RMSE	Bias	RMSE
30	-0.320	0.280	0.420	0.213	0.413	0.376
50	-0.212	0.210	0.315	0.279	0.325	0.301
200	-0.120	0.100	0.202	0.201	0.119	0.260
$\rho = 0.8$						
n	$\beta = 3.45$		$\gamma = 1.5$		$\kappa = 3$	
	Biais	RMSE	Biais	RMSE	Biais	RMSE
30	0.116	0.250	0.210	0.450	0.222	0.310
50	0.109	0.131	0.111	0.320	0.09	0.150
200	0.06	0.110	0.054	0.215	0.06	0.115

FIG. 6 – Bias, RMSE of the dependence and margins estimator of Gumbel copula with pareto margins.

4 Conclusion

The modeling of copula dependence and their estimations by the different methods presented above allows to better measure the dependence between two variables or more, In this study it was concluded that :

- The main advantage of the method of moments is that it provides the estimators with explicit forms. This is not the case for other methods that require numerical procedures leading to possible runtime and imprecision problems.
- Moment and moment methods have practical utility since they are based on the use of empirical estimators of order statistics.
- The advantage of the method of TL.moments is to remain valid even for non-existent or infinite moment distributions (Cauchy, beta ...).
- These works concern the comparison of methods with real data, a perspective is to study the weighted multiple regression for the semi parametric estimation of the copulae in general and the Archimedean family in particular.

Références

- [1] Elamir, E.A.H, Seheult.A.H. Trimmed L-moments.Computational statistics. 299-314, 2003.
- [2] Benatia.F et al. A semiparametric estimation procedure for multi-parameter Archimedean copulas based on the L-moments method. Africa Statistika, 335-345, 2011.
- [3] Brahim.B et al. Semi parametric estimaion of copula models based on the method of moments. Statistical methodology, NumÃ©ro : 467-477, 2012.
- [4] Benatia.F, Chine.A.Bivariate copulas estimation using the trimmes L-moments methode. Africa Statistika, 1185-1197, 2017.

Titre court de votre communication en 10 mots maximum

Summary

Donner la traduction anglaise du résumé dans le préambule avec la commande `\summary{Your abstract ...}`

L'estimation du paramètre de fitness

Sabrina BOUGHRARA*

*Department of Mathematics, University Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou 15000, Algeria
sabrinstat@hotmail.fr

Résumé. Les observations de Luria et Delbrück sur la multiplication des cellules "Escherichia Coli" conduisent à considérer le modèle de division cellulaire avec mutation. L'apparition des mutantes au bout d'un certain temps observe les clones de mutants, l'étude de nombre final de cellules cancéreuses (mutantes) revient à étudier la taille des clones de mutants qui dépend principalement de paramètre de fitness.

1 Introduction

Les observations de Luria et Delbrück en 1943 (Luria.S.E. et Delbrück.M, 1943) ont rapporté une expérience sur la multiplication des cellules "Escherichia Coli". Le modèle de division cellulaire considéré est celui de la division avec mutation. Une cellule normale peut se diviser en une cellule normale et une cellule mutante avec la probabilité p ou en deux cellules normales avec la probabilité $1 - p$, $0 < p < 1$. Chaque cellule mutante se divise en deux cellules mutantes, les durées de développement sont indépendantes et exponentiellement distribuées.

Dans le modèle de Luria-Delbrück, les observations conduisent à supposer que le nombre de mutations à l'instant t , M_t est une variable de Poisson de paramètre α_t , c'est à dire le processus de mutation est un processus de Poisson d'intensité α_t . En pratique, les divisions cellulaires sont très nombreuses, et la probabilité qu'une de ces divisions conduise à une mutation est faible, ce qui justifie une approximation poissonnienne pour le nombre de mutations survenant pendant un temps d'observation donné. L'apparition d'une cellule mutante au bout d'un certain temps nous conduit à un clone de mutants qui se développe selon une loi exponentielle de taux unitaires.

Considérons $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots$ les instants de mutations, $X_t^{s_i}$ le nombre de cellules mutantes dans une colonie issues de la cellule i à l'instant t , avec $t > s_i$ et $Y_t = \sum_{i=1}^{M_t} X_t^{s_i}$ est le nombre final de cellules mutantes à l'instant t . La loi de Y_t est nommée loi de Luria-Delbrück, elle est définie par la fonction génératrice suivante :

$$g_{\alpha, \rho}(z) = \exp\{\alpha(h_\rho(z) - 1)\}, z \in [0, 1],$$

avec :

- h_ρ est la fonction génératrice de $X_t^{s_i}$.
- ρ est le rapport des taux de croissance des cellules mutantes et les cellules normales.
- α représente le nombre moyen de mutations à l'instant t .

$g_{\alpha,\rho}$ est une loi de Poisson composée de mélange exponentielle et loi géométrique et selon les grands décomptes apparaissent dans les données la loi de Y_t est une loi à queue lourde, d'indice ρ .

L'étude de la taille de clone de mutants $X_t^{s_i}$ revient à l'estimer le paramètre de fitness ρ , pour cela on utilise la méthode de la fonction génératrice qui a été proposée par (Rémillard.B. et Theodorescu.R, 2000) pour estimer les paramètres de la loi de Poisson composée, elle a été introduite par d'autres auteurs citant (Hamon et Ycart, 2012) pour l'estimation du couple (α, ρ) .

L'arbre binaire La croissance d'une population peut être schématisée sous la forme d'un arbre binaire où une cellule est représentée par une branche dont la taille correspond à la durée de développement de la cellule. Les embranchements correspondent alors aux événements de divisions. La figure suivante représente la division cellulaire dans le cas où la distribution du temps de division est log *-normale*. Les branches rouges représentent les cellules matantes les autres correspondent aux cellules normales.

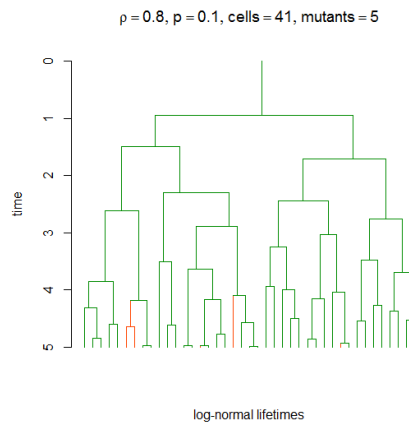


FIG. 1 – *Arbre binaire.*

2 La méthode de la fonction génératrice

Nous disposons d'un échantillon $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de la même fonction génératrice $g_{\alpha,\rho}$, avec

$$g_{\alpha,\rho}(z) = \exp \{ \alpha (h_\rho(z) - 1) \},$$

avec h_ρ est la fonction génératrice de la distribution de Yule, c'est la distribution de clone de mutants, elle est une loi à queue lourde.

Pour tout $0 < z_1 < z_2 < 1$, $\exists f_{z_1, z_2}$ une fonction continue et strictement monotone, tel que :

$$\hat{\rho}_n(z_1, z_2) = f_{(z_1, z_2)}^{-1}(\hat{y}_n),$$

avec

$$\hat{y}_n(z_1, z_2) = \frac{\log(\hat{g}_n(z_1))}{\log(\hat{g}_n(z_2))}.$$

où on remarque que l'estimation de ρ ne dépend que de la fonction f et la fonction génératrice empirique \hat{g}_n , où \hat{g}_n est définie comme suit

$$\hat{g}_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z^{Y_i}, z \in [0, 1].$$

Références

- Hamon, A. et B. Ycart (2012). Statistics for the luria-delbrück distribution. *Elect. J. Statist.*.
- Luria.S.E. et Delbrück.M (1943). Mutations of bacteria from virus sensitivity to virus resistance. *Genetics*.
- Rémillard.B. et Theodorescu.R (2000). Inference based on the empirical probability generating function for mixtures of poisson distributions. *Statist. Decisions.*.

Summary

Luria and Delbruck's observations on the multiplication of "Escherichia Coli" cells lead to the consideration of the cell division model with mutations. The appearance of the mutants after a while observes mutants clones. The study of the final number of cancerous(mutants) cells is a study of the size of the clones of mutants that depend mainly on fitness parameters.

An inequality for tail probabilities and complete convergence for weighted sequences of LNQD random variables with application to first-order autoregressive processes model

Zouaouia Boulenoir*

*Laboratory of Statistics and Stochastic Processes
boulenoir_zouaouia@yahoo.fr

Résumé. Dans ce travail, nous établissons une nouvelle inégalité de concentration et la convergence complète des suites de variables aléatoires linéairement négatifs de quadrants dépendantes (LNQD, en bref) et obtenons un résultat traitant de la convergence complète des processus autorégressifs de premier ordre avec ζ est identiquement distribué LNQD innovations.

1 Introduction

The concept of complete convergence of a sequence of random variables was introduced by Hsu et Robbins (1947) as follows. A sequence $\{X_n, n \geq 1\}$ of random variables converges completely to the constant C if $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - C| > \varepsilon) < \infty$ for all $\varepsilon > 0$. By the Borel-Cantelli lemma, this implies $X_n \rightarrow C$ almost surely (a.s.), and the converse implication is true if the $\{X_n, n \geq 1\}$ are independent. Hsu et Robbins (1947) proved that the sequence of arithmetic means of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables converges completely to the expected value if the variance of the summands is finite. Erdős (1949) proved the converse. The Erdős (1949), Hsu et Robbins (1947) result may be formulated as follows. This result has been generalized and extended in several directions and carefully studied by many authors.

The following lemmas play an essential role in our main result.

2 Main results

Theorem 1 Let $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ be a sequence of row-wise identically distributed LNQD random variables and $\{X_{p,ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$, $p = 2, 3$, be defined by :

$$\begin{aligned} X_{1,ni} &= -a_n I_{\{X_{ni} < -a_n\}} + X_{ni} I_{\{|X_{ni}| \leq a_n\}} + a_n I_{\{X_{ni} > a_n\}}, \\ X_{2,ni} &= (X_{ni} - a_n) I_{\{X_{ni} > a_n\}}, \quad X_{3,ni} = (X_{ni} + a_n) I_{\{X_{ni} < -a_n\}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Assume that there exists a $\tau > 0$ satisfying $\sup_{|\mu| \leq \tau} E(e^{\mu X_{11}}) \leq A_\tau < \infty$, where A_τ is a positive constant depending only on τ , $\sum_{i=1}^n b_{ni}^2 = O((\log n)^{-1})$.

An inequality for tail probabilities and complete convergence for weighted sequences of LNQD random variables with application to first-order autoregressive processes model

Then for any $\varepsilon > 0$ and $\mu \in (0, \tau]$, $P\left(\left|\sum_{i=1}^n b_{ni}(X_{p,ni} - EX_{p,ni})\right| \geq \varepsilon\right) \leq \Phi(\mu, \varepsilon, \tau, a) \frac{1}{n^{a/2} \log n}$, $p = 2, 3$. Where $\Phi(\mu, \varepsilon, \tau, a) = \frac{2^{a+1} a^a e^{-a} D D' A_\tau}{\mu^{2+a} K_1^a (E(X_{11})^2)^{a/2} \varepsilon^2}$, choosing $a > 2$

Theorem 2 Let $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ be an array of row-wise identically distributed LNQD random variables such that $EX_{ni} = 0$ satisfying $E|X_{11}|^{\gamma+1} < \infty$ for some $\gamma \geq 1$. Assume that $\{b_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ is an array of constants satisfying $\max_{1 \leq i \leq n} |b_{ni}| = O(c_n^{-\delta})$, $0 < c_n \uparrow \infty$, for all any $\delta > 0$ and $a_n c_n^{-\delta} \leq 1$,

$$\sum_{i=1}^n b_{ni}^2 = O\left(\frac{1}{\log n}\right).$$

Then $\sum_{i=1}^n b_{ni} X_{ni}$ converges completely to zero.

3 Applications to the results to AR(1) model

The basic object of this section is applying the results to first-order autoregressive processes(AR(1)).

We consider an autoregressive time series of first order AR(1) defined by

$$X_{n+1} = \theta X_n + \zeta_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

where $\{\zeta_n, n \geq 0\}$ is a sequence of identically distributed LNQD random variables with $\zeta_0 = X_0 = 0$, $0 < E\zeta_k^4 < \infty$, $k = 1, 2, \dots$ and where θ is a parameter with $|\theta| < 1$. Here, we can rewrite X_{n+1} in (2) as follows :

$$X_{n+1} = \theta^{n+1} X_0 + \theta^n \zeta_1 + \theta^{n-1} \zeta_2 + \dots + \zeta_{n+1}. \quad (3)$$

Theorem 3 If $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ is a sequence of identically distributed LNQD random variables such that $|\zeta_1|^4 < \alpha$, then for any $R > 0$ real, $\tilde{\varepsilon} > \frac{E\zeta_1^2}{R^2}$ and $0 < \beta < \frac{\alpha}{e^\alpha - \alpha - 1}$

$$P\left(\left|\sum_{j=1}^n (\zeta_j^2 - E\zeta_j^2)\right| \geq (R^2 \tilde{\varepsilon} - E\zeta_1^2)n\right) \leq 2 \exp\left\{-\beta \frac{(R^2 \tilde{\varepsilon} - E\zeta_1^2)^2 n}{36}\right\} + 2 \frac{\tilde{\Phi}(\tilde{\varepsilon}, \tau, a)}{n^{a/2+1}} \quad (4)$$

Where $\tilde{\Phi}(\tilde{\varepsilon}, \tau, a) = 9 \frac{2^{a+1} a^a e^{-a} D D' A_\tau}{\mu^{a+2} K_1^a (E\zeta_1^4)^{a/2} (R^2 \tilde{\varepsilon} - E\zeta_1^2)^2}$

Corollary 1 The sequence $(\hat{\theta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ completely converges to the parameter θ of the first-order autoregressive process.

Références

Erdős, P. (1949). On a theorem of hsu and robbins. *Ann. Math. Statist*, 286–291.

Hsu, P. L. et H. Robbins (1947). Complete convergence and the law of large numbers. pp. 25–31.

Summary

In this work, a new concentration inequality and complete convergence of weighted sums for arrays of row-wise linearly negative quadrant dependent ($LNQD$, in short) random variables has been established, we also obtained a result dealing with complete convergence of first-order autoregressive processes with identically distributed $LNQD$ innovations.

Bernstein-Frechet inequalities for partial sums of NOD random variables and application to AR(1) model based on NOD errors.

Ikhlasse Chebbab*, Samir Benaissa**

*Laboratory of Statistics and Stochastic Processes University of Djillali Liabes, Algeria.
ikhlasse-ch@outlook.fr

**Laboratory of Statistics and Stochastic Processes University of Djillali Liabes, Algeria.
benaissamir@yahoo.fr

Résumé. Les inégalités de probabilité exponentielles jouent un rôle important dans les probabilités et les statistiques. Dans ce travail, nous établissons une inégalité de concentration de Bernstein pour les variables aléatoires NOD qui nous permettent de prouver la convergence presque complète pour l'estimateur de ce paramètre. En utilisant ces inégalités, un intervalle de confiance est obtenu.

1 Introduction

The autoregressive process takes an important part in predicting problems leading to decision making. Let us consider the autoregressive process order 1 defined by

$$Y_k = \theta Y_{k-1} + \zeta_k$$

Where θ is the autoregressive parameter. and where $(\zeta_k)_k$ is a sequence of normally distributed random variables, with zero mean. Consider Y_{k-1} as NOD output variables. We use the least squares method to estimate the parameter θ .

Lehmann (1966) introduced a simple and natural definition of negative dependence : A sequence $\{Y_i, 1 \leq i \leq n\}$ of random variables is said to be pairwise negative quadrant dependent (pairwise NQD) if for any real y_i, y_j and $i \neq j$, $\mathbf{P}(Y_i > y_i, Y_j > y_j) \leq \mathbf{P}(Y_i > y_i)\mathbf{P}(Y_j > y_j)$. The concept of negatively orthant dependent random variables was introduced by Ebrahimi and al., (1981).

Now, we will recall the definition of NOD sequences and some lemmas.

Definition 1 The sequence $\{Y_n, n \geq 1\}$ of random variables are said to be lower negatively orthant dependent (LNOD), if for any $n \geq 1$

$$\mathbf{P}(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2, \dots, Y_n \leq y_n) \leq \prod_{j=1}^n P(Y_j \leq y_j).$$

for every $y_1, \dots, y_n \in R$

The sequence $\{Y_n, n \geq 1\}$ of random variables are said to be upper negatively orthant dependent (UNOD), if for any $n \geq 1$

Bernstein-Frechet inequalities for partial sums of NOD random variables...

$$\mathbf{P}(Y_1 > y_1, Y_2 > y_2, \dots, Y_n > y_n) \leq \prod_{j=1}^n P(Y_j > y_j).$$

for every $y_1, \dots, y_n \in R$

The sequence $\{Y_n, n \geq 1\}$ of random variables are said to be negatively orthant dependent (NOD) if $\{Y_n, n \geq 1\}$ are both LNOD and UNOD.

Lemma 1 (see Bozorgnia and al 1966).

Let Y_1, Y_2, \dots, Y_n be the random variables NOD, then

(i) If h_1, h_2, \dots, h_n are all non decreasing (or non increasing) function, then random variables $h_1(Y_1), h_2(Y_2), \dots, h_n(Y_n)$ are NOD.

(ii) Let Y_1, Y_2, \dots, Y_n be nonnegatively NOD. Then

$$\mathbf{E}\left(\prod_{j=1}^n Y_j\right) \leq M \prod_{j=1}^n \mathbf{E}(Y_j)$$

Proposition 2 (see Dahmani and al 2005).

Let μ_Y measure generated by (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) and μ_ζ is a measure generated by $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ Then the density ρ of the measure μ_Y in comparison with the measure μ_ζ is equal to

$$\rho(x) = \exp\left(\theta \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} - \frac{\theta^2}{2} \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2\right) \quad (1)$$

MODEL AND HYPOTHESES

Let us consider the first order autoregressive process AR(1) defined by

$$Y_k = \theta Y_{k-1} + \zeta_k$$

Where θ is the autoregressive parameter with $|\theta| < 1$, The $\{\zeta_n, n \geq 0\}$ is a sequence of normally distributed random variables and finite variance. with $\zeta_0 = X_0 = 0$

Consider Y_{k-1} as NOD exogene variable

The parameter θ is estimated least squares, given the estimator

$$\theta_n = \frac{\sum_{k=1}^n Y_{k-1} Y_k}{\sum_{k=1}^n Y_{k-1}^2} \quad (2)$$

and

$$\theta_n - \theta = \frac{\sum_{k=1}^n \zeta_k Y_{k-1}}{\sum_{k=1}^n Y_{k-1}^2} \tag{3}$$

Let us introduce now the following hypothesis :

H1 : We assume that the sequence $(\zeta_n)_n$ and $(Y_{n-1})_n$ are bounded. Then there exist positive constants L and γ such that

$$|Y_{n-1}| \leq L, |\zeta_n| \leq \gamma.$$

H2 : Suppose that $E(\zeta_k) = 0$, for each $k \geq 1$.

2 Main results

Theorem 3 For any $\epsilon < \frac{1}{4} \log 3$ positive and for R rather large, we have

$$P(\sqrt{n}|\theta_n - \theta| > R) \leq 2 \exp(-\frac{1}{2}R^2\epsilon^2 A_1) + 3^{-(n-1)/4} \exp(n\epsilon) \tag{4}$$

Where $A_1 = \frac{1}{\gamma^2 L^2}$ is a positive constant.

Corollary 4

The sequence of estimators $(\theta_n)_{n \in N}$ converges almost completely to the parameter θ of the autoregressive process of order 1.

Corollary 5

The inequalities (4) give us the possibility to construct a confidence interval for the parameter θ .

Références

Bozorgnia, A., Patterson, R, F. and Taylor, R, L. (1966), Limit theorems for dependent random variables, World Congress Nonlinear Analysts 92, 1137-1153.

Dahmani, A. and Tari, M. (2005), Bernstein-fréchet inequalities for the parameter of the order 1 autoregressive process, Statist. C.R.Acad.Sci.Paris, I340, 309-314.

Ebrahimi, N. and Ghosh, M. (1981), The dynamics of chain formation in *Oecophylla longinoda*, Comm. Statist. Theory Methods, (10), 307-336.

Lehmann, E, L. (1966), Some concepts of dependence, Ann. Math. Statist, (37), 1137-1153.

Bernstein-Frechet inequalities for partial sums of NOD random variables...

Summary

Our work consists in establishing new exponential inequalities of Bernstein-Fréchet type that allowed us to construct a confidence interval for the parameter of the first order autoregressive process under NOD assumption. Using these inequalities , We proved the almost complete convergence for the estimator of this parameter.

A new size biased distribution : properties and application

Chouia Sarra*, Zeghdoudi Halim**

*LaPS laboratory, Badji-Mokhtar University, Box 12, Annaba, 23000, Algeria
chouiasarra3@gmail.com,
hzeghdoudi@yahoo.fr

Abstract. The present paper offer a new extension to Zeghdoudi distribution (H. Messaadia and H.Zeghdoudi (2018)) called size biased zeghdoudi distribution (SBZGD).Several properties of this distribution such as first four moments, coefficient of variation (C.V.), skewness and kurtosis are established. The estimation of its parameter has been discussed using the method of moments and the method of maximum likelihood estimation.Finally,a simulation study and an application of the model to a real data set is presented and compared with the fit attained by some other well-known.

1 Introduction

Size-biased distributions are the special cases of the weighted distributions and arise in practice when observations from a sample are recorded with probability proportional to some measure of unit size and provide a unifying approach for the problems where the observations fall in the non-experimental, non-replicate, and non-random categories. Fisher, R. A.(1934) introduced the weighted distributions to model ascertainment bias and later was discussed by **Rao, C. R** (1965). If the random variable X has the probability distributions function (pdf), $f(x; \theta)$ then the size-biased distribution is of the form:

$$f(x; \theta) = \frac{x^\alpha \cdot f_0(x; \theta)}{\mu_\alpha}$$

2 A new size biased distribution

We're going to present the Size biased of **Zeghdoudi distribution** (ZD) introduced by H. Zeghdoudi, H. Messadia (2016) which the density function is:

$$f_{ZGD}(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^3}{\theta+2} x(1+x)e^{-\theta x} & x, \theta > 0 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

In this section , we find the new distribution called size biased zeghdoudi distribution (SBZGD)and study its properties :

$$f_{SBZGD} = \frac{x \cdot f_{ZGD}(x; \theta)}{E_{ZGD}(x)}$$

where, $E_{ZGD}(x) = \frac{2(\theta+3)}{\theta(\theta+2)}$. We have

$$f_{SBZGD}(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^4 x^2 (1+x) e^{-\theta x}}{2(\theta+3)} & x, \theta > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (1)$$

3 Maximum Likelihood Estimation and Moment Method

In this section , we are going to find method of moment estimation(MME) and maximum likelihood estimation(MLE) .

For MME:

From equating sample mean and population mean $\mathbb{E}(x)$:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = \mathbb{E}(x)$$

Putting the expression of $\mathbb{E}(x)$ of SBZGD in the equation and solving the equation for θ , we will get $\hat{\theta}_{MoM}$

For MLE:

Let $X_i \sim SBZD(\theta)$, $i = 1 \dots n$ be n random variables, The M-likelihood function, $L(x_i; \theta)$ is:

$$L(x | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) = \left\{ \frac{\theta^4}{2(\theta+3)} \right\}_{i=1}^n n(x_i^2 + x_i^3) e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i}$$

From the SBZD , the method of moments (MoM) and the ML estimators of the parameter θ are the same and it can be obtained by solving the following non-linear equation:

$$\frac{4}{\theta} - \frac{2}{2\theta+6} - \bar{x} = 0$$

$$\hat{\theta}_{MoM} = \hat{\theta}_{ML} = \frac{3(1-\bar{X}) + \sqrt{3(3\bar{X}^2 + 10\bar{X} + 3)}}{2\bar{X}}$$

Finally , we present a real-data example for illustrative purpose and compare with another distributions

Résumé

Le présent travail propose une nouvelle extension de la distribution zeghdoudi appelée distribution zeghdoudi biaisée par la taille .Plusieur propriétés de cette distribution telles que les 4 premiers moments , le coefficient de variation ,l' asymetries et le kurtosis sont établies. L' estimation de son parametre ète paramétrée à l' aide de la méthode de moment et d' estimation du maximum de vraisemblance .Enfin , une étude de simulation et application du modèle a un ensemble des données réelles est présentée et comparée avec des autres distributions

Locally modelled regression estimator for functional data

Abdelmalek GAGUI*, Abdelhak CHOUAF**

* gagui.abdelmalek@gmail.com

** abdo_stat@yahoo.fr

1 Introduction

Nonparametric statistical models have taken an important place in statistical science. At the same time there are an increasing number of situations arising from different fields of applied sciences in which the data are of a functional nature (i.e. one observation can be a curve, surface, etc.). A lot of functional data sets have been studied in the recent literature, dealing with chemometrics (Frank and Friedman 1993; Ferraty and Vieu 2002; Abraham, Cornillon, Matzner-Löber, and Molinari 2003), radar waveforms (Hall, Poskitt, and Presnell 2001; Dabo-Niang, Ferraty, and Vieu 2004), biometrics (Ramsay, Altman, and Bock 1994; Gasser, Hall, and Presnell 1998), and physiology (Abramovitch, Antoniadis, Sapatinas, and Vidakovic 2004; Abramovitch and Angelini 2006; Antoniadis and Sapatinas 2007). Many other examples can be found in the books (Ramsay and Silverman 2002, 2005; Ferraty and Vieu 2006; Dabo-Niang and Ferraty 2008) and in the special issues devoted to this topic by several statistical journals (Davidian, Lin, and Wang 2004; González Manteiga and Vieu 2007; Valderrama 2007). Such data are called functional data in the sense that they come from observations of a functional variable. The combination of the nonparametric models with the functional data leads us to the problem of the functional nonparametric statistics, which is a very recent field of investigation (Ferraty and Vieu 2006). This work deals with the functional regression setting when one wishes to predict a response Y from an explanatory functional variable X . Consider n pairs of independent random variables $(X_i, Y_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ that we assume drawn from the pair (X, Y) which is valued in $\mathcal{F} \times \mathbf{R}$, where \mathcal{F} is a semi-metric space equipped with a semi-metric d . To construct a functional local linear regression estimator based on the minimization, with respect to the pair (a, b) , of the following criterion :

$$\arg \min_{(a,b) \in \mathbf{R}^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - a - b\beta(X_i, x))^2 K(h_H^{-1}\delta(x, X_i)) \quad (1)$$

where $\beta(\cdot, \cdot)$ and $\delta(\cdot, \cdot)$ are known bi-functional operators defined from \mathcal{F}^2 into \mathbf{R} . More precisely, the functional local linear estimator $\hat{r}(x)$ of $r(x)$ is then \hat{a} which is the first component of the pair (a, b) solution of the minimization problem 1. However, if the bi-functional operator β is such that, $\forall z \in \mathcal{F}$, $\beta(z, z) = 0$, then the quantity \hat{r} is explicitly defined by :

Titre court de votre communication en 10 mots maximum

$$\widehat{r}(x) = \frac{\sum_{1 \leq i, j \leq n} W_{ij}(x) Y_j}{\sum_{1 \leq i, j \leq n} W_{ij}(x)}. \quad (2)$$

Where

$$W_{ij}(x) = \beta_i(\beta_i - \beta_j)K(h_K^{-1}\delta(x, X_i))K(h_K^{-1}\delta(x, X_j)).$$

2 Asymptotic properties

Our goal is to study the asymptotic behaviour of $\widehat{r}(x)$, the locally modelled estimator of the regression operator $E(Y|X = x) = m(x)$, x being a fixed element of \mathcal{F} . The results are stated in terms of the almost complete convergence which implies the almost sure convergence. Before giving the theorems, let us introduce some assumptions and terminologies. First of all, let us start with a crucial hypothesis concerning the distribution of the functional r.v. X .

- (H1) $\phi_x(r_1, r_2) = \mathbf{P}(r_2 < \delta(X, x) < r_1)$, and $\forall r > 0, \phi_x(r) := \phi_x(-r, r) > 0$.
- (H2) $m \in \{f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}, \lim_{|\delta(x, x')| \rightarrow 0} f(x') = f(x)\}$
- (H3) $m \in \{f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}, |f(x') - f(x)| \leq C|\delta(x, x')|^v, \text{ where } C \text{ and } v \text{ are fixed in } \mathbf{R}^+\}$
- (H4) $\exists 0 < M_1 < M_2, \forall x' \in \mathcal{F}, M_1|\delta(x, x')| \leq |\beta(x, x')| \leq M_2|\delta(x, x')|$
- (H5) The kernel K is a positive, differentiable function which is supported within $[0, 1]$.
- (H6) h is a positive sequence such that $\lim_{n \rightarrow \infty} h = 0$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n\phi_x(h_K)} = 0$.
- (H7) $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n > n_0 :$

$$\frac{1}{\phi_x(h)} \int_0^1 \phi(zh, h) \frac{d}{dz} (z^2 K(z)) dz > C_2 > 0$$

and

$$h \int_{B(x, h_K)} \beta(u, x) dP(u) = o\left(\int_{B(x, h)} \beta^2(u, x) dP(u)\right).$$

- (H8) $\forall k > 2, x \mapsto \mathbf{E}(Y^k|X = x)$ is a continuous operator.

Theorem 2.1 Under hypotheses (H1)-(H8), we have

$$|\widehat{r}(x) - r(x)| = O(h^v) + O\left(\left(\frac{\log n}{n\phi_x(h)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \text{ a.co.}$$

Références

Baíllo, A., and Grané, A. (2009), Functional Local Linear Regression with Functional Predictor and Scalar Response, *Journal of Multivariate Analysis*, **100**, 102-111.

Barrientos-Marin, J. (2007), Some Practical Problems of Recent Nonparametric Procedures : Testing, Estimation, and Application, Ph.D. thesis, Universidad de Alicante, Departamento de Fundamentos del Análisis Economico, Spain.

Barrientos-Marin, J. Ferraty, F. and Vieu, P. (2010). Locally modelled regression and functional data, *Journal of Nonparametric Statistics* **22**, 617-632.

Benhenni, K., Ferraty, F., Rachdi, M., and Vieu, P. (2007), Nonparametric Regression for Functional Data : Optimal Local Bandwidth Choice, *Computational Statistics*, **22**, 353-369.

ferraty, f., laksaci, a. and view, p. (2006). Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models. *Stat. Inference Stoch. Process.* **9**, 47-76.

Demongeot, J., Laksaci, A., Madani, F. and Rachdi, M. (2013). Functional data : local linear estimation of the conditional density and its application. *Statistics : A journal of theoretical and applied statistics* **47**, 26-44.

Demongeot, J., Laksaci, A., Rachdi, M. and Rahmani, S. (2014). On the local linear modelization of the conditional distribution for functional data. *Sankhya* **76**, 328-355.

Hall, p, wolfe, r.c.l. and yao, q. (1999). Methods for estimating a conditional distribution function. *J. Amer. Statist. Assoc.* **94**, 154-163.

Summary

In this work, we study the asymptotic behavior of the nonparametric local linear regression estimation of a scalar response variable given a random variable taking values in a semi-metric space. Under some general regularity conditions, we establish the pointwise almost complete convergence with rate of this proposed estimator.

Asymptotic normality of a recursive estimator of a conditional hazard with functional stationary ergodic data

Amina GOUTAL*, Boubaker MECHAB, M.A. ISSA and Y. SOUDDI

*University of Djillali Liabes
L.P 89, Sidi Bel Abbas 22000, Algeria
aminasara90@hotmail.com

Résumé. Dans cet article, nous étudions l'estimateur à noyau recursive de la fonction de hasard conditionnelle pour des données fonctionnelles ergodique. Sous l'hypothèse d'ergodicité, la nouveauté de notre approche est que nous avons pas besoin d'indépendance des observations. Il est montré sous certaines conditions l'estimation récursive par le noyau des trois paramètres (densité conditionnelle, distribution conditionnelle et risque conditionnelle) qui sont asymptotiquement normalement distribués.

1 Introduction

Recently there has been an increasing interest in the study of functional data. For an overview of the present state on nonparametric functional data (FDA), we refer to the works of Ferraty et Vieu (2006) and Ramsay et Silverman (2007), and the references therein.

Conditional hazard estimation with a functional explanatory variable and a scalar response acquired considerable interest in the statistical literature. The first work was proposed by Ferraty et al. Ferraty et al. (2008), where they introduce a kernel estimator and prove some asymptotic properties (with rates) in various situations including censored and/ or dependent variables. Quintela-del-Río Quintela-Del-Río (2008) extended the results of Ferraty et al. Ferraty et al. (2008) by calculating the bias and variance of these estimates, and establishing their asymptotic normality.

In recent years, the statistical modeling for functional ergodic data has been an increasing interest and a great importance in various fields. The general framework of ergodic functional data has been initiated by Laïb and Louani Laïb et Louani (2010), Laïb et Louani (2011) who stated consistencies with rates together with the asymptotic normality of the regression function estimate. This paper is organized as follows : Section 2 introduces the estimator of the conditional hazard function. In section 3 we will define some notations and hypothesis. The asymptotic normality of the proposed estimator of the conditional hazard function is given in Section 4. Finally, the proofs of our results are given in the Appendix.

The conditional hazard function

2 The recursive estimation of the conditional hazard function

Let $(X_i, Y_i)_{i=1, \dots, n}$ be a sequence of strictly stationary ergodic processes. Where X_i are values in semi-metric space (\mathcal{F}, d) and Y_i are real-valued random variables. N_x will denote a fixed neighborhood of x . We assume that the regular version of the conditional probability of Y given X exists. Moreover, we suppose that, for all $x \in N_x$ the conditional distribution function of Y given $X = x$, the recursive kernel estimator of the conditional hazard function $h(y|x)$ such that

$$h(y|x) = \frac{f(y|x)}{1 - F(y|x)}, \text{ for } y \in \mathbb{R} \text{ and } F(y|x) < 1$$

is

$$\hat{h}(y|x) = \frac{\hat{f}(y|x)}{1 - \hat{F}(y|x)}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

We define the recursive kernel estimator of the conditional distribution function by

$$\hat{F}(y|x) = \frac{\sum_{i=1}^n K(a_i^{-1}d(x, X_i))H(b_i^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^n K(a_i^{-1}d(x, X_i))} \quad (1)$$

where K is the kernel, H is a strictly increasing distribution function and a_i, b_i are a sequences of positive real numbers such that $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

So, from (1) we get the conditional density $\hat{f}(y|x)$.

3 Notations and hypothesis

(H1) (i) The function $\phi(x, h) := \mathbb{P}(X \in B(x, h)) > 0, \forall h > 0$,

where $B(x, h) := \{x' \in \mathcal{F} / d(x', x) < h\}$.

(ii) For all $i = 1, \dots, n$ there exists a deterministic function $\phi_i(x, \cdot)$ such that almost surely $0 < \mathbb{P}(X_i \in B(x, h) | \mathcal{F}_{i-1}) \leq \phi_i(x, h), \forall h > 0$ and $\phi_i(x, h) \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$.

(iii) For all sequence $(h_i)_{i=1, \dots, n} > 0$, $\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B(x, h_i) | \mathcal{F}_{i-1})}{\sum_{i=1}^n \phi(x, h_i)} \rightarrow 1$.

(H2) (i) Let \mathcal{S} be a compact set of \mathbb{R} , the conditional distribution function $F(\cdot|x)$ is such that, $\forall y \in \mathcal{S}, \exists \beta > 0, \inf_{y \in \mathcal{S}} (1 - F(y|x)) > \beta, \forall (y_1, y_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, \forall (x_1, x_2) \in N_x \times N_x$

$$|F(y_1|x_1) - F(y_2|x_2)| \leq C_1(d(x_1, x_2)^{\beta_1} + |y_1 - y_2|^{\beta_2}).$$

(ii) The density $f(\cdot|x)$ is such that, $\forall y \in \mathcal{S}, \exists \alpha > 0, f(y|x) < \alpha, \forall (y_1, y_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}, \forall (x_1, x_2) \in N_x \times N_x$

$$|f(y_1|x_1) - f(y_2|x_2)| \leq C_2(d(x_1, x_2)^{\beta_1} + |y_1 - y_2|^{\beta_2})$$

- with $C_1 > 0, C_2 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$.
- (H3) $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad |H^{(j)}(y_1) - H^{(j)}(y_2)| \leq C|y_1 - y_2|$, for $j = 0, 1$
 $\int |t|^{\beta_2} H^{(1)}(t) dt < \infty$ and $\int H'^2(t) dt < \infty$.
- (H4) K is a function with support $(0,1)$ such that $0 < C_1 < K(t) < C_2 < \infty$.
- (H5) The bandwidths (a_i, b_i) satisfied : $\forall t \in [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \phi(x, ta_i)}{\sum_{i=1}^n \phi(x, a_i)} = \beta_x(t)$$

and

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n\phi_n(x)}}{\varphi_n(x)} \left(\sum_{i=1}^n a_i^{\beta_1} \phi(x, a_i) + \sum_{i=1}^n b_i^{\beta_2} \phi(x, a_i) \right) = 0$$

where $\varphi_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \phi(x, a_i)$.

4 Main result : Asymptotic normality

Theorem 4.1. *Under hypotheses (H1)-(H5), we have for all $x \in \mathcal{A}$*

$$\left(\frac{n\varphi_n(x)}{\sigma_h^2(x, y)} \right)^{1/2} (\hat{h}(y|x) - h(y|x)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1) \text{ as } n \rightarrow \infty \tag{2}$$

where $\mathcal{A} = \{x, \sigma_h^2(x, y) \neq 0\}$ and $\sigma_h^2(x, y) = \frac{\alpha_2 h(y|x)}{\alpha_1^2 (1 - F(y|x))}$

with $\alpha_1 = K(1) - \int_0^1 K'(s)\beta_x(s)ds$ and $\alpha_2 = K^2(1) - \int_0^1 (K^2(s))'\beta_x(s)ds$.

5 Confidence bands

A usual application of asymptotic normality is to establish confidence bands for the estimates. Our goal in this section is the application of our asymptotic normality result (Theorem 4.1) to build the confidence intervals for the true value of $h(y|x)$ for a given curve $X = x$. In nonparametric estimation, the asymptotic variance depends on certain unknown functions. In our case, we have

$$\sigma_h^2(x, y) = \frac{\alpha_2 h(y|x)}{\alpha_1^2 (1 - F(y|x))}$$

where $h(y|x), F(y|x), \alpha_1$ and α_2 are unknown a priori and have to be estimated in practice. Then one can obtain a confidence bands even if $\sigma_h^2(x, y)$, is functionally specified. Now a plug-in estimate for the asymptotic standard deviation $\sigma_h^2(x, y)$, can be easily obtained using the estimators $\hat{h}(y|x), \hat{F}(y|x), \hat{\alpha}_1$ and $\hat{\alpha}_2$ of $h(y|x), F(y|x), \alpha_1$ and α_2 respectively, that is

$$\hat{\sigma}_h^2(x, y) = \frac{\hat{\alpha}_2 \hat{h}(y|x)}{\hat{\alpha}_1^2 (1 - \hat{F}(y|x))}$$

The conditional hazard function

We estimate empirically the constants α_1 and α_2 , as follows :

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{n\phi(x, a_1)} \sum_{i=1}^n K(a_1^{-1}d(x, X_i)), \quad \hat{\alpha}_2 = \frac{1}{n\phi(x, a_1)} \sum_{i=1}^n K^2(a_1^{-1}d(x, X_i)).$$

Remark that in the special case when $K = \mathbb{I}_{[0,1]}$, it becomes immediately that $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Now the asymptotic confidence band at asymptotic level $1 - \zeta$ for $h(y|x)$ is given by

$$\left[\hat{h}(y|x) - u_{1-\frac{\zeta}{2}} \left(\frac{\hat{\sigma}_h^2(x, y)}{n\varphi_n(x)} \right)^{1/2}, \quad \hat{h}(y|x) + u_{1-\frac{\zeta}{2}} \left(\frac{\hat{\sigma}_h^2(x, y)}{n\varphi_n(x)} \right)^{1/2} \right]$$

where $u_{1-\frac{\zeta}{2}}$ denotes the $1 - \frac{\zeta}{2}$ quantile of the standard normal distribution.

Références

- Ferraty, F., A. Rahbi, et P. Vieu (2008). Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle. *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées* 53(1), 1–18.
- Ferraty, F. et P. Vieu (2006). *Nonparametric functional data analysis : theory and practice*. Springer Science & Business Media.
- Gheriballah, A., A. Laksaci, et S. Sekkal (2013). Nonparametric m-regression for functional ergodic data. *Statistics & Probability Letters* 83(3), 902–908.
- Laïb, N. et D. Louani (2010). Nonparametric kernel regression estimation for functional stationary ergodic data : asymptotic properties. *Journal of Multivariate analysis* 101(10), 2266–2281.
- Laïb, N. et D. Louani (2011). Rates of strong consistencies of the regression function estimator for functional stationary ergodic data. *Journal of Statistical Planning and Inference* 141(1), 359–372.
- Quintela-Del-Río, A. (2008). Hazard function given a functional variable : Non-parametric estimation under strong mixing conditions. *Journal of Nonparametric Statistics* 20(5), 413–430.
- Ramsay, J. O. et B. W. Silverman (2007). *Applied functional data analysis : methods and case studies*. Springer.

Summary

In this paper, we investigate a recursive kernel estimator of the conditional hazard function whenever functional stationary ergodic data are considered. Under the assumption of ergodicity, the novelty of our approach is that we do not require independence of the observations. It is shown that, under some wild conditions, the recursive kernel estimate of the three parameters (conditional density, conditional distribution and conditional hazard) are asymptotically normally distributed.

Singular optimal control of stochastic differential equations of McKean-Vlasov type via the differentiability with respect to probability law

Guenane Lina*, Mokhtar Hafayed**
Guenane Lina Mokhtar Hafayed

*Adresse postale complète
guenanelina07@gmail.com,

**Autre adresse
m.hafayed@univ-biskra.dz

Résumé. nous considérons le problème de contrôle stochastique dans le domaine de contrôle ne doit pas nécessairement être convexe, la variable de contrôle a deux composantes, la première étant absolument continue et le deuxième singulier. Les coefficients dépendent, non de manière linéaire, tant sur le processus de l'État que de sa loi sur l'absolue. Nous établissons un principe maximum en utilisant une variation de pointe sur le partie absolument continue du contrôle et une perturbation convexe sur le singulier. il en résulte une généralisation du principe maximum de peng au contrôle singulier problèmes

1 Introduction

We study general stochastic optimal singular control problem for McKean-Vlasov type. The coefficients of the system depend on the state of the solution process as well as of its probability law and the control variable. We establish a set of Peng's necessary conditions in the form of Pontryagin maximum principle for the optimal control. We also give additional conditions, under which the necessary optimality conditions turn out to be sufficient. The control domain is not assumed to be convex. The proof of our main result is based on the differentiability with respect to the probability law

2 Main results

we study general stochastic control problem for McKean-Vlasov stochastic differential equation (SDEs in short), on a given filtered filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$:

$$\begin{cases} dX^{u,\eta}(t) = f(t, X^{u,\eta}(t), P_{X^{u,\eta}(t)}, u(t)) dt + \sigma(t, X^{u,\eta}(t), P_{X^{u,\eta}(t)}, u(t)) dW(t) \\ \quad + G(t)d\eta(t), t \in [0, T] \\ X^{u,\eta}(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

Singular optimal control of stochastic differential equations of McKean-Vlasov type via the differentiability with respect to probability law

where $W(\cdot)$ is an \mathcal{F}_t -Brownian motion and $P_{X^{u,\eta}(t)} = P \circ X^{u,\eta}(t)^{-1}$ denotes the law of the random variable $X^{u,\eta}$. Here the control $(u(\cdot), \eta(\cdot))$ is a pair of measurable $U_1 \times U_2$ -valued, \mathcal{F}_t -adapted processes, such that $\eta(\cdot)$ is of bounded variation, nondecreasing continuous on the left with right limits and $\eta(0) = 0$. Moreover, $E \left[\sup_{t \in [0, T]} |u(t)|^2 + |\eta(T)|^2 \right] < \infty$.

The expected cost to be minimized over the class of admissible controls is also of McKean-Vlasov type, which has the form

$$J(u(\cdot), \eta(\cdot)) = E \left[\int_0^T \ell(t, X^{u,\eta}(t), P_{X^{u,\eta}(t)}, u(t)) dt + h(X^{u,\eta}(T), P_{X^{u,\eta}(T)}) \right. \\ \left. + \int_{[0, T]} K(t) d\eta(t) \right], \quad (2)$$

$$(3)$$

where $\ell : [0, T] \times R^n \times Q_2(R^n) \times A_1 \rightarrow R$, $h : R^n \times Q_2(R^n) \rightarrow R$, are deterministic functions. We remark that the cost functional (2) involves the law of the solution in a nonlinear way.

3 Conclusion

We were interested in the necessary conditions of optimality verified by optimal controls in the case of nonlinear coefficients for singular diffusions. The problems of the singular controls find directly applications in economics, management and especially in financial mathematics. There are excellent references dealing with this aspect.

Références

- [1] McKean, H.P. : A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. *Proc. Natl. Acad. Sci.* 1966 ;56 :1907-1911.
- [2] Wang G, Zhang C, Zhang W. : Stochastic maximum principle for mean-field type optimal control under partial information, *IEEE Transactions on automatic control*, 2014 ;59(2) :522-528.
- [3] Hafayed M., Abbas S., Abba A : On mean-field partial information maximum principle of optimal control for stochastic systems with Lévy processes, *J. Optim Theory Appl.* 2015 ;167 :1051-1069.
- [4] Hafayed M., Boukaf S., Shi Y., Meherrem S. : A McKean-Vlasov optimal mixed regular-singular control problem, for nonlinear stochastic systems with Poisson jump processes, *Neurocomputing.* 2016 ;182(19) :133-144.
- [5] Buckdahn, R., Li, J, Peng, S. : Mean-field backward stochastic differential equations and related partial differential equations. *Stochastic Processes and their Applications*, 2009 ;119 :3133-3154.
- [6] Buckdahn, R., Djehiche, B., Li, J. : A general stochastic maximum principle for SDEs of mean-field type. *Appl. Math. Optim.* 2011 ;64,197-216.

- [7] Lasry, J.M., Lions, P.L. : Mean field games. *Japan Jour. Math.* 2007 ;2, 229-260.
- [8] Buckdahn R., Li, J., Ma J. : A stochastic maximum principle for general mean-field system, *Appl Math Optim.* 2016 ;(74) :507-534.
- [9] Hafayed M., Meherrem S., Eren S. Guoclu D.H. : *On optimal singular control problem for general McKean-Vlasov differential equations : Necessary and sufficient optimality conditions*, *Optim Control Appl Meth* ; (39)1202–1219.(2018)

Summary

we consider the stochastique control problem in witch the control domain need not be convex, the control variable has two components, the first being absolutely continous and the second singular. The coefficients depend, non linearly, on both the state process as well as of its law on the absolutely. We establish a maximum principle, by using a spike variation on the absolutely continuous part of the control and a convex perturbation on the singular one. this results is a generalization of peng's maximum principle to singular control problems

Maximizing The Utility Functions Of Consumption With a Complete Market

Noussaiba SEKKAL*, Faiza LIMAM-BELARBI**

Université Djillali Liabes
L.P 89, Sidi Bel Abbes 22000, L'Algerie
webudl@univ-sba.dz
*https://www.univ-sba.dz

sekkal.n@hotmail.fr, faiza_belarbi@yahoo.fr

Résumé. Dans cette article nous étudions le problème d'équilibre sur un marché financier complet sur l'intervalle d'investissement total $[0, T]$. Le but de cette étude est d'optimiser le portefeuille d'investissement et de consommation dont le prix d'actif est modélisé par un Mouvement Brownien, et on a utilisé la maximisation de la fonction d'utilité avec une nouvelle approche appelé le convexe dual Hammad (2017).

1 Introduction

The equilibrium problem of a complete financial market is to construct a model (a money market and several stocks) in which the prices of securities are determined by the law of supply and demand, maximizing the utility function of consumption over the finite temporal horizon $[0, T]$.

2 The Financial Market

We seek to construct a complete and standard financial market with a process price of money market $S_0(\cdot)$ with $S_0(0) = 1$ and

$$dS_0(t) = S_0(t)[r(t)dt + dA(t)],$$

as well as N stocks price process $S_1(\cdot), \dots, S_N(\cdot)$, with $S_n(0)$ positive constant for each n , and

$$dS_n(t) = S_n(t)[b_n(t)dt + dA(t) + \sum_{j=1}^D \sigma_{nj}(t)dW^{(j)}(t)], \quad n = 1, \dots, N.$$

Here $W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))'$ is a standard d -dimensional Brownian motion in \mathbb{R}^d on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; $r(t) \in \mathbb{R}$ is the risk-free rate process satisfying $\int_0^T |r(t)|dt < \infty$ almost surely, $b(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))' \in \mathbb{R}^d$ is the vector of stock-appreciation rates

Titre court de votre communication en 10 mots maximum

and $\sigma(t) = (\sigma_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq 1}$ is the matrix of stock-volatilities satisfying $\sum_{n=1}^N \sum_{d=1}^D \sigma_{nd}^2(t) dt < \infty$ a.s. We also assume that the matrix $\sigma(t)$ is nonsingular for Lebesgue-almost all $t \geq 0$. We denote by $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s, s \leq t\}, t \geq 0$; the filtration generated by the Brownian motion (augmented by the null sets), $A(t)$ is the finite-variation process.

$$\theta(t) := \sigma^{-1}(t)[b(t) - r(t)\tilde{1}], \quad \tilde{1} = (1, \dots, 1)'$$

$$Z_0(t) := \exp \left\{ - \int_0^t \theta'(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta(s)\|^2 ds \right\}.$$

For a standard market, we define the standard martingale measure \mathbb{P}_0 on \mathcal{F} by

$$\mathbb{P}_0(A) := \mathbb{E}[Z_0(T)\mathbb{1}_A], \quad \forall A \in \mathcal{F}_T.$$

$$H_0(t) := \frac{Z_0(t)}{S_0(t)}.$$

3 Agents, Endowments and Utility Functions

Our market consists of a finite number K of agents.

We define an aggregate endowment by $\{\epsilon(t) \triangleq \sum_{k=1}^K \epsilon_k(t); 0 \leq t \leq T\}$ with $\epsilon_k(t)$ is an exogenous endowment processes for $(k = 1, \dots, K)$; and define aggregate subsistence consumption as $\bar{c} \triangleq \sum_{k=1}^K \bar{c}_k$, such as $\bar{c}_k \triangleq \inf\{c \in \mathbb{R}, U_k(c) > -\infty\}$ and $\bar{c}_k \geq 0$ for $k = 1, \dots, K$.

Finally, the agents have a common discount rate $\beta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ which is a nonrandom Lebesgue-integrable function, bounded from below. Agent k will attempt to maximize his expected discounted utility from consumption process c_k

$$\mathbb{E} \int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u) du} U_k(c_k(t)) dt.$$

The endowment processes $\{\epsilon_k(\cdot)\}_{k=1}^K$, the utility functions $\{U_k(\cdot)\}_{k=1}^K$, and the discount rate $\beta(\cdot)$ are the primitives of our equilibrium model, from these primitives we will construct our equilibrium market when U_k is a function of both time and consumption.

4 Consumption and Portfolio Processes

Once an equilibrium market has been constructed, each agent k can choose a consumption process $c_k : [0, T] \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ and the portfolio process $\pi_k : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$. These are both $\{\mathcal{F}_t\}$ -progressively measurable; $\pi_k(\cdot)$ satisfies

$$\int_0^T |\pi(t)'(b(t) + \delta(t) - r(t)\tilde{1})| dt < \infty,$$

$$\int_0^T \|\sigma(t)' \pi(t)\|^2 dt < \infty$$

and c_k satisfies $\int_0^T c_k(t) dt < \infty$ almost surely.

The U_K structure implies that agent k is interested by the consumption process $c_k(\cdot)$ satisfying $c_k(t) \geq \bar{c}_k$, $0 \leq t \leq T$ a.s.

The wealth process $X_k(\cdot) = X_k^{\pi_k}$ is given by

$$\frac{X_k(t)}{S_0(t)} = \int_0^t \frac{\epsilon_k(u) - c_k(u)}{S_0(u)} du + \int \frac{1}{S_0(u)} \pi_k'(u) \sigma(u) dW_0(u), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1)$$

We take $X_k(0) = 0$.

5 The Individual Optimization Problems

Problem 5.1. Discover an optimal pair $(\hat{c}_k; \hat{\pi}_k)$ for the problem of maximizing expected discounted utility from consumption

$$\mathbb{E} \int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)} U_k(c_k(t)) dt,$$

over consumption/portfolio process pairs in the set

$$\mathcal{A}' \triangleq \{(c_k, \pi_k) \in \mathcal{A}_k; \mathbb{E} \int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u)} \min[0, U_k(c_k(t))] dt > -\infty\}. \quad (2)$$

We know that $c_k(t) \geq \bar{c}_k$ and $\mathbb{E} \int_0^T H_0(t) c_k(t) dt \leq \mathbb{E} \int_0^T H_0(t) \epsilon_k(t) dt$. We see that this problem is interesting only if the feasibility condition

$$\mathbb{E} \int_0^T H_0(t) \epsilon_k(t) dt \geq \bar{c}_k \cdot \mathbb{E} \int_0^T H_0(t) dt \quad (3)$$

is satisfied.

To settle this problem, we define the non-increasing, continuous function $I_k : (0, \infty) \rightarrow [\bar{c}_k, \infty)$ which, when restricted to $(0, U'(\bar{c}_k))$, is the (strictly decreasing) inverse of $U_k' : (\bar{c}_k, \infty) \rightarrow (0, U_k'(\bar{c}_k))$. On the interval $[U'(\bar{c}_k), \infty)$, $e^{-\int_0^t \beta(u)} U_k'(\cdot)$ is $y \mapsto I_k(y e^{\int_0^t \beta(u) du})$.

We define

$$\mathcal{X}_k(y) \triangleq \mathbb{E} \int_0^T H_0(t) I_k(y e^{\int_0^t \beta(u) du} H_0(t)) dt, \quad 0 < y < \infty. \quad (4)$$

6 Equilibrium and the Representative Agent

Theorem 6.1. Karatzas et Shreve (1998) If \mathcal{M} is an equilibrium market, then

$$\epsilon(t) = \sum_{k=1}^K I_k \left(\frac{1}{\lambda_k} e^{\int_0^t \beta(u) du} H_0(t) \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

Titre court de votre communication en 10 mots maximum

where $\lambda_k \in [0, \infty)$, $k = 1, \dots, K$, satisfy the system of equations

$$\mathbb{E} \int_0^T H_0(t) \left[I_k \left(\frac{1}{\lambda_k} e^{\int_0^t \beta(u) du} H_0(t) \right) - \epsilon_k(t) \right] dt = 0, \quad k = 1, \dots, K. \quad (6)$$

7 Main Results

The first result

Theorem 7.1. (exponential utility with subsistence consumption) :
With our function, the solution of the system is given by :

$$\log \lambda_k = \frac{\mathbb{E} \int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u) du} e^{-\epsilon(t)} [\epsilon(0) - \epsilon(t) - \bar{c}_k + \epsilon_k(t)] dt}{\mathbb{E} \int_0^T e^{-\int_0^t \beta(u) du} e^{-\epsilon(t)} dt}$$

and the optimal of consumption processus :

$$\hat{c}_k(t) = \log \lambda_k - \epsilon(0) + \epsilon(t) + \bar{c}_k \quad k = 1, \dots, K$$

The second result

Theorem 7.2. ($K = 2, U_1(c) = \log c, U_2(c) = 1 - e^{-c}$) : In this case, we have

$$U'(c, \tilde{\Lambda}) = \mathcal{H}(c, \tilde{\Lambda}) = \frac{\lambda_1}{c} \left[1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} c e^{-c} \right]$$

and the optimal consumption rates become

$$\hat{c}_1(t) = \frac{\epsilon(t)}{1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \epsilon(t) e^{-\epsilon(t)}}, \quad \hat{c}_2(t) = -\log \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 \epsilon(t)} + e^{-\epsilon(t)} \right).$$

Références

- Hammad, M. et Limam-Belarbi, F. (2017). *Optimal consumption and investment with levy processes for power utility functions*. Thèse de doctorat.
- Karatzas, I. et S. Shreve (1998). *Methods of Mathematical Finance*. Springer.

Summary

The aim of this paper is to investigate the equilibrium problem of a complete financial market. The objective is to maximize the portfolio. The dual convex of the utility function is used for the solution of maximization.

Evaluation d'options européennes en présence d'une volatilité stochastique et d'une composante de saut.

Souad KADEM*, Pr Kamal BOUKHETALA**

*,** Département de Probabilités et Statistiques
Faculté de Mathématiques, BP 32 El Alia
Bab Ezzouar, 16111 Alger, ALGÉRIE.

skadem@usthb.dz
kboukhetala@usthb.dz

RÉSUMÉ : Les économistes Black & Sholes (1973) ont été parmi les premiers à utiliser l'hypothèse d'un mouvement Brownien géométrique pour l'évolution du cours des actions. Ce modèle est cependant rejeté par la structure des marchés financiers car il repose sur des hypothèses qui simplifient à outrance la réalité au point de s'en éloigner car il se base sur la constance de la volatilité et sur la distribution normale pour le rendement de l'actif sous jacent à l'option qui sous estime fortement les événements « improbables » comme les crises et les crashes alors qu'ils sont beaucoup moins rares que cette loi ne le prévoit. L'utilisation des modèles alternatifs (Heston, 1993 et Bates, 1996) qui adhèrent mieux à la réalité des cours boursiers s'avère donc nécessaire. Nous verrons ainsi, que le fait de permettre à la volatilité d'évoluer au cours du temps dans le processus de prix de l'actif sous jacent, et aussi l'introduction d'une composante de saut va améliorer la qualité de l'évaluation et va influencer les primes données par un modèle où la volatilité est supposée constante.

1. Introduction

La théorie de l'évaluation des options est devenue un domaine riche en modélisations depuis le célèbre modèle fondateur de Black & Scholes (BS 1973), où les auteurs délivrent une formule d'évaluation donnant le prix (prime ou premium) d'une option européenne, jouissant d'un caractère analytique et d'une simplicité notable lui conférant une praticabilité certaine, cette formule est largement utilisée par les praticiens des marchés d'options.

Cependant, ce modèle est rejeté par la structure des marchés financiers car il repose sur des hypothèses qui simplifient à outrance la réalité au point de s'en éloigner. En effet, ce modèle se base sur la constance de la volatilité et sur la distribution normale pour le rendement de l'actif sous jacent à l'option qui sous estime fortement les événements « improbables » comme les crises et les crashes alors qu'ils sont beaucoup moins rares que cette loi ne le prévoit. Ceci sera confirmé par l'étude empirique de l'indice S&P500 où nous montrerons l'inefficacité du modèle BS à bien reproduire la dynamique des cours boursiers. L'évaluation d'un Call européen via des modèles alternatifs (Heston, 1993 et Bates 1996) adhérant mieux à la réalité des cours boursiers

est donc nécessaire afin de réduire le biais causé par l'utilisation du modèle à volatilité constante.

Présentation des modèles d'évaluation d'instruments optionnels

Le modèle à volatilité constante de Black & Scholes (1973)

Le modèle BS repose sur plusieurs hypothèses dont la plus importante est le cours de l'actif S qui obéit au processus d'évolution stochastique continu de Wiener défini par l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t \quad (1)$$

où μ est l'espérance des rendements de l'actif et σ est la volatilité du cours de l'actif.

La valeur d'un call européen ($f = C$) ou d'un put européen ($f = P$) sur une action qui ne verse pas de dividende est donnée par :

$$C^{BS} = S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \Phi(d_2) \quad (2)$$

$$P^{BS} = Ke^{-rT} \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1) \quad (3)$$

Le modèle à volatilité stochastique (Heston, 1993)

L'idée principale de la modélisation SV de Heston (1993) est d'introduire une corrélation non nulle entre les chocs du cours de l'actif sous-jacent et de la variance, il a donc proposé pour la variance un processus de diffusion à retour à la moyenne de type racine-carré à chocs corrélés avec le cours de l'actif sous-jacent.

Le modèle étant régi par la dynamique suivante :

$$(SV) \quad \begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_t^s \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dZ_t^v \\ dZ_t^s dZ_t^v = \rho dt \end{cases}$$

Heston (1993) fournit ainsi une solution analytique exacte (formule fermée : The closed-form solution) pour la prime d'une option d'achat européenne, Cette prime notée C^H est donnée par :

$$C^H(S_t, V_t, r, \tau, K) = S_t P_1 - K P_2 e^{-r\tau} \quad (4)$$

Le modèle à volatilité stochastique et à sauts (Bates, 1993)

Bates (1996) a modélisé le cours comme étant un processus mixte (diffusion et saut) en intégrant une volatilité stochastique, ainsi le modèle SVJ est défini comme suit :

$$(SVJ) \quad \begin{cases} dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dZ_t^v \\ \frac{dS_t}{S_t} = (\mu - \lambda\bar{j})dt + \sqrt{V_t}dZ_t^s + jdq \\ dZ_t^s dZ_t^v = \rho dt \end{cases}$$

Soit C^{Bt} la prime de Bates d'une option d'achat de type européen, sur action ne versant pas de dividende sur la durée de vie du contrat, elle est donnée par :

$$C^{Bt}(S_t, V_t, r, \tau, K) = S_t P_1 - K P_2 e^{-r\tau} \quad (5)$$

Dans le présent article, nous allons voir comment l'étude empirique menée sur des données historiques des rendements de l'indice SP 500 va montrer l'incapacité du modèle BS (1973) à reproduire la réalité erratique des marchés boursiers et comment l'introduction d'une volatilité stochastique ainsi qu'une composante de saut dans les cours des actifs va améliorer la qualité d'évaluation des primes d'options.

Références

- Bakshi, G., Madan, D., (2000). *Spanning and derivative-security valuation*, Journal of Financial Economics, 55, 205–238.
- Ball, C., Roma, A. (1994). *Stochastic volatility option pricing*. Journal of Financial and Qualitative Analysis 29, 598-607.
- Bates, D. (1996). *Jump and stochastic volatility : exchange rate processes implicit in deutsche mark options*, Review of Financial Studies 9, 69-107.
- Black, F. Scholes, M. (1973). *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy 81, 637–659.
- Cont, R., Tankov, P. (2004). *Financial Modeling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC.
- Heston, S. (1993). *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*. Review of Financial Studies 6, 327-343.

Jondeau, E., Huangpoon, S., Rodinger, M. (2007). *Financial modeling under non Gaussian distributions*, SPRINGER Finance.

Soukprasongsy, A. (2003). *La volatilité stochastique des marchés financiers : une application aux modèles d'évaluation d'instruments optionnels en temps continu*, thèse de Doctorat, École Doctorale des sciences Économiques et de Gestion d'Aix-Marseille.

Bayesian inference and prediction of the Exponential-Pareto distribution based on censored data

Sara Kermoune*, Assia Chadli**

*Laps, University of Badji Mokhtar - Annaba
Sarakermoune@gmail.com

**Laps, Université Badji Mokhtar - Annaba
assiachadli428@hotmail.com

1 Introduction

Exponential-pareto distribution (EPD) is a new distribution that is dependent on the Exponential and Pareto distribution, which is introduced by K. Abed Al-Kadim and M. Abdalhusain Boshi (2013).

The density, cumulative distribution, reliability and the hazard functions of the Exponential-Pareto distribution are given respectively by :

$$f(x; p, \lambda, \theta) = \frac{\lambda\theta}{p} \left(\frac{x}{p}\right)^{\theta-1} \exp\left(-\lambda\left(\frac{x}{p}\right)^\theta\right)$$

$$F(x; p, \lambda, \theta) = 1 - \exp\left(-\lambda\left(\frac{x}{p}\right)^\theta\right)$$

$$R(t) = \exp\left(-\lambda\left(\frac{t}{p}\right)^\theta\right)$$

$$h(x) = \frac{\lambda\theta}{p} \left(\frac{x}{p}\right)^{\theta-1}$$

In this paper we estimate the three parameters of EPD by the maximum likelihood method under type-II censoring where :

$$L(x; p, \lambda, \theta) = \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{i=1}^m f(x_i) [1 - F(x_m)]^{n-m}$$

is the likelihood function.

In the Bayesian estimation, prediction and posterior risks we use the squared error loss function. Finally, because the bayesian estimators of the parameters have not explicit forms so we cannot solve analytically and we use the Monte-Carlo methods (Metropolis-Hastings algorithm) to find the results.

2 Maximum likelihood estimation

In this section we obtain the maximum likelihood estimates (MLE) parameters of the Exponential-Pareto distribution, we use type II censored data. Consider a n-sample (X_1, X_2, \dots, X_n) generated from EPD. Let (X_1, X_2, \dots, X_m) , m-censored sample from EPD, $m \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, the likelihood is then given n data censored type II, the EPD sample m size, probability function can be constructed as follows :

$$L(x; p, \lambda, \theta) = \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{i=1}^m f(x_i) [1 - F(x_m)]^{n-m}$$

Where $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_m$. The likelihood function is given by :

$$L(x; p, \lambda, \theta) = \frac{\lambda^m \theta^m}{p^{m\theta}} \exp[-\lambda(\sum_{i=1}^m (\frac{x_i}{p})^\theta + (mn - m^2)(\frac{x_m}{p})^\theta)] \prod_{i=1}^m x_i^{\theta-1}$$

The maximum likelihood estimator of p, λ and θ are then the solutions of the following non-linear equations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(x;p,\lambda,\theta)}{\partial p} &= -m + \lambda \sum \frac{x_i}{p^\theta} - \lambda(mn - m^2) \frac{x_m}{p^\theta} = 0 \\ \frac{\partial \ln L(x;p,\lambda,\theta)}{\partial \lambda} &= \frac{m}{\lambda} - C_m = 0 \\ \frac{\partial \ln L(x;p,\lambda,\theta)}{\partial \theta} &= \frac{m}{\theta} - m \ln p + \sum_{i=1}^m \ln x_i - \lambda \sum \ln(\frac{x_i}{p})(\frac{x_i}{p})^\theta - m^2 (\ln \frac{x_m}{p})(\frac{x_m}{p})^\theta + mn (\ln \frac{x_m}{p})(\frac{x_m}{p})^\theta = 0 \end{aligned}$$

3 Bayesian estimation

3.1 Prior distribution

To find the bayesian estimators of the parameters of the model we propose the law $g(a, b)$ and $g(c, d)$ for the parameters θ and p , and the parameter λ admits prior density $\pi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

$$\pi(p, \lambda, \theta) = \pi(p)\pi(\lambda)\pi(\theta) = \frac{p^{a-1}}{\theta^{c-1}\lambda} \frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \exp(-(bp + d\theta))$$

3.2 Posterior distribution

$$\pi(p, \lambda, \theta | x) = \frac{L(x | p, \lambda, \theta)\pi(p, \lambda, \theta)}{L(x | p, \lambda, \theta)\pi(p, \lambda, \theta)dpd\lambda d\theta}$$

$$\pi(p, \lambda, \theta | x) = \frac{\frac{p^{a-1-m\theta}\lambda^{m-1}}{\theta^{c-m-1}} \exp(-(\lambda C_m + bp + d\theta)) \prod_{i=1}^m x_i^{\theta-1}}{\frac{p^{a-1-m\theta}\lambda^{m-1}}{\theta^{c-m-1}} \exp(-(\lambda C_m + bp + d\theta)) \prod_{i=1}^m x_i^{\theta-1} dpd\lambda d\theta}$$

where $A = \frac{p^{a-1-m\theta}\lambda^{m-1}}{\theta^{c-m-1}} \exp(-(\lambda C_m + bp + d\theta)) \prod_{i=1}^m x_i^{\theta-1} dpd\lambda d\theta$

3.3 The bayesian estimators under quadratic loss function

— Estimators of parameters :

$$\hat{p}_{BQ} = A^{-1} \int \int \int \frac{p^{a-m\theta} \lambda^{m-1}}{\theta^{-m+c-1}} e^{-\lambda C_m - (bp+d\theta)} \prod x_i^{\theta-1} dp d\lambda d\theta$$

$$\hat{\lambda}_{BQ} = A^{-1} \int \int \int \frac{p^{a-m\theta-1} \lambda^m}{\theta^{-m+c-1}} e^{-\lambda C_m - (bp+d\theta)} \prod x_i^{\theta-1} dp d\lambda d\theta$$

$$\hat{\theta}_{BQ} = A^{-1} \int \int \int \frac{p^{a-m\theta-1} \lambda^{m-1}}{\theta^{c-m-2}} e^{-\lambda C_m - (bp+d\theta)} \prod x_i^{\theta-1} dp d\lambda d\theta$$

— Estimation of the functions $R(x)$ and $h(x)$:

$$R_{BQ}(x) = A^{-1} \int \int \int \frac{\lambda^{m-1} p^{a-m\theta-1}}{\theta^{c-m-1}} \exp(-\lambda((\frac{x}{p})^\theta + C_m) - bp - d\theta) \prod x_i^{\theta-1} dp d\lambda d\theta dy$$

$$h_{BQ}(x) = A^{-1} \int \int \int \frac{p^{a-m\theta-2} \lambda^m}{\theta^{c-m-2}} (\frac{x}{p})^{\theta-1} e^{-\lambda C_m - (bp+d\theta)} \prod x_i^{\theta-1} dp d\lambda d\theta dy$$

The computational difficulties associated with these integrals are overcome by the use of Metropolis Hastings algorithms in MCMC methods.

4 Bayesian prediction

Let Y_1, \dots, Y_N a N sample from the E.P distribution , the probability density function of the k th order statistic is given by :

$$f_{(k)}(y | p, \lambda, \theta) = \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} \frac{\lambda \theta}{p} (\frac{y}{p})^{\theta-1} \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i k - 1 i \exp[-\lambda (\frac{y}{p})^\theta (1 + N - k + i)]$$

— The predictive density :

$$p(y | x) = A^{-1} \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} \int \int \frac{\lambda^m \theta^{m-c+2}}{p^{m\theta-a+2}} (\frac{y}{p})^{\theta-1} \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i k - 1 i \exp[-\lambda (\frac{y}{p})^\theta (N - k + 1 + i) - \lambda C_m - bp - d\theta] (\prod x_i^{\theta-1}) dp d\lambda d\theta$$

— The predictor :

$$E(y | x) = \int_0^{+\infty} y * p(y | x) dy$$

$$= A^{-1} \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^m \theta^{m-c+2}}{p^{(m+1)\theta-a+1}} y^\theta \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i k - 1 i \exp[-\lambda (\frac{y}{p})^\theta (N - k + 1 + i) - \lambda C_m - bp - d\theta] (\prod x_i^{\theta-1}) dp d\lambda d\theta dy$$

Références

- [1] Abed Al-Kadim .K , B. Dhea'a Mohammed (2013), Exponential Pareto Distribution, Journal of Mathematical Theory and Modeling/ Vol.3, No.5.
- [2] Aouf .F , Chadli. A (2017). Bayesian estimation in the generalized Lindley model .International journal of mathematical models and methods in applied sciences. Volume 11.
- [3] Boudjerda. K, A. Chadli , H.Fellag (2017) , Etude de l'estimateur de Bayes sous différentes fonctions de perte, Thèse de Doctorat, Université Badji Moukhtar, Annaba.
- [4] Dey .S (2009). Comparaison of Bayes estimators of the parameter and reliability function for Rayleigh distribution under different loss functions. journal of mathematical sciences .
- [5] Syuan-Rong Huanga , Shuo-JyeWub (2012). Bayesian estimation and prediction for Weibull model with progressive censoring. Journal of Statistical Computation and Simulation, Number : 1607–1620.

Summary

In this paper ,inference for Exponential-pareto distribution (EPD) under type-II censored data is discussed .we propose maximum likelihood estimation (MLE) and Bayesian estimation of parameters of the EPD .Bayesian estimators of the parameters have not explicit forms so we cannot solve analytically and we use the Monte-Carlo methods to find the results.

La théorie de crédibilité et l'estimation de la prime actuarielle

Exemple: Discussion d'estimateurs des paramètres de structures

Assia KHENOUSI*, Hnaya KHERCHI MEDJEDEN **
Laboratoire LASAP à Kolea ENSSEA Koléa

*khenoussi-assia@hotmail.fr **Hanya.kherchi@gmail.com

Résumé. Dans notre papier nous développons d'avantage une revue de littérature sur l'intérêt de la théorie de crédibilité et ses applications en actuariat. Plus précisément dans le calcul de la prime actuarielle notamment ses applications en assurance incendie, une branche connue par l'hétérogénéité de son portefeuille, discutant l'estimation des paramètres de structure à savoir la prime pure individuelle et collective en cette branche d'assurance.

Mots clés: modélisation actuarielle, paramètres de structure, modèle de Buhlmann-Straub, modèle hiérarchique de Jewell.

MS Classification: 91B30, 91G80, 91G70, 91B25

1 Introduction

Les premières réflexions sur la probabilité de crédibilité revient au philosophe britannique L. Bertrand Russell [1872-1970] où il a introduit la notion de *la probabilité crédible* qui se diffère de *la probabilité mathématique* sur le critère de la réalisation. Le développement de la théorie de crédibilité coïncide aussi l'émergence de l'approche bayésienne avec les travaux de Thomas Bayes en 1763 et son fameux théorème *Théorème de bayes* connu aussi par *la règle de bayes*, qui a non seulement contribué à l'évolution de la théorie de probabilité mais aussi il servira d'outil par la suite aux actuaires pour formaliser les problématiques actuarielles et les mettre dans un contexte purement mathématique et statistique.

En actuariat, les premières applications de la théorie de crédibilité en tarification actuarielle revient à Arthur H. Mowbray (1914) et Whitney (1918)¹, ces travaux ont donné naissance à *la théorie de la fluctuation limitée* surnommée aussi *crédibilité américaine*, qui sont à la base que des suggestions de réponse au questionnement posé à l'affaire de General Motors (GM) avec son assureur Allstate (1910) : à partir de quelle taille une entreprise peut être tarifée exclusivement sur la base de sa propre expérience ? autrement dit comment mettre à jours les primes individuelles de la sinistralité individuelle observée ?

L'essai de A. Whitney (1918) mettant en évidence l'application du théorème de bayes malgré son originalité mais il est mal conçu, c'est pourquoi par la suite Bailey et avec ses travaux

1. N°01. Proceedings de la casualty actuarial society .1914

La théorie de crédibilité et l'estimation de la prime actuarielle

Exemple: Discussion d'estimateurs des paramètres de structures

Bailey (1945) et Bailey (1950) un partisan de l'approche bayésienne, propose le modèle de calcul de la prime bayésienne [1950] linéaire basé sur la minimisation de l'erreur quadratique moyenne².(eq.1)

Un estimateur $\mu(\hat{\theta})$ de $\mu(\theta)$ est aussi bon qu'un estimateur $\mu(\hat{\theta})$ si :

$$E[(\mu(\hat{\theta}) - \mu(\theta))^2] \leq E[(\mu(\hat{\theta}) - \mu(\theta))^2]$$

$E[\mu(\hat{\theta})]$: est l'erreur quadratique moyenne de $\mu(\hat{\theta})$

$$\mu(\hat{\theta}) = E[\mu(\theta)|X] \quad (1)$$

$\mu(\hat{\theta})$ est supposé le meilleur estimateur de $\mu(\theta)$.

Cette prime présente des insuffisances sur deux volets, volet crédibilité un problème auquel Bühlmann.H. (1967) a proposé une approximation de la prime de risque aux fonctions linéaires des observations, une autre insuffisance de la prime bayésienne réside dans ses hypothèses dont la distribution des paramètres du modèle, c'est pourquoi Bühlmann (1969) a développé une approche non paramétrique pour le calcul de la prime de crédibilité .

Les travaux de Bühlmann. H. (1967) et Bühlmann (1969) ont marqué une étape importante dans l'histoire de la théorie de crédibilité cette époque nommée aussi *Théorie de crédibilité moderne*. Ce modèle sera conçu par la suite par Bühlmann et Straub Bühlmann H. (1970) pour être généralisé et adapté à des portefeuilles avec des tailles importantes en tenant compte de l'exposition de ses contrats aux risques . Ce modèle constitue un support théorique complet mais dans le point de vue pratique est impossible à appliquer .

Dans Jewell (1974) et Jewell (1975), Jewell a fait introduit le concept de l'hiérarchisation des informations contenant dans un portefeuille de contrats et forcé la linéarisation des paramètres de structure.

Dans ce qui suit nous développons brièvement quelques notations de la théorie de crédibilité avec des exemples de ses applications en assurance incendie.

2 La théorie de crédibilité et le calcul de la prime actuarielle

La théorie de la crédibilité est l'ensemble des techniques utilisées par les actuaires pour déterminer la prime d'un assuré cas contrat dans un portefeuille hétérogène .

Formellement la tarification d'un contrat j pour la période (t+1) n'est que :

$$(1 - Z_{(t)})\hat{p} + Z_{tj}\bar{p}_t \quad (2)$$

où $j\bar{p}_t = \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t j p_s$

le coefficient Z est le facteur de crédibilité. P.Thérond [2016]³ la théorie de la fluctuation li-

2. Vincent Goulet.support du cours :*Mathématiques actuarielles IARD II (théorie de crédibilité* École d'actuariat, université Laval.Hiver 2010)

3. Théorie de crédibilité, Pierre.E.THEROND, ISFA ; 2004-2005

mitée consiste à fixer le coefficient Z pour que les variations aléatoires de la prime restent limitées.

La valeur de Z détermine le type de crédibilité dont on a affaire si :

- $Z=1$ il s'agit de crédibilité totale
- s'il est entre 0 et 1 alors il s'agit d'une crédibilité partielle.

2.1 L'application de la théorie de crédibilité dans le tarif risque incendie

Nous nous intéressons à la discussions des résultats d'estimations des paramètres de structures dans les deux études réalisées par Cohen.A (1986) et Deville.C (2004).

L'approche de Hans Bulmann et Erwin Straub en 1970 consiste à travailler sur les données de la statistique commune⁴ avec une pondération des contrats contenant dans le portefeuille, autrement dit le traitement du tarif du portefeuille se fait par l'attribution des poids aux contrats, cette approche a fait objet d'une application au tarif assurance incendie des grands risques Cohen.A (1986) ce tarif sera jugé par la suite dépassé et inadapté avec l'évolution considérable de la branche, une problématique repris par Deville.C (2004) en proposant d'aller vers l'adaptation du tarif en faisant appel à l'approche de Jewell (1975), cette dernière tient aussi compte du poids des contrats mais aussi propose de travailler sur des sous portefeuilles plus en plus homogène c'est pourquoi cette approche nommée aussi le modèle de crédibilité hiérarchique de Jewell.

Discussion des paramètres de structure

Fig.1-structure du modèle Cohen.A (1986)

Contrats	k=1	...	k=n
Var de structure	θ_1	...	θ_n
Année1	$X_{11}(\omega_{11})$...	$X_{n1}(\omega_{n1})$
Année 2	$X_{12}(\omega_{12})$...	$X_{n2}(\omega_{n2})$
⋮	⋮	⋮	⋮
Année t	$X_{1t}(\omega_{1t})$...	$X_{nt}(\omega_{nt})$

Fig.2-Principe du modèle de Jewell

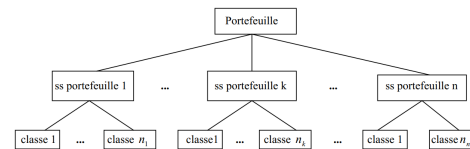


Fig.3-structure du modèle Deville.C (2004)

ss portefeuille	k=1	k=2	...	k=n
Var de structure1	θ_1	θ_2	...	θ_n
Var de structure2	$\theta_{11} \theta_{12} \dots$	$\theta_{21} \theta_{22} \dots$...	$\theta_{n1} \theta_{n2} \dots$
Année1	$X_{111} X_{121} \dots$	$X_{211} X_{221} \dots$...	$X_{n11} X_{n21} \dots$
	$\omega_{111} \omega_{121} \dots$	$\omega_{211} \omega_{221} \dots$...	$\omega_{n11} \omega_{n21} \dots$
Année2	$X_{112} X_{122} \dots$	$X_{212} X_{222} \dots$...	$X_{n12} X_{n22} \dots$
	$\omega_{112} \omega_{122} \dots$	$\omega_{212} \omega_{222} \dots$...	$\omega_{n12} \omega_{n22} \dots$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Nous développons d'avantage dans la suite de notre papier l'étude des estimateurs des paramètres de structure.

Références

Bailey, A. L. (1945). A generalized theory of credibility. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* 32, 13–20.

4. les statistiques nationales du secteur en général et de la branche

La théorie de crédibilité et l'estimation de la prime actuarielle

Exemple: Discussion d'estimateurs des paramètres de structures

- Bailey, A. L. (1950). Credibility procedures, laplace's generalization of bayes' rule and the combination of collateral knowledge with observed data. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* 37.
- Bühlmann, H. (1969). Experience rating and credibility. *ASTIN Bulletin* 5, 157–165.
- Bühlmann H., S. E. (1970). Glaubwürdigkeit für Schadensätze. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker* 70, 149–164.
- Cohen, A., G. Dupin, C. (1986). Tarification de l'incendie des risques méthode de crédibilité. *Astin Bull* 16, 149–164.
- Deville, C. (2004). Tarification des risques industriels par le modèle de crédibilité : prise en compte de la taille des risques extension à l'assurance pertes d'exploitation. *Bulletin Français d'Actuariat, Fédération Française des Sociétés d'assurances (FFSA)* 6, N.12, 103–136.
- H., B. (1967). Experience rating and credibility. *ASTIN Bulletin* 4, 199–207.
- Jewell, W. S. (1974). Credible means are exact bayesian for exponential families. *ASTIN Bulletin* 8, 77–90.
- Jewell, W. S. (1975). The use of collateral data in credibility theory: a hierarchical model. *Journal de l'institut italien des actuaires* 138, 1–16.
- Mowbray, A. H. (1914). How extensive a payroll exposure is necessary to give a dependable pure premium? *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* 1, 25–30.
- Whitney, A. W. (1918). The theory of experience rating. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* 4, 275–293.

Summary

In our paper we have developed a review of the literature on the interest of the theory of credibility and their applications in actuarial science. more specifically in the determination of the actuarial premium, in particular for fire insurance, a branch which is well known for the heterogeneity of its portfolio, we discuss the estimation of structural parameters namely the individual and collective premium in this branch of insurance.

Nonparametric local linear estimator of the conditional hazard function in the functional single-index model

Torkia MEROUAN*, Boubaker MECHAB**
Abdelhak CHOUAF ***

*University of Djillali Liabes
L.P 89, Sidi Bel Abbès 22000, Algeria
merouan-to@hotmail.com

**University of Djillali Liabes
L.P 89, Sidi Bel Abbès 22000, Algeria
autre-adresse@email

***University of Djillali Liabes
L.P 89, Sidi Bel Abbès 22000, Algeria
abdo_stat@yahoo.fr

Résumé. Dans ce papier, nous présentons l'estimation de la fonction de hasard conditionnelle par la méthode locale linéaire quand la variable réponse est scalaire et la variable explicative hilbertienne dans le modèle à indice simple. Sous certaines conditions, nous établissons la convergence presque-complète uniforme, et nous donnons également les vitesses de convergence correspondantes.

1 Introduction

The nonparametric estimation of conditional hazard function is important to a large degree in statistics. For example, we find their use in survival analysis and in seismology, medicine, reliability, etc. Concerning the first dealing with this function, when the regressors are functional, we refer to the work of Ferraty et al. (2008). They proved the almost complete convergence (with rate) of the kernel estimation. Quintela-Del-Río (2008) has studied the asymptotic normality of the same estimator in α -mixing data case. On the other hand, the local linear regression model has been considered by others authors, Baïllo et Grané (2009) proposed a local linear estimator of the regression operator when the explanatory variable takes values in a Hilbert space. We can cite also the work of Barrientos-Marin et al. (2010), they introduce the functional locally modeled regression method which is a direct extension of the functional nonparametric regression model. Demongeot et al. (2013) used the same approach to estimate the conditional density. Recently, Massim et Mechab (2016) established the almost complete convergence of conditional hazard function in the same set of estimation.

The single-index model is one of the most important methods for reducing the dimensionality, where we find their application in econometrics, which its a tradeoff between nonparametric and parametric models. In nonparametric functional statistics, this model was introduced by Ferraty et al. (2003) of the kernel regression estimation. Attaoui et al. (2011) specified the pointwise and the uniform almost complete convergence (with the rate) for the conditional

density of this model. After that, this method has been used to estimate the conditional hazard function in the quasi-associated data see Hadjila et Ahmed (2018).

The aim of this paper is to study the local linear kernel estimator of the conditional hazard function in the single functional index structure when the data are independent and identically distributed. We prove the uniform almost complete convergence with rate of the constructed estimator.

The paper is organized as follows : in section 2, we present our model and estimator. In section 3, we introduce our assumptions and give the main results. Finally, in Section 4, we give The proofs of our results.

2 Single Functional Index Model and Estimator

Consider the sample $(X_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ of n independent pairs identically distributed as a couple of random variables (X, Y) , taking its values in $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$, where \mathcal{H} is a separable real Hilbert space with the norm $\|\cdot\|$ generated by an inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$. We consider the semi metric d_θ , associated to the single index $\theta \in \mathcal{H}$ defined by $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{H} : d_\theta(x_1, x_2) := |\langle x_1 - x_2, \theta \rangle|$. In our context, we assume that the conditional hazard function of Y given X has a single-index structure θ in \mathcal{H} , where this latter denoted by $h_\theta^x(\cdot)$ and is given by

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad h_\theta^x(y) := h(y | \langle x, \theta \rangle).$$

Distinctly, the identifiability of the model is assured such that for all $x \in \mathcal{H}$, we get,

$$h_1(y | \langle \cdot, \theta_1 \rangle) = h_2(y | \langle \cdot, \theta_2 \rangle) \Rightarrow h_1 \equiv h_2 \text{ and } \theta_1 = \theta_2.$$

The expression of the conditional hazard function is defined as follows by

$$h_\theta^x(y) = \frac{f_\theta^x(y)}{1 - F_\theta^x(y)}, \quad F_\theta^x(y) < 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

In this paper, we define the local linear estimator $\widehat{h}_\theta^x(y)$ of $h_\theta^x(y)$ by

$$\widehat{h}_\theta^x(y) = \frac{\widehat{f}_\theta^x(y)}{1 - \widehat{F}_\theta^x(y)}$$

where, $\forall y \in \mathbb{R}$

$$\widehat{F}_\theta^x(y) = \frac{\sum_{1 \leq i, j \leq n} W_{\theta, ij}(x) H(h_H^{-1}(y - Y_j))}{\sum_{1 \leq i, j \leq n} W_{\theta, ij}(x)}, \quad \widehat{f}_\theta^x(y) = \frac{\sum_{1 \leq i, j \leq n} W_{\theta, ij}(x) H'(h_H^{-1}(y - Y_j))}{h_H \sum_{1 \leq i, j \leq n} W_{\theta, ij}(x)}$$

with

$$W_{\theta, ij}(x) = \beta_\theta(X_i, x) \left(\beta_\theta(X_i, x) - \beta_\theta(X_j, x) \right) K(h_K^{-1} d_\theta(x, X_i)) K(h_K^{-1} d_\theta(x, X_j))$$

and $\beta_\theta(X_i, x) = \langle x - X_i, \theta \rangle$ is a known bi-functional operator from \mathcal{H}^2 into \mathbb{R} , such that $\forall x' \in \mathcal{H}$, $\forall \theta \in \mathcal{H}$, $\langle x' - x', \theta \rangle = 0$, with the function K is a kernel, H is a distribution function (respectively, H' is the derivative of H) and $h_K = h_{K, n}$ (respectively, $h_H = h_{H, n}$) is a sequence of positive real numbers.

2.1 Uniform almost complete convergence

For uniform almost complete convergence, we need the following assumptions :

(U1) We put $\mathbb{P}(|< X - x, \theta >| < h_K) =: \phi_{\theta, x}(h_K) > 0$ and there exists a differentiable function $\phi(\cdot)$ such that $\forall x \in S_{\mathcal{H}}$ and $\forall \theta \in \Theta_{\mathcal{H}}$

$$0 < C\phi(h_K) \leq \phi_{\theta, x}(h_K) \leq C'\phi(h_K) \leq \infty \quad \text{and} \quad \exists \eta_0 > 0, \forall \eta < \eta_0, \phi'(\eta) < 0,$$

where ϕ' is the first derivative function of ϕ and $\phi(0) = 0$.

(U2) The Operators F_{θ}^x and f_{θ}^x satisfy the Hölder condition :

(i) $\forall (x, y) \in \mathcal{H} \times S_{\mathbb{R}}, \forall \theta \in \Theta_{\mathcal{H}}, \exists 0 < \tau < 1, F_{\theta}^x(y) \leq 1 - \tau, \exists b_1, b_2 > 0, \forall (y, y') \in S_{\mathbb{R}}^2, \forall (x, x') \in \mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_x,$

$$|F_{\theta}^x(y) - F_{\theta}^x(y')| \leq C(\|x - x'\|^{b_1} + |y - y'|^{b_2}).$$

(ii) $\forall (x, y) \in \mathcal{H} \times S_{\mathbb{R}}, \forall \theta \in \Theta_{\mathcal{H}}, \exists \alpha < \infty, f_{\theta}^x(y) \leq \alpha,$

$$|f_{\theta}^x(y) - f_{\theta}^x(y')| \leq C(\|x - x'\|^{b_1} + |y - y'|^{b_2}).$$

(U3) The function $\beta_{\theta}(\cdot, \cdot)$ satisfies (H3) and the following Lipschitz's condition :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \forall \theta \in \Theta_{\mathcal{H}}, \forall x' \in \mathcal{H}, |\beta_{\theta}(x_1, x') - \beta_{\theta}(x_2, x')| \leq Cd_{\theta}(x_1, x_2).$$

(U4) The kernel $K_{\theta, i}(\cdot)$ is a Lipchitzian function and differentiable, supported within $(-1, 1)$.

(U5) For $v_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ the sequences $q_n^{S_{\mathcal{H}}}$ and $q_n^{\Theta_{\mathcal{H}}}$ satisfy :

$$\begin{aligned} \frac{(\ln n)^2}{n\phi(h_K)} &< \ln q_n^{S_{\mathcal{H}}} + \ln q_n^{\Theta_{\mathcal{H}}} < \frac{n\phi(h_K)}{\ln n}, \\ \frac{(\ln n)^2}{nh_H\phi(h_K)} &< \ln q_n^{S_{\mathcal{H}}} + \ln q_n^{\Theta_{\mathcal{H}}} < \frac{nh_H\phi(h_K)}{\ln n}, \end{aligned}$$

and for some $\lambda > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\lambda} h_H = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{(\lambda+1)/2} (q_n^{S_{\mathcal{H}}} q_n^{\Theta_{\mathcal{H}}})^{1-m} < \infty, \quad \text{for some } m > 1.$$

Theorem 2.1. *Under assumptions (U1)-(U5), we have*

$$\sup_{\theta \in \Theta_{\mathcal{H}}} \sup_{x \in S_{\mathcal{H}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} |\widehat{h}_{\theta}^x(y) - h_{\theta}^x(y)| = O(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + O_{a.co.} \left(\sqrt{\frac{\ln q_n^{S_{\mathcal{H}}} + \ln q_n^{\Theta_{\mathcal{H}}}}{nh_H\phi(h_K)}} \right).$$

Proof of Theorem 2.1.

The proof can be deduced from Lemmas 2.2-2.4, also, Corollary 2.5, which is given as follow :

Lemma 2.2. *Under assumptions (U1),(U2) and (H4), we obtain*

$$\sup_{\theta \in \Theta_{\mathcal{H}}} \sup_{x \in S_{\mathcal{H}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} |F_{\theta}^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_{\theta, N}^x(y)]| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2})$$

and

$$\sup_{\theta \in \Theta_{\mathcal{H}}} \sup_{x \in S_{\mathcal{H}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} |f_{\theta}^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{f}_{\theta, N}^x(y)]| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}).$$

Estimation of the conditional hazard function

Lemma 2.3. Under assumptions (U1), (U3), (U4)(i) and (U5), we obtain

$$\sup_{\theta \in \Theta_{\mathcal{H}}} \sup_{x \in S_{\mathcal{H}}} |1 - \widehat{g}_{\theta, D}^x| = O_{a.co.} \left(\sqrt{\frac{\ln q_n^{S_{\mathcal{H}}} + \ln q_n^{\Theta_{\mathcal{H}}}}{n\phi(h_K)}} \right) \text{ and } \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\inf_{\theta \in \Theta_{\mathcal{H}}} \inf_{x \in S_{\mathcal{H}}} \widehat{g}_{\theta, D}^x < 1/2 \right) < \infty.$$

Lemma 2.4. Under assumptions (U1)-(U5), we obtain

$$\sup_{\theta \in \Theta_{\mathcal{H}}} \sup_{x \in S_{\mathcal{H}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} |\widehat{F}_{\theta, N}^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_{\theta, N}^x(y)]| = O_{a.co.} \left(\sqrt{\frac{\ln q_n^{S_{\mathcal{H}}} + \ln q_n^{\Theta_{\mathcal{H}}}}{n\phi(h_K)}} \right)$$

and

$$\sup_{\theta \in \Theta_{\mathcal{H}}} \sup_{x \in S_{\mathcal{H}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} |\widehat{f}_{\theta, N}^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{f}_{\theta, N}^x(y)]| = O_{a.co.} \left(\sqrt{\frac{\ln q_n^{S_{\mathcal{H}}} + \ln q_n^{\Theta_{\mathcal{H}}}}{nh_H\phi(h_K)}} \right).$$

Corollary 2.5. Under the conditions of Theorem 2.1, we obtain

$$\exists \epsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\inf_{\theta \in \Theta_{\mathcal{H}}} \inf_{x \in S_{\mathcal{H}}} \inf_{y \in S_{\mathbb{R}}} |1 - \widehat{F}_{\theta}^x(y)| < \epsilon \right) < \infty.$$

Références

- Attaoui, S., A. Laksaci, et E. O. Said (2011). A note on the conditional density estimate in the single functional index model. *Statistics & probability letters* 81(1), 45–53.
- Baïllo, A. et A. Grané (2009). Local linear regression for functional predictor and scalar response. *Journal of Multivariate Analysis* 100(1), 102–111.
- Barrientos-Marin, J., F. Ferraty, et P. Vieu (2010). Locally modelled regression and functional data. *Journal of Nonparametric Statistics* 22(5), 617–632.
- Demongeot, J., A. Laksaci, F. Madani, et M. Rachdi (2013). Functional data : local linear estimation of the conditional density and its application. *Statistics* 47(1), 26–44.
- Ferraty, F., A. Peuch, et P. Vieu (2003). Modèle à indice fonctionnel simple. *Comptes Rendus Mathématique* 336(12), 1025–1028.
- Ferraty, F., A. Rahbi, et P. Vieu (2008). Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle. *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées* 53(1), 1–18.
- Hadjila, T. et A. S. Ahmed (2018). Estimation and simulation of conditional hazard function in the quasi-associated framework when the observations are linked via a functional single-index structure. *Communications in Statistics-Theory and Methods* 47(4), 816–838.
- Massim, I. et B. Mechab (2016). Local linear estimation of the conditional hazard function. *International Journal of Statistics and Economics* 17, 1–11.
- Quintela-Del-Río, A. (2008). Hazard function given a functional variable : Non-parametric estimation under strong mixing conditions. *Journal of Nonparametric Statistics* 20(5), 413–430.

Summary

In this paper, we present a nonparametric estimate of the conditional hazard function by the local linear approach of a scalar response variable given a hilbertian random variable via the single-index structure. We establish the uniform consistency (with rate) of the constructed estimator under some general conditions.

Asymptotic study of robust nonparametric regression for a functional regressor

Imane METMOUS*, Mohammed Kadi Attouch**

*Univ.Djillali Liabès, B.p N89 de Sidi Bel Abbès 22000, Algérie
imene22math@gmail.com

**Univ.Djillali Liabès, B.p N89 de Sidi Bel Abbès 22000, Algérie
Department of Mathematique, College of Sciences King Khalid
University Saudi Arabia,Asir-Abha, P.O.Box:960
attou-kadi@yahoo.fr

Résumé. L'estimation robuste présente une approche alternative aux méthodes classiques qui n'est pas affectée par la présence de données aberrantes. Récemment, ces estimateurs robustes ont été pris en compte pour les modèles avec données fonctionnelles. Dans cette présentation, nous nous concentrons sur les propriétés asymptotiques d'une estimation non paramétrique conditionnelle d'une variable à valeurs réelles avec une covariable fonctionnelle. Nous présentons des résultats traitant la convergence presque complète et de la normalité asymptotique pour cet estimateur sous la propriété de concentration de la mesure de probabilité sur de petites billes des variables explicatives fonctionnelles.

1 Introduction

A common problem in statistics consists in trying to explain how a variable of interest Y is linked with a covariate X . This talk deals with this framework, where we assume that the variable to explain Y is real valued and the explanatory variable X takes values in a semimetric functional space (\mathcal{F}, d) . This kind of variables, well known as functional variables in literature allows to consider variables as functions (of time for instance), which is interesting since it is well adapted to the functional nature of the observations. In this context, the most general model is the regression model when the covariate is functional, which writes

$$Y = r(X) + \epsilon$$

, where r is an operator from \mathcal{F} to \mathbb{R} and ϵ is a random error variable. The estimation of r seen as the conditional mean of Y given $X = x$ may be unadapted to some situations. For instance, the presence of outliers or considering heteroskedastic variables can lead to irrelevant results. Robust regression has been introduced to solve these problems.

2 the model

Let $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ be n independent pair identically distributed as (X, Y) which is a random valued in $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$, we consider ψ_x a real-valued Borel function satisfying some regularity conditions to be stated below. the nonparametric model studied in this paper denoted by θ_x , is implicitly defined as zero with respect to (w.r.t) t of the equation

$$\Psi(t, x) = \mathbb{E}[\psi_x(Y, t)|X = x] \forall t \in \mathbb{R}$$

we suppose that, for all $x \in \mathcal{F}$, θ_x exist and unique. We consider the kernel estimate

$$\widehat{\Psi}(t, x) := \frac{\sum_{i=1}^n K(h_n^{-1}d(x, X_i))\psi_x(Y_i, t)}{\sum_{i=1}^n K(h_n^{-1}d(x, X_i))} \forall t \in \mathbb{R}$$

of $\Psi(t, x)$, where K is a kernel and $h_n := h$ is a sequence of positive real numbers. A natural estimator $\widehat{\theta}_x$ of θ_x is a zero w.r.t. t the equation $\widehat{\Psi}(x, t) = 0$.

2.1 the main result

In the following x is a fixed point in \mathcal{F} , \mathcal{N} denotes a fixed neighborhood of x , and we introduce the following assumptions :

- (H1) $\mathbb{P}(X \in B(x, h)) := \phi_x(h) > 0, \forall h > 0$ where $B(x, h) = \{X' \in \mathcal{F} : d(X', X) \leq h\}$
- (H2) The function $\Psi(\cdot, \cdot)$ satisfies Hölder conditions w.r.t the second variable, that is, there exists a strictly constant b such that
 $\exists C_1 > 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_x, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad |\Psi(t, x_1) - \Psi(t, x_2)| \leq C_1 d^{b_1}(x_1, x_2)$
- (H3) The function ψ_x is continuous differentiable function, strictly monotone, and bounded w.r.t the seconde component, and its derivative $\frac{\partial \psi_x(y, t)}{\partial t}$ is bounded and continuous at θ_x uniformly in y .
- (H4) The kernel K is a differentiable function supported on $[0, 1]$. Its derivative K' exists and satisfies $K'(t) < 0$ for $0 < t < 1$.
- (H5) $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n\phi_x(h)} = 0$.
- (H6) The function $\lambda_\gamma(t, x) = \mathbb{E}[\psi_x^\gamma(Y, t)|X = x]$ for $\gamma \in [1, 2]$ satisfies the Hölder condition w.r.t the seconde variable, that is : there exists a positive constant b_γ such that

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_x, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |\lambda_\gamma(t, x_1) - \lambda_\gamma(t, x_2)| \leq C_2 d^{b_\gamma}(x_1, x_2)$$

(H7) The derivative of the real function $\varphi_x(s) = \mathbb{E}[\psi_x(Y, t)|d(x, X) = s]$, at 0 exist.

(H8) There exists a function $\beta_x(\cdot)$ such that

$$\forall t \in [0, 1] \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_x(th)}{\phi_x(h)} = \beta_x(t) \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n\phi_x(h) = \infty$$

3 theorem 1 :

(the almost complete convergence)

see :(Azzedine et al., 2008) Assume the(H1) -(H5) are satisfied, then θ_x exists and unique a.s.for sufficiently large n, and we have :

$$\hat{\theta}_x - \theta_x = O(h_n^{b_1}) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h)}}\right) \quad a.co.$$

The proof of this **Theorem** is achieved with the following lemmas

3.1 lemma

Under hypotheses (H1),(H4) and (H5) we have

$$\hat{\Psi}_D(x) - \mathbb{E}[\hat{\Psi}_D(x)] = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h)}}\right) \quad a.co.$$

3.2 lemma

Under hypotheses (H1),(H2),(H4) and (H5) we have for all $t \in \mathbb{R}$

$$\Psi(t, x) - \mathbb{E}[\hat{\Psi}_N(t, x)] = O(h_n^{b_1}).$$

3.3 lemma

Under the hypotheses of **Theorem1** we have

$$\hat{\Psi}'(\xi_{x,n}, x) \longrightarrow \Gamma_1(\theta_x, x) \quad a.co. \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

Furthermore, the exists $\zeta_1 > 0$ such that

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\left|\hat{\Psi}'_N(\xi_{x,n}, x)\right| \leq \zeta_1\right) \leq \infty.$$

4 theorem 2 :

(asymptotic normality)

see :(Attouch et al., 2009) Under (H1),(H2),(H3),(H4),(H6),(H8)

$$\left(\frac{n\phi_x(h)}{\sigma^2(\theta_x, x)}\right)^{1/2} (\hat{\theta}_x - \theta_x - B_n(x)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

the proof of this **Theorem** can be deduced from the following results

4.1 lemma

Under hypotheses (H1),(H2),(H4),(H6) and (H8) we have for any $x \in \mathcal{A}$.

$$\left(\frac{n\phi_x(h)\beta_1^2}{\beta_2\lambda(\theta_x, x)} \right)^{1/2} (\widehat{\Psi}_N(\theta_x, x) - \mathbb{E}[\widehat{\Psi}_N(\theta_x, x)]) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

4.2 lemma

Under hypotheses (H1),(H4),(H7) and (H8)

$$\mathbb{E}[\widehat{\Psi}_N(\theta_x, x)] = h\varphi'_x(0) \frac{\beta_0}{\beta_1} + o(h)$$

4.3 lemma

Under the hypotheses of **Theorem 2** we have

$$\widehat{\Psi}'(\xi_{x,n}, x) \longrightarrow \Gamma_1(\theta_x, x) \quad \text{in probability} \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Références

- Attouch, M., A. Laksaci, et E. Ould-Saïd (2009). Asymptotic distribution of robust estimator for functional nonparametric models. *Communications in Statistics Theory and Methods* 38(8), 1317–1335.
- Azzedine, N., A. Laksaci, et E. Ould-Saïd (2008). On robust nonparametric regression estimation for a functional regressor. *Statistics & Probability Letters* 78(18), 3216–3221.

Summary

It is well known that robust estimation provides an alternative approach to classical methods which is not unduly affected by the presence of outliers. Recently, these robust estimators have been considered for models with functional data. In this talk, we focus on asymptotic properties of a conditional nonparametric estimation of a real valued variable with a functional covariate. We present results dealing with the almost complete convergence and asymptotic normality for this estimator under the probability measure's concentration property on small balls of the functional explanatory variables .

for conditionally negatively associated random variables of partial sums, application to AR(1) model generated by \mathcal{F} -NA errors

Amina Zeblah*, Samir Benaissa**

*Univ.Djillali Liabès, B.p N89 de Sidi Bel Abbès 22000, Algérie
zeblahamina21@gmail.com

**Univ.Djillali Liabès, B.p N89 de Sidi Bel Abbès 22000, Algérie
benaissamir@yahoo.fr

Résumé. Les inégalités de probabilités exponentielles sont des outils très importants en probabilités et statistiques. Dans ce papier, on établit des inégalités exponentielles conditionnelles pour les distributions des sommes de variables aléatoires conditionnellement négativement associées (\mathcal{F} -NA, en bref). L'inégalité étend et améliore les résultats de (Benaissa et al., 2011) et on obtient un résultat traitant de la convergence conditionnelle complète des processus autorégressifs de premier ordre avec des innovations (\mathcal{F} -NA) identiquement distribuées.

1 Introduction

The random variables in many statistical applications are assumed to be independent. However, that is often not a very realistic assumption. Therefore, many statisticians extended this condition to various dependence structures. One of the important dependence structures is the negative association structure, which was introduced by (Joag-Dev et al., 1983) and (Khurshed et al., 1981). From the ordinary notion of negative association for a sequence of random variables, a new concept called conditional negative association is introduced. The relation between negative association and conditional negative association is answered, that is, the negative association does not imply the conditional negative association, and vice versa. Let (ω, \mathcal{A}, P) be a probability space, and all random variables in this paper are defined on it unless otherwise mentioned. Let \mathcal{F} be a sub-algebra of \mathcal{A} , then we say that by definition, r.v.s $\{\zeta_i, i \geq 1\}$, are said to be conditional negatively associated given \mathcal{F} (\mathcal{F} -NA, in short) if for every pair of disjoint subsets A_1 and A_2 of $\{1, 2, \dots, n\}$,

$$Cov(f(\zeta_i : i \in A_1), g(\zeta_j : j \in A_2)) \leq 0, \quad (1)$$

whenever f_1 and f_2 are coordinatewise nondecreasing and the \mathcal{F} -covariance exists. An infinite family is \mathcal{F} -NA if every finite subfamily is \mathcal{F} -NA.

On the other hand, the concept of complete convergence of a sequence of random variables was introduced by (Hsu et al., 1947). Note that complete convergence implies almost sure convergence in view of the Borel-Cantelli lemma. Now we extend this concept a conditionally

Probability tail for \mathcal{F} -NA random variables of partial sums

converge completely given \mathcal{F} to a constant a if $\sum_{i=1}^{\infty} P(|X_i - a| > \varepsilon/\mathcal{F}) < \infty$ for every $\varepsilon > 0$, and we write $X_n \rightarrow a$ conditionally completely given \mathcal{F} .

2 Some auxiliary results

With the preliminary lemmas, we now state and prove our main result.

2.1 Lemma

see (Benaissa et al., 2011)

Let $\alpha > 0$ and $0 < \beta < \frac{\alpha^2}{e^\alpha - 1 - \alpha}$. Then

$$\exp(x) \leq 1 + x + \frac{x^2}{\beta} \quad (2)$$

for all $0 \leq x \leq \alpha$.

2.2 Lemma

Let $\{X_{ni}, 1 \leq n, n \geq n\}$ be an array of rowwise \mathcal{F} -NA random variables with $E^{\mathcal{F}} X_{ni} = 0$ and $\{a_n, n \geq 1\}$ a sequence of positive constants. Suppose that

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-\frac{\beta \epsilon^2}{4a_n}\} < \infty$ for some $0 < \beta \geq \frac{\alpha^2}{e^\alpha - 1 - \alpha}$ and $|X_{ni}| \leq \alpha$.
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} E^{\mathcal{F}}(X_{ni}^2) = O(a_n)$,

Then $\sum_{i=1}^n X_{ni} \rightarrow 0$ conditionally completely given \mathcal{F} .

3 Main Results

3.1 Theorem

Let $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ be an array of rowwise identically distributed \mathcal{F} -NA random variables such that $E^{\mathcal{F}} X_{ni} = 0$ satisfying $E^{\mathcal{F}} |X_{11}|^{\gamma+1} < \infty$ for some $\gamma > 0$. Assume that $\{b_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ is an array of constants satisfying

$$\max_{1 \leq i \leq n} |b_{ni}| = O(c_n^{-\delta}), 0 < c_n \uparrow \infty, \text{ for all any } \delta > 0 \text{ and } a_n c_n^{-\delta} \leq 1, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n b_{ni}^2 = O\left(\frac{1}{\log n}\right). \quad (4)$$

Then $\sum_{i=1}^n b_{ni} X_{ni} \rightarrow 0$ conditionally completely given \mathcal{F} .

4 Application results in the first-order autoregressive AR(1) model

The basic object of this section is applying the results to first-order autoregressive processes AR(1) model.

4.1 The AR(1) model

We consider an autoregressive time series of first order AR(1) defined by

$$X_{n+1} = \theta X_n + \zeta_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{5}$$

where $\{\zeta_n, n \geq 0\}$ is a sequence of identically distributed \mathcal{F} -NA random variables with $\zeta_0 = X_0 = 0, 0 < E^{\mathcal{F}} \zeta_k^4 < \infty, k = 1, 2, \dots$ and where θ is a parameter with $|\theta| < 1$. Here, we can rewrite X_{n+1} in (5) as follows :

$$X_{n+1} = \theta^{n+1} X_0 + \theta^n \zeta_1 + \theta^{n-1} \zeta_2 + \dots + \zeta_{n+1}. \tag{6}$$

The coefficient θ is fitted least squares, giving the estimator

$$\hat{\theta}_n = \frac{\sum_{j=1}^n X_j X_{j-1}}{\sum_{j=1}^n X_{j-1}^2} \tag{7}$$

It immediately follows from (5) and (7) that

$$\hat{\theta}_n - \theta = \frac{\sum_{j=1}^n \zeta_j X_{j-1}}{\sum_{j=1}^n X_{j-1}^2} \tag{8}$$

We start with the following basic lemma.

4.2 Lemma

If $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ is a sequence of identically distributed \mathcal{F} -NA random variables such that $|\zeta_1|^4 < \alpha$, then for any $R > 0$ real, $\tilde{\varepsilon} > \frac{E^{\mathcal{F}} \zeta_1^2}{R^2}$ and $0 < \beta < \frac{\alpha}{e^\alpha - \alpha - 1}$

$$P^{\mathcal{F}} \left(\left| \sum_{j=1}^n (\zeta_j^2 - E^{\mathcal{F}} \zeta_j^2) \right| \geq (R^2 \tilde{\varepsilon} - E^{\mathcal{F}} \zeta_1^2) n \right) \leq 2 \exp \left\{ -\beta \frac{(R^2 \tilde{\varepsilon} - E^{\mathcal{F}} \zeta_1^2)^2 n}{36} \right\} + 2 \frac{\tilde{\Phi}(\tilde{\varepsilon}, \tau, a)}{n^{a/2+1}}. \tag{9}$$

Probability tail for \mathcal{F} -NA random variables of partial sums

Where

$$\tilde{\Phi}(\tilde{\varepsilon}, \tau, a) = 9 \frac{2^{a+1} a^a e^{-a} D D' A_\tau}{\mu^{a+2} K_1^a (E^{\mathcal{F}} \zeta_1^4)^{a/2} (R^2 \tilde{\varepsilon} - E^{\mathcal{F}} \zeta_1^2)^2}$$

5 Theorem

Let the conditions of lemma 4.2 be satisfied then for any $\frac{(E^{\mathcal{F}} \zeta_1^2)^{1/2}}{R^2} < \tilde{\varepsilon}$ positive, we have

$$\begin{aligned} P^{\mathcal{F}}(\sqrt{n}|\hat{\theta}_n - \theta| > R) &\leq 2 \exp\left\{-\beta \frac{(R^2 \tilde{\varepsilon}^2 - E^{\mathcal{F}} \zeta_1^2)^2 n}{36}\right\} + 2 \frac{\tilde{\Phi}(\tilde{\varepsilon}^2, \tau, a)}{n^{a/2+1}} \\ &+ \exp\left\{-\frac{1}{2} n \frac{(T_1 - n \tilde{\varepsilon}^2)^2}{T_2}\right\} \end{aligned} \quad (10)$$

where $T_1 = E^{\mathcal{F}}(X_i^2) < \infty, T_2 = E^{\mathcal{F}}(X_i^4) < \infty$.

Références

- Benaissa, S., A. Bahram, et B. Mechab (2011). New exponential inequality for a lnqd partial sums and application to ar (1) model with lnqd innovations. *International Journal* 6(1-2), 118–135.
- Hsu, P.-L. et H. Robbins (1947). Complete convergence and the law of large numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 33(2), 25.
- Joag-Dev, K., F. Proschan, et al. (1983). Negative association of random variables with applications. *The Annals of Statistics* 11(1), 286–295.
- Khursheed, A. et K. Lai Saxena (1981). Positive dependence in multivariate distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods* 10(12), 1183–1196.

Summary

The exponential probability inequalities have been important tools in probability and statistics. In this paper, we establish conditional exponential inequalities for the distributions of sums of conditionally negatively associated (\mathcal{F} -NA, in short) random variables. The inequality extends and improves the results of (Benaissa et al., 2011) and obtain a result dealing with conditionally complete convergence of first-order autoregressive processes with identically distributed (\mathcal{F} -NA) innovations.

