



HAL
open science

Les nombres structuraux

Olivier Rocca

► **To cite this version:**

Olivier Rocca. Les nombres structuraux: Etudes pour une nouvelle catégorie de nombres. 2020.
hal-02593190v1

HAL Id: hal-02593190

<https://hal.science/hal-02593190v1>

Preprint submitted on 15 May 2020 (v1), last revised 21 Jul 2021 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

Les nombres structuraux

Gödel : « *Il n'existe aucun formalisme qui puisse embrasser toutes les étapes du développement mathématique* ».

Carnap : « *La mathématique exige une suite de langages toujours plus riches* ».

1. Introduction

On nous a toujours appris à considérer que les nombres sont l'instrument de la quantité, sauf peut-être pour certaines constructions musicales. Les sciences dites « exactes », et plus particulièrement toutes celles qui sont basées sur l'arithmétique et l'algèbre, sont enseignées comme des sciences de la quantité, aux règles fixes, objectives et universelles : $1+1+1+1 = 4$ et $1+1+2 = 4$ et $3+1 = 4$ et $4+0 = 4$. Les sciences dites « humaines », qui sont aussi les sciences des « lettres » sont aujourd'hui considérées comme les seuls domaines où la qualité a voix au chapitre, sans doute pour des commodités de langage, même si dans une discipline telle que l'économie, la qualité demeure encore introuvable. Il est si facile en effet de voir la quantité dans les nombres et la qualité dans le langage poétique ou philosophique ! Mais les frontières entre les langages (entre les chiffres et les lettres) ne sont pas fixes, ils évoluent selon les époques, les découvertes, les nécessités et les contraintes de la vie courante. Nous pouvons donc nous demander si les nombres peuvent eux aussi exprimer une qualité, et comment les mots peuvent jouer avec les mesures des quantités. Mais avant de rentrer dans le vif du sujet, nous avons voulu comprendre ce qui a fait que le monde moderne a basculé si fortement dans la quantité. Pour comprendre le présent, il est parfois nécessaire de remonter le cours du temps et de regarder notre histoire. C'est de cette façon que nous avons interrogé

l'histoire pour arriver à un « méta-événement », une découverte scientifique qui peut être considérée comme la cause de ce basculement. Il est temps d'expliquer les circonstances de cette découverte faite à l'âge classique, et qui continue de produire ses effets sur la pensée moderne sans que l'on s'en aperçoive.

Lorsque le philosophe Descartes a pris la décision de traiter systématiquement tous les problèmes de la géométrie en les réduisant à des problèmes d'algèbre, lorsqu'il a trouvé le moyen de faire correspondre les opérations de géométrie aux opérations d'arithmétique, il a offert aux hommes le principe qui, depuis trois siècles, a « permis la solution d'un nombre illimité de problèmes, tout en suggérant une infinité d'autres auxquels on n'avait pas songé ». L'invention cartésienne n'est pas restée limitée aux mathématiques, elle a conquis bientôt la mécanique, puis la physique, et en liaison intime avec le calcul infinitésimal, elle est devenue aussi indispensable à nos représentations du monde que l'est, par exemple, la numération décimale. Qu'il s'agisse de bourse, de psychologie, de météorologie, de recherche médicale, de statistique socio-économique, la traduction des chiffres représentés en figures de courbes et de droites, de camemberts et de diagrammes qui permettent d'apprécier d'un coup d'œil la marche d'une transformation est devenue familière et presque indispensable à un état d'organisation du monde humain, où la prévision rapide est exigée par la complication extrême de l'organisme social. Ainsi, Descartes est certainement l'un des hommes les plus responsables de l'allure et de la physionomie de l'ère moderne, que l'on peut trouver caractérisée dans ce que nous appelons « la quantification de la vie », cause des dérèglements qui se répandent aujourd'hui sur le plan social, économique, écologique.

Afin de pallier ces excès et tenter de rétablir un équilibre, il nous a paru intéressant de nous interroger afin de savoir si les nombres sont susceptibles d'exprimer une

qualité, autrement dit, si les nombres peuvent être utiles dans un projet de langage subjectif et humain, porteur de modes de vie alternatifs et différents par rapport à ceux que l'on connaît déjà sous le « règne de la quantité » ou « politique du chiffre », ou « économie de masse ». La question que nous posons est bien celle des mathématiques considérées comme langage, et mises au service d'une expression de type humaniste qui permettrait aux nombres de dire quelque chose, « autre chose » sur l'être humain, la nature, les relations, à moins que ce ne soit aux hommes d'énoncer quelque chose d'inouï, quelque chose de nouveau au sujet des nombres... Il ne s'agira pas pour nous de recenser toutes les formules mathématiques capables d'exprimer une qualité, mais plus simplement, nous montrerons par des exemples précis sous quelles conditions l'usage des nombres dans les mathématiques est susceptible de faire apparaître une structure, c'est à dire une construction symbolique mettant en valeur la qualité et la cohérence de ses relations. Nous présenterons cette étude avec un esprit ludique, pour signifier au lecteur que le champ de la recherche mathématique sur les structures est potentiellement infini, comme en témoignent les analogies culturelles que l'on trouve dans toute l'humanité.

2. Explication mathématique des nombres structuraux

Au commencement se trouvent les nombres entiers naturels, sans doute les plus simples et les plus parfaits. Les nombres entiers naturels permettent de mesurer les ensembles de nombres par leurs tailles et par l'ordre de supériorité ou de succession de leurs éléments. Ces deux façons de mesurer déterminent deux catégories de nombres que l'on appelle les cardinaux (un, deux, trois, quatre...) et les ordinaux (premier, second, troisième...) qui constituent les deux catégories fondamentales pour toutes les opérations mathématiques de l'arithmétique et de l'algèbre.

Bien que les nombres cardinaux et ordinaux soient très utiles pour produire des résultats dans les opérations

arithmétiques et algébriques, ils nous renseignent assez peu sur les structures de ces opérations. Le nombre le plus éloigné de la notion de structure est le nombre cardinal que l'on associe toujours à un ensemble sans structure particulière. Et cela est d'autant plus vrai quand on fait référence à la règle de la commutativité qui s'applique aux opérations de l'addition et de la multiplication : $4 + 5 = 5 + 4 = 9$ et $3 * 2 = 3 * 2 = 6$. Lorsqu'on analyse ces opérations en fonction de leurs résultats on peut en conclure qu'elles sont égales. Mais lorsqu'on analyse ces opérations par rapport à leurs structures et à leurs règles de composition on en arrive à la conclusion qu'elles ne sont pas équivalentes. En effet, 2 grappes de 3 bananes est différent de 3 grappes de 2 bananes. Même si la quantité de bananes est la même, la structure, la composition et le contenu du stock sont différents.

Pour ce qui concerne les nombres ordinaux, ils disposent bien d'une structure contrairement aux nombres cardinaux, mais il s'agit d'une structure qui répond seulement à un ordre de supériorité, d'infériorité ou d'égalité. Dans une structure ordinaire la seule chose importante est l'ordre de comparaison que l'on produit sur des ensembles qui sont soit premier, soit second, soit troisième... Par exemple en parlant de personnes que l'on a invité à un mariage, on peut faire un classement ordinal des invités en fonction de leur ordre d'arrivée en disant que A est arrivé premier avant B qui est arrivé second avant Z... etc. Toutefois si l'on cherche à déterminer un ordre de distribution en disant par exemple que les invités sont arrivés deux par deux ou trois par trois, il semble alors que les nombres ordinaux ne nous apportent aucune information. De la même manière si l'on cherche à composer quatre tables de cinq personnes pour que les invités puissent participer au repas, alors le fait de changer les noms sur les tables n'aura pas d'incidence sur les ensembles de tables ordonnées. On parlera toujours du même ordinal (les 4 tables de 5 personnes) alors que de

toute évidence la composition de ces tables ne sera pas équivalente.

On voit ainsi que les nombres cardinaux et ordinaux ne nous apportent soit aucune information, soit une information limitée sur les structures qui sont utilisées par les opérations mathématiques. *On peut donc se demander s'il ne serait pas possible de dépasser les cardinaux et les ordinaux au profit d'une autre catégorie de nombres plus adaptée à l'étude et l'analyse des structures. Des nombres qui permettraient de mieux décrire les structures en mettant en avant les arrangements et l'organisation d'éléments interreliés, basés notamment sur des types de relations telles que le un-à-tous, le un-à-plusieurs, le plusieurs-à-plusieurs, le tous-à-tous, le deux-à-deux, le trois-à-un, le un-à-un, le quatre-à-dix dont les nombres cardinaux (basés uniquement sur la quantité isolée par un, deux, trois..) et les nombres ordinaux (basés uniquement sur l'inclusion de un dans deux) ne rendent pas bien compte.* Le sujet est assez nouveau car les mathématiques sont encore régies à notre époque par les opérateurs arithmétiques (addition, multiplication, soustraction, division) qui s'intéressent beaucoup plus aux éléments qu'aux relations existant entre les éléments. La compréhension de la façon dont les composantes d'un ensemble d'éléments se réunissent, coopèrent, se connectent, se hiérarchisent, se subdivisent ou au contraire se rassemblent est un problème qui concerne la structure. On comprend donc pourquoi cette question est très générale et englobe à la fois les structures matérielles (physiques, chimiques, biologiques, minérales) et aussi les structures immatérielles (les données informatiques, les compositions musicales, les structures psychiques ou spirituelles).

3. La construction des nombres structuraux

Pour comprendre en quoi certains nombres peuvent nous renseigner sur les structures, nous allons quitter le domaine des mathématiques et faire appel à la grammaire.

En grammaire, les nombres entiers naturels *zéro, un, deux, trois, quatre, cinq...* s'appellent des adjectifs numéraux cardinaux. Ce sont des adjectifs qui déterminent précisément le nombre de choses ou d'être désignés par le nom auquel ils se rapportent. Par exemple : quatre poules, trois voitures... Les nombres cardinaux sont utilisés très fréquemment, et principalement pour les calculs arithmétiques. Les quatre saisons, les quatre points cardinaux, forment deux ensembles distincts ayant en commun une certaine définition, qu'ils ne partagent pas avec les dix doigts des pieds : le rapport des différentes choses entre elles ne peut s'établir qu'entre les groupes ayant la même quantité. C'est la raison pour laquelle on dit en mathématiques que les nombres cardinaux désignent des ensembles qui sont équivalents et équipotents.

Toujours en grammaire, les nombres entiers ordinaux *premier, deuxième, troisième, quatrième, cinquième, sixième...* s'appellent les adjectifs numéraux ordinaux. Ils servent à préciser le rang d'un objet dans une collection, ou l'ordre d'un événement dans une collection. De ces nombres ordinaux découlent des notions importantes pour la vie sociale, telles que la position, le rang, l'ordre, la priorité, le niveau, la hiérarchie, le sens, qui sont utilisés dans les processus de décisions ainsi que dans le vaste domaine de l'organisation. Dans les ensembles finis, les nombres ordinaux peuvent être identifiés aux nombres cardinaux, et les cardinaux peuvent être identifiés à des ordinaux (principe de commutativité). Le mathématicien Georg Cantor a toutefois démontré que cette relation n'est plus valable dans les ensembles infinis, car dès lors, seuls les cardinaux sont identifiables à des ordinaux, alors que l'inverse n'est pas vrai.

Nous proposons une troisième catégorie de nombres qui n'a pas encore été reconnue dans l'analyse grammaticale, mais qui pourtant correspond à une catégorie à part, pour la simple raison que les nombres y sont désignés différemment que dans les deux premières

catégories. *Servant également comme adjectifs numériques, ces nombres déterminent des structures, et nous les appellerons par commodité les adjectifs numériques structuraux, ou nombres structuraux. Nous qualifions ces nombres de structuraux, dans la mesure où en plus de la quantité et de la position, il nous semble que ces nombres intègrent une information supplémentaire qui est celle de la fréquence, de la répétition, de la distribution, du réseau, de la relation et de l'harmonie qui existe entre tous les éléments. Il convient donc à notre avis de bien les distinguer des nombres ordinaux et cardinaux, afin d'en révéler toute la spécificité et l'originalité.* La raison pour laquelle l'analyse grammaticale ne les a pas reconnus comme tels tient peut-être au fait que les noms de ces nombres sont difficiles à trouver et à rassembler, mais pourtant ils existent et sont utilisés depuis fort longtemps ! Quelle est la liste que nous identifions comme nombres structuraux ? Nous citerons ici les principaux d'entre eux, laissant aux scientifiques le soin d'approfondir la connaissance de leurs propriétés grammaticales et mathématiques, et de comprendre comment ces deux disciplines peuvent s'enrichir mutuellement sur le plan de la réflexion structurale.

- L'unaire
- Le binaire
- Le ternaire
- Le quaternaire
- Le quinaire
- Le sénaire (ou sexanaire)
- Le septénaire (ou heptanaire)
- L'octonaire (ou octal)
- Le novénaire (ou nonaire)
- Le dénaire (ou décimal)

- L'unidécimal (11)
- Le duodécimal (12)
- Le tridécimal (13)
- L'hexadécimal (16)
- Le vicésimal (20)
- Le sexagésimal (60)

Et enfin le phinaire (nombre d'or)

Chacun de ces nombres représente un motif structural, c'est à dire une structure avec le nombre « n » d'éléments qui lui correspond. Par exemple, le ternaire est une structure comportant trois éléments qui peuvent être « le beau, le bien, le vrai », ou « liberté, égalité, fraternité ». Les nombres ordinaux ne pouvaient désigner que des éléments semblables, comme « trois pommes » ou « trois voitures », mais ce n'est plus le cas avec les nombres structuraux, qui peuvent regrouper des éléments différents. Cela signifie que les nombres structuraux sont plus complexes que les nombres cardinaux, qu'ils permettent des opérations plus nombreuses et des constructions plus diversifiées. Si on compare les nombres structuraux aux nombres ordinaux, il est intéressant de constater que dans les nombres ordinaux, l'ordre de supériorité entre les éléments importe énormément au point de déterminer leur rang ou leur position, toutefois comme les nombres ordinaux sont toujours définis par rapport à un prédécesseur plus petit ou par rapport à un successeur plus grand, ils n'apportent aucune information sur la distribution, la récurrence ou la fréquence d'un même élément.

En distinguant donc soigneusement les nombres structuraux des cardinaux et des ordinaux, nous proposons de les concevoir comme des nombres dont les propriétés sont déterminées exclusivement par la structure dans laquelle ils se trouvent. Plus précisément, les nombres structuraux sont une connexion d'éléments solidaires ne pouvant se définir que les uns par rapport aux autres en fonction de leur place dans cette connexion. On voit bien que la notion d'entier naturel qui ne sert qu'à décrire la taille d'un ensemble (adjectifs numériques cardinaux) ou donner la position d'un élément dans une suite ordonnée par des rapports de supériorité et d'infériorité (adjectifs numériques ordinaux) est incapable de rendre compte d'un tel phénomène. Cela explique pourquoi le terme de référence du nombre structural est précisément la structure et pas la notion d'ensemble mathématique. Les nœuds, les arcs, les structures, les

systèmes, les enchevêtrements, les torsions, les treillis, les distributions, les récurrences, les émergences, les dynamiques, les rythmiques, les harmoniques et même les symboliques relèvent ainsi des nombres structuraux, au sens où ces nombres permettent d'expliquer et de montrer le fonctionnement de la complexité de certaines structures dans les domaines scientifiques et artistiques les plus diversifiés.

Sur un plan purement mathématique, il est intéressant de noter que les nombres structuraux servent de base pour tous les systèmes de numération. Par exemple, la numération sénaire positionnelle nécessite l'emploi de six chiffres. Si l'on veut mettre en rapport le système de numération sénaire avec le système décimal que l'on utilise habituellement, il sera alors nécessaire de procéder à une conversion. Par exemple, 12 en base décimale vaut 20 en base sénaire... etc. Il existe à ce sujet d'excellents tableaux de conversion sur internet. Par ailleurs, il est tout à fait remarquable de constater que le nombre d'or (qui est un nombre irrationnel, c'est à dire non fini, non mesurable dans son intégralité, sans aucune représentation récurrente) puisse servir de base pour tous les nombres réels possédant une représentation standard en développement fini. Cela nous éclaire encore sur une caractéristique des nombres structuraux, qui est de permettre à leurs éléments de se déployer sur différentes échelles, sans que cela n'altère le sens, la fonctionnalité, ou la valeur de l'ensemble des éléments. *De telles propriétés confèrent donc une capacité symbolique très forte aux nombres structuraux, et fait de ceux-ci une ressource particulièrement utile dans toutes les opérations linguistiques à la fois littéraires et mathématiques.*

Est-il étonnant de les retrouver employés dans les domaines les plus divers de la connaissance ? A cheval entre l'algèbre et la grammaire, les nombres structuraux établissent de nouveaux et féconds rapports entre les chiffres et les lettres. Un examen non exhaustif des différentes théories et pratiques qui se prévalent de ces numérations structurées achèvera de nous convaincre de leur immense utilité pour l'intelligence humaine.

L'unaire.

Psychanalyse : comment se trame la réalité ? La théorie du trait unaire et de la répétition de Jacques Lacan.

Chimie : les systèmes unaires sur les états de la matière.

Synthèse : l'unaire désigne une façon originale de faire de « l'un »

Opérateur unaire : qui n'agit que sur un seul argument

Mathématiques : le système unaire, appelé également système monadique, est un système de numération permettant l'écriture des entiers naturels avec un seul symbole. C'est l'écriture des nombres sous la forme de battons. (III)

Marques de dénombrement : système comptable unaire que l'on retrouve dans de nombreuses civilisations.

Le binaire.

Informatique : le langage binaire est le langage de base des ordinateurs, venant de l'électronique et des contacteurs, qui utilise la notation 0 pour faux (quand le courant ne passe pas) et 1 pour vrai (quand le courant passe).

Mathématiques : le système binaire est un système de numération ne comportant que deux nombres, c'est à dire utilisant le deux comme base.

Astrophysique : une étoile binaire est un système composé de deux astres tournant l'un autour de l'autre.

Musique : le binaire correspond à la division d'un temps, qui s'oppose au ternaire. On parle alors de rythme binaire.

Le ternaire.

Structuralisme : qui est composé de trois unités en inter-liaison : une structure ternaire

Organisation : qui est distribué trois par trois

Chimie : qui résulte de la combinaison de trois corps simples

Musique : qui se divise en trois en parlant de temps, de mesure, de rythme

Poésie : le rythme d'un vers est ternaire s'il est divisé en trois mesures de mêmes longueurs.

Symbolisme : la division ternaire de tous les êtres vivants (chez René Guénon).

Représentation : le diagramme ternaire (ou triangulaire) qui représente trois degrés de liberté, très utilisé dans les sciences de la vie et de la matière

Le quaternaire.

Préhistoire : désigne une formation géologique récente datant de 20 millions d'années.

Zoologie : études sur la faune quaternaire.

Economie : nouvel âge de l'économie, selon Roger Sue, au cours duquel l'homme s'emparera de la production, selon des motivations personnelles et une dimension éthique qui sont encore introuvables dans les économies de marché ou publique. Cette nouvelle forme d'économie basée sur les ressources humaines deviendra sociale.

Biochimie : la structure quaternaire est ce qui confère à la protéine sa fonction.

Le quinaire.

Sémiologie : le schéma quinaire décrit par Paul Larivaille étudie les règles de construction du récit dans les contes de fées.

Mathématiques : système quinaire ou système de numération en base cinq. Désigne aussi ce qui est divisible par cinq.

Numismatique : le quinaire est une petite monnaie romaine en argent qui vaut un demi-denier.

Anthropologie : le rôle du système quinaire dans l'astronomie chinoise.

Le sénaire.

Mathématiques : système de numération à base six.

Poésie : vers dits iambiques, composés de six pieds.

Organisation : méthode de management des organisations créée par Alain Simon.

Finance : modèle permettant de développer une mesure de l'efficacité ne reposant plus sur les flux monétaires.

Systémique : modèle de l'action humaine synchronique.

Arts : une mosaïque est dite d'ordre sénaire si tout point nodal est le sommet commun de six polygones.

Gemmologie : système cristallin ayant un axe de symétrie sénaire ou hexagonal (les cristaux étant classés en sept systèmes selon la symétrie de leurs faces, définies, par des axes de symétrie autour desquelles le cristal peut tourner en présentant toujours le même aspect).

Le septénaire.

Mathématiques : système de numération utilisant la base sept.

Esotérisme : nom des doctrines de base de la théosophie moderne d'Helena Blavatsky, selon lesquelles l'homme posséderait sept corps, l'organisme physique et six autres corps dit « subtils » et comportant des organes qui sont eux aussi « subtils ».

Rythmologie : espace de sept ans dans la vie d'un homme. Cycle d'évolution.

Histoire : qui contient sept agents. Nombre septénaire. Qui se renouvelle ou arrive tous les sept ans, qui a une durée basée sur des cycles de sept ans. Exemple : chronologie septénaire des rois de France à l'époque du haut Moyen-Age.

Que ce soit sur le plan de la pensée et de l'action, des arts et des sciences, les nombres structuraux nous enseignent que nous pourrions trouver toujours plus de relations que ce que l'univers contient d'éléments... Tout peut donc se renouveler... de la construction des villes à l'élaboration d'une assemblée parlementaire, de l'analyse d'une étoile de mer à celle d'un séquoia, de la compréhension d'une œuvre d'art à la découverte de nouvelles formules mathématiques, il n'existe pas de frontière définitive dans la connaissance, et nous pouvons toujours partir à la découverte d'autres structures qui nous aideront à progresser dans notre intelligence et notre conscience.

Si nous considérons que la plupart des phénomènes que nous observons peuvent se rapporter à des structures (ou à des nombres), il sera particulièrement intéressant de procéder à des analyses structurales étayées par les mathématiques pour faire progresser nos connaissances vers un nouveau niveau de complexité et de cohérence, car ainsi nous disposerons d'une méthode sûre pour reconstruire un monde de qualité.

4. L'utilisation des nombres structuraux

Dans l'étude des nombres, il est assez rare que les structure grammaticales et linguistiques des nombres soient mises en correspondance avec leur structure arithmétique et algébrique. Cette lacune est d'autant plus étrange que les sciences grammaticales et mathématiques ont le même but qui est la classification de leurs objets.

En mathématiques, on appelle nombre ordinal un objet permettant de caractériser le type d'ordre d'un ensemble ordonné quelconque, tout comme en linguistique, les mots premier deuxième, troisième... s'appellent les adjectifs numéraux ordinaux et servent à préciser le rang d'un objet dans une collection, ou l'ordre d'un événement dans une succession. En mathématiques, et plus précisément en théorie des ensembles, le nombre cardinal d'un ensemble E est intuitivement le nombre d'éléments lui appartenant, alors qu'en linguistique, les nombres entiers naturels zéro, un, deux, trois... s'appellent les adjectifs numéraux cardinaux.

Parmi les catégories de nombres reconnues et enseignées par les mathématiques, nous avons les nombres ordinaux, les nombres cardinaux, puis tous les autres auxquels on reconnaît une moindre importance, ce qui explique sans doute pourquoi on les regroupe dans la case « divers ». Ces nombres n'ayant pas fait l'objet d'une classification scientifique rigoureuse, notre travail consistera à sélectionner ceux qui appartiennent à la catégorie des nombres structuraux, en nous basant sur les

propriétés mathématiques, l'analyse grammaticale ainsi que sur les racines étymologiques de ces nombres.

Le tableau des nombres romains nous fournit une première forme de classification grammaticale assez complète. Il est assez intéressant d'observer que si les chiffres romains ont été totalement abandonnés pour des raisons d'inconfort évidente (notre civilisation moderne leur a préféré les chiffres arabes qui sont bien plus commodes pour les opérations arithmétiques), les noms de nombres que les romains utilisaient sont restés les mêmes dans le langage moderne, comme en témoignent les racines étymologiques des noms que nous utilisons encore aujourd'hui.

Sur le plan grammatical, et en nous référant aux racines latines de notre langue moderne, les nombres structuraux renvoient à une catégorie bien particulière appelée *les adjectifs numériques distributifs*, dans la mesure où les autres catégories grammaticales, telles que les adverbes numériques multiplicatifs, renvoient par leur usage à celui des nombres ordinaux et cardinaux. Cette distinction est d'autant plus importante que les adjectifs distributifs et les adverbes multiplicatifs possèdent des racines étymologiques très proches, ce qui pourrait engendrer une confusion.

En tant qu'adjectifs distributifs, les racines romaines sont les suivantes : *singuli* (unaire), *bini* (binaire), *terni* (ternaire), *quaterni* (quaternaire), *quini* (quinaire), *seni* (sénaire), *septeni* (septénaire), *octoni* (octonaire), *noveni* (nonaire), *deni* (dénaire).

A titre comparatif, notons que les adverbes multiplicatifs s'écrivent ainsi : *semel* (une fois, première fois), *bis* (deux fois, deuxième fois), *ter* (trois fois, troisième fois), *quater* (quatre fois, quatrième fois), *quinqies* (cinq fois, cinquième fois), *sexies* (six fois, sixième fois), *septies* (sept fois, septième fois), *octies* (huit fois, huitième fois), *nonies*

(neuf fois, neuvième fois) et *decies* (dix fois, dixième fois). Ces adverbes multiplicatifs n'expriment que des valeurs ordinales et cardinales, donnant lieu à des calculs sur des quantités qui sont toujours homogènes ou équivalentes, ce qui explique pourquoi nous ne les considérons pas comme des nombres structuraux.

Chez les romains, les adjectifs numéraux distributifs possèdent une fonction particulière, car on s'en sert pour indiquer la répétition d'un même événement ou d'une même information (la récurrence d'une occurrence). Les numéraux distributifs sont utilisés pour tout ce qui est additionné, soustrait, multiplié et divisé par un même nombre.

Exemple : *singuli advenerunt* : ils arrivèrent un par un.

Exemple : *Ariovistus et Caesar denos equites adduxerunt* : Arioviste et César amenèrent chacun dix cavaliers.

Exemple : *Militibus quini viceni (quinoviceni) denarii dati sunt* : on donna vingt-cinq deniers à chaque soldat.

Exemple : pour un nombre distributif quinaire, nous pouvons dire : s'arrêter tous les cinq mètres, marcher cinq par cinq, recevoir cinq sur cinq, former des groupes de cinq, établir cinq camps à chaque niveau, diviser en cinq parties égales, se donner mutuellement cinq conseils... et cela n'aura pas le même sens que de dire : s'arrêter cinq fois, manger cinq fois, gagner cinq fois...

Exprimée sur un mode binaire, ternaire, quinaire... la pensée exprime donc un rythme, une cadence, une mesure. Il ne s'agit pas seulement d'une quantité, mais plus exactement d'un rapport numérique entre les choses et les êtres. *L'utilisation de ces nombres permet donc d'établir une relation fondamentale entre rythme et structure.* Réfléchissant sur leurs expériences, les philosophes, les artistes, les mystiques et les scientifiques ont reconnu depuis très longtemps l'importance des rythmes :

- Sur le plan biologique, toutes les activités des êtres vivants varient de façon périodique et prévisible. Voir le cycle cardiaque, hormonal ou thermique. Les rythmes biologiques sont indispensables à la vie de l'individu comme à celle de l'espèce. Ces rythmes biologiques ont un rapport assez fort avec le rythme des saisons et celui non moins important des âges de la vie. Hippocrate remarque la variation saisonnière des maladies. Pythagore perçoit la périodicité rattachée à la symbolique de certains nombres. Aristote et Plin observent la rythmicité de la reproduction d'animaux marins. A l'époque moderne, de telles constatations déboucheront sur la chronobiologie.

- Sur le plan formel, les découvertes scientifiques et artistiques nous montrent comment les modifications rythmiques appliquées aux choses en modifient l'organisation ainsi que les facultés de signification expressive. Le changement de rythme permet de passer de l'isochronie à l'irrégularité (ordre / chaos). L'oscillation entre symétrie et dissymétrie est caractéristique du rythme et de sa dialectique vivante dans le temps métrique. Le rythme organise la durée (avec plus ou moins de régularité) et règle la proportion, comme on peut le voir dans la suite du Fibonacci qui utilise le nombre d'or (espacement, groupement).

- Sur le plan informationnel, l'utilisation des systèmes de calcul fondés sur les bases assure la convertibilité générale de tous les nombres. La convertibilité des nombres et des systèmes de nombres est intéressante pour le codage et la transmission des informations, mais aussi pour le décodage et l'analyse structurale, car elle permet de faire apparaître les occurrences qui existent dans une structure, c'est à dire le nombre de fois qu'une information, un mot, un événement, une action, se répète dans un espace ou dans un temps donné. La répétition d'une information dans un message est indicateur d'un rythme qui nous renseigne sur le sens

que ce message a ou aura dans l'avenir.

L'utilisation des nombres structuraux semble indissociable de nos facultés de perception et des expériences que nous faisons. *Leurs propriétés formelles constituent une ressource symbolique de premier ordre pour mettre en lumière les structures du monde réel, mais aussi, et c'est là notre thème central, les structures du monde symbolique lui-même, et plus particulièrement celles de nos opérations linguistiques.* Dans la mesure où les nombres distributifs sont ouverts aux quatre opérations fondamentales de l'arithmétique (addition, soustraction, multiplication, division), ils nous offrent une puissance de développement considérable, et surtout une très grande liberté de composition et de construction.

Il n'est pas étonnant que les nombres distributifs soient couramment utilisés par les poètes latins pour la métrique et la composition des vers. Observons par exemple la construction linguistique de cette expression de Virgile pour dire qu'un homme garde le silence pendant dix jours : « *Bis quinos silet ille dies* », c'est-à-dire : « *ille silet* », il se tait, « *bis quinos dies* », pendant deux fois cinq jours. Est-il nécessaire de dire que c'est là le commencement d'un vers en hexamètre ? Dans un registre semblable, nous retrouvons les nombres distributifs dans la composition du discours de la rhétorique (en politique et en philosophie), dans la mesure où au-delà du sens, le rythme est un élément important visant à produire un effet émotionnel sur l'auditoire.

Plus rarement, certains poètes font une déclinaison assez audacieuse des adjectifs numériques distributifs, en utilisant le préfixe « *bini* » quand il s'agit de désigner le couple ou la paire. Nous retrouvons l'usage du préfixe « *bini* » dans certains travaux scientifiques de notre époque, par exemple pour désigner un système de vision binoculaire, un moteur biénergie, la bigamie (qui s'oppose à la monogamie), le bimétallisme (système monétaire reconnaissant deux parités métalliques égales). Dans le

langage moderne, le préfixe « *bini* » a été complété par le préfixe « *duo* », qui n'était pas employé par les auteurs romains, mais que l'on utilise dans certaines expressions qui possèdent une dimension systémique ou structurale. Par exemple, un duopole désigne un marché dans lequel existent deux entreprises dominantes.

5. La récurrence comme fonction des nombres

Pour revenir à la comparaison entre les grandes catégories de nombres :

- Comme adjectif numéral cardinal, l'écriture 27 à deux chiffres (2 et 7) représente le nombre vingt-sept et définit les 27 éléments d'un ensemble.
- Comme adjectif numéral ordinal, le nombre 27 désigne également le vingt-septième objet d'une liste, comme la date « 27 janvier ».
- Comme adjectif numéral distributif, le nombre 27 décrit les 27 itérations d'une série, et se rapporte aux 27 symboles permettant de l'inscrire.

Avec le cardinal, l'homme numère, é-numère.

Avec l'ordinal, l'homme sous-numère et sur-numère.

Avec le distributif, l'homme co-numère, re-munère

Ce dont témoignent les nombres structuraux, et à travers eux l'idée de base numérique, c'est une meilleure maîtrise des opérations mathématiques qui à travers l'histoire se révèlent fondamentalement régies par les principes de la répétition et de l'inscription.

La fin du 19ème siècle voit émerger des volontés de structuration des fondements de la science, à commencer par les mathématiques. Tout le monde manipule le nombre entier et le nombre rationnel, on connaît aussi l'existence des nombres irrationnels et transcendants. La révolution formelle de l'écriture et de la structure des mathématiques demande à ce que les bases d'arithmétiques soient

fortifiées. Peano est l'un des mathématiciens à s'en charger et il construit ou plutôt re-construit l'ensemble des entiers naturels par induction infinie et récurrente - son principe de récurrence permet en effet de démontrer qu'une proposition est vraie pour tous les entiers naturels en seulement deux étapes (+ une conclusion, comme toujours en mathématiques).

En effet, la démonstration par récurrence permet de montrer qu'une proposition dépendante d'un entier n est vraie pour tout entier n si et seulement si cette proposition est vraie à un rang initial (en général 0 ou 1, parfois même 2) et si l'on suppose cette proposition vraie à un rang quelconque k , alors elle reste vraie au rang qui lui est juste supérieur, à savoir au rang $k + 1$.

L'ensemble des nombres entiers, \mathbb{IN} , vérifie les propriétés suivantes :

- Il a un plus petit élément, noté 0, et on note $\mathbb{IN}^* = \mathbb{IN} \setminus \{0\}$ (à lire \mathbb{IN} privé de zéro)
- A tout élément de \mathbb{IN} , on peut associer son successeur dans \mathbb{IN}^* par une application f
- A tout élément de \mathbb{IN}^* , on peut associer son prédécesseur dans \mathbb{IN} par une application g
- Les applications f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

\mathbb{IN} ainsi construit et muni de l'addition a une structure de groupe, selon la définition de Galois (1832) : élément neutre 0 ; associativité ; élément symétrique.

L'ensemble \mathbb{IN} muni de l'addition, muni du signe +, permet de dénombrer, si l'envisage nous en vient, le nombre de fois que l'on aurait répété ce qui est à répéter. L'itération (qu'on peut entendre comme Littération) est bel et bien le 'plus-un', le + 1,

*l'un-en-plus qui écrit la répétition - sans l'itération, sans le plus-un, pas de deux, pas de trois, ni de répétition.*¹

C'est donc le plus-un qui génère la suite logique des entiers naturels, qui comptent le nombre de répétition, le nombre d'actes répétés. L'un-en-plus est donc indissociable de la répétition. Toutefois, c'est dans la façon dont on fait plus un que se joue la question de l'écriture des mathématiques, et plus exactement l'usage de ses symboles et les différentes sortes de répétitions à partir desquelles se constituent les différents systèmes de numération.

Dans un système de numération positionnel comme le système décimal, ou le système binaire, ou le système unaire, le nombre de symboles que l'on fait tourner de façon itérative pour comptabiliser n'importe quelle valeur est constitutif de ce que l'on appelle la base. Ces symboles peuvent être des chiffres et / ou des lettres que l'on choisit en fonction du système de numération que l'on veut créer.

Dans le système unaire, un seul symbole suffit pour exprimer n'importe quelle valeur alors que dans le système décimal il faut utiliser au minimum dix symboles pour faire retour et pouvoir ajouter un zéro comme symbole de la boucle. Plus le système de numération utilise un grand nombre de symboles, plus les nombres requièrent un petit nombre de symboles tous différenciés pour s'écrire. A l'inverse, plus un système de numération utilise un petit nombre de symboles et plus les nombres requièrent une répétition importante de ces mêmes symboles pour s'écrire.

Il est possible d'utiliser le chiffre zéro comme base pour former tous les autres nombres comme on le voit dans

¹ On pourrait également mentionner cette belle phrase de Gaston Bachelard au sujet de la littérature : « Il n'y a de littérature qu'en seconde lecture », témoignant de cet événement inaugural que constituent les actes à répétition de la lecture (l'itération) et de l'écriture (la rature ou correction).

l'écriture des ensembles vides. Les mathématiques modernes nous rappellent que la construction des entiers est possible à partir des cardinaux des ensembles récurrents : \emptyset , $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset; \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset; \{\emptyset\}; \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$, etc... qui contiennent respectivement 0, 1, 2 et 3 éléments. Le zéro étant l'innovation la plus importante et la plus caractéristique du système numérique, le mot chiffre (qui signifie étymologiquement sifr, cifra, du sanskrit sunya, zéro) a fini par désigner toutes les figures de ce système.

Le plus ancien système de numération de l'humanité est le système unaire qui n'utilise qu'un seul chiffre, en forme de bâton, se répétant autant de fois que nécessaire pour représenter un nombre. Exemple des os d'ishango, découverts en République Démocratique du Congo et dont les inscriptions dateraient d'il y a 20.000 ans. Ce système de numération à un chiffre est de loin celui qui utilise le plus la répétition. L'unaire est la base de tous les systèmes additifs et sert à toutes les opérations visant à l'accumulation, à l'empilement, au beaucoup, au passage, au sans fin.

La répétition propre à la structure unaire est donc ce qui permet de penser fondamentalement l'acte.

Jacques Lacan nous dit dans son célèbre séminaire sur « *La lettre volée* » du 30.11.1966 : « *L'acte est précisément l'équivalent de la répétition. Il est la répétition du trait unaire, qui en donne la structure, et dont on peut dire que ça n'arrive qu'une seule fois, ce qui veut dire tout de même qu'elle est double, sans ça, il n'y aurait pas de répétition, ce qui d'emblée, en somme, pour quiconque veut un peu s'y arrêter, instaure dans son fondement le plus radical la division du sujet* ».

Plus loin il ajoute : que la répétition n'est pas remémoration, que la mémoire dans la répétition est d'ordre symbolique : « *Une pensée de la répétition, c'est un autre domaine que celui de la mémoire. La mémoire, sans doute, évoque la trace aussi, mais la trace de la mémoire a justement pour effet la non-répétition* »

La répétition est donc un acte. Mais comment définir ce qu'est un acte ? Lacan pose la question le 15 février 1967. Il y avait déjà un peu répondu dans le séminaire « *L'angoisse* », où il proposait de différencier l'acte, le passage à l'acte et l'acting-out dans la configuration du quadrangle :



Il revient sur les particularités de l'acte dans « *La logique du fantasme* », où certaines caractéristiques irréductibles de l'acte sont énumérées :

« - L'acte est signifiant

L'acte est un signifiant qui se répète, quoiqu'il se passe en un seul geste pour des raisons topologiques qui rendent possibles l'existence de la double boucle créée par la seule coupure (suivant la médiane sur le ruban de Möbius)

Il est instauration du sujet comme tel, c'est à dire que d'un acte véritable, le sujet surgit différent, en raison de la coupure, sa structure est modifiée, [...], son repräsentanz (représentance) dans la Vorstellung (présentation ou représentation) à cet acte, c'est la verleugnung (déli), à savoir que le sujet ne le reconnaît jamais dans sa véritable portée inaugurale [...]. » (LdF, 22.02.67)

L'acte est donc signifiant, il écrit d'une coupure structurante qui par un événement transforme le sujet, pas immédiatement mais dans l'après-coup. *Ainsi, pas d'acte qui ne participe à l'émergence du sujet, renvoyant à la structure mathématique de la base de ce qui se répète à l'infini sous la forme d'un trait unaire à la fois inconscient et conscient.*

6. Vers la source des nombres

Il semble que le génie propre à chaque peuple donne toujours aux nombres une signification et une écriture particulières. Chez les romains où les considérations étaient plus pratiques, les nombres servaient à décrire les choses, les actions, les événements. Mais chez les grecs qui avaient des préoccupations plus abstraites, la question centrale était : comment communiquer une combinaison de qualités, de faits, de concepts ? C'est à partir de ce type de questions que les philosophes grecs ont établi un lien entre les nombres et les idées, faisant des nombres les véhicules des idées pures.

Si l'on s'en tient à l'analyse des mots, les philosophes grecs appellent les nombres arithmétiques un, deux, trois, quatre, cinq, dix..., tandis qu'ils appellent les nombres idéaux monade, dyade, triade, tétrade, pentade... ce qui corrobore le sens premier des auteurs romains, et nous ouvre une autre facette des nombres structuraux. Ces ressources du langage sont précieuses, parce qu'elles nous permettent de référencer l'ensemble historique des découvertes scientifiques, des réalisations artistiques, des systèmes philosophiques et religieux qui se revendiquent des nombres structuraux.

La fameuse décade pythagoricienne n'est qu'un cas particulier des nombres structuraux, dont les propriétés principales sont, nous semble-t-il, de permettre de faire des opérations entre des éléments différents, non équivalents et non homogènes. A ce titre, il convient de ne pas réserver l'usage de la monade, de la dyade, de la tétrade, aux concepts philosophiques, mais d'en comprendre le développement à travers l'histoire et l'usage qui en a été fait dans les savoirs et les pratiques.

Les propriétés des nombres structuraux ne se révèlent nulle part mieux que dans l'utilisation que les hommes en font, et c'est à partir de la richesse des faits que nous pourrions espérer comprendre un jour les principes qui gouvernent ces nombres.

Les nombres structuraux qui se construisent sur les racines grecques sont :

La Monade : ce terme désigne une structure complexe et fermée. En informatique, une monade est une structure de données avec un état. En mathématiques, la monade est un foncteur de la théorie des catégories. En philosophie, le concept de monade a été utilisé par Leibnitz, pour désigner une substance simple, sans parties, sans rien qui puisse y entrer ou en sortir, qui entre dans la composition de tous les éléments psycho-physiques de l'univers. La monade a été utilisée en ésotérisme pour désigner l'entité spirituelle supérieure, notamment par Héléna Blavatsky et Alice Bailey.

La Dyade : ce terme indique la réunion, le groupe de deux éléments solidaires, de deux principes qui se complètent. En biologie, la dyade désigne l'ensemble de deux chromosomes accouplés au moment de la première mitose de maturation, l'une d'origine paternelle, l'autre d'origine maternelle. En poésie, c'est le groupe harmonique de deux voyelles. En politique, la dyade (ou dyarchie) est le gouvernement simultané de deux chefs. En informatique, c'est un groupe de deux nombres. Avec tant de sens spécifiques, dyade a fini par désigner un groupe de deux auteurs qui travaillent ensemble, autrement dit un binôme, un couple, une paire.

La triade : ce terme désigne un ensemble de trois personnes, de trois choses étroitement liées, de trois idées ou de trois divinités. Le mot triade peut désigner : en économie et en géographie économique, les trois pôles (Europe occidentale, Amérique du Nord, et Japon) qui dominent l'économie mondiale, en chimie, l'ensemble de trois éléments d'un même groupe dans le tableau périodique des éléments, en criminologie, l'organisation criminelle chinoise, en philologie, les triades indo-européennes, en musique, un accord de trois notes, en sémiotique, la relation interne du signe qui met en œuvre le

processus de signification (la sémiosis), en philosophie politique, certaines valeurs ou vertus érigées en triades, comme liberté-égalité-fraternité, et enfin les triades galloises qui sont des textes médiévaux.

La tétrade : groupement de quatre éléments distincts. En biologie, une tétrade est un semble formé par une paire de chromosomes dédoublés lors de la méiose, en informatique, la tétrade est un autre nom du nibble, une suite de quatre bits, en géométrie, une tétrade forme une base d'un système de coordonnées sur une variété différentielle à quatre dimensions, en musique, une tétrade est un accord de quatre notes, dans l'antiquité grecque, la tétrade (ou tétrarchie) désigne une division du pouvoir entre quatre régions, quatre groupes, ou quatre fonctions différentes.

La pentade : ce terme désigne une structure qui comporte cinq éléments. En philosophie pythagoricienne, la pentade est le symbole de l'individualité. En météorologie, la pentade est une période de cinq jours. En chimie des matériaux (polymères), la pentade est une chaîne composée de cinq éléments. En médecine et plus particulièrement en psychopathologie, il existe la pentade de Reynolds.

Les autres nombres de la liste : l'hexade, l'heptade, l'octade, l'ennéade, la décade... etc. Une fois encore, les noms de ces nombres sont difficiles à trouver, et il conviendra de recenser les recherches et les découvertes qui leur sont associées.

Une mention particulière pour la myriade : ce mot signifie dans le système décimal dix à la puissance de quatre, soit dix mille (10.000). Le grec moderne utilise couramment ce terme numéral. Un million en langue grecque se dit cent myriades. Beaucoup de cultures asiatiques comptent traditionnellement en myriades. Notons également que le myriamètre désignait sous la

révolution française une unité de mesure de dix mille mètres.

Les nombres structuraux sont-ils une invention gréco-latine, ou existe-t-il des nombres structuraux dans d'autres civilisations, chez les chinois, les indiens, les égyptiens ? Quel est le contenu que ces peuples ont donné à ces nombres ? Par quels noms les ont-ils désignés, et quelles sont leurs correspondances symboliques ? Les nombres structuraux ont-ils un rapport avec les systèmes de numération dits « primitifs » ? Comme nous le voyons, de telles questions pourraient déboucher sur des travaux de recherche ethnologique et linguistique tout à fait passionnants.

Sur un plan grammatical, nous pouvons nous demander si les nombres que nous connaissons sont des synonymes ou des homonymes. En tant que groupe des nombres structuraux, ils nous paraissent synonymes, notamment si on les distingue des nombres ordinaux et cardinaux. Mais dans leurs applications, tous ces nombres semblent être dans un rapport de paronymie ou d'homonymie imparfaite, dans la mesure où ils sont utilisés pour désigner ou accomplir des choses très différentes.

Dans la théorie mathématique des nombres moderne, et notamment dans les approches anglo-saxonnes, les racines grecques et latines sont considérées comme de parfaits synonymes. Ainsi, la littérature anglo-saxonne nous dit explicitement que :

unaire = monadique
binaire = dyadique
ternaire = triadique
quaternaire = tétradique
quinaire = pentadique
sénaire = hexadique
septénaire = heptadique
octonaire = octadique

novénaire = ennéadique
dénaire = décadique

Il est assez étonnant de voir qu'il existe des nombres structuraux chez les romains et chez les grecs, et que ces deux familles de nombres aux racines différentes sont utilisées de nos jours dans les opérations du langage. Nous pourrions dire que cela atteste des racines culturelles multiples qui ont façonné notre langue. Mais cela fait surtout apparaître une différence fondamentale par rapport aux nombres ordinaux et cardinaux. *Alors que les ordinaux et les cardinaux ne s'écrivent que d'une seule manière, les nombres structuraux peuvent s'écrire de plusieurs manières différentes, ce qui témoigne de leur richesse de sens et de leur extraordinaire vitalité.*

Ces observations permettront peut-être un jour d'éclairer les propos de Platon selon lequel les principes contradictoires de la Monade et de Dyade ne désignent pas les nombres, mais la source des nombres. Si le langage est la source des nombres, nous devons voir dans la constitution plurielle des nombres structuraux une très grande perfection qui permet l'expression des différences, tout en donnant à celles-ci les moyens de se combiner et de se rassembler pour évoluer ensemble vers le Bien.

7. La philosophie des nombres

Les nombres structuraux grecs ont donné naissance à une philosophie des nombres qui constitue l'une des plus belles réussites de la pensée occidentale.

A ce stade de notre texte, il nous paraît important d'établir une distinction sur les différentes approches possibles du concept de nombre.

Alors que les mathématiques abordent le nombre par *le dénombrement*, ce qui aboutit généralement à la production d'une quantité, la philosophie pour sa part

aborde le nombre par *l'énumération*, ce qui l'amène à la production d'une qualité.

Cette distinction est très importante, car une multitude de problèmes rencontrés dans notre monde proviennent d'une méconnaissance totale de la dimension qualitative des nombres. Cela peut avoir des conséquences graves, notamment lorsqu'on essaie de résoudre des questions relatives à la qualité (par exemple la qualité de la vie, la protection de l'environnement, le niveau d'alphabétisme, ou le taux de chômage) par des méthodes et des approches qui sont exclusivement quantitatives.

La philosophie grecque utilise la Monade et la Dyade pour expliquer la génération des nombres, c'est à dire donner *les principes de la production qualitative des nombres*, sans pour autant que ces règles ne soient décorréliées de celles des mathématiques. On trouve ce principe de génération bien expliqué chez Pythagore :

« *Le principe de toutes choses est la Monade. Venant de la Monade, la Dyade indéfinie (l'illimité, la variation), considérée comme matière, est sous-jacente à la Monade qui est cause. De la Monade et de la Dyade indéfinie viennent les nombres, des nombres viennent les points (des nombres dérivent les grandeurs, dont l'élément originel est le point), des points les lignes, des lignes les figures planes, des figures planes les figures solides, des solides les corps sensibles (connus par les sens), dont les Éléments sont au nombre de quatre : Feu, Eau, Terre, Air* ».

Pour comprendre correctement le principe de génération des nombres décrit ci-dessus, il importe de bien se souvenir qu'il se fonde essentiellement sur une expérience perceptive, et non pas sur une déduction, comme nous le voyons très souvent dans la logique mathématique. L'explication de Pythagore prend tout son sens dans la perspective philosophique, et plus exactement dans une phénoménologie du nombre qui intègre celui-ci dans *un ordre d'apparition sensoriel et sémiologique*.

Ainsi, la Monade est l'unité originelle d'où dérive la série des nombres, en particulier la Décade, qui sont les dix premiers nombres entiers naturels (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...). Cela renvoie à une autre citation d'un mathématicien moderne, selon lequel les dix premiers entiers naturels sont l'oeuvre de Dieu, et tout le reste est l'oeuvre de l'homme.

Dans une perspective comparable, on peut affirmer que le Un et le Zéro sont une « Dyade » à partir du moment où le symbolique affirme leur coexistence et étudie comment ces deux nombres (ou ces deux grandeurs) s'engendrent dynamiquement, dans des représentations langagières qui ne se limitent en aucun cas au champ des mathématiques ni aux investigations de la physique.

C'est dans la philosophie platonicienne, et essentiellement chez Platon, que l'on trouve clairement établis les principes qui conduisent à la perception qualitative. On sait que dans la dernière phase de sa philosophie, Platon a conçu une théorie qui regroupe des idées présentes dans ses livres *Le Sophiste*, *Le Politique* et *Le Philèbe* : il s'agit de la théorie sur la Monade et la Dyade indéfinie qui forme le sujet d'une leçon sur le Bien. En réduisant toutes les essences, tant sensibles que noétique, à ces deux principes fondamentaux, Platon nous montre comment les rapports entre la Dyade indéfinie et la Monade sont générateurs de toutes choses en ce monde. Pour le comprendre, il s'agit de bien différencier ce que l'on appelle la Dyade et ce que l'on nomme la Monade.

- *La Dyade indéfinie* représente des couples d'opposés dont le type est « le plus - le moins », « le trop - le trop peu », « l'aigu - le grave », « le vite - le lent ». Chacun d'eux, variant sans limite et sans fin dans son domaine propre, tombe sous le genre de l'illimité ou de l'indéfini, puisque ses composants sont inachevés et illimités.

- *Le rôle de la Monade* assume le rôle de la limite, qui par sa nature, empêche les composants de la Dyade

indéfinie de « se comporter contrairement », et introduit dans leurs variations ce qui relèverait aujourd'hui de ce que l'on appelle le calcul infinitésimal (Leibniz et des monades nous montrent bien le lien entre ces deux sujets).

Cette intervention de la Monade sur la Dyade indéfinie a pour résultat certaines générations d'où résultent des entités nouvelles - des essences mixtes et composées qui sont également d'ordre philosophique.

Ainsi :

Les sons aigus et graves sont constitutifs de l'harmonie musicale.

Le rythme et la mesure résultent de la composition des mouvements rapides et lents

L'essence n'admet pas le plus et le moins, ni la quantité, ni le nombre

Les nombres naturels, en partant de l'unité, vont en croissant sans cesse, mais chacun pris à part est limité

Les grandeurs géométriques permettent la division à l'infini, mais les choses divisées sont limitées

L'Égal est le terme fixe et déterminé se tenant au milieu de la Dyade excès-défaut

Le repos est du domaine de l'égal, car il ne permet pas le plus ou moins, alors que le mouvement est du domaine de l'inégal

L'égal se rapporte à la quantité, alors que pareil se rapporte à la qualité

L'intérieur et l'extérieur se touchent. Le haut et le bas sont en contact. Le commensurable vient de l'incommensurable qui le fonde.

Le mouvement uniforme est égal, le mouvement non uniforme va tantôt plus vite, tantôt plus lentement

Le mouvement non uniforme accuse une phase de tension (intensio), une de culmination, une de relâchement (remissio)

La variation des formes non uniformes s'applique à des domaines aussi divers que la charité, la chaleur, ou la vitesse (augmentation de la vitesse, vélocité)

Notons également deux principes importants pour la formation des nombres :

Dans le classement des *nombres pairs et impairs*, Platon (qui sera suivi en cela pour Aristote et tous les autres penseurs) considère que les nombres pairs sont façonnés par la Dyade, alors que les impairs sont engendrés sous l'influence de la Monade. Sur un plan mathématique, il est assez facile de comprendre que les nombres impairs procèdent de l'unité, alors que les nombres pairs proviennent de la binarité.

En parlant de la formation des *nombres parfaits*, les notions de bien défini, de numbré, d'ordre, de régularité sont des traits essentiels, les nombres abondants ou déficients étant privés de ces caractéristiques. Cette dernière observation est particulièrement intéressante, car elle pourrait fournir à elle seule toute une éthique pour les sciences économiques. En nous défaisant de ce qui n'est pas (la carence, l'abondance), la philosophie nous apprend à parfaire ce qui est (le juste, le défini, le mesurable).

Ainsi, pour reprendre les mots de Leibniz (qui était aussi un grand mathématicien) :

« La monade, dont nous parlerons ici, n'est autre chose qu'une substance simple, qui entre dans tous les composés ; simple, c'est-à-dire sans parties... Ces monades sont les véritables atomes (les indivisibles) de la nature et, en un mot, les qualités substantielles des choses... Les monades n'ont point de fenêtres, par lesquelles quelque chose y puisse entrer ou sortir (les actions de l'extérieur ne peuvent la modifier) ».

Nous retrouvons ces idées dans les mathématiques et dans la géométrie, comme dans ces principes d'Euclide :

1. L'unité est ce en quoi chaque chose existante est dite une.

2. Le nombre est un assemblage composé d'unités. 3. Dès lors, c'est comme ensemble que le nombre manifeste les qualités des éléments qui le composent, et c'est comme structure que le nombre peut accomplir sa fonction qui est de refléter l'ensemble des choses existantes.

Tout laisse supposer que pour les Grecs, les mathématiques ont toujours été une discipline orale, philosophique, dialectique (qui relève de l'art du discours), alors qu'ils confient l'écrit, le tracé, la marque à la géométrie, ce qui expliquerait le caractère si particulier des mathématiques grecques, et l'importance accordée à la géométrie. Chez les Grecs, la géométrie (écrite) semble jouer le même rôle que les nombres (écrits) chez les Romains.

Par l'interprétation qu'elle donne des nombres structuraux, la philosophie grecque est à l'origine d'un discours sur les nombres qui associe la qualité à l'acte d'énumération, faisant du dénombrement un acte second et dérivé du premier. Dès lors, la source des nombres ne se situe plus dans les choses (comme le suppose une certaine histoire des mathématiques, ou une certaine anthropologie des chiffres), mais dans le discours sur les choses et sur les nombres eux-mêmes... *Cette primauté des règles de construction du discours sur le monde matériel est réaffirmée dans toute la philosophie grecque, qui conçoit la monade comme une émanation du Logos, du Verbe créateur...*

Cela explique en quoi la connaissance des nombres ne saurait être seulement une question de mathématiques, et pourquoi cette même connaissance a besoin de la grammaire et de la linguistique pour s'accomplir conformément aux lois du langage.

8. Le concept d'arité

Si l'on se propose d'étudier scientifiquement les nombres structuraux, il est nécessaire de disposer de

certains outils. Le concept d'arité et le concept de valence que nous allons présenter dans les prochains paragraphes sont les principaux outils permettant d'étudier les propriétés structurales des nombres (mais aussi des ensembles). Dans un souci de clarté de présentation, nous allons d'abord étudier le concept d'arité, puis le concept de valence, qui est lui est très proche, mais en même temps différent.

Sans nous attarder aux usages qui ont cours actuellement dans certaines branches de la linguistique qui confondent arité et valence, nous définirons que :

- *l'arité* est l'étude du nombre d'arguments, de valeurs, de mots, ou d'informations contenus dans une formule, un message, une phrase,
- alors que *la valence* désigne le nombre de relations possibles entre les différents arguments, valeurs, mots, ou informations contenus dans une séquence.

Sur le plan de l'analyse sémantique du concept d'arité, il est intéressant de remarquer que les racines grecques et latines ont donné naissance à deux familles de nombres différentes ; que l'on appelle les « n-ary » (pour la racine latine) et les « n-adique » (pour la racine grecque). Ces deux familles de nombres ont elles-mêmes donné naissance au concept « d'arité », qui se décline en « type », « adicité », « adinité », ou « rang », « branche », selon le domaine des mathématiques dans lequel on travaille.

Aujourd'hui, le concept d'arité est employé pour déterminer la structure des opérations mathématiques, dans tous les domaines (arithmétique, ensembles, nombres).

Exemple : dans un ensemble E d'entiers naturels, l'opération $e \rightarrow e+2$ est une opération unaire sur l'ensemble

E des entiers naturels. Nous dirons qu'il s'agit d'une opération d'arité 1.

Exemple : dans un ensemble E d'entiers naturels, les additions, multiplications, divisions, soustractions, sont des opérations binaires sur les entiers naturels. Nous dirons que toutes ces opérations ont une arité de 2.

Le force du concept d'arité dans les mathématiques tient au fait qu'il étend l'usage de l'unaire, du binaire, du ternaire, du quaternaire... à la construction de l'ensemble des opérations arithmétiques. Ainsi, le binaire ne sert plus seulement à construire un nombre, il permet également de construire, de structurer, de définir une opération.

L'arité a la force d'un principe de classification mathématique des opérations qui sont elles-mêmes... mathématiques ! Ainsi, nous observons que la théorie moderne des mathématiques regroupe sous le terme « opérations binaires » (arité 2) la quasi-totalité des opérations que nous pouvons faire dans quatre domaines principaux qui sont :

- Les opérations portant sur les nombres : opérations élémentaires (additions, soustractions, multiplication, division, puissance), opérations arithmétiques (quotient euclidien, reste euclidien, PGCD, PGCM), opérations combinatoires (coefficient binominal, arrangement)
- Les opérations portant sur les ensembles : ensemble de parties (union, complémentation, intersection, différence symétrique), ordre total (minimum, maximum), treillis (borne supérieure, borne inférieure)
- Les opérations structurelles : ensembles (produit cartésien, somme disjointe, puissance ensembliste), groupes (somme directe, produit libre, produit en couronne), modules (produit tensoriel, homomorphisme, torsion, extension), arbres

(enracinement, arborescence), variétés connexes (somme connexe), espaces pointés (bouquet, smash produit, joint)

- Les autres opérations : fonctionnelles (composition de fonctions, produit de convolution), vectorielles (produit scalaire, produit vectoriel, produit vectoriel généralisé), algébriques (crochet de Lie, crochet de Poisson, produit extérieur), homologiques (Cup produit, produit d'intersection), séquentielles (conquaténation).
- Il existe enfin un groupe transitoire d'opérations binaires qui ne sont ni véritablement mathématiques, ni véritablement linguistiques : ce sont les opérations logiques formalisées dans ce que l'on appelle l'algèbre de Boole. Toutes les propositions de l'algèbre de Boole ont une arité de 2. Elles sont binaires car elles se fondent sur la comparaison de 2 arguments.

En sortant maintenant des mathématiques (pour mieux y revenir), nous voudrions étudier d'autres champs d'application du concept d'arité. Cette étude aura le mérite de nous montrer en quoi le concept d'arité est polysémique, et surtout comment l'application de ce concept à des disciplines différentes peut mettre en lumière l'intelligence ou la cohérence existant entre ces disciplines et les mathématiques.

En linguistique, le concept d'arité est essentiellement utilisé pour l'analyse des prédicats. Rappelons ici qu'un prédicat est *un énoncé qui comporte un certain nombre d'arguments, et qui peut être vrai ou faux selon la valeur de ces arguments.*

Exemples :

Arité : prédicat :

- 0 verbes météorologiques : *il neige* – neiger ()
- 1 verbes intransitifs : *Xavier court* – courir
(Xavier)
- 2 verbes transitifs : *Roméo aime Juliette* – aimer
(Roméo, Juliette)
- 3 verbes bi-transitifs : *Georges enseigne la
sémantique aux étudiants* – enseigner (Georges,
sémantique, étudiants)
- 4 *Paul vend sa 106 à Jacques pour 20 000 F* –
vendre (Paul, 106, Jacques, 20 000 F)
- 5 Annonce locative : (propriétaire, locataire,
objet, somme, durée)

Tant que l'on reste à ce niveau d'analyse, rien ne distingue l'arité de la valence. Voilà pourquoi ce concept est beaucoup plus utile en informatique qu'en linguistique.

Dans le cadre de l'analyse informatique du message, l'arité permet d'accéder à des niveaux d'analyse beaucoup plus fondamentaux qui touchent à la structure même de l'information, étude qui n'est pas nécessaire dans le cadre de l'analyse linguistique.

A ce niveau minimaliste et mathématique, l'arité se définit comme : les groupes de phrases ayant le même nombre de mots, les groupes de mots ayant le même nombre de lettres, les groupes de mots ayant une, deux, ou trois lettres en commun... etc. L'arité peut aussi se définir comme des groupes d'opérations comportant la même quantité de nombres, des groupes de nombres ayant la même quantité de chiffres... etc.

Cela peut sembler simple, et pourtant c'est par cette étude que l'on peut déterminer tout ce qui entre dans la

dimension de la quantité. Car l'arité est l'équivalent de ce que l'on appelle un indice. Et si l'on se rapporte à la définition que le dictionnaire donne d'un indice, nous pouvons alors proposer une « bi-définition » du concept d'arité :

- Indice / Arité : signe apparent et probable qu'une chose est. Exemple : je vois une maison. Proposition d'arité 1 comportant 1 élément : la maison. Cette proposition d'arité 1 pourra être comparée avec une autre proposition d'arité 0 (je vois) ou une autre proposition d'arité 2 (je vois une maison et un champ).
- Indice / Arité : renseignement que l'on donne pour définir quelque chose. Exemple : je vous demande de me donner trois noms de ville. Les questions d'arité 3 seront l'ensemble des questions où il faut donner trois informations différentes. Exemple : il faut remplir les quatre cases pour pouvoir passer à l'étape suivante. Les formulaires d'arité 4 seront le groupe des formulaires où il faut remplir 4 cases.
- Indice / Arité : signe attribué à un nombre qui indique la puissance. Exemple : dans un système de base « a » positive, le logarithme (du grec logos, rapport, et arithmos, nombre) est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever « a » pour retrouver le nombre considéré. Rappelons ici que suivant le nombre « a » que l'on prend comme base, c'est à dire tel que $y = a^n$, nous pouvons écrire $n = \log_a y$, ce qui permet d'établir des tables logarithmiques qui simplifient les produits compliqués.
- Indice / Arité : signe attribué à une lettre représentant les différents éléments d'un ensemble. Exemple : un ensemble E qui comporte 3 éléments pourra se noter E_n ; dans lequel « n » est l'indice qui représente le nombre d'éléments de l'ensemble. Dans ce cas, nous parlerons d'un ensemble ternaire que l'on notera $E = (x, y, z)$.

- Indice / Arité : signe ajouté à une note de musique pour en faire varier la mesure. Dans le calcul du rythme, les musiciens utilisent les logarithmes de base 2 en parlant de double croche (soit une demi-croche), de triple croche (soit un quart de croche), de quadruple croche (soit un huitième de croche), ainsi que des logarithmes de base 12, dans la mesure où ce nombre peut très facilement se diviser.

Ces différents exemples nous démontrent que le concept d'arité est spécifique, et que s'il est défini rigoureusement, il ne doit pas être confondu avec la valence. L'apport principal du concept d'arité est de nous montrer que la notion de structure n'est pas limitée aux nombres : *il existe des nombres structuraux et des opérations structurales.*

Dans la recherche de proportion et d'harmonie qui est la nôtre, une telle conclusion a quelque chose de très encourageant, car elle étend la notion de qualité aux opérations arithmétiques, et plus particulièrement aux logarithmes qui en sont le symbole. Il sera particulièrement utile que dans les années qui viennent, des chercheurs en mathématiques recensent toutes les opérations arithmétiques structurales et en déterminent les applications dans des domaines tels que l'économie ou l'écologie.

9. Arité et groupements de mots

La construction d'une formule, d'une phrase ou d'une proposition nécessite souvent que certains arguments, certains mots, ou certaines valeurs, soient répétés pour produire un effet de langage. Cette répétition peut prendre deux formes possibles :

La présentation itérative : Le mot itération vient du latin *iteravitus*, dérivé de *iterare*, recommencer. Ce terme désigne un fait ou une action répétés plusieurs fois. Nous pouvons l'employer pour désigner tout élément d'un

ensemble (item) qui revient plusieurs fois au cours d'un développement, et formant ce que l'on appelle une série. La plupart des personnes pensent à tort que les phénomènes répétitifs se réduisent à des itérations, ce qui est regrettable dans la mesure où les itérations ne constituent que la part la plus simple et la moins intéressante des phénomènes répétitifs. Héraclite : « Travailler, c'est sans cesse les mêmes tâches recommencer ». L'itération se vérifie dans de multiples exemples de la vie quotidienne. « Il a plu trois fois aujourd'hui ». « Cette personne fait et refait toujours les mêmes erreurs ». « La télévision va passer une série de trente documentaires sur la vie des animaux ». « Dans ce discours, le mot pouvoir est employé au moins cent vingt fois ». « Cette idée est reprise par de nombreuses personnes ». « Il y a eu quatre coupures de courant en moins de trois heures ». D'une façon générale, la présentation itérative est une constatation qui n'explique pas les phénomènes et ne questionne jamais leurs propriétés structurales.

La présentation récursive : Le terme récursivité est un dérivé de l'adjectif *récursif* qui provient de l'anglais *recursive*, lui-même basé sur le latin *recurrere*, qui signifie « courir en arrière ». En mathématiques et en informatique, les algorithmes récursifs et les fonctions récursives constituent des opérations fondamentales. *Une formule ou un algorithme est dit récursif s'il s'appelle lui-même.* Dans les mathématiques, les algorithmes récursifs ont tout d'abord servi au calcul des suites récurrentes de nombres et à établir des fonctions dans l'ordre des entiers naturels. Mais on s'est rapidement aperçu qu'ils permettent aussi de travailler sur des structures de données définies récursivement comme des chaînes de caractères, des listes, ou des arborescences, et plus généralement sur tous les ensembles munis d'une relation bien fondée. A côté de la récursivité numérique, il existe ainsi une récursivité structurelle qui trouve des champs d'application très diversifiés, allant des questions de tri sélectif à celle du problème logique des tours de Hanoï, pour s'étendre la définition d'une charte

graphique, à la création d'une séquence rythmée, et à la génération des permutations.

C'est bien évidemment sur la question de la récursivité structurelle que le concept d'arité prend tout son sens. Cela est d'autant plus intéressant que les exemples que nous pouvons apporter dans ce domaine concernent majoritairement la littérature.

Pour comprendre en quoi les algorithmes récursifs concernent la littérature, prenons un exemple tiré du *Bourgeois Gentilhomme* (Acte II, Scène IV) de Molière. Le héros, Monsieur Jourdain, veut connaître toutes les manières « galantes » d'écrire un billet. De la phrase *Belle Marquise, vos beaux yeux, me font mourir d'amour*, il pourrait tirer *Vos beaux yeux, belle Marquise, d'amour me font mourir*, puis *Vos beaux yeux, me font mourir, belle Marquise, d'amour*, puis *Vos beaux yeux, me font mourir d'amour, belle Marquise*, et ainsi de suite... Comment Monsieur Jourdain devrait-il procéder pour engendrer toutes ces permutations ? Le mieux pour lui pour être sûr d'y arriver est d'utiliser un procédé récursif. L'un de ceux-ci est le suivant, mais le lecteur peut en imaginer d'autres. Tout d'abord, on segmente la phrase en trois groupes de mots : *Vos beaux yeux - me font mourir - d'amour*, on vérifie toutes les permutations avec ces trois groupes de mots (normalement il en existe six), puis on insère un nouveau groupe de mots *belle marquise*, et on recommence l'expérience des permutations en intégrant le nouveau bloc de mots en première position, puis en deuxième position, puis en troisième position, puis en quatrième position (on aura alors douze constructions possibles)... La formule ou l'algorithme est récursif parce qu'il s'invoque lui-même. Ce sont toujours les mêmes constituants (les mêmes groupes de mots) que l'on retrouve à travers les différentes permutations. De plus, l'algorithme est bien un algorithme général, qui joue le rôle d'un principe de classification, et que l'on peut écrire sous la forme d'une fonction, car si Monsieur Jourdain veut améliorer son côté poétique et

construire, comme le lui demande son maître de philosophie, toutes les permutations de la phrase *belle Marquise - vos beaux yeux - me font - mourir - d'amour*, qui a cinq constituants, il procédera de la même façon pour la phrase *belle Marquise - vos beaux yeux - me font - mourir - d'amour - pour vous*, qui a maintenant six constituants.

Ce principe exhaustif de classification suffira-t-il à faire de Monsieur Jourdain un poète ? Probablement pas. En effet, pour devenir poésie, il faudrait que les constructions linguistiques de notre Bourgeois Gentilhomme s'appuient sur la valeur complexe des mots, et satisfassent à la double articulation du sens et du son.

Rappelons ici pour mémoire que la poésie et le chant ne se fondent pas nécessairement sur une recherche de sens, comme on le pense souvent, mais sur une recherche purement formelle de récursivité linguistique. Comme l'écrit le poète Paul Valéry, « Ce qui est la forme pour quiconque est le fond pour moi ». Toutefois, la linguistique rejoint la poésie quand elle utilise la récursivité comme une règle de construction syntaxique, pouvant se répéter un nombre indéfini de fois à partir du résultat qu'elle produit. En morphologie et en lexicologie, elle s'observe dans la formation même des mots, notamment dans les études concernant l'étymologie et la dérivation lexicale.

Contrairement à son application dans les mathématiques, la récursivité en linguistique est le plus souvent restreinte par le principe d'économie valant dans le langage courant. En ce qui concerne l'écriture proprement dite, cette limitation est nécessaire puisque les structures linguistiques deviennent très complexes en s'accumulant. Observons toutefois que les principes économiques de compréhension valant pour l'écriture n'existent plus quand on se situe au niveau d'un dialogue oral, qui n'admet aucune limite en terme de complexité, pas plus qu'il n'admet de limite dans la durée.

Peut-on donner un exemple de récursivité en poésie ? Pour que vous l'entendiez, je vous propose une petite chanson contre les financiers du XVIII^{ème} siècle, dont la construction récursive se fonde sur une structure appelée « vers en écho ».

Et l'on voit des commis
Mis
Comme des princes
Qui jadis sont venus
Nus
De leurs provinces

La récursivité poétique semble avoir un rapport étroit avec la récurrence financière, mais ce sont là des connaissances ignorées de nos experts adeptes de la prose.

Comme nous l'avons dit plus haut, la notion simple de sens des paroles ne suffit pas à la poésie : celle-ci recherche une rythmique, des résonances, des figures. En combinant l'arité avec la récursivité, la recherche linguistique pourra s'intéresser aux effets sémiologiques, morphologiques, et phonétiques, que produisent *les groupements de mots et de physionomies de mots*, indépendamment de leurs liaisons syntaxiques, et par des influences réciproques (c'est à dire non syntaxiques) de leurs voisinages.

Pour illustrer ce propos, nous pouvons par exemple choisir un mot à 9 lettres : *numéraire*, puis explorer les groupes de mots qui se forment quand :

- On permute les lettres de ce mot sans les changer (base 9),
- Puis quand on permute les lettres de ce mot en supprimant au maximum une lettre de ce mot (hypothèse de permutation en base 8),

- Puis quand on permute les lettres de ce mot en supprimant au maximum deux lettres de ce mot (hypothèse de permutation en base 7)... etc...

Nous obtiendrons ainsi la liste des anagrammes purs et impurs du mot *numéraire* en les classant par ordre croissant d'arité :

Arité 0 : numéraire, remanieur, rémunérai.

Arité 1 : ruminera, rémunéra, rainurée, remuerai, énumérai, marnière, réanimer, remanier.

Arité 3 : émunir, ruminer, meunier, mineure, ruminée, reminer, marneur, rainure, réunira, ruinera, urinera, marieur, murerai, manieur, mariner, merrain, ranimer, remuera, énuméra, ramener, reniera, arrimée, réaimer, remarie, remarié, anémier, maniéré, marinée, mènerai, ranimée, réanime, réanimé, remanie, remanié.

Arité 4 : réunir, ruiner, uriner, mineur, rimeur... etc

Sans doute n'est-ce là qu'un exemple infime du travail qui attend la linguistique lorsqu'elle commencera à s'intéresser mathématiquement aux groupements de mots. C'est à partir des groupements de mots et des permutations entre les mots que nous quittons l'étude des dénnotations pour entrer dans celle des connotations.

La notion de groupement de mots ouvre les portes de l'étude du champ linguistique, qui intéresse directement les capacités humaines de réflexion et d'action.

Nous ne pouvons, pour des raisons assez évidentes de manque de place, développer plus avant ce thème, et poursuivons maintenant notre exposé sur le second concept

central dans l'analyse, la compréhension, et l'utilisation des nombres structuraux.

10. Le concept de valence

Le concept de valence est le second concept important qui permet d'exploiter les potentialités des nombres structuraux. *Dans la définition que nous en donnons, la valence indique le potentiel de liaison d'un signe, d'un mot, d'un verbe, d'un élément, d'un nombre, d'un ensemble, d'une trajectoire, ou d'un atome. Elle questionne le potentiel connectif des phénomènes. L'arité et la valence sont des concepts très proches, qui ont un rapport de complémentarité plus que d'opposition. Si nous faisons une comparaison entre ces deux concepts, l'arité détermine le nombre d'éléments dans un ensemble, alors que la valence détermine le nombre de relations possibles entre ces éléments. En terme philosophique, l'arité s'intéresse à ce qui est actuel, et la valence à ce qui est potentiel. En terme linguistique, la valence concentre ses recherches sur les verbes, alors que l'arité concentre ses recherches sur tous les autres mots. Ces deux approches complémentaires demandent à être distinguées, même s'il est vrai que les deux concepts semblent parfois si proches que l'on pourrait les croire synonymes.*

Dans la pratique, nous observons que la valence est utilisée dans des disciplines très nombreuses, telles que la chimie, la physique de l'énergie, la physique des solides, en informatique, en biologie, en psychologie, en écologie, et même en marketing.

Dans l'analyse de la structure des corps solides simples inorganiques, la valence est utilisée pour calculer le nombre de connexions entre les éléments constitutants. Par exemple, dans le tableau des polyèdres de coordination, nous trouvons respectivement : des structures linéaires ou coudées de valence 2 (qui admettent que 2 liaisons), des structures trigonales planes et pyramidales de valence 3,

des formes tétraédriques, pyramidales à quatre arrêtes, tétraédriques, plans carrés à valence 4, une bipyramide trigonale à valence 5, une structure octoaédrique à valence 6, un prisme trigonal capé à valence 7, une structure cubique et une structure dodécaédrique à valence 8, un prisme trigonal tri-capé à valence 9, une structure cuboctaédrique à valence 12... etc. Notons qu'il est possible de représenter ces structures sous la forme d'un graphe mathématique.

Dans la chimie, la valence d'un atome fixe de façon précise le nombre d'atomes auxquels cet atome peut se lier. La formulation du concept de valence atomique est due à August Kekulé, et elle a permis de comprendre que les atomes s'associent entre eux selon des règles mathématiques précises. Pour prendre un exemple, dans le gaz d'hydrogène H_2 , deux atomes d'hydrogène sont associés. Dans le méthane CH_4 , il y a un atome de carbone et quatre atomes d'hydrogène : le carbone est associé à 4 atomes. Ainsi, il est désormais établi que chaque élément chimique est caractérisé par un chiffre allant de 1 à 4, et que l'on appelle la valence, et que quelle que soit l'origine de cet élément chimique, sa valence est toujours conservée. Pour déterminer la valence d'un atome, on utilise la méthode de Lewis basée sur le nombre d'électrons de l'atome ainsi que leur configuration électronique, et le choix d'un mode de représentation.

Dans la théorie mathématique, nous trouvons la valence dans la théorie des ensembles. Un ensemble de valence 1 est un ensemble unaire qui n'admet qu'un seul élément (et une seule relation) ; un ensemble de valence 2 est un ensemble binaire qui n'admet que deux éléments (et deux relations) ; un ensemble de valence 3 est un ensemble ternaire qui n'admet que trois éléments (et trois relations) ; un ensemble de valence 4 est un ensemble quaternaire qui n'admet que quatre éléments (et quatre relations). Comme on peut le voir, le nombre de relations augmente proportionnellement au nombre d'éléments. Notons que

dans ces cas, nous parlerons d'ensembles mono-valents, bi-valents, tri-valents, tétra-valents... Mais remarquons toutefois que les mathématiques sont moins intéressées par les valences en elles-mêmes que par les équivalences, c'est à dire les valences qui sont égales entre elles. Pourquoi avoir fait un tel choix ? Peut-être parce que les mathématiciens sont plus sensibles à l'harmonie de l'ordre qu'à la beauté du désordre... Peut-être aussi que l'on a recherché très tôt dans les mathématiques certains principes de classification permettant de sélectionner et de ranger les choses par catégories, principes qui sont à l'origine de l'activité scientifique.

Dans la philosophie, l'analyse structurale des concepts serait bien inspirée de recourir à la valence dans le cadre de la théorie. En effet, la plupart des concepts philosophiques sont étudiés isolément. La position (ou le rang) d'un concept par rapport à un autre concept est rarement étudiée. L'ordre de supériorité ou d'équivalence des concepts est aujourd'hui encore quelque chose de non discuté. Tout est conçu comme si ces concepts contenaient une vérité en soi. Or dans une philosophie qui reposerait réellement sur une base mathématique et structurale, tout ceci pourrait être mis en discussion. En effet, chaque personne est en capacité, par la perspective infinie de sa sensibilité et de son entendement, de déterminer et de justifier d'un ordre de préférence entre les concepts, en leur attribuant une valence qui sera augmentée.

Prenons par exemple le débat historique entre l'essence et l'existence. Pendant deux mille ans, on nous a dit que l'essence précède l'existence. L'affirmation de cette essence présumée a permis de légitimer toutes les inégalités sociales, sexuelles, raciales, économiques, politiques.... Puis les philosophes modernes sont arrivés Nietzsche d'abord, puis Sartre, qui nous ont dit : Désolé ! Pour nous l'existence précède l'essence ! Et cela a été la source de beaucoup de libertés nouvelles dont nous

sommes aujourd'hui les héritiers, et sur lesquelles beaucoup voudraient revenir.

Mais si nous poursuivions le mouvement amorcé en y rajoutant un troisième terme ? A notre époque dominée par l'économie promue au rang d'idéologie de marché, la conscience du monde fonctionne sur le postulat selon lequel la substance précède l'existence. Cela permet de justifier tous les asservissements économiques et de noyer le monde dans une philosophie de mauvais aloi. Mais si précisément la vraie révolution commençait là, dans le basculement de l'ordre d'importance de ces motifs ? Qu'est-ce qui pourrait alors empêcher certaines consciences d'affirmer haut et fort que pour elles, l'existence précède la substance ?

Dans un autre domaine, la devise républicaine « liberté – égalité – fraternité » est une formule ternaire comportant trois éléments distincts. Si nous cherchons à comprendre ce que signifie cette devise républicaine, nous pouvons nous amuser à faire permuter les éléments. Ainsi, « fraternité – égalité – liberté » n'aura pas le même sens que « liberté – égalité – fraternité ». Par quelle décision arbitraire avons-nous choisi d'inscrire sur le fronton de la république telle formule plutôt que telle autre, c'est une question de sémantique à laquelle seule la réflexion philosophique peut apporter une réponse.

En réalité, la question posée par un tel changement dans l'ordre de présentation de ces concepts est de savoir s'il existe une équivalence ou un ordre de supériorité entre eux. Cette seule question est fondatrice des deux plus grandes idéologies du XX^{ème} siècle, l'une (le socialisme) considère que l'égalité doit primer sur la liberté et l'autre (le capitalisme) considère que la liberté doit primer sur l'égalité. Ces conceptions de supériorité entre les termes ont provoqué beaucoup de difficultés et d'oppositions sociales. On peut alors se demander si en lieu et place de ces rapports de supériorité, il ne serait pas plus pertinent

d'établir une relation d'équivalence, assumant le rapport contradictoire entre les termes. Cela permettrait d'envisager un dialogue totalement inédit, inouï, entre égalité et liberté, jouant sur la mobilité des termes et les multiples configurations présidant à leur accomplissement. Cette perspective serait d'autant plus intéressante si l'on rajoutait un quatrième terme (par exemple « la sécurité ») au ternaire liberté - égalité - fraternité. Quel serait le rapport de ce quatrième terme avec les termes précédents ? Le rapport d'équivalence pourrait-il être conservé entre tous les termes ? Pour répondre à cette question, on pourra se rapporter à cette citation de Benjamin Franklin, selon lequel « ceux qui sont prêts à sacrifier une liberté essentielle pour acheter une sûreté passagère, ne méritent ni l'une ni l'autre ».

Que les rapports contradictoires d'équivalence ou de supériorité entre certains concepts puissent dans une approche structurale opérer une « fertilisation croisée » constitue une perspective enthousiasmante pour la philosophie dont nous pouvons annoncer qu'elle pourrait à elle seule ouvrir à un nouvel âge de la raison.² Un autre point remarquable est que le travail sur la valence ouvre finalement à une construction dialogique de la vérité qui la rend accessible à chaque homme et à tous les hommes, en sortant le discours philosophique de l'apanage des philosophes spécialisés et autres experts patentés. L'étude du rapport entre les concepts débouche sur une structure qualitative qui se forme nécessairement à partir de plusieurs voix, plusieurs pensées, plusieurs regards, plusieurs sensibilités, plusieurs rêves, comme si nous avions là le début d'une nouvelle réalité co-crée par l'ensemble de ceux qui y participent.

² Cette approche converge avec celle d'Alfred Korzybski qui dans son ouvrage *Science and sanity* demande à ce que l'ensemble des concepts que nous manipulons soient associés à des valences permettant de les placer dans une perspective « multi-ordinale » qui aura pour effet de limiter considérablement les perturbations sémantiques en définissant clairement les différents ordres d'abstractions de ces concepts.

11. Les structures linguistiques

La modification de la valence d'un texte se fonde sur des caractéristiques linguistiques et grammaticales que nous allons étudier maintenant.

Dans le domaine de la linguistique, la valence est une propriété syntaxique concernant principalement les verbes, mais pouvant également s'appliquer aux noms et aux adjectifs. *On appelle valence d'un terme le nombre d'actants que ce terme peut recevoir ou qu'il doit recevoir pour être saturé, c'est à dire fournir un syntagme grammaticalement correct et porteur d'une signification.*

En linguistique, le terme d'actants désigne les constituants syntaxiques imposés par la valence de certaines classes lexicales (comme le verbe principalement, mais aussi le nom, l'adjectif, la préposition). Les actants assurent chacun dans un énoncé une fonction syntaxique précise imposée par le schéma actantiel du mot envisagé, lequel impose aussi leur classe lexicale, qui correspond souvent à un trait sémantique. Chaque actant, outre son rôle grammatical (sa fonction), joue un rôle sémantique analogue à ceux du récit :

- *l'acteur* est celui qui agit
- *l'agent* est celui par lequel une action est accomplie
- *l'objet patient* est ce qui subit l'action
- *le bénéficiaire* est celui qui reçoit les résultats de l'action
- *l'instrument* est ce qui permet l'action

Ces différents rôles ne doivent pas être confondus avec les fonctions grammaticales, car l'acteur n'est pas forcément le sujet. Ainsi dans l'exemple : « *la glace est mangée* », l'actant *la glace* est le sujet mais pas l'acteur. Ce groupe nominal joue le rôle d'un objet patient. *Nous distinguerons donc d'autant mieux les classes grammaticale et*

syntaxiques, que nous considérerons le terme d'actant comme une réflexion syntaxique orientée toute entière vers l'action.

Pour déterminer la valence d'un verbe, il suffit de voir à combien d'actants nous pouvons le relier dans une phrase. Par exemple, dans la phrase « *Jean donne des fleurs à Sophie dans la rue* », le verbe *donner* de cette phrase est trivalent. Il peut être saturé par trois actants, chacun assurant un rôle et une fonction : actant 1 : Jean = acteur = sujet ; actant 2 : des fleurs = objet patient = objet direct ; actant 3 : Sophie = bénéficiaire = objet indirect. Dans la rue est pour sa part un circonstant, complément circonstanciel de lieu, il est subsidiaire et ne doit pas être considéré comme un actant.

D'une manière générale, le verbe *dormir* est monovalent, il a une valence 1. En effet, dans « *je dors* », le verbe *dormir* n'est syntaxiquement rattaché qu'au sujet *je*.

En revanche, le verbe *manger* est bivalent. (valence 2). En effet, on mange quelque chose, il y a un sujet et un complément.

Quand au verbe *donner*, comme nous l'avons vu plus haut, il est trivalent. En effet, on donne quelque chose à quelqu'un : ce verbe est rattaché syntaxiquement à un sujet, un complément d'objet direct, et un complément d'objet indirect.

Il existe quelques verbes quadrivalents en français. Notamment :

Le verbe *traduire* : on traduit des paroles d'une langue vers une autre. Le verbe est rattaché à un sujet, un complément d'objet direct, et deux compléments d'objet indirects.

Le verbe *acheter* : « *Il lui a acheté sa maison pour 500.000 euros* ».

Toutefois, il convient de noter que la valence n'est pas une règle de construction absolue. Les verbes peuvent voir leur valence augmenter ou diminuer en fonction du sens que l'on cherche à donner à la phrase. Par exemple, le verbe *parler* peut-être monovalent : « *il parle* », ou bivalent : « *il parle à Jean* ». Cette modification de la valence est souvent causée par un élément nouveau provenant du contexte. Le changement de valence peut produire de grandes modifications de sens, ou bien des nuances très subtiles et presque imperceptibles selon l'effet de langage recherché.

Autre exemple, le verbe monovalent *vivre* peut devenir bivalent lorsqu'on dit « *il vit sa vie* ». Mais toutes les langues ne permettent pas un tel changement de valence.

Cette imprévisibilité de la valence augmente quand l'écrivain ou l'énonciateur cherche à produire des effets de style. Pour des raisons stylistiques, un écrivain peut très bien transgresser la valence habituelle d'un verbe. Ainsi, nul ne reprochera à Baudelaire l'agrammaticalité de :

La servante au grand cœur dont vous étiez jalouse
Et qui dort son sommeil sous une humble pelouse.

La créativité littéraire pourrait être définie comme la capacité à modifier unilatéralement la valence de certains verbes, mots, ou adjectifs, en faisant en sorte que cette rupture des codes établis de la communication aboutisse à un renouvellement du sens, sans qu'il ne soit nécessaire à l'écrivain d'expliquer à son lecteur la manière dont il a construit sa phrase ou la manière dont elle doit être lue.

En ce sens, et malgré les contraintes qu'elle impose dans la construction syntaxique, phonétique, et sémantique, la grammaire ne saurait se comprendre sans la capacité humaine à effectuer des manipulations structurelles sur le langage. Ainsi, la grammaire n'est pas une entreprise prescriptive qui spécifie ce qui est « bon » et « correct »

dans la langue, mais bien le relevé de ce que les locuteurs autochtones maîtrisent sans instructions explicites. Dans la grammaire, les règles du jeu sont toujours implicites, et c'est en cela que l'on peut la comparer à un jeu vidéo.

12. Le nombre, une catégorie grammaticale introuvable

Ce détour par les deux concepts centraux de l'analyse structurale des propositions littéraires et mathématiques nous donne l'occasion de repérer une caractéristique importante des nombres structuraux : ils interviennent massivement dans la construction des noms et des adjectifs, et jouent le rôle de morphèmes.

Rappelons qu'en linguistique, *un morphème se définit comme la plus petite unité porteuse de sens qu'il soit possible d'isoler dans un énoncé.*

Ainsi, par exemple, le mot « monarchie » est composé de deux morphèmes : *mono*, qui signifie seul, unique, et *archie* qui signifie pouvoir.

Les catégories grammaticales forment un cadre structurel pour les catégories lexicales : elles apportent une série de distinctions abstraites applicables à un grand nombre de catégories lexicales. Parmi les catégories grammaticales les plus importantes, on distingue les classes de mots (nom, pronom, déterminant, verbe, adjectif, adverbe... etc), le nombre (singulier ou pluriel), et les temps verbaux (présent, passé, futur).

Par contre, il est étonnant de constater que les noms de nombres ne figurent pas dans les catégories grammaticales reconnues en français.

En français, on peut distinguer neuf classes de mots qui se présentent ainsi :

- *nom ou substantif* : père, maison, oiseau, paix

- *pronom* : je, tu, il, elle, quelqu'un, moi, toi, dont
- *déterminant* : le, la, un, ce, cette, des, deux
- *verbe* : dire, rire, courir, penser
- *adjectif* : riche, fier, grand, doux
- *adverbe* : là, finalement, beaucoup, très
- *préposition* : sur, dans, contre, entre, à, pendant
- *conjonction* : et, mais, car, parce que, pendant que
- *interjection* : ouais ! hein ! hélas !

Dans la majeure partie des langues européennes (portugais, espagnol, anglais), il existe dix classes. *La dixième classe grammaticale est le nombre.*

Certaines personnes pourront objecter que la délimitation de la catégorie grammaticale dépend de la définition que l'on utilise, mais il existe toutefois de bonnes raisons qui nous permettent de penser que l'absence de classe grammaticale désignant spécifiquement le nombre est une carence qui ne peut se justifier.

Cette nécessité d'une nouvelle classe grammaticale regroupant tous les nombres est mise en lumière par les propriétés particulières des nombres structuraux, dont nous avons étudié les racines grecques et latines dans les chapitres qui précèdent.

Tant que l'on s'en tient à l'usage des nombres ordinaux et cardinaux, nous pouvons nous contenter de ranger les nombres dans la catégorie des déterminants. Ainsi, « le premier train », « les trois oiseaux » déterminent bien un nom.

Toutefois, si l'on s'intéresse maintenant à l'usage des nombres structuraux, il n'est plus possible d'opérer la distinction précédente, car les nombres structuraux entrent dans la construction de nombreux mots et adjectifs, certains d'entre eux assurant même cette double fonction. Ainsi, les nombres structuraux fonctionnent comme « une véritable base » dans la construction des mots, car ils sont « des

éléments formants », des *morphèmes*. Ils n'occupent pas plus la place d'un nom ou d'un adjectif (substitution), qu'une place dans le nom ou dans l'adjectif qu'ils servent à définir et à construire.

Si l'on considère par exemple le morphème *mon* (*o, a, è, i*), qui correspond à la racine grecque du premier de nos nombres structuraux, nous le retrouvons associé à la composition d'une bonne cinquantaine de mots en français : monovalent, monarchie, monotype, monoxyde, monospace, monomorphe, monopsome....

Si l'on considère par exemple le mot *octopode*, qui signifie *poulpe*, nous voyons bien que si nous retirons le morphème *octo*, le mot perd totalement son sens. Cela démontre bien que le morphème *octo* est un élément indispensable dans la construction du mot *octopode*, et qu'il ne constitue pas seulement une modalité de construction (comme un déterminant ou un adjectif que l'on pourrait ajouter ou retirer librement).

Les nombres structuraux d'origine latine « unaire, binaire, ternaire, quaternaire, quinaire, sénaire, septénaire, octonaire, novénaire, dénaire... etc », ainsi que les nombres structuraux d'origine grecque « monade, dyade, triade, tétrade, pentade, hexade, heptade, octade, ennéade, década... etc » ainsi que tous les mots qui en dérivent « unarité, binarité, ternarité... etc » et « monadique, dyadique, triadique... etc », constituent une classe grammaticale spécifique : celle des nombres.

Compte tenu du fait que les nombres ordinaux et cardinaux entrent également dans la construction de certains mots, tels que « bimétallisme », « bi-mensuel », il conviendra à notre sens de séparer les nombres ordinaux et cardinaux de la classe grammaticale des déterminants pour les faire figurer avec les nombres structuraux dans une classe spécifique. Une telle classification aurait le mérite de faire apparaître les propriétés spécifiques des nombres dans

la construction lexicale, et serait un encouragement pour la découverte de nouvelles et fructueuses liaisons entre grammaire et mathématique.

Par ailleurs, et dans le cadre d'une analyse structurale comparée, il sera intéressant de comprendre ce qui, dans la grammaire française, rend si difficile la reconnaissance des nombres comme classe grammaticale spécifique, alors que cette classe est communément admise dans la plupart des langues européennes.

13. Une nouvelle manière d'enseigner les nombres

Ce qui milite le plus pour l'intégration du nombre comme classe grammaticale à part entière se trouve selon nous dans *la question de l'éducation*.

Aujourd'hui encore, les élèves de toutes classes se contentent d'apprendre l'arithmétique, la géométrie, et parfois aussi l'algèbre, selon une méthode pédagogique prescriptive et non descriptive, explicative et non participative. L'éducation des mathématiques se contente de proposer un ensemble de démonstrations formalisées et objectives que l'on doit reproduire sous peine de se faire sanctionner.

Quel paradoxe de voir autant d'élèves se désintéresser des mathématiques, alors que leur esprit ne demande qu'à comprendre *l'intelligence des nombres* !

Cette situation trouve son point d'aboutissement dans ce terrible constat éducatif : la plupart des élèves ne connaissent que les nombres ordinaux et cardinaux, et les autres catégories de nombres leur sont complètement inconnus. Les adjectifs numéraux distributifs, ainsi que leurs cousins, les adverbes numéraux distributifs, sont actuellement rangés dans la catégorie grammaticale des « nombres divers », et dorment tranquillement à côté de la catégorie des ordinaux et des cardinaux.

Réintégrer les nombres comme classe grammaticale spécifique, réorganiser les catégories à l'intérieur de cette classe, mettre en lumière la dimension sémantique attachée à ces différents nombres, nous semble un projet des plus salutaires.

Mais il existe une autre raison qui devrait plaider pour une approche grammaticale beaucoup plus rigoureuse de l'élément numérique : c'est la polyvalence du concept numérique lui-même. Donner un enseignement grammatical et littéraire des nombres montrerait aux élèves que la notion de nombre n'est pas le monopole des seules mathématiques. *Et c'est ce double enseignement, grammatical et mathématique, qui créerait le déclic, et conduirait l'élève vers l'intelligence des nombres.*

Dans les mathématiques elles-mêmes, les élèves pourraient se voir enseigner les différentes classes de nombres et leurs utilisations, ce qui constituerait un enseignement dynamique très complémentaire avec celui de l'arithmétique.

Que le nombre relève de plusieurs disciplines, et qu'il puisse faire l'objet de plusieurs discours, c'est ce que nous avons cherché à montrer tout au long de ces pages.

Que le nombre soit moins simple, moins monotone, moins régulier, moins policé, moins parfait que ce que les mathématiques ont bien voulu nous dire, c'est ce que le monde nous montre sans cesse, et que nous ne voulons pas voir. A une époque qui lutte contre les tendances excessives à l'uniformisation et au réductionnisme, contre l'asservissement outrancier du monde à certains paramètres (statistiques, financiers, économiques, génétiques), la possibilité qu'existe un discours différent dans les sciences des nombres serait une bonne nouvelle pour les hommes et pour la vie.

A travers le concept de nombre structural, les élèves pourront *apprendre à construire des nombres dans un but donné et dans un contexte donné*, activité bien plus intéressante, bien plus utile, que celle qui consiste à faire des équations, ou résoudre des problèmes abstraits, dont on ne comprend pas le sens ni l'application.

Ils pourront aussi, s'ils le souhaitent, apprendre à s'en passer... et c'est là que réside selon nous la grande force révolutionnaire de ce nouvel enseignement.

Ainsi pourront-ils méditer cette citation d'Alain sur un autre grand philosophe : « *Kant m'apprit qu'il n'y a point de nombres, et qu'il faut faire les nombres chaque fois qu'il faut les penser* ». Enseignement libérateur pour le travail de l'esprit, qui nous montre la relativité de toute chose : finalement il n'existe pas de faits qui soient totalement objectifs. Même l'arithmétique et la géométrie demeurent des faits humains.

Olivier Rocca Vallauris / Avignon, Mai 2020.

Pour citer cet article : Vers une nouvelle classification : les nombres structuraux, Olivier Rocca

Droit d'auteur : © Copyright 2020 Olivier Rocca, tous droits de reproduction, de diffusion et d'adaptation réservés pour tous pays.

