



**HAL**  
open science

## Méthodes de régularisation évanescence pour la complétion de données

Laëtitia Caillé, Franck Delvare, Jean-Luc Hanus, N. Michaux-Leblond

► **To cite this version:**

Laëtitia Caillé, Franck Delvare, Jean-Luc Hanus, N. Michaux-Leblond. Méthodes de régularisation évanescence pour la complétion de données. 24ième Congrès Français de Mécanique, Aug 2019, Brest, France. hal-02571052

**HAL Id: hal-02571052**

**<https://hal.science/hal-02571052>**

Submitted on 12 May 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Méthodes de régularisation évanescence pour la complétion de données

L. CAILLÉ<sup>a</sup>, F. DELVARE<sup>b</sup>, J-L. HANUS<sup>c</sup>, N. MICHAUX-LEBLOND<sup>d</sup>

a. LMNO, Université de Caen Normandie, laetitia.caille@unicaen.fr

b. LMNO, Université de Caen Normandie, franck.delvare@unicaen.fr

c. LaMé, INSA Centre Val de Loire, jean-luc.hanus@insa-cvl.fr

d. LMNO, Université de Caen Normandie, nathalie.leblond@unicaen.fr

## Résumé :

*Nous présentons des méthodes de régularisation évanescence qui permettent de trouver, parmi toutes les solutions de l'équation d'équilibre, la solution du problème de complétion de données qui s'approche au mieux des données de type Cauchy ou de champs partiels. Nous utilisons ici la méthode des solutions fondamentales en tant que méthode numérique pour discrétiser l'espace des solutions de l'équation d'équilibre. Nous nous intéressons, dans un premier temps, à la résolution de problèmes de Cauchy associés à l'équation d'Helmholtz. Ensuite, nous présentons l'analyse d'un essai de flexion trois points. Les mesures de champs partielles obtenues par corrélation d'images numériques sont complétées et débruitées, ce qui met en évidence les performances de la méthode.*

## Abstract :

*We present evanescent regularization methods that allow to find, among all the solutions of the equilibrium equation, the solution of the data completion problem which fits at best Cauchy or partial fields data. Here we use the method of fundamental solutions as a numerical method for discretizing the space of the equilibrium equation solutions. We are interested initially in solving Cauchy problems associated with the Helmholtz equation. Then, we present the analysis of a three-point bending test. The partial field measurements obtained by digital images correlation are completed and denoised, which highlights the performance of the method.*

**Mots clefs : Identification ; problèmes inverses ; problèmes de Cauchy ; problèmes de complétion de données ; régularisation ; méthode des solutions fondamentales ; corrélation d'images numériques.**

## 1 Contexte de l'étude

Les problèmes de complétion de données interviennent dans divers domaines de la physique, tels que la mécanique, l'acoustique ou la thermique. La mesure directe des conditions aux limites se heurte souvent à l'impossibilité de placer l'instrumentation adéquate. La détermination de ces données n'est alors

possible que grâce à des informations complémentaires. Des mesures surabondantes sur une partie accessible de la frontière mènent à la résolution d'un problème inverse de type Cauchy. Cependant, dans certains cas, des mesures directes sur la frontière sont irréalisables, des mesures de champs plus facilement accessibles permettent de pallier ce problème. La littérature propose un grand nombre de méthodes inverses pour résoudre les problèmes inverses de complétion de données [1, 2, 3].

Nous présentons ici des méthodes de régularisation évanescence [4, 5] qui permettent de trouver, parmi toutes les solutions de l'équation d'équilibre, la solution du problème de complétion de données qui s'approche au mieux des données de type Cauchy ou de champs partiels. La résolution du problème inverse est ramenée à une suite de problèmes d'optimisation sous contraintes (algorithme de point fixe) faisant intervenir plusieurs termes. Le premier terme des fonctionnelles est un terme de relaxation qui représente l'écart entre les données de type Cauchy ou de champs partiels et la solution optimale calculée. Le second terme agit sur tout le domaine et exprime la distance entre deux solutions optimales. Ce terme de régularisation tend vers zéro au fur et à mesure des itérations. Ces processus itératifs ne dépendent pas d'un coefficient de régularisation et sont robustes vis à vis du bruit sur les données, qui sont recalculées et de ce fait débruitées. La méthode est généralisable à tout opérateur elliptique et peut être implémentée par différentes méthodes numériques (méthode des éléments finis, méthode des éléments de frontière, méthode des solutions fondamentales,...).

Nous nous intéressons, dans un premier temps, à la résolution de problèmes de Cauchy associés à l'équation d'Helmholtz [6]. Une étude numérique est menée, en utilisant la méthode des solutions fondamentales en tant que méthode numérique pour discrétiser l'espace des solutions de l'équation d'Helmholtz. Des reconstructions précises attestent de l'efficacité et de la robustesse de la méthode. Nous présentons, dans un second temps, l'analyse d'un essai de flexion trois points en appliquant la méthode de régularisation évanescence à des mesures de champs partielles [7] issues de corrélation d'images numériques. Nous montrons la capacité de la méthode à compléter et débruiter des données partielles de champs de déplacements et à identifier les conditions aux limites en tout point de la frontière. L'exploitation de mesures réelles met en évidence les performances et la robustesse, vis à vis de données bruitées, de la méthode.

## 2 Méthodes de complétion de données

### 2.1 Les problèmes modèles

Le solide décrit le domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , borné par sa frontière  $\Gamma \equiv \partial\Omega$ , telle que  $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$ , voir Figure 1.  $\Gamma_d$  est une partie de la frontière, si elle existe, où des informations sur les conditions aux limites sont accessibles.  $\Gamma_i$  décrit la partie complémentaire de la frontière où aucune information sur les conditions aux limites n'est accessible. Nous définissons également le sous-domaine  $\Omega_d \subset \Omega$ , où le champ solution est éventuellement mesurable, par exemple en utilisant la corrélation d'images numériques.

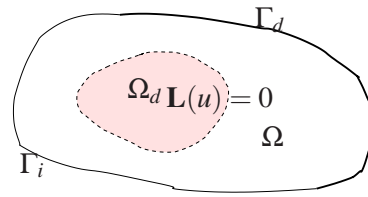


FIGURE 1 – Domaine

Nous supposons que la solution  $u$  satisfait l'équation d'équilibre :

$$\mathbf{L}(u) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (1)$$

où  $\mathbf{L}$  désigne l'opérateur d'Helmholtz ou de Lamé.

S'il est possible de mesurer la solution  $u$  et sa dérivée normale  $u'$  sur la partition  $\Gamma_d$  de  $\Gamma$ , alors le problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz est formulé par l'équation (1) et les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u = \phi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \\ u' = \psi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \end{cases} \quad (2)$$

Dans le cas de l'élasticité linéaire, si le champ de déplacements  $\underline{u}$  est mesurable sur la partition  $\Omega_d$  de  $\Omega$  et s'il est possible d'obtenir des informations fiables sur les conditions aux limites en terme de vecteur contrainte  $\underline{T}(\underline{u})$  sur  $\Gamma_d$ , alors la formulation du problème de complétion de données en élasticité linéaire est donnée par l'équation (1) et les données incomplètes :

$$\begin{cases} \underline{u} = \underline{\phi}_d, & \forall \underline{x} \in \Omega_d & (3a) \\ \underline{T}(\underline{u}) = \underline{\sigma} \underline{n} = \underline{\psi}_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d & (3b) \end{cases} \quad (3)$$

avec  $\underline{n}(\underline{x})$  le vecteur normal unitaire extérieur et  $\underline{\sigma}$  le tenseur des contraintes.

Si les données (2) ou (3) sont compatibles, les problèmes (4) et (5) admettent respectivement une unique solution. Néanmoins, la solution obtenue est instable, c'est à dire qu'elle est sensible à de petites perturbations des données (2) ou (3). C'est malheureusement cette situation qui est rencontrée lors de l'analyse de résultats d'essais puisque les données expérimentales sont systématiquement entachées d'un bruit de mesure, même faible.

$$\begin{cases} \mathbf{L}(u) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ u = \phi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \\ u' = \psi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \mathbf{L}(\underline{u}) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \underline{u} = \underline{\phi}_d, & \forall \underline{x} \in \Omega_d \\ \underline{T}(\underline{u}) = \underline{\psi}_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \end{cases} \quad (5)$$

Ces problèmes sont difficiles à résoudre par leur caractère mal posé ; une méthode de régularisation est alors requise pour trouver la solution stable. Nous faisons le choix d'utiliser une méthode de régularisation évanescence [4, 5] pour régulariser les problèmes.

## 2.2 Résolution par la méthode de régularisation évanescence

Soit  $\mathbf{H}(\Omega)$  l'espace des solutions de l'équation (1) :

$$\mathbf{H}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \quad / \quad \mathbf{L}(v) = 0 \text{ dans } \Omega\}$$

Nous définissons  $H(\Gamma)$  l'espace des restrictions sur  $\Gamma$  des éléments  $v \in \mathbf{H}(\Omega)$  et de leurs dérivées normales correspondantes  $v'$ . Nous définissons également  $\mathbf{H}(\Omega_d)$  l'espace des restrictions dans  $\Omega_d$  de l'espace  $\mathbf{H}(\Omega)$  des solutions de l'équation. Il est muni du produit scalaire usuel de  $H^1(\Omega)$  et de sa norme associée  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)}$ . Nous définissons  $\underline{u}|_{\Gamma}$  les traces des éléments de  $\mathbf{H}(\Omega)$  sur  $\Gamma$  ainsi que leur vecteur contrainte associé  $\underline{T}(\underline{u})|_{\Gamma}$  défini sur  $\Gamma$ . Il est ainsi possible de définir l'espace  $\mathbf{H}(\Gamma)$  des fonctions solutions du problème de complétion de données (5) :

$$\mathbf{H}(\Gamma) = \left\{ \underline{U} = (\underline{v}, \underline{u}, \underline{T}(\underline{u})) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \right. \\ \left. \left| \underline{v} \in \mathbf{H}(\Omega), \underline{v}|_{\Gamma} = \underline{u}, \underline{T}(\underline{v}) = \underline{T}(\underline{u}) \right. \right\} \quad (6)$$

L'espace des fonctions solutions  $\mathbf{H}(\Gamma)$  est un sous-espace fermé de  $\mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ .

Soit  $\underline{\Phi}_d = (\phi_d, \psi_d)$  un couple de données compatibles, une formulation équivalente au problème (4) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{U} = (u, u') \in H(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \underline{U} = \underline{\Phi}_d, \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_d \end{array} \right. \quad (7)$$

Soit  $(\underline{\phi}_d, \underline{\psi}_d)$  un couple de données compatibles, c'est à dire appartenant à  $\mathbf{H}(\Omega_d) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_d)$ , respectivement. Une formulation équivalente au problème (5) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{U} = (\underline{v}, \underline{u}, \underline{T}) \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \underline{v} = \underline{\phi}_d, \quad \forall \underline{x} \in \Omega_d \\ \underline{T} = \underline{\psi}_d, \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_d \end{array} \right. \quad (8)$$

Nous utilisons la méthode de régularisation évanescence pour résoudre les problèmes (7) ou (8), il s'agit d'une technique inverse initialement introduite par Cimetière et al. [4, 5] pour résoudre le problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace.

Avec  $c > 0$  et  $\underline{U}^0 \in H(\Gamma)$ , la solution du problème de Cauchy (4) est définie en tant que point fixe d'un opérateur de  $H(\Gamma)$  dans  $H(\Gamma)$  obtenu grâce à une suite de problèmes d'optimisation bien posés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{U}^{k+1} \in H(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c^k(\underline{U}^{k+1}) \leq J_c^k(\underline{V}), \quad \forall \underline{V} \in H(\Gamma) \\ \text{avec } J_c^k(\underline{V}) = \|\underline{V}|_{\Gamma_d} - \underline{\Phi}_d\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\underline{V} - \underline{U}^k\|_{\Gamma}^2 \end{array} \right. \quad (9)$$

Et étant donné  $c > 0$  et  $\underline{U}^0 \in \mathbf{H}(\Gamma)$ , la solution du problème de complétion de données (5) est définie en tant que point fixe d'un opérateur de  $\mathbf{H}(\Gamma)$  dans  $\mathbf{H}(\Gamma)$ , également obtenu grâce à une suite de problèmes

d'optimisation bien posés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{U}^{k+1} = (\underline{v}^{k+1}, \underline{u}^{k+1}, \underline{T}^{k+1}) \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c^{k+1}(\underline{U}^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(\underline{V}), \quad \forall \underline{V} = (\underline{v}', \underline{u}', \underline{T}') \in \mathbf{H}(\Gamma) \\ \text{sous la contrainte égalité : } \underline{T}|_{\Gamma_d} = \underline{\Psi}_d \\ \text{avec } J_c^{k+1}(\underline{V}) = \|\underline{v}'|_{\Omega_d} - \underline{\Phi}_d\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)}^2 + c\|\underline{V} - \underline{U}^k\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 \end{array} \right. \quad (10)$$

Dans les processus itératifs (9) et (10), l'équation d'équilibre est considérée comme fiable et est prise en compte exactement à chaque itération alors que les données (2) ou (3a) sont considérées comme non fiables. Les fonctionnelles sont composées de deux termes qui jouent différents rôles. Le premier est un terme de relaxation, qui agit seulement sur  $\Gamma_d$  ou  $\Omega_d$ , et représente l'écart entre les mesures et la solution optimale calculée. Les données potentiellement entachées d'un bruit de mesure sont alors recalculées. Le second terme agit sur toute la frontière  $\Gamma$  ou sur tout le domaine  $\Omega$ , il s'agit d'un terme de régularisation qui contrôle la distance entre deux itérés successifs. Ce terme tend vers zéro au fur et à mesure des itérations. La solution obtenue à la fin du processus itératif ne dépend pas du coefficient de régularisation, vérifie l'équation d'équilibre et est stable vis à vis du bruit sur les données puisque celles-ci sont recalculées afin d'être compatibles.

Pour résoudre les problèmes (7) ou (8), il est nécessaire de caractériser de manière discrète l'espace  $\mathbf{H}(\Omega)$ . Cette discrétisation est ici réalisée en utilisant la méthode des solutions fondamentales. Il s'agit d'une méthode sans maillage qui permet d'écrire l'approximation de la solution  $u \in \Omega$  sous la forme d'une combinaison linéaire de solutions fondamentales avec  $N$  sources  $\underline{y}^j \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ ,  $j = \overline{1, N}$ .

Dans le cas du problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz, l'approximation de la solution  $u \in \Omega$  s'écrit :

$$u(\underline{x}) \approx u^N(\underline{a}, \underline{Y}; \underline{x}) = \sum_{j=1}^N a_j \mathcal{F}(\underline{x}, \underline{y}^j), \quad \underline{x} \in \overline{\Omega}, \quad (11)$$

où  $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$  décrit les coordonnées d'un point du domaine,  $\underline{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$  représente les coordonnées d'un point source impérativement situé à l'extérieur du domaine,  $\underline{Y}$  est le vecteur de taille  $2N$  contenant les coordonnées des points sources  $\underline{y}^j$ ,  $j = \overline{1, N}$  et le vecteur  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_N)$  représente les constantes (coefficients) à déterminer.

La solution fondamentale  $\mathcal{F}$  de l'équation d'Helmholtz (1) s'écrit dans le cas bidimensionnel [8] :

$$\mathcal{F}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_H r(\underline{x}, \underline{y})), \quad \underline{x} \in \overline{\Omega}, \quad \underline{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}, \quad (12)$$

avec  $i^2 = -1$ ,  $r(\underline{x}, \underline{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$  la distance entre le point  $\underline{x} \in \overline{\Omega}$  et le point source  $\underline{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$  et  $H_0^{(1)}$  la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre zéro.

D'une manière similaire, la solution  $\underline{u} \in \Omega$  peut s'écrire, dans le cas de l'élasticité linéaire, comme une combinaison linéaire de solutions fondamentales de l'équation de Lamé [9].

### 3 Résolution du problème de Cauchy pour l'équation d'Helmholtz

Nous considérons un exemple numérique pour lequel une solution analytique  $u^{an}$  de l'équation d'Helmholtz  $(\Delta + k_H^2)u = 0$  est connue :

$$u^{an} = \cos\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right), \quad k_H^2 = 1, \quad \forall \underline{x} = (x_1, x_2) \in \Omega \quad (13)$$

Nous considérons le domaine carré  $\Omega = (0, 1)^2$  (Figure 2) afin d'étudier l'influence d'un bord non régulier sur les résultats numériques. La partie  $\Gamma_d$  du bord correspond à la moitié de  $\Gamma$  et est composée des segments d'équation  $x_2 = 0$  et  $x_1 = 1$ . La partie  $\Gamma_i$ , composée des côtés définis par  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 1$ , présente donc un point anguleux en  $(x_1, x_2) = (0, 1)$  (Figure 2).

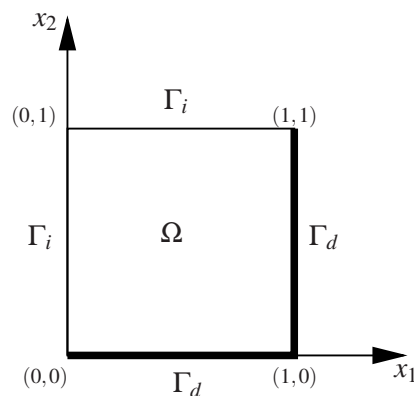


FIGURE 2 – Carré

Nous considérons le cas où les données  $\phi_d$  et  $\psi_d$  sont bruitées et définies par :

$$\begin{aligned} \phi_d &= u^{an}(\underline{x}) + \delta u^{an}(\underline{x}) \cdot \rho, \quad \underline{x} \in \Gamma_d, \\ \psi_d &= u'^{an}(\underline{x}) + \delta u'^{an}(\underline{x}) \cdot \rho, \quad \underline{x} \in \Gamma_d, \end{aligned} \quad (14)$$

où  $\delta$  est le niveau de bruit et  $-1 \leq \rho \leq 1$  est une variable aléatoire.

Les Figures 3(a) et 3(b), qui représentent les reconstructions numériques de  $u$  et  $u'$ , respectivement sur  $\Gamma_d$  pour  $\delta = 1, 3, 5, 10\%$  attestent que l'algorithme permet de débruiter les données. Les reconstructions sur  $\Gamma$  sont représentées sur la Figure 4, on remarque que les résultats obtenus pour les différents niveaux de bruit sont précis. On observe cependant quelques imprécisions pour la dérivée normale près des sommets de  $\Gamma_i$  (Figure 4(b)).

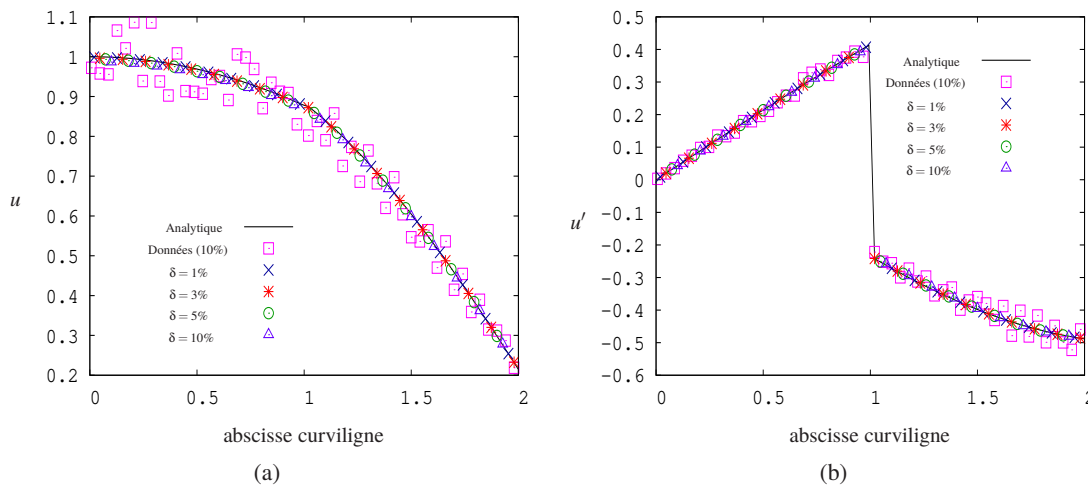


FIGURE 3 – (a) Les solutions analytique,  $u^{an}$  et numérique,  $u$  et (b) les dérivées normales analytique,  $u'^{an}$  et numérique,  $u'$ , reconstruites sur  $\Gamma_d$  pour différentes valeurs de  $\delta$  et  $c = 10^{-2}$ .

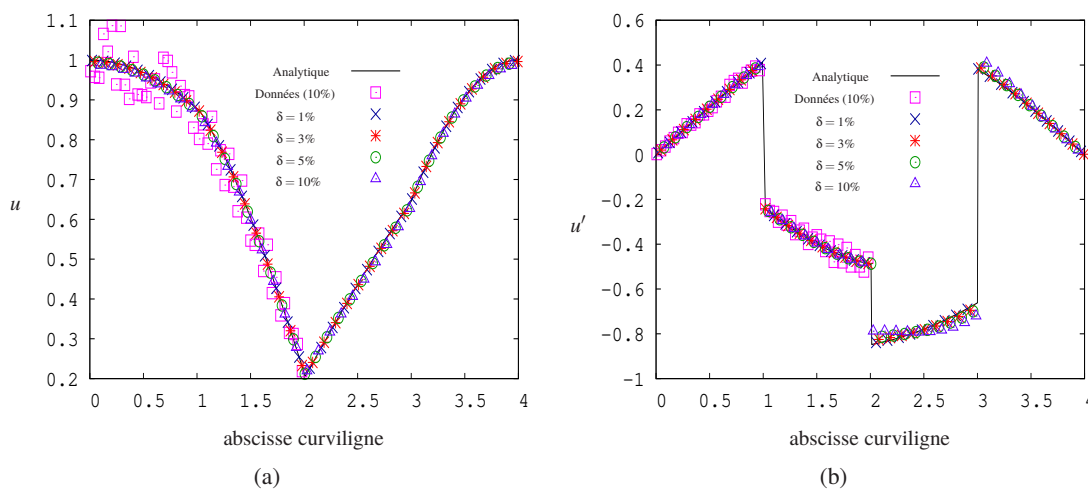


FIGURE 4 – (a) Les solutions analytique,  $u^{an}$  et numérique,  $u$  et (b) les dérivées normales analytique,  $u'^{an}$  et numérique,  $u'$ , reconstruites sur  $\Gamma$  pour différentes valeurs de  $\delta$  et  $c = 10^{-2}$ .

## 4 Reconstructions à partir de données expérimentales : essai de flexion trois points

Nous utilisons la méthode de régularisation évanescence pour analyser un essai de flexion 3 points sur une éprouvette de béton. L'objectif est de compléter et débruiter le champ de déplacements issus de corrélation d'images numériques (CIN) et d'identifier les conditions aux limites. Le champ de déplacements est obtenu par corrélation d'images numériques (CIN) [10] sur une zone centrale  $\Omega_d$  de la surface observée et nous exploitons également l'information de bord libre ( $\Gamma_d$ ) hors des zones de contact ( $\Gamma_i$ ), voir Figure 5.



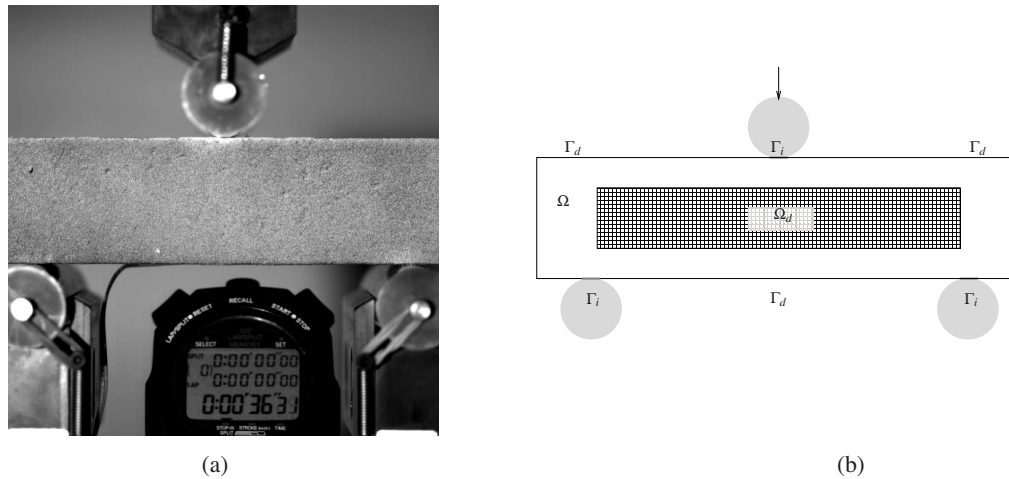


FIGURE 5 – (a) Essai de flexion 3 points sur une éprouvette de béton et (b) modélisation 2D de l'essai de flexion 3 points.

Nous identifions les conditions aux limites inaccessibles à la mesure ainsi que le champ de déplacements (solution) sur toute la surface du solide. Nous présentons des résultats obtenus en utilisant une discrétisation par la méthode des solutions fondamentales. Les résultats présentés ici sont obtenus à partir de mesures issues de la CIN entre les images 1000 et 2957, ce qui correspond à une force d'intensité 2635 N sur le rouleau supérieur.

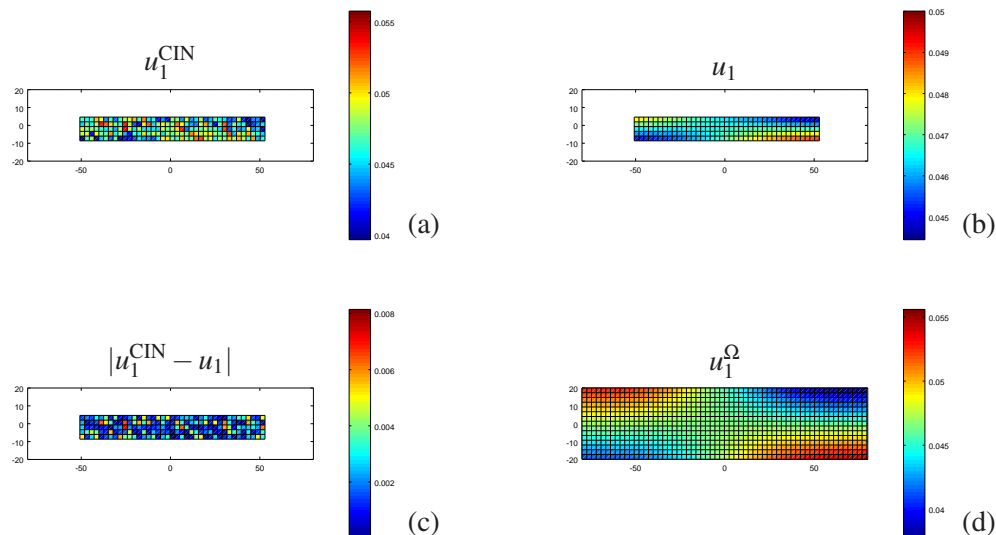


FIGURE 6 – Les composantes horizontales, (a)  $u_1^{CIN}$ , du champ de déplacements mesuré par CIN, (b)  $u_1$ , du champ de déplacements reconstruit sur  $\Omega_d$ , (c)  $|u_1^{CIN} - u_1|$ , du résidu calculé sur  $\Omega_d$  et (d)  $u_1^\Omega$ , du champ de déplacements calculé sur tout le domaine  $\Omega$ .

Les Figures 6 (a), (b), (c) et (d) représentent les composantes horizontales, (a)  $u_1^{CIN}$ , du champ de déplacements mesuré par CIN, (b)  $u_1$ , du champ de déplacements reconstruit sur  $\Omega_d$ , (c)  $|u_1^{CIN} - u_1|$ , du résidu, qui quantifie l'écart entre les mesures et la reconstruction numérique et (d)  $u_1^\Omega$ , du champ de déplacements retrouvé sur tout le domaine à partir de données sur  $\Omega_d$ . La Figure 7 représente les mêmes

quantités pour  $u_2$ , la composante verticale du champ de déplacements. Nous remarquons la précision de la reconstruction sur  $\Omega_d$  et la capacité de la méthode à débruiter les mesures et à s'accommoder des mouvements de solide rigide.

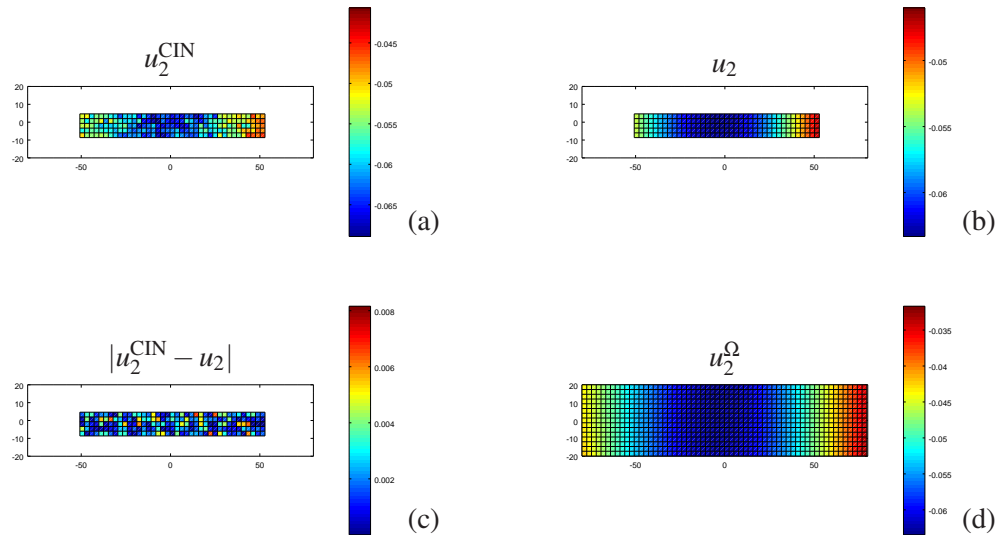


FIGURE 7 – Les composantes verticales, (a)  $u_2^{\text{CIN}}$ , du champ de déplacements mesuré par CIN, (b)  $u_2$ , du champ de déplacements reconstruit sur  $\Omega_d$ , (c)  $|u_2 - u_2^{\text{CIN}}|$ , du résidu calculé sur  $\Omega_d$  et (d)  $u_2^\Omega$ , du champ de déplacements calculé sur tout le domaine  $\Omega$ .

En utilisant les solutions fondamentales, l'algorithme permet également de calculer de manière analytique le champ de déformations dans tout le domaine  $\Omega$ . Les composantes  $\epsilon_{11}^{\text{MFS}}$ ,  $\epsilon_{22}^{\text{MFS}}$  et  $\epsilon_{12}^{\text{MFS}}$  du champ de déformations sont représentées sur la Figure 8. Nous retrouvons le maximum de la composante  $\epsilon_{11}^{\text{MFS}}$  sur le bord inférieur de l'éprouvette, qui correspond à la fibre tendue et la composante  $\epsilon_{12}^{\text{MFS}}$  représente le cisaillement. Nous devinons les deux appuis inférieurs avec la composante  $\epsilon_{22}^{\text{MFS}}$  pour laquelle les minima se localisent près des coins inférieurs de l'éprouvette. Les appuis inférieurs sont en réalité plus centrés (voir Figure 5), l'écart observé peut s'expliquer par les solutions lisses obtenues en utilisant la méthode des solutions fondamentales.

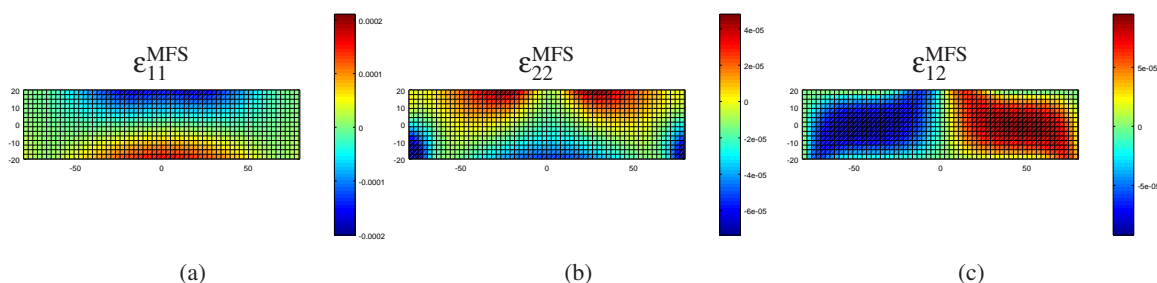


FIGURE 8 – Les composantes (a)  $\epsilon_{11}^{\text{MFS}}$ , (b)  $\epsilon_{22}^{\text{MFS}}$  et (c)  $\epsilon_{12}^{\text{MFS}}$ , du champ de déformations calculé sur  $\Omega$ .

La Figure 9 représente les composantes (a) horizontale,  $u_1$  et (b) verticale,  $u_2$ , du déplacement calculé le long du bord  $\Gamma$ . De la même manière, les conditions aux limites en terme de vecteurs contrainte sont représentées sur la Figure 10. L'algorithme (10) permet d'identifier de manière précise les conditions aux

limites. En accord avec la remarque sur les minima de la composante  $\varepsilon_{22}^{\text{MFS}}$  du champ de déformations, nous remarquons, en observant la Figure 10 (b), que la position des appuis inférieurs ne correspond pas tout à fait à la position réelle des rouleaux.

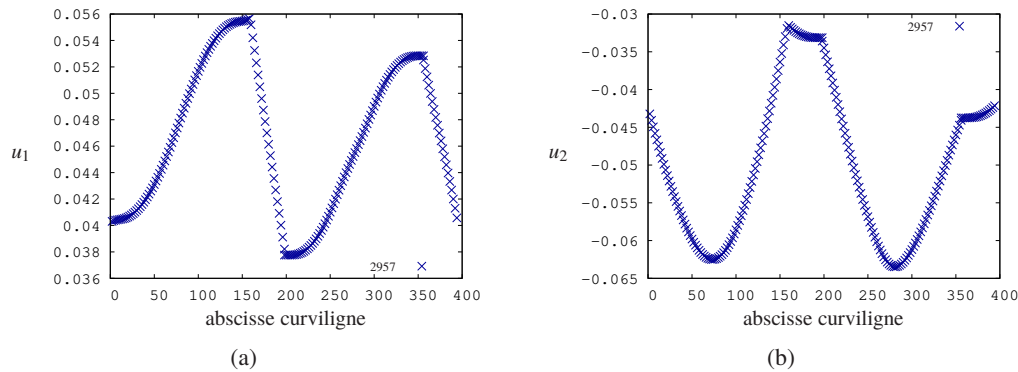


FIGURE 9 – Les composantes (a) horizontale,  $u_1$  et (b) verticale,  $u_2$ , du déplacement retrouvé le long du bord  $\Gamma$ .

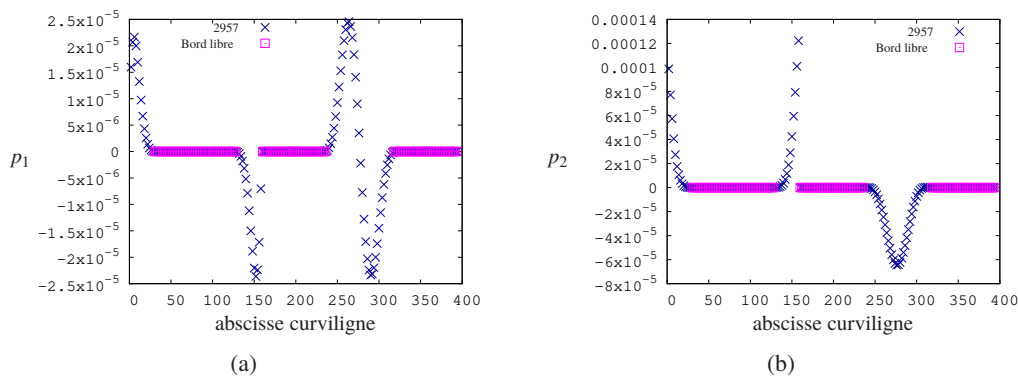


FIGURE 10 – Les composantes (a) horizontale,  $p_1$  et (b) verticale,  $p_2$ , des vecteurs contrainte retrouvés le long du bord  $\Gamma$ .

## 5 Conclusion

Nous avons présenté des méthodes de régularisation évanescence qui permettent de résoudre des problèmes de complétion de données de type Cauchy ou de champs partiels. L'idée principale de la méthode est de chercher parmi toutes les solutions de l'équilibre, celle qui s'approche au mieux des mesures. Ici, l'espace caractérisant les solutions de l'équation d'équilibre est obtenu par la méthode des solutions fondamentales. Nous avons présenté des résultats pour un problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz. Une simulation numérique permet de reconstruire de manière précise, pour plusieurs niveaux de bruit, la solution et sa dérivée normale sur toute la frontière d'un domaine carré. Nous observons cependant quelques imprécisions pour la dérivée normale près des sommets de  $\Gamma_i$ , ces dernières s'expliquent par le saut de la normale au passage des coins.

Nous avons aussi étudié un essai de flexion trois points pour lequel les mesures de champs de déplacements sont obtenues par corrélation d'images numériques. Nous obtenons la reconstruction des champs

de déplacements et de déformations sur tout le domaine et identifions les conditions aux limites inaccessibles à la mesure. Nous remarquons toutefois quelques imprécisions dans la reconstruction du champ de déformations et l'identification des conditions aux limites en terme de vecteurs contrainte près des zones de contact inférieures. L'application de la méthode à des données réelles issues de CIN souligne la précision et la stabilité de la méthode proposée ainsi que sa capacité à débruiter des mesures.

## Références

- [1] R. Lattès and J.-L. Lions. *Méthode de quasi-réversibilité et applications*. 1967.
- [2] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin. *Solution of Ill-Posed Problems*. John Wiley and Sons, Inc, 1977.
- [3] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, and A. V. Fomin. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 31 :45–52, 1991.
- [4] A. Cimetière, F. Delvare, and F. Pons. Une méthode inverse à régularisation évanescence. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics*, 328(9) :639–644, 2000.
- [5] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua, and F. Pons. Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization. *Inverse Problems*, 17(3) :553, 2001.
- [6] L. Caillé, F. Delvare, L. Marin, and N. Michaux-Leblond. Fading regularization MFS algorithm for the Cauchy problem associated with the two-dimensional Helmholtz equation. *International Journal of Solids and Structures*, 125 :122–133, 2017.
- [7] L. Caillé, J.-L. Hanus, F. Delvare, and N. Michaux-Leblond. MFS fading regularization method for the identification of boundary conditions from partial elastic displacement field data. *European Journal of Computational Mechanics*, 27(5-6) :508–539, 2018.
- [8] G. Fairweather and A. Karageorghis. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. *Advances in Computational Mathematics*, 9(1-2) :69–95, 1998.
- [9] J. R. Berger and A. Karageorghis. The method of fundamental solutions for layered elastic materials. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 25(10) :877–886, 2001.
- [10] S. Touchal, F. Morestin, and M. Brunet. Mesure de champs de déplacements et de déformations par corrélation d'images numériques. In *Actes du Colloque National Mécamat'96*, pages 179–182. Aussois, France, 1996.