



HAL
open science

Commande des Systèmes par Calculateur - identification, conception et mise en oeuvre

Ioan Doré Landau

► **To cite this version:**

Ioan Doré Landau. Commande des Systèmes par Calculateur - identification, conception et mise en oeuvre. Lavoisier, 2022, 9782746204782. hal-02567438

HAL Id: hal-02567438

<https://hal.science/hal-02567438>

Submitted on 7 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Commande des Systèmes par Calculateur

identification, conception et mise en œuvre

Ioan Doré Landau

GIPSA-Lab

2020

Résumé

Ce livre présente un ensemble cohérent de méthodes d'identification des modèles dynamiques des procédés et de conception des régulateurs à partir des modèles identifiés. Les aspects de mise en œuvre reçoivent une attention particulière et de nombreuses applications illustrent l'utilisation effective de la méthodologie proposée. Le livre englobe des développements méthodologiques répondant à différents problèmes rencontrés en pratique et qui ont déjà fait leur preuves. Logiciels et routines (disponibles sur le site <http://www.gipsa-lab.grenoble-inp.fr/~ioandore.landau/identificationandcontrol/>) complètent efficacement la méthodologie présentée.

Avertissement

Ce document constitue une version préliminaire d'une nouvelle version du livre « Commande des Systèmes – conception, identification et mise en œuvre », Hermes/Lavoisier 2002 dont le titre provisoire est « Commande des systèmes par ordinateur ».

Pour toute question, veuillez contacter l'auteur (ioan-dore.landau@gipsa-lab.grenoble-inp.fr ou ioan.landau@gmail.com).

Commande des Systèmes

conception, identification et mise en œuvre

Ioan Doré Landau

2002

Table des matières

Avant-propos	11
Liste de notations principales	19
Chapitre 1. Rappel sur la régulation analogique	23
1.1. Les modèles continus	23
1.1.1. Domaine temporel	23
1.1.2. Domaine fréquentiel	25
1.1.3. Stabilité	27
1.1.4. Réponses temporelles	29
1.1.5. Réponses fréquentielles	31
1.1.6. Etude du système du deuxième ordre	33
1.1.7. Systèmes avec retard	37
1.1.8. Systèmes à non minimum de phase	38
1.2. Systèmes en boucle fermée	39
1.2.1. Systèmes en cascade	40
1.2.2. Fonction de transfert des systèmes en boucle fermée	41
1.2.3. Erreur statique	42
1.2.4. Rejet des perturbations	43
1.2.5. Analyse des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel. Lieu et critère de stabilité de Nyquist	45
1.3. Synthèse des régulateurs PI et PID	53
1.3.1. Régulateur PI	53
1.3.2. Régulateur PID	55
1.4. Conclusion	58
1.3. Bibliographie	59
Chapitre 2. Systèmes de commande par ordinateur	61
2.1. Introduction à la commande par ordinateur	61
2.2. Discrétisation et fondements des systèmes échantillonnés	64
2.2.1. Discrétisation et choix de la fréquence d'échantillonnage	64
2.2.2. Choix de la fréquence d'échantillonnage pour l'automatique	68
2.3. Les modèles échantillonnés	70
2.3.1. Domaine temporel	70
2.3.2. Domaine fréquentiel	75

6 Commande des systèmes

2.3.3. Formes générales des modèles échantillonnés linéaires	79
2.3.4. Stabilité des systèmes échantillonnés	82
2.3.5. Régime stationnaire (gain statique)	83
2.3.6. Modèles échantillonnés des procédés avec bloqueur	84
2.3.7. Etude du système du 1 ^{er} ordre avec retard	86
2.3.8. Etude du système du 2 ^e ordre	90
2.4. Systèmes échantillonnés en boucle fermée	93
2.4.1. Fonction de transfert du système en boucle fermée	93
2.4.2. Erreur statique	94
2.4.3. Rejet des perturbations	95
2.5. Principes des méthodes modernes de calcul des régulateurs numériques	96
2.5.1. Structures des régulateurs numériques	96
2.5.2. Structure canonique des régulateurs numériques	99
2.5.3. Boucle de régulation avec régulateur PI numérique	103
2.6. Analyse des systèmes échantillonnés en boucle fermée dans le domaine fréquentiel	105
2.6.1. Stabilité des systèmes en boucle fermée	105
2.6.2. Robustesse des systèmes en boucle fermée	109
2.7. Conclusion	120
2.8. Bibliographie	123
Chapitre 3. Méthodes de calcul des régulateurs numériques	125
3.1. Introduction	125
3.2. Régulateur PID numérique	127
3.2.1. Structure du régulateur PID numérique 1	127
3.2.2. Calcul des paramètres du régulateur numérique PID 1	130
3.2.3. Régulateur numérique PID 1. Exemples	137
3.2.4. Régulateur numérique PID 2	140
3.2.5. Effets des pôles auxiliaires	144
3.2.6. PID numérique : conclusions	147
3.3. Placement des pôles	147
3.3.1. Structure	148
3.3.2. Choix des pôles en boucle fermée ($P(q^{-1})$)	149
3.3.3. Régulation (calcul de $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$)	151
3.3.4. Poursuite (calcul de $T(q^{-1})$)	156
3.3.5. Placement des pôles. Exemples	159
3.4. Poursuite et régulation à objectifs indépendants	160
3.4.1. Structure	163
3.4.2. Régulation (calcul de $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$)	164
3.4.3. Poursuite (calcul de $T(q^{-1})$)	167
3.4.4. Poursuite et régulation à objectifs indépendants. Exemples	168
3.5. Poursuite et régulation à modèle interne	171
3.5.1. Régulation	172
3.5.2. Poursuite	175
3.5.3. Interprétation de la commande à modèle interne	176
3.5.4. Les fonctions de sensibilité	177
3.5.5. Poursuite et régulation à modèle interne partiel	178
3.5.6. Commande à modèle interne des systèmes avec zéros stables	179
3.5.7. Exemple. Commande des systèmes avec retard	180
3.6. Placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité	185

3.6.1. Propriétés de la fonction de sensibilité perturbation-sortie	187
3.6.2. Propriétés de la fonction de sensibilité perturbation-entrée	197
3.6.3. Définition des « gabarits » pour les fonctions de sensibilité	199
3.6.4. Méthode de calibrage des fonctions de sensibilité	201
3.6.5. Calibrage de la fonction de sensibilité - Exemple 1	207
3.6.6. Calibrage de la fonction de sensibilité - Exemple 2	208
3.7. Conclusion	212
3.8. Bibliographie.	214
Chapitre 4. Méthodes de calcul des régulateurs numériques	
en présence de perturbations aléatoires	217
4.1. Modélisation des perturbations aléatoires.	217
4.1.1. Description des perturbations.	217
4.1.2. Modèles de perturbations aléatoires.	222
4.1.3. Le modèle ARMAX (procédé + perturbation).	227
4.1.4. Prédiction optimale.	229
4.2. Poursuite et régulation à variance minimale	231
4.2.1. Un exemple	233
4.2.2. Cas général	236
4.2.3. Poursuite et régulation à variance minimale. Exemple.	241
4.3. Cas des zéros instables. Approximation de la poursuite et régulation à variance minimale par le placement des pôles	242
4.3.1. Calcul du régulateur	242
4.3.2. Un exemple	245
4.4. Poursuite et régulation à variance minimale généralisée	246
4.4.1. Calcul du régulateur	247
4.4.2. Poursuite et régulation à variance minimale généralisée. Exemple	249
4.6. Conclusion	249
4.7. Bibliographie.	252
Chapitre 5. Identification des modèles de procédés : les bases	253
5.1. Principes de l'identification des modèles de procédés	253
5.2. Algorithmes pour l'estimation paramétrique	260
5.2.1. Introduction	260
5.2.2. Algorithme du gradient	262
5.2.3. Algorithme des moindres carrés	269
5.2.4. Choix du gain d'adaptation	275
5.3. Choix de la séquence d'entrée pour l'identification.	280
5.3.1. Le problème	280
5.3.2. Séquences binaires pseudo-aléatoires (SBPA)	284
5.4. Effets des perturbations aléatoires sur l'identification	288
5.5. Structure des méthodes d'identification récursives	291
5.6. Conclusion	297
5.7. Bibliographie.	299
Chapitre 6. Méthodes d'identification	301
6.1. Méthodes d'identification basées sur le blanchissement de l'erreur de prédiction (type I)	301
6.1.1. Moindres carrés récursifs (MCR)	301
6.1.2. Moindres carrés étendus (MCE)	302
6.1.3. Maximum de vraisemblance récursif (MVR)	304
6.1.4. Erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu (ESMPE).	307

8 Commande des systèmes

6.1.5. Moindres carrés généralisés (MCG)	308
6.2. Validation des modèles identifiés avec les méthodes de type I	310
6.3. Méthodes d'identification basées sur la décorrélation du vecteur des observations et de l'erreur de prédiction (type II)	314
6.3.1. Variable instrumentale à modèle auxiliaire	314
6.3.2. Erreur de sortie à compensateur fixe	317
6.3.3. Erreur de sortie avec filtrage (adaptif) des observations	320
6.4. Validation des modèles identifiés avec les méthodes de type II.	321
6.5. Estimation de la complexité d'un modèle.	324
6.5.1. Un exemple	324
6.5.2. Cas idéal (sans bruit).	326
6.5.3. Cas avec bruit	327
6.5.4. Critère d'estimation de complexité	330
6.6. Conclusion	332
6.7. Bibliographie.	334
Chapitre 7. Aspects pratiques de l'identification	337
7.1. Acquisition des données entrées/sorties	337
7.1.1. Protocole d'acquisition	337
7.1.2. Filtrage antirepliement.	340
7.1.3. Suréchantillonnage	341
7.2. Conditionnement des signaux.	342
7.2.1. Elimination de la composante continue.	342
7.2.2. Identification d'un procédé contenant un intégrateur pur	343
7.2.3. Identification d'un procédé contenant un dérivateur pur.	343
7.2.4. Mise à échelle des entrées et sorties.	344
7.3. Choix (estimation) de la complexité du modèle	344
7.4. Exemples simulés d'identification	349
7.5. Exemples d'identification de procédés	356
7.5.1. Aérotherme	356
7.5.2. Colonne à distiller	361
7.5.3. Moteur à courant continu	367
7.5.4. Transmission souple	371
7.6. Conclusion	377
7.7. Bibliographie.	377
Chapitre 8. Aspects pratiques de la régulation numérique	379
8.1. Mise en œuvre des régulateurs numériques.	380
8.1.1. Choix des performances désirées	380
8.1.2. Effet du retard de calcul	382
8.1.3. Effets du convertisseur numérique/analogique	383
8.1.4. Effets des saturations – Dispositif antisaturation	384
8.1.5. Passage manuel → automatique	388
8.1.6. Régulation numérique en cascade	389
8.1.7. Moyens matériels de mise en œuvre	391
8.1.8. Mesure de la qualité d'une régulation.	392
8.1.9. La commande adaptative	394
8.2. Régulation numérique d'un aérotherme	398
8.3. Régulation numérique de la vitesse d'un moteur à courant continu	405
8.4. Régulation numérique en cascade de la position.	409
8.5. Régulation de position à travers une transmission souple	416
8.6. Commande d'un bras manipulateur souple 360°	425

8.7. Régulation de l'épaisseur du zinc sur la ligne de galvanisation par essorage de Sollac-Florange	431
8.7.1. Description du procédé	432
8.7.2. Modélisation.	433
8.7.3. Identification	434
8.7.4. Calcul du régulateur	436
8.7.5. Adaptation en boucle ouverte	437
8.7.6. L'environnement matériel.	439
8.7.7. Résultats	439
8.6. Conclusion	443
8.7. Bibliographie.	443
Chapitre 9. Identification en boucle fermée	445
9.1. Introduction	445
9.2. Méthodes d'identification d'erreur de sortie en boucle fermée	447
9.2.1. Le principe.	447
9.2.2. Les méthodes CLOE, F-CLOE et AF-CLOE	449
9.2.3. Méthode d'erreur de sortie étendue en boucle fermée (X-CLOE)	453
9.2.4. Identification en boucle fermée des procédés contenant un intégrateur pur	454
9.2.5. Validation des modèles identifiés en boucle fermée	455
9.3. Autres méthodes d'identification en boucle fermée	459
9.3.1. Identification type boucle ouverte utilisant les données filtrées	459
9.3.2. Identification directe	459
9.3.3. Identification en plusieurs étapes	459
9.4. Identification en boucle fermée, un exemple simulé	460
9.5. Identification en boucle fermée et recalcul du régulateur (transmission souple).	462
9.6. Conclusion	469
9.7. Bibliographie.	470
Chapitre 10. Réduction de la complexité des régulateurs	471
10.1. Introduction.	471
10.2. Estimation des régulateurs d'ordre réduit par identification en boucle fermée	475
10.2.1. Méthode de la poursuite de la commande en boucle fermée (CLIM).	475
10.2.2. Méthode de la poursuite de la sortie en boucle fermée (CLOM)	478
10.2.3. Prise en compte des parties fixes du régulateur	480
10.2.4. Recalcul du polynôme $T(q^{-1})$	480
10.3. Validation des régulateurs d'ordre réduit	480
10.3.1. Utilisation des données simulées	481
10.3.2. Utilisation des données réelles	481
10.4. Aspects pratiques	482
10.5. Commande d'une suspension active– Réduction de l'ordre du régulateur	482
10.6. Conclusion	489
10.7. Bibliographie	489

A.1. Quelques rappels	491
A.1.1. Quelques signaux fondamentaux	491
A.1.2. La transformée en z	493
A.1.3. La cloche de Gauss.	493
A.2. Synthèse des régulateurs numériques R-S-T dans le domaine temporel	497
A.2.1. Prédicteurs pour les modèles échantillonnés	498
A.2.2. Poursuite et régulation à objectifs indépendants	503
A.2.3. Interprétation de la commande des systèmes avec retard	505
A.2.4. Bibliographie	509
A.3. Marge de stabilité généralisée et distance normalisée entre deux fonctions de transfert	511
A.3.1. Marge de stabilité généralisée	511
A.3.2. Distance normalisée entre deux fonctions de transfert.	513
A.3.3. Condition de stabilité robuste	514
A.3.4. Bibliographie	515
A.4. Travaux pratiques.	517
A.4.1. TP systèmes échantillonnés.	517
A.4.2. TP PID numérique	518
A.4.3. TP identification	519
A.4.4. TP régulation numérique (commande de la colonne à distiller)	521
A.5. Présentation des progiciels	523
A.5.1. Présentation du progiciel WinPIM Présentation logiciel	524
A.5.2. Présentation du progiciel WinREG MIRCOD	525
A.5.3. Présentation du progiciel WinTRAC	527
A.5.4. Présentation du logiciel Optreg	528
A.5.5. Boîte à outils CLID	528
A.5.6. Boîte à outils REDUC	528
A.5.7. Bibliographie	529
A.6. Fonctions Scilab et Matlab	531
A.7. Séquence binaire pseudo-aléatoire (programme)	533
A.7.1. Présentation de la génération des SBPA sous forme de programme.	533
A.7.2. Programme en C++ pour la génération d'une SBPA.	534
A.7.3. Bibliographie	536
A.8. Régulateur numérique R-S-T (programme)	537
A.8.1. Programme en C++ pour le régulateur R-S-T (exemple)	537
A.8.2. Bibliographie	544
A.9 et A.10	
Bibliographie	545
Index	553
A.9 Paramétrisation Youla- Kučera des Régulateurs	
A.9.1 Paramétrisation des régulateurs	
A.9.2 Références	
A.10 Utilisation de factorisation U-D pour la mise à jour du gain d'adaptation	
A.10.1 La factorisation U-D	
A.10.2 Références	

Avant-propos

Le développement extraordinaire des microprocesseurs a provoqué des changements importants dans la conception des systèmes de commande/régulation. Leur puissance de calcul et leur faible coût les rendent aptes à prendre intégralement en charge les aspects commande/régulation avec des performances nettement supérieures à celles des régulateurs analogiques. Pratiquement tous les systèmes de régulation construits actuellement utilisent des microprocesseurs.

Pour tirer réellement profit des capacités des microprocesseurs, il ne suffit pas de reproduire le comportement des régulateurs PID analogiques, il faut mettre en œuvre des techniques d'automatique spécifiques et plus performantes, développées pour la commande par ordinateur, techniques testées industriellement ces vingt dernières années. Par ailleurs, le développement des logiciels d'automatique et de leur utilisation a permis d'améliorer d'une façon significative l'efficacité de la conception et de la mise en œuvre des systèmes de commande/régulation.

La dissémination des PC – machines ouvertes pouvant être facilement complétées avec des cartes d'acquisition – a permis d'une part la généralisation de l'usage des logiciels, et a conduit d'autre part à la création de stations de travail pour l'analyse, la conception, le développement et la mise en œuvre sur des procédés réels de différents types d'algorithmes de commande/régulation.

L'ensemble « livre-logiciel-internet » a révolutionné les méthodes d'enseignement de la discipline et constitue maintenant le vecteur de pénétration privilégié des méthodes modernes de commande. Malgré le caractère convivial des logiciels, la compréhension d'un certain nombre de concepts est nécessaire pour une utilisation efficace des logiciels. L'utilisation des logiciels comme illustration des concepts et algorithmes facilite leur compréhension, permettant de « sentir » très vite les phénomènes. L'internet à travers un site dédié au livre (<http://www->

lag.ensieg.inpg.fr/landau/bookIC) apporte des compléments pour l'enseignement mais également pour l'interaction entre lecteurs et auteur.

Objectif de l'ouvrage

L'objectif de cet ouvrage est de donner les connaissances nécessaires pour la compréhension et la conception des systèmes de commande/régulation applicables à des procédés extrêmement variés. L'approche adoptée dans la rédaction de l'ouvrage est résolument tournée vers les besoins du concepteur et de l'utilisateur de ces systèmes. Tout ce qui est superflu du point de vue théorique pour le concepteur et l'utilisateur a été éliminé. Par ailleurs, on a tenu compte de la disponibilité des logiciels et langages scientifiques dédiés à l'automatique (dont certains sont en accès libre). Enfin, on s'est attaché à donner suffisamment de détails pour la mise en œuvre matérielle des systèmes de commande/régulation et leur optimisation sur le procédé réel.

Le fil conducteur

La figure 1 suivante résume les principes généraux de conception et calcul des régulateurs.

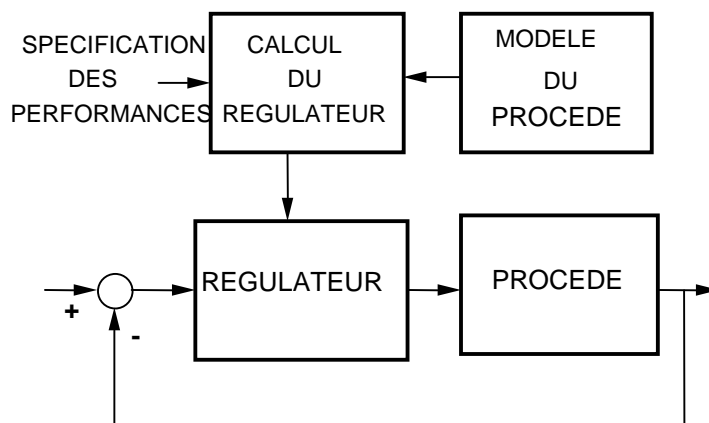


Figure 1. *Principe de la conception et du calcul d'un régulateur*

Pour concevoir et ajuster un « bon » régulateur, il faut :

- spécifier les performances désirées pour la boucle de commande/régulation ;
- connaître le modèle dynamique du procédé qui décrit la relation entre les variations de la commande et celles de la sortie ;
- déterminer la structure et calculer un régulateur permettant d'atteindre les performances désirées pour le modèle de procédé considéré ;

- disposer des moyens de mise en œuvre matérielle ;
- disposer des techniques pour l’optimisation du régulateur sur le procédé réel.

Pour disposer d’un modèle représentatif du procédé à commander, il faut l’identifier. L’*identification* correspond à l’extraction du modèle dynamique du procédé à partir des mesures des entrées/sorties. Des logiciels¹ appropriés permettent de réaliser cette opération. L’identification constitue l’élément-clé pour réaliser une régulation performante et réduire le temps de mise en œuvre.

Une fois le modèle du procédé obtenu, on peut calculer un régulateur (ou ajuster un régulateur de structure donnée) à l’aide d’un logiciel mettant en œuvre des méthodes de synthèse et de le tester en simulation et en temps réel sur le procédé.

La maîtrise des techniques d’acquisition et de mise en œuvre des régulateurs numériques constituent par ailleurs un point de passage obligé pour le succès de la conception d’un système de commande/régulation.

A qui s’adresse cet ouvrage ?

Il est destiné en priorité aux ingénieurs qui souhaitent acquérir les connaissances nécessaires pour la compréhension, la conception et la mise en œuvre des systèmes de commande/régulation par ordinateur. Les nombreuses références industrielles d’utilisation des techniques présentées tout au long de cet ouvrage constituent sans aucun doute une raison supplémentaire de s’y intéresser.

Cet ouvrage s’adresse aussi aux enseignants car il représente un support de cours indispensable pour les écoles d’ingénieurs et les universités qui offrent un cours de commande par ordinateur.

Ceux qui possèdent déjà les connaissances de base en systèmes échantillonnés et commande par ordinateur trouveront dans ces lignes une méthodologie claire, orientée vers les applications, pour la conception et la mise en œuvre des systèmes de commande/régulation par ordinateur.

ne sont plus disponibles.

1. Les logiciels WinPIM, WinREG, WinTRAC distribués par Adaptech (4 rue du Tour de l’Eau, 38400 Saint Martin d’Hères, tel : 04 76 51 52 77, télécopie : 04 76 42 84 16) sont particulièrement adaptés pour traiter les problèmes d’identification des modèles de procédé, de calcul et de mise en œuvre des régulateurs numériques. Les premières versions de ces logiciels (1985, 1986) ont été développées en collaboration avec le laboratoire d’automatique de Grenoble (ENSIEG/INPG/CNRS) et le GRECO SARTA (CNRS).

Ils sont remplacés par le logiciel intégré MIRCOD (voir A.5) et des fonctions Matlab/Scilab (voir A.6).

Pourquoi cet ouvrage ?

En 1988, les éditions Hermès Science Paris publiait l'ouvrage *Identification et commande des systèmes* dont l'objectif majeur était de présenter sous une forme accessible les techniques modernes d'identification des systèmes et les techniques de base pour le calcul des régulateurs numériques. Une nouvelle édition, parue en 1993, a marqué une évolution vers une approche plus globale de la conception des systèmes de commande/régulation par ordinateur reflétant et les résultats des expériences industrielles.

Il nous est apparu depuis que la demande des concepteurs et utilisateurs se situe au niveau d'une approche globale de l'ensemble des problèmes liés à la conception et à l'utilisation de ces systèmes de commande/régulation et ne se limite plus uniquement à l'assimilation des techniques de base de l'identification et de calcul des régulateurs. C'est donc dans ce nouvel esprit que cette édition a été rédigée. Des nombreux exemples d'application illustrent la démarche proposée pour la conception, la mise en œuvre, l'identification des procédés et l'optimisation des régulateurs. L'ouvrage présente de nouvelles avancées méthodologiques en automatique. Ces progrès technologiques ont leur origine dans les problématiques rencontrées en pratique et permettent d'apporter des solutions adéquates. Les expériences d'enseignement auprès des audiences universitaires et industrielles en France et à l'étranger ont été prises en compte dans la rédaction.

La présentation des techniques de base pour la conception des systèmes de commande/régulation représente une partie importante de l'ouvrage, mais des techniques spécifiques ayant montré leur efficacité en pratique sont aussi présentées.

Parmi ces techniques spécifiques reflétant les développements méthodologiques récents, notons :

- l'estimation automatique de l'ordre des modèles à partir des données ;
- l'identification en boucle fermée ;
- la synthèse des régulateurs numériques robustes ;
- la régulation numérique en cascade et l'échantillonnage à cadence multiple ;
- la réduction de l'ordre des régulateurs numériques.

La plupart des algorithmes présentés ici sont matérialisés par des routines de calcul (Scilab et Matlab) disponibles sur le site internet de l'ouvrage.

Enfin, des programmes en C++ pour la mise en œuvre des régulateurs numériques et des séquences binaires pseudo-aléatoires utilisées en identification sont fournis (origine : Adaptech).

Le contenu

Le *premier chapitre* est un bref rappel de la régulation analogique, qui servira ensuite comme référence pour l'introduction des fondements de la régulation numérique.

Le *deuxième chapitre* est consacré aux systèmes de commande par ordinateur. On présente la structure de ces systèmes, le processus de discrétisation, les modèles échantillonnés, les principes de calcul des régulateurs numériques et l'analyse de la robustesse des boucles de régulation numérique.

Le *chapitre trois* détaille plusieurs méthodes de calcul des régulateurs numériques en commençant par le PID numérique et en continuant avec des méthodes plus générales qui s'appliquent à des systèmes d'ordre quelconque avec ou sans retard pur. La *robustesse* des régulateurs vis-à-vis des incertitudes ou des variations des modèles des procédés est traitée en détail.

Les méthodes de calcul des régulateurs numériques en présence de perturbations aléatoires sont expliquées dans le *chapitre quatre*, en introduisant d'abord les modèles de description de ces perturbations (modèles ARMA).

Les bases de l'identification des modèles dynamiques de procédés sont développées dans le *chapitre cinq*.

Les méthodes récursives d'identification qui sont utilisées pour la mise en œuvre de l'identification sur microprocesseur ou pour l'identification temps réel, les méthodes de validation des modèles identifiés et les méthodes d'estimation automatique de l'ordre des modèles à partir des données sont décrites dans le *chapitre six*.

Le *chapitre sept* traite des aspects pratiques de l'identification avec plusieurs exemples tirés de la pratique.

Le *chapitre huit* décrit des aspects pratiques concernant la mise en œuvre des régulateurs numériques et présente plusieurs applications.

Le *chapitre neuf* présente les techniques d'identification des procédés en boucle fermée (en présence d'un régulateur dans la boucle).

Le *chapitre dix* est consacré à la présentation des techniques de réduction de l'ordre des régulateurs quand des contraintes de nombre d'opérations sont imposées.

Les *annexes A1, A2 et A3* comportent un rappel d'un certain nombre de concepts de base, la présentation de la synthèse des régulateurs numériques dans le domaine

temporel et la présentation des concepts de marge de stabilité généralisée et distance normalisée entre deux fonctions de transfert.

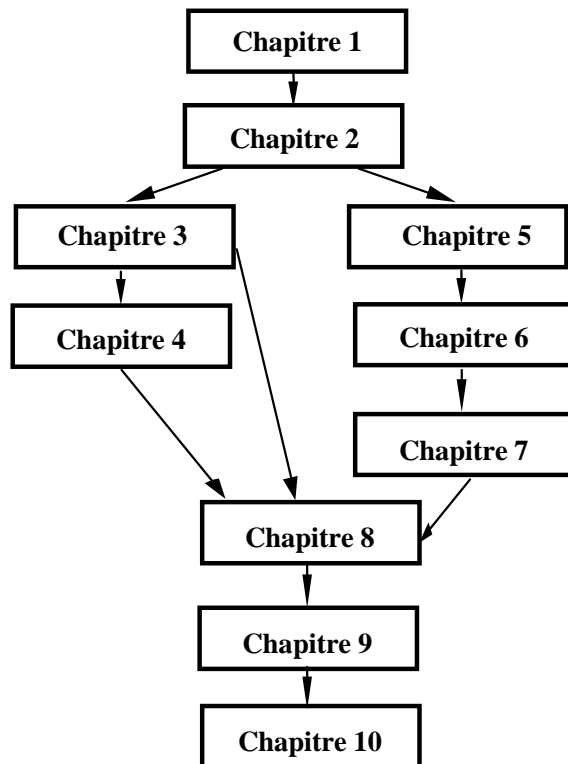


Figure 2. Dépendance logique des différents chapitres

Des suggestions pour des travaux pratiques (TP) sont données dans l'annexe A4. Les annexes A5 et A6 présentent succinctement différents logiciels mentionnés dans l'ouvrage ainsi que les fonctions disponibles sur le site internet du présent texte.

Enfin, les annexes A7 et A8 donnent les programmes en langage C++ pour la génération des séquences binaires pseudo-aléatoires utilisées comme signal de commande pour l'identification et la mise en œuvre des régulateurs numériques R-S-T.

Deux nouvelles annexes ont été rajoutées: Paramétrisation Youla Kucera et factorisation U-D

Plusieurs lectures de cet ouvrage sont possibles. En effet, après les concepts de base présentés dans les chapitres 1 et 2, si l'on s'intéresse en priorité aux algorithmes de commande, la suite logique est constituée par les chapitres 3 et 4 suivis des chapitres 5, 6 (identification) et des chapitres 7 et 8 traitant des aspects

pratiques de l'identification et de la commande. Par contre, si l'on s'intéresse en priorité aux problèmes d'identification, la suite logique après le chapitre 2 est constituée des chapitres 5, 6 et 7 suivis des chapitres 3, 4 et 8 (algorithmes de commande). Pour ceux qui ont des connaissances de base en systèmes échantillonnés, la lecture de l'ouvrage peut commencer à la section 2.5 du chapitre 2. Les chapitres 9 et 10 s'inscrivent logiquement dans la suite du chapitre 8. Un schéma de l'articulation des différents chapitres est donné dans la figure 2.

Remerciements

L'auteur tient à renouveler ses remerciements à Mohamed M'Saad, Nacer M'Sirdi, Mazen Samaan, François Rolland, Alina Voda-Besançon, Daniel Rey, Alphonse Franco et Henri Bourlés pour leur contribution au développement et la mise en œuvre des différentes techniques d'identification et de commande.

Alireza Karimi, Hynek Prochazka, Aurelian Constantinescu, Daniel Rey, Alain Rousset, Pascal Rival et Gianluca Zito ont contribué à la préparation de cet ouvrage. Qu'ils trouvent ici le témoignage de notre reconnaissance.

Enfin, l'auteur tient à remercier Gabriela Stroian qui a assuré avec dévouement une des parties les plus ingrates du travail, à savoir la frappe et la mise en page du manuscrit.

Merci aux participants aux cours de formation et aux différents lecteurs pour leur remarques et suggestions.

Ioan-Doré LANDAU
--landau@lag.ensieg.inpg.fr--

Liste des notations principales

f_e	fréquence d'échantillonnage.
T_e	période d'échantillonnage.
ω	pulsation (rad/s) ou pulsation normalisée (ωT_e).
f	fréquence (Hz) ou fréquence normalisée (f/f_e).
t	temps continu ou temps discret normalisé (par rapport à la période d'échantillonnage t/T_e).
k	temps discret normalisé (t/T_e).
$u(t), y(t)$	entrée et sortie du procédé.
$y^*(t+d+1)$	trajectoire de référence.
$r(t)$	consigne ou excitation externe.
$e(t)$	bruit blanc échantillonné gaussien.
q^{-1}	opérateur retard ($q^{-1} y(t+1) = y(t)$).
s, z	variables complexes ($z = e^{sT_e}$).
$A(q^{-1}), B(q^{-1}), C(q^{-1})$	polynômes en la variable q^{-1} .
d	retard du système échantillonné (nombre entier de périodes d'échantillonnage).
$\hat{A}(t, q^{-1}), \hat{B}(t, q^{-1}), \hat{C}(t, q^{-1})$	estimations des polynômes $A(q^{-1}), B(q^{-1}), C(q^{-1})$ à l'instant t .
$\hat{a}_i(t), \hat{b}_i(t), \hat{c}_i(t)$	coefficients estimés des polynômes $A(q^{-1}), B(q^{-1}), C(q^{-1})$ (constituent les coefficients des polynômes $\hat{A}(t, q^{-1}), \hat{B}(t, q^{-1}), \hat{C}(t, q^{-1})$).
$H(q^{-1})$	opérateur de transfert (échantillonné).
$H(z^{-1}), H(z)$	fonctions de transfert échantillonnées.

$H(s)$	fonction de transfert continue.
τ	retard pur d'un système continu.
$G(q^{-1}), \hat{G}(q^{-1})$	opérateurs de transfert caractérisant le modèle de procédé et son estimation.
$R(q^{-1}), S(q^{-1}), T(q^{-1})$	opérateurs de transfert utilisés dans les régulateurs numériques R-S-T.
$S_{xy}(s), S_{xy}(z^{-1})$	fonctions de sensibilité.
$P(q^{-1})$	polynôme caractéristique de la boucle fermée.
ΔM	marge de module.
$\Delta \tau$	marge de retard.
θ	vecteur des paramètres.
$\hat{\theta}(t)$	vecteur des paramètres estimés.
$\phi(t), \Phi(\tau)$	vecteur des mesures ou des observations.
$F, F(t)$	gain d'adaptation.
$\varepsilon^\circ(t), \varepsilon(t)$	erreur de prédiction <i>a priori</i> et respectivement <i>a posteriori</i> .
$\varepsilon^\circ_{CL}(t), \varepsilon_{CL}(t)$	erreur de prédiction en boucle fermée (<i>a priori</i> et <i>a posteriori</i>).
$v^\circ(t), v(t)$	erreur d'adaptation <i>a priori</i> et respectivement <i>a posteriori</i> .
A, F	matrices.
$F > 0$	matrice définie positive.
t_M	temps de montée.
t_F	temps d'établissement.
M	dépassement maximum.
$\omega_o, \zeta, (w_o, x_i)$	pulsation naturelle et coefficient d'amortissement d'un système de 2° ordre.
$E \{ . \}$	espérance.
ARMAX	processus auto-régressif à moyenne ajustée et entrée exogène.
V.M.	valeur moyenne.
var.	variance.
σ	écart type.
$R(i)$	autocorrélation ou intercorrélation.
$RN(i)$	autocorrélation ou intercorrélation normalisée.

SBPA	séquence binaire pseudo-aléatoire.
<i>t_{im}</i>	durée de l'impulsion maximale de la SBPA.
BO	boucle ouverte.
BF, CL	boucle fermée.
BP	bande passante.

Chapitre 1

Rappel sur la régulation analogique

L'objectif de ce chapitre est de rappeler sous une forme condensée les concepts essentiels de la régulation analogique (continue). La présentation est faite dans une optique permettant ultérieurement une transition aisée vers les systèmes de régulation numérique.

La description des modèles continus dans le domaine temporel et fréquentiel, les propriétés des systèmes en boucle fermée et la synthèse des régulateurs PI et PID sont les sujets traités.

1.1. Les modèles continus

Les modèles dynamiques linéaires des procédés à régler ou des correcteurs sont décrits dans le domaine temporel par des équations différentielles linéaires ou dans le domaine fréquentiel par des fonctions de transfert.

1.1.1. Domaine temporel

L'équation [1.1.1] donne un exemple d'équation différentielle décrivant un système dynamique simple :

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T}y(t) + \frac{G}{T}u(t) \quad [1.1.1]$$

Dans l'équation [1.1.1], u représente l'entrée (ou la commande) du système et y la sortie. Cette équation peut être simulée par des moyens analogiques comme il est indiqué dans la figure 1.1.1.

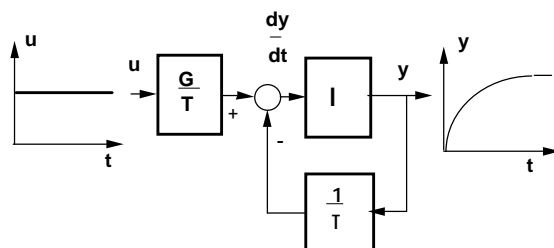


Figure 1.1.1. Simulation et réponses temporelles du système dynamique décrit par l'équation [1.1.1] (I - intégrateur)

La réponse à un échelon, indiquée figure 1.1.1, met en évidence la vitesse de variation de la sortie caractérisée par la constante de temps T et la valeur finale caractérisée par le gain statique G .

En utilisant l'opérateur différentiel $p = d/dt$, l'équation [1.1.1] s'écrit sous la forme :

$$\left(p + \frac{1}{T}\right) y(t) = \frac{G}{T} u(t); \quad p = \frac{d}{dt} \quad [1.1.2]$$

Pour les systèmes décrits par des équations différentielles du type de l'équation [1.1.1], nous distinguons trois types de réponses :

1) la réponse « libre » : elle correspond à la réponse du système à partir d'une condition initiale $y(0) = y_0$ et pour une entrée identiquement nulle pour tout t ($u = 0, \forall t$) ;

2) la réponse « forcée » : elle correspond à la réponse du système à partir d'une condition initiale nulle $y(0) = 0$ et pour une entrée $u(t)$ différente de 0 pour $t \geq 0$ ($u(t) = 0, t < 0$; $u(t) \neq 0, t \geq 0$ et $y(t) = 0$ pour $t \leq 0$) ;

3) la réponse « totale » : elle correspond à la somme de la réponse « libre » et de la réponse « forcée » (le système étant linéaire, le principe de la superposition des effets s'applique).

Néanmoins, par la suite, on s'intéressera séparément à la réponse « libre » et à la réponse « forcée ».

1.1.2. Domaine fréquentiel

L'étude des caractéristiques des modèles de la forme de l'équation [1.1.1] peut aussi être faite dans le domaine fréquentiel. L'idée est alors d'étudier le comportement du système quand l'entrée u est une entrée sinusoïdale ou cosinusoïdale qui balaye un certain spectre de fréquences.

Rappelons que :

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad [1.1.3]$$

et par conséquent, on peut considérer que l'étude du système dynamique décrit par une équation du type [1.1.1] dans le domaine fréquentiel correspond à l'étude de la sortie du système pour des entrées de type $u(t) = e^{j\omega t}$.

Le système étant *linéaire*, la sortie sera un signal qui contiendra seulement la fréquence ω , l'entrée étant amplifiée ou atténuée (et éventuellement déphasée) en fonction de ω . En d'autres termes, la sortie sera de la forme :

$$y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t} \quad [1.1.4]$$

La figure 1.1.2 illustre le comportement d'un système pour une entrée $u(t) = e^{j\omega t}$.

Mais rien n'empêche de considérer que l'entrée est formée de sinusoïdes et cosinusoïdes amorties ou non amorties qui s'écrivent dans ce cas :

$$u(t) = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{st}; \quad s = \sigma + j\omega \quad [1.1.5]$$

s est interprété comme une fréquence complexe. A cause de la linéarité du système, la sortie reproduira le signal d'entrée amplifié (ou atténué), déphasé ou non en fonction des valeurs de s . Autrement dit, la sortie sera de la forme :

$$y(t) = H(s)e^{st} \quad [1.1.6]$$

quand l'entrée est de la forme $u(t) = e^{st}$, et elle devra satisfaire l'équation [1.1.1]¹.

1. e^{st} est une fonction propre (ou caractéristique) du système car elle conserve ses propriétés fonctionnelles en passant à travers le système (seules l'amplitude et la phase sont modifiées).

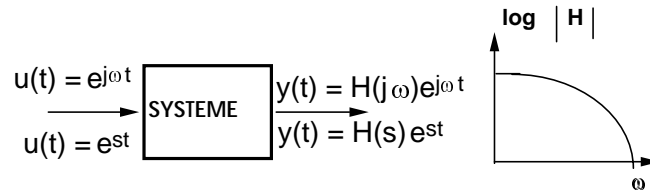


Figure 1.1.2. Réponse d'un système dynamique à des entrées périodiques

De [1.1.6], on obtient :

$$\frac{dy(t)}{dt} = s H(s) e^{st} \quad [1.1.7]$$

et en introduisant l'équation [1.1.7] dans l'équation [1.1.1] en tenant compte que $u(t) = e^{st}$, il résulte :

$$\left(s + \frac{1}{T}\right) H(s) e^{st} = \frac{G}{T} e^{st} \quad [1.1.8]$$

$H(s)$, qui donne le gain et le déphasage introduit par le système [1.1.1] à différentes fréquences complexes, est appelée *fonction de transfert*. La fonction de transfert $H(s)$ est une fonction uniquement de la variable complexe s . Elle représente le rapport entre la sortie et l'entrée du système quand l'entrée est e^{st} . De l'équation [1.1.8], il résulte que pour le système décrit par l'équation [1.1.1], la fonction de transfert est :

$$H(s) = \frac{G}{1 + sT} \quad [1.1.9]$$

La fonction de transfert $H(s)$ se présente en général sous la forme d'un rapport de deux polynômes en s ($H(s) = B(s)/A(s)$). Les racines des polynômes du numérateur ($B(s)$) définissent les « zéros » de la fonction de transfert et les racines du polynôme du dénominateur ($A(s)$) définissent les « pôles » de la fonction de transfert. Les « zéros » correspondent à des fréquences complexes pour lesquelles le gain du système est nul et les « pôles » correspondent à des fréquences complexes pour lesquelles le gain du système est infini.

Notons que la fonction de transfert $H(s)$ peut s'obtenir aussi par deux autres techniques :

- remplacement de p par s dans l'équation [1.1.2] et calcul algébrique du rapport y/u ;
- utilisation de la transformée de Laplace [OGA 90].

L'utilisation de la représentation des modèles dynamiques sous la forme de fonction de transfert présente un certain nombre d'avantages pour l'analyse et la synthèse des systèmes de régulation en boucle fermée. En particulier, la concaténation des modèles décrits par des fonctions de transfert est extrêmement aisée.

1.1.3. Stabilité

Par stabilité d'un système dynamique, on entend le comportement asymptotique (quand $t \rightarrow \infty$) d'un système à partir d'une condition initiale et pour une entrée identiquement nulle.

Prenons comme exemple le système de 1^{er} ordre décrit par l'équation différentielle [1.1.1] ou par la fonction de transfert [1.1.9].

Considérons la réponse libre du système [1.1.1] pour $u \equiv 0$ et à partir d'une condition initiale $y(0) = y_0$:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{T} y(t) = 0 ; y(0) = y_0 \quad [1.1.10]$$

Cherchons une solution pour y de la forme :

$$y(t) = Ke^{st} \quad [1.1.11]$$

où K et s sont à déterminer². De [1.1.11], on obtient :

$$\frac{dy}{dt} = sKe^{st} \quad [1.1.12]$$

et l'équation [1.1.10] devient :

$$Ke^{st} \left(s + \frac{1}{T} \right) = 0 \quad [1.1.13]$$

d'où l'on obtient :

$$s = -\frac{1}{T} ; K = y_0 \quad [1.1.14]$$

2. La structure de la solution [1.1.11] résulte de la théorie des équations différentielles linéaires.

et respectivement :

$$y(t) = y_0 e^{-t/T} \quad [1.1.15]$$

La réponse pour $T > 0$ et $T < 0$ est illustrée dans la figure 1.1.3.

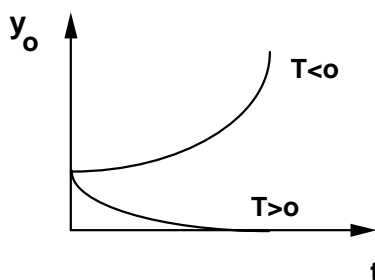


Figure 1.1.3. Réponse libre du système de 1^{er} ordre

Pour $T > 0$, on a $s < 0$ et la sortie va tendre vers zéro quand $t \rightarrow \infty$ (stabilité asymptotique). Pour $T < 0$, on a $s > 0$ et la sortie va diverger quand $t \rightarrow \infty$ (instabilité).

On peut généraliser ce résultat : *c'est le signe de la partie réelle des racines du dénominateur (pôles) de la fonction de transfert qui détermine la stabilité ou l'instabilité du système.*

Dans l'exemple du système du premier ordre, cette racine (pôle) est $s = -1/T$.

Pour que le système soit *asymptotiquement stable*, il faut que toutes les racines du dénominateur de la fonction de transfert soient caractérisées par $Re\ s < 0$.

Si l'une ou plusieurs racines du dénominateur de la fonction de transfert sont caractérisées par $Re\ s > 0$, le système est *instable*.

Pour $Re\ s = 0$, nous avons un cas limite de *stabilité* car l'amplitude de $y(t)$ restera égale à la condition initiale (par exemple intégrateur pur $dy/dt = u(t)$: dans ce cas, $y(t)$ reste égal à la condition initiale).

La figure 1.1.4 donne les domaines de stabilité et d'instabilité dans le plan de la variable complexe s .

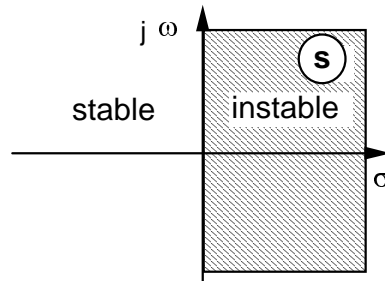


Figure 1.1.4. Les domaines de stabilité et d'instabilité dans le plan s

Notons que des critères de stabilité permettant de déterminer l'existence de racines instables d'un polynôme sans un calcul explicite de ses racines ont été développés (par exemple le critère de Routh-Hurwitz) [GIL 67].

1.1.4. Réponses temporelles

On étudie et on caractérise la réponse d'un système dynamique à une entrée en échelon. La réponse d'un système stable se présente en général sous la forme indiquée dans la figure 1.1.5.

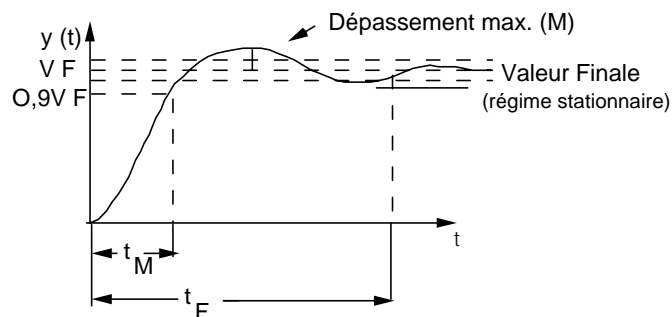


Figure 1.1.5. Réponse à un échelon

La réponse à un échelon est caractérisée par un certain nombre de paramètres :

– t_M (temps de montée) : il est défini en général comme le temps nécessaire pour atteindre 90 % de la valeur finale (ou le temps nécessaire pour que la sortie passe de 10 % à 90 % de la valeur finale). Pour les systèmes qui présentent un dépassement de la valeur finale ou qui ont un comportement oscillatoire, on définit souvent le temps de montée comme le temps nécessaire pour atteindre la première fois la

valeur finale. Nous utiliserons en règle générale par la suite la première définition de t_M ;

– t_F (*temps d'établissement*) : il est défini comme le temps nécessaire pour que la sortie atteigne et reste à l'intérieur d'une zone de tolérance autour de la valeur finale ($\pm 10\%$, $\pm 5\%$ $\pm 2\%$) ;

– VF (*valeur finale*) : valeur stationnaire de la sortie obtenue pour $t \rightarrow \infty$;

– M (*dépassement maximal*) : s'exprime en pourcentage par rapport à la valeur finale.

A titre d'exemple, considérons le système du 1^{er} ordre :

$$H(s) = \frac{G}{1 + sT}$$

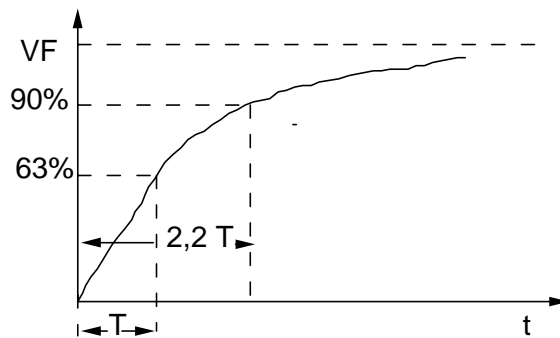


Figure 1.1.6. Réponse à un échelon pour un système du 1^{er} ordre

La réponse à un échelon unitaire pour le système du 1^{er} ordre est donnée par :

$$y(t) = G(1 - e^{-t/T})$$

L'entrée étant un échelon unitaire, on a :

– $VF = G$ (gain statique) ; $t_M = 2.2 T$;

– $t_F = 2.2 T$ (pour $\pm 10\%$ VF) ; $t_F = 3 T$ (pour $\pm 5\%$ VF) ; $M = 0$;

et la réponse d'un tel système est représentée dans la figure 1.1.6. Notons que pour $t = T$, la sortie atteint 63 % de la valeur finale.

1.1.5. Réponses fréquentielles

On étudie et on caractérise la réponse fréquentielle d'un système dynamique pour des entrées périodiques de fréquence variable mais d'amplitude constante.

Pour les systèmes continus, on représente la caractéristique gain-fréquence sur une double échelle logarithmique. La représentation de la caractéristique déphasage-fréquence utilise une échelle logarithmique seulement pour l'axe des fréquences.

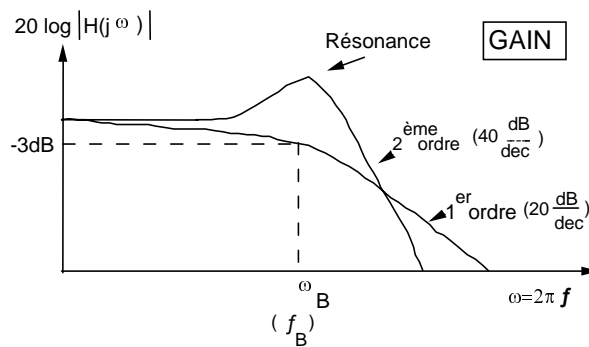


Figure 1.1.7. Réponses fréquentielles

Le gain $G(\omega) = |H(j\omega)|$ est exprimé en decibels ($|H(j\omega)| \text{ dB} = 20 \log |H(j\omega)|$) sur l'ordonnée, et l'abscisse est graduée en pulsation exprimée en rad/s ($\omega = 2\pi f$, où f est la fréquence exprimée en Hz).

La figure 1.1.7 donne quelques courbes de réponses fréquentielles typiques.

Les éléments caractéristiques de la réponse fréquentielle sont :

– $f_{BP}(\omega_{BP})$ (bande passante) : la fréquence (pulsation) à partir de laquelle le gain à la fréquence nulle $G(0)$ (gain stationnaire) est atténué de plus de 3 dB :

$$G(\omega_{BP}) = G(0) - 3\text{dB}; \quad (G(\omega_{BP}) = 0.707 G(0)) ;$$

– $f_C(\omega_C)$ (fréquence de coupure) : la fréquence (pulsation) à partir de laquelle l'atténuation introduite par rapport à la fréquence nulle est supérieure à N dB :

$$G(j\omega_C) = G(0) - N \text{ dB}$$

– Q (facteur de résonance) : rapport entre le gain correspondant au maximum de la courbe de réponse fréquentielle et la valeur $G(0)$;

– *pente* : il s'agit de la tangente à la caractéristique fréquentielle du gain dans une certaine région. Elle dépend du nombre de pôles et de zéros et de leur distribution fréquentielle.

Considérons à titre d'exemple le système du premier ordre caractérisé par la fonction de transfert donnée dans l'équation [1.1.9]. Pour $s = j\omega$, la fonction de transfert [1.1.9] s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{G}{1 + j\omega T} = |H(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} = |H(j\omega)|\angle\phi(\omega) \quad [1.1.16]$$

où $|H(j\omega)|$ représente le module (gain) de la fonction de transfert et $\angle\phi(\omega)$ le déphasage introduit par la fonction de transfert. On a alors :

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{G}{\sqrt{(1 + \omega^2 T^2)}} \quad [1.1.17]$$

$$\angle\phi(\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im} G(j\omega)}{\text{Re} G(j\omega)} \right] = \tan^{-1} [-\omega T] \quad [1.1.18]$$

De l'équation [1.1.17] et de la définition de la bande passante ω_B , il résulte :

$$\omega_B = 1/T$$

En utilisant l'équation [1.1.18], on déduit que pour $\omega = \omega_B$, le système introduit un déphasage. $\angle\phi(\omega_B) = -45^\circ$. Notons aussi que pour $\omega = 0$, $G(0) = G$, $\angle\phi(0) = 0^\circ$ et que pour $\omega \rightarrow \infty$, $G(\infty) = 0$, $\angle\phi(\infty) = -90^\circ$.

La figure 1.1.8 donne les caractéristiques fréquentielles exactes et asymptotiques d'un système du 1^{er} ordre (gain et phase).

En règle générale, chaque pôle stable introduit une pente asymptotique de -20 dB/dec (ou 6 dB/octave) et un déphasage asymptotique de -90° . D'autre part, chaque zéro stable introduit une pente asymptotique de $+20$ dB/dec et un déphasage asymptotique de $+90^\circ$.

Il résulte que la pente asymptotique de la caractéristique gain-fréquence en dB dans les hautes fréquences est donnée par :

$$\frac{\Delta G}{\Delta \omega} = -(n - m) \times 20 \text{ dB / dec} \quad [1.1.19a]$$

où n est le nombre de pôles et m le nombre de zéros.

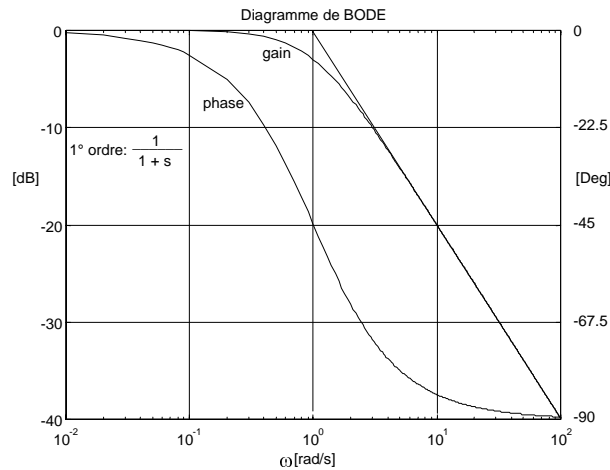


Figure 1.1.8. Caractéristiques fréquentielles d'un système du 1^{er} ordre

Le déphasage asymptotique est donné par la relation :

$$\angle \phi(\infty) = -(n - m) \times 90^\circ \quad [1.1.19b]$$

Notons que le temps de montée (t_M) d'un système dépend de sa bande passante (ω_{BP}). On a la relation approximative :

$$t_M \approx \frac{2 \text{ à } 3}{\omega_{BP}} \quad [1.1.20]$$

1.1.6. Etude du système du deuxième ordre

L'équation différentielle normalisée d'un système du 2^e ordre est donnée par :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 u(t) \quad [1.1.21]$$

En utilisant l'opérateur $p = d/dt$, l'équation [1.1.21] se réécrit :

$$(p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2) y(t) = \omega_0^2 u(t) \quad [1.1.22]$$

En considérant $u(t) = e^{st}$ dans l'équation [1.1.21], ou $p = s$ dans l'équation [1.1.22], on obtient la fonction de transfert normalisée d'un système du 2^e ordre :

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2} \quad [1.1.23]$$

où :

ω_0 : pulsation naturelle ($\omega_0 = 2 \pi f_0$) ;

ζ : coefficient d'amortissement.

Les racines du dénominateur (pôles) de la fonction de transfert sont données par :

a) $|\zeta| < 1$: pôles complexes (réponse oscillatoire) :

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_0 \pm j \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad [1.1.24a]$$

($\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ est appelée « fréquence de résonance amortie ») ;

b) $|\zeta| \geq 1$: pôles réels (réponse apériodique) :

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad [1.1.24b]$$

On a alors, en fonction de la valeur du coefficient ζ , les situations suivantes :

$\zeta > 0$: système asymptotiquement stable ;

$\zeta < 0$: système instable.

Ces différents cas sont résumés dans la figure 1.1.9.

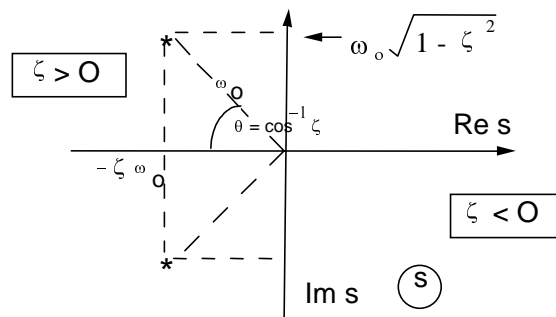


Figure 1.1.9. Les racines du système du 2^e ordre en fonction de ζ (pour $|\zeta| \leq 1$)

La réponse à un échelon pour le système du 2^e ordre décrit par l'équation [1.1.21] est donnée par la formule (pour $|\zeta| \leq 1$) :

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} (\sin \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta) \quad [1.1.25]$$

où :

$$\theta = \cos^{-1} \zeta \quad [1.1.26]$$

La figure 1.1.10 donne les réponses normalisées à un échelon pour le système du 2^e ordre. Ce diagramme permet soit de déterminer la réponse d'un système du 2^e ordre donné, soit de déterminer les valeurs de ω_0 et ζ pour obtenir un système ayant un temps de montée (ou d'établissement) et un dépassement donné.

A titre d'illustration, considérons le problème de la détermination de ω_0 et ζ tel que le temps de montée (0 à 90 % de la valeur finale) soit de 2,75 s avec un dépassement maximal $\approx 5\%$. De la figure 1.1.10, il résulte qu'il faut choisir $\zeta = 0.7$ pour assurer un dépassement de $\approx 5\%$. Le temps de montée normalisé correspondant est : $\omega_0 t_M \approx 2,75$. Il résulte que pour obtenir un temps de montée de 2,75 s, il faut prendre $\omega_0 = 1 \text{ rad/sec}$.

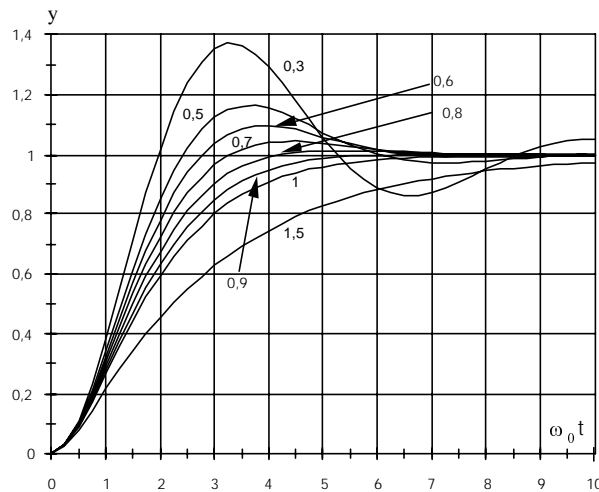


Figure 1.1.10. Réponses normalisées d'un système du 2^e ordre à une entrée échelon

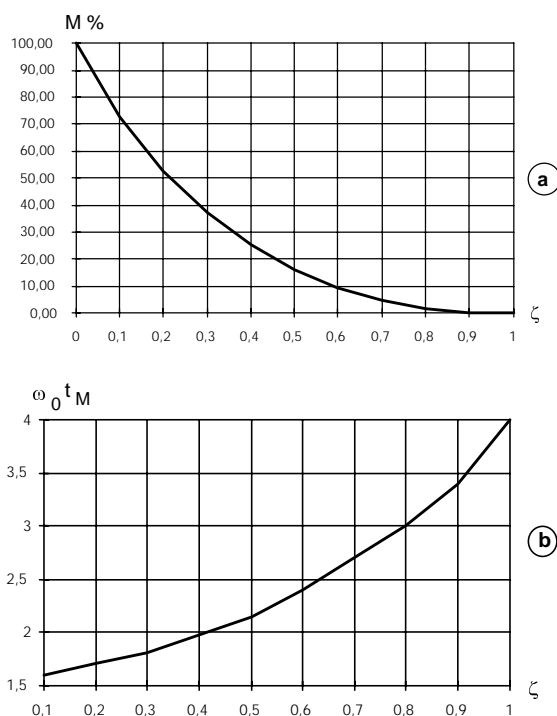


Figure 1.1.11. Système du 2^e ordre : a) dépassement maximum M en fonction de l'amortissement ζ ; b) temps de montée normalisé en fonction de ζ

Pour faciliter la détermination de ω_0 et ζ pour un temps de montée t_M donné et un dépassement maximum M donné, on a représenté dans les figures 1.1.11a et 1.1.11b les courbes M en fonction de ζ et $\omega_0 t_M$ en fonction de ζ .

La courbe donnée dans la figure 1.1.11a permet de choisir l'amortissement ζ pour un dépassement maximum M donné. Une fois la valeur de ζ choisie, on obtient à partir de la figure 1.1.11b la valeur correspondante de $\omega_0 t_M$. Ceci permet de déterminer ω_0 pour un temps de montée t_M donné.

Les fonctions *omega_damp.sci* (Scilab) et *omega_damp.m* (Matlab) permettent d'obtenir directement les valeurs de ω_0 et ζ à partir du dépassement et du temps de montée désirés.

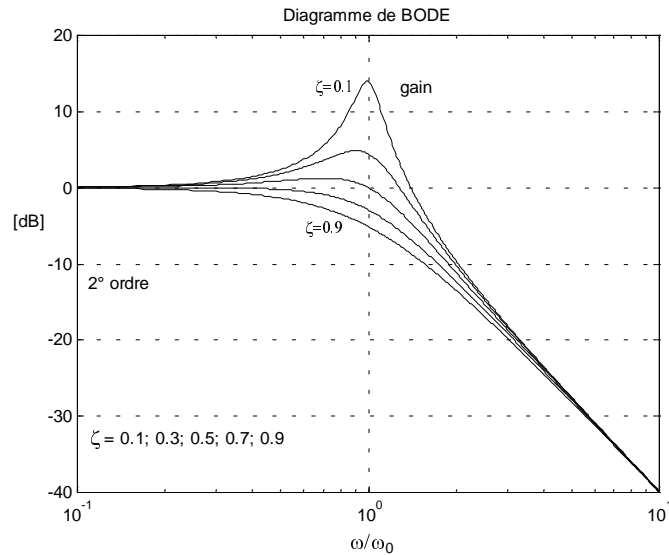


Figure 1.1.12. Réponses fréquentielles normalisées d'un système du 2^e ordre (gain)

Le temps d'établissement t_F , pour différentes valeurs de ζ et de la zone de tolérance autour de la valeur finale, peut être déterminé à partir des réponses normalisées données dans la figure 1.1.10.

La figure 1.1.12 donne les courbes normalisées des réponses fréquentielles pour le système du 2^e ordre.

1.1.7. Systèmes avec retard

Beaucoup de systèmes industriels ont une réponse à un échelon de la forme de celle représentée dans la figure 1.1.13. Le temps pendant lequel la sortie ne réagit pas à la commande est appelé retard pur (noté τ).

Un système dynamique du premier ordre avec un retard pur de τ est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T}y(t) + \frac{G}{T}u(t - \tau) \quad [1.1.27]$$

où l'argument de $u(t - \tau)$ reflète le fait que l'entrée agit après un retard τ . L'équation [1.1.27] est à comparer avec l'équation [1.1.1]. La fonction de transfert correspondante est :

$$H(s) = \frac{Ge^{-s\tau}}{1 + sT} \quad [1.1.28]$$

où $e^{-s\tau}$ représente la fonction de transfert d'un retard pur τ .

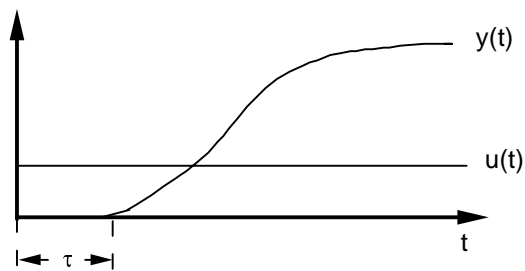


Figure 1.1.13. Réponse à un échelon d'un système avec retard pur

Les équations [1.1.27] et [1.1.28] se généralisent directement pour des systèmes d'ordre supérieur avec retard.

A noter que dans le cas des systèmes avec retard, le temps de montée t_M est défini en général à partir de $t = \tau$.

Les caractéristiques fréquentielles du retard pur s'obtiennent en remplaçant $s = j\omega$ dans $e^{-s\tau}$. On obtient alors :

$$H_{\text{retard}}(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = |1| \cdot \angle\phi(\omega) \quad [1.1.29]$$

avec :

$$\angle\phi(\omega) = -\omega\tau \text{ (rad)} \quad [1.1.30]$$

Donc un retard pur ne modifie pas le gain du système mais introduit un déphasage proportionnel à la fréquence.

1.1.8. Systèmes à non-minimum de phase

Dans le cas des systèmes continus (uniquement), il s'agit des systèmes ayant un ou plusieurs zéros instables. L'effet principal des zéros instables dans le cas continu

est l'apparition d'un dépassement négatif au début de la réponse à un échelon tel qu'il apparaît par exemple dans la figure 1.1.14.

L'effet des zéros instables ne peut pas être compensé par le régulateur (il faudrait utiliser un régulateur instable).

A titre d'exemple, considérons le système :

$$H(s) = \frac{1 - sa}{(1 + s)(1 + 0.5s)}$$

avec $a = 1$ et 0.5 . La figure 1.1.14 représente la réponse à un échelon de ce système.

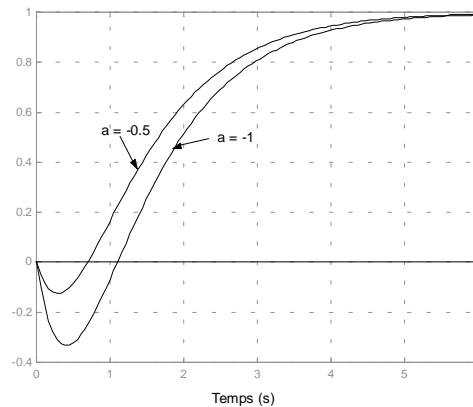


Figure 1.1.14. Réponses à un échelon d'un système à non-minimum de phase ($H(s) = (1-sa)/(1+s)(1+0.5s)$, $a = 1, 0.5$)

1.2. Systèmes en boucle fermée

La figure 1.2.1 représente un système simple de régulation. $y(t)$ est la sortie du procédé et constitue la *variable à régler*, $u(t)$ est la commande appliquée au procédé par le régulateur et $r(t)$ la consigne (référence).

Les systèmes de régulation opèrent en boucle fermée (la commande est une fonction de la différence entre la consigne et la valeur réelle de la variable réglée) et sont constitués par la mise en cascade d'au moins deux systèmes dynamiques (le procédé et le régulateur).

Nous examinerons dans cette section le calcul de la fonction de transfert en boucle fermée, l'erreur statique vis-à-vis de la consigne, le rejet des perturbations et la stabilité des systèmes en boucle fermée.

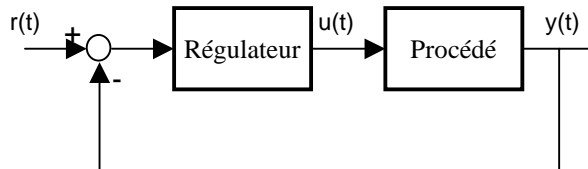


Figure 1.2.1. Un système de régulation

1.2.1. Systèmes en cascade

La figure 1.2.2 représente le couplage en cascade de deux systèmes linéaires caractérisés respectivement par les fonctions de transfert $H_1(s)$ et $H_2(s)$.

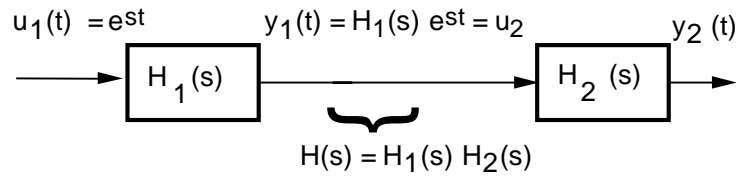


Figure 1.2.2. Systèmes en cascade

Si l'entrée $u_1(t) = e^{st}$, nous avons les relations suivantes :

$$u_2(t) = y_1(t) = H_1(s) e^{st} \quad [1.2.1]$$

$$y_2(t) = H_2(s) u_2(t) = H_2(s) H_1(s) e^{st} = H(s) e^{st} \quad [1.2.2]$$

et nous concluons que la fonction de transfert d'une cascade de deux systèmes est :

$$H(s) = H_2(s) H_1(s) \quad [1.2.3]$$

ou dans le cas général de n systèmes en cascade :

$$H(s) = H_n(s) H_{n-1}(s) \dots H_2(s) H_1(s) \quad [1.2.4]$$

1.2.2. Fonction de transfert des systèmes en boucle fermée

Considérons le système en boucle fermée représenté dans la figure 1.2.3.

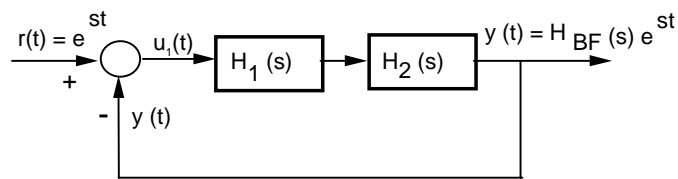


Figure 1.2.3. Système en boucle fermée

La sortie $y(t)$ du système bouclé dans le cas d'une consigne externe $r(t) = e^{st}$ s'écrit :

$$y(t) = H_{BF}(s) e^{st} = H_2(s) H_1(s) u_1(t) \quad [1.2.5]$$

Mais $u_1(t)$ est donné par la relation :

$$u_1(t) = r(t) - y(t) \quad [1.2.6]$$

En introduisant cette relation dans l'équation [1.2.5], on obtient :

$$[1 + H_2(s) H_1(s)] y(t) = H_2(s) H_1(s) r(t) \quad [1.2.7]$$

d'où :

$$H_{BF}(s) = \frac{H_2(s) H_1(s)}{1 + H_2(s) H_1(s)} \quad [1.2.8]$$

La stabilité du système en boucle fermée sera déterminée par les parties réelles des racines du dénominateur (pôles) de la fonction de transfert $H_{BF}(s)$.

1.2.3. Erreur statique

Lors de la synthèse d'un système en boucle fermée, on s'intéresse à l'obtention d'un système asymptotiquement stable ayant un temps de réponse donné avec un dépassement spécifié et assurant une erreur statique nulle vis-à-vis de la consigne. Dans le schéma de la figure 1.2.4, on désire qu'en régime statique (stationnaire) $y(t)$ soit égal à $r(t)$, c'est-à-dire que le gain statique stationnaire du système en boucle fermée entre $y(t)$ et $r(t)$ soit égal à 1.

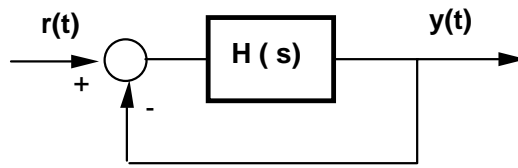


Figure 1.2.4. Système en boucle fermée

Dans la figure 1.2.4, la fonction de transfert globale de la voie directe $H(s)$ est de la forme :

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad [1.2.9]$$

et la fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$H_{BF}(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)} = \frac{B(s)}{A(s) + B(s)} \quad [1.2.10]$$

Le régime statique (stationnaire) correspond à une fréquence nulle ($s = 0$). Le gain statique s'obtiendra en faisant $s = 0$ dans la fonction de transfert donnée par l'équation [1.2.10] :

$$y = H_{BF}(0)r = \frac{B(0)}{A(0) + B(0)}r = \frac{b_0}{a_0 + b_0}r \quad [1.2.11]$$

où y et r désignent respectivement les valeurs stationnaires de la sortie et de la consigne.

Pour obtenir un gain statique unitaire ($H_{BF}(0) = 1$), il faut que :

$$\frac{b_0}{a_0 + b_0} = 1 \Rightarrow a_0 = 0 \quad [1.2.12]$$

Cela implique que le dénominateur de la fonction de transfert en boucle ouverte $H(s)$ doit être de la forme :

$$A(s) = s(a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1}) = s.A'(s) \quad [1.2.13]$$

et respectivement :

$$H(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{B(s)}{A'(s)} \quad [1.2.14]$$

Pour obtenir une erreur statique nulle en boucle fermée quand la consigne est constante, il faut donc que la fonction de transfert de la voie directe contienne un *intégrateur*. Ce concept se généralise pour le cas des consignes variant dans le temps.

Principe du modèle interne : pour obtenir une erreur statique nulle, $H(s)$ doit contenir le *modèle interne* de la consigne $r(t)$ (la fonction de transfert du filtre qui engendre $r(t)$ à partir de l'impulsion de Dirac. Exemple : *échelon* = $(1/s) \cdot \text{Dirac}$, *rampe* = $(1/s^2) \cdot \text{Dirac}$).

Donc pour une consigne en rampe afin d'obtenir une erreur stationnaire nulle, $H(s)$ doit contenir un double intégrateur.

1.2.4. Rejet des perturbations

La figure 1.2.5 représente la structure d'un système en boucle fermée en présence d'une perturbation agissant sur la sortie à réguler. $H_{BO}(s)$ représente la fonction de transfert globale (régulateur + processus) en boucle ouverte et a la forme donnée par l'équation [1.2.9].

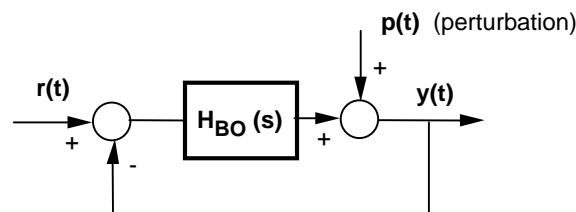


Figure 1.2.5. Système en boucle fermée en présence de perturbations

En règle générale, on souhaite que l'effet de la perturbation $p(t)$ sur la sortie du processus soit le plus faible possible, au moins dans certaines bandes de fréquences.

En particulier, on souhaite que l'effet d'une perturbation constante (en échelon), souvent appelée « perturbation de charge », soit nulle en régime stationnaire ($t \rightarrow \infty, s \rightarrow 0$).

La fonction de transfert entre la perturbation et la sortie s'écrit :

$$S_{yp}(s) = \frac{1}{1 + H_{BO}(s)} = \frac{A(s)}{A(s) + B(s)} \quad [1.2.15]$$

$S_{yp}(s)$ porte le nom de « fonction de sensibilité perturbation-sortie ».

Le régime stationnaire correspond à $s = 0$:

$$y = S_{yp}(0)p = \frac{A(0)}{A(0) + B(0)} p = \frac{a_0}{a_0 + b_0} p \quad [1.2.16]$$

où y et p désignent respectivement les valeurs stationnaires de la sortie et de la perturbation.

$S_{yp}(0)$ doit être nulle pour un rejet parfait de la perturbation en régime stationnaire. Il résulte (comme au paragraphe 1.2.3) que pour obtenir la propriété désirée, on doit avoir $a_0 = 0$. Cela implique donc la présence d'un *intégrateur* dans la voie directe pour un rejet parfait d'une perturbation échelon en régime stationnaire (voir paragraphe précédent).

En règle générale, pour la réjection parfaite d'une perturbation déterministe la voie directe doit contenir le *modèle interne* de la perturbation (voir paragraphe précédent).

Exemple. Perturbation sinusoïdale de fréquence constante

Le modèle interne de la sinusoïde est $1/(1 + s^2 / \omega_0^2)$ (fonction de transfert du filtre générateur qui, excité par une impulsion de Dirac, engendre une sinusoïde). Pour une réjection parfaite (asymptotiquement) de cette perturbation, le régulateur doit contenir la fonction de transfert $1/(1 + s^2 / \omega_0^2)$.

Mais il faut aussi s'assurer, en règle générale, qu'il n'y ait pas une amplification de l'effet de la perturbation dans certaines bandes de fréquences. C'est la raison

pour laquelle il faut imposer que le module de $|S_{yp}(j\omega)|$ soit plus petit qu'une certaine valeur à toutes les fréquences. Une valeur typique pour cette condition est :

$$|S_{yp}(j\omega)| < 2 \text{ (6 dB) pour tout } \omega \quad [1.2.17]$$

On peut aussi être amené, si l'on sait qu'une perturbation a son énergie concentrée dans une certaine bande de fréquences, à imposer que $S_{yp}(j\omega)$ introduise une atténuation donnée dans cette bande de fréquences.

1.2.5. Analyse des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel. Lieu et critère de stabilité de Nyquist

La fonction de transfert de la boucle ouverte $H_{BO}(s)$ (figure 1.2.5) peut être représentée dans le plan complexe quand ω varie de 0 à ∞ :

$$H_{BO}(j\omega) = \text{Re}H_{BO}(j\omega) + j \text{Im}H_{BO}(j\omega) = |H_{BO}(j\omega)| \angle \phi(\omega) \quad [1.2.18]$$

La courbe (hodographe) de la fonction de transfert dans ce plan est graduée en fréquences (pulsations). Cette représentation porte souvent le nom de *lieu (ou hodographe) de Nyquist*.

Dans la figure 1.2.6 sont représentés les lieux de Nyquist pour $H_1(s) = 1/(1+s)$ et $H_2(s) = 1/[s(1+s)]$. A noter que l'hodographe de $H_2(s)$ correspond au cas typique de la présence d'un intégrateur dans la boucle (pour assurer une erreur stationnaire nulle).

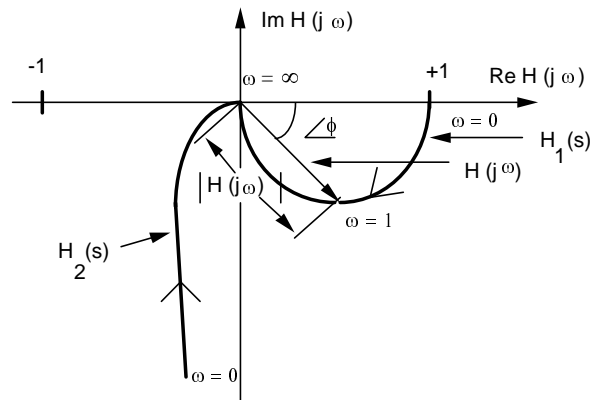


Figure 1.2.6. Les lieux de Nyquist pour $H_1(s) = 1/(1+s)$ et $H_2(s) = 1/[s(1+s)]$

Ces courbes mettent en évidence le module et la phase de la fonction de transfert aux différentes fréquences. Le vecteur reliant l'origine à un point de l'hodographe de la fonction de transfert représente $H(j\omega)$ pour une certaine pulsation ω .

Dans ce diagramme, le point $[-1, j0]$ joue un rôle particulièrement important (point critique). En effet, comme on le voit sur la figure 1.2.7, le vecteur reliant le point $[-1, j0]$ à l'hodographe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(j\omega)$ a l'expression :

$$S_{yp}^{-1}(j\omega) = 1 + H_{BO}(j\omega) \quad [1.2.19]$$

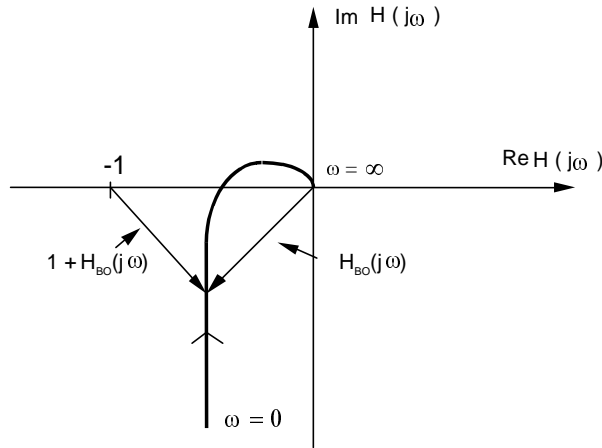


Figure 1.2.7. Le lieu de Nyquist et le point critique

Ce vecteur correspond à l'inverse de la fonction de sensibilité perturbation-sortie (voir équation [1.2.15]) et il définit le *dénominateur* de la fonction de transfert en boucle fermée. C'est le dénominateur de la fonction de transfert qui détermine les propriétés de stabilité du système. Pour que le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable, il faut que tous les zéros de $S_{yp}^{-1}(s)$ se trouvent dans le demi-plan $Re s < 0$.

Si l'hodographe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H(s)$ passe par le point $[-1, j0]$, pour une valeur $s = j\omega$, le dénominateur de la fonction de transfert du système en boucle fermée s'annulera à cette fréquence. Le système en boucle fermée ne sera pas asymptotiquement stable (plus exactement, il aura des pôles sur l'axe imaginaire). Il résulte donc une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour que le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable : l'hodographe de $H(s)$ ne doit pas passer par le point $[-1, j0]$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique du système en boucle fermée sont données par le critère de Nyquist.

Pour les systèmes ayant des pôles stables en boucle ouverte ($Re s \leq 0$), le critère de stabilité de Nyquist s'exprime comme suit.

Critère de stabilité

L'hodographe de la fonction de transfert de la boucle ouverte $H_{BO}(s)$ parcouru dans le sens des fréquences croissantes doit laisser à gauche le point critique $[-1, j0]$.

En règle générale, un régulateur sera calculé pour le modèle nominal du procédé afin que les pôles du système en boucle fermée soient asymptotiquement stables, c'est-à-dire que $H_{BO}(s)$ laissera sur sa gauche le point critique.

Il est par ailleurs évident que la distance minimale par rapport au point critique va caractériser la « réserve de stabilité » ou la « robustesse » du système en boucle fermée vis-à-vis des variations des paramètres du système (ou des incertitudes sur la valeur des paramètres). Il est donc important de quantifier ces propriétés de robustesse.

Les éléments suivants servent à caractériser l'éloignement par rapport au point $[-1, j0]$:

- marge de gain,
- marge phase,
- marge de retard,
- marge de module.

Marge de gain

La marge de gain (ΔG) est égale à l'inverse du gain de $H_{BO}(j\omega)$ pour la fréquence (pulsation) à laquelle le déphasage est de $\angle\phi = -180^\circ$ (voir figure 1.2.8).

La marge de gain s'exprime souvent en dB. En d'autres termes, la marge de gain donne l'accroissement maximum admis du gain à la fréquence où $\angle\phi(\omega) = -180^\circ$.

$$\Delta G = \frac{1}{|H_{BO}(j\omega_{180})|} \quad \text{pour } \angle\phi(\omega_{180}) = -180^\circ$$

Les valeurs typiques pour une bonne marge de gain sont :

$$\Delta G \geq 2 \text{ (6 dB) [min : 1,6 (4 dB)]}$$

Si le lieu de Nyquist intersecte l'axe réel à plusieurs pulsations $\omega_{i\pi}$ caractérisées par un déphasage :

$$\angle\phi(\omega_{i\pi}) = -i 180^\circ ; i = 1, 3, 5 \dots$$

et des gains correspondants $|H_{BO}(j\omega_{i\pi})|$, alors la *marge de gain* est définie par³ :

$$\Delta G = \min_i \frac{1}{|H_{BO}(j\omega_{i\pi})|}$$

Marge de phase

C'est la phase additionnelle qu'il faut ajouter à la fréquence (pulsation) à laquelle le gain du système en boucle ouverte est unitaire, pour obtenir un déphasage total de $\angle\phi = -180^\circ$. (voir figure 1.2.8) :

$$\Delta\phi = 180^\circ - \angle\phi(\omega_{cr}) \quad \text{pour } |H_{BO}(j\omega_{cr})| = 1$$

où ω_{cr} , appelée *pulsation de croisement*, correspond à la pulsation pour laquelle le lieu de Nyquist croise le cercle unité (voir figure 1.2.8).

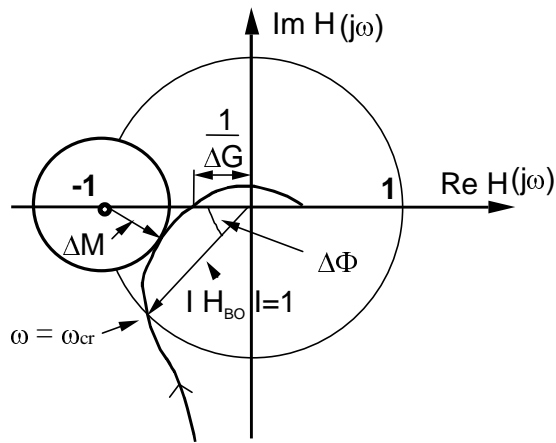


Figure 1.2.8. Marges de gain, de phase et de module

3. A noter que dans les cas où le lieu de Nyquist intersecte l'axe réel à des valeurs inférieures à -1 , tout en laissant à gauche le point critique, il existe aussi une valeur minimale de la marge de gain au-dessous de laquelle le système devient instable.

Les valeurs typiques pour une bonne marge de phase sont :

$$30^\circ \leq \Delta\phi \leq 60^\circ$$

Si le lieu de Nyquist intersecte le cercle unité à plusieurs pulsations ω_{cr}^i caractérisées par les marges de phase correspondantes :

$$\Delta\phi_i = 180^\circ - \angle\phi(\omega_{cr}^i)$$

la *marge de phase* du système est définie par :

$$\Delta\phi = \min_i \Delta\phi_i$$

Marge de retard

Un retard pur introduit un déphasage proportionnel à la pulsation ω . Pour une certaine pulsation ω_0 , le déphasage introduit par un retard pur τ est :

$$\angle\phi(\omega_0) = \omega_0 \tau$$

On peut donc convertir la marge de phase en une « marge de retard », c'est-à-dire calculer le retard additionnel toléré par le système en boucle ouverte qui ne conduira pas à l'instabilité du système en boucle fermée. Il résulte :

$$\Delta\tau = \frac{\Delta\phi}{\omega_{cr}}$$

Si le lieu de Nyquist intersecte le cercle unité à plusieurs pulsations ω_{cr}^i caractérisées par les marges de phase correspondantes $\Delta\phi_i$, la *marge de retard* du système est définie par :

$$\Delta\tau = \min_i \frac{\Delta\phi_i}{\omega_{cr}^i}$$

A noter qu'une bonne marge de phase ne garantit pas une bonne marge de retard (si la pulsation ω_{cr} est élevée, la marge de retard est faible même si la marge de phase est importante).

Dans le cas des systèmes continus, la valeur typique pour la marge de retard est une fraction du retard nominal du système (10 à 20 %) ou du temps de montée (10 %)

Marge de module

Il s'agit d'une mesure plus globale de la distance entre le point critique $[-1, j0]$ et l'hodographe de $H_{BO}(s)$. La « marge de module » (ΔM) est définie comme le rayon du cercle centré en $[-1, j0]$ et tangent à l'hodographe de $H_{BO}(s)$ (voir figure 1.2.8).

Il résulte immédiatement de la définition du vecteur qui relie le point critique $[-1, j0]$ à l'hodographe de $H_{BO}(j\omega)$ que :

$$\Delta M = |1 + H_{BO}(j\omega)|_{\min} = |S_{yp}^{-1}(j\omega)|_{\min} = \left(|S_{yp}(j\omega)|_{\max} \right)^{-1} \quad [1.2.20]$$

Par conséquent, la réduction (ou la minimisation) de $|S_{yp}(j\omega)|_{\max}$ entraînera l'augmentation (ou la maximisation) de la marge de module⁴.

La *marge de module* est très importante pour plusieurs raisons :

- elle définit la valeur maximale du module de la *fonction de sensibilité perturbation-sortie* (voir paragraphe 1.2.4) et donc les limites basses des performances pour le rejet des perturbations ;
- elle définit la tolérance vis-à-vis des composants ayant des caractéristiques non linéaires ou variables dans le temps qui pourraient être présents dans le système (critère du cercle, voir plus loin).

Les valeurs typiques pour une bonne marge de module sont :

$$\Delta M \geq 0.5 \text{ (-6 dB)} \text{ [min : } 0,4 \text{ (-8 dB)]}$$

Notons que $\Delta M \geq 0.5$ implique une marge de gain $\Delta G \geq 2$ (6 dB) et une marge de phase $\Delta\phi > 29^\circ$. En règle générale, une bonne marge de module garantit des valeurs satisfaisantes pour les marges de gain et de phase⁵.

4. $|S_{yp}(j\omega)|_{\max}$ correspond à la norme H_∞ de la fonction de sensibilité perturbation-sortie.

5. La réciproque n'est pas vraie. Des systèmes ayant des marges de gain et de phase satisfaisantes peuvent avoir une marge de module très faible.

Tolérance des non-linéarités (critère du cercle)

Dans les systèmes de régulation, on trouve assez souvent des éléments ayant des caractéristiques statiques non linéaires ou variables dans le temps (souvent au niveau des actionneurs).

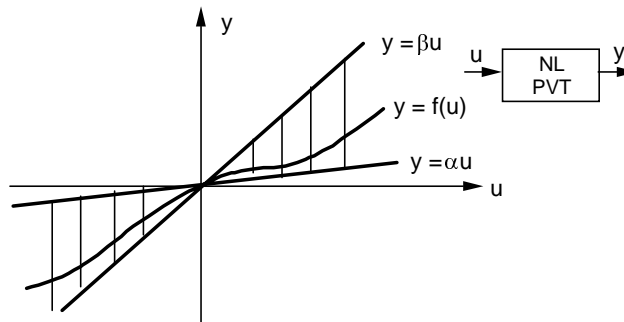


Figure 1.2.9. Caractéristiques non linéaires ou variables dans le temps contenues dans le secteur conique (α, β)

Les caractéristiques de ces composants, sans être connues avec précision, se situent en général à l'intérieur d'un secteur conique défini par un gain linéaire minimum (α) et un gain linéaire maximum (β), comme cela est illustré dans la figure 1.2.9.

Le système en boucle fermée prend alors par exemple la forme donnée dans la figure 1.2.10a.

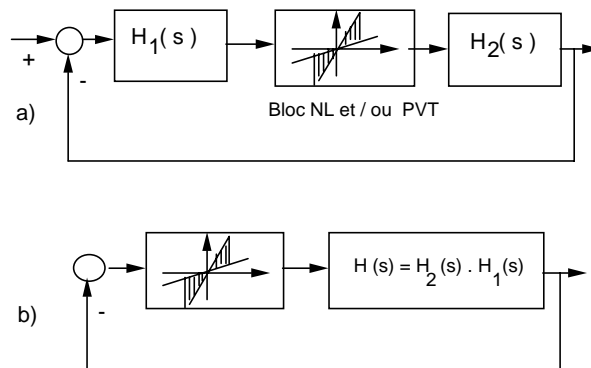


Figure 1.2.10. Système en boucle fermée contenant un bloc non linéaire (NL) et/ou à paramètres variables dans le temps (PVT) :
 a) schéma bloc ; b) représentation équivalente

Du point de vue de l'analyse de la stabilité d'un tel système, il peut être représenté sur la forme équivalente donnée dans la figure 1.2.10b où $H(s) = H_1(s)H_2(s)$.

Pour ce type de système, on a alors une généralisation du critère de Nyquist connue sous le nom du « critère du cercle » (Popov-Zames).

Critère (de stabilité) du cercle

Le système à contre-réaction représenté dans la figure 1.2.10b est asymptotiquement stable pour l'ensemble des caractéristiques non linéaires et/ou variables dans le temps appartenant au secteur conique $[\alpha, \beta]$ (avec $\alpha, \beta > 0$) si l'hodographe de $H(s)$ parcouru dans le sens des fréquences croissantes laisse sur la gauche, sans l'intersecter, le cercle centré sur l'axe réel et passant par les points $(-1/\beta, j0)$ et $(-1/\alpha, j0)$.

Le critère du cercle est illustré dans la figure 1.2.11.

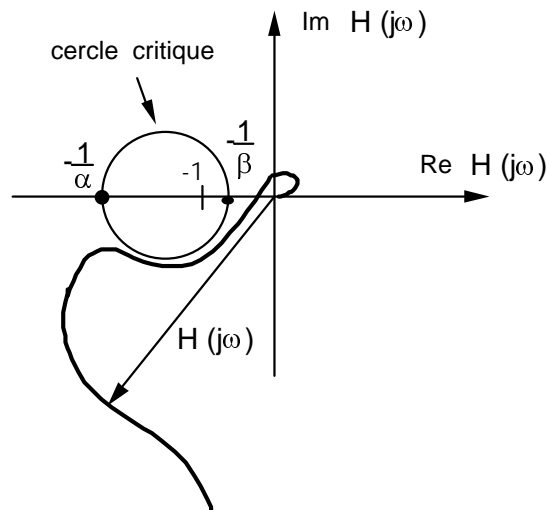


Figure 1.2.11. Critère de stabilité du cercle

On voit immédiatement le lien entre la *marge de module* et le *critère du cercle* (voir figure 1.2.8). Pour une marge de module ΔM , le système de régulation en boucle fermée va tolérer des éléments ayant des caractéristiques non linéaires et/ou à paramètres variables dans le temps si elles sont situées à l'intérieur d'un secteur conique défini par un gain linéaire minimum $(1/(1+\Delta M))$ et un gain linéaire maximum $(1/(1-\Delta M))$.

1.3. Synthèse des régulateurs PI et PID

Les régulateurs PI (proportionnel + intégral) et PID (proportionnel + intégral + dérivée) sont les plus répandus pour la commande des systèmes continus.

Une littérature extrêmement riche a été consacrée aux méthodes de calcul et d'ajustement des paramètres de ces régulateurs. Notons aussi qu'il existe plusieurs structures de régulateurs PI et PID (ayant donc des fonctions de transfert différentes et des paramètres de réglage différentes). Des méthodes de synthèse à partir de caractéristiques fréquentielles ou temporelles des procédés (modèles non paramétriques) ont été développées et appliquées (voir section 1.5).

Nous nous limiterons dans cette section à présenter une méthodologie pour la synthèse paramétrique de ces régulateurs, c'est-à-dire à partir de la connaissance des paramètres de la fonction de transfert du procédé.

Cette présentation a pour objectif :

- de préparer l'introduction ultérieure de régulateurs PI et PID numériques ;
- d'illustrer les principes modernes de calcul des régulateurs à partir des spécifications des performances désirées de la boucle fermée et de la connaissance des paramètres de la fonction de transfert du procédé à commander ;
- d'illustrer explicitement la dépendance des paramètres du régulateur par rapport aux performances désirées et aux paramètres du procédé à commander.

1.3.1. Régulateur PI

Considérons un procédé caractérisé par une fonction de transfert du 1^{er} ordre : $G/(1+sT)$.

L'objectif de la régulation est d'obtenir un système en boucle fermée ayant une erreur statique nulle pour une entrée en échelon et une réponse apériodique sans dépassement avec un temps de montée t_M .

La fonction de transfert en boucle fermée qui assure ces performances sera donnée par :

$$H_{BF}(s) = \frac{1}{1+sT_0} \quad [1.3.1]$$

avec $T_0 = t_M/2.2$ (voir figure 1.3.1).

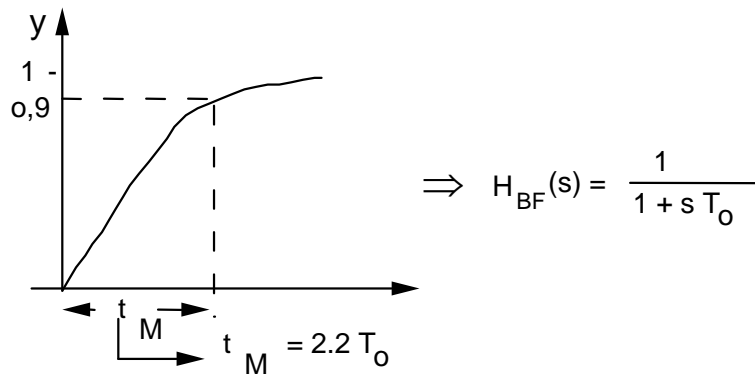


Figure 1.3.1. Spécification des performances par un système du 1^{er} ordre

Le système en boucle fermée avec le régulateur et le procédé est donné dans la figure 1.3.2. A noter que pour obtenir une erreur statique nulle, il faut que le régulateur contienne un intégrateur (voir paragraphe 1.2.3). La fonction de transfert du régulateur sera donc de la forme :

$$H_R(s) = \frac{H_c(s)}{s} \quad [1.3.2]$$

Il s'agit de synthétiser la fonction de transfert $H_c(s)$ de telle sorte que la fonction de transfert en boucle fermée devienne égale à celle donnée par l'équation [1.3.1].

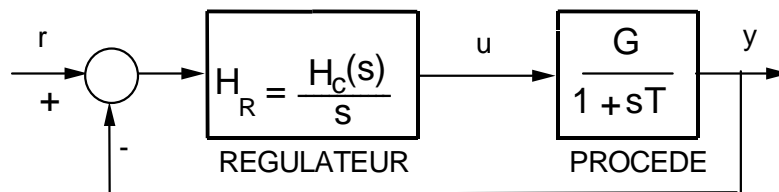


Figure 1.3.2. Synthèse d'un régulateur PI

A partir de la fonction de transfert du régulateur et du procédé, on obtient la fonction de transfert en boucle fermée :

$$H_{BF}(s) = \frac{H_c(s)G}{G H_c(s) + s + s^2 T} = \frac{1}{1 + s T_0} \quad [1.3.3]$$

Pour obtenir un numérateur unitaire, il faut que $H_c(s)G$ soit un facteur commun du dénominateur, c'est-à-dire :

$$H_{BF}(s) = \frac{H_c(s)G}{H_c(s)G(1+sT_0)} \quad [1.3.4]$$

Des équations [1.3.3] et [1.3.4] résulte la condition :

$$H_c(s)G s T_0 = s^2 T + s \quad [1.3.5]$$

qui permet de déterminer $H_c(s)$:

$$H_c(s) = \frac{1}{GT_0}(1+sT) \quad [1.3.6]$$

La fonction de transfert du régulateur s'écrit :

$$H_R(s) = \frac{\frac{1}{GT_0}(1+sT)}{s} = \frac{T}{GT_0} \left[1 + \frac{1}{T s} \right] = K \left[1 + \frac{1}{T_i s} \right] \quad [1.3.7]$$

où $K = T/(GT_0)$ représente le « gain proportionnel » et T_i « l'action intégrale » d'un régulateur PI.

On voit clairement la dépendance des paramètres du régulateur vis-à-vis des performances désirées (T_0) et des paramètres de la fonction de transfert du procédé (G, T).

1.3.2. Régulateur PID

Considérons un procédé décrit par une fonction de transfert du 2^e ordre de la forme :

$$H(s) = \frac{G}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = \frac{b_0}{1+a_1s+a_2s^2} \quad [1.3.8]$$

Les objectifs du système de régulation en boucle fermée sont :

- erreur statique nulle ;

– réponse à un échelon avec un temps de montée t_M et un dépassement maximum M .

Les performances en boucle fermée peuvent être exprimées comme étant la réponse d'un système normalisé du 2^e ordre avec une pulsation naturelle ω_0 et un amortissement ζ qui se déduisent à partir de t_M et M en utilisant les diagrammes donnés dans la figure 1.1.11 (paragraphe 1.1.6) :

$$H_{BF}(s) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\zeta\omega_0 s + s^2} \quad [1.3.9]$$

Le système en boucle fermée est représenté dans la figure 1.3.3.

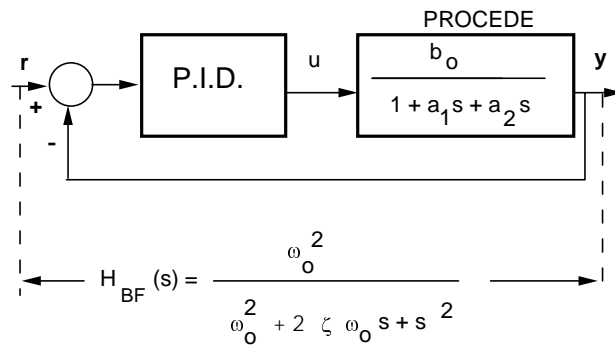


Figure 1.3.3. Boucle de régulation avec régulateur PID

La fonction de transfert d'un type de régulateur PID est donnée par⁶:

$$H_{PID}(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} \right) \quad [1.3.10]$$

où K spécifie le « gain proportionnel », T_i caractérise « l'action intégrale », T_d « l'action dérivée » et $1 + (T_d/N) s$ introduit un filtrage sur l'action dérivée (filtre passe-bas).

6. Ce n'est pas la seule structure possible pour un régulateur PID.

En faisant la somme des trois termes, la fonction de transfert donnée par l'équation [1.3.10] peut être réécrite sous la forme :

$$H_{PID}(s) = \frac{K \left[1 + s \left(T_i + \frac{T_d}{N} \right) + s^2 \left(T_i T_d + \frac{T_i T_d}{N} \right) \right]}{T_i s \left(1 + \frac{T_d}{N} s \right)} \quad [1.3.11]$$

En compensant le dénominateur de la fonction de transfert du procédé par le numérateur de la fonction de transfert du régulateur, on obtient la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$H_{BO}(s) = H(s) \cdot H_{PID}(s) = \frac{Kb_0}{T_i s \left(1 + \frac{T_d}{N} s \right)} \quad [1.3.12]$$

Pour obtenir cette expression de $H_{BO}(s)$, il faut choisir T_i , T_d et N tels que :

$$a_1 = T_i + \frac{T_d}{N}; \quad a_2 = T_i T_d \left(1 + \frac{1}{N} \right). \quad [1.3.13]$$

Avec l'expression [1.3.12] de la fonction de transfert en boucle ouverte, la fonction de transfert en boucle fermée devient :

$$H_{BF}(s) = \frac{Kb_0}{Kb_0 + T_i s + \frac{T_i T_d}{N} s^2} = \frac{\frac{Kb_0 N}{T_i T_d}}{\frac{Kb_0 N}{T_i T_d} + \frac{N}{T_d} s + s^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\zeta\omega_0 s + s^2} \quad [1.3.14]$$

Pour obtenir la fonction de transfert désirée en boucle fermée, il faut donc satisfaire les égalités suivantes :

$$2\zeta\omega_0 = \frac{N}{T_d}; \quad \omega_0^2 = \frac{Kb_0 N}{T_i T_d}; \quad \omega_0 = 2\zeta \frac{Kb_0}{T_i} \quad [1.3.15]$$

Des équations [1.3.13] et [1.3.15], on obtient les valeurs de réglage :

$$T_i = a_1 - \frac{T_d}{N} = a_1 - \frac{1}{2\zeta \omega_0} \quad [1.3.16]$$

$$T_d = \frac{a_2}{T_i} - \frac{T_d}{N} = \frac{a_2}{T_i} - \frac{1}{2\zeta \omega_0} \quad [1.3.17]$$

$$K = \frac{\omega_0 T_i}{2\zeta b_0} \quad [1.3.18]$$

$$\frac{T_d}{N} = \frac{1}{2\zeta \omega_0} \quad [1.3.19]$$

Comme dans le cas de la synthèse du régulateur PI, on voit que les paramètres du régulateur PID, dépendent des performances désirées pour la boucle fermée spécifiées par ω_0 et ζ et des paramètres de la fonction de transfert du procédé (a_1, a_2, b_0) .

1.4. Conclusion

Le comportement des processus à réguler autour d'un point de fonctionnement peut dans la plupart des cas être décrit par un modèle dynamique linéaire. Dans le domaine temporel, les modèles dynamiques linéaires sont décrits par des équations différentielles linéaires. Dans le domaine fréquentiel, ces modèles sont décrits par des fonctions de transfert.

Les systèmes de régulation sont des systèmes en boucle fermée constitués par le processus à réguler, le régulateur et la connexion de contre-réaction. Dans ces systèmes, la commande appliquée au processus est une fonction de l'écart entre la valeur désirée et la valeur mesurée de la variable réglée. Les systèmes de régulation sont caractérisés par un modèle dynamique qui dépend de la structure et des valeurs des coefficients de la fonction de transfert du procédé et du régulateur.

Les performances désirées du système de régulation peuvent être exprimées en termes de caractéristiques du modèle dynamique du système de régulation en boucle fermée (par exemple une fonction de transfert avec des coefficients spécifiés). Ceci permet la synthèse du régulateur si le modèle dynamique du procédé est connu.

Un rôle important dans l'appréciation des qualités d'un régulateur est joué par l'hodographe dans le plan complexe de la fonction de transfert du système en boucle ouverte (régulateur + processus), appelé aussi *lieu de Nyquist*. En particulier, les propriétés de stabilité et de robustesse du système en boucle fermée peuvent être étudiées.

1.5. Bibliographie

- [AST 95] ASTRÖM K.J., HAGGLUND I., *PID Controllers Theory, Design and Tuning*, 2^e édition ISA, Research Triangle Park, N.C., Etats-Unis, 1995.
- [FRA 86] FRANKLIN G., POWELL J.D., *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1986.
- [GIL 67] GILLES J.Ch., DECAULNE P., PELLEGRIN M., *Dynamique de la commande linéaire*, Dunod, Paris, 1967.
- [KUO 91] KUO B.C., *Automatic Control Systems* (6^e édition), Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [LAN 75] LANDAU I.D., *Systèmes non linéaires*, Notes de cours, Laboratoire d'Automatique, ENSIEG, Grenoble, 1975.
- [NAM 73] NARENDRA K.S., TAYLOR J.H., *Frequency Domain Criteria for Absolute Stability*, Academic Press, New York, 1973.
- [OGA 90] OGATA K., *Modern Control Engineering* (2^e édition), Prentice Hall, New Jersey, 1990.
- [SHI 79] SHINSKEY F.G., *Process Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [TAK 70] TAKAHASHI Y., RABINS M., AUSLANDER D., *Control*, Addison-Wesley, Readings, Mass, 1970.
- [VOD 95a] VODA A., LANDAU I.D., « A method for the auto-calibration of PID controllers », *Automatica*, n° 2, 1995.
- [VOD 95b] VODA A., LANDAU I.D., « The auto-calibration of P.I. controllers based on two frequency measurements », *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 9, n° 5, p. 395-422, 1995.
- [ZAM 66] ZAMES G., « On the input-output stability of time-varying non linear feedback systems », *IEEE-TAC*, vol. AC-11, avril, p. 228-238, p. 445-476, juillet 1966.
- [ZIE 42] ZIEGLER J.G., NICHOLS N.B., « Optimum Settings for Automatic Controllers », *Trans. ASME*, vol. 64, p. 759-768, 1942.

Chapitre 2

Systèmes de commande par ordinateur

Dans ce chapitre, nous présentons les éléments et les concepts de base des systèmes de commande par ordinateur. Après l'étude de la discrétisation et du choix de la fréquence d'échantillonnage, on étudie les modèles échantillonnés dans le domaine temporel et fréquentiel, les systèmes échantillonnés en boucle fermée et les principes de calcul des régulateurs numériques.

2.1. Introduction à la commande par ordinateur

La première approche pour introduire un ordinateur numérique ou un microprocesseur dans une boucle de commande-régulation est indiquée dans la figure 2.1.1. L'erreur consigne-sortie mesurée est convertie sous la forme numérique par un convertisseur analogique-numérique (CAN) aux instants d'échantillonnage k définis par l'horloge de synchronisation. Le ordinateur interprète le signal converti $y(k)$ comme une séquence de nombres qu'il traite utilisant un *algorithme de commande* et engendre une nouvelle séquence de nombres $u(k)$ représentant la commande. A l'aide d'un convertisseur numérique-analogique (CNA), cette séquence est convertie en un signal analogique qui est maintenu constant entre les instants d'échantillonnage par un bloqueur d'ordre zéro (BOZ). L'ensemble CAN-ordinateur-CNA est sensé se comporter comme un régulateur analogique (type PID) ce qui implique l'utilisation d'une fréquence d'échantillonnage élevée et l'algorithme mis en œuvre sur le ordinateur est très simple (on n'utilise absolument pas les potentialités du ordinateur numérique !).

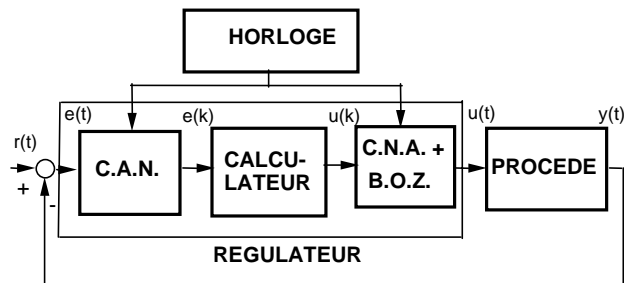


Figure 2.1.1. Réalisation numérique d'un régulateur de type « analogique »

Une deuxième approche, beaucoup plus intéressante pour l'introduction d'un calculateur numérique ou d'un microprocesseur dans une boucle de commande-régulation, est illustrée dans la figure 2.1.2 qui s'obtient à partir du schéma donné dans la figure 2.1.1 en déplaçant le comparateur consigne-sortie mesurée après le convertisseur analogique numérique. La consigne est maintenant spécifiée numériquement à travers le clavier.

Dans la figure 2.1.2 l'ensemble convertisseur numérique/analogique-procédé-convertisseur analogique/numérique est interprété comme un *procédé discrétisé*, dont l'entrée de commande est la séquence $\{u(k)\}$ engendrée par le calculateur, la sortie étant la séquence $\{y(k)\}$ résultant de la conversion analogique/numérique de la sortie du procédé $y(t)$. Ce procédé discrétisé est caractérisé par un *modèle dynamique échantillonné* qui décrit la relation entre la séquence de nombres $\{u(k)\}$ et la séquence de nombres $\{y(k)\}$. Ce modèle est par ailleurs relié au modèle continu du procédé.

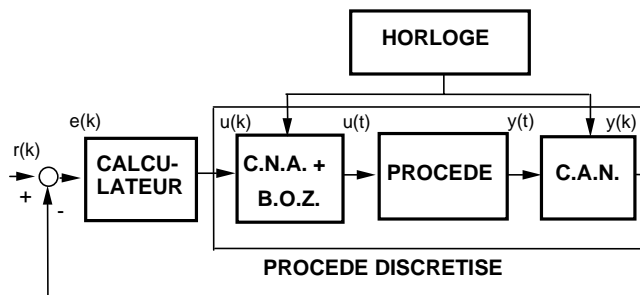


Figure 2.1.2. Systèmes de régulation numérique

Cette approche offre de nombreux avantages dont nous citerons pour le moment les suivants :

1) la fréquence d'échantillonnage est choisie en fonction de la « bande passante » du procédé continu. Ceci conduit à des fréquences d'échantillonnage beaucoup plus basses que dans l'approche précédente (5 à 50 fois plus basses) ;

2) possibilité d'une synthèse directe des algorithmes de commande adaptée aux modèles de procédés discrétisés ;

3) utilisation « intelligente » du ordinateur car l'augmentation sensible de la période d'échantillonnage permet d'utiliser la capacité de calcul pour la mise en œuvre d'algorithmes « intelligents » mais plus complexes qu'un PID et qui nécessitent un temps de calcul plus élevé.

En fait, pour réellement tirer avantage de l'utilisation des microprocesseurs dans les boucles de régulation, il faut aussi changer de « langage » en remplaçant les modèles de procédés continus par des modèles échantillonnés de procédés, les régulateurs continus par des algorithmes de régulation numériques et en rajoutant de « l'intelligence » au niveau de la conception des algorithmes.

Le passage à ce nouveau langage (systèmes dynamiques échantillonnés) ouvre la possibilité de mettre en œuvre différentes stratégies de commande très performantes mais qui ne peuvent pas être mises en œuvre par des régulateurs analogiques. Néanmoins, il est possible dans un certain nombre de cas de remonter aux paramètres du régulateur continu équivalent (par exemple le cas des régulateurs PID).

Les détails du fonctionnement du CAN (convertisseur analogique-numérique), du CNA (convertisseur numérique-analogique) et du BOZ (bloqueur d'ordre zéro) sont illustrés dans la figure 2.1.3.

Le convertisseur analogique-numérique (CAN) effectue deux opérations :

1) échantillonnage du signal continu. Il s'agit du remplacement du signal continu par une séquence de valeurs se succédant à un intervalle constant (période d'échantillonnage), ces valeurs étant égales au signal continu aux instants d'échantillonnage ;

2) quantification. Il s'agit de la représentation de l'amplitude d'un signal par un nombre fini de valeurs distinctes (valeur quantifiée du signal) codées en règle générale en binaire.

Grâce à la généralisation des convertisseurs A/N à haute résolution (codage sur 12 bits ou plus), les effets de la quantification deviennent négligeables, et nous en ferons abstraction par la suite. Ces effets seront pris en compte au chapitre 8.

Le convertisseur numérique-analogique (CNA) transforme un signal discret codé en numérique en un signal continu.

Le bloqueur d'ordre zéro (BOZ), maintient constant ce signal continu entre deux instants de conversion (période d'échantillonnage).

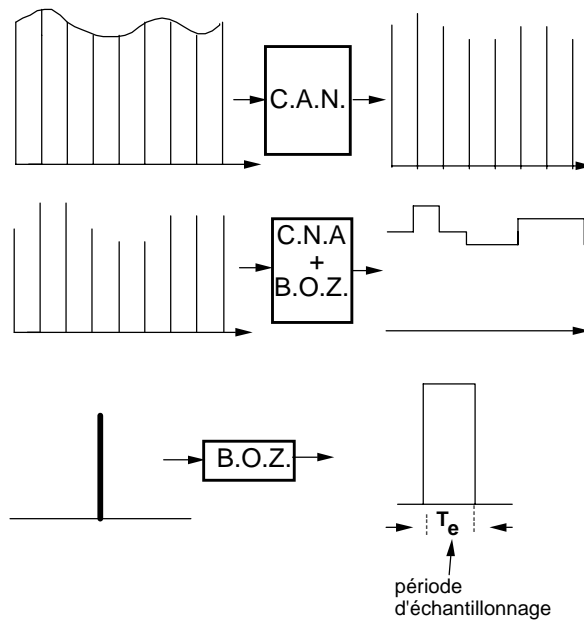


Figure 2.1.3. Fonctionnement du convertisseur-analogique (CAN), du convertisseur numérique-analogique (CNA) et du bloqueur d'ordre zéro (BOZ)

2.2. Discrétisation et fondements des systèmes échantillonnés

2.2.1. Discrétisation et choix de la fréquence d'échantillonnage

Dans la figure 2.2.1 est présentée la discrétisation d'une sinusoïde de fréquence f_0 pour différentes fréquences d'échantillonnage f_e .

On observe que pour une fréquence d'échantillonnage $f_e = 8f_0$, le caractère du signal continu se retrouve dans la séquence échantillonnée.

Pour la fréquence d'échantillonnage $f_e = 2f_0$, si l'échantillonnage se fait à des instants $2\pi f_0 t$ différents des multiples de π , on obtient encore un signal échantillonné

périodique. Mais si l'échantillonnage se fait aux instants où $2\pi f_0 t = n\pi$, la séquence discrétisée correspondante est identiquement nulle.

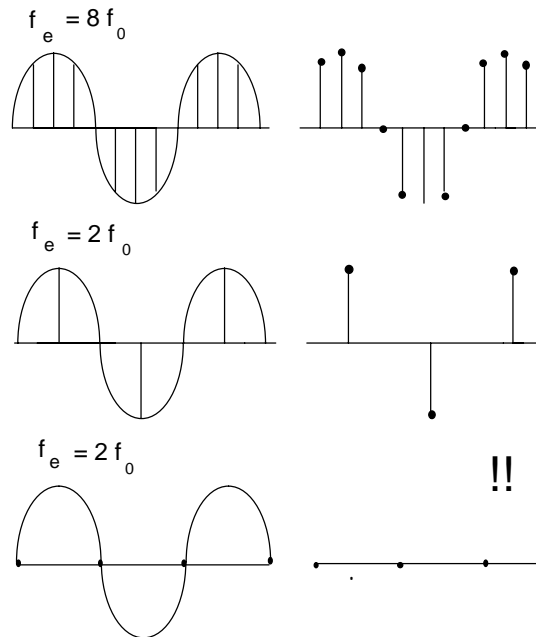


Figure 2.2.1. Discretisation d'un signal sinusoïdal

Si l'on continue à baisser la fréquence d'échantillonnage au dessous de $f_e = 2 f_0$ on voit apparaître un signal échantillonné périodique mais ayant une autre fréquence que le signal continu d'origine ($f = f_e - f_0$).

Pour pouvoir reconstituer un signal continu à partir de la séquence discrétisée, il faut que la fréquence d'échantillonnage vérifie la condition suivante (théorème de Shannon) :

$$f_e > 2 f_{max} \quad [2.2.1]$$

où f_{max} est la fréquence maximum à transmettre. $f_e = 2 f_{max}$ est une limite théorique ; en pratique, il faut choisir une fréquence d'échantillonnage plus grande.

L'existence d'une fréquence maximum qui peut être convertie sans distorsion, pour une fréquence d'échantillonnage donnée, peut aussi se comprendre en observant qu'il s'agit de la « modulation d'amplitude » d'une fréquence

« porteuse » f_e (analogie avec la modulation d'amplitude en radiophonie). L'effet de modulation se traduit par la reproduction du spectre du signal modulant (dans notre cas le signal continu) autour de la fréquence d'échantillonnage et de ses multiples.

Le spectre du signal échantillonné, dans le cas où la fréquence maximale du signal continu (f_{max}) est inférieure à $(1/2)f_e$, est représenté dans la partie du haut de la figure 2.2.2.

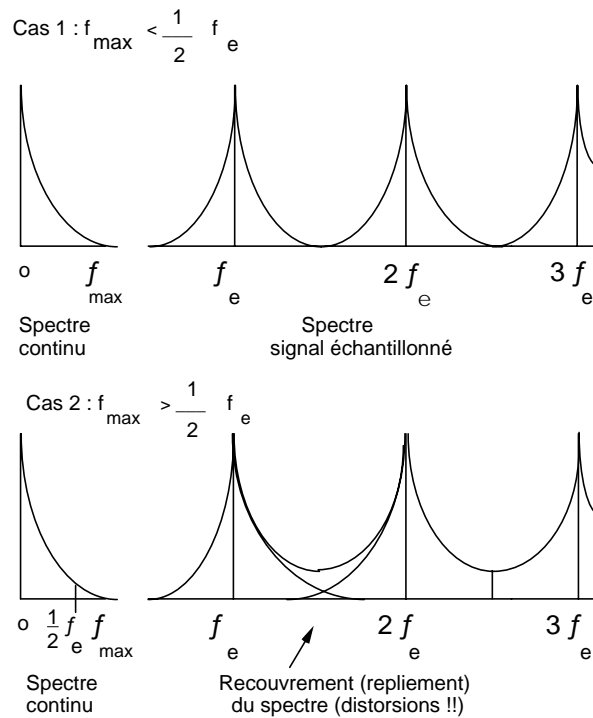


Figure 2.2.2. Spectre d'un signal échantillonné

Le spectre du signal échantillonné dans le cas où $f_{max} > (1/2)f_e$ est représenté dans la partie inférieure de la figure 2.2.2. On observe le phénomène de *recouvrement (repliement) du spectre* qui correspond à l'apparition des distorsions. La fréquence $(1/2)f_e$ qui détermine la fréquence maximum (f_{max}) admise pour un échantillonnage sans distorsions s'appelle la *fréquence de Nyquist* (ou de Shannon).

La fréquence d'échantillonnage étant fixée, pour éviter le repliement du spectre et donc des distorsions, il faut que les signaux analogiques soient filtrés avant échantillonnage pour s'assurer que :

$$f_{\max} < \frac{1}{2} f_e \quad [2.2.2]$$

Les filtres utilisés portent le nom de « filtres antirepliement ». Un bon filtre antirepliement doit avoir un minimum de deux cellules du 2^e ordre en cascade (sauf si $f_{\max} \ll (1/2) f_e$). Un exemple de filtre antirepliement de ce type est donné dans la figure 2.2.3. Ces filtres doivent introduire une atténuation suffisante aux fréquences supérieures à $(1/2) f_e$ mais leur bande passante devra être supérieure à la bande passante qui sera requise pour le système en boucle fermée (généralement supérieure à la bande passante du processus en boucle ouverte).

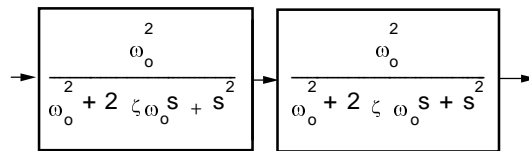


Figure 2.2.3. Filtre antirepliement

Des circuits de ce type (ou plus compliqués) sont disponibles sur le marché (avec des indications sur le choix de ω_0 et ζ en fonction des nombres de cellules).

Dans le cas de l'échantillonnage à une fréquence très basse, les filtres analogiques sont difficiles à réaliser et on fait d'abord une discrétisation à une fréquence plus élevée (suréchantillonnage), multiple entier de la fréquence désirée, en utilisant un filtre antirepliement analogique approprié. Le signal échantillonné ainsi obtenu est passé par un filtre antirepliement numérique suivi d'un diviseur de fréquence donnant ainsi un signal échantillonné ayant la fréquence requise. Cette technique est illustrée dans la figure 2.2.4. Elle s'utilise aussi dans tous les cas où la fréquence d'acquisition des mesures est supérieure à la fréquence d'échantillonnage (sous-multiple de la fréquence d'acquisition) choisie pour la boucle de régulation.

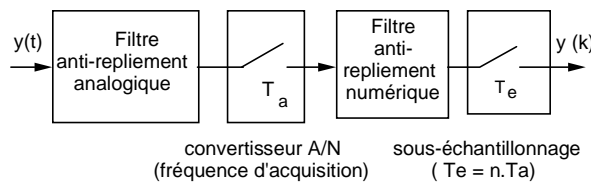


Figure 2.2.4. Filtrage antirepliement avec suréchantillonnage

2.2.2. Choix de la fréquence d'échantillonnage pour l'automatique

Le choix de la fréquence d'échantillonnage pour les systèmes de commande-régulation se fait en fonction de la bande passante désirée pour le système en boucle fermée. Notons que quelle que soit la façon de spécifier les performances désirées, celles-ci peuvent toujours être reliées à la bande passante du système en boucle fermée.

Exemple. Considérons les performances imposées dans le paragraphe 1.1.6 sur la réponse à un échelon (dépassement maximum 5 %, temps de montée 2.75 s). La fonction de transfert à déterminer correspond à la fonction de transfert désirée pour le système en boucle fermée (voir paragraphe 1.3.2). Des diagrammes de la figure 1.1.11 nous avons déduit que la fonction de transfert en boucle fermée doit être une fonction de transfert du 2^e ordre normalisée avec $\zeta = 0.7$ et $\omega_0 = 1 \text{ rad/sec}$. En utilisant immédiatement les diagrammes données dans la figure 1.1.12, nous trouvons que la bande passante du système en boucle fermée est approximativement égale à :

$$f_{BP}^{BF} = \frac{1}{2\pi} \text{ Hz}$$

La règle utilisée pour le choix de la fréquence d'échantillonnage en automatique est la suivante :

$$f_e = (6 \text{ à } 25) f_{BP}^{BF} \quad [2.2.3]$$

où f_e est la fréquence d'échantillonnage et f_{BP}^{BF} la bande passante du système en boucle fermée.

La règle [2.2.3] s'utilise aussi en boucle ouverte quand on souhaite choisir la fréquence d'échantillonnage pour identifier le modèle échantillonné d'un procédé. Dans ce cas f_{BP}^{BF} est remplacé par une estimation de la bande passante du procédé.

A titre indicatif nous donnons dans le tableau 2.2.1 les périodes d'échantillonnage ($T_e = 1/f_e$) utilisées pour la régulation numérique de différents types de procédés.

La règle pour le choix de la fréquence d'échantillonnage donnée dans l'équation [2.2.3] peut être reliée aux paramètres des fonctions de transfert.

TYPE DE VARIABLE (OU PROCÉDÉ)	PÉRIODE D'ÉCHANTILLONNAGE (s)
DEBIT	1-3
NIVEAU	5-10
PRESSION	1-5
TEMPÉRATURE	10-180
DISTILLATION	10-180
ASSERVISSEMENTS	0.001-0.05
REACTEURS CATALYTIQUES	10-45
CIMENTERIES	20-45
SECHAGE	20-45

Tableau 2.2.1. Choix de la période d'échantillonnage pour la régulation numérique de procédés (valeurs indicatives)

Système du 1^{er} ordre

$$H(s) = \frac{1}{1 + sT_0}$$

Dans ce cas la bande passante du système est :

$$f_{BP} = f_0 = \frac{1}{2\pi T_0}$$

une atténuation supérieure à 3 db est introduite à partir de la pulsation $\omega_0 = 1/T_0 = 2\pi f_0$.

En appliquant la règle [2.2.3], on obtient la condition pour le choix de la période d'échantillonnage ($T_e = 1/f_e$) :

$$\frac{T_0}{4} < T_e < T_0 \quad [2.2.4]$$

Ceci correspond à avoir entre 2 à 9 échantillons sur le temps de montée d'une réponse à un échelon.

Système du 2^e ordre

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\zeta \omega_0 s + s^2}$$

La bande passante du système du 2^e ordre dépend de ω_0 et de ζ (voir figure 1.1.12). Par exemple :

$$\zeta = 0.7 \Rightarrow f_{BP} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$\zeta = 1 \Rightarrow f_{BP} = \frac{0.6\omega_0}{2\pi}$$

En appliquant la règle [2.2.3], nous obtenons les relations suivantes entre la pulsation propre ω_0 et la période d'échantillonnage T_e :

$$0.25 \leq \omega_0 T_e \leq 1 \quad ; \quad \zeta = 0.7 \quad [2.2.5]$$

et :

$$0.4 \leq \omega_0 T_e \leq 1.75 \quad ; \quad \zeta = 1 \quad [2.2.6]$$

Les valeurs inférieures correspondent au choix d'une fréquence d'échantillonnage élevée et les valeurs supérieures correspondent au choix d'une fréquence d'échantillonnage basse.

Pour des raisons de simplicité, étant donné qu'en boucle fermée on choisit souvent comme comportement désiré celui d'un deuxième ordre ayant un coefficient d'amortissement ζ compris entre 0.7 et 1, on peut utiliser la règle (approximation de [2.2.5] et [2.2.6]) :

$$0.25 \leq \omega_0 T_e \leq 1.5 \quad ; \quad 0.7 \leq \zeta \leq 1 \quad [2.2.7]$$

2.3. Les modèles échantillonnés

2.3.1. Domaine temporel

Dans la figure 2.3.1 nous avons représenté la réponse d'un type de procédé continu à une entrée en échelon, réponse qui peut être simulée par un système du premier ordre (un intégrateur bouclé tel qu'il est indiqué sur la figure).

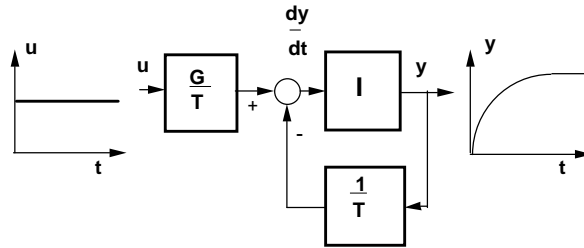


Figure 2.3.1. Modèle continu

Le modèle correspondant est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T} y(t) + \frac{G}{T} u(t) \quad [2.3.1]$$

ou encore par la fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{G}{1 + sT} \quad [2.3.2]$$

où T est la constante de temps du procédé et G le gain.

Si l'on échantillonne l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$ avec une certaine période d'échantillonnage, nous obtenons les représentations de $u(t)$ et $y(t)$ sous la forme de séquences de nombres où t (ou k) maintenant est le *temps discret normalisé* (temps réel divisé par la période d'échantillonnage, $t = t/T_e$). La relation entre la séquence d'entrée $\{u(t)\}$ et la séquence de sortie $\{y(t)\}$ peut être simulée par le schéma donné dans la figure 2.3.2 en utilisant à la place de l'intégrateur un opérateur retard (symbolisé par q^{-1} : $y(t-1) = q^{-1} y(t)$).

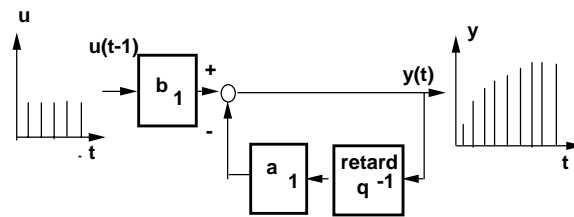


Figure 2.3.2. Modèle échantillonné

Cette relation est décrite par l'algorithme (appelé équation récurrente ou équation aux différences) :

$$y(t) = -a_1 y(t-1) + b_1 u(t-1) \quad [2.3.3]$$

Étudions maintenant plus en détail le modèle échantillonné donné par l'équation [2.3.3] pour une condition initiale nulle ($y(0) = 0$) et une entrée de type échelon discret :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

La réponse se calcule directement en utilisant récursivement l'équation [2.3.3] à partir de $t = 0$ (à la différence des modèles continus, il n'y a pas de problèmes d'intégration dans le cas des modèles échantillonnés). Nous étudierons deux cas.

Cas 1. $a_1 = -0.5$; $b_1 = 0.5$

Les valeurs de la sortie pour différents instants sont données dans le tableau 2.3.1 et la séquence correspondante est représentée dans la figure 2.3.3.

t	0	1	2	3	4	5
y(t)	0	0.5	0.75	0.875	0.937	0.969

Tableau 2.3.1. Réponse d'un système échantillonné du 1^{er} ordre ($a_1 = -0.5$, $b_1 = 0.5$)

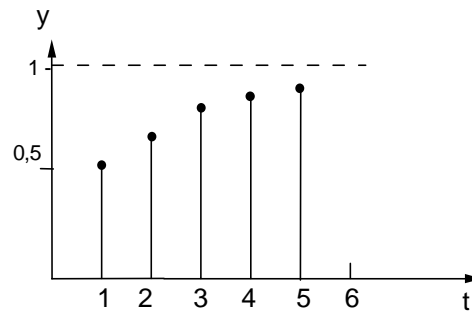


Figure 2.3.3. Réponse d'un système échantillonné du 1^{er} ordre. ($a_1 = -0.5$, $b_1 = 0.5$)

Nous observons que la réponse obtenue a l'allure de la réponse à un échelon d'un premier ordre continu qui aurait été discrétisé. On peut même déterminer une constante de temps équivalente du système échantillonné (le temps de montée de 0 à 90 % : $t_M = 2.2 T$). Du tableau 2.3.1, on obtient alors que :

$$\frac{3T_e}{2.2} < T < \frac{4T_e}{2.2}$$

Cas 2. $a_1 = 0.5$; $b_1 = 1.5$

Les valeurs de la sortie pour différents instants sont données dans le tableau 2.3.2 et la séquence correspondante est représentée dans la figure 2.3.4.

t	0	1	2	3	4	5
y(t)	0	1.5	0.75	1.125	0.937	1.062

Tableau 2.3.2. Réponse d'un système échantillonné du 1^{er} ordre. ($a_1=0.5$; $b_1=1.5$)

On observe une réponse oscillante amortie avec une période égale à deux périodes d'échantillonnage. Ce type de phénomène ne peut résulter de la discrétisation de la réponse d'un premier ordre continu, qui est toujours apériodique. Nous concluons que le modèle échantillonné du premier ordre correspond à la discrétisation d'un système continu du premier ordre seulement si a_1 est négatif¹.

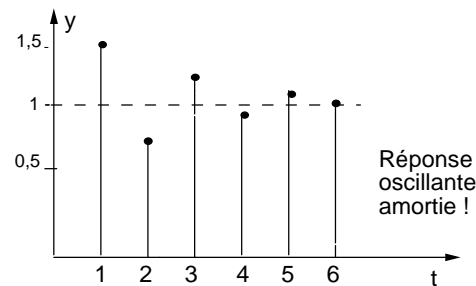


Figure 2.3.4. Réponse d'un système échantillonné du 1^{er} ordre. ($a_1=0.5$; $b_1=1.5$)

Revenons maintenant au formalisme utilisé pour la description des modèles échantillonnés. L'opérateur de retard q^{-1} est utilisé pour une écriture plus compacte des équations récurrentes décrivant les modèles échantillonnés dans le domaine

1. Pour a_1 positif il s'agit en fait de la discrétisation d'un système de 2^e ordre, ayant une fréquence de résonance amortie égale à $0.5f_e$ (voir paragraphe 2.3.2).

temporel (il joue un rôle similaire à l'opérateur $p = d/dt$ pour les systèmes continus). Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} q^{-1}y(t) &= y(t-1) \\ q^{-d}y(t) &= y(t-d) \end{aligned} \quad [2.3.4]$$

En utilisant l'opérateur q^{-1} , l'équation [2.3.3] se réécrit :

$$(1 + a_1 q^{-1})y(t) = b_1 q^{-1}u(t) \quad [2.3.5]$$

Des modèles échantillonnés s'obtiennent aussi par la discrétisation des équations différentielles décrivant des modèles continus. Cette opération est utilisée pour la simulation sur ordinateur numérique des modèles continus.

Considérons l'équation [2.3.1] et approximations la dérivée par :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y(t+T_e) - y(t)}{T_e} \quad [2.3.6]$$

L'équation [2.3.1] s'écrira alors :

$$\frac{y(t+T_e) - y(t)}{T_e} + \frac{1}{T}y(t) = \frac{G}{T}u(t) \quad [2.3.7]$$

En multipliant par T_e les deux membres de l'équation [2.3.7], et en introduisant le temps normalisé $t (= t/T_e)$ on obtient :

$$y(t+1) + \left(\frac{T_e}{T} - 1\right)y(t) = \frac{G}{T}T_e u(t) \quad [2.3.8]$$

qui peut s'écrire encore sous la forme :

$$(1 + a_1 q^{-1})y(t+1) = b_1 u(t) \quad [2.3.9]$$

avec :

$$a_1 = \frac{T_e}{T} - 1 \quad (< 0) \quad ; \quad b_1 = \frac{G}{T}T_e$$

En décalant l'équation [2.3.9] d'un pas on obtient l'équation [2.3.3].

Rappelons que pour que l'équation [2.3.9] puisse représenter un modèle continu du 1^{er} ordre il faut que $a_1 < 0$. On déduit donc que la période d'échantillonnage T_e doit être plus petite que la constante de temps T ($T_e < T$). Ce résultat correspond à la

limite supérieure de la formule [2.2.4] pour le choix de la période d'échantillonnage d'un système du 1^{er} ordre en fonction de sa bande passante.

Si l'équation [2.3.6] correspond à l'approximation de la « dérivée » on peut immédiatement obtenir l'équation de l'intégrateur numérique. En effet, en temps normalisé, l'équation [2.3.6] s'écrit :

$$\frac{d}{dt} y = py \approx y(t) - y(t-1) = (1 - q^{-1})y(t) \quad [2.3.10]$$

où maintenant $(1 - q^{-1})$ est équivalent à p . Comme l'intégration est l'inverse de la dérivation, nous obtenons :

$$s(t) = \int y dt = \frac{1}{p} y \approx \frac{1}{1 - q^{-1}} y(t) \quad [2.3.11]$$

Multipliant par $(1 - q^{-1})$ les deux termes de l'équation [2.3.11], il résulte :

$$s(t) (1 - q^{-1}) = y(t) \quad [2.3.12]$$

qui s'écrit encore :

$$s(t) = s(t-1) + 1 \cdot y(t) \quad [2.3.13]$$

formule qui correspond à l'approximation rectangulaire de l'intégration, illustrée dans la figure 2.3.5 (si l'on utilise le temps continu l'équation [2.3.13] s'écrit $s(t) = s(t-T_e) + T_e \cdot y(t)$).

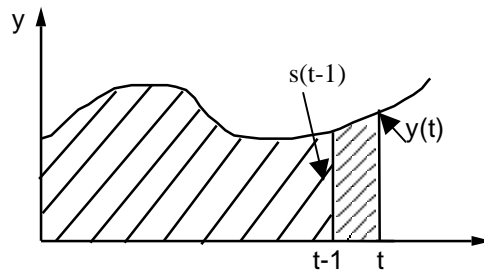


Figure 2.3.5. L'intégration numérique

2.3.2. Domaine fréquentiel

L'étude des modèles continus dans le domaine fréquentiel a été faite en considérant une entrée périodique de type exponentielle complexe :

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

où e^{st} avec $s = \sigma + j\omega$.

Pour l'étude des modèles échantillonnés dans le domaine fréquentiel nous considérons des exponentielles complexes échantillonnées. C'est-à-dire des séquences qui coïncident avec les exponentielles complexes continues aux instants d'échantillonnage $t = k T_e$.

Ces séquences s'écriront donc :

$$e^{j\omega T_e k} ; e^{s T_e k} ; k=1,2,3\dots$$

Les modèles échantillonnés considérés étant linéaires, si un signal d'une certaine fréquence est appliqué à l'entrée, on retrouvera à la sortie un signal de même fréquence mais amplifié ou atténué en fonction de la fréquence. Ceci est résumé dans la figure 2.3.6 où $H(s)$ est la « fonction de transfert » du système décrivant la dépendance du gain et du déphasage en fonction de la fréquence complexe s ($s = \sigma + j\omega$).

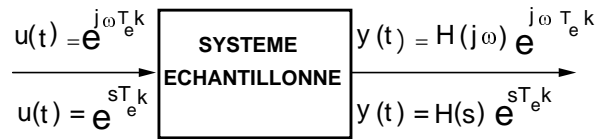


Figure 2.3.6. Réponse fréquentielle d'un système échantillonné

Si l'entrée du système est de la forme $e^{s T_e k}$, la sortie sera donc une séquence de la forme :

$$y(t) = H(s) e^{s T_e k} \quad [2.3.14]$$

et respectivement :

$$y(t-1) = H(s) e^{s T_e (k-1)} = e^{-s T_e} H(s) e^{s T_e k} = e^{-s T_e} y(t) \quad [2.3.15]$$

Nous constatons donc que le décalage d'un pas en arrière est équivalent à la multiplication par $e^{-s T_e}$.

Déterminons maintenant la fonction de transfert associée à l'équation récurrente [2.3.3]. Dans ce cas $u(t) = e^{s T_e k}$ et la sortie sera de la forme [2.3.14]. En utilisant aussi [2.3.15], on obtient :

$$(1 + a_1 e^{-sT_e})H(s)e^{sT_e k} = b_1 e^{-sT_e} e^{sT_e k} \quad [2.3.16]$$

d'où il résulte :

$$H(s) = \frac{b_1 e^{-sT_e}}{1 + a_1 e^{-sT_e}} \quad [2.3.17]$$

Considérons maintenant le changement de variable :

$$z = e^{sT_e} \quad [2.3.18]$$

qui correspond à la transformation du demi-plan gauche du plan s en l'intérieur d'un cercle de rayon unitaire centré à l'origine dans le plan z tel que cela est illustré dans la figure 2.3.7.

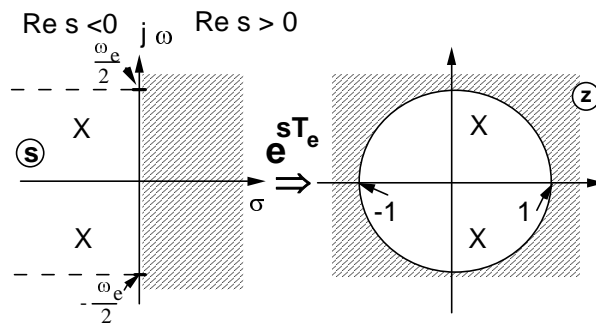


Figure 2.3.7. Effet de la transformation $z = e^{sT_e}$

Avec la transformation [2.3.18] la fonction de transfert donnée par l'équation [2.3.17] devient :

$$H(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \quad [2.3.19]$$

Notons que la fonction de transfert en z^{-1} peut s'obtenir directement de l'équation récurrente [2.3.3] en utilisant l'opérateur de retard q^{-1} , (voir équation [2.3.5]), suivi du calcul de $y(t)/u(t)$ et le remplacement de q^{-1} par z^{-1} . Cette procédure s'applique bien entendu à tous les modèles décrits par des équations récurrentes linéaires à coefficients constants quelle que soit leur complexité. Elle peut aussi s'obtenir en utilisant la *transformée en z* (voir annexe A1, paragraphe A.1.2).

Notons que les fonctions de transfert échantillonnées sont souvent écrites en q^{-1} étant entendu que suivant le contexte la signification de q^{-1} est différente (opérateur de retard ou variable complexe). Dans le cas où q^{-1} est interprétée comme un opérateur de retard, l'expression $H(q^{-1})$ est appelée « opérateur de transfert échantillonné ». A noter que la représentation par opérateur de transfert peut s'utiliser même pour des modèles décrits par des équations récurrentes linéaires et à paramètres variables dans le temps. Par contre, l'interprétation de q^{-1} comme variable complexe (z^{-1}) n'est possible que pour le cas des coefficients constants.

Propriétés de la transformation $z = e^{sT_e}$

La transformation [2.3.18] n'est pas bijective car plusieurs points dans le plan s sont transformés dans le même point dans le plan z . Heureusement, nous nous intéressons uniquement au domaine du plan s compris entre les deux droites horizontales passant par les points $(0, +j\omega_e/2)$ et $(0, -j\omega_e/2)$ où $\omega_e = 2\pi f_e = 2\pi/T_e$. Ce domaine est appelé « bande principale ».

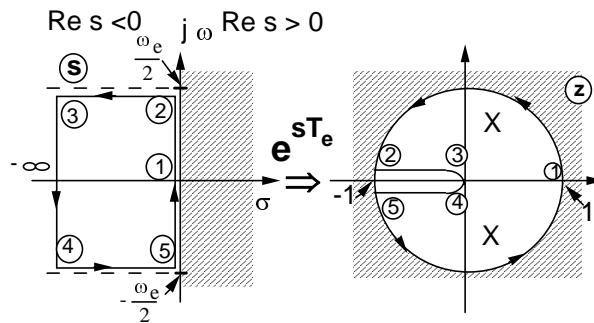


Figure 2.3.8. Effet de la transformation $z = e^{sT_e}$ pour les points situés dans la « bande principale » dans le plan s

Les bandes complémentaires sont à l'extérieur du domaine fréquentiel qui nous intéresse, si les conditions du théorème de Shannon (paragraphe 2.2.1) ont été respectées.

La figure 2.3.8 donne une image plus fine de l'effet de la transformation $z = e^{sT_e}$ pour les points se trouvant dans la « bande principale ».

Un point très important à remarquer est le fait que pour les systèmes continus du 2^e ordre de la forme :

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\zeta\omega_0s + s^2} \quad (\zeta < 1)$$

pour lesquels la pulsation de résonance amortie est égale à la moitié de la pulsation d'échantillonnage :

$$\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} = \omega_e / 2$$

l'image de leur pôles conjugués :

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_0 \pm j \frac{\omega_e}{2}$$

à travers la transformation $z = e^{sT_e}$ correspond à un seul point situé sur l'axe réel dans le plan z et d'abscisse négative.

En effet :

$$z_{1,2} = e^{s_{1,2}T_e} = e^{-\zeta\omega_0T_e} \cdot e^{\pm j\frac{\omega_e}{2}T_e} = e^{-\zeta\omega_0T_e} \cdot e^{\pm j\pi} = -e^{-\zeta\omega_0T_e} = -e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi_e}$$

car :

$$\omega_0 = \frac{\omega_e}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Ceci explique pourquoi les modèles échantillonnés de la forme de l'équation [2.3.3] :

$$(1 + a_1 q^{-1}) y(t) = b_1 q^{-1} u(t)$$

donnent pour $a_1 > 0$ des réponses oscillantes (amorties si $|a_1| < 1$) avec la période $2T_e$ (voir paragraphe 2.3.1). En effet, ces modèles échantillonnés du 1^{er} ordre ont les pôles identiques aux modèles échantillonnés correspondant à des modèles continus du 2^e ordre ayant une pulsation de résonance amortie égale à $\omega_e/2$.

2.3.3. Formes générales des modèles échantillonnés linéaires

Un modèle échantillonné linéaire est décrit dans le cas général par :

$$y(t) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t-i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t-d-i) \quad [2.3.20]$$

où d correspond à un retard pur multiple entier de la période d'échantillonnage.

Introduisons les notations suivantes :

$$1 + \sum_{i=1}^{n_A} a_i q^{-i} = A(q^{-1}) = 1 + q^{-1} A^*(q^{-1}) \quad [2.3.21]$$

$$A^*(q^{-1}) = a_1 + a_2 q^{-1} + \dots + a_{n_A} q^{-n_A+1} \quad [2.3.22]$$

$$\sum_{i=1}^{n_B} b_i q^{-i} = B(q^{-1}) = q^{-1} B^*(q^{-1}) \quad [2.3.23]$$

$$B^*(q^{-1}) = b_1 + b_2 q^{-1} + \dots + b_{n_B} q^{-n_B+1} \quad [2.3.24]$$

En utilisant l'opérateur de retard q^{-1} dans l'équation [2.3.20] et en tenant compte des notations [2.3.21] à [2.3.24], l'équation [2.3.20] décrivant le système échantillonné s'écrit :

$$A(q^{-1}) y(t) = q^{-d} B(q^{-1}) u(t) \quad [2.3.25]$$

ou encore sous la forme prédictive (en multipliant les deux membres par q^d) :

$$A(q^{-1}) y(t+d) = B(q^{-1}) u(t) \quad [2.3.26]$$

L'équation [2.3.25] peut s'écrire encore sous une forme compacte en utilisant l'opérateur de transfert échantillonné :

$$y(t) = H(q^{-1}) u(t) \quad [2.3.27]$$

où l'opérateur de transfert échantillonné est donné par :

$$H(q^{-1}) = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad [2.3.28]$$

La fonction de transfert échantillonnée caractérisant le système décrit par l'équation [2.3.20] s'obtient de l'équation [2.3.28] en remplaçant q^{-1} pour z^{-1} ²

2. L'opérateur de transfert $H(q^{-1})$ peut être utilisé pour une représentation compacte de la relation entrée-sortie même dans le cas où les coefficients de $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ sont variables dans le temps. La fonction de transfert $H(z^{-1})$ n'est définie que pour le cas où les coefficients de $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ sont constants.

$$H(z^{-1}) = \frac{z^{-d} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad [2.3.29]$$

Ordre d'une fonction de transfert échantillonnée

Pour évaluer l'ordre d'un système échantillonné représenté par une fonction de transfert de la forme [2.3.29] il faut utiliser la représentation en puissances positives de z . Si d est le nombre de pas de retard, n_A le degré du polynôme $A(z^{-1})$ et n_B le degré du polynôme $B(z^{-1})$, pour obtenir une fonction de transfert $H(z)$ uniquement en puissances de z positives et *propre*³, il faut multiplier le numérateur et le dénominateur de $H(z^{-1})$ par z^n avec :

$$n = \max(n_A, n_B + d)$$

n représente l'ordre du système échantillonné (la puissance la plus élevée de z dans le polynôme du dénominateur de la fonction de transfert en z).

Exemple 1

$$H(z^{-1}) = \frac{z^{-3}(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})}{1 + a_1 z^{-1}}$$

$$n = \max(1, 5) = 5$$

$$H(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^5 + a_1 z^4}$$

Exemple 2

$$H(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$n = \max(2, 2) = 2$$

$$H(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

A noter que l'ordre n d'une fonction de transfert échantillonnée irréductible correspond aussi au nombre d'états d'une représentation d'état minimale associée à la fonction de transfert.

3. Ayant le degré du dénominateur plus grand ou égal au degré du numérateur.

2.3.4. Stabilité des systèmes échantillonnés

La stabilité des systèmes échantillonnés peut être étudiée soit à partir de l'équation récurrente décrivant le système échantillonné dans le domaine temporel, soit à partir de l'interprétation des solutions des équations récurrentes comme étant des sommes d'exponentielles discrétisées. Nous illustrerons ces deux approches à l'aide d'exemples.

Soit l'équation récurrente :

$$y(t) = -a_1 y(t-1) \quad ; \quad y(0) = y_0 \quad [2.3.30]$$

qui s'obtient de l'équation [2.3.3] quand l'entrée $u(t)$ est identiquement nulle. La réponse libre du système s'écrit :

$$y(1) = -a_1 y_0 \quad ; \quad y(2) = (-a_1)^2 y_0 \quad ; \quad y(t) = (-a_1)^t y_0 \quad [2.3.31]$$

La stabilité asymptotique du système implique :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad [2.3.32]$$

La condition de stabilité asymptotique résulte alors de l'équation [2.3.31]. Il faut que :

$$|a_1| < 1 \quad [2.3.33]$$

D'autre part, on sait que les solutions des équations récurrentes sont de la forme (pour une équation de 1^{er} ordre) :

$$y(t) = K e^{sT_e t} = K z^t \quad [2.3.34]$$

En introduisant cette solution dans l'équation [2.3.30] et en tenant compte de [2.3.15] il résulte :

$$(1 + a_1 e^{-sT_e}) K e^{sT_e t} = (1 + a_1 z^{-1}) K z^t = 0 \quad [2.3.35]$$

d'où l'on obtient :

$$z = e^{sT_e} = e^{(\sigma + j\omega)T_e} = e^{\sigma T_e} e^{j\omega T_e} = -a_1 \quad [2.3.36]$$

Pour que la solution soit asymptotiquement stable, il faut que $\sigma = \text{Re } s < 0$ ce qui implique $e^{\sigma T_e} < 1$ et respectivement $|z| < 1$ (ou $|a_1| < 1$).

Mais $(1 + a_1 z^{-1})$ n'est autre que le dénominateur de la fonction de transfert échantillonnée associée au système décrit par l'équation [2.3.3] (voir équation [2.3.19]).

Le résultat obtenu ci-dessus peut être généralisé. Pour qu'un système échantillonné soit *asymptotiquement stable*, il faut que toutes les racines du dénominateur de la fonction de transfert échantillonnée, c'est-à-dire tous les pôles, soient à l'intérieur du cercle unité (voir figure 2.3.7) :

$$1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} = 0 \Rightarrow |z| < 1 \quad [2.3.37]$$

Inversement, si une ou plusieurs racines du dénominateur de la fonction de transfert se trouvent dans $|z| > 1$ (extérieur du cercle unité), ceci implique $Re s > 0$ et respectivement le système échantillonné sera instable.

Comme dans le cas continu, il existe des critères de stabilité (critère de Jury, critère de Routh-Hurwitz appliqué sur la variable transformée $w = (z + 1)/(z - 1)$) permettant de déterminer l'existence de racines instables d'un polynôme en z sans un calcul explicite des racines [AST 97].

Une aide intéressante pour tester la stabilité d'un polynôme en z , provient d'une *condition nécessaire* pour qu'un polynôme en z^{-1} soit stable. Cette condition est : les évaluations du polynôme $A(z^{-1})$ donné par l'équation [2.3.37] en $z = 1$, $A(1)$ et en $z = -1$ ($A(-1)$) doivent être positives (le coefficient de $A(z^{-1})$ correspondant à z^0 étant supposé positif).

Exemple

$$A(z^{-1}) = 1 - 0.5 z^{-1} \quad (\text{système stable})$$

$$A(1) = 1 - 0.5 = 0.5 > 0 \quad ; \quad A(-1) = 1 + 0.5 = 1.5 > 0$$

$$A(z^{-1}) = 1 - 1.5 z^{-1} \quad ; \quad (\text{système instable})$$

$$A(1) = -0.5 < 0 \quad ; \quad A(-1) = 2.5 > 0$$

2.3.5. Régime stationnaire (gain statique)

Pour les systèmes continus le gain statique s'obtient en faisant $s = 0$ (fréquence nulle) dans la fonction de transfert. Dans le cas discret, $s = 0$, correspond à :

$$s = 0 \Rightarrow z = e^{sT} = 1 \quad [2.3.38]$$

et donc le gain statique $G(0)$ s'obtient en faisant $z = 1$ dans la fonction de transfert échantillonnée. Ainsi pour le cas du système du 1^{er} ordre nous obtenons :

$$G(0) = \left. \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \right|_{z=1} = \frac{b_1}{1 + a_1}$$

Dans le cas général le gain statique est donné par la formule :

$$G(0) = H(1) = \left. H(z^{-1}) \right|_{z=1} = \left. \frac{z^{-d} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \right|_{z=1} = \frac{\sum_{i=1}^{n_B} b_i}{1 + \sum_{i=1}^{n_A} a_i} \quad [2.3.39]$$

Autrement dit, *le gain statique s'obtient comme le rapport entre la somme des coefficients du numérateur et la somme des coefficients du dénominateur*. Cette formule est totalement différente du cas continu, où le gain apparaît comme facteur commun au numérateur (si le dénominateur commence avec 1).

Le gain statique peut s'obtenir aussi à partir de l'équation récurrente, le régime stationnaire étant caractérisé par $u(t) = \text{const.}$ et $y(t) = y(t-1) = y(t-2)...$ De l'équation [2.3.3], on obtient alors :

$$(1 + a_1) y(t) = b_1 u(t)$$

et respectivement :

$$y(t) = \frac{b_1}{1 + a_1} u(t) = G(0)u(t)$$

2.3.6. Modèles échantillonnés des procédés avec bloqueur

Jusqu'à maintenant, on s'est intéressé aux modèles échantillonnés correspondant à la discrétisation des entrées et des sorties d'un système continu. Mais dans un système de commande par ordinateur, la commande du procédé n'est pas continue. Elle est constante entre les instants d'échantillonnage (effet du bloqueur d'ordre zéro) et varie par sauts aux instants d'échantillonnage tel que cela est illustré dans la figure 2.3.9.

Il est important de pouvoir relier le modèle échantillonné du procédé discrétisé, qui donne la relation entre la séquence de commande (produite par le régulateur numérique) et la séquence de sortie (obtenue après le convertisseur analogique numérique), à la fonction de transfert $H(s)$ du procédé continu. Le bloqueur d'ordre zéro dont le fonctionnement est rappelé dans la figure 2.3.10 introduit une fonction de transfert en cascade avec $H(s)$.

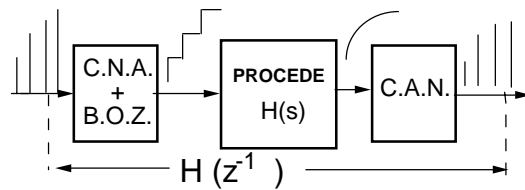


Figure 2.3.9. Commande d'un procédé par l'intermédiaire d'un convertisseur numérique-analogique suivi d'un bloqueur d'ordre zéro

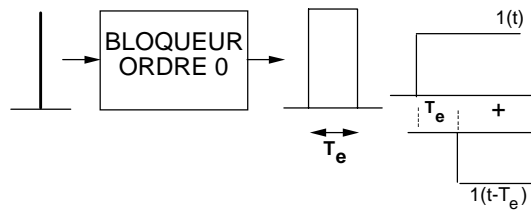


Figure 2.3.10. Fonctionnement du bloqueur d'ordre zéro

Le bloqueur transforme l'impulsion fournie par le convertisseur numérique-analogique à l'instant d'échantillonnage en une impulsion rectangulaire de durée T_e , qui peut être interprétée comme la différence entre un échelon et le même échelon décalé de T_e . L'impulsion fournie par le convertisseur numérique-analogique étant une bonne approximation de l'impulsion de Dirac, et l'échelon étant l'intégrale de l'impulsion de Dirac, il résulte que la fonction de transfert du bloqueur d'ordre zéro sera :

$$H_{BOZ}(s) = \frac{1 - e^{-sT_e}}{s} \tag{2.3.40}$$

L'équation [2.3.40] permet d'interpréter le bloqueur d'ordre zéro comme un filtre ayant une caractéristique fréquentielle donnée par :

$$H_{BOZ}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{j\omega} = T_e \frac{\sin(\omega T_e / 2)}{\omega T_e / 2} e^{-j\omega \frac{T_e}{2}}$$

De l'examen de cette équation dans la zone de fréquences : $0 \leq f \leq f_e / 2$ ($0 \leq \omega \leq \omega_e / 2$), on tire les conclusions suivantes :

1) le gain du BOZ à fréquence nulle est égal à : $G_{BOZ}(0) = T_e$;

2) le BOZ introduit une atténuation en hautes fréquences. Pour $f = f_e / 2$ on a $G(f_e / 2) = \frac{2}{\pi} T_e = 0.637 T_e$ (-3.92 dB) ;

3) le BOZ introduit un déphasage croissant avec la fréquence. Ce déphasage varie de 0 (pour $f = 0$) à $-\pi / 2$ (pour $f = f_e / 2$). Il résulte que les systèmes avec bloqueur vont toujours introduire un déphasage supérieur à $-\pi / 2$ pour $f = f_e / 2$ car se rajoute le déphasage introduit par $H(s)$. La fonction de transfert continue globale sera :

$$H'(s) = \frac{1 - e^{-sT_e}}{s} H(s) \quad [2.3.41]$$

à laquelle va correspondre une fonction de transfert échantillonnée.

Des tables existent pour la discrétisation des fonctions de transfert avec bloqueur d'ordre zéro. Quelques situations typiques sont résumées dans le tableau 2.3.3.

Le progiciel WinREG (Adaptech) permet de calculer le modèle échantillonné pour des fonctions de transfert $H(s)$ du premier et deuxième ordre avec bloqueur.

Le calcul des modèles échantillonnés pour des fonctions de transfert de différent ordres avec bloqueur peut être effectué avec les fonctions : *cont2disc.sci* (Scilab) ou *cont2disc.m* (Matlab). Pour trouver le correspondant échantillonné (avec bloqueur d'ordre zéro) d'un système de 2^e ordre caractérisé par ω_0 et ζ on peut utiliser les fonctions : *ft2pol.sci* (Scilab) ou *ft2pol.m* (Matlab).

2.3.7. Etude du système du 1^{er} ordre avec retard

Le modèle continu est caractérisé par la fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{G e^{-s\tau}}{1 + Ts} \quad [2.3.42]$$

où G est le gain, T la constante de temps et τ le retard pur. Si T_e est la période d'échantillonnage, alors le retard τ s'exprime :

$$\tau = d T_e + L \quad ; \quad 0 < L < T_e \quad [2.3.43]$$

où L est le retard fractionnaire et d est le nombre entier de périodes d'échantillonnage compris dans le retard et correspondant à un retard échantillonné de d -périodes. Du tableau 2.3.3, on déduit la fonction de transfert du modèle échantillonné correspondant (en présence d'un bloqueur d'ordre zéro) :

$$H(z^{-1}) = \frac{z^{-d}(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})}{1 + a_1 z^{-1}} = \frac{z^{-d-1}(b_1 + b_2 z^{-1})}{1 + a_1 z^{-1}} \quad [2.3.44]$$

où :

$$a_1 = -e^{-\frac{T_e}{T}} ; \quad b_1 = G(1 - e^{-\frac{L-T_e}{T}}) ; \quad b_2 = Ge^{-\frac{T_e}{T}}(e^{\frac{L}{T}} - 1)$$

$H(s)$	$H(z^{-1})$
$\frac{1}{s}$	$\frac{T_e z^{-1}}{1 - z^{-1}}$
$\frac{G}{1 + sT}$	$\frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} ; \quad b_1 = G(1 - e^{-T_e/T}) ; \quad a_1 = -e^{-T_e/T}$
$\frac{Ge^{-sL}}{1 + sT} \quad L < T_e$	$\frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1}} ; \quad b_1 = G(1 - e^{-(L-T_e)/T}) ;$ $b_2 = Ge^{-T_e/T}(e^{L/T} - 1) ; \quad a_1 = -e^{-T_e/T}$
$\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\zeta\omega_0 s + s^2}$ $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} ;$ $\zeta < 1$	$\frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$ $b_1 = 1 - \alpha \left(\beta + \frac{\zeta\omega_0}{\omega} \partial \right) ; \quad b_2 = \alpha^2 + \alpha \left(\frac{\zeta\omega_0}{\omega} \partial - \beta \right)$ $a_1 = -2\alpha\beta ; \quad a_2 = \alpha^2$ $\alpha = e^{-\zeta\omega_0 T_e} ; \quad \beta = \cos(\omega T_e) ; \quad \partial = \sin(\omega T_e)$

Tableau 2.3.3. Discrétisation d'un procédé avec bloqueur d'ordre zéro

L'effet du retard fractionnaire se traduit par l'apparition du coefficient b_2 dans la fonction de transfert. En effet pour $L = 0$, $b_2 = 0$. Par contre, si $L = T_e$, $b_1 = 0$, ce qui se traduit par un retard supplémentaire d'une période d'échantillonnage. Pour $L > 0.5T_e$, $b_2 > b_1$. En d'autres termes, le retard fractionnaire introduit un zéro dans la fonction de transfert échantillonnée. Pour $L > 0.5 T_e$ on a $|b_2| > |b_1|$ et le zéro est à l'extérieur du cercle unité (zéro instable)⁴.

La configuration pôles-zéros dans le plan z pour le système du 1^{er} ordre avec bloqueur est représentée dans la figure 2.3.11. Le terme z^{-d-1} introduit $d+1$ pôles à l'origine [$H(z) = (b_1z + b_2) / z^{d+1} (z + a_1)$].

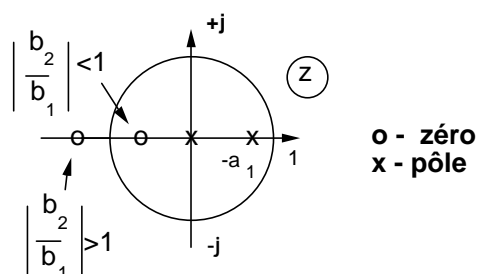


Figure 2.3.11. Configuration pôles-zéros pour le système échantillonné de l'équation [2.3.44] (premier ordre avec bloqueur)

La figure 2.3.12 représente les réponses à un échelon pour un système caractérisé par la fonction de transfert échantillonnée :

$$H(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \quad [2.3.45]$$

avec $\frac{b_1}{1 + a_1} = 1$ (gain statique = 1) pour différentes valeurs du paramètre a_1 :

$$a_1 = -0.2 ; -0.3 ; -0.4 ; -0.5 ; -0.6 ; -0.7 ; -0.8 ; -0.9$$

A partir de ces courbes, il est facile de trouver la constante de temps d'un système continu équivalent exprimée en périodes d'échantillonnages (la constante de temps est égale au temps nécessaire pour atteindre 63 % de la valeur finale).

4. Ceci n'a pas d'influence sur la stabilité du système, mais imposera des restrictions quant à l'utilisation des méthodes de calcul des régulateurs basées sur la simplification des zéros du modèle de procédé par des pôles du régulateur.

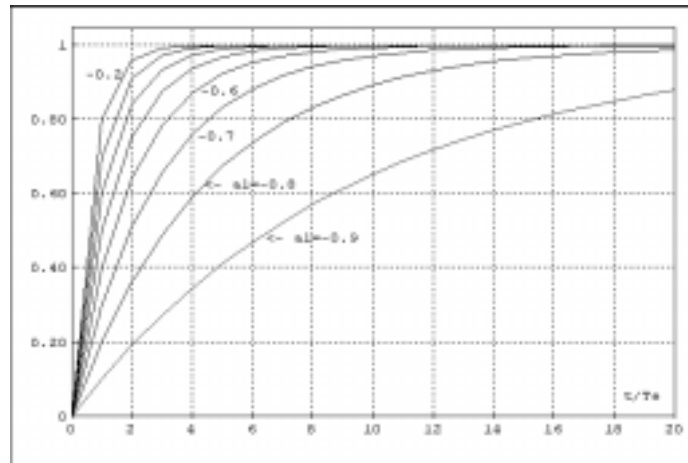


Figure 2.3.12. Réponses à un échelon du système échantillonné $b_i z^{-1} / (1 + a_i z^{-1})$ pour différentes valeurs de a_i et $[b_i / (1 + a_i)] = 1$

La présence d'un retard pur correspondant à un nombre entier de périodes d'échantillonnage conduit tout simplement à un décalage dans le temps des réponses données dans la figure 2.3.12. La présence d'un retard fractionnaire conduit essentiellement à la modification de la zone de démarrage de la réponse à un échelon par rapport au cas sans retard fractionnaire.

Exercice. Soit le modèle échantillonné :

$$y(t) = -0.6 y(t-1) + 0.2 u(t-1) + 0.2 u(t-2)$$

Quel est le modèle continu correspondant ?

Il est intéressant d'examiner le lien entre la position du pôle du système ($z = -a_1$) et le temps de réponse du système. Plus le pôle se rapproche de l'origine, plus le système est rapide. Inversement quand le pôle du système se rapproche du point $[1, j0]$ la réponse du système se ralentit (voir figure 2.3.12) et son comportement se rapproche de celui de l'intégrateur (qui correspond à $a_1 = -1$). Ces conclusions restent valables même pour les systèmes ayant plusieurs pôles.

Pour les systèmes ayant plusieurs pôles, on utilise souvent le terme « pôle(s) dominant(s) » pour les pôles (ou le pôle) qui sont les plus proches du point $(1, 0)$, c'est à dire ceux qui sont les plus lents.

La figure 2.3.13 présente les caractéristiques fréquentielles (gain et phase) du système du 1^{er} ordre échantillonné donné par l'équation [2.3.45] pour $a_1 = -0.8$;

– 0.5 ; – 0.3. On observe que la bande passante augmente quand le pôle du système se rapproche de l'origine (pôle plus rapide). On observe aussi que le déphasage de la fréquence $0.5f_e$ est de 180° à cause de la présence du BOZ (voir paragraphe 2.3.6).

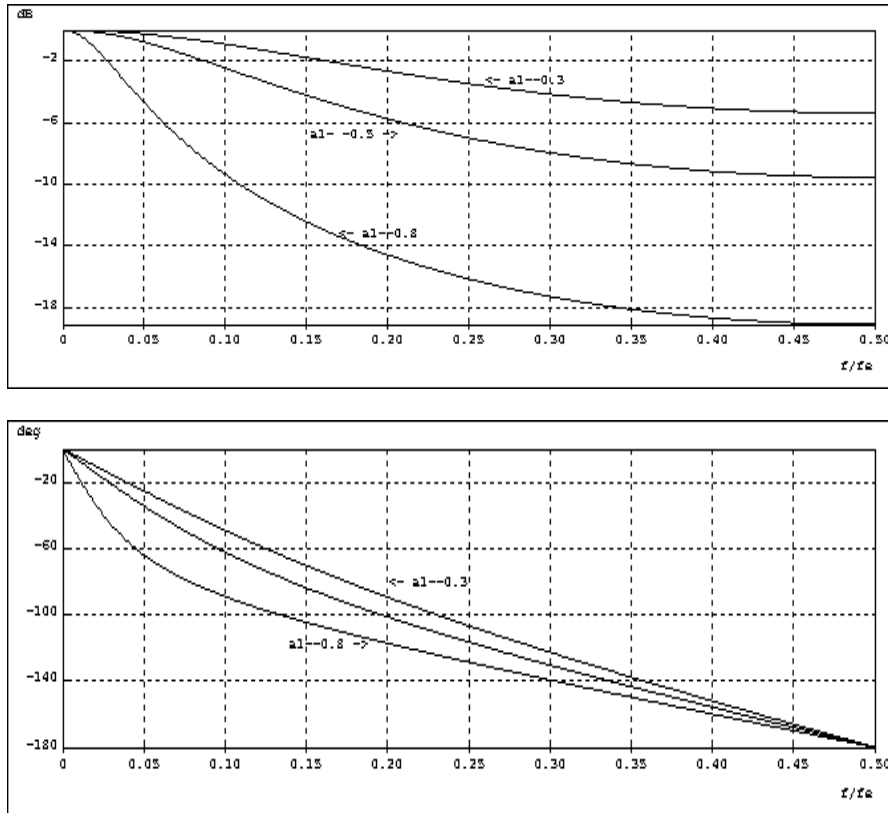


Figure 2.3.13. Caractéristiques fréquentielles (gain et phase) du système échantillonné $b_1z^{-1}/(1 + a_1z^{-1})$ pour différentes valeurs de a_1 et b_1

2.3.8. Etude du système du 2^e ordre

La fonction de transfert échantillonnée correspondant à la discrétisation avec bloqueur d'un système du 2^e ordre normalisé caractérisé par une pulsation naturelle ω_0 et un amortissement ζ avec bloqueur est donnée par :

$$H(z^{-1}) = \frac{z^{-d}(b_1z^{-1} + b_2z^{-2})}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \quad [2.3.46]$$

où d représente le nombre entier de périodes d'échantillonnage contenues dans le retard. Les valeurs de a_1 , a_2 , b_1 , b_2 en fonction de ω_0 et ζ pour un retard $\tau = d.T_e$ sont données dans le tableau 2.3.3.

Il est intéressant d'étudier comment sont situés les pôles du système discrétisé en fonction de ω_0 , ζ et de la période d'échantillonnage T_e (ou de la fréquence d'échantillonnage f_e).

Du tableau 2.3.3, nous obtenons (pour $\zeta < 1$) :

$$\begin{aligned} a_1 &= -2e^{-\zeta\omega_0 T_e} \cos \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} T_e = -e^{-\zeta\omega_0 T_e} (e^{j\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} T_e} + e^{-j\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} T_e}) \\ a_2 &= -e^{-2\zeta\omega_0 T_e} \end{aligned}$$

Les pôles de la fonction de transfert échantillonnée (racines du dénominateur) sont donnés par les solutions de l'équation :

$$z^2 + a_1 z + a_2 = (z - z_1)(z - z_2) = 0$$

En tenant compte de la forme des expressions de a_1 et a_2 , on obtient immédiatement :

$$z_{1,2} = e^{-\zeta\omega_0 T_e \pm j\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} T_e}$$

Observons que les pôles du système discrétisé correspondent aux pôles du système continu $s_{1,2} = \zeta\omega_0 \pm j\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}$ transformés par $z = e^{sT_e}$.

Pour $\zeta < 1$, les pôles du système discrétisé sont complexes conjugués et donc symétriques par rapport à l'axe réel. Ils sont caractérisés par un module et une phase donnés par :

$$\begin{aligned} |z_{1,2}| &= e^{-\zeta\omega_0 T_e} = e^{-2\pi\zeta \frac{f_0}{f_e}} = e^{-2\pi\zeta \frac{\omega_0}{\omega_e}} \\ \angle z_{1,2} &= \pm \sqrt{1-\zeta^2} \omega_0 T_e = \pm 2\pi \sqrt{1-\zeta^2} \frac{f_0}{f_e} = \pm 2\pi \sqrt{1-\zeta^2} \frac{\omega_0}{\omega_e} \end{aligned}$$

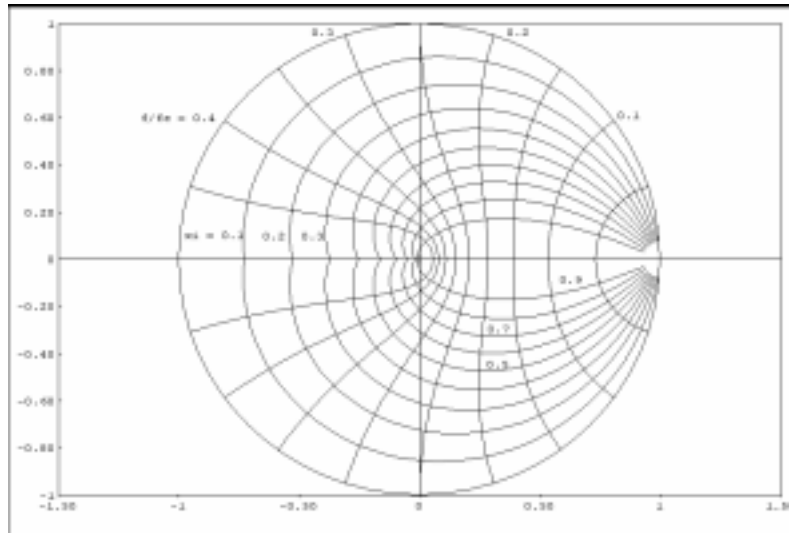


Figure 2.3.14. Courbes $\zeta = x_i = \text{constant}$ et $\frac{\omega_0 T_e}{2\pi} = \frac{f_0}{f_e} = \text{constant}$ dans le plan z pour le système de deuxième ordre

On observe que la position des pôles est fonction de ζ et de $\omega_0 T_e$ (respectivement de ω_0/ω_e ou f_0/f_e avec un facteur de proportionnalité 2π). C'est-à-dire :

$$z = f(\zeta, \omega_0 T_e / 2\pi) = f(\zeta, f_0/f_e)$$

et on peut tracer dans le plan z les courbes :

$$z = f(\omega_0 T_e / 2\pi) = f(f_0/f_e) \text{ pour } \zeta = \text{constant}$$

et :

$$z = f(\zeta) \text{ pour } \omega_0 T_e / 2\pi = f(f_0/f_e) = \text{constant}$$

Rappelons (voir figure 1.1.9) que dans le plan s (système continu) les courbes $\zeta = \text{constant}$ sont des droites faisant un angle $\theta = \cos^{-1} \zeta$ avec l'axe réel et les courbes $\omega_0 = \text{constant}$ sont des cercles de rayon ω_0 (ces deux familles de courbes sont orthogonales). Dans le plan z les courbes $z = f(\omega_0 T_e)$ pour $\zeta = \text{constant}$ sont des spirales logarithmiques qui en chaque point sont orthogonales aux courbes $z = f(\zeta)$ pour $\omega_0 T_e = \text{constant}$.

La figure 2.3.14 donne les familles de courbes $z = f(\zeta)$ pour $\omega_0 T_e/2\pi = \text{constant}$ et $z = f(\omega_0 T_e/2\pi)$ pour $\zeta = \text{constant}$ correspondant à différentes valeurs de ζ et $\omega_0 T_e/2\pi$ (respectivement f_0/f_e).

Rappelons aussi (voir paragraphe 2.3.2) que pour $f_0/f_e = \omega_0/\omega_e = 1/(2\sqrt{1-\zeta^2})$, les pôles correspondants dans le plan z se confondent ($\angle z_{1,2} = \pm\pi$) et ils se situent sur le segment de l'axe réel $(-1,0)$, l'abscisse de ces pôles étant $-e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$.

Le domaine de stabilité du système du 2^e ordre échantillonné dans le plan des paramètres $a_1 - a_2$ est un triangle (voir figure 2.3.15).

Pour les valeurs de a_1, a_2 situées à l'intérieur du triangle, les racines du dénominateur de la fonction de transfert sont à l'intérieur du cercle unité.

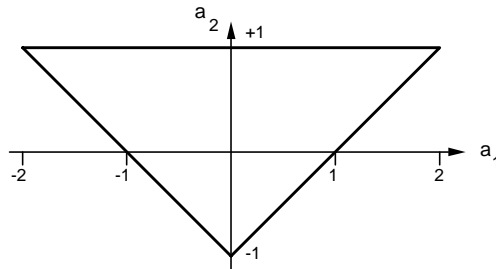


Figure 2.3.15. Domaine de stabilité pour le système échantillonné du 2^e ordre

2.4. Systèmes échantillonnés en boucle fermée

2.4.1. Fonction de transfert du système en boucle fermée

La figure 2.4.1 donne le schéma d'un système échantillonné en boucle fermée. La fonction de transfert sur la voie directe peut résulter de la mise en cascade d'un correcteur (régulateur) numérique et d'un ensemble : CNA + BOZ + procédé continu + CAN (procédé discrétisé).

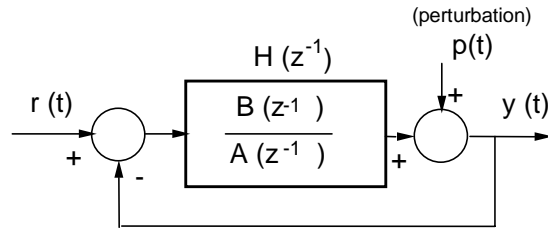


Figure 2.4.1. *Système échantillonné en boucle fermée*

Soit :

$$H(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad [2.4.1]$$

la fonction de transfert de la voie directe avec :

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{n_B} z^{-n_B} \quad [2.4.2]$$

les coefficients b_1, b_2, \dots, b_d pouvant être nuls s'il y a un retard pur.

De façon similaire au cas continu, la fonction de transfert en boucle fermée qui relie la consigne $r(t)$ à la sortie $y(t)$ s'écrit :

$$H_{BF}(z^{-1}) = \frac{H(z^{-1})}{1 + H(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1}) + B(z^{-1})} \quad [2.4.3]$$

Le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée dont les racines correspondent aux pôles du système en boucle fermée est aussi appelé *polynôme caractéristique de la boucle fermée*.

2.4.2. Erreur statique

Le régime statique s'obtient pour $r(t) = \text{constant}$ en faisant $z = 1$ qui correspond à une fréquence nulle ($z = e^{sT} = 1$ pour $s = 0$). Il résulte de [2.4.3] :

$$y = H_{BF}(1)r = \frac{\sum_{i=1}^{n_B} b_i}{A(1) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i} r \quad [2.4.4]$$

où $H_{BF}(I)$ est le gain statique (stationnaire) de la boucle fermée. Pour obtenir une erreur statique nulle entre la consigne r et la sortie y , il faut :

$$H_{BF}(I) = I \quad [2.4.5]$$

De l'équation [2.4.4], il résulte les conditions :

$$\sum_{i=1}^{n_B} b_i \neq 0 \text{ et } A(1) = 0 \quad [2.4.6]$$

Pour obtenir $A(1) = 0$, $A(z^{-1})$ doit avoir la structure suivante :

$$A(z^{-1}) = (1 - z^{-1}) \cdot A'(z^{-1}) \quad [2.4.7]$$

où :

$$A'(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_A} z^{-n_A} \quad [2.4.8]$$

et donc la fonction de transfert globale de la voie directe doit être de la forme :

$$H(z^{-1}) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{B(z^{-1})}{A'(z^{-1})} \quad [2.4.9]$$

On voit donc que *la voie directe doit contenir un intégrateur numérique* pour obtenir une *erreur statique nulle* en boucle fermée.

Cette situation est similaire au cas continu (voir paragraphe 1.2.3) et *le principe du modèle interne* s'applique aussi dans le cas des systèmes échantillonnés.

2.4.3. Rejet des perturbations

En présence d'une perturbation $p(t)$ agissant sur la sortie à réguler (voir figure 2.4.1), on souhaite que son effet soit le plus faible possible, au moins dans certaines bandes de fréquences.

En particulier, on souhaite que l'effet d'une perturbation constante (en échelon), appelée souvent « perturbation de charge », soit nulle en régime stationnaire ($t \rightarrow \infty$, $z \rightarrow I$).

La fonction de transfert échantillonnée qui relie la perturbation à la sortie s'écrit :

$$S_{yp}(z^{-1}) = \frac{1}{1 + H(z^{-1})} = \frac{A(z^{-1})}{A(z^{-1}) + B(z^{-1})}$$

Comme dans le cas continu, $S_{yp}(z^{-1})$ porte le nom de « fonction de sensibilité perturbation-sortie ». Le régime stationnaire correspond à $z = 1$. Il résulte que :

$$y = S_{yp}(1) p = \frac{A(1)}{A(1) + B(1)} p$$

où p est la valeur stationnaire de la perturbation.

Pour avoir une réjection parfaite de la perturbation en régime stationnaire il faut que $S_{yp}(1) = 0$ et donc $A(1) = 0$. Cela implique donc que $A(z^{-1})$ doit avoir la structure donnée dans l'équation [2.4.7], ce qui correspond à la présence d'un *intégrateur* dans la voie directe.

Comme dans le cas continu, pour avoir un rejet parfait d'une perturbation en régime stationnaire, la voie directe doit contenir *le modèle interne* de la perturbation (la fonction de transfert qui engendre $p(t)$ à partir d'une impulsion de Dirac).

Mais, comme dans le cas continu, il faut s'assurer qu'il n'y ait pas une amplification de l'effet de la perturbation dans certaines bandes de fréquences. C'est la raison pour laquelle il faut imposer que le module de $|S_{yp}(e^{-j\omega})|$ soit plus petit qu'une certaine valeur à toutes les fréquences $f = \omega/2\pi \leq f_e/2$. Une valeur typique pour cette condition est :

$$|S_{yp}(e^{-j\omega})| \leq 2 \quad 0 \leq \omega \leq \pi f_e$$

On peut aussi être amené, si on sait qu'une perturbation a son énergie concentrée dans une certaine bande de fréquences, à imposer que $|S_{yp}(e^{j\omega})|$ introduise une atténuation imposée dans cette bande de fréquences.

2.5. Principes des méthodes modernes de calcul des régulateurs numériques

2.5.1. Structure des régulateurs numériques

La figure 2.5.1 donne le schéma d'un régulateur analogique de type PI. Le régulateur contient deux voies (une voie proportionnelle et une voie intégrale) qui traitent l'erreur entre la consigne et la sortie.

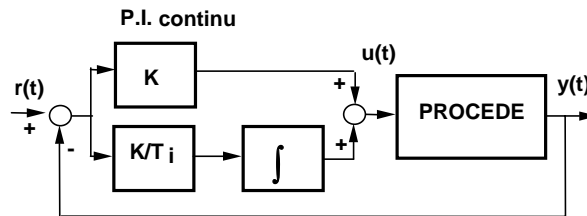


Figure 2.5.1. Schéma d'une régulation analogique PI

Dans le cas échantillonné, le régulateur est numérique, et les seules opérations qu'il peut faire sont l'addition, la multiplication, la mémorisation et le décalage. Tous les algorithmes de régulation numérique ont la même structure. Seule « la mémoire » du régulateur change, c'est-à-dire le nombre des coefficients.

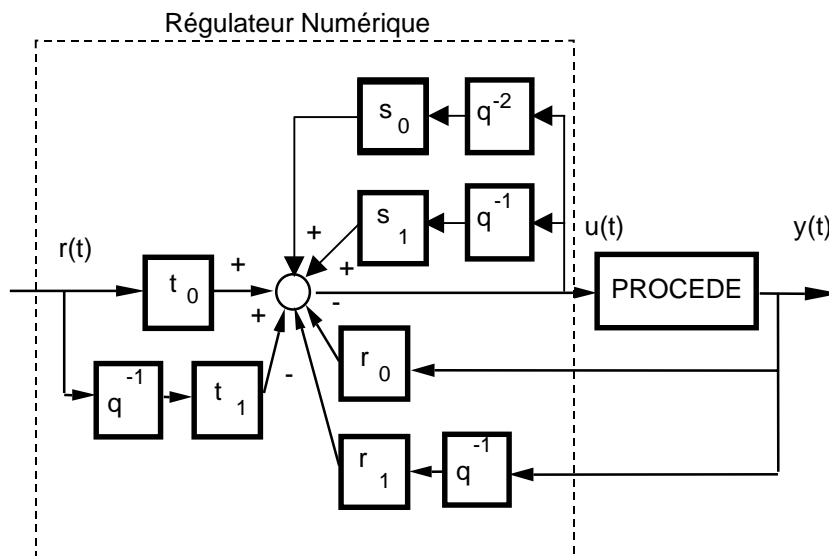


Figure 2.5.2. Régulateur numérique

La figure 2.5.2 illustre la structure du calcul de la commande $u(t)$ appliquée au procédé à l'instant t par le régulateur numérique. Cette commande est une moyenne pondérée, par les coefficients du régulateur, de la sortie mesurée aux instants t , $t - 1$, ..., $t - n_A$, ..., des valeurs précédentes de la commande aux instants $t - 1$, $t - 2$, ..., $t - n_B$, ... et de la consigne aux instants t , $t - 1$, ...

Ce type de loi de commande s'obtient même lors de la discrétisation des régulateurs analogiques PI ou PID. Nous considérons, à titre d'exemple, la discrétisation d'un régulateur PI. La loi de commande pour le régulateur PI analogique représenté dans la figure 2.5.1 est donnée par :

$$u(t) = K \left[1 + \frac{1}{pT_i} \right] [r(t) - y(t)] \quad [2.5.1]$$

Pour la discrétisation du régulateur PI, on approxime p (l'opérateur de dérivation) par $(1 - q^{-1})/T_e$ (voir paragraphe 2.3.1, équation [2.3.6]). On a alors :

$$\frac{dx}{dt} = px \approx \frac{x(t) - x(t-1)}{T_e} = \frac{1 - q^{-1}}{T_e} x(t) \quad [2.5.2]$$

$$\int x dt = \frac{1}{p} x \approx \left[\frac{T_e}{1 - q^{-1}} \right] x(t) \quad [2.5.3]$$

et l'équation du régulateur PI devient :

$$u(t) = \frac{K(1 - q^{-1}) + \frac{KT_e}{T_i}}{1 - q^{-1}} [r(t) - y(t)] \quad [2.5.4]$$

En multipliant les deux membres de l'équation [2.5.4] par $(1 - q^{-1})$, l'équation du régulateur PI numérique s'écrit :

$$S(q^{-1}) u(t) = T(q^{-1}) r(t) - R(q^{-1}) y(t) \quad [2.5.5]$$

où :

$$S(q^{-1}) = 1 - q^{-1} = 1 + s_1 q^{-1} \quad (s_1 = -1) \quad [2.5.6]$$

$$R(q^{-1}) = T(q^{-1}) = K(1 + T_e/T_i) - K q^{-1} = r_0 + r_1 q^{-1} \quad [2.5.7]$$

qui conduit au schéma représenté dans la figure 2.5.3.

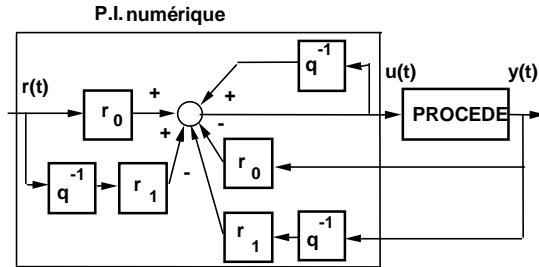


Figure 2.5.3. Régulateur PI numérique

En tenant compte de l'expression de $S(q^{-1})$, la commande $u(t)$ se calcule à partir de l'équation [2.5.5], avec la formule :

$$\begin{aligned}
 u(t) &= u(t-1) - R(q^{-1}) y(t) + T(q^{-1}) r(t) \\
 &= u(t-1) - r_0 y(t) - r_1 y(t-1) + r_0 r(t) + r_1 r(t-1)
 \end{aligned}
 \tag{2.5.8}$$

qui correspond bien au schéma donné dans la figure 2.5.3.

2.5.2. Structure canonique des régulateurs numériques

En divisant par $S(q^{-1})$ les deux membres de l'équation [2.5.5], on obtient :

$$u(t) = -\frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})} y(t) + \frac{T(q^{-1})}{S(q^{-1})} r(t)
 \tag{2.5.9}$$

qui conduit à la structure canonique des régulateurs numériques représentée dans la figure 2.5.4 (structure à trois branches R-S-T).

Dans le cas général, $T(q^{-1})$ dans la figure 2.5.4 est différent de $R(q^{-1})$.

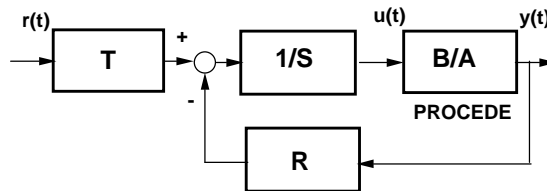


Figure 2.5.4. Structure canonique des régulateurs numériques

Si :

$$H(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad [2.5.10]$$

est la fonction de transfert échantillonnée de l'ensemble CNA + BOZ + procédé continu + CAN, la fonction de transfert de la boucle ouverte est donnée par :

$$H_{BO}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1})} \quad [2.5.11]$$

et la fonction de transfert du système en boucle fermée entre la consigne $r(t)$ et la sortie $y(t)$, utilisant une structure canonique de régulateur numérique, s'écrit :

$$H_{BF}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{P(z^{-1})} \quad [2.5.12]$$

où :

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1}) = 1 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \dots \quad [2.5.13]$$

est le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée qui définit les pôles du système en boucle fermée. Observons que $T(z^{-1})$ introduit un degré de liberté supplémentaire permettant de dissocier les spécifications de performances en poursuite et en régulation.

A noter aussi que $r(t)$ est souvent remplacé par une « trajectoire désirée » de la sortie notée $y^*(t)$, qui s'obtient soit par le passage de la consigne $r(t)$ à travers un filtre appelé filtre formateur ou modèle de référence de poursuite, soit en stockant dans la mémoire de l'ordinateur la séquence des valeurs désirées de la sortie.

Le régulateur numérique représenté schématiquement dans la figure 2.5.4. porte aussi le nom de régulateur numérique R-S-T. Il s'agit d'un régulateur à *deux degrés de liberté* permettant d'obtenir des comportements différents en poursuite et régulation.

L'objectif de la synthèse d'un régulateur numérique se traduit alors par la détermination de R , S et T afin d'obtenir des fonctions de transfert en boucle fermée vis-à-vis de la consigne et de la perturbation qui permettent de satisfaire les performances imposées.

C'est pour cela que les performances désirées en boucle fermée seront exprimées, (ou si ce n'est pas le cas, elles seront converties) en termes de pôles

désirés en boucle fermée, et éventuellement en termes de zéros désirés (ce qui définira la fonction de transfert souhaitée de la boucle fermée).

En présence de perturbations (voir figure 2.5.5) quatre autres fonctions de transfert reliant la perturbation à la sortie et à l'entrée du processus sont importantes.

La fonction de transfert entre la perturbation $p(t)$ et la sortie $y(t)$ (*fonction de sensibilité perturbation-sortie*) est donnée par :

$$S_{yp}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})S(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})} \quad [2.5.14]$$

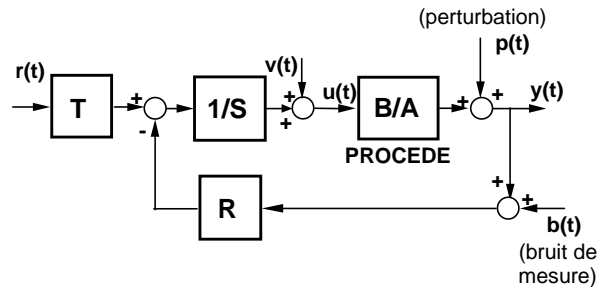


Figure 2.5.5. Boucle de régulation numérique en présence de perturbations et de bruit de mesure

Elle permet de caractériser les performances du système vis-à-vis des perturbations et en particulier de spécifier certaines parties de $S(z^{-1})$ afin d'obtenir une réjection satisfaisante des perturbations.

En effet, si on veut un rejet parfait d'une perturbation à une certaine fréquence, $S(z^{-1})$ devra avoir un zéro correspondant à cette fréquence. En particulier, si on veut rejeter parfaitement une perturbation de charge en régime stationnaire (*i.e.* fréquence nulle) $S_{yp}(z^{-1})$ doit contenir un facteur $(1 - z^{-1})$ au numérateur qui s'annule pour $z = 1$. Ceci est cohérent avec le résultat donné dans le paragraphe 2.4.3, car un zéro de $S_{yp}(z^{-1})$ va correspondre à un pôle du système en boucle ouverte.

La fonction de transfert entre la perturbation $p(t)$ et l'entrée du processus $u(t)$ (*fonction de sensibilité perturbation-entrée*) est donnée par :

$$S_{up}(z^{-1}) = \frac{-A(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})} \quad [2.5.15]$$

Elle permet d'examiner l'influence de la perturbation sur l'entrée du procédé, et de spécifier une partie de la structure de $R(z^{-1})$ si l'on souhaite que le régulateur ne réagisse pas à des perturbations situées dans certaines zones de fréquences.

En présence de bruit de mesure (voir figure 2.5.5) une autre fonction de transfert reliant le bruit de mesure $b(t)$ à la sortie du processus $y(t)$ est importante (*fonction de sensibilité bruit de mesure-sortie*) :

$$S_{yb}(z^{-1}) = \frac{-B(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})} \quad [2.5.16]$$

Comme l'énergie du bruit de mesure est souvent concentrée dans les hautes fréquences, il faut veiller que le gain de cette fonction de transfert $|S_{yb}(e^{-j\omega})|$ soit faible dans la zone des hautes fréquences.

Pour $T = R$, on définit la fonction de sensibilité entre r et y (appelée aussi *fonction de sensibilité complémentaire*) :

$$S_{yr}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})} = -S_{yb}(z^{-1}) \quad [2.5.17]$$

Observons aussi que :

$$S_{yp}(z^{-1}) - S_{yb}(z^{-1}) = S_{yp}(z^{-1}) + S_{yr}(z^{-1}) = 1$$

ce qui implique une interdépendance entre ces fonctions de sensibilité.

A noter que la fonction de transfert entre le bruit de mesure et l'entrée du processus $S_{ub}(z^{-1})$, est égale à $S_{up}(z^{-1})$.

Il est aussi utile d'exprimer la fonction de transfert décrivant l'influence d'une perturbation $v(t)$ en entrée du procédé sur la sortie. Cette fonction de sensibilité (*fonction de sensibilité perturbation entrée-sortie*) est donnée par :

$$S_{yv}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})S(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})} \quad [2.5.18]$$

L'un des intérêts de cette fonction de sensibilité est qu'elle met en évidence les éventuels pôles instables du procédé qui ont été compensés (simplifiés) par des zéros introduits dans $R(z^{-1})$.

Pour illustrer ceci considérons qu'on choisit $R(z^{-1}) = A(z^{-1})$ (compensation des pôles du procédé par les zéros du régulateur) et supposons que le procédé à commander est instable ($A(z^{-1})$ a des zéros à l'extérieur du cercle unité). Dans ce cas :

$$\begin{aligned} S_{yp}(z^{-1}) &= \frac{A(z^{-1})S(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})A(z^{-1})} = \frac{S(z^{-1})}{S(z^{-1}) + B(z^{-1})} \\ S_{up}(z^{-1}) &= -\frac{A(z^{-1})A(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})A(z^{-1})} = -\frac{A(z^{-1})}{S(z^{-1}) + B(z^{-1})} \\ S_{yb}(z^{-1}) &= -\frac{B(z^{-1})A(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})A(z^{-1})} = -\frac{B(z^{-1})}{S(z^{-1}) + B(z^{-1})} \\ S_{yv}(z^{-1}) &= \frac{B(z^{-1})S(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})A(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})S(z^{-1})}{A(z^{-1})[S(z^{-1}) + B(z^{-1})]} \end{aligned}$$

On voit que dans ce cas S_{yp} , S_{up} , S_{yb} sont des fonctions de transfert stables si $S(z^{-1})$ est choisi tel que $S(z^{-1}) + B(z^{-1})$ soit stable, c'est-à-dire :

$$S(z^{-1}) + B(z^{-1}) = 0 \Rightarrow |z| < 1$$

alors que la fonction de sensibilité $S_{yv}(z^{-1})$ est instable.

Cette remarque nous conduit à la conclusion générale suivante : *le système à contre-réaction représenté dans la figure 2.5.5 est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les quatre fonctions de sensibilité S_{yp} , S_{up} , S_{yb} (ou S_{yr}) et S_{yv} (exprimant les relations entre les perturbations d'une part et la sortie d'une autre part) sont asymptotiquement stables.*

L'ensemble des cinq fonctions $H_{BO}(z^{-1})$, $S_{yp}(z^{-1})$, $S_{up}(z^{-1})$, $S_{yb}(z^{-1})$ (ou $S_{yr}(z^{-1})$) et $S_{yv}(z^{-1})$ jouent aussi un rôle important pour l'analyse de la robustesse du système en boucle fermée.

2.5.3. Boucle de régulation avec régulateur PI numérique

Nous illustrerons ici le calcul des coefficients d'un régulateur PI numérique pour un procédé discrétisé caractérisé par :

$$H(q^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{b_1 q^{-1}}{1 + a_1 q^{-1}} \quad [2.5.19]$$

Pour une uniformité des notations, nous utiliserons souvent, dans le cas des coefficients constants, la notation q^{-1} tant pour l'opérateur de retard que pour la variable complexe z^{-1} . La notation z^{-1} sera surtout utilisée quand il faudra donner une interprétation fréquentielle (dans ce cas $z = e^{j\omega T_e}$).

Le régulateur PI numérique est caractérisé par les polynômes (voir [2.5.6] et [2.5.7]) :

$$R(q^{-1}) = T(q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} \quad [2.5.20]$$

$$S(q^{-1}) = 1 - q^{-1} \quad [2.5.21]$$

La fonction de transfert en boucle fermée (vis-à-vis de la consigne $r(t)$) sous sa forme générale est donnée par l'équation [2.5.12].

Le polynôme caractéristique $P(q^{-1})$, dont les racines sont les pôles désirés en boucle fermée, définit l'essentiel des performances. En général, on le choisit comme un polynôme du 2^e ordre correspondant à la discrétisation d'un système continu du 2^e ordre ayant un ω_0 et ζ donnés (ω_0 et ζ s'obtiennent par exemple à partir des diagrammes donnés dans les figures 1.1.10 ou 1.1.11). Les coefficients correspondant du polynôme $P(q^{-1})$ s'obtiennent soit à l'aide de la table de transformation donnée dans le tableau 2.3.3, soit à l'aide du progiciel WinREG (Adaptech) ou des fonctions Scilab ou Matlab données dans la section 2.3. Dans les deux cas, il faut spécifier la période d'échantillonnage T_e , la pulsation naturelle ω_0 et l'amortissement ζ . Il faut bien entendu respecter la relation entre ω_0 et T_e (voir paragraphe 2.2.2, équation [2.2.7]) :

$$0.25 \leq \omega_0 T_e \leq 1.5 \quad ; \quad 0.7 \leq \zeta \leq 1 \quad [2.5.22]$$

Dans le cas d'un procédé discrétisé ayant la fonction de transfert donnée par l'équation [2.5.19], et de l'utilisation d'un régulateur PI numérique, l'équation [2.5.13] donnant les pôles en boucle fermée devient :

$$(1 + a_1 q^{-1})(1 - q^{-1}) + b_1 q^{-1}(r_0 + r_1 q^{-1}) = 1 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2} \quad [2.5.23]$$

En regroupant les termes de l'équation [2.5.23] d'après les puissances de q^{-1} on obtient :

$$1 + (a_1 - 1 + r_0 b_1) q^{-1} + (b_1 r_1 - a_1) q^{-2} = 1 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2} \quad [2.5.24]$$

Pour que l'équation polynomiale [2.5.24] soit vérifiée, il faut que les coefficients des différentes puissances de q^{-1} soient égaux dans les deux membres. Nous obtenons alors le système d'équations :

$$\begin{cases} a_1 - 1 + r_0 b_1 = p_1 \\ b_1 r_1 - a_1 = p_2 \end{cases} \quad [2.5.25]$$

qui donne pour r_0 et r_1 les valeurs suivantes :

$$r_1 = \frac{p_2 + a_1}{b_1} ; \quad r_0 = \frac{p_1 - a_1 + 1}{b_1} \quad [2.5.26]$$

En utilisant la relation [2.5.7], il est possible de remonter aux paramètres du régulateur PI continu :

$$K = -r_1 ; \quad T_i = -\frac{T_e r_1}{r_1 + r_0}$$

2.6. Analyse des systèmes échantillonnés en boucle fermée dans le domaine fréquentiel

2.6.1. Stabilité des systèmes en boucle fermée

Pour le cas des systèmes continus, nous avons vu dans le chapitre 1, paragraphe 1.2.5, l'intérêt de la représentation dans le plan complexe de la fonction de transfert en boucle ouverte (hodographe ou lieu de Nyquist) pour l'étude de la stabilité du système en boucle fermée et de sa robustesse vis-à-vis des variations de paramètres du système (ou des incertitudes sur la valeur des paramètres). La même approche peut être considérée dans le cas des systèmes échantillonnés.

Le lieu de Nyquist pour les systèmes échantillonnés peut être tracé à l'aide du progiciel WinREG (Adaptech) ou des fonctions *Nyquist-OL.sci* (Scilab) et *Nyquist-OL.m* (Matlab).

La figure 2.6.1 représente le lieu de Nyquist d'une fonction de transfert échantillonnée de la boucle ouverte d'un système comprenant un procédé représenté par sa fonction de transfert $H_P(z^{-1}) = B(z^{-1})/A(z^{-1})$ et un régulateur R-S-T.

Dans ce cas, la fonction de transfert de la boucle ouverte est donnée par :

$$H_{BO}(e^{-j\omega}) = \frac{B(e^{-j\omega})R(e^{-j\omega})}{A(e^{-j\omega})S(e^{-j\omega})} \quad [2.6.1]$$

Le vecteur reliant l'origine à un point de l'hodographe de la fonction de transfert représente $H_{BO}(e^{-j\omega})$ pour une certaine pulsation normalisée $\omega = \omega T_e = 2\pi f/f_e$. En général le domaine de variation considéré de la pulsation normalisée ω est compris entre 0 et π (qui correspond à une variation de la fréquence non normalisée entre 0 et $0.5f_e$).

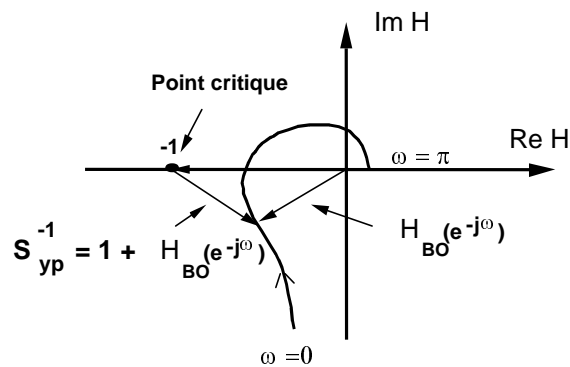


Figure 2.6.1. Le lieu de Nyquist d'une fonction de transfert échantillonnée et le point critique

Dans ce diagramme le point $[-1, j0]$ est le point « critique ». Comme on le voit sur la figure 2.6.1 le vecteur reliant le point $[-1, j0]$ à l'hodographe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(e^{-j\omega})$ a l'expression :

$$S_{yp}^{-1}(z^{-1}) = 1 + H_{BO}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1})} \quad [2.6.2]$$

Ce vecteur représente l'inverse de la fonction de sensibilité perturbation-sortie $S_{yp}(z^{-1})$ (voir équation [2.5.14]) et les zéros de $S_{yp}^{-1}(z^{-1})$ définissent les pôles du système en boucle fermée (voir équation [2.5.13]).

Pour que le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable, il faut que tous les zéros de $S_{yp}^{-1}(z^{-1}) = 0$ (c'est-à-dire les pôles de $S_{yp}(z^{-1})$) se trouvent à l'intérieur du cercle unité ($|z| < 1$).

Les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique du système en boucle fermée sont données par le critère de Nyquist.

Pour les systèmes ayant des pôles stables en boucle ouverte (dans ce cas $A(z^{-1}) = 0$ et $S(z^{-1}) = 0 \rightarrow |z| \leq 1$) le critère de stabilité de Nyquist s'exprime comme suit.

Critère de stabilité (système stable en boucle ouverte)

L'hodographe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(z^{-1})$ parcouru dans le sens des fréquences croissantes (entre 0 et $0.5 f_e$) doit laisser à gauche le point critique $(-1, j0)$.

En règle générale, pour le modèle nominal du procédé $B(z^{-1})/A(z^{-1})$, les polynômes $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$ seront calculés tels que :

$$A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1}) = P(z^{-1}) \quad [2.6.3]$$

où $P(z^{-1})$ est un polynôme ayant des racines asymptotiquement stables. En conséquence pour les valeurs nominales de $A(z^{-1})$ et $B(z^{-1})$ le système en boucle fermée étant stable, l'hodographe de la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$H_{BO}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1})}$$

laissera sur sa gauche le point critique (si $A(z^{-1}) = 0$, et $S(z^{-1}) = 0 \Rightarrow |z| < 1$).

Dans le cas où le système en boucle ouverte est instable, soit parce que $A(z^{-1})$ a des pôles à l'extérieur du cercle unité (procédé instable), soit parce que le régulateur calculé est instable en boucle ouverte ($S(z^{-1})$ a des racines à l'extérieur du cercle unité), le critère de stabilité s'exprime :

Critère de stabilité (système instable en boucle ouverte)

L'hodographe de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(z^{-1})$ parcouru dans le sens des fréquences croissantes (de 0 à f_e) doit laisser à gauche le point critique $(-1, j0)$ et le nombre d'encerclements du point critique en sens inverse des aiguilles d'une montre doit être égal au nombre des pôles instables en boucle ouverte⁵.

A noter que le lieu de Nyquist entre $0.5 f_e$ et f_e est le symétrique par rapport à l'axe réel du lieu de Nyquist entre 0 et $0.5 f_e$.

5. Le critère reste valable même dans le cas d'une simplification de pôles et zéros instables. Le nombre d'encerclements doit être égal au nombre de pôles instables sans prendre en compte les simplifications éventuelles.

La formule générale du critère de Nyquist donnant le nombre des encerclements du point critique est :

$$N = P_{BF}^i - P_{BO}^i$$

où P_{BF}^i est le nombre de pôles instables en boucle fermée et P_{BO}^i est le nombre de pôles instables en boucle ouverte, les valeurs positives de N correspondant à des encerclements du point critique dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour que le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable on doit avoir $N = -P_{BO}^i$.

La figure 2.6.2 illustre deux lieux de Nyquist intéressants à retenir.

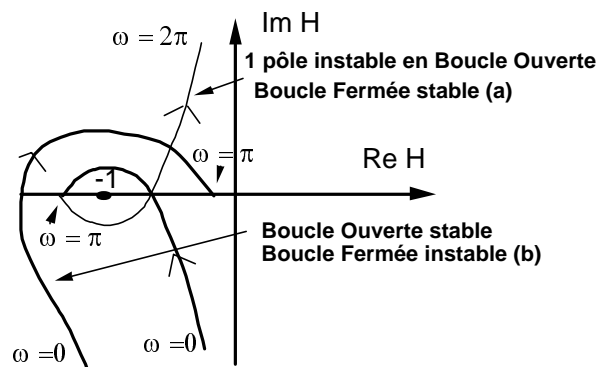


Figure 2.6.2. Lieux de Nyquist : a) système instable en boucle ouverte mais stable en boucle fermée ; b) système stable en boucle ouverte mais instable en boucle fermée

Si le procédé est stable en boucle ouverte et si le régulateur est calculé à partir de l'équation [2.6.3] pour un polynôme désiré en boucle fermée $P(z^{-1})$ stable (c'est-à-dire que le système en boucle fermée nominal sera stable), il résulte que si un lieu de Nyquist ayant la forme de la figure 2.6.2a est obtenu, le régulateur calculé est instable en boucle ouverte. En règle générale cette situation doit être évitée⁶, le principal remède étant de réduire les performances dynamiques désirées de la boucle fermée (changement de $P(z^{-1})$).

6. A noter qu'il existe certains cas « pathologiques » de fonctions de transfert $B(z^{-1})/A(z^{-1})$ avec pôles et zéros instables qui ne peuvent être stabilisés qu'avec des régulateurs instables en boucle ouverte.

2.6.2. Robustesse des systèmes en boucle fermée

Comme dans le cas continu, la distance minimale par rapport au point critique va caractériser la « réserve de stabilité » ou la « robustesse » du système en boucle fermée vis-à-vis des variations des paramètres du système (ou des incertitudes sur la valeur des paramètres).

Les éléments suivants servent à caractériser l'éloignement par rapport au point $[-1, j0]$ (voir figure 2.6.3).

- marge de gain,
- marge de phase,
- marge de retard,
- marge de module.

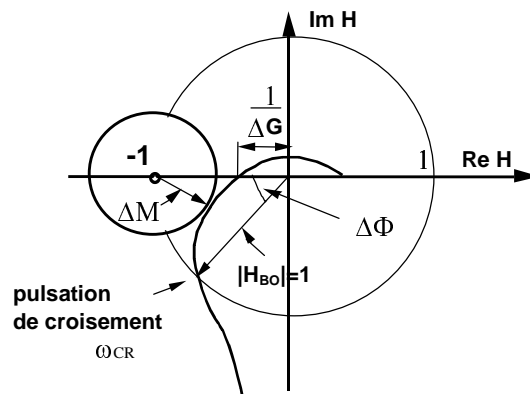


Figure 2.6.3. Marges de gain, de phase et de module

Les définitions dans le cas échantillonné sont identiques au cas continu (voir paragraphe 1.2.5) avec le changement :

où $\omega(f)$ – pulsation (fréquence) normalisée.

Les valeurs typiques de ces grandeurs pour une conception « robuste » sont :

- marge de gain : $\Delta G \geq 2$ (6dB) [min. : 1.6 (4dB)] ;
- marge phase : $30^\circ \leq \Delta\phi \leq 60^\circ$;

$$\text{– marge de retard : } \Delta\tau = \frac{\Delta\phi}{\omega_{cr}} \geq T_e \text{ [min. : } 0.75 T_e \text{]}^7 ;$$

$$\text{– marge de module : } \Delta M \geq 0.5 \text{ (-6dB), [min. : } 0.4 \text{ (-8dB)].}$$

Notons que $\Delta M \geq 0.5$ implique une marge de gain $\Delta G \geq 2$ (6dB) et une marge de phase $\Delta\phi > 29^\circ$.

Si le modèle du processus est connu avec une très bonne précision pour une certaine zone de fonctionnement, les marges de robustesse recherchées peuvent être éventuellement plus faibles.

Rappelons que la *marge de module* résulte immédiatement de la définition du vecteur qui relie le point critique $[-1, j0]$ à l'hodographe de $H(z^{-1})$:

$$\begin{aligned} \Delta M &= \left| 1 + H_{BO}(z^{-1}) \right|_{\min} = \left| S_{yp}^{-1}(z^{-1}) \right|_{\min} = \left(\left| S_{yp}(z^{-1}) \right|_{\max} \right)^{-1} = \\ &= \left(\left| \frac{A(z^{-1})S(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})} \right|_{\max} \right)^{-1} \quad \text{pour } z^{-1} = e^{-j2\pi f} \end{aligned} \quad [2.6.4]$$

En d'autres termes la *marge de module* ΔM est égale à l'inverse du maximum du module de la fonction de sensibilité $S_{yp}(z^{-1})$. En traçant le module de $S_{yp}(z^{-1})$ en dB, on obtient immédiatement la condition suivante :

$$\left| S_{yp}(e^{-j\omega}) \right|_{\max} \text{ dB} = \Delta M^{-1} \text{ dB} = -\Delta M \text{ dB} \quad [2.6.5]$$

La réduction (ou la minimisation) de $|S_{yp}(e^{-j\omega})|_{\max}$ entraînera l'augmentation (ou la maximisation) de la *marge de module*.

La figure 2.6.4 illustre la relation entre la fonction de sensibilité S_{yp} et la marge de module.

7. La valeur de la marge de retard, en absence de spécifications précises, dépend de la fréquence d'échantillonnage. Elle doit être plus importante dans le cas d'une fréquence d'échantillonnage élevée, et elle peut être réduite dans le cas d'un échantillonnage lent.

8. La réciproque n'est pas vraie. Des systèmes ayant des marges de gain et de phase satisfaisantes peuvent avoir une marge de module très faible.

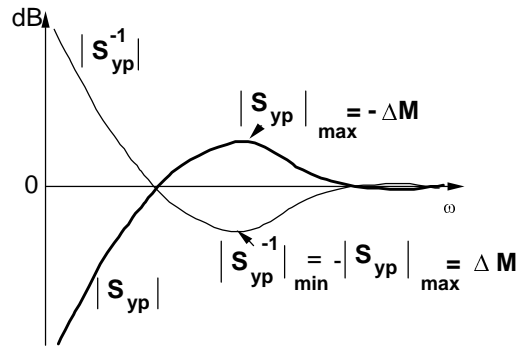


Figure 2.6.4. Relation entre la fonction de sensibilité perturbation-sortie et la marge de module

La *marge de module* est très importante car :

- elle définit la valeur maximale de la « fonction de sensibilité perturbation-sortie » et donc les limites basses des performances pour le rejet des perturbations ;
- elle définit la tolérance vis-à-vis des éléments ayant des caractéristiques non linéaires ou variables dans le temps, lesquels pourraient être présents dans le système.

Tolérance des non-linéarités

Comme dans le cas continu (voir paragraphe 1.2.5) la *marge de module* permettra de caractériser la tolérance du système en boucle fermée vis-à-vis des éléments ayant des caractéristiques entrée-sortie non linéaires ou à paramètres variables dans le temps, situées à l'intérieur d'un secteur conique défini par un gain linéaire minimum α et un gain linéaire maximum β tel que cela est illustré dans la figure 2.6.5.

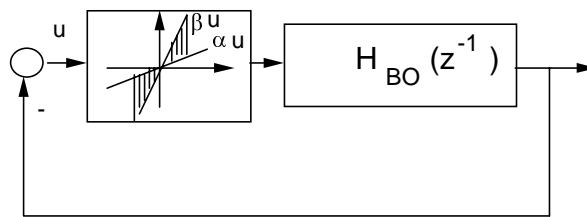


Figure 2.6.5. Système de régulation échantillonné contenant des éléments non linéaires et/ou à paramètres variables dans le temps

Le critère de stabilité du cercle (voir paragraphe 1.2.5) s'applique aussi dans le cas des systèmes échantillonnés. Pour assurer la stabilité du système en boucle fermée en présence des éléments non linéaires et/ou à paramètres variables dans le temps ayant des caractéristiques entrées-sorties situées à l'intérieur du secteur conique (α, β) il faut que l'hodographe de $H_{BO}(z^{-1})$ laisse sur sa gauche le cercle centré sur l'axe réel et passant par les points $[-1/\alpha, j0]$ et $[-1/\beta, j0]$ (voir figure 2.6.6).

La marge de module ΔM permet de définir un cercle de rayon ΔM centré en $[-1, j0]$ qui restera à l'extérieur de l'hodographe de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Donc le système en boucle fermée tolérera des éléments ayant des caractéristiques non linéaires ou variables dans le temps situées à l'intérieur d'un secteur conique défini par un gain linéaire minimum $(1/(1+\Delta M))$ et un gain linéaire maximum $(1/(1-\Delta M))$ (voir figure 2.6.6).

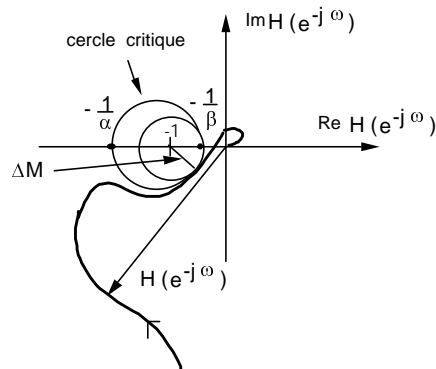


Figure 2.6.6. Critère de stabilité du cercle et marge de module dans le cas échantillonné

Tolérances des incertitudes et/ou des variations de la fonction de transfert du processus

La figure 2.6.7 illustre l'effet des incertitudes ou des variations des paramètres du modèle nominal du processus sur le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte. En règle générale, le lieu de Nyquist pour le modèle nominal du procédé se trouve à l'intérieur d'un « tube » correspondant aux tolérances possibles (ou acceptables) des variations (ou incertitudes) de la fonction de transfert du modèle du procédé.

Afin d'assurer la stabilité du système en boucle fermée pour une fonction de transfert du procédé $H'_{BO}(z^{-1})$ différente de la fonction de transfert nominale

$H_{BO}(z^{-1})$ (mais ayant le même nombre de pôles instables que $H_{BO}(z^{-1})$), il faut que l'hodographe de la fonction de transfert en boucle ouverte de $H'_{BO}(z^{-1})$ laisse à gauche le point critique pour toutes les fréquences entre 0 et $0.5 f_e$. Une condition suffisante pour satisfaire ceci est que la différence entre la fonction de transfert en boucle ouverte réelle $H'_{BO}(z^{-1})$ et la fonction de transfert en boucle ouverte nominale $H_{BO}(z^{-1})$ soit inférieure à la distance entre la fonction de transfert en boucle ouverte nominale et le point critique à toutes les fréquences (voir figure 2.6.7). Ceci s'exprime (condition de stabilité robuste) :

$$\begin{aligned} |H'_{BO}(z^{-1}) - H_{BO}(z^{-1})| < |1 + H_{BO}(z^{-1})| = |S_{yp}^{-1}(z^{-1})| = \\ \left| \frac{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1})} \right| = \left| \frac{P(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1})} \right| ; \quad z^{-1} = e^{-j\omega} \end{aligned} \quad [2.6.7]$$

où $S(z^{-1})$ et $R(z^{-1})$ sont calculés à partir de l'équation [2.6.3] pour les valeurs nominales de $A(z^{-1})$ et $B(z^{-1})$.

En d'autres termes : la courbe $S_{yp}^{-1}(e^{j\omega})$ en dB, qui s'obtient par symétrie de $S_{yp}(e^{j\omega})$ (voir figure 2.6.4), nous donnera à chaque fréquence une condition suffisante pour le module de l'écart toléré entre la fonction de transfert réelle en boucle ouverte et la fonction de transfert en boucle ouverte nominale, garantissant la stabilité de la boucle fermée.

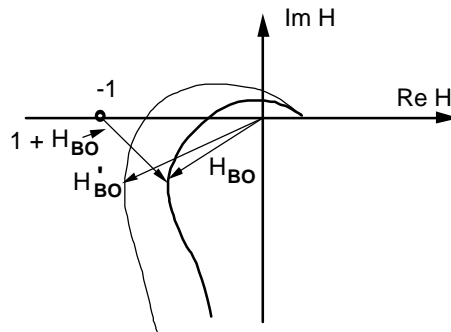


Figure 2.6.7. Lieu de Nyquist pour la fonction de transfert en boucle ouverte nominale et en présence de variations ou incertitudes sur les paramètres (H_{BO} et H'_{BO} sont stables)

En règle générale, (voir figure 2.6.4) cette tolérance est très grande en basses fréquences où le gain du système en boucle ouverte est grand (en particulier quand il y a un intégrateur), et elle est minimum à la fréquence (ou aux fréquences) où $S_{yp}^{-1}(e^{j\omega})$ atteint son minimum (= ΔM), c'est-à-dire où $S_{yp}(e^{j\omega})$ est maximum. Il

faudra donc s'assurer qu'à ces fréquences les variations des caractéristiques du modèle sont compatibles avec la marge de module obtenue. Dans le cas contraire, soit on améliore la connaissance du modèle du procédé, soit on modifie les spécifications pour pouvoir assurer la stabilité.

La relation [2.6.7] exprime une condition de robustesse en termes de variations de la fonction de transfert en boucle ouverte (régulateur + procédé). Il est intéressant d'exprimer une condition de robustesse directement en termes de variations du modèle du procédé. Observons que l'équation [2.6.7] peut s'écrire encore sous la forme :

$$\begin{aligned} \left| \frac{B'(z^{-1})R(z^{-1})}{A'(z^{-1})S(z^{-1})} - \frac{B(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1})} \right| &= \left| \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})} \right| \cdot \left| \frac{B'(z^{-1})}{A'(z^{-1})} - \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \right| \\ &< \left| \frac{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1})} \right| \end{aligned} \quad [2.6.8]$$

où $B(z^{-1})/A(z^{-1})$ correspond à la fonction de transfert nominale du procédé.

En multipliant par $|S(z^{-1})/R(z^{-1})|$ les deux termes de l'équation [2.6.8] on obtient la condition :

$$\begin{aligned} \left| \frac{B'(z^{-1})}{A'(z^{-1})} - \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \right| &< \left| \frac{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})R(z^{-1})} \right| \\ &= \left| \frac{P(z^{-1})}{A(z^{-1})R(z^{-1})} \right| = |S_{up}^{-1}(z^{-1})| \end{aligned} \quad [2.6.9]$$

En traçant la courbe de l'inverse du module de la fonction de sensibilité perturbation-entrée procédé (c'est le symétrique du module de la fonction de sensibilité perturbation entrée en dB par rapport à l'axe 0 dB), on obtient directement des conditions suffisantes concernant les tolérances (additives) permises sur les variations (ou les incertitudes) de la fonction de transfert du procédé (figure 2.6.8).

Comme souvent il y a des incertitudes sur les caractéristiques des modèles de procédé en hautes fréquences, il faut veiller à ce que le maximum de $|S_{up}(e^{j\omega})|$ en hautes fréquences soit faible. Par ailleurs, la fonction de transfert perturbation-entrée S_{up} donne une image de la sollicitation fréquentielle de l'actionneur en présence de perturbations. Les caractéristiques physiques de l'actionneur imposent souvent une limitation des sollicitations en haute fréquences de l'actionneur et donc une limitation sur le maximum de $|S_{up}(e^{j\omega})|$ à ces fréquences.

On observe (de la relation [2.6.9]) que les tolérances admises (au facteur $1/|R(z^{-1})|$ près) dépendent de la relation entre les pôles du procédé définis par $A(z^{-1})$ et les pôles désirés en boucle fermée définis par $P(z^{-1})$.

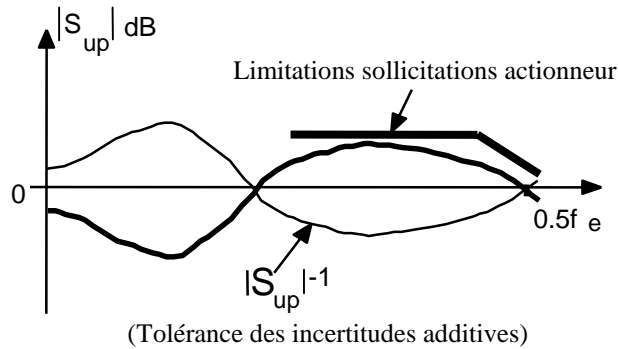


Figure 2.6.8. La fonction de sensibilité perturbation-entrée et son inverse

On peut écrire :

$$\left| \frac{P(z^{-1})}{A(z^{-1})} \right|_{dB} = \frac{\left| \frac{1}{A(z^{-1})} \right|_{dB}}{\left| \frac{1}{P(z^{-1})} \right|_{dB}} = \frac{\left| \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \right|_{dB}}{\left| \frac{B(z^{-1})}{P(z^{-1})} \right|_{dB}} = - \left(\left| \frac{B(z^{-1})}{P(z^{-1})} \right|_{dB} - \left| \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \right|_{dB} \right) \quad [2.6.10]$$

où $|B(z^{-1})/A(z^{-1})|$ représente la caractéristique fréquentielle du gain du procédé et $|B(z^{-1})/P(z^{-1})|$ représente la caractéristique fréquentielle du gain du système en boucle fermée (pour $T(z^{-1}) = I$). Comme en règle générale le système en boucle fermée est plus rapide que le système en boucle ouverte, on aura systématiquement (au gain statique près) la situation indiquée dans la figure 2.6.9.

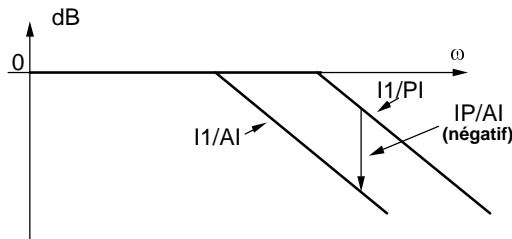


Figure 2.6.9. Estimation du rapport $|P(z^{-1})/A(z^{-1})|$ en dB (abstraction faite de la différence de gain statique)

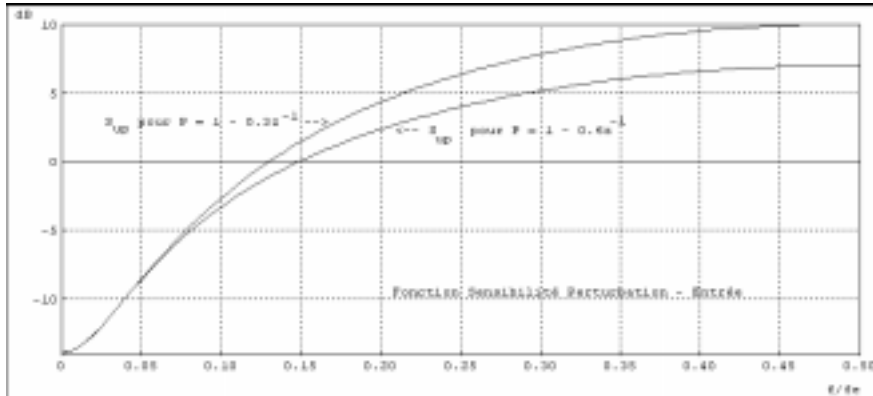


Figure 2.6.10. Fonction de sensibilité perturbation-entrée pour le modèle de procédé $q^{-1}/(1 - 0.8q^{-1})$ en fonction des performances désirées en boucle fermée

On observe que dans les fréquences supérieures à la bande passante du procédé en boucle ouverte $|P(z^{-1})/A(z^{-1})|$ sera d'autant plus faible que la bande passante en boucle fermée sera plus élevée que la bande passante du procédé. En conséquence les tolérances admises pour les variations des caractéristiques fréquentielles du procédé seront plus faibles⁹.

Afin d'illustrer plus précisément ce phénomène, on a représenté dans la figure 2.6.10 le module des fonctions $S_{up}(z^{-1})$ pour un modèle de procédé caractérisé par $A(z^{-1}) = 1 - 0.8z^{-1}$; $B(z^{-1}) = z^{-1}$ et pour deux polynômes désirés du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée : $P_1(z^{-1}) = 1 - 0.6z^{-1}$ et $P_2(z^{-1}) = 1 - 0.3z^{-1}$ (régulateur avec intégrateur). Notons que $P_2(z^{-1})$ correspond à un système en boucle fermée plus rapide que celui défini par $P_1(z^{-1})$, tous les deux étant plus rapides que le procédé.

On observe que le maximum de $|S_{up}(z^{-1})|$ pour $P_2(z^{-1})$ est plus grand que pour $P_1(z^{-1})$, et donc l'inverse de $|S_{up}(z^{-1})|$ sera plus petit. Ceci a comme conséquence que les tolérances acceptées sur les variations des caractéristiques fréquentielles (particulièrement dans les hautes fréquences) seront elles aussi plus petites dans le cas de $P_2(z^{-1})$ par rapport au cas où on choisit comme performances désirées celles définies par $P_1(z^{-1})$.

L'équation [2.6.9] donne une condition suffisante sur la tolérance (additive) acceptée en termes de variation (ou incertitude) de la fonction de transfert réelle du

9. Attention ! Il s'agit d'une analyse partielle car elle ne tient pas compte de R .

procédé par rapport à la fonction de transfert nominale du procédé. Il est néanmoins intéressant d'évaluer la tolérance relative acceptée par rapport au module de la fonction de transfert nominale du procédé. On obtient alors de l'équation [2.6.9] :

$$\frac{\left| \frac{B'(z^{-1})}{A'(z^{-1})} - \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \right|}{\left| \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \right|} < \left| \frac{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}{B(z^{-1})R(z^{-1})} \right| \quad [2.6.11]$$

$$= \left| \frac{P(z^{-1})}{B(z^{-1})R(z^{-1})} \right| = |S_{yb}^{-1}(z^{-1})|$$

où S_{yb} correspond à la « fonction de sensibilité bruit de mesure-sortie » et S_{yr} correspond à la « fonction de sensibilité complémentaire ».

Un des intérêts de l'utilisation de la fonction de sensibilité bruit de mesure-sortie S_{yb} est la possibilité de définir un « gabarit » fréquentiel pour garantir la « marge de retard ». Considérons le cas d'une marge de retard $\Delta\tau = 1 \cdot T_e$. Dans ce cas

$$H(z^{-1}) = \frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad ; \quad H'(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

et on obtient :

$$\frac{H'(z^{-1}) - H(z^{-1})}{H(z^{-1})} = z^{-1} - 1$$

La condition [2.6.11] devient :

$$\left| S_{yb}(z^{-1}) \right| < \frac{1}{|z^{-1} - 1|} \quad ; \quad z = e^{j\omega} \quad 0 \leq \omega \leq \pi \quad [2.6.12]$$

ou en dB :

$$\left| S_{yb}^{-1}(z^{-1}) \right|_{dB} < -20 \log |1 - z^{-1}| \quad ; \quad z = e^{j\omega} \quad 0 \leq \omega \leq \pi \quad [2.6.13]$$

Cette expression définit un « gabarit » fréquentiel de robustesse pour la fonction de sensibilité S_{yb} . Ce gabarit correspond à la caractéristique fréquentielle d'un intégrateur numérique et il est représenté dans la figure 2.6.11.

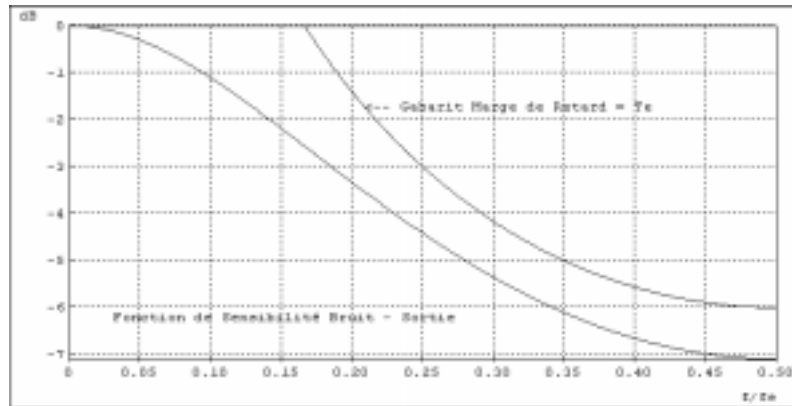


Figure 2.6.11. Gabarit fréquentiel sur la fonction de sensibilité bruit-sortie pour $\Delta\tau = T_e$

Mais comme la marge de module introduit un gabarit fréquentiel sur la fonction de sensibilité perturbation-sortie ($|S_{yp}(e^{-j\omega})| \leq -\Delta M$; $0 \leq \omega \leq \pi$) il est intéressant de voir quel est le gabarit introduit par la marge de retard sur $|S_{yp}|$.

Des équations [2.5.14] et [2.5.17] il résulte que :

$$S_{yp}(z^{-1}) = 1 + S_{yb}(z^{-1}) \quad [2.6.14]$$

et en utilisant l'inégalité du triangle on a

$$\left|1 - S_{yb}(z^{-1})\right| \leq \left|S_{yp}(z^{-1})\right| \leq 1 + \left|S_{yb}(z^{-1})\right| \quad [2.6.15]$$

Tenant compte par ailleurs de la contrainte fréquentielle imposée sur S_{yb} et donnée par [2.6.12] il résulte la condition

$$1 - \left|1 - z^{-1}\right|^{-1} \leq \left|S_{yp}(z^{-1})\right| \leq 1 + \left|1 - z^{-1}\right|^{-1} \quad [2.6.16]$$

ce qui conduit au gabarit de robustesse pour S_{yp} représenté dans la figure 2.6.12.

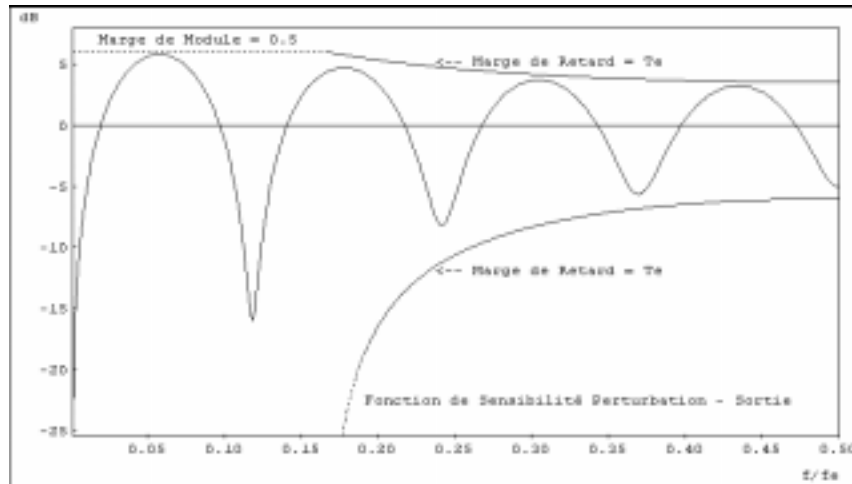


Figure 2.6.12. Gabarit fréquentiel sur la fonction de sensibilité perturbation-sortie pour $\Delta M = 0.5$ (-6dB) et $\Delta \tau = T_e$

On observe qu'à partir de $0.17 f_e$, $|S_{yp}|$ doit être contenu entre une limite supérieure et une limite inférieure et que pour des fréquences inférieures à $0.17 f_e$, le gabarit fréquentiel pour la marge de module assure aussi la marge de retard.

Il est néanmoins important de souligner que le gabarit de marge de retard sur S_{yp} ne garantit pas toujours la marge de retard désirée (il s'agit d'une approximation). Si le gabarit de marge de retard sur $|S_{yb}|$ est respecté, le gabarit fréquentiel sur $|S_{yp}|$ va être aussi respecté. Mais si le gabarit de marge de retard sur $|S_{yb}|$ n'est pas respecté ceci n'implique pas nécessairement la violation du gabarit sur $|S_{yp}|$ (surtout si les écarts sur $|S_{yb}|$ par rapport au gabarit sont faibles). Néanmoins, en règle générale, les résultats obtenus en utilisant le gabarit de marge de retard sur $|S_{yp}|$ sont très fiables.

Il résulte donc qu'en règle générale la robustesse d'un système en boucle fermée sera d'autant plus réduite que la bande passante en boucle fermée sera élevée par rapport à la bande passante du système en boucle ouverte. Inversement, une réduction importante du temps de réponse en boucle fermée par rapport au temps de réponse de la boucle ouverte nécessite une bonne connaissance du modèle du procédé (en particulier dans les zones de fréquence où $|S_{yp}(z^{-1})|$ est grand).

Par conséquent, les considérations de robustesse peuvent imposer soit une faible réduction du temps de réponse en boucle fermée par rapport au temps de réponse de

la boucle ouverte, soit la prise en compte des contraintes sur les fonctions de sensibilité lors du calcul du régulateur.

Un des défis de la synthèse des régulateurs est de maximiser la robustesse du régulateur pour des performances données. Ceci s'obtient par une minimisation de la valeur maximale des fonctions de sensibilité dans les zones fréquentielles critiques.

2.7. Conclusion

Des équations récursives (aux différences) de la forme :

$$y(t) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t-i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t-d-i) \quad [2.7.1]$$

où u est l'entrée, y est la sortie et d est le retard discret sont utilisées pour décrire des modèles dynamiques discrets.

L'opérateur de retard q^{-1} [$q^{-1} y(t) = y(t-1)$] est un outil commode pour la manipulation des équations récursives. En utilisant l'opérateur q^{-1} l'équation récursive [2.7.1] prend la forme :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d} B(q^{-1})u(t)$$

où :

$$A(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_A} a_i q^{-i}$$

$$B(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_B} b_i q^{-i}$$

La relation entrée-sortie pour un modèle discret est aussi convenablement décrite par l'opérateur de transfert $H(q^{-1})$:

$$H(q^{-1}) = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

La fonction de transfert échantillonnée d'un modèle linéaire discret s'exprime en termes de la variable complexe $z = e^{sT_e}$ (T_e = période d'échantillonnage). La

fonction de transfert échantillonnée peut être obtenue à partir de l'opérateur de transfert $H(q^{-1})$ en remplaçant q^{-1} par z^{-1} .

La stabilité asymptotique d'un modèle discret est assurée si et seulement si tous les pôles de la fonction de transfert échantillonnée (en z) se trouvent à l'intérieur du cercle unité.

L'ordre d'une fonction de transfert échantillonnée est :

$$n = \max(n_A, n_B + d)$$

Dans les systèmes de commande par ordinateur, la commande appliquée est maintenue constante entre deux instants d'échantillonnage par l'intermédiaire d'un bloqueur d'ordre zéro (BOZ). Le bloqueur d'ordre zéro est caractérisé par la fonction de transfert :

$$H_{BO}(s) = \frac{1 - e^{-sT_e}}{s}$$

Par conséquent, la partie continue du système (entre le convertisseur digital-analogique et le convertisseur analogique-numérique) est caractérisée par la fonction de transfert continue :

$$H'(s) = H_{BOZ}(s) \cdot H(s)$$

où $H(s)$ est la fonction de transfert du procédé.

Dans les systèmes de commande par ordinateur, la commande appliquée au procédé à l'instant t est une moyenne pondérée des sorties du procédé mesurées aux instants $t, t - 1, \dots, t - n_A + 1$, des valeurs précédentes de la commande aux instants $t - 1, t - 2, \dots, t - n_B - d$, et du signal de référence aux instants $t, t - 1, \dots$, les pondérations étant représentées par les coefficients du régulateur numérique. La loi de commande correspondante (régulateur R-S-T) s'écrit :

$$S(q^{-1}) u(t) = -R(q^{-1}) y(t) + T(q^{-1}) r(t) \quad [2.7.2]$$

où $u(t)$ est la commande (entrée) du procédé, $y(t)$ est la sortie du procédé et $r(t)$ la référence.

La fonction de transfert en boucle fermée d'un système comportant un régulateur numérique [2.7.2] (entre la référence et la sortie du procédé) est donnée par :

$$H_{BF}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}$$

où $H(z^{-1}) = B(z^{-1})/A(z^{-1})$ est la fonction de transfert échantillonnée du procédé discrétisé (dans ce cas $B(z^{-1})$ englobe les retards éventuels).

Le polynôme caractéristique définissant les pôles du système en boucle fermée est donné par :

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})$$

Les propriétés de rejet de perturbation en sortie résultent des caractéristiques fréquentielles de la fonction de sensibilité perturbation-sortie :

$$S_{yp}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})S(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}$$

La robustesse de la stabilité d'un système en boucle fermée vis-à-vis des incertitudes ou des variations de la fonction de transfert du procédé est essentiellement caractérisée par la *marge de module* et la *marge de retard*.

La *marge de module* et la *marge de retard* introduisent des contraintes fréquentielles sur le module de certaines fonctions de sensibilité. Ces contraintes définissent un gabarit fréquentiel de robustesse qui doit être respecté.

La robustesse de la stabilité ou des performances du système en boucle fermée vis-à-vis des incertitudes ou des variations de la fonction de transfert du procédé dépend du choix des performances en boucle fermée (bande passante, temps de réponse) par rapport aux caractéristiques dynamiques du procédé en boucle ouverte.

Une diminution importante du temps de réponse en boucle fermée (ou une augmentation importante de la bande passante en boucle fermée) par rapport au temps de réponse (ou à la bande passante) en boucle ouverte nécessite une bonne connaissance du modèle du procédé.

Pour garantir la robustesse du système en boucle fermée, en l'absence d'une bonne connaissance du modèle du procédé ou en présence de variations importantes des paramètres du procédé, l'accélération du temps de réponse en boucle fermée par rapport au temps de réponse en boucle ouverte doit être en général faible.

Des techniques existent néanmoins pour maximiser la robustesse d'un régulateur vis-à-vis des incertitudes (ou variations) du modèle du procédé, pour des performances nominales données.

2.8. Bibliographie

- [AND 71] ANDERSON B.D.O, MOORE J.B., *Linear Optimal Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- [AST 97] ASTRÖM K.J., WITTENMARK B., *Computer Controlled Systems - Theory and Design*, 3^e édition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1997.
- [BOU 91] BOURLES H., IRVING E., « La méthode LQG/LTR : une interprétation polynomiale, temps continu/temps discret », *RAIRO-APII*, vol. 25, p. 545-568, 1991.
- [DOY 92] DOYLE J.C., FRANCIS B.A., TANENBAUM A.R., *Feedback Control Theory*, MacMillan, New York, 1992.
- [FOU 85] FOULARD C., GENTIL S., SANDRAZ J.P., *Commande et Régulation par Calculateur*, Eyrolles, Paris, 1985.
- [FRA 90] FRANKLIN G.F., POWELL J.D., WORKMAN M.L., *Digital Control of Dynamic Systems*, 2^e édition, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1990.
- [KUO 80] KUO B., *Digital Control Systems*, Holt Saunders, Tokyo, 1980.
- [KWA 94] KWAKERNAK H., « La commande robuste : optimisation à sensibilité mixte » dans *La robustesse*, A. Oustaloup (Ed.), Hermès, Paris, 1994.
- [LAN 95] LANDAU I.D., « Robust digital control systems with time delay (the Smith predictor revisited) », *Int. J. of Control*, vol. 62, n° 2, p. 325-347, 1995.
- [LON 95] LONGCHAMP R., *Commande numérique de systèmes dynamiques*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1995.
- [OGA 87] OGATA K., *Discrete-Time Control Systems*, Prentice Hall, New Jersey, 1987.
- [SEV 73] SEVELY Y., *Systèmes et Asservissements Linéaires Echantillonnés*, Dunod, Paris, 1973.
- [WIR 91] WIRK G.S., *Digital Computer Systems*, MacMillan, Londres, 1991.

Pour une généralisation des notions de marges de robustesse et des relations concernant la stabilité robuste présentées dans le paragraphe 2.6.2, voir l'annexe A.3.

Chapitre 3

Méthodes de calcul des régulateurs numériques

Ce chapitre présente d'abord le calcul des régulateurs PID numériques, mettant en évidence la structure générale des régulateurs numériques (structure à trois branches appelées R-S-T), les particularités de l'approche numérique et les limitations du PID numérique. On examine ensuite la méthode générique du placement des pôles, la poursuite et régulation à objectifs indépendants et la poursuite et la régulation à modèle interne (ces deux méthodes pouvant être vues comme des cas particuliers du placement des pôles). La dernière partie du chapitre est consacrée à la présentation d'une méthodologie générale de synthèse des régulateurs numériques permettant de garantir les performances et la robustesse du système en boucle fermée à travers le calibrage des fonctions de sensibilité.

3.1. Introduction

L'utilisation d'un calculateur numérique ou d'un microprocesseur dans les boucles de commande/régulation offre de nombreux avantages parmi lesquels nous mentionnerons :

- choix important de stratégies pour la conception et le calcul des régulateurs ;
- possibilité d'utilisation d'algorithmes plus complexes et plus performants que le *PID* ;
- technique bien adaptée pour la commande des *procédés avec retard* ;

– technique bien adaptée pour la commande des procédés caractérisés par des modèles dynamiques linéaires d'ordre élevé (avec présence éventuelle de modes vibratoires peu amortis).

En combinant les méthodes de calcul des régulateurs avec les techniques d'identification des modèles de procédés, on peut mettre en œuvre une procédure rigoureuse et performante de calcul des régulateurs. A titre d'exemple, on peut citer les progiciels WinPIM et WinREG (Adaptech) qui sont spécialement dédiés à traiter l'ensemble des problèmes liés à l'identification des modèles de procédés et à la conception, calcul et ajustement des régulateurs numériques. Différentes routines sont disponibles sur Scilab et Matlab permettant aussi de traiter des problèmes d'identification et de calcul des régulateurs numériques.

Les méthodes de calcul des régulateurs numériques, qui seront présentées dans ce chapitre, concernent la régulation monovariante (monoboucle) en présence de perturbations déterministes, et elles sont toutes mises en œuvre dans le progiciel WinREG (Adaptech). Ces méthodes sont :

- *PID numérique* ;
- *Placement des pôles en boucle fermée* ;
- *Poursuite et régulation à objectifs indépendants* ;
- *Poursuite et régulation à modèle interne* ;
- *Placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité*.

Tous les régulateurs, quelle que soit la méthode de calcul, auront la même structure à trois branches R-S-T (voir figure 2.5.4). Seule la *mémoire* du régulateur (nombre de coefficients) change en fonction de la complexité du procédé.

A noter que pour des procédés simples (maximum 2^e ordre et retard réduit), les divers régulateurs résultant du placement de pôles, de la poursuite et régulation à objectifs indépendants ou à modèle interne correspondent à des PID numériques ayant des paramètres ajustés différemment.

La poursuite et régulation à objectifs indépendants et la poursuite et régulation à modèle interne peuvent être vues comme des cas particuliers du *placement des pôles*. Elles résultent d'un choix particulier des pôles désirés pour la boucle fermée.

La technique de commande numérique par *placement de pôles* (et les différents cas particuliers) est en fait une technique de *commande prédictive* (le régulateur contient implicitement un prédictor de la sortie). Ceci sera illustré dans les paragraphes 3.4.4. et 3.5.3. et dans l'annexe A.2.

Le placement des pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité représente une méthode générale de synthèse des régulateurs numériques permettant de prendre en compte simultanément les aspects performance et robustesse de la boucle fermée.

Le calcul et l'ajustement des différents types de régulateurs nécessitent la connaissance du modèle paramétrique échantillonné du procédé à réguler. Il convient donc de se doter d'un outil d'identification permettant d'obtenir directement, à partir des mesures des entrées et sorties, le modèle échantillonné du procédé discrétisé. Un tel outil est le progiciel WinPIM (Adaptech) ou les ensembles de routines pour l'identification disponibles sur Scilab et Matlab.

Si on dispose du modèle continu du procédé à réguler, on pourra obtenir le modèle échantillonné du procédé discrétisé à l'aide d'un logiciel approprié (WinREG, Scilab ou Matlab).

3.2. Régulateur PID numérique

La version de base du régulateur PID numérique considérée dans cet ouvrage résulte de la discrétisation du régulateur PID continu présenté dans le paragraphe 1.3.2. Mais une autre version offrant certains avantages sera aussi présentée.

La méthode de calcul des régulateurs PID numériques ne s'applique rigoureusement qu'aux :

- procédés modélisables par une fonction de transfert continue de degré maximum égal à 2, avec ou sans retard pur,
- procédés ayant un retard pur inférieur à une période d'échantillonnage.

Bien qu'il soit possible dans certains cas de remonter aux paramètres des régulateurs PID continus, les méthodes de calcul des régulateurs PID numériques ne constituent pas des méthodes pour l'ajustement des régulateurs PID continus ou pseudo-numériques. Des méthodes spécifiques aux réglage des PID continus doivent être utilisées (voir chapitre 1, section 1.3). Par ailleurs, il faut mentionner que certains réglages des paramètres des régulateurs PID numériques offrant d'excellentes performances n'ont pas de contrepartie en terme de paramètres des régulateurs PID continus (voir paragraphe 2.3.1).

3.2.1. Structure du régulateur PID numérique 1

Considérons la fonction de transfert du régulateur continu PID 1 (équation [1.3.10]):

$$H_{PID}(s) = K \left[1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} \right] \quad [3.2.1]$$

Ce régulateur est caractérisé par quatre paramètres de réglage :

K – gain proportionnel ;

T_i – action intégrale ;

T_d – action dérivée ;

T_d/N – filtrage de l'action dérivée.

Plusieurs méthodes de discrétisation peuvent être utilisées. Les relations entre les paramètres continus et échantillonnés vont dépendre de la méthode utilisée, mais la structure du régulateur numérique sera la même.

Pour la discrétisation nous approximerons s (dérivée) par $(1 - q^{-1})/T_e$ et $1/s$ (intégration) par $T_e/(1 - q^{-1})$ (voir section 2.3, equations [2.3.6] à [2.3.11]). Il résulte :

$$\frac{1}{T_i s} = \frac{T_e}{T_i} \cdot \frac{1}{1 - q^{-1}} \quad [3.2.2]$$

$$T_d s = \frac{T_d}{T_e} \cdot (1 - q^{-1}) \quad [3.2.3]$$

$$\frac{1}{1 + \frac{T_d}{N} s} = \frac{1}{1 + \frac{T_d}{NT_e} (1 - q^{-1})} = \frac{\frac{NT_e}{T_d + NT_e}}{1 - \frac{T_d}{T_d + NT_e} q^{-1}} \quad [3.2.4]$$

En introduisant ces expressions dans l'équation [3.2.1] nous obtenons la fonction de transfert échantillonnée caractérisant le régulateur numérique PID¹ :

1. Comme indiqué dans le paragraphe 2.5.3, pour les systèmes à coefficients constants nous utiliserons presque partout la notation q^{-1} , tant pour l'opérateur de retard que pour la variable complexe z^{-1} , à l'exception des cas où il faut donner une interprétation fréquentielle.

$$H_{PID1}(q^{-1}) = \frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})} = K \left[1 + \frac{T_e}{T_i} \cdot \frac{1}{1-q^{-1}} + \frac{NT_e}{T_d + NT_e} \frac{(1-q^{-1})}{1 - \frac{T_d}{T_d + NT_e} q^{-1}} \right] \quad [3.2.5]$$

L'expression en terme de rapport de deux polynômes s'obtient en faisant la somme des trois termes. Les polynômes $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ ont la forme :

$$R(q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} + r_2 q^{-2} \quad [3.2.6]$$

$$S(q^{-1}) = (1 - q^{-1})(1 + s'_1 q^{-1}) = (1 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2}) \quad [3.2.7]$$

où :

$$s'_1 = -\frac{T_d}{T_d + NT_e} \quad ; \quad r_0 = K \left(1 + \frac{T_e}{T_i} - Ns_1 \right)$$

$$r_1 = K \left[s_1 \left(1 + \frac{T_e}{T_i} + 2N \right) - 1 \right] \quad ; \quad r_2 = -Ks_1(1 + N)$$

Le régulateur numérique PID 1 a quatre paramètres (r_0, r_1, r_2, s'_1) comme le régulateur PID continu.

A noter que la fonction de transfert échantillonnée du régulateur numérique P.I.D.1 contient en facteur commun au dénominateur le terme $(1-q^{-1})$ qui assure l'effet d'intégration numérique. Elle contient aussi au dénominateur le terme $(1+s'_1 q^{-1})$ qui joue le rôle d'un filtre numérique similaire au filtrage introduit par le terme $[1 + (T_d/N) s]$ dans le régulateur P.I.D. continu.

Le schéma bloc correspondant est donné dans la partie supérieure de la figure 3.2.1. En prenant $T(q^{-1}) = R(q^{-1})$, le régulateur numérique PID 1 peut se mettre sous la forme canonique à trois branches comme le montre la partie inférieure de la figure 3.2.1.

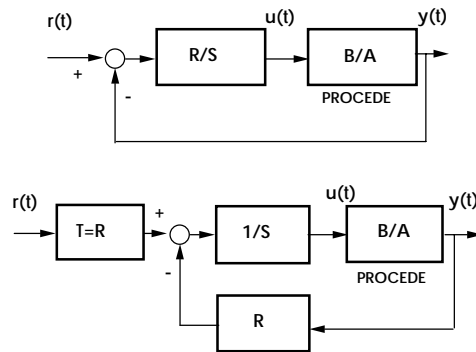


Figure 3.2.1. Schémas blocs équivalents d'une boucle de régulation numérique utilisant le régulateur numérique PID 1

La fonction (opérateur) de transfert en boucle fermée reliant la consigne $r(t)$ et la sortie $y(t)$ est :

$$H_{BF}(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})R(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + B(q^{-1})R(q^{-1})} = \frac{B(q^{-1})R(q^{-1})}{P(q^{-1})} \quad [3.2.8]$$

où le polynôme $P(q^{-1})$ définit les pôles désirés en boucle fermée (directement reliés aux performances souhaitées en régulation).

Le produit $B(q^{-1})R(q^{-1})$ définit les zéros en boucle fermée. Le régulateur numérique P.I.D.1 ne simplifie pas en général les zéros du procédé (sauf si on choisit $B(q^{-1})$ comme facteur de $P(q^{-1})$) et donc il peut être utilisé pour la régulation des procédés ayant un modèle échantillonné avec des zéros instables (situation qui se produit par exemple dans le cas où il y a un retard fractionnaire supérieur à la moitié d'une période d'échantillonnage, voir paragraphe 2.3.7).

D'autre part, le régulateur numérique PID 1 introduit des zéros supplémentaires définis par $R(q^{-1})$ qui vont dépendre de $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ et $P(q^{-1})$ et donc ne pourront pas être spécifiés a priori. Dans certaines situations, ces zéros peuvent causer des dépassements indésirables pendant le transitoire (voir les exemples donnés plus loin dans le paragraphe 3.2.3).

3.2.2. Calcul des paramètres du régulateur numérique PID 1

Le calcul comporte plusieurs étapes :

- 1) détermination du modèle échantillonné du procédé discrétisé ;
- 2) spécification des performances ;

3) calcul des paramètres du régulateur (les coefficients des polynômes $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$).

Modèle échantillonné du procédé

Il s'agit de déterminer la fonction de transfert $H(z^{-1})$ du modèle échantillonné d'un procédé ayant la fonction de transfert $H(s)$ et qui est commandé à travers un bloqueur d'ordre zéro tel que l'indique schématiquement la figure 3.2.2.

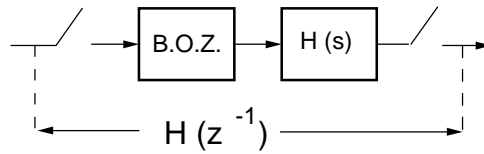


Figure 3.2.2. Modèle échantillonné de procédé pour le calcul des régulations numériques

Nous pouvons considérer des fonctions de transfert continues de la forme suivante :

$$H(s) = \frac{Ge^{-s\tau}}{1 + sT} \quad [3.2.9]$$

ou :

$$H(s) = \frac{\omega_0^2 e^{-s\tau}}{\omega_0^2 + 2\zeta\omega_0 s + s^2} \quad [3.2.10]$$

avec la restriction :

$$\tau < T_e \quad [3.2.11]$$

Notons par ailleurs que, pour le système du 1^{er} ordre la période d'échantillonnage T_e doit être plus petite que T ($T_e < T$, voir l'équation [2.2.4]). Il résulte donc que le PID numérique ne peut être correctement appliqué qu'au système du 1^{er} ordre avec retard vérifiant la condition $\tau < T$.

Pour ces deux types de modèles continus, la discrétisation avec bloqueur conduit à un opérateur de transfert échantillonné de la forme :

$$H(q^{-1}) = \frac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2}}{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}} \quad [3.2.12]$$

L'opérateur de transfert $H(q^{-1})$ peut s'obtenir :

- directement par identification du procédé,
- par discrétisation à partir de la connaissance de $H(s)$ et T_e en utilisant soit un logiciel (WinREG ou Scilab ou Matlab, voir paragraphe 2.3.6) soit des tables de transformation.

Spécification des performances

En règle générale, on peut exprimer les performances désirées du système en boucle fermée en termes de paramètres d'une fonction de transfert échantillonnée. Ceci peut s'exprimer par la condition :

$$H_{BF}(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})R(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + B(q^{-1})R(q^{-1})} = \frac{B_M(q^{-1})}{P(q^{-1})} \quad [3.2.13]$$

Mais $B_M(q^{-1})$ ne peut pas être spécifié a priori car en général d'une part on ne simplifie pas $B(q^{-1})$ (sauf s'il est stable, ce qui correspond au cas où le retard est négligeable) et d'autre part le régulateur introduit lui-même des zéros par l'intermédiaire de $R(q^{-1})$. Il reste donc à spécifier le polynôme caractéristique de la boucle fermée. On choisit pour commencer $P(q^{-1})$ de la forme :

$$P(q^{-1}) = 1 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2} \quad [3.2.14]$$

Une méthode judicieuse pour définir p_1 et p_2 consiste à considérer d'abord un modèle continu normalisé du 2^e ordre (voir paragraphe 1.1.6) permettant d'obtenir un temps de montée (t_M) ou un temps d'établissement (t_F) et un dépassement maximal (M) en concordance avec les spécifications. Ce choix peut se faire à l'aide des diagrammes donnés dans les figures 1.1.10 et 1.1.11. Ceci permet de déterminer les paramètres ω_0 et ζ du système du 2^e ordre. En s'assurant que la période d'échantillonnage T_e et la pulsation propre vérifient la condition :

$$0.25 \leq \omega_0 T_e \leq 1.5 \quad ; \quad 0.7 \leq \zeta \leq 1 \quad [3.2.15]$$

on calcule le modèle discrétisé avec bloqueur en utilisant soit un logiciel tel WinREG (Adapttech), Scilab ou Matlab soit les tables de transformation (voir paragraphe 2.3.6). Le dénominateur de la fonction de transfert échantillonnée ainsi obtenu représentera le polynôme $P(q^{-1})$.

Calcul des paramètres du régulateur numérique

De [3.2.13] on déduit qu'il s'agit de résoudre l'équation polynomiale suivante :

$$P(q^{-1}) = A(q^{-1}) S(q^{-1}) + B(q^{-1}) R(q^{-1}) \quad [3.2.16]$$

où $S(q^{-1})$ et $R(q^{-1})$ sont les polynômes à trouver. Dans l'équation [3.2.16] $P(q^{-1})$ est donné par l'équation [3.2.14] et $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ donnés par l'équation [3.2.12]. Les structures de $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ sont données respectivement par les équations [3.2.6] et [3.2.7]. Il s'agit de résoudre une équation polynomiale de Bezout.

La version éclatée de l'équation [3.2.16] est :

$$\begin{aligned} P(q^{-1}) &= 1 + p'_1 q^{-1} + p'_2 q^{-2} = A(q^{-1})S(q^{-1}) + B(q^{-1})R(q^{-1}) \\ &= (1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2})(1 - q^{-1})(1 + s'_1 q^{-1}) \\ &\quad + (b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2})(r_0 + r_1 q^{-1} + r_2 q^{-2}) \\ &= A'(q^{-1})S'(q^{-1}) + B(q^{-1})R(q^{-1}) \end{aligned} \quad [3.2.17]$$

où :

$$\begin{aligned} A'(q^{-1}) &= A(q^{-1})(1 - q^{-1}) = (1 + a'_1 q^{-1} + a'_2 q^{-2} + a'_3 q^{-3}) \\ &= (1 + (a_1 - 1)q^{-1} + (a_2 - a_1)q^{-2} - a_2 q^{-3}) \end{aligned} \quad [3.2.18]$$

$$S'(q^{-1}) = 1 + s'_1 q^{-1} \quad [3.2.19]$$

Résoudre une équation polynomiale implique que les coefficients des divers puissances de q soient égaux dans les deux membres. Nous observons que l'ordre maximal du membre droit est q^{-4} (c'est-à-dire nous aurons à résoudre un système de quatre équations et nous disposons de quatre inconnues). Par contre, l'ordre du membre gauche est q^{-2} ce qui peut être interprété comme un choix des coefficients nuls pour les puissances q^{-3} et q^{-4} du polynôme $P(q^{-1})$. Mais, en réalité, il est possible d'affecter des valeurs différentes de zéro pour ces coefficients.

En général on va choisir :

$$\begin{aligned} P(q^{-1}) &= (1 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2} + p_3 q^{-3} + p_4 q^{-4}) = \\ &= (1 + p'_1 q^{-1} + p'_2 q^{-2})(1 + \alpha_1 q^{-1})(1 + \alpha_2 q^{-2}) \end{aligned} \quad [3.2.20]$$

où les coefficients p'_1 et p'_2 résultent de la discrétisation d'un modèle du 2^e ordre avec ω_0 et ζ permettant de spécifier les performances nominales et α_1, α_2 correspondent à des pôles « auxiliaires » aperiodiques $-\alpha_1$ et $-\alpha_2$ situés sur

l'axe réel (à l'intérieur du cercle unité) et correspondant à une fréquence supérieure à $\omega_0/2\pi$ (voir figure 3.2.3).

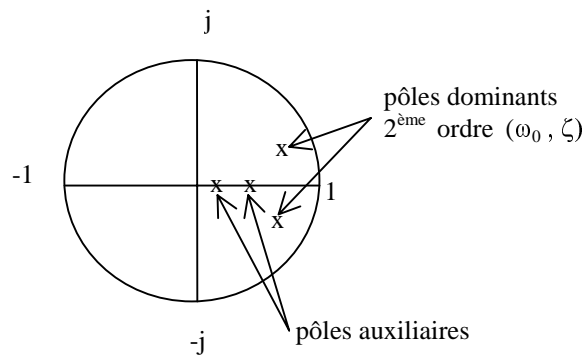


Figure 3.2.3. Pôles dominants et pôles auxiliaires pour le calcul du régulateur PID numérique

On observe que $-\alpha_1$ et $-\alpha_2$ sont plus petits que la partie réelle des pôles dominants (ils sont donc plus rapides). L'introduction des pôles auxiliaires permet d'améliorer la robustesse du régulateur. Souvent en pratique on prend soit $\alpha_1 = \alpha_2$, soit $\alpha_2 = 0$ et les valeurs typiques sont :

$$-0.05 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq -0.5 \quad [3.2.21]$$

Le système de quatre équations à résoudre est :

$$p_1 = b_1 r_0 + s'_1 + a'_1$$

$$p_2 = b_2 r_0 + b_1 r_1 + s'_1 a'_1 + a'_2$$

$$p_3 = b_2 r_1 + b_1 r_2 + s'_1 a'_2 + a'_3$$

$$p_4 = b_2 r_2 + s'_1 a'_3$$

Ce système d'équations se met souvent sous la forme matricielle :

$$Mx = p \quad [3.2.22]$$

où :

$$x^T = [1, s'_1, r_0, r_1, r_2] \quad [3.2.23]$$

$$p^T = [1, p_1, p_2, p_3, p_4] \quad [3.2.24]$$

et la matrice M est de la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a'_1 & 1 & b_1 & 0 & 0 \\ a'_2 & a'_1 & b_2 & b_1 & 0 \\ a'_3 & a'_2 & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & a'_3 & 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

La solution de l'équation [3.2.22] s'exprime :

$$x = M^{-1} p \quad [3.2.25]$$

où M^{-1} est la matrice inverse de M . Pour que cette inverse existe, il faut que le déterminant de la matrice M soit différent de zéro. On peut montrer que ceci est assuré si et seulement si $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ sont des polynômes premiers entre eux (pas de simplification de pôles et zéros).

Exercice

Soit :

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} = b_1 q^{-1} \left(1 + \frac{b_2}{b_1} q^{-1}\right)$$

$$A(q^{-1}) = \left(1 + \frac{b_2}{b_1} q^{-1}\right) (1 + c q^{-1})$$

Montrer que dans ce cas $\det M = 0$.

Le progiciel WinREG (Adaptech) donne directement les paramètres du régulateur numérique P.I.D. à partir des spécifications.

Pour la résolution de l'équation de Bezout on peut utiliser la fonction *bezoutd.sci* sous Scilab et la fonction *bezoutd.m* sous Matlab².

Les paramètres du régulateur P.I.D. continu qui par discrétisation avec la période d'échantillonnage T_e donnent les paramètres calculés de $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$, résultent des relations suivantes :

$$K = \frac{r_0 s'_1 - r_1 - (2 + s'_1) r_2}{(1 + s'_1)^2} \quad [3.2.26]$$

$$T_i = T_e \cdot \frac{K(1 + s'_1)}{r_0 + r_1 + r_2} \quad [3.2.27]$$

$$T_d = T_e \cdot \frac{s'_1 r_0 - s'_1 r_1 + r_2}{K(1 + s'_1)^3} \quad [3.2.28]$$

$$\frac{T_d}{N} = \frac{-s'_1 T_e}{1 + s'_1} \quad [3.2.29]$$

Le progiciel WinREG calcule automatiquement ces paramètres. Pour qu'un PID continu équivalent à un PID numérique existe, il faut que le coefficient s'_1 vérifie la condition :

$$-1 < s'_1 \leq 0 \quad [3.2.30]$$

Dans le cas contraire ($0 < s'_1 < 1$), le filtre numérique $1/(1 + s'_1 q^{-1})$ est un filtre numérique stable mais sans correspondant (du 1^{er} ordre) en continu. Le régulateur numérique PID offre dans ce cas des performances très intéressantes mais on ne peut pas obtenir un PID continu équivalent (voir les exemples donnés plus loin dans le paragraphe 3.2.3).

2. Sous Scilab et Matlab il faut spécifier $A'(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ et on obtient $S'(q^{-1})$ et $R(q^{-1})$. $S(q^{-1})$ s'obtient en utilisant [3.2.7].

3.2.3. Régulateur numérique PID 1. Exemples

Nous considérons le cas de la régulation d'un procédé du 1^{er} ordre avec retard ayant les caractéristiques suivantes :

- gain (G) = 1 ;
- constante de temps (T) = 10 s ;
- retard pur (τ) = 3 s.

Nous choisissons une période d'échantillonnage $T_e = 5$ s pour vérifier les conditions: $\tau < T_e$ et $T_e < T$.

L'objectif est d'obtenir un temps réduit de montée en boucle fermée avec un très faible dépassement. L'amortissement du modèle des performances est fixé à $\zeta = 0.8$ et la pulsation propre ω_0 sera choisie dans la gamme : $0.25 \leq \omega_0 T_e \leq 1.5$.

Pour $\omega_0 = 0.05$ ($\omega_0 T_e = 0.25$), les résultats obtenus avec le progiciel WinREG (Adaptech) sont résumés dans le tableau 3.2.1.

L'évolution de la sortie $y(t)$ et de la commande $u(t)$ est représentée dans la figure 3.2.4.

Procédé: $B(q^{-1}) = 0.1813 q^{-1} + 0.2122 q^{-2}$	
$A(q^{-1}) = 1 - 0.6065 q^{-1}$	
$T_e = 5s, G = 1, T = 10s, \tau = 3$	
Performances	→ $T_e = 5s, \omega_0 = 0.05 \text{ rad/s}, \zeta = 0.8$
***LOI DE COMMANDE ***	
$S(q^{-1}) \cdot u(t) + R(q^{-1}) \cdot y(t) = T(q^{-1}) \cdot r(t)$	
Régulateur :	$R(q^{-1}) = 0.0621 + 0.0681 q^{-1}$
	$S(q^{-1}) = (1 - q^{-1}) \cdot (1 - 0.0238 q^{-1})$
	$T(q^{-1}) = R(q^{-1})$
Marge de gain :	7.712
	Marge de phase : 67.2 deg
Marge de module :	0.751 (-2.49dB)
	Marge de retard : 45.4 s
PID continu : $k = -0.073, T_i = -2.735, T_d = -0.122, T_d/N = 0.122$	

Tableau 3.2.1. PID numérique (structure 1), $\omega_0 = 0.05 \text{ rad/s}$

Nous constatons que la réponse en boucle fermée à un échelon de consigne (environ $13T_e = 65$ s) est plus lente qu'en boucle ouverte (environ $2.2T + \tau = 25$ s)

car la commande $u(t)$ envoyée par le régulateur correspond à un échelon filtré. Cette situation est bien connue en pratique. Pour des retards purs supérieurs à 20 ou 25 % de la constante de temps, le PID continu ralentit le système en boucle fermée par rapport au système en boucle ouverte. Peut-on donc obtenir de meilleures performances avec un PID numérique ?

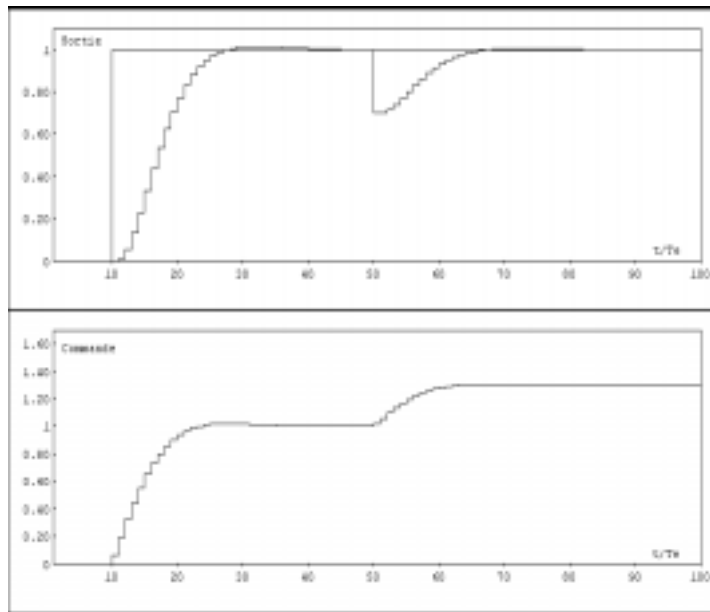


Figure 3.2.4. Performances du régulateur numérique PID 1, $\omega_0 = 0.05 \text{ rad/s}$ en poursuite et régulation

Prenons $\omega_0 = 0.1 \text{ rad/s}$ (doublement de la vitesse de réponse). Les résultats du calcul sont résumés dans le tableau 3.2.2 et l'évolution de la sortie et de la commande du procédé est représentée dans la figure 3.2.5.

En examinant les résultats des calculs donnés dans le tableau 3.2.3, on constate tout d'abord que s'_1 est positif, et donc il n'y a pas de régulateur PID continu équivalent.

On observe une accélération de la réponse du procédé par rapport au cas précédent mais aussi l'apparition d'un léger dépassement (supérieur à celui correspondant à $\zeta = 0.8$).

L'explication de ce dépassement est donnée par les coefficients de $T(q^{-1}) = R(q^{-1})$. Le polynôme $T(q^{-1}) = R(q^{-1})$ qui introduit des zéros dans la fonction de transfert, a maintenant son deuxième coefficient de signe négatif. Comme les zéros interviennent aux premiers instants de la réponse, la contribution de $R(q^{-1})$ va être un saut positif suivi d'un saut négatif, et l'échelon de consigne filtré par $R(q^{-1})$ va présenter un pic dépendant de la différence $r_0 - r_1$, qui ne va pas être complètement atténué par le reste de la fonction de transfert. Pour qu'il n'y ait pas de dépassement significatif pour cette configuration de PID, il suffit (pour $\zeta > 0.7$) que tous les coefficients de $R(q^{-1})$ soient positifs.

Procédé : $B(q^{-1}) = 0.1813 q^{-1} + 0.2122 q^{-2}$	
$A(q^{-1}) = 1 - 0.6065 q^{-1}$	
$T_e = 5s, G = 1, T = 10s, \tau = 3$	
Performances	—————> $T_e = 5s, \omega_0 = 0.1 \text{ rad/s}, \zeta = 0.8$
*** LOI DE COMMANDE ***	
$S(q^{-1}) \cdot u(t) + R(q^{-1}) \cdot y(t) = T(q^{-1}) \cdot r(t)$	
Régulateur :	$R(q^{-1}) = 0.8954 - 0.4671 q^{-1}$
	$S(q^{-1}) = (1 - q^{-1}) \cdot (1 + 0.16343 q^{-1})$
	$T(q^{-1}) = R(q^{-1})$
Marge de gain : 6.046	Marge de phase : 65.9 deg
Marge de module : 0.759 (-2, 39 dB)	Marge de retard : 16.8 s
PID continu : (pas d'équivalent continu)	

Tableau 3.2.2. PID numérique (structure 1), $\omega_0 = 0.1 \text{ rad/s}$

Processus : $B(q^{-1}) = 0.1813 q^{-1} + 0.2122 q^{-2}$	
$A(q^{-1}) = 1 - 0.6065 q^{-2}$	
$T_e = 5s, G = 1, T = 10s, \tau = 3$	
Performances	—————> $T_e = 5s, \omega_0 = 0.15 \text{ rad/s}, \zeta = 0.8$
*** LOI DE COMMANDE ***	
$S(q^{-1}) \cdot u(t) + R(q^{-1}) \cdot y(t) = T(q^{-1}) \cdot r(t)$	
Régulateur :	$R(q^{-1}) = 1.6874 - 0.8924 q^{-1}$
	$S(q^{-1}) = (1 - q^{-1}) \cdot (1 + 0.3122 q^{-1})$
	$T(q^{-1}) = R(q^{-1})$
Marge de gain : 3.681	Marge de phase : 58.4 deg
Marge de module : 0.664 (-3.56 dB)	Marge de retard : 9.4 s
PID continu : (pas d'équivalent continu)	

Tableau 3.2.3. PID numérique (structure 1) $\omega_0 = 0.15 \text{ rad/s}$

En prenant maintenant $\omega_0 = 0.15 \text{ rad/s}$ (tableau 3.2.3 et figure 3.2.6), on obtient une accélération encore plus marquée de la réponse, mais le dépassement devient plus important. Comme dans le cas précédent, il n'y a pas de régulateur PID continu équivalent. On constate aussi que l'écart $r_0 - r_1$ est plus important, ce qui explique l'augmentation du dépassement. Pour éliminer l'effet non désiré des zéros introduits par le régulateur numérique PID 1, il faut donc choisir une autre structure pour $T(q^{-1})$ qui n'introduit pas de zéros supplémentaires dans la fonction de transfert en boucle fermée. Ceci conduit au régulateur numérique PID 2.

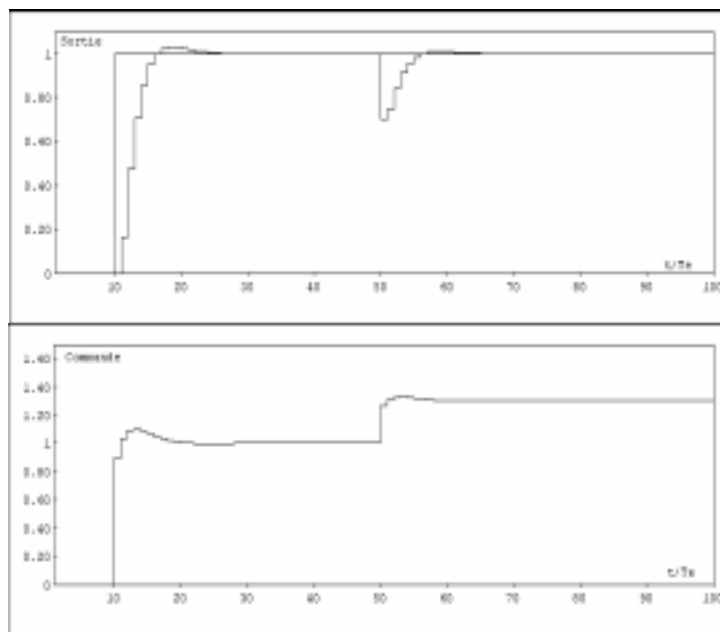


Figure 3.2.5. Performances du régulateur numérique PID 1, $\omega_0 = 0.1 \text{ rad/s}$ en poursuite et régulation

3.2.4. Régulateur numérique PID 2

C'est un PID numérique qui n'introduit pas de zéros supplémentaires.

La fonction de transfert désirée en boucle fermée (entre la consigne et la sortie) sera de la forme :

$$H_{BF}(q^{-1}) = \frac{P(1)}{B(1)} \cdot \frac{B(q^{-1})}{P(q^{-1})} \quad [3.2.31]$$

où $B(q^{-1})$ contient les zéros du procédé qui resteront inchangés. $P(q^{-1})$ définit les pôles désirés en boucle fermée et le terme $P(1)/B(1)$ est introduit pour assurer un gain stationnaire unitaire entre la consigne et la sortie.

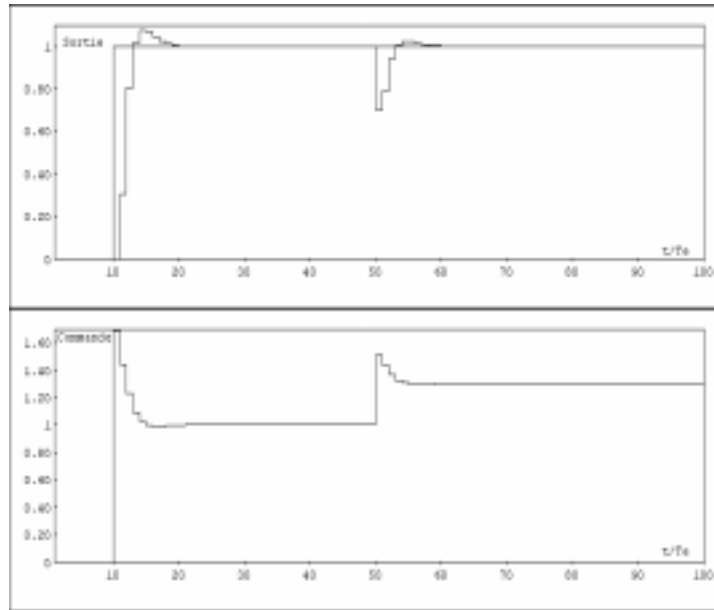


Figure 3.2.6. Performances du régulateur numérique PID 1, $\omega_0 = 0.15$ rad/s en poursuite et régulation

Le régulateur aura la structure générale :

$$S(q^{-1}) u(t) + R(q^{-1}) y(t) = T(q^{-1}) r(t) \quad [3.2.32]$$

où $S(q^{-1})$ et $R(q^{-1})$ sont donnés respectivement par les équations [3.2.6] et [3.2.7].

La fonction de transfert en boucle fermée, en utilisant le régulateur spécifié par l'équation [3.2.32], sera :

$$H_{BF}(q^{-1}) = \frac{T(q^{-1})B(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + B(q^{-1})R(q^{-1})} = \frac{[P(1)/B(1)]B(q^{-1})}{P(q^{-1})} \quad [3.2.33]$$

Comme pour le PID 1, les coefficients des polynômes $S(q^{-1})$ et $R(q^{-1})$ seront obtenus par la résolution de l'équation [3.2.16]. Il résulte alors de l'équation [3.2.33] :

$$T(q^{-1}) = \frac{P(1)}{B(1)} = \frac{B(1)R(1)}{B(1)} = R(1) \quad [3.2.34]$$

car $S(1) = 0$ (ce qui implique $P(1) = B(1) R(1)$). Donc $T(q^{-1})$ sera un simple gain égal à la somme des coefficients de $R(q^{-1})$.

En conclusion, le régulateur numérique PID 2 a les mêmes polynômes $S(q^{-1})$ et $R(q^{-1})$ que le régulateur numérique PID 1, la seule différence étant que maintenant $T(q^{-1}) = R(1)$ au lieu de $R(q^{-1})$, ce qui préserve le gain stationnaire unitaire du système en boucle fermée sans pour autant introduire l'effet des zéros de $R(q^{-1})$.

Le PID continu (structure 2) qui conduit par discrétisation au régulateur numérique PID 2 est représenté dans la figure 3.2.7. (action proportionnelle et dérivée sur la mesure uniquement).

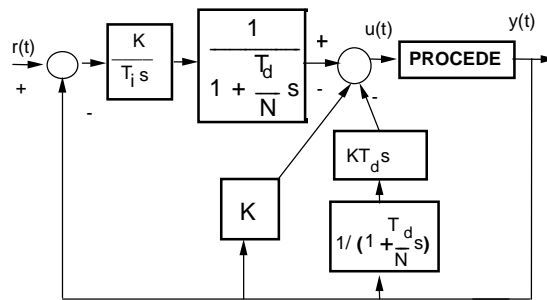


Figure 3.2.7. PID continu correspondant au régulateur numérique PID2

Les paramètres de ce régulateur PID continu (type 2) qui, par discrétisation avec la période d'échantillonnage T_e donnent par les paramètres calculés de $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$, résultent des relations suivantes :

$$K = \frac{-(r_1 + 2r_2)}{1 + s'_1} \quad [3.2.35]$$

$$T_i = T_e \cdot \frac{-(r_1 + 2r_2)}{r_0 + r_1 + r_2} \quad [3.2.36]$$

$$T_d = T_e \cdot \frac{s'_1 r_1 + (s'_1 - 1)r_2}{(r_1 + 2r_2)(1 + s'_1)} \quad [3.2.37]$$

$$\frac{T_d}{N} = \frac{-s'_1 T_e}{1 + s'_1} \quad [3.2.38]$$

Le progiciel WinREG (Adaptech) calcule automatiquement ces paramètres. Comme dans le cas du PID 1, pour qu'un PID continu équivalent à un régulateur numérique PID 2 existe, la condition [3.2.30] sur le coefficient s'_1 doit être satisfaite (c'est-à-dire $-1 < s'_1 \leq 0$).

Procédé : $B(q^{-1}) = 0.1813 q^{-1} + 0.2122 q^{-2}$	
$A(q^{-1}) = 1 - 0.6065 q^{-1}$	
$T_e = 5s, G = 1, T = 10s, \tau = 3$	
Performances	—————> $T_e = 5s, \omega_0 = 0.15 \text{ rad/s}, \zeta = 0.8$
LOI DE COMMANDE	
$S(q^{-1}) u(t) + R(q^{-1}) y(t) = T(q^{-1}) r(t)$	
Régulateur :	$R(q^{-1}) = 1.6874 - 0.8924 q^{-1}$
	$S(q^{-1}) = (1 - q^{-1})(1 + 0.3122 q^{-1})$
	$T(q^{-1}) = 0.795$
Marge de gain : 3.681	Marge de phase : 58.4 deg
Marge de module : 0.664 (- 3.56 dB)	Marge de retard : 9.4 s
PID Continu : (Pas d'équivalent continu)	

Tableau 3.2.4. PID numérique (structure 2) $\omega_0 = 0.15 \text{ rad/s}$

Le tableau 3.2.4 donne les résultats du calcul du régulateur numérique PID 2 pour le même procédé considéré dans le cas du régulateur numérique PID 1 et avec $\omega_0 = 0.15 \text{ rad/sec}$ (les résultats sont à comparer avec ceux donnés dans le tableau 3.2.3 ; les valeurs des coefficients de $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ sont les mêmes). Les performances obtenues sont illustrées dans la figure 3.2.8 qui doit être comparée avec la figure 3.2.6. On observe que pour les mêmes valeurs des polynômes $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$, avec le régulateur numérique PID 2 le dépassement en transitoire a pratiquement disparu (échelon sur la consigne). Par ailleurs, les réponses à une perturbation sont identiques pour le PID 1 et PID 2.

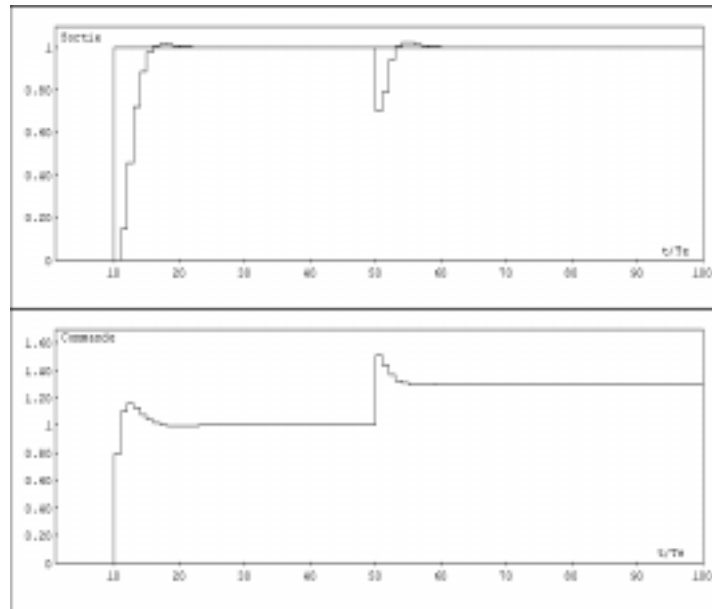


Figure 3.2.8. Performances du régulateur numérique PID 2, $\omega_0 = 0.15 \text{ rad/s}$ en poursuite et régulation

Notons aussi que les valeurs obtenues pour les différentes marges de robustesse (gain, phase, module, retard) sont tout à fait satisfaisantes.

3.2.5. Effets des pôles auxiliaires

Les figures 3.2.9 et 3.2.10 présentent les caractéristiques fréquentielles de $|S_{yp}|$ et $|S_{up}|$ pour trois régulateurs PID calculés pour le même procédé que précédemment mais avec les spécifications de performances suivantes :

- $\omega_0 = 0.25 \text{ rad/s}$; $\zeta = 0.8$;
- $\omega_0 = 0.2 \text{ rad/s}$; $\zeta = 0.8$;
- $\omega_0 = 0.25 \text{ rad/s}$; $\zeta = 0.8$ plus deux pôles auxiliaires $-\alpha_1 = -\alpha_2 = 0.15$.

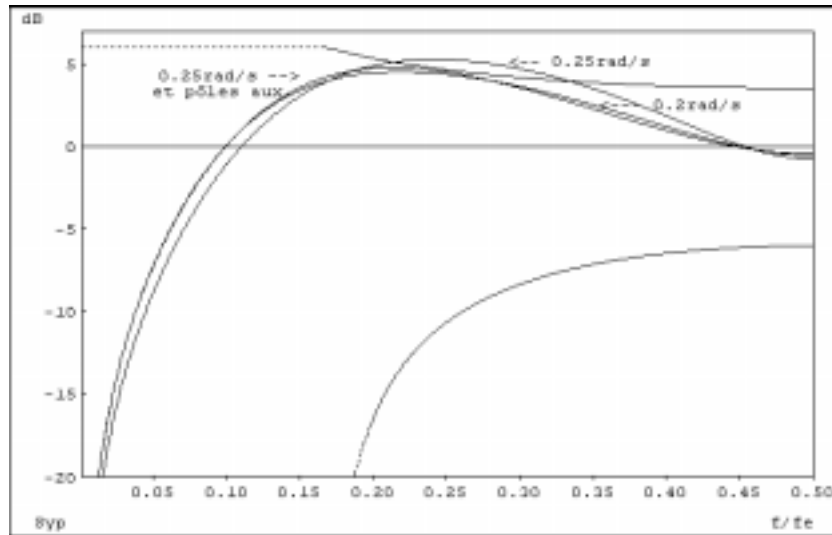


Figure 3.2.9. Caractéristique fréquentielle du module de la fonction de sensibilité perturbation-sortie S_{yp} pour différents régulateurs PID

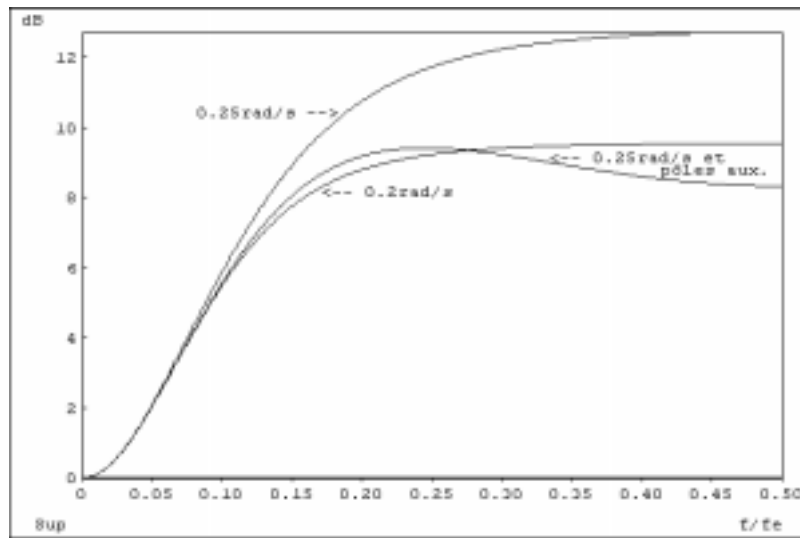


Figure 3.2.10. Caractéristique fréquentielle du module de la fonction de sensibilité perturbation-entrée S_{up} pour différents régulateurs PID

Dans la figure 3.2.9 la zone fréquentielle (basse fréquences) où $|S_{yp}| < 0 \text{ dB}$ correspond à la bande d'atténuation des perturbations. Les zones fréquentielles où $|S_{yp}| > 0 \text{ dB}$ correspondent à des zones où les perturbations sont amplifiées. Au fréquences où $|S_{yp}| = 0 \text{ dB}$ on a un comportement « en boucle ouverte » car les perturbations en sortie ne sont ni atténuées ni amplifiées.

Un régulateur est d'autant plus performant que la bande d'atténuation est plus grande. Mais l'augmentation de cette bande entraîne une augmentation de l'amplification des éventuelles perturbations au delà de la bande d'atténuation et une augmentation du maximum de $|S_{yp}|$ ce qui réduit la marge de module (on verra plus loin que la surface de la zone d'atténuation doit être égale à la surface de la zone d'amplification).

On observe que pour $\omega_0 = 0.25 \text{ rad/s}$ la bande d'atténuation est plus grande que pour $\omega_0 = 0.2 \text{ rad/s}$.

On observe aussi que l'introduction des pôles auxiliaires est à peu près équivalente à une réduction des performances (la courbe pour $\omega_0 = 0.2 \text{ rad/s}$ est très proche de celle pour $\omega_0 = 0.25 \text{ rad/s}$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.15$).

Par contre, si on examine la caractéristique fréquentielle du module de la fonction de sensibilité perturbation-entrée, on observe que l'introduction des pôles auxiliaires pour le cas $\omega_0 = 0.25 \text{ rad/s}$ à un meilleur effet que la réduction des performances sans introduction des pôles auxiliaires. En effet, les pôles auxiliaires permettent de réduire la valeur de $|S_{up}|$ en haute fréquence sans affecter les performances en régulation (voir l'évolution de $|S_{yp}|$), c'est-à-dire qu'on aura une meilleure robustesse vis-à-vis des éventuelles incertitudes sur le modèle du procédé en hautes fréquences et aussi une moindre sollicitation de l'actionneur.

Pour assurer une bonne robustesse en hautes fréquences et réduire les sollicitations de l'actionneur il faudrait pouvoir réduire d'une façon plus significative $|S_{up}|$ en hautes fréquences, ce qui implique une réduction du gain du régulateur à ces fréquences. L'introduction des pôles auxiliaires améliore la situation mais ne permet pas de contourner une limitation fondamentale des régulateurs PID, à savoir l'impossibilité d'obtenir un gain très faible en hautes fréquences. Pour ceci il faut soit augmenter l'ordre de $S(q^{-1})$ pour introduire un filtrage par un 2^e ordre au lieu d'un 1^{er} ordre soit « ouvrir la boucle », c'est-à-dire augmenter la taille de $R(q^{-1})$ pour pouvoir introduire des zéros conduisant à un gain nul du régulateur à la

fréquence de $0.5 f_e$. L'utilisation de la stratégie du placement des pôles sans contraintes sur la taille de $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ permettra de résoudre ce problème.

3.2.6. PID numérique : conclusions

La discrétisation du PID classique conduit à un régulateur numérique ayant une structure canonique à trois branches (R-S-T) avec $T(q^{-1}) = R(q^{-1})$ (PID 1).

A partir des coefficients de $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ on peut calculer les coefficients d'un PID continu si le polynôme :

$$S(q^{-1}) = 1 + s'_1 q^{-1} \quad \text{à } s'_1 \in]-1, 0[$$

Le PID continu ou numérique peut traiter des systèmes du 1^{er} ordre ou 2^e ordre avec retard, si celui-ci est inférieur à T_e (période d'échantillonnage).

Pour des retards $\tau \geq 0.25 T$ (constante de temps du procédé), le PID continu conduit à des réponses en boucle fermée *plus lentes* qu'en boucle ouverte !

Pour des systèmes avec retard, les performances en boucle fermée peuvent être améliorées par des choix des coefficients de R , S , T qui ne conduisent pas à un PID continu.

Les éventuels dépassements en boucle fermée peuvent être éliminés en remplaçant :

$$T(q^{-1}) = R(q^{-1}) \text{ [PID (1)]} \quad \text{par} \quad T(q^{-1}) = R(1) \text{ [PID (2)]}$$

Le calcul des PID numériques se fait à partir de la connaissance du modèle du procédé et des performances désirées de la boucle fermée.

Tout calcul de régulateur PID doit se conclure par un examen des marges de robustesse et des caractéristiques fréquentielles de la fonction de sensibilité perturbation-entrée en hautes fréquences.

3.3. Placement des pôles

Le calcul des paramètres du régulateur numérique PID est un cas particulier de la stratégie du « placement de pôles ».

La stratégie du *placement de pôles* permet de calculer un régulateur numérique R-S-T pour des systèmes stables ou instables :

- sans restriction sur les degrés des polynômes $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ caractérisant le modèle échantillonné du procédé,
- sans restriction sur le retard du procédé,
- sans restriction sur les zéros du procédé (stables ou instables).

C'est une méthode qui ne simplifie pas les zéros du procédé (c'est la raison pour laquelle ils peuvent être instables). La seule restriction concerne les éventuels facteurs communs de $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ qui doivent être simplifiés avant d'effectuer les calculs.

3.3.1. Structure

La structure du système en boucle fermée est donnée dans la figure 3.3.1.

Le procédé à réguler est caractérisé par la fonction (opérateur) de transfert échantillonnée (irréductible) :

$$H(q^{-1}) = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad [3.3.1]$$

où d est le nombre entier de périodes d'échantillonnage contenues dans le retard pur et :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_A} q^{-n_A} \quad [3.3.2]$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_B} q^{-n_B} = q^{-1} B^*(q^{-1}) \quad [3.3.3]$$

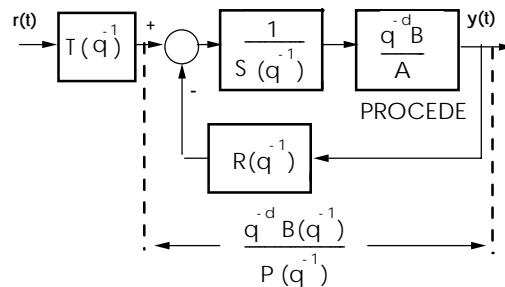


Figure 3.3.1. Placement de pôles avec régulateur R-S-T

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$H_{BF}(q^{-1}) = \frac{q^{-d}T(q^{-1})B(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})R(q^{-1})} = \frac{q^{-d}T(q^{-1})B(q^{-1})}{P(q^{-1})} \quad [3.3.4]$$

où :

$$P(q^{-1}) = A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})R(q^{-1}) = 1 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2} + \dots \quad [3.3.5]$$

définit les pôles en boucle fermée qui jouent un rôle essentiel pour le comportement en régulation.

Le comportement vis-à-vis d'une perturbation est donné par la fonction de sensibilité perturbation sortie :

$$S_{yp}(q^{-1}) = \frac{A(q^{-1})S(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})R(q^{-1})} = \frac{A(q^{-1})S(q^{-1})}{P(q^{-1})} \quad [3.3.6]$$

On voit donc que $P(q^{-1})$ correspond au dénominateur de la fonction de sensibilité perturbation-sortie et donc il définit en grande partie le comportement en régulation.

3.3.2. Choix des pôles en boucle fermée ($P(q^{-1})$)

Nous avons vu dans le cas du régulateur PID que l'on peut spécifier un polynôme $P(q^{-1})$ définissant les pôles en boucle fermée à partir d'un modèle du 2^e ordre continu ayant la fréquence propre et l'amortissement désiré (voir paragraphe 3.2.2). On peut aussi spécifier directement le polynôme $P(q^{-1})$ à partir des performances désirées. A titre d'illustration, considérons l'exemple suivant.

Soit :

$$P(q^{-1}) = 1 + p_1 q^{-1} \quad \text{avec} \quad p_1 = -0.5$$

En l'absence d'une consigne, l'évolution de la sortie sera définie par l'équation :

$$y(t+1) = -p_1 y(t) = 0.5 y(t)$$

On obtient alors une décroissance relative de 50 % de la sortie à chaque pas d'échantillonnage (voir figure 3.3.2).

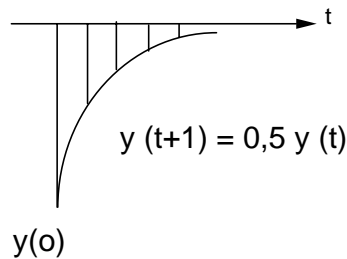


Figure 3.3.2. Réponse pour $P(q^{-1}) = 1 - 0.5 q^{-1}$

En choisissant p_1 entre -0.2 et -0.8 , on voit qu'on peut régler la vitesse d'élimination des perturbations.

Néanmoins en règle générale, on choisit $P(q^{-1})$ sous la forme d'un polynôme du 2^e ordre par discrétisation d'un système du 2^e ordre continu en spécifiant ω_0 , ζ et en s'assurant que la condition :

$$0.25 \leq \omega_0 T_e \leq 1.5 \quad ; \quad 0.7 \leq \zeta \leq 1$$

soit respectée (voir paragraphe 3.2.2). Les calculs de discrétisation peuvent être faits avec WinREG (Adapttech), Scilab ou Matlab.

Le polynôme choisi à partir des performances souhaitées en boucle fermée définira les pôles dominants du système en boucle fermée et sera noté $P_D(q^{-1})$.

Si on souhaite introduire un effet de filtrage dans une certaine zone de fréquence (soit pour réduire l'effet de bruit de mesure, soit pour adoucir les variations de la commande, soit pour améliorer la robustesse), les pôles du filtre correspondant, définis par un polynôme $P_F(q^{-1})$, doivent être aussi des pôles du système en boucle fermée. En conséquence le polynôme $P(q^{-1})$ définissant les pôles désirés en boucle fermée sera le produit des polynômes $P_D(q^{-1})$ et $P_F(q^{-1})$ spécifiant respectivement les pôles dominants et les pôles auxiliaires du système en boucle fermée.

$$P(q^{-1}) = P_D(q^{-1}) \cdot P_F(q^{-1}) \quad [3.3.7]$$

En règle générale ce qu'on appelle « pôles auxiliaires » sont des pôles plus rapides que les « pôles dominants ». Ceci est caractérisé dans le cas des systèmes échantillonnés par la propriété que les racines de $P_F(q^{-1})$ doivent avoir une partie réelle plus petite que la partie réelle des racines de $P_D(q^{-1})$.

3.3.3. Régulation (calcul de $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$)

$P(q^{-1})$ étant spécifié, pour calculer de $R(q^{-1})$ et (q^{-1}) , il faut résoudre l'équation :

$$A(q^{-1}) S(q^{-1}) + q^{-d} B(q^{-1}) R(q^{-1}) = P(q^{-1}) \quad [3.3.8]$$

connue sous le nom « d'identité de Bezout ».

En définissant :

$$n_A = \deg A(q^{-1}) \quad ; \quad n_B = \deg B(q^{-1}) \quad [3.3.9]$$

cette équation polynomiale a une solution de degré minimal unique ($A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ étant premiers entre eux) pour :

$$n_P = \deg P(q^{-1}) \leq n_A + n_B + d - 1 \quad ;$$

$$n_S = \deg S(q^{-1}) = n_B + d - 1 \quad ; \quad n_R = \deg R(q^{-1}) = n_A - 1 \quad [3.3.10]$$

où :

$$S(q^{-1}) = 1 + s_1 q^{-1} + \dots + s_{n_S} q^{-n_S} = 1 + q^{-1} S^*(q^{-1}) \quad [3.3.11]$$

$$R(q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} + \dots + r_{n_R} q^{-n_R} \quad [3.3.12]$$

Pour effectivement résoudre l'équation [3.3.8], celle-ci se met sous la forme matricielle :

$$M x = p \quad [3.3.13]$$

où :

$$x^T = [1, s_1, \dots, s_{n_S}, r_0, \dots, r_{n_R}] \quad [3.3.14]$$

$$p^T = [1, p_1, \dots, p_i, \dots, p_{n_P}, 0, \dots, 0] \quad [3.3.15]$$

et la matrice M a la forme :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \overbrace{\hspace{2cm}} & \overbrace{\hspace{2cm}} \\
 n_B + d & n_A
 \end{array} \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 1 & 0 & \dots & 0 \\
 a_1 & 1 & & \cdot \\
 a_2 & & & 0 \\
 & & & 1 \\
 & & & a_1 \\
 a_{n_A} & & & a_2 \\
 0 & & & \cdot \\
 0 & \dots & 0 & a_{n_A}
 \end{array} \right]
 \begin{array}{cccc}
 0 & \dots & \dots & 0 \\
 b'_1 & & & \\
 b'_2 & & & b'_1 \\
 \cdot & & & b'_2 \\
 \cdot & & & \cdot \\
 b'_{n_B} & & & \cdot \\
 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & b'_{n_B}
 \end{array}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}} \right\} n_A + n_B + d$$

$n_A + n_B + d$

où :

$$b'_i = 0 \text{ pour } i = 0, 1 \dots d \quad ; \quad b'_i = b_{i-d} \text{ pour } i \geq d+1$$

Le vecteur x qui contient les coefficients des polynômes $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ s'obtient après inversion de la matrice M par la formule :

$$x = M^{-1} p \tag{3.3.16}$$

où M^{-1} est la matrice inverse de M . Pour que cette inverse existe il faut que le déterminant de la matrice M soit différent de zéro. On peut montrer que ceci est assuré si et seulement si $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ sont des polynômes premiers entre eux (pas de simplification des pôles et des zéros).

Différentes méthodes sont utilisées pour résoudre l'équation [3.3.8]. Ces méthodes ont des performances numériques supérieures à une simple inversion matricielle.

Pour des raisons variées les polynômes $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ doivent contenir en général des parties fixes spécifiées avant la résolution de l'équation [3.3.8]. Par exemple, la nécessité d'avoir une erreur statique nulle pour une consigne ou une perturbation en échelon implique la présence d'un intégrateur numérique dans la voie directe, respectivement la présence d'un terme $(1-q^{-1})$ dans le polynôme $S(q^{-1})$ (voir section 2.4).

C'est pour prendre en compte ces parties fixes pré spécifiées que les polynômes $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ sont factorisés sous la forme :

$$R(q^{-1}) = R'(q^{-1}) H_R (q^{-1}) \tag{3.3.17}$$

$$S(q^{-1}) = S'(q^{-1}) H_S(q^{-1}) \quad [3.3.18]$$

où $H_R(q^{-1})$ et $H_S(q^{-1})$ sont des polynômes pré spécifiés et :

$$R'(q^{-1}) = r'_0 + r'_1 q^{-1} + \dots + r'_{n_R} q^{-n_R} \quad [3.3.19]$$

$$S'(q^{-1}) = 1 + s'_1 q^{-1} + \dots + s'_{n_S} q^{-n_S} \quad [3.3.20]$$

Avec cette paramétrisation des polynômes $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$, la fonction de transfert en boucle fermée sera alors :

$$\begin{aligned} H_{BF}(q^{-1}) &= \frac{q^{-d} T(q^{-1}) B(q^{-1})}{A(q^{-1}) S'(q^{-1}) H_S(q^{-1}) + q^{-d} B(q^{-1}) R'(q^{-1}) H_R(q^{-1})} \\ &= \frac{q^{-d} T(q^{-1}) B(q^{-1})}{P(q^{-1})} \end{aligned} \quad [3.3.21]$$

Au lieu de l'équation [3.3.8], il faudra maintenant résoudre l'équation :

$$A(q^{-1}) H_S(q^{-1}) S'(q^{-1}) + q^{-d} B(q^{-1}) H_R(q^{-1}) R'(q^{-1}) = P(q^{-1}) \quad [3.3.22]$$

Pour résoudre l'équation [3.3.22], il suffit de résoudre l'équation [3.3.8] en remplaçant: $A(q^{-1})$ par $A'(q^{-1}) = A(q^{-1}) H_S(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ par $B'(q^{-1}) = q^{-d} B(q^{-1}) H_R(q^{-1})$ avec la restriction que les polynômes $[A(q^{-1}) H_S(q^{-1})]$ et $[B(q^{-1}) H_R(q^{-1})]$ soient premiers entre eux.

Les conditions [3.3.10] sur les ordres de différents polynômes pour obtenir une solution unique d'ordre minimal deviennent :

$$n_P = \deg P(q^{-1}) \leq n_A + n_{HS} + n_B + n_{HR} + d - 1 ;$$

$$n_{S'} = \deg S'(q^{-1}) = n_B + n_{HR} + d - 1 ; n_{R'} = \deg R'(q^{-1}) = n_A + n_{HS} - 1 \quad [3.3.23]$$

Pour la mise en œuvre, $S(q^{-1})$ sera donné par $S'(q^{-1}) H_S(q^{-1})$ et $R(q^{-1})$ par $R'(q^{-1}) H_R(q^{-1})$.

L'équation [3.3.22] ou [3.3.8] peut être résolue à l'aide du logiciel WinREG (Adaptech) ou des fonctions *bezoutd.sci* (Scilab) et *bezoutd.m* (Matlab).

Utilisation des parties fixes du régulateur (H_R et H_S . Exemples

Erreur statique

Comme on l'a vu précédemment, $S(q^{-1})$ doit contenir un terme $(1-q^{-1})$ pour obtenir une erreur statique nulle à une entrée ou perturbation en échelon, ($S_{yp}(q^{-1})$ doit être nulle en régime stationnaire, c'est-à-dire pour $q = 1$). En effet :

$$S_{yp}(q^{-1}) = \frac{A(q^{-1})H_S(q^{-1})S'(q^{-1})}{P(q^{-1})} \quad [3.3.24]$$

et donc il faut choisir dans ce cas :

$$H_S(q^{-1}) = 1 - q^{-1} \quad [3.3.25]$$

Rejet d'une perturbation harmonique

Si on impose une réjection parfaite d'une perturbation harmonique à une certaine fréquence, il faut que $S_{yp}(q^{-1})$ soit nul à cette fréquence, ce qui est équivalent à imposer que $H_S(q^{-1})$ introduise une paire de zéros complexes *non amortis* à cette fréquence. Dans ce cas :

$$H_S(q^{-1}) = 1 + \alpha q^{-1} + q^{-2} \quad [3.3.26]$$

où $\alpha = -2 \cos \omega T_e = -2 \cos (2 \pi f/f_e)$.

S'il s'agit uniquement d'une atténuation donnée, $H_S(q^{-1})$ introduira une paire de zéros complexes *amortis* avec un facteur d'amortissement dépendant de l'atténuation souhaitée.

Blocage d'un signal

Dans certaines applications le signal mesuré contient des composantes à certaines fréquences sur lesquelles la régulation ne doit pas agir pour ne pas atténuer leur effet (il s'agit en général de signaux inhérents au processus de fabrication). Pour cela il faut qu'à ces fréquences $S_{yp}(q^{-1})=1$. Il résulte de [3.3.24] et [3.3.6] qu'à ces fréquences il faut que $H_R(q^{-1})$ soit nul. Ceci implique aussi que la fonction de sensibilité perturbation-entrée $S_{up}(q^{-1})$ doit être nulle (pas d'effet de la perturbation sur la commande). L'expression de $S_{up}(q^{-1})$ est donnée par:

$$S_{up}(q^{-1}) = -\frac{A(q^{-1})H_R(q^{-1})R'(q^{-1})}{P(q^{-1})} \quad [3.3.27]$$

et il faut donc choisir la partie fixe de $R(q^{-1})$ notée $H_R(q^{-1})$ pour qu'elle soit nulle à cette fréquence.

La partie fixe de $R(q^{-1})$ aura la forme :

$$H_R(q^{-1}) = 1 + \beta q^{-1} + q^{-2} \quad [3.3.28]$$

où $\beta = -2 \cos \omega_0 T_e = -2 \cos (2 \pi f / f_e)$ qui introduit une paire de zéros non amortis à la fréquence f ou en général la forme d'un polynôme de deuxième ordre ayant des zéros complexes amortis si une certaine atténuation est acceptée.

Dans beaucoup d'applications on désire que le régulateur ne réagisse pas à des signaux proches de $0.5 f_e$ (où le gain du système actionneur + procédé est en général faible). Dans ce cas on utilise :

$$H_R(q^{-1}) = (1 + \beta q^{-1})^n \quad n=1,2 \quad [3.3.29]$$

avec $0 < \beta \leq 1$. A noter que $(1 + \beta q^{-1})^2$ correspond à un système de 2^{ème} ordre avec une pulsation de résonance amortie égale à πf_e (voir paragraphe 2.3.2) :

$$\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} = \pi f_e$$

et l'amortissement correspondant est relié à β par la relation :

$$\beta = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi}$$

Pour $\beta = 1$ on a $\zeta = 0$ et le système va opérer en boucle ouverte à $0.5 f_e$ (même pour $n = 1$).

Robustesse

Pour garantir des marges de robustesse tout en assurant les performances spécifiées pour le système en boucle fermée, on peut être amené à introduire des termes dans $H_R(q^{-1})$ et $H_S(q^{-1})$ pour corriger les caractéristiques du lieu de Nyquist et des fonctions de sensibilité $S_{yp}(q^{-1})$, et $S_{up}(q^{-1})$ dans certaines zones de fréquences. Ceci sera discuté dans la section 3.6.

3.3.4. Poursuite (calcul de $T(q^{-1})$)

Dans le cas idéal, lors d'un changement de consigne, on souhaite faire suivre à la sortie du procédé $y(t)$ une trajectoire $y^*(t)$. Cette trajectoire peut être mémorisée ou engendrée à chaque changement de consigne à l'aide d'un modèle de référence, (conformément à la figure 3.3.3).

La fonction de transfert du modèle de référence est :

$$H_m(q^{-1}) = \frac{q^{-1}B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} \quad [3.3.30]$$

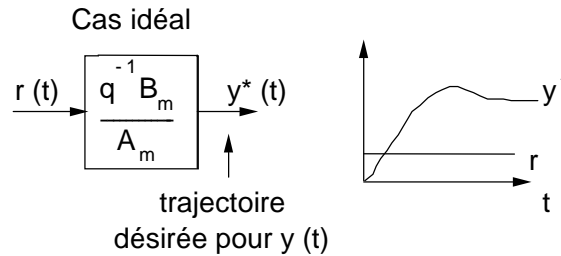


Figure 3.3.3. Génération de la trajectoire désirée $y^*(t)$

En règle générale, elle se détermine à partir de performances souhaitées (temps de réponse, dépassement, temps d'établissement) en passant par exemple par un modèle continu normalisé du 2^e ordre (paramètres ω_0 , ζ) défini à l'aide des courbes données dans la figure 1.1.10. En connaissant la fonction de transfert continue et la période d'échantillonnage T_e , on obtient par discrétisation la fonction de transfert échantillonnée du modèle de référence (à l'aide de WinREG, Scilab, Matlab ou des tables de transformation). La fonction de transfert échantillonnée du modèle de référence sera de la forme :

$$H_m(q^{-1}) = \frac{q^{-1}B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} = \frac{q^{-1}(b_{m0} + b_{m1}q^{-1})}{1 + a_{m1} + a_{m2}q^{-2}} \quad [3.3.31]$$

C'est cette fonction de transfert que le régulateur doit réaliser entre la consigne r et la sortie y éventuellement multipliée par q^{-d} dans le cas de la présence d'un retard de d pas dans le modèle du procédé (le retard ne peut être compensé). Néanmoins dans le cas du « placement des pôles » ceci n'est pas possible car on conserve les zéros du procédé (polynôme $B(q^{-1})$).

L'objectif sera alors d'approcher la trajectoire de référence retardée :

$$y^*(t) = \frac{q^{-(d+1)} B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} r(t) \quad [3.3.32]$$

Pour ceci, on engendre d'abord $y^*(t+d+1)$ à partir de $r(t)$:

$$y^*(t+d+1) = \frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} r(t) \quad [3.3.33]$$

et on choisit $T(q^{-1})$ pour assurer :

- un gain statique unitaire entre y^* et y ,
- la compensation de la dynamique de régulation $P(q^{-1})$ (car la dynamique de régulation est en général différente de la dynamique de poursuite $A_m(q^{-1})$).

Ceci conduit à choisir :

$$T(q^{-1}) = G P(q^{-1}) \quad [3.3.34]$$

où :

$$G = \begin{cases} 1/B(1) & \text{si } B(1) \neq 0 \\ 1 & \text{si } B(1) = 0 \end{cases} \quad [3.3.35]$$

L'équation de la loi de commande devient alors :

$$S(q^{-1}) u(t) + R(q^{-1}) y(t) = T(q^{-1}) y^*(t+d+1) \quad [3.3.36]$$

Le schéma complet pour le placement des pôles est donné dans la figure 3.3.4.

La fonction de transfert réalisée entre la consigne et la sortie est :

$$H_{BF}(q^{-1}) = \frac{q^{-d+1} B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} \cdot \frac{B_m^*(q^{-1})}{B(1)} \quad [3.3.37]$$

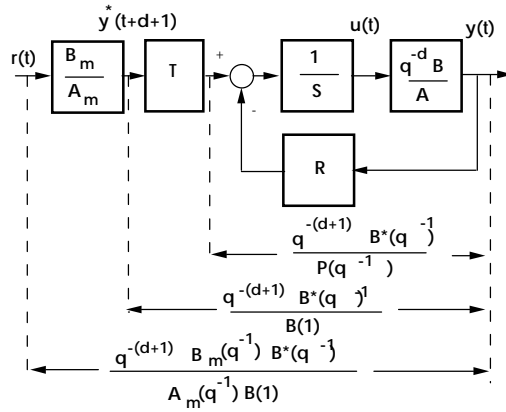


Figure 3.3.4. Placement des pôles. Poursuite et régulation

Dans certains cas on peut envisager une simplification du polynôme T en prenant en considération que les pôles dominants (car les pôles auxiliaires sont souvent en haute fréquence et ont peu d'influence sur la réponse). Dans ce cas :

$$H_{BF}(q^{-1}) = \frac{q^{-d+1}B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} \cdot \frac{B^*(q^{-1})}{B(1)} \cdot \frac{P_F(1)}{P_F(q^{-1})} \quad [3.3.38]$$

et :

$$T(q^{-1}) = GP_D(q^{-1}) \quad [3.3.39]$$

où :

$$G = \begin{cases} \frac{P_F(1)}{B(1)} & \text{si } B(1) \neq 0 \\ 1 & \text{si } B(1) = 0 \end{cases}$$

Dans le cas où la dynamique de régulation et la dynamique de poursuite sont identiques il n'y a plus besoin du modèle de référence [3.3.33] et le polynôme $T(q^{-1})$ est remplacé par un gain³ :

3. Si $S(q^{-1})$ contient un intégrateur ($S(1) = 0$) il résulte de [3.3.21] que $B(1)R(1) = P(1)$ et respectivement $P(1)/B(1) = R(1)$.

$$T(q^{-1}) = G = \begin{cases} \frac{P(1)}{B(1)} & \text{si } B(1) \neq 0 \\ 1 & \text{si } B(1) = 0 \end{cases}$$

pour assurer un gain statique unitaire entre la trajectoire de référence et la sortie (si $B(1)$ est non nul).

$$u(t) = \frac{T(q^{-1})y^*(t+d+1) - R(q^{-1})y(t)}{S(q^{-1})}$$

$$S(q^{-1})u(t) + R(q^{-1})y(t) = GP(q^{-1})y^*(t+d+1) = T(q^{-1})y^*(t+d+1)$$

$$S(q^{-1}) = 1 + q^{-1}S^*(q^{-1})$$

$$u(t) = P(q^{-1})Gy^*(t+d+1) - S^*(q^{-1})u(t-1) - R(q^{-1})y(t)$$

$$y^*(t+d+1) = \frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})}r(t)$$

$$A_m(q^{-1}) = 1 + q^{-1}A_m^*(q^{-1})$$

$$y^*(t+d+1) = -A_m^*(q^{-1})y(t+d) + B_m(q^{-1})r(t)$$

$$B_m(q^{-1}) = b_{m0} + b_{m1}q^{-1} + \dots$$

$$A_m(q^{-1}) = 1 + a_{m1}q^{-1} + a_{m2}q^{-2} + \dots$$

Tableau 3.3.1. Placement des pôles. Equations de la loi de commande

Les équations du régulateur pour le placement des pôles sous différentes formes sont résumées dans le tableau 3.3.1 (les équations récurrentes servant à la programmation sont encadrées).

3.3.5. Placement des pôles. Exemples

Le tableau 3.3.2 donne les résultats du calcul pour le placement des pôles avec WinREG (Adaptech). L'exemple considéré est la commande d'un processus caractérisé par un modèle discret du 2^e ordre avec deux pôles réels (0.6 et 0.7) et un zéro instable. La dynamique de poursuite (polynômes $A_m(q^{-1})$ et $B_m(q^{-1})$) a été obtenue par la discrétisation d'un modèle continu du 2^e ordre normalisé avec $\omega_0 = 0.5 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.9$, ($T_e = 1 \text{ s}$). La dynamique de régulation (polynôme $P(q^{-1})$) a été obtenue par la discrétisation d'un modèle continu du 2^e ordre normalisé avec $\omega_0 = 0.4 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.9$. Le régulateur comporte un intégrateur. Les performances sont illustrées dans la figure 3.3.5.

Procédé : $d=0$	
$B(q^{-1}) = 0.1 q^{-1} + 0.2 q^{-2}$	
$A(q^{-1}) = 1 - 1.3 q^{-1} + 0.42 q^{-2}$	
$B_m(q^{-1}) = 0.0927 + 0.0687 q^{-1}$	
Dynamique de poursuite -->	
$A_m(q^{-1}) = 1 - 1.2451 q^{-1} + 0.4066 q^{-2}$	
$T_e = 1s$, $\omega_0 = 0.5 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0.9$	
Dynamique de régulation -->	
$P(q^{-1}) = 1 - 1.3741 q^{-1} + 0.4867 q^{-2}$	
$T_e = 1s$, $\omega_0 = 0.4 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0.9$	
Présépcifications : Intégrateur	
*** LOI DE COMMANDE ***	
$S(q^{-1}) u(t) + R(q^{-1}) y(t) = T(q^{-1}) y^*(t+d+1)$	
$y^*(t+d+1) = [B_m(q^{-1})/A_m(q^{-1})] r(t)$	
Régulateur : $R(q^{-1}) = 3 - 3.94 q^{-1} + 1.3141 q^{-2}$	
$S(q^{-1}) = 1 - 0.3742 q^{-1} - 0.6258 q^{-2}$	
$T(q^{-1}) = 3.333 - 4.5806 q^{-1} + 1.6225 q^{-2}$	
Marge de gain : 2.703	Marge de phase : 65.4 deg
Marge de module : 0.618 (- 4.19 dB)	Marge de retard : 2.1. s

Tableau 3.3.2. Placement des pôles avec WinREG

Exercice

Quels sont les choix à faire dans la technique du « placement des pôles » pour obtenir le régulateur numérique PID 2 ?

3.4. Poursuite et régulation à objectifs indépendants

Cette méthode de calcul des régulateurs numériques permet d'obtenir le comportement désiré en poursuite (changement de consigne) indépendamment du comportement désiré en régulation (rejet d'une perturbation). La spécification des performances est illustrée dans la figure 3.4.1 où le temps de réponse en régulation est sensiblement plus petit que le temps de réponse à un changement de consigne (mais la situation inverse peut être considérée). Cette méthode est une généralisation de la commande à modèle de référence.

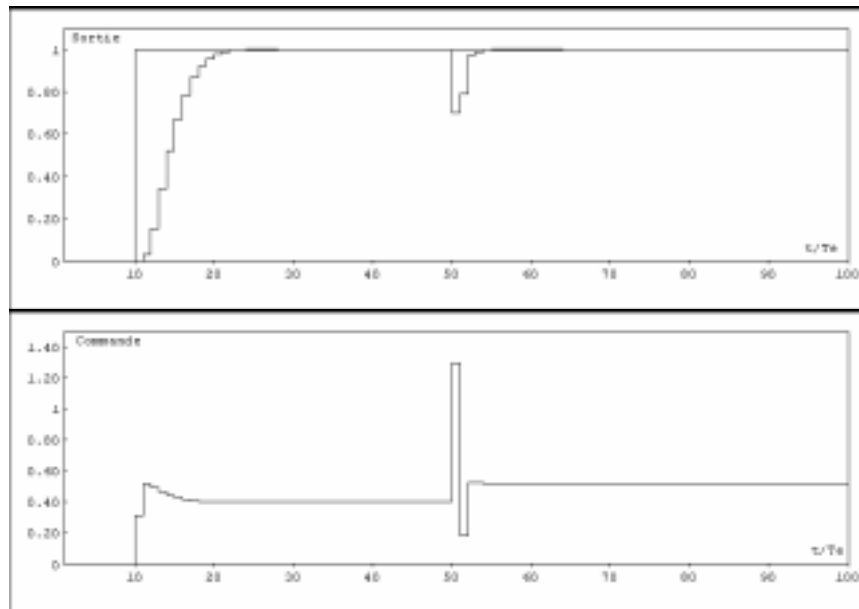


Figure 3.3.5. Performances du placement des pôles

A la différence de la méthode du « placement des pôles » (paragraphe 3.3), cette méthode conduit à la simplification des zéros du modèle échantillonné du procédé, ce qui permet de réaliser sans approximation les performances imposées en poursuite et en régulation.

Cette stratégie de commande permet de calculer un régulateur numérique R-S-T pour des systèmes stables ou instables :

- sans restriction sur les degrés des polynômes $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ caractérisant le modèle échantillonné du procédé,
- sans restriction sur le retard échantillonné du procédé d .

Par contre, à cause de la simplification des zéros, *cette stratégie ne s'applique qu'aux modèles échantillonnés de procédé ayant des zéros stables.*

Cette méthode ne tolère donc pas des retards fractionnaires supérieurs à $0.5 T_e$. Mais on peut envisager dans le cas où le retard fractionnaire est supérieur à $0.5 T_e$ d'approcher (lors de l'identification) le modèle à retard fractionnaire par un modèle à retard entier.

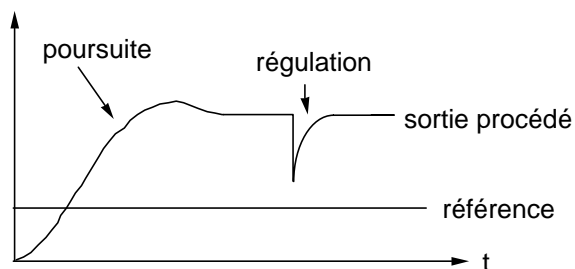


Figure 3.4.1. Performances en poursuite et en régulation

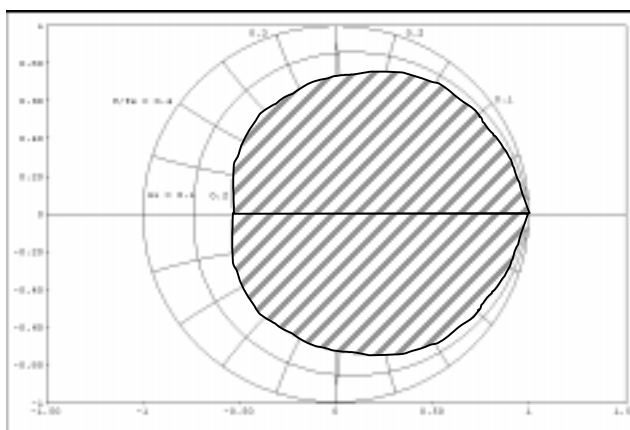


Figure 3.4.2. Domaine admissible (zone hachurée) pour les zéros du modèle échantillonné du procédé (poursuite et régulation à objectifs indépendants)

Notons que des zéros instables peuvent également apparaître suite à un échantillonnage trop rapide des systèmes continus ayant une différence de degré supérieure à 2, entre le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert [AST 97].

Cette méthode peut être considérée comme un cas particulier de la méthode de placement de pôles. Elle s’obtient en imposant que les pôles de la boucle fermée contiennent les zéros du modèle échantillonné du procédé (définis par le polynôme $B^*(q^{-1})$). C’est la raison pour laquelle les zéros du modèle de procédé doivent être stables (voir paragraphe 3.4.2).

Il convient donc de s’assurer avant l’application de cette méthode que les zéros de $B^*(q^{-1})$ sont stables, mais en plus qu’ils ont un amortissement suffisant ($\zeta > 0.2$).

En d'autres termes il doivent se trouver à l'intérieur du domaine fermé défini par la cardioïde d'amortissement constant $\zeta = 0.2$ (voir figure 2.3.14). Ce domaine d'admissibilité est représenté dans la figure 3.4.2.

3.4.1. Structure

La structure du système en boucle fermée est représentée dans la figure 3.4.3.

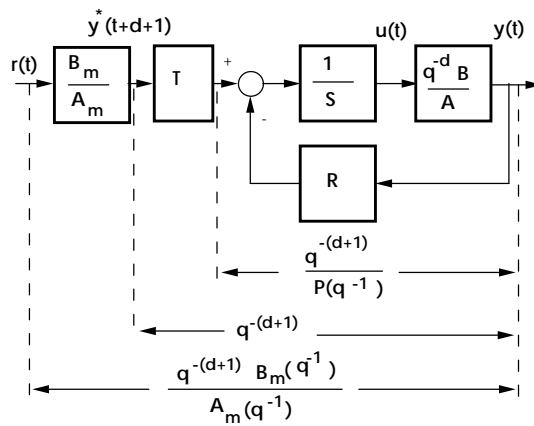


Figure 3.4.3. Poursuite et régulation à objectifs indépendants

Les pôles en boucle fermée sont définis par un polynôme $P(q^{-1})$ qui spécifie en grande partie le comportement désiré en régulation.

En règle générale, $P(q^{-1})$ est le produit de deux polynômes :

$$P(q^{-1}) = P_D(q^{-1}) \cdot P_F(q^{-1})$$

où $P_D(q^{-1})$ est déterminé en fonction de performances souhaitées et $P_F(q^{-1})$ représente les pôles additionnels (voir pour plus de détails paragraphe 3.3.2).

La fonction de transfert désirée entre la consigne $r(t)$ et la sortie du procédé $y(t)$ qui définit le comportement en poursuite, est :

$$q^{-(d+1)} B_m(q^{-1}) / A_m(q^{-1})$$

La sortie du modèle de poursuite $B_m(q^{-1}) / A_m(q^{-1})$ spécifie la trajectoire désirée y^* avec $d+1$ pas d'avance.

Le procédé à réguler est caractérisé par l'opérateur de transfert échantillonné donné dans l'équation [3.3.1], les polynômes $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ étant spécifiés par les équations [3.3.2] et [3.3.3]. Notons que dans ce cas les polynômes $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ peuvent avoir des facteurs communs.

Le calcul de $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$, $T(q^{-1})$ se fera en deux temps. Dans un premier temps à l'aide de $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$, on placera les pôles en boucle fermée aux valeurs désirées, spécifiées par un polynôme $P(q^{-1})$ (objectifs en régulation) et on simplifiera les zéros du modèle échantillonné du procédé. Dans un deuxième temps, on déterminera le précompensateur $T(q^{-1})$ pour obtenir en poursuite que la sortie du procédé suive, au retard près, la trajectoire de référence y^* . Notons que pour $P(q^{-1}) = 1$ cette méthode correspond à la commande avec modèle de référence.

3.4.2. Régulation (calcul de $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$)

Sans le précompensateur $T(q^{-1})$, la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\begin{aligned} H_{BF}(q^{-1}) &= \frac{q^{-d+1}B^*(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d+1}B^*(q^{-1})R(q^{-1})} = \frac{q^{-d+1}}{P(q^{-1})} \\ &= \frac{q^{-d+1}B^*(q^{-1})}{B^*(q^{-1})P(q^{-1})} \end{aligned} \quad [3.4.1]$$

On souhaite que les pôles soient ceux définis par $P(q^{-1})$ et que les zéros du procédé soient simplifiés (pour pouvoir ultérieurement obtenir une poursuite parfaite).

De l'équation [3.4.1], il résulte qu'il s'agit du placement de pôles mais dans ce cas particulier les pôles en boucle fermée doivent en fait contenir en plus les zéros du modèle du procédé.

$P(q^{-1})$ étant spécifié, il résulte de l'équation [3.4.1] que pour calculer $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$, il faut résoudre l'équation :

$$A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-(d+1)}B^*(q^{-1})R(q^{-1}) = B^*(q^{-1})P(q^{-1}) \quad [3.4.2]$$

L'équation [3.4.2] correspond au placement de pôles avec un choix particulier pour les pôles désirés de la boucle fermée (qui contiennent $n_B - 1$ pôles additionnels identiques aux zéros du procédé).

Pour résoudre l'équation [3.4.2] on observe que $S(q^{-1})$ devra avoir $B^*(q^{-1})$ comme facteur commun :

$$P^T = [1, p_1, p_2, \dots, p_{n_A}, p_{n_A+1}, \dots, p_{n_A+d}] \quad [3.4.10]$$

Certains coefficients p_i peuvent être nuls. Du fait que M est une matrice triangulaire inférieure, l'équation [3.4.8] (et respectivement l'équation [3.4.4]) a toujours une solution.

Pour résoudre [3.4.4] on peut utiliser le logiciel WinREG (Adaptech) ou les fonctions *predisol.sci* (Scilab) et *predisol.m* (Matlab).

On observe que déjà, par la nature de la stratégie de commande, $S(q^{-1})$ contient une partie fixe (équation [3.4.3]) spécifiée avant la résolution de l'équation [3.4.4].

Il convient donc de considérer, comme dans le cas du placement des pôles, une paramétrisation de $S(q^{-1})$ et $R(q^{-1})$ de la forme :

$$R(q^{-1}) = H_R(q^{-1}) R'(q^{-1}) \quad [3.4.11]$$

$$S(q^{-1}) = H_S(q^{-1}) S'(q^{-1}) \quad [3.4.12]$$

où $H_R(q^{-1})$ et $H_S(q^{-1})$ représentent les parties préspecifiées de $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$.

Dans le cas de la poursuite et régulation à objectifs indépendants, $H_S(q^{-1})$ aura la forme :

$$H_S(q^{-1}) = B^*(q^{-1}) \cdot H'_S(q^{-1}) \quad [3.4.13]$$

et l'équation [3.4.4] devient dans le cas général :

$$A(q^{-1}) H'_S(q^{-1}) S'(q^{-1}) + q^{-(d+1)} H_R(q^{-1}) R'(q^{-1}) = P(q^{-1}) \quad [3.4.14]$$

Pour résoudre [3.4.14] on peut utiliser le logiciel WinREG (Adaptech) ou les fonctions *bezoud.sci* (Scilab) ou *bezoud.m* (Matlab). Notons aussi qu'on peut alternativement utiliser les équations de calcul pour le placement de pôles en introduisant $B^*(q^{-1})$ dans l'expression de $P(q^{-1})$.

Erreur statique

Pour avoir une erreur statique nulle à une entrée ou perturbation échelon, la voie directe doit contenir un intégrateur numérique, c'est-à-dire que le polynôme $S(q^{-1})$ doit contenir un terme $(1-q^{-1})$:

$$S(q^{-1}) = B^*(q^{-1}) (1 - q^{-1}) S'(q^{-1}) = B^*(q^{-1}) H'_S(q^{-1}) S'(q^{-1}) \quad [3.4.15]$$

En introduisant cette expression dans l'équation [3.4.2] et après élimination du facteur commun $B^*(q^{-1})$, on obtient :

$$A(q^{-1}) (1 - q^{-1}) S'(q^{-1}) + q^{-(d+1)} R(q^{-1}) = P(q^{-1}) \quad [3.4.16]$$

qui devra être résolue pour obtenir les coefficients correspondant de $S'(q^{-1})$ et $R(q^{-1})$ lorsque l'on utilise un intégrateur.

3.4.3. Poursuite (calcul de $T(q^{-1})$)

Le précompensateur $T(q^{-1})$ est calculé pour assurer (conformément à la figure 3.4.2) entre la consigne $r(t)$ et $y(t)$ une fonction de transfert :

$$H_{BF}(q^{-1}) = \frac{q^{-(d+1)} B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} = \frac{B_m(q^{-1}) T(q^{-1}) q^{-(d+1)}}{A_m(q^{-1}) P(q^{-1})} \quad [3.4.17]$$

De l'équation [3.4.17], il résulte :

$$T(q^{-1}) = P(q^{-1}) \quad [3.4.18]$$

L'entrée de $T(q^{-1})$ est constituée par la prédiction de la trajectoire désirée $y^*(t+d+1)$ obtenue par le passage de $r(t)$ à travers un modèle de poursuite $B_m(q^{-1})/A_m(q^{-1})$:

$$y^*(t+d+1) = \frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} r(t) \quad [3.4.19]$$

et l'équation du régulateur sera donnée par :

$$S(q^{-1}) u(t) + R(q^{-1}) y(t) = P(q^{-1}) y^*(t+d+1) \quad [3.4.20]$$

L'équation [3.4.20] peut se mettre aussi sous la forme :

$$u(t) = \frac{P(q^{-1}) y^*(t+d+1) - R(q^{-1}) y(t)}{S(q^{-1})} \quad [3.4.21]$$

En tenant compte que $S(q^{-1})$ est de la forme :

$$\begin{aligned} S(q^{-1}) &= s_0 + s_1 q^{-1} + \dots + s_{n_s} q^{-n_s} = s_0 + q^{-1} S^*(q^{-1}) \\ &= B^*(q^{-1}) S'(q^{-1}) \end{aligned} \quad [3.4.22]$$

et en considérant les expressions de $B^*(q^{-1})$ et $S'(q^{-1})$ (données par [3.4.7]), il résulte :

$$s_0 = b_1 \quad [3.4.23]$$

L'équation [3.4.20] peut encore se mettre sous la forme⁴ :

$$u(t) = \frac{1}{b_1} \left[P(q^{-1}) y^*(t+d+1) - S^*(q^{-1}) u(t-1) - R(q^{-1}) y(t) \right] \quad [3.4.24]$$

Comme dans le cas du placement des pôles, si la dynamique désirée est la même en poursuite et régulation, le modèle de référence n'est plus nécessaire et le polynôme $T(q^{-1})$ est remplacé par un simple gain pour assurer un gain statique unitaire entre la trajectoire de référence et la sortie :

$$T(q^{-1}) = G = P(1)$$

et si $S(q^{-1})$ contient un intégrateur, alors :

$$T(q^{-1}) = G = R(1).$$

3.4.4. Poursuite et régulation à objectifs indépendants. Exemples

Le tableau 3.4.1 donne les résultats du calcul pour la poursuite et la régulation à objectifs indépendants.

L'exemple considéré est la commande d'un procédé caractérisé par un modèle discret du 2^e ordre avec deux pôles à $z = 0.6$ et à $z = 0.7$ et un zéro stable. La dynamique de poursuite (polynômes $A_m(q^{-1})$ et $B_m(q^{-1})$) a été obtenue par la discrétisation d'un modèle continu du 2^e ordre normalisé avec $\omega_0 = 0.5 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.9$ ($T_e = 1 \text{ s}$). La dynamique de régulation (polynôme $P(q^{-1})$) a été obtenue par la discrétisation d'un modèle continu du 2^e ordre normalisé avec $\omega_0 = 0.4 \text{ rad/s}$ et $\zeta =$

4. On peut aussi normaliser les paramètres du régulateur en divisant tous les paramètres par $s_0 = b_1$. Ceci évitera une opération de multiplication en temps réel.

0.9. Le régulateur comporte un intégrateur. Les calculs du régulateur conduisent aux valeurs de $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ données dans la partie inférieure du tableau 3.4.1 et les résultats de simulation, en changement de consigne, et en présence de perturbations de charge (échelon) sur la sortie sont présentés dans la figure 3.4.4. Notons que la position du zéro est en limite du domaine d'admissibilité ($z_0 = -0.5$ correspondant à $\zeta = 0.2$) ce qui explique les oscillations amorties sur la commande lors de la réjection de la perturbation.

Procédé : $d = 0$	
$B(q^{-1}) = 0.2 q^{-1} + 0.1 q^{-2}$	
$A(q^{-1}) = 1 - 1.3 q^{-1} + 0.42 q^{-2}$	
$\rightarrow B_m(q^{-1}) = 0.0927 + 0.0687 q^{-1}$	
Dynamique de poursuite ---	
$\rightarrow A_m(q^{-1}) = 1 - 1.2451 q^{-1} + 0.4066 q^{-2}$	
$T_e = 1s$, $\omega_0 = 0.5 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0.9$	
Dynamique de régulation --- $\rightarrow P(q^{-1}) = 1 - 1.3741 q^{-1} + 0.4867 q^{-2}$	
$T_e = 1s$, $\omega_0 = 0.4 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0.9$	
Présélections : Intégrateur	
*** LOI DE COMMANDE ***	
$S(q^{-1}) u(t) + R(q^{-1}) y(t) = T(q^{-1}) y^*(t+d+1)$	
$y^*(t+d+1) = [B_m(q^{-1})/A_m(q^{-1})] \cdot r(t)$	
Régulateur : $R(q^{-1}) = 0.9258 - 1.2332 q^{-1} + 0.42 q^{-2}$	
$S(q^{-1}) = 0.2 - 0.1 q^{-1} - 0.1 q^{-2}$	
$T(q^{-1}) = P(q^{-1})$	
Marge de gain : 2.109	Marge de phase : 65.3 deg
Marge de module : 0.526 (- 5.58 dB)	Marge de retard : 1.2 s

Tableau 3.4.1. Poursuite et régulation à objectifs indépendants ($d=0$).

Le tableau 3.4.2 donne les résultats du calcul du régulateur pour un procédé ayant la même dynamique que précédemment mais avec un retard pur $d = 3$ (au lieu de $d = 0$), toutes les spécifications de performances restant les mêmes. Le polynôme $S(q^{-1})$ est d'ordre plus élevé. Les réponses du système en boucle fermée sont représentées dans la figure 3.4.5. On observe que les réponses obtenues sont les mêmes que celles obtenues pour $d = 0$ (figure 3.4.4) excepté le fait qu'elles sont décalées de d pas. En comparant les figures 3.4.4 et 3.4.5, on observe néanmoins que le signal de commande en poursuite est identique. En d'autres mots, bien que la même valeur de la sortie est acquise avec un retard de 3 pas supplémentaires, le régulateur calcule une commande qui est identique à celle du cas sans retard. En fait,

pour le cas avec retard, le régulateur incorpore un prédicteur à trois pas (pour les détails voir l'Annexe A2).

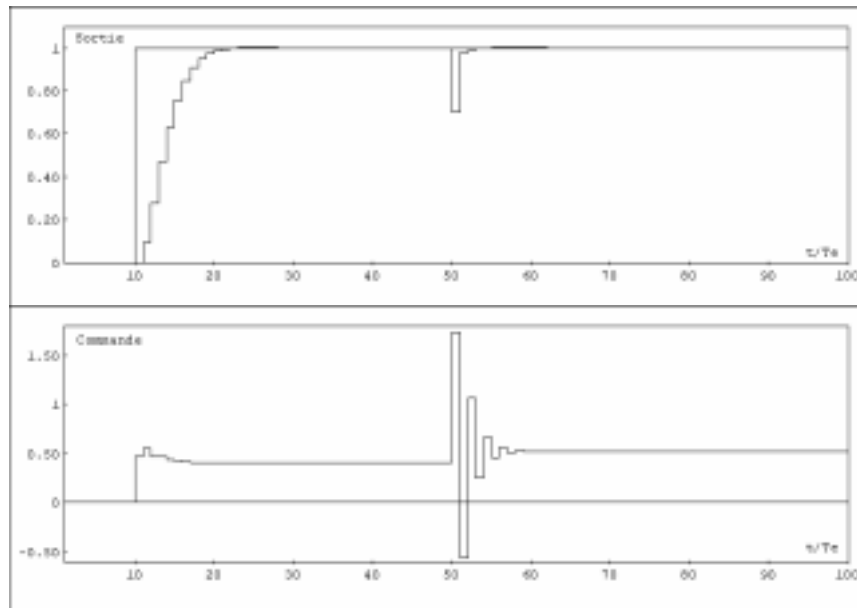


Figure 3.4.4. Performances de la poursuite et régulation à objectifs indépendants ($d = 0$)

On observe que la marge de retard est inférieure à une période d'échantillonnage. Dans ce cas, il faut spécifier des pôles auxiliaires hautes fréquences dans $P(q^{-1})$ qui n'affecteront pratiquement pas le comportement dans les basses fréquences mais amélioreront la robustesse dans les hautes fréquences (en particulier la marge de retard). Le nombre maximum des pôles de la boucle fermée (le degré maximum du polynôme $P(q^{-1})$) est 5. Ayant déjà spécifié une paire de pôles dominants, on peut prendre par exemple $P_F(q^{-1}) = (1 - 0.1 q^{-1})^3$. Dans ce cas, on obtient une marge de gain de 2.157, une marge de module de 0.534 (-5.45dB), une marge de phase de 58.5 degré et une marge de retard de 1.19s (supérieure à une période d'échantillonnage). Les réponses du système en boucle fermée sont représentées dans la figure 3.4.6. Les performances en poursuite sont identiques au cas sans pôles auxiliaires et les performances en régulation restent pratiquement inchangées. On constate aussi que l'introduction de ces pôles réduit la sollicitation de l'actionneur lors du transitoire de rejet de perturbation.

Processus : $d = 3$	
$B(q^{-1}) = 0.2 q^{-1} + 0.1 q^{-2}$	
$A(q^{-1}) = 1 - 1.3 q^{-1} + 0.42 q^{-2}$	
$\rightarrow B_m(q^{-1}) = 0.0927 + 0.0687 q^{-1}$	
Dynamique de poursuite ---	
$\rightarrow A_m(q^{-1}) = 1 - 1.2451 q^{-1} + 0.4066 q^{-2}$	
$T_e = 1s, \omega_0 = 0.5 \text{ rad/s}, \zeta = 0.9$	
Dynamique de régulation -->	
$P(q^{-1}) = 1 - 1.3741 q^{-1} + 0.4867 q^{-2}$	
$T_e = 1s, \omega_0 = 0.4 \text{ rad/s}, \zeta = 0.9$	
Présélections : Intégrateur	
*** LOI DE COMMANDE ***	
$S(q^{-1}) u(t) + R(q^{-1}) y(t) = T(q^{-1}) y^*(t+d+1)$	
$y^*(t+d+1) = [B_m(q^{-1})/A_m(q^{-1})] \cdot \text{ref}(t)$	
Régulateur :	
$R(q^{-1}) = 0.8914 - 1.1521 q^{-1} + 0.3732 q^{-2}$	
$S(q^{-1}) = 0.2 + 0.0852 q^{-1} - 0.0134 q^{-2} - 0.0045 q^{-3} - 0.1785 q^{-4} - 0.0888 q^{-5}$	
$T(q^{-1}) = P(q^{-1})$	
Marge de gain : 2.078	Marge de phase : 58 deg
Marge de module : 0.518 (- 5.71 dB)	Marge de retard : 0.7 s

Tableau 3.4.2. Poursuite et régulation à objectifs indépendants ($d = 3$)

En règle générale, quand le procédé a un retard pur, il faut spécifier non seulement les pôles dominants de $P(q^{-1})$, mais aussi les pôles auxiliaires à des valeurs différentes de 0 pour améliorer la robustesse vis-à-vis des variations éventuelles du retard (ceci est valable aussi pour les autres stratégies de commande).

3.5. Poursuite et régulation à modèle interne

La technique de commande à modèle interne (à ne pas confondre avec le principe du modèle interne) est un cas particulier de la technique du placement des pôles. Dans la commande à modèle interne on choisit les pôles dominants de la boucle fermée identiques aux pôles du modèle du procédé. C'est-à-dire que le système en boucle fermée résultant ne sera pas plus rapide que le système en boucle ouverte. Du fait qu'il n'y aura pas d'accélération du temps de réponse en boucle fermée par rapport au temps de réponse en boucle ouverte on attend une meilleure robustesse du régulateur vis-à-vis des incertitudes du modèle. Comme les pôles du

système en boucle fermée contiennent ceux du modèle du procédé *cette technique ne s'applique qu'aux modèles échantillonnés de procédés stables et bien amortis en boucle ouverte*. Cette technique est souvent utilisée pour la commande des systèmes stables ayant un retard pur important par rapport au temps de montée du système (hors retard).

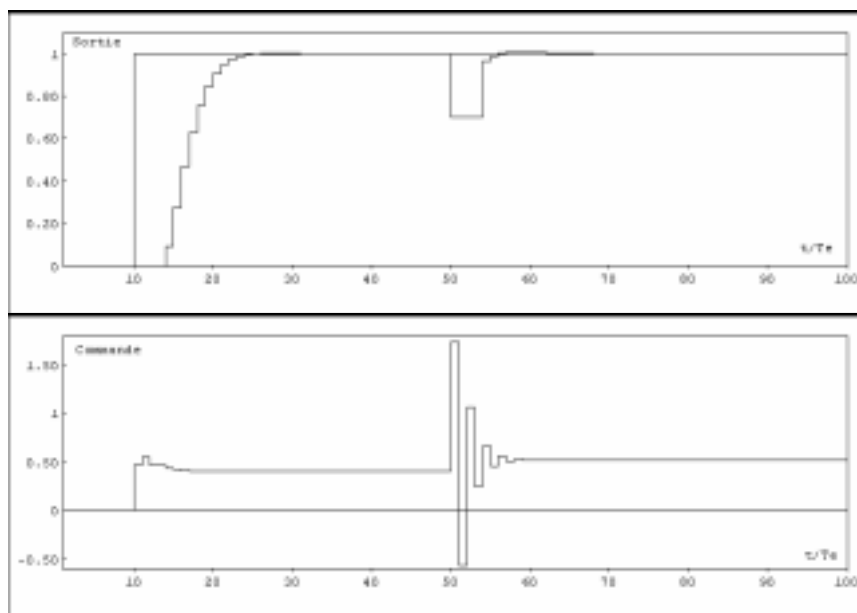


Figure 3.4.5. Performances de la poursuite et régulation à objectifs indépendants en présence de retard pur ($d = 3$)

La structure du système de régulation est celle donnée pour le placement de pôles (figure 3.3.4).

3.5.1. Régulation

Dans le cas de la commande à modèle interne l'équation [3.3.22] du placement des pôles devient :

$$A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})R(q^{-1}) = A(q^{-1})P_F(q^{-1}) = P(q^{-1}) \quad [3.5.1]$$

Souvent en pratique on choisit dans ce cas :

$$P_F(q^{-1}) = (1 + \alpha q^{-1})^{n_{PF}} \quad [3.5.2]$$

ou :

$$P_F(q^{-1}) = (1 + \alpha_1 q^{-1})(1 + \alpha q^{-1})^{n_{PF} - 1} \quad [3.5.3]$$

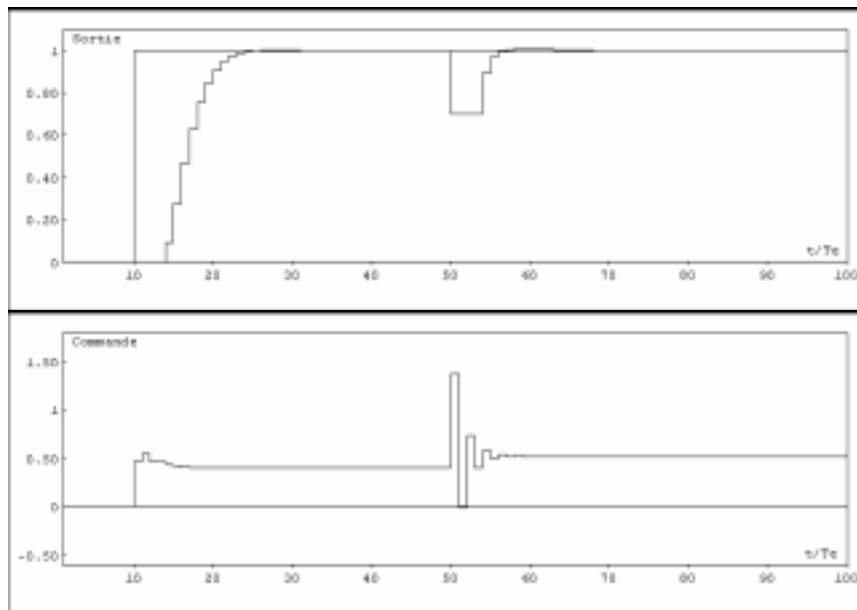


Figure 3.4.6. Performances de la poursuite et régulation à objectifs indépendants avec pôles auxiliaires en présence de retard pur ($d = 3$)

En examinant la structure de l'équation [3.5.1] on observe que $R(q^{-1})$ doit avoir comme facteur $A(q^{-1})$, c'est-à-dire :

$$R(q^{-1}) = A(q^{-1})R'(q^{-1}) \quad [3.5.4]$$

et l'équation [3.5.1] devient (après élimination du facteur commun $A(q^{-1})$) :

$$S(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})R'(q^{-1}) = P_F(q^{-1}) \quad [3.5.5]$$

qui présente des similitudes avec l'équation [3.4.4] pour la poursuite et régulation à objectifs indépendants (en remplaçant dans [3.4.4] S' par R' , A par $q^{-d}B$,

$q^{-(d+1)}R$ par S et $P(q^{-1})$ par $P_F(q^{-1})$). L'équation [3.5.5] a une solution unique d'ordre minimal pour

$$n_{P_F} = \deg P_F(q^{-1}) \leq n_B + d$$

$$n_S = \deg S(q^{-1}) = n_B + d \quad ; \quad n_{R'} = \deg R'(q^{-1}) = 0$$

La résolution de l'équation [3.5.5] se simplifie si on considère le cas typique de la présence d'un intégrateur dans le régulateur c'est-à-dire :

$$S(q^{-1}) = (1 - q^{-1})S'(q^{-1}) \quad [3.5.6]$$

Dans ce cas, pour $q=1$ l'équation [3.5.5] devient :

$$B(1)R'(1) = P_F(1) \quad [3.5.7]$$

car $S(1) = 0$ et l'on obtient :

$$R'(q^{-1}) = R'(1) = \frac{P_F(1)}{B(1)} \quad [3.5.8]$$

et respectivement :

$$R(q^{-1}) = A(q^{-1}) \frac{P_F(1)}{B(1)} \quad [3.5.9]$$

$$S(q^{-1}) = (1 - q^{-1})S'(q^{-1}) = P_F(q^{-1}) - q^{-d} B(q^{-1}) \frac{P_F(1)}{B(1)} \quad [3.5.10]$$

De l'équation [3.5.9] il résulte que dans cette technique les pôles du procédé (définis par $A(q^{-1})$) sont simplifiés par des zéros introduits dans le régulateur. Ceci implique que *les pôles du procédé doivent être stables* (voir chapitre 2, paragraphe 2.5.2).

Un des aspects intéressants de cette stratégie est la possibilité de caractériser l'ensemble des régulateurs en fonction de $P_F(q^{-1})$ sans avoir à résoudre chaque fois une équation polynomiale.

Dans le cas avec intégrateur et une partie fixe $H_R(q^{-1})$ dans $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$ a la structure donnée par [3.5.6] et $R(q^{-1})$ aura la structure :

$$R(q^{-1}) = A(q^{-1})H_R(q^{-1})R'(q^{-1}) \quad [3.5.11]$$

L'équation [3.5.5] devient :

$$S(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})H_R(q^{-1})R'(q^{-1}) = P_F(q^{-1}) \quad [3.5.12]$$

avec la condition :

$$P_F(1) = B(1)H_R(1)R'(1) \quad [3.5.13]$$

d'où l'on obtient :

$$R'(q^{-1}) = R'(1) = \frac{P_F(1)}{B(1)H_R(1)} \quad [3.5.14]$$

$$R(q^{-1}) = A(q^{-1})H_R(q^{-1})\frac{P_F(1)}{B(1)H_R(1)} \quad [3.5.15]$$

$$S(q^{-1}) = P_F(q^{-1}) - q^{-d}B(q^{-1})H_R(q^{-1})R'(q^{-1}) \quad [3.5.16]$$

3.5.2. Poursuite

Dans le cas de la commande à modèle interne le polynôme $T(q^{-1})$ utilisé en poursuite est donné par (comme dans le placement de pôles) :

$$T(q^{-1}) = A(q^{-1})P_F(q^{-1})/B(1) \quad [3.5.17]$$

Mais si l'on choisit une dynamique de poursuite égale à la dynamique de régulation le modèle de référence de poursuite peut être supprimé et on choisit :

$$T(q^{-1}) = T(1) = \frac{A(1)P_F(1)}{B(1)} \quad [3.5.18]$$

ce qui garantit un gain statique unitaire entre la trajectoire de référence et la sortie.

3.5.3. Interprétation de la commande à modèle interne

Considérons d'abord le cas $H_R(q^{-1}) = I$. L'équation de la loi de commande (tableau 3.3.1) s'écrit à partir des expressions de R , S , T données par [3.5.9], [3.5.10] et [3.5.17] :

$$S(q^{-1})u(t) = \left[P_F(q^{-1}) - \frac{P_F(1)}{B(1)} q^{-d} B(q^{-1}) \right] u(t) = \left[\frac{1}{B(1)} A(q^{-1}) P_F(q^{-1}) y^*(t+d+1) - \frac{P_F(1)}{B(1)} A(q^{-1}) y(t) \right] \quad [3.5.19]$$

ou encore :

$$P_F(q^{-1})u(t) = \frac{1}{B(1)} A(q^{-1}) P_F(q^{-1}) y^*(t+d+1) - \frac{P_F(1)}{B(1)} \left[A(q^{-1}) y(t) - q^{-d} B(q^{-1}) u(t) \right] \quad [3.5.20]$$

Tenant compte que $A(q^{-1})$ est par hypothèse asymptotiquement stable on obtient :

$$S_0(q^{-1})u(t) = P_F(q^{-1})u(t) = \frac{1}{B(1)} A(q^{-1}) P_F(q^{-1}) y^*(t+d+1) - \frac{P_F(1)}{B(1)} A(q^{-1}) \left[y(t) - \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) \right] = T_0(q^{-1}) y^*(t+d+1) - R_0(q^{-1}) \left[y(t) - \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) \right] \quad [3.5.21]$$

où :

$$R_0(q^{-1}) = \frac{P_F(1)}{B(1)} A(q^{-1})$$

$$S_0(q^{-1}) = P_F(q^{-1})$$

$$T_0(q^{-1}) = \frac{1}{B(1)} P_F(q^{-1}) = \frac{1}{B(1)} A(q^{-1}) P_F(q^{-1})$$

qui conduit au schéma équivalent représenté dans la figure 3.5.1.

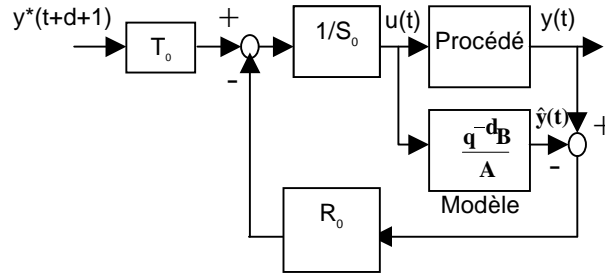


Figure 3.5.1. Schéma équivalent de la commande avec modèle interne

On voit que dans ce cas on peut envisager une mise en œuvre équivalente du régulateur R-S-T faisant explicitement apparaître le modèle du procédé (modèle de prédiction) comme un élément du schéma de régulation. La contre réaction se fait sur le signal d'erreur entre la sortie mesurée $y(t)$ et la sortie prédite par le modèle échantillonné du procédé $\hat{y}(t)$. Remarquons aussi que le calcul de R_0 et S_0 ne nécessite pas la résolution d'une équation polynomiale.

Pour le cas $H_R(q^{-1}) \neq 1$, en utilisant les équations [3.5.14], [3.5.15], [3.5.16] et [3.5.17] on obtient un résultat similaire. Seule l'expression de $R_0(q^{-1})$ change (elle contiendra en plus le facteur $H_R(q^{-1})/H_R(1)$).

3.5.4. Les fonctions de sensibilité

Dans le cas de la commande à modèle interne les fonctions de sensibilité ont des expressions particulières résultant du choix des pôles de la boucle fermée :

$$S_{yp}(q^{-1}) = \frac{S(q^{-1})}{P_F(q^{-1})} = 1 - \frac{q^{-d} B(q^{-1}) H_R(q^{-1}) P_F(1)}{B(1) H_R(1) P_F(q^{-1})} \quad [3.5.22]$$

$$S_{yb}(q^{-1}) = -\frac{q^{-d} B(q^{-1}) R(q^{-1})}{A(q^{-1}) P_F(q^{-1})} = -\frac{q^{-d} B(q^{-1}) H_R(q^{-1}) P_F(1)}{B(1) H_R(1) P_F(q^{-1})} \quad [3.5.23]$$

$$S_{up}(q^{-1}) = -\frac{R(q^{-1})}{P_F(q^{-1})} = -\frac{A(q^{-1}) H_R(q^{-1}) P_F(1)}{B(1) H_R(1) P_F(q^{-1})} \quad [3.5.24]$$

$$S_{yv}(q^{-1}) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})S(q^{-1})}{A(q^{-1})P_F(q^{-1})} = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}S_{yp}(q^{-1}) \quad [3.5.25]$$

L'équation [3.5.25] indique clairement que le procédé doit être stable en boucle ouverte. On voit par ailleurs l'influence directe de la fonction de transfert $H_R(q^{-1})/P_F(q^{-1})$ (respectivement du choix de H_R et P_F) sur les fonctions de sensibilité du système.

3.5.5. Poursuite et régulation à modèle interne partiel

Dans de nombreuses applications le procédé lui-même est caractérisé par des pôles dominants basse fréquence (situés dans, ou près de la bande d'atténuation), et des pôles secondaires situés à l'extérieur de la bande d'atténuation.

Si ces pôles dominants sont trop lents ou si ces pôles ont un amortissement trop faible (cas des structures mécaniques) la technique du modèle interne ne peut pas être appliquée tel quelle.

Dans ce cas on utilise un mélange de placement de pôles et commande à modèle interne. Le placement de pôles sera utilisé pour imposer les pôles dominants de la boucle fermée mais on laissera inchangés en boucle fermée les pôles secondaires du procédé (qui deviendront des pôles de la boucle fermée).

Soit $A(q^{-1})$ de la forme :

$$A(q^{-1}) = A_1(q^{-1})A_2(q^{-1}) \quad [3.5.26]$$

où $A_1(q^{-1})$ correspond aux pôles dominants du procédé. Alors, dans le cas de la poursuite et régulation à modèle interne partiel l'équation définissant les pôles de la boucle fermée sera :

$$\begin{aligned} A_1(q^{-1})A_2(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})R(q^{-1}) \\ = P_D(q^{-1})A_2(q^{-1})P_F(q^{-1}) \end{aligned} \quad [3.5.27]$$

En examinant la structure de l'équation [3.5.27] il résulte que $R(q^{-1})$ sera de la forme :

$$R(q^{-1}) = A_2(q^{-1})R'(q^{-1}) \quad [3.5.28]$$

et l'équation [3.5.27] devient (après élimination du facteur commun $A_2(q^{-1})$) :

$$A_1(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d} B(q^{-1})R'(q^{-1}) = P_D(q^{-1})P_F(q^{-1}) \quad [3.5.29]$$

Cette technique peut être aussi interprétée comme une simplification par le régulateur des pôles du procédé définis par $A_2(q^{-1})$.

3.5.6. Commande à modèle interne des systèmes avec zéros stables

Si $B(q^{-1})$ a tous ses zéros à l'intérieur du cercle unité (et ces zéros sont suffisamment amortis) on peut substituer au placement de pôles la technique de poursuite et régulation à objectifs indépendants mais en prenant comme pôles dominants les pôles du système à commander.

On considère que $S(q^{-1})$ a la structure [3.4.15] (présence d'un intégrateur) et on suppose $H_R(q^{-1})=1$ (pour simplifier la présentation). L'équation [3.4.16] devient :

$$A(q^{-1})(1-q^{-1})S'(q^{-1}) + q^{-(d+1)}R(q^{-1}) = A(q^{-1})P_F(q^{-1}) \quad [3.5.30]$$

Ce qui implique que $R(q^{-1})$ aura la forme :

$$R(q^{-1}) = A(q^{-1})R'(q^{-1}) \quad [3.5.31]$$

Et l'équation [3.5.30] devient :

$$(1-q^{-1})S'(q^{-1}) + q^{-(d+1)}R'(q^{-1}) = P_F(q^{-1}) \quad [3.5.32]$$

Pour $q = 1$, on a :

$$R'(1) = R'(q^{-1}) = P_F(1) \quad [3.5.33]$$

Il résulte alors :

$$(1-q^{-1})S'(q^{-1}) = P_F(q^{-1}) - q^{-(d+1)}P_F(1) \quad [3.5.34]$$

d'où l'on obtient :

$$S'(q^{-1}) = B^*(q^{-1}) [P_F(q^{-1}) - q^{-(d+1)}P_F(1)] \quad [3.5.35]$$

$$R(q^{-1}) = A(q^{-1})P_F(1) \quad [3.5.36]$$

3.5.7. Exemple. Commande des systèmes avec retard

La commande avec modèle interne est souvent utilisée pour la commande des systèmes ayant un retard pur important par rapport au temps de montée du système sans retard. Si $d > t_M$ (où t_M est exprimé en périodes d'échantillonnage), la réduction du temps de montée du système en boucle fermée n'induit pas un gain significatif du temps de réponse déterminé en grande partie par d et donc on peut se contenter d'utiliser la commande à modèle interne. Néanmoins même en prenant $P_D(q^{-1}) = A(q^{-1})$, l'introduction des pôles auxiliaires et (ou) de la partie fixe $H_R(q^{-1})$ est nécessaire pour assurer la robustesse du régulateur par rapport aux variations du retard pur.

En effet considérons le cas $P_F(q^{-1})=1$, $H_R(q^{-1})=1$ et $B(q^{-1})=b_1q^{-1}$ ($b_1>0$). Des équations [3.5.22] et [3.5.23] on obtient :

$$S_{yp}(z^{-1}) = 1 - z^{-d-1} = (1 - z^{-1})(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-d}) \quad [3.5.37]$$

$$S_{yb}(z^{-1}) = z^{-d-1} \quad [3.5.38]$$

$S_{yp}(z^{-1})$ a un zéro à $z = 1$ ($\omega = 0$) et d zéros imaginaires purs si d est pair ou $d-1$ zéros imaginaires purs plus un zéro à $z = 1$ ($\omega = \pi$) si d est impair. De l'expression [3.5.37] comme $|z^{-d-1}|$ est toujours égal à 1 on déduit que :

$$\left| S_{yp}(e^{-j\omega}) \right|_{\max} \leq 2 \quad [3.5.39]$$

et donc la marge de module $\Delta M = 0.5$ est toujours assurée. Par contre :

$$\left| S_{yb}(e^{-j\omega}) \right| \equiv 1 \quad \text{pour } 0 \leq \omega \leq \pi \quad [3.5.40]$$

et donc le gabarit de marge de robustesse pour $\Delta\tau = T_e$ sera violé. (voir figure 2.6.11) car $|S_{yb}|$ doit être plus petit que 1 à partir de $f = 0.17f_e$ et respectivement la condition de marge de retard [2.6.12] qui devient dans ce cas :

$$\left| z^{-d-1} \right| \leq \frac{1}{|z^{-1} - 1|} \quad [3.5.41]$$

ne sera pas satisfaite à toutes les fréquences.

Nous examinerons par la suite l'effet bénéfique de l'introduction des pôles auxiliaires $P_F(q^{-1})$ et d'une partie fixe $H_R(q^{-1})$ dans le régulateur.

Pôles auxiliaires ($P_F(q^{-1}) \neq 1$, $H_R(q^{-1}) = 1$)

Choisissons :

$$P_F(q^{-1}) = (1 + \alpha q^{-1}) \quad -1 < \alpha < 0 \quad [3.5.42]$$

et cherchons la valeur de α assurant une marge de retard $\Delta\tau = T_e$. Dans ce cas S_{yb} est donné par l'équation [3.5.23] et la condition de marge de retard $\Delta\tau = T_e$ s'exprime

$$\left| S_{yb}(z^{-1}) \right| = \left| \frac{z^{-d-1} P_F(1)}{P_F(z^{-1})} \right| < \frac{1}{|1 - z^{-1}|} \quad z = e^{j\omega} \quad 0 \leq \omega \leq \pi \quad [3.5.43]$$

qui pour $P_F(q^{-1})$ donné par [3.5.42] devient :

$$\left| \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}} \right| < \frac{1}{|1 - z^{-1}|} \quad z = e^{j\omega} \quad 0 \leq \omega \leq \pi \quad [3.5.44]$$

en remplaçant z par $z = e^{j\omega}$ on observe que le cas le plus défavorable a lieu pour $\omega = \pi$ (c'est-à-dire $f = 0.5f_e$) où [3.5.44] devient :

$$\left| \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right| < 0.5 \quad \Rightarrow \quad \alpha \leq -0.333 \quad [3.5.45]$$

Les figures 3.5.2 a) et b) montrent les caractéristiques fréquentielles de $|S_{yb}|$ et $|S_{yp}|$ (régulateur avec intégrateur) pour un système caractérisé par $d=7$, $B(q^{-1})=q^{-1}$, $b_1=1$, $A(q^{-1})=1+a_1q^{-1}$ avec $a_1=-0.2$ et pour trois valeurs de α : $\alpha=-0.1$; $\alpha=-0.3$; $\alpha=-0.333$. Pour $\alpha=-0.1$ et $\alpha=-0.3$ on obtient les marges de retard $\Delta\tau = 0.52T_e$ et respectivement $\Delta\tau = 0.91T_e$ et les courbes correspondantes de S_{yb} et S_{yp} intersectent le gabarit de robustesse pour $\Delta\tau = T_e$. Pour le cas $\alpha=-0.333$ la marge de retard effective est $\Delta\tau = T_e$ et les fonctions de sensibilité correspondantes n'intersectent pas le gabarit pour une marge de retard $\Delta\tau = T_e$.

Si l'on utilise des pôles auxiliaires $P_F(z^{-1})$ de la forme [3.5.3] à savoir :

$$P_F(q^{-1}) = (1 + \alpha q^{-1})(1 + \alpha' q^{-1})^{n_{p_F} - 1}$$

on choisit $-1 < \alpha \leq 0$ et $-0.25 < \alpha' \leq -0.05$ avec $n_{p_F} \leq n_B + d$. Dans ce cas on introduit $n_F - 1$ pôles auxiliaires situés dans les hautes fréquences. Ce choix conduit à une contraction plus forte de S_{yp} autour de 0 dB en hautes fréquences avec un effet moindre sur la réduction des performances en basses fréquences.

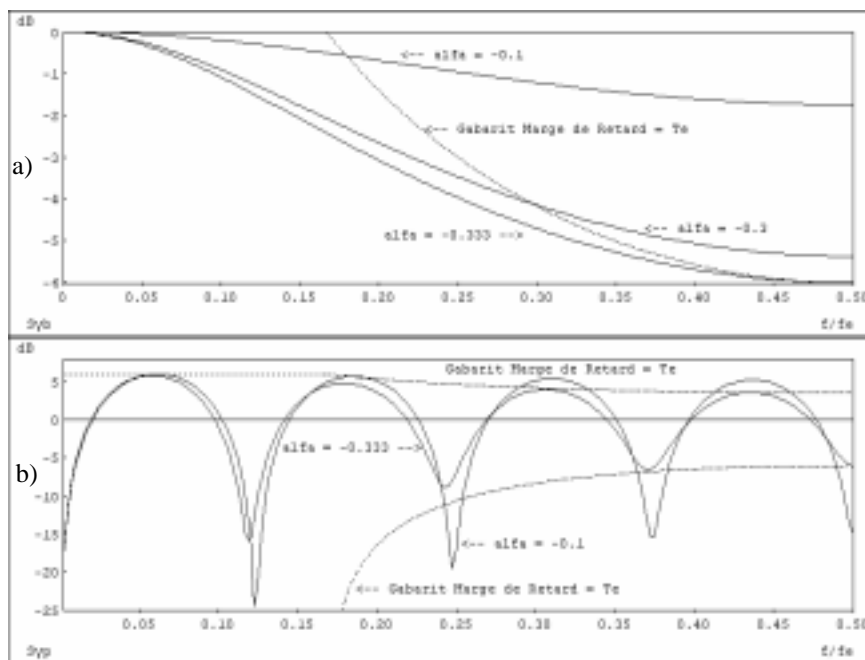


Figure 3.5.2. Effet des pôles auxiliaires sur la marge de retard :

a) fonction de sensibilité bruit-sortie (S_{yb}) ; b) fonction de sensibilité perturbation-sortie (S_{yp})

Les figures 3.5.3 a) et b) illustrent les caractéristiques fréquentielles des fonctions de sensibilité S_{yb} et S_{yp} pour le même système que précédemment mais en utilisant soit des pôles auxiliaires de la forme [3.5.42] avec $\alpha = -0.5$ soit des pôles auxiliaires de la forme [3.5.3] avec $\alpha = -0.3$, $\alpha' = -0.1$, $n_{p_F} - 1 = 7$. Les marges de retard correspondantes sont $2.09T_e$ et respectivement $2.14T_e$. La deuxième solution est beaucoup plus efficace pour réduire les fonctions de sensibilité en hautes fréquences (et donc pour améliorer la robustesse et réduire la sollicitation de l'actionneur en hautes fréquences).

Introduction de $H_R(q^{-1})$ ($P_F(q^{-1})=1$, $H_R(q^{-1}) \neq 1$)

Dans ce cas, on a de [3.5.14] et [3.5.15] :

$$R(q^{-1}) = A(q^{-1})H_R(q^{-1})R'(q^{-1}) \quad [3.5.46]$$

avec :

$$H_R(q^{-1}) = 1 + \beta q^{-1} \quad [3.5.47]$$

ce qui conduit à :

$$R'(q^{-1}) = \frac{1}{B(1)(1 + \beta)} \quad [3.5.48]$$

et respectivement à partir de [3.5.16] :

$$S(q^{-1}) = 1 - \frac{q^{-d} B(q^{-1})(1 + \beta q^{-1})}{B(1)(1 + \beta)} \quad [3.5.49]$$

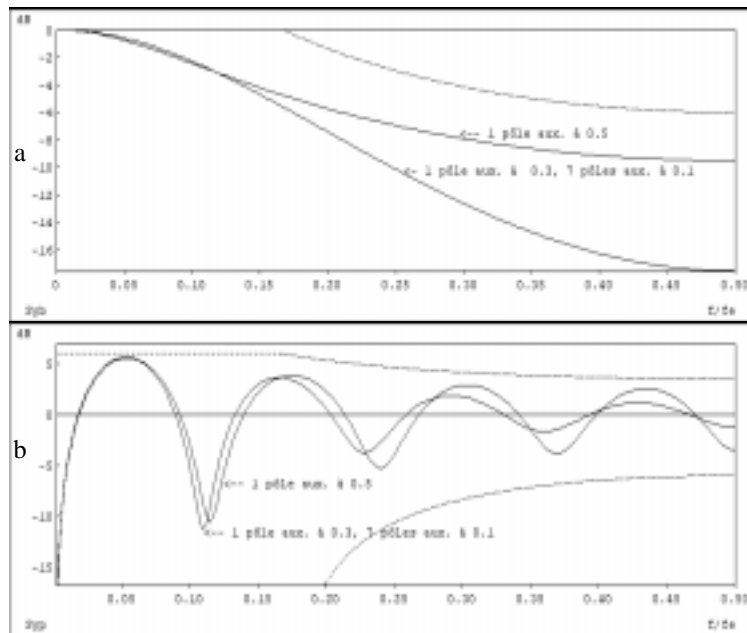


Figure 3.5.3. Effet des pôles auxiliaires hautes fréquences sur les fonctions de sensibilité d'un système avec retard : a) fonction de sensibilité bruit-sortie ; b) fonction de sensibilité perturbation-sortie

Pour $B(q^{-1}) = b_1 q^{-1}$, on obtient :

$$S_{yb}(z^{-1}) = -\frac{z^{-d-1}(1 + \beta z^{-1})}{1 + \beta} \quad [3.5.50]$$

et la condition pour la marge de retard $\Delta\tau = T_e$ devient :

$$\left| \frac{1 + \beta z^{-1}}{1 + \beta} \right| < \frac{1}{|1 - z^{-1}|} \quad z = e^{j\omega} \quad 0 \leq \omega \leq \pi \quad [3.5.51]$$

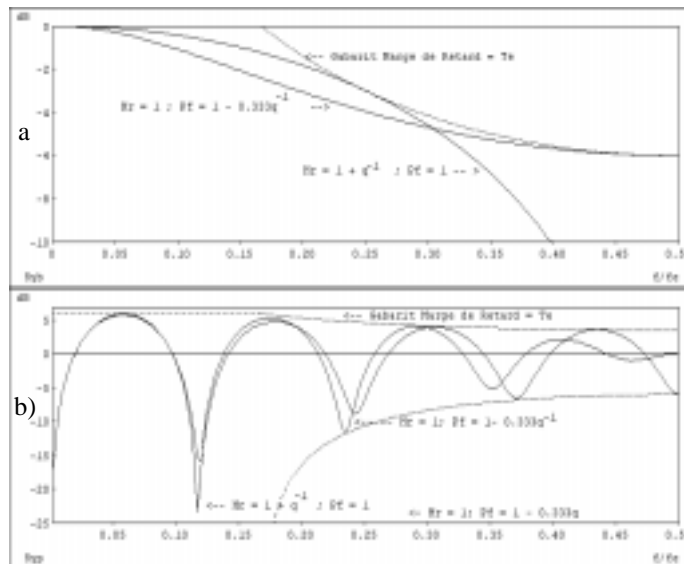


Figure 3.5.4. Effet de la partie fixe $H_R(q^{-1}) = 1 + q^{-1}$ sur les fonctions de sensibilité d'un système avec retard : a) fonction de sensibilité bruit-sortie ; b) fonction de sensibilité perturbation-sortie

La situation critique dans ce cas se produit à $\omega = \pi/2$ ($f = 0.25f_e$) où la condition [3.5.51] devient (en remplaçant $<$ par \leq) :

$$\frac{1 + \beta^2}{(1 + \beta)^2} \leq 0.5 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1 \quad [3.5.52]$$

Donc il faut choisir :

$$H_R(q^{-1}) = 1 + q^{-1} \quad [3.5.53]$$

qui assure une marge de retard de (presque) une période d'échantillonnage.

A noter que [3.5.53] correspond à l'ouverture de la boucle à $0.5f_e$ (voir paragraphe 3.3). Cette solution conduit à $S_{up} = 0$ pour $f = 0.5f_e$ donc une augmentation de la robustesse et la réduction des sollicitations de l'actionneur en hautes fréquences.

Les figures 3.5.4a et 3.5.4b présentent comparativement les caractéristiques fréquentielles de S_{yb} et S_{yp} dans les cas : $H_R(q^{-1}) = 1 + q^{-1}$, $P_F(q^{-1}) = 1$ et $H_R(q^{-1}) = 1$, $P_F(q^{-1}) = 1 - 0.333z^{-1}$.

3.6. Placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité

Dans un bon nombre d'applications, et ceci afin d'assurer simultanément les marges de robustesse et les performances de réjection des perturbations dans certaines bandes de fréquences, on est amené à associer aux méthodes de calcul des régulateurs, le calibrage du module des fonctions de sensibilité perturbation-sortie et perturbation-entrée. Ce calibrage se fait par le choix des pôles désirés du système en boucle fermée et des parties fixes pré spécifiées du régulateur.

En effet, le module de la fonction de sensibilité perturbation-sortie $|S_{yp}(q^{-1})|^5$ est un indicateur très important des propriétés de réjection des perturbations d'une part et d'autre part des propriétés de robustesse du système en boucle fermée (voir chapitre 2, section 2.6).

Le module de la fonction de sensibilité perturbation-entrée $|S_{up}(q^{-1})|$ est un indicateur, d'une part des sollicitations de l'actionneur dans différentes zones de fréquence et d'autre part de la tolérance aux incertitudes additive sur le modèle du système (voir chapitre 2, section 2.6).

En utilisant un régulateur numérique R-S-T, la fonction de sensibilité perturbation-sortie a l'expression :

5. Nous interpréterons dans ce paragraphe la notation « q » comme la variable complexe « z » car nous examinerons les propriétés des différentes fonctions de transfert dans le domaine fréquentiel.

$$S_{yp}(q^{-1}) = \frac{A(q^{-1})S(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})R(q^{-1})} \quad [3.6.1]$$

et la fonction de sensibilité perturbation-entrée a l'expression :

$$S_{up}(q^{-1}) = -\frac{A(q^{-1})R(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})R(q^{-1})} \quad [3.6.2]$$

où :

$$R(q^{-1}) = H_R(q^{-1}) R'(q^{-1}) \quad [3.6.3]$$

$$S(q^{-1}) = H_S(q^{-1}) S'(q^{-1}) \quad [3.6.4]$$

et :

$$A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})R(q^{-1}) = P_D(q^{-1}) \cdot P_F(q^{-1}) = P(q^{-1}) \quad [3.6.5]$$

Dans les équations [3.6.3] et [3.6.4], $H_R(q^{-1})$ et $H_S(q^{-1})$ correspondent aux parties pré spécifiées de $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ respectivement. $S(q^{-1})$ et $R(q^{-1})$ (ou plus exactement $R'(q^{-1})$ et $S'(q^{-1})$) sont les solutions de l'équation [3.6.5] où le polynôme $P(q^{-1})$ définit les pôles désirés en boucle fermée. Le polynôme $P(q^{-1})$ est factorisé pour mettre en évidence les pôles dominants définis par $P_D(q^{-1})$ et les pôles auxiliaires $P_F(q^{-1})$.

Nous étudierons par la suite les propriétés des fonctions de sensibilité dans les domaine fréquentiel ($q = z = e^{j\omega}$, $\omega = 2\pi f / f_e$).

Les différentes propriétés des fonctions de sensibilité seront illustrées à partir de l'exemple suivant ($T_e = 1s$) :

Modèle procédé

$$A(q^{-1}) = 1 - 0.7 q^{-1}, B(q^{-1}) = 0.3 q^{-1}, d = 2$$

Spécification des performances (polynôme $P(q^{-1})$)

Discretisation d'un système de 2^e ordre continu avec

$$- \omega_0 = 0.4 \text{ ou } 0.6 \text{ ou } 1 \text{ rad/s ;}$$

$$- \zeta = 0.9 \text{ (constant).}$$

3.6.1. Propriétés de la fonction de sensibilité perturbation-sortie

PROPRIETE 1.– *Le module de la fonction de sensibilité à une certaine fréquence donne le facteur d'amplification ou d'atténuation de la perturbation en sortie du système.*

Aux fréquences où $|S_{yp}(\omega)| = 1$ (0 dB), il n'y a ni amplification, ni atténuation de la perturbation (fonctionnement comme en boucle ouverte).

Aux fréquences où $|S_{yp}(\omega)| < 1$ (0 dB), la perturbation est atténuée.

Aux fréquences où $|S_{yp}(\omega)| > 1$ (0 dB), la perturbation est amplifiée.

PROPRIETE 2.– *Le système en boucle fermée étant asymptotiquement stable, l'intégrale du logarithme du module de la fonction de sensibilité de 0 à $0.5 f_e$ est égale à 0 pour le cas des systèmes stables en boucle ouverte⁶ :*

$$\int_0^{0.5 f_e} \log |S_{yp}(e^{-j2\pi f f_e})| df = 0$$

En d'autres mots, la somme des aires entre la courbe du module de fonction de sensibilité et l'axe 0 dB prises avec leur signe est nulle. Ceci implique que l'atténuation de la perturbation dans une certaine zone de fréquences entraînera nécessairement l'amplification des perturbations dans d'autres zones de fréquences. La figure 3.6.1 illustre ce phénomène.

Les fonctions de sensibilité présentées dans la figure 3.6.1 correspondent à l'exemple considéré pour différentes valeurs de ω_0 (0.4 ; 0.6 ; 1 rad/s) mais $\zeta = \text{constant}$ (0.9).

En conséquence, l'augmentation de l'atténuation dans une bande de fréquences, ou l'élargissement de la bande atténuation de la perturbation, entraînera nécessairement une plus forte amplification des perturbations à l'extérieur de cette zone. Ceci est aussi mis en évidence dans la figure 3.6.1.

6. Pour une démonstration de cette propriété voir [SUN 88]. Dans le cas des systèmes instables en boucle ouverte, mais stable en boucle fermée cette intégrale est positive.

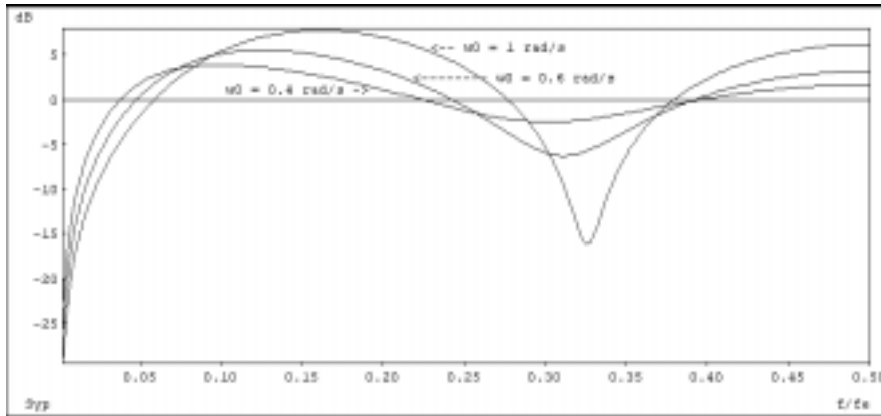


Figure 3.6.1. Module de la fonction de sensibilité perturbation-sortie pour différentes bandes d'atténuation de la perturbation

PROPRIÉTÉ 3.– L'inverse du maximum du module de la fonction de sensibilité correspond à la marge de module ΔM :

$$\Delta M = (|S_{yp}(e^{-j\omega})|_{max})^{-1} \quad [3.6.6]$$

Rappelons que la marge de module est définie comme la distance minimale entre le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte et le point critique $[-1, j0]$. Les valeurs typiques pour la marge de module sont (voir paragraphe 2.6) :

$$\Delta M \geq 0.5 \text{ (-6 dB)} \quad [min : 0.4 \text{ (-8 dB)}]$$

A noter qu'une marge de module $\Delta M \geq 0.5$ implique une marge de gain $\Delta G \geq 2$ et une marge de phase $\Delta \phi > 29^\circ$. Pour assurer une marge de module satisfaisante, il faut donc que :

$$(|S_{yp}(e^{-j\omega})|_{max}) \leq 6 \text{ dB (ou exceptionnellement 8 dB)}$$

De la propriété 2, il découle que l'augmentation de la bande d'atténuation de la perturbation ou de l'atténuation dans une certaine bande de fréquences entraînera en général une augmentation de $|S_{yp}(e^{-j\omega})|_{max}$ et donc une réduction de la marge de module (et respectivement de la robustesse du système).

PROPRIÉTÉ 4.– Une annulation de l'effet des perturbations sur la sortie est obtenue aux fréquences où :

$$A(e^{-j\omega})S(e^{-j\omega}) = A(e^{-j\omega})H_S(e^{-j\omega})S'(e^{-j\omega}) = 0 \quad ; \quad \omega = 2\pi f / f_e \quad [3.6.7]$$

Ceci résulte immédiatement de l'examen de l'équation [3.6.1] de la fonction de sensibilité. L'équation [3.6.7] avec $q = z = e^{j\omega}$ définit les zéros de la fonction de sensibilité perturbation-sortie.

La partie pré spécifiable de $S(q^{-1})$, $H_S(q^{-1})$, permet d'introduire des zéros aux fréquences souhaitées.

Par exemple :

$$H_S(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

introduit un zéro à la fréquence nulle et assure donc un rejet parfait des perturbations stationnaires.

$$H_S(q^{-1}) = 1 + \alpha q^{-1} + q^{-2}$$

avec $\alpha = -2\cos(\omega T_e) = -2\cos(2\pi f/f_e)$ introduit une paire de zéros complexes non amortis à la fréquence f (ou à la fréquence normalisée f/f_e .)

$$H_S(q^{-1}) = 1 + \alpha_1 q^{-1} + \alpha_2 q^{-2}$$

permet d'introduire une paire de zéros complexes à amortissement non nul, amortissement choisi en fonction de l'atténuation souhaitée à une certaine fréquence.

Dans la figure 3.6.2, on présente les fonctions de sensibilité perturbation-sortie dans les cas où $H_S(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$ et respectivement $H_S(q^{-1}) = (1 - q^{-1})(1 + q^{-2})$ pour le même modèle de procédé que précédemment et les mêmes pôles de la « boucle fermée » définis par ($\omega_0 = 0.6 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.9$). Ce dernier choix pour H_S introduit une paire de zéros non amortis à la fréquence $0.25 f_e$ et on observe effectivement une atténuation très forte de la perturbation à cette fréquence ($< -100 \text{ dB}$).

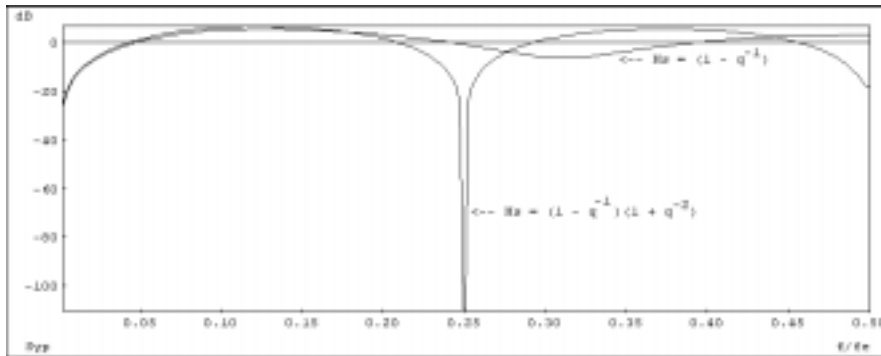


Figure 3.6.2. Fonction de sensibilité perturbation-sortie pour les cas $H_S(q^{-1}) = (1 - q^{-1})$ et $H_S(q^{-1}) = (1 - q^{-1})(1 + q^{-2})$

PROPRIETE 5.– Le module de la fonction de sensibilité perturbation-sortie est égal à 1, c'est-à-dire :

$$|S_{yp}(e^{j\omega})| = 1 \quad (0 \text{ dB})$$

aux fréquences où :

$$B^*(e^{-j\omega})R(e^{-j\omega}) = B^*(e^{-j\omega})H_R(e^{-j\omega})R'(e^{-j\omega}) = 0 ; \quad \omega = 2\pi f / f_e \quad [3.6.8]$$

Cela résulte immédiatement de l'examen de l'équation [3.6.1] car sous la condition [3.6.8] on obtient $S_{yp}(j\omega) = 1$.

La partie présécifiable de $R(q^{-1})$, $H_R(q^{-1})$, permet ainsi d'obtenir un gain nul pour $R(q^{-1})$ à certaines fréquences et donc assurer à ces fréquences $|S_{yp}(e^{j\omega})| = 1$.

Par exemple :

$$H_R(q^{-1}) = 1 + q^{-1}$$

introduit un zéro à $0.5f_e$ ce qui impliquera $|S_{yp}(e^{j\pi})| = 1$:

$$H_R(q^{-1}) = 1 + \beta q^{-1} + q^{-2}$$

avec $\beta = -2\cos(\omega T_e) = -2\cos 2\pi f/f_e$ introduit une paire de zéros complexes non amortis à la fréquence f et on aura ainsi $|S_{yp}(e^{j\pi f/f_e})| = 1$:

$$H_R(q^{-1}) = 1 + \beta_1 q^{-1} + \beta_2 q^{-2}$$

permet d'introduire une paire de zéro complexes à amortissement non nul, qui pourra jouer sur l'atténuation ou l'amplification de la perturbation à une certaine fréquence.

La figure 3.6.3 illustre l'effet de $H_R(q^{-1}) = 1 + q^{-2}$, qui introduit une paire de zéros complexes non amortis à $f = 0.25 f_e$. On observe que pour cette fréquence $|S_{yp}(e^{j\omega})| = 1$ (0 dB), alors qu'en absence de $H_R(q^{-1})$ on a pour $f = 0.25 f_e$, $|S_{yp}(e^{j\omega})| = 3$ dB.

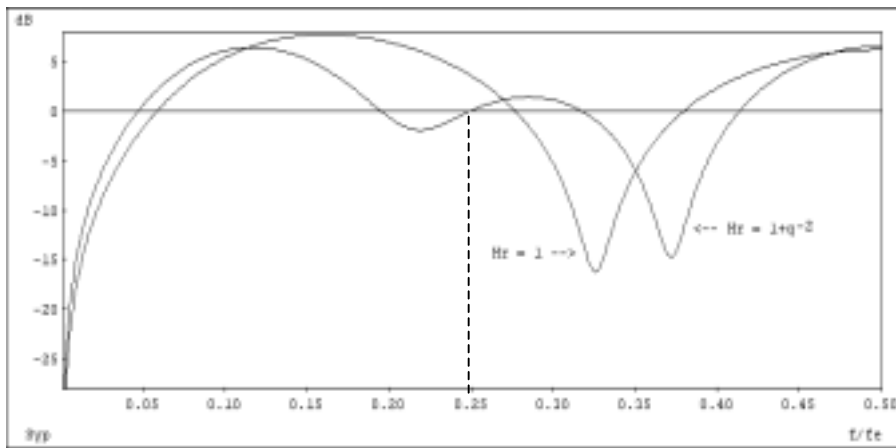


Figure 3.6.3. Fonction de sensibilité perturbation-sortie pour les cas $H_R(q^{-1}) = 1$ et $H_R(q^{-1}) = 1 + q^{-2}$

A noter aussi que $R(q^{-1})$ définit une partie des zéros de la fonction de sensibilité perturbation-entrée $S_{up}(q^{-1})$ (donnée dans [3.6.2]). Donc aux fréquences où $R(q^{-1}) = 0$, cette fonction de sensibilité sera nulle (blocage du signal de mesure à une certaine fréquence).

PROPRIETE 6.– L'introduction de pôles auxiliaires $P_F(q^{-1})$ asymptotiquement stables entraîne en général une diminution du module de la fonction de sensibilité dans les zones d'atténuation de $1/P_F(q^{-1})$.

En effet, de l'expression de la fonction de sensibilité [3.6.1], on voit que le terme $1/P_D(q^{-1}) P_F(q^{-1})$ introduira une atténuation plus forte dans le domaine fréquentiel que le terme $1/P_D(q^{-1})$ si les pôles auxiliaires $P_F(q^{-1})$ sont des pôles aperiodiques asymptotiquement stables. Néanmoins, comme $S'(q^{-1})$ dépend de ces pôles à travers [3.6.4], on ne peut pas garantir cette propriété pour toutes les valeurs possibles de $P_F(q^{-1})$.

Ces pôles auxiliaires sont en général choisis comme des pôles réels hautes fréquences et prennent souvent la forme :

$$P_F(q^{-1}) = (1 + p'q^{-1})^{n_{P_F}} \quad -0.5 \leq p' \leq -0.05$$

où :

$$n_{P_F} \leq n_P - n_{P_D} \quad ; \quad n_P = (\deg P)_{\max} \quad ; \quad n_{P_D} = \deg P_D$$

L'effet de l'introduction des pôles auxiliaires sur la fonction de sensibilité est illustré dans la figure 3.6.4.

A noter que dans de nombreuses applications, l'introduction des pôles auxiliaires hautes fréquences suffit pour assurer les marges de robustesse requises.

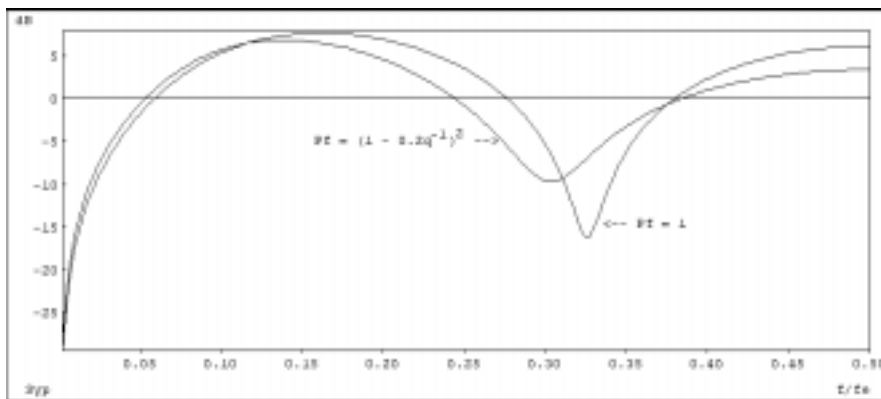


Figure 3.6.4. Effets des pôles auxiliaires sur la fonction de sensibilité

PROPRIETE 7.– L'introduction simultanée d'une partie fixe H_{S_i} et d'une paire de pôles auxiliaires P_{F_i} de la forme :

$$\frac{H_{S_i}(q^{-1})}{P_{F_i}(q^{-1})} = \frac{1 + \beta_1 q^{-1} + \beta_2 q^{-2}}{1 + \alpha_1 q^{-1} + \alpha_2 q^{-2}} \quad [3.6.9]$$

résultant de la discrétisation d'un dipôle continu :

$$F(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_{num}\omega_0 s + \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta_{den}\omega_0 s + \omega_0^2} \quad [3.6.10]$$

en utilisant la transformation bilinéaire⁷ :

$$s = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad [3.6.11]$$

introduit une atténuation (un « trou ») à la fréquence discrétisée normalisée :

$$\omega_{disc} = 2 \arctan\left(\frac{\omega_0 T_e}{2}\right) \quad [3.6.12]$$

en fonction du rapport $\zeta_{num} / \zeta_{den} < 1$. L'atténuation à la pulsation ω_{disc} est donnée par :

$$M_t = 20 \log\left(\frac{\zeta_{num}}{\zeta_{den}}\right) ; \quad (\zeta_{num} < \zeta_{den}) \quad [3.6.13]$$

L'effet sur les caractéristiques fréquentielles de S_{yp} aux fréquences $f \ll f_{disc}$ et $f \gg f_{disc}$ est négligeable.

La figure 3.6.5 illustre l'effet de l'introduction simultanée d'une partie fixe dans H_s et d'une paire de pôles dans P , correspondant à la discrétisation d'un dipôle résonant de la forme [3.6.10]. On observe sa faible influence sur les caractéristiques fréquentielles de S_{yp} , loin de la fréquence de résonance du dipôle.

7. La transformation bilinéaire assure une meilleure approximation, dans le domaine fréquentiel, d'un modèle continu par un modèle discret que le remplacement de la dérivée par la différence, c'est-à-dire $s = (1 - z^{-1}) / T_e$ (voir équations [2.3.6] et [2.5.2]).

Cet outil de calibrage est essentiel pour un calibrage fin dans différentes zones de fréquence afin de satisfaire les contraintes de performances et robustesse car il réduit l'interaction entre les réglages dans les différentes zones.

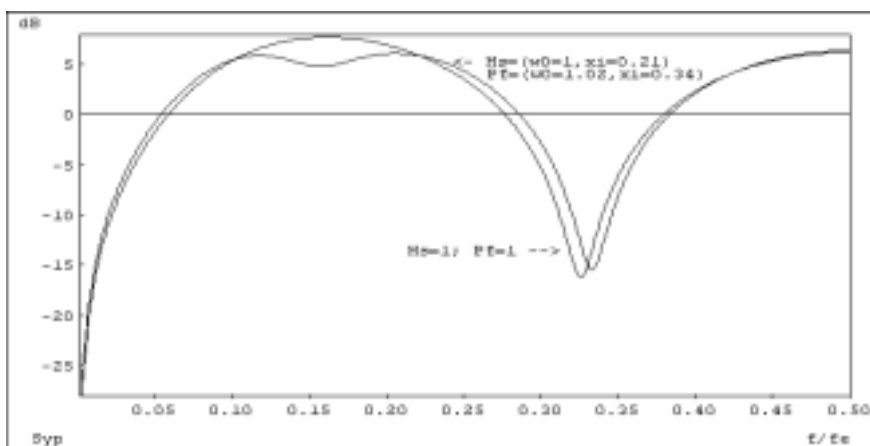


Figure 3.6.5. Effets des dipôles résonants H_{S_i} / P_{F_i} sur la fonction de sensibilité perturbation-sortie

Calcul des dipôles résonants H_{S_i} / P_{F_i}

Le calcul des coefficients de H_{S_i} et P_{F_i} se fait de la façon suivante.

Données du problème :

- fréquence centrale normalisée pour l'atténuation f_{disc} ($\omega_{disc} = 2\pi f_{disc}$) ;
- atténuation souhaitée à la fréquence f_{disc} : M_t dB ;
- amortissement minimum accepté pour P_{F_i} : $(\zeta_{den})_{min} (\geq 0.3)$.

Etape I : calcul du filtre analogique

$$\omega_0 = \frac{2}{T_e} \tan\left(\frac{\omega_{disc}}{2}\right) \quad 0 \leq \omega_{disc} \leq \pi \quad \zeta_{num} = 10^{M_t/20} \zeta_{den}$$

Etape II : calcul du filtre discret par la transformation bilinéaire [3.6.11]

Par la transformation bilinéaire [3.6.11], on obtient un filtre discret de la forme :

$$F(z^{-1}) = \frac{b_{z0} + b_{z1}z^{-1} + b_{z2}z^{-2}}{a_{z0} + a_{z1}z^{-1} + a_{z2}z^{-2}} = \gamma \frac{1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}} \quad [3.6.14]$$

Le filtre qui sera effectivement mis en œuvre sera de la forme⁸ :

$$F(z^{-1}) = \frac{H_S(z^{-1})}{P_i(z^{-1})} = \frac{1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}}$$

où les coefficients ont la forme suivante :

$$\begin{aligned} b_{z0} &= \frac{4}{T_e^2} + 4 \frac{\zeta_{num} \omega_0}{T_e} + \omega_0^2 ; & b_{z1} &= 2\omega_0^2 - \frac{8}{T_e^2} \\ b_{z2} &= \frac{4}{T_e^2} - 4 \frac{\zeta_{num} \omega_0}{T_e} + \omega_0^2 \\ a_{z0} &= \frac{4}{T_e^2} + 4 \frac{\zeta_{den} \omega_0}{T_e} + \omega_0^2 ; & a_{z1} &= 2\omega_0^2 - \frac{8}{T_e^2} \\ a_{z2} &= \frac{4}{T_e^2} - 4 \frac{\zeta_{den} \omega_0}{T_e} + \omega_0^2 \end{aligned} \quad [3.6.15]$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{b_{z0}}{a_{z0}} \\ \beta_1 &= \frac{b_{z1}}{b_{z0}} ; & \beta_2 &= \frac{b_{z2}}{b_{z0}} \\ \alpha_1 &= \frac{a_{z1}}{a_{z0}} ; & \alpha_2 &= \frac{a_{z2}}{a_{z0}} \end{aligned} \quad [3.6.16]$$

Les filtres H_S et P_F peuvent être caractérisés par la pulsation naturelle ω_0 et l'amortissement ζ . Pour ceci on va d'abord calculer les racines du numérateur et du dénominateur. Les expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned} z_{n1,2} &= \frac{-\beta_1 \pm j\sqrt{4\beta_2 - \beta_1^2}}{2} = A_n e^{j\varphi_n} \\ z_{d1,2} &= \frac{-\alpha_1 \pm j\sqrt{4\alpha_2 - \alpha_1^2}}{2} = A_d e^{j\varphi_d} \end{aligned} \quad [3.6.17]$$

A partir du tableau 2.3.3 et des relations données dans le paragraphe 2.3.8, on peut établir la relation entre les coefficients du filtre discret et la fréquence naturelle

8. Le facteur γ n'a aucun effet sur le résultat final (valeur de R et S). On peut néanmoins implémenter le filtre sans normaliser les coefficients du numérateur.

et l'amortissement du filtre continu équivalent (discrétisation avec BOZ). Il résulte que les racines des polynômes discrets du 2^e ordre s'expriment :

$$z_{1,2} = e^{-\zeta_{disc}\omega_{0disc}T_e} e^{\pm j\omega_{0disc}\sqrt{1-\zeta_{disc}^2}T_e} \quad [3.6.18]$$

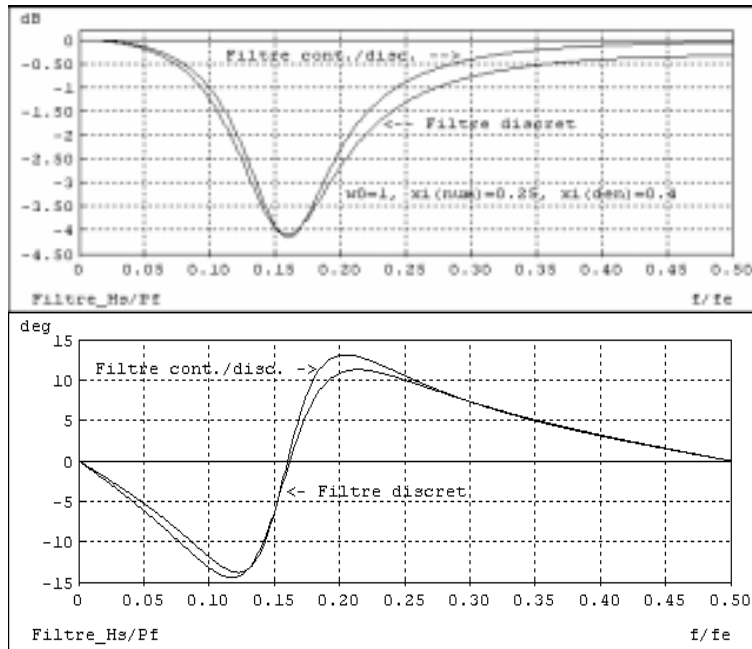


Figure 3.6.6. Caractéristique fréquentielle du dipôle résonant H_S / P_F utilisé pour l'exemple présenté dans la figure 3.6.5

On obtient alors pour le filtre discrétisé :

$$\begin{aligned} \omega_{0num} &= \sqrt{\frac{\varphi_n^2 + \ln^2 A_n}{T_e^2}} & ; & \quad \zeta_{numd} = -\frac{\ln A_n}{\omega_{0num} T_e} \\ \omega_{0den} &= \sqrt{\frac{\varphi_d^2 + \ln^2 A_d}{T_e^2}} & ; & \quad \zeta_{dend} = -\frac{\ln A_d}{\omega_{0den} T_e} \end{aligned} \quad [3.6.19]$$

où les indices « num » et « den » correspondent respectivement à H_S et P_F . Ces filtres peuvent être calculés avec les fonctions *filter22.sci* (Scilab) *filter22.m* (Matlab) ainsi qu'avec *ppmaster* (Matlab).

REMARQUE.– Pour des fréquences inférieures à $0.15 f_e$ les calculs peuvent se faire avec une très bonne précision directement en discret. Dans ce cas, $\omega_0 = \omega_{0,den} = \omega_{0,num}$ et les amortissements des filtres discrets se calculent en fonction de l'atténuation désirée en utilisant directement la relation [3.6.13].

La figure 3.6.6 donne les caractéristiques fréquentielles du filtre H_S/P_F obtenu par la discrétisation d'un filtre continu et utilisé pour l'exemple présenté dans la figure 3.6.5 (« filtre cont-disc »). Il correspond à un filtre continu avec $\omega_0 = 1$ rad/s ($f_0 = 0.159 f_e$), $\zeta_{num} = 0.25$ et $\zeta_{den} = 0.4$. Sur la même figure est représentée la caractéristique fréquentielle d'un filtre discret ayant les mêmes spécifications initiales. On observe l'apparition d'une différence en hautes fréquences mais qui est faible (f_0 est encore près de $0.15 f_e$). Les écarts augmentent avec l'augmentation de ω_0 .

3.6.2. Propriétés de la fonction de sensibilité perturbation-entrée

PROPRIÉTÉ 1.– L'annulation de l'effet des perturbations en sortie sur l'entrée du procédé (c'est-à-dire $S_{up} = 0$) est obtenue aux fréquences où :

$$A(e^{-j\omega})H_R(e^{-j\omega})R'(e^{-j\omega}) = 0 \quad ; \quad \omega = 2\pi f / f_e \quad [3.6.20]$$

A ces fréquences $S_{yp} = 1$ (voir Propriété 5 de la fonction de sensibilité perturbation-sortie) et le système est en boucle ouverte.

La figure 3.6.7 illustre l'effet de $H_R(q^{-1})$ sur $|S_{up}|$ pour :

$$H_R(q^{-1}) = 1 + \beta q^{-1} \quad 0 < \beta \leq 1 \quad [3.6.21]$$

pour $\beta = 1$, on a $|S_{up}| = 0$ à $0.5 f_e$. En utilisant $0 < \beta < 1$ on réduit plus ou moins le module de S_{up} autour de $0.5 f_e$. Cette structure pour $H_R(q^{-1})$ est systématiquement utilisée pour réduire le module de la fonction de sensibilité perturbation-entrée en hautes fréquences.

On peut utiliser aussi une structure :

$$H_R(q^{-1}) = (1 + \beta q^{-1})^n \quad 0 < \beta \leq 1$$

(souvent $n = 1$ ou 2).

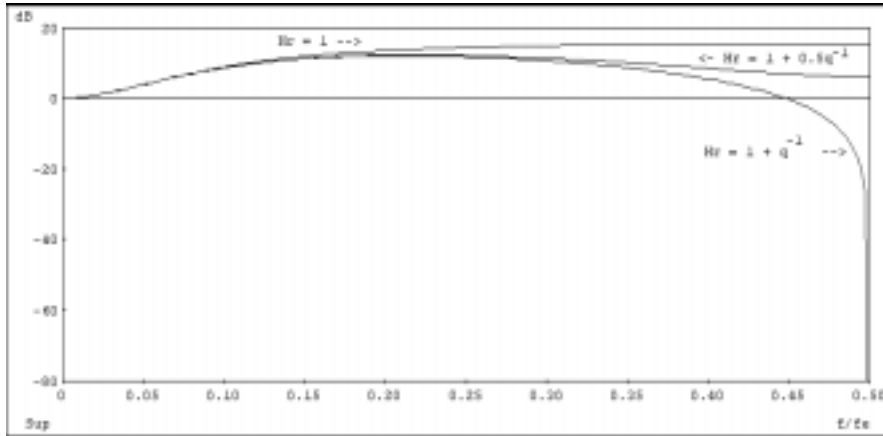


Figure 3.6.7. Effet du filtre $H_R(q^{-1}) = 1 + \beta q^{-1}$ $0 < \beta \leq 1$ sur le module de la fonction de sensibilité perturbation-entrée a) $\beta = 0$ b) $\beta = 0.5$ c) $\beta = 1$

PROPRIETE 2.- Aux fréquences où :

$$A(e^{-j\omega})H_S(e^{-j\omega})S'(e^{-j\omega}) = 0 \quad ; \quad \omega = 2\pi f / f_e \quad [3.6.22]$$

qui correspondent aux fréquences de rejet parfait des perturbations en sortie ($S_{yp} = 0$) on a :

$$\left| S_{up}(e^{-j\omega}) \right| = \left| \frac{A(e^{-j\omega})}{B(e^{-j\omega})} \right| \quad [3.6.23]$$

L'expression [3.6.23] correspond à l'inverse du gain du système à commander. Ceci implique qu'un rejet parfait de perturbations en sortie (ou plus généralement une atténuation importante) doit être fait uniquement dans les régions fréquentielles où le gain du système est suffisamment grand. Si le gain du système est trop faible, $|S_{up}|$ va être grand à ces fréquences (donc manque de robustesse et forte sollicitation de l'actionneur). La relation [3.6.23] implique aussi que des problèmes apparaîtront si $B(z^{-1})$ a des zéros complexes près du cercle unité (stables ou instables). A ces fréquences il faut éviter d'atténuer les perturbations.

PROPRIETE 3.– L'introduction simultanée d'une partie fixe H_{R_i} et d'une paire de pôles auxiliaires P_{F_i} de la forme :

$$\frac{H_{R_i}(q^{-1})}{P_{F_i}(q^{-1})} = \frac{1 + \beta_1 q^{-1} + \beta_2 q^{-2}}{1 + \alpha_1 q^{-1} + \alpha_2 q^{-2}}$$

résultant de la discrétisation d'un dipôle continu :

$$F(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_{num}\omega_0 s + \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta_{den}\omega_0 s + \omega_0^2}$$

en utilisant la transformation bilinéaire :

$$s = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

introduit une atténuation (un « trou ») à la fréquence discrétisée normalisée :

$$\omega_{disc} = 2 \arctan\left(\frac{\omega_0 T_e}{2}\right)$$

en fonction du rapport $\zeta_{num} / \zeta_{den} < 1$.

L'atténuation à la pulsation ω_{disc} est donnée par :

$$M_t = 20 \log\left(\frac{\zeta_{num}}{\zeta_{den}}\right) \quad ; \quad (\zeta_{num} < \zeta_{den})$$

L'effet sur les caractéristiques fréquentielles de S_{yp} aux fréquences $f \ll f_{disc}$ et $f \gg f_{disc}$ est négligeable.

Le calcul de ces filtres se fait avec la méthode décrite au paragraphe 3.6.1.

3.6.3. Définition des « gabarits » pour les fonctions de sensibilité

Les contraintes de performance et de robustesse conduisent à la définition des « gabarits » souhaitables pour les fonctions de sensibilité. Dans le cas le plus typique, on s'intéresse à assurer un rejet des perturbations en basses fréquences, une

marge de module et une marge de retard suffisantes pour assurer d'une part la robustesse, et d'autre part une amplification réduite des perturbations aux fréquences supérieures à la bande d'atténuation. Le *gabarit* désiré sur la fonction de sensibilité perturbation-sortie prend la forme représentée dans la figure 3.6.8.

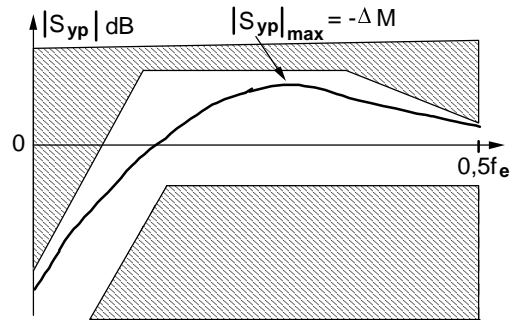


Figure 3.6.8. Gabarit souhaité pour le module de la fonction de sensibilité (cas du rejet de perturbations en basses fréquences)

Ce gabarit est défini par une valeur maximum à différentes fréquences (gabarit « supérieur »). On peut y ajouter aussi un gabarit « inférieur » en se rappelant que d'une part l'introduction d'une atténuation trop importante, dans certaines zones de fréquences en dehors de la zone utile, entraînera nécessairement une réduction de la marge de module (car $|S_{yp}|_{max}$ va augmenter), et d'autre part, la marge de retard induit un gabarit « inférieur ».

Dans les cas où l'atténuation doit intervenir dans certaines bandes de fréquences et que par ailleurs à une certaine fréquence la perturbation ne doit être ni atténuée ni amplifiée, (ouverture de boucle) on peut avoir un gabarit souhaité de la forme représentée dans la figure 3.6.9. A cette fréquence $|S_{yp}|$ doit être à égal 1, ce qui est équivalent à un fonctionnement en boucle ouverte.

Les contraintes de robustesse et de sollicitations de l'actionneur conduisent aussi à un « gabarit » pour la fonction de sensibilité perturbation-entrée S_{up} .

Rappelons tout d'abord que l'inverse du module de S_{up} à chaque fréquence donne la valeur de l'incertitude additive tolérée pour assurer la stabilité robuste du système (voir chapitre 2, section 2.6). En conséquence *aux fréquences où on a des incertitudes sur le modèle, le module de la fonction de sensibilité S_{up} doit être très faible.*

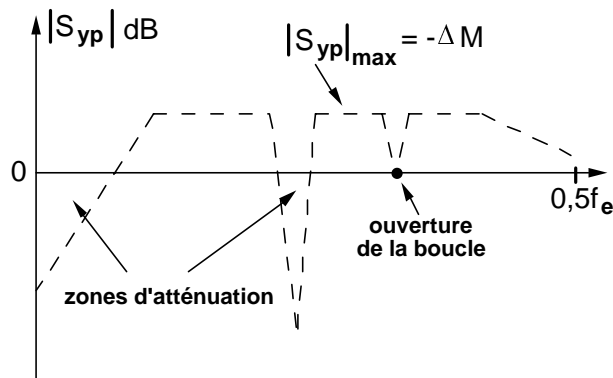


Figure 3.6.9. Gabarit souhaité pour le module de la fonction de sensibilité perturbation-sortie (cas du rejet de perturbations dans certaines zones fréquentielles et ouverture de la boucle à une certaine fréquence)

Rappelons aussi que l'ouverture de la boucle ($S_{up} = 0$) peut être requise soit parce que on ne veut pas réagir à certaines fréquences de la perturbation, soit parce que on ne veut pas exciter le procédé à certaines fréquences (présences par exemples de modes vibratoires au-delà de la bande d'atténuation).

Par ailleurs, pour des raisons de robustesse et d'insensibilité au bruit en hautes fréquences on réduit systématiquement le module de S_{up} autour de $0.5 f_e$ (souvent on ouvre la boucle à $0.5 f_e$).

La limitation des sollicitations de l'actionneur dans certaines zones de fréquences (le plus souvent en hautes fréquences) induit une limitation de la valeur du module de S_{up} dans ces zones de fréquences. Un exemple de gabarit pour $|S_{up}|$ est donné dans la figure 3.6.10.

3.6.4. Méthode de calibrage des fonctions de sensibilité

Pour essayer de satisfaire ou d'approcher les gabarits spécifiés du module de la fonction de sensibilité perturbation-sortie et du module de la fonction de sensibilité perturbation-entrée on dispose des moyens suivants :

- 1) choix des pôles dominants et auxiliaires de la boucle fermée ;
- 2) choix des parties fixes du régulateur $H_R(q^{-1})$ et $H_S(q^{-1})$;
- 3) choix simultané des parties fixes et des pôles auxiliaires.

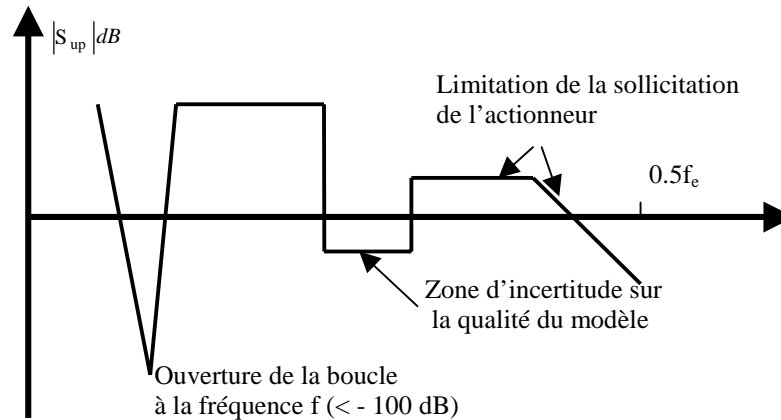


Figure 3.6.10. Exemple de gabarit souhaité pour le module de la fonction de sensibilité perturbation-entrée

Bien qu'il existe un couplage entre le calibrage de la fonction de sensibilité perturbation-sortie et perturbation-entrée, il est possible de traiter dans une large mesure ces deux problèmes séparément.

En particulier, il est très utile en pratique de se rappeler qu'aux fréquences où $|S_{yp}|$ est proche de 1 (0dB), $|S_{up}|$ est proche de 0 (< -60 dB).

Il existent des méthodes « automatiques » utilisant l'optimisation convexe [ADA 98a, LAN 99a, LAN 99b] qui permettent de résoudre ce problème de calibrage. Il est néanmoins vrai que dans des nombreuses situations il est relativement aisé de calibrer les fonctions de sensibilité par un choix de H_S , H_R et des pôles auxiliaires à partir des propriétés des fonctions de sensibilité exposées précédemment.

La méthode que nous présentons à défaut d'être « automatique » est néanmoins efficace et contribue à la compréhension des actions du régulateur.

Un logiciel de conception assistée par ordinateur et néanmoins nécessaire. On peut utiliser WinREG [ADA 96b] ou *ppmaster* (Matlab) [PRO 01].

Calibrage de la fonction de sensibilité perturbation-sortie.

L'objectif général du calibrage de la fonction de sensibilité perturbation-sortie peut se résumer ainsi : étant donné une bande d'atténuation, choisir les pôles de la

boucle fermée et les éléments fixes de $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ afin d'aplatir $|S_{yp}(e^{j\omega})|$ en dehors de la bande d'atténuation pour réduire $|S_{yp}(e^{j\omega})|_{max}$.

La méthodologie de calibrage de la fonction de sensibilité, perturbation-sortie, qui est une procédure itérative, se déroule en général ainsi ⁹.

Etape I

Choix des pôles dominants de $P(q^{-1})$ et des parties fixes de $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ imposées par les spécifications des performances. (Exemple : erreur statique nulle $\rightarrow H_S(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$, ouverture de la boucle à une certaine fréquence $\rightarrow H_R(q^{-1}) = 1 + \alpha q^{-1} + q^{-2}$).

Calcul du régulateur.

Examen de la fonction de sensibilité perturbation-sortie.

Si le gabarit supérieur de robustesse correspondant à une marge de module $\Delta M = 0.5$ et une marge de retard de $\Delta\tau = T_e$ est intersecté par la fonction de sensibilité perturbation-sortie on distingue plusieurs situations :

- le maximum (local) de la fonction de sensibilité se trouve dans les hautes fréquences ;
- le maximum (local) de la fonction de sensibilité se trouve dans la zone de fréquences adjacente à la zone d'atténuation .
- la fonction de sensibilité présente simultanément un maximum en basse fréquences et un maximum en hautes fréquences.

Cas (a) et (c)

Etape IIa

On introduit des pôles auxiliaires hautes fréquences de la forme :

$$P_F(q^{-1}) = (1 + p_1 q^{-1})^{n_F} \quad ; \quad -0.05 \geq p_1 \geq -0.5$$

avec des valeurs croissantes de $|p_1|$ à partir de 0.05 et avec :

$$n_{P_F} \leq n_P - n_{P_D} \quad ; \quad n_P = (\deg P)_{max} \quad ; \quad n_{P_D} = \deg P_D$$

9. Les principes de cette méthodologie de calibrage de la fonction de sensibilité perturbation-sortie peuvent être étendus pour le calibrage d'autres types de fonctions de sensibilité.

On calcule le régulateur et on examine la forme de la fonction de sensibilité. On augmente la valeur de $|p_l|$ jusqu'au moment où la fonction de sensibilité rentre à l'intérieur du gabarit dans les hautes fréquences.

Souvent, suite à cette opération, le maximum de la fonction de sensibilité se déplace vers les basses fréquences. Si ce maximum est supérieur à la valeur du gabarit, on se retrouve dans le cas b. A noter que dans de nombreuses applications, l'introduction des pôles auxiliaires hautes fréquences est suffisant pour satisfaire les spécifications.

Cas (b)

Pour le cas (b), deux approches sont possibles :

- utilisation des dipôles résonants H_{S_i} / P_i ;
- utilisation successive de H_S avec des zéros complexes et des pôles auxiliaires.

Etape IIb/1 : utilisation des dipôles résonants

On identifie les zone de fréquences dans laquelle $|S_{yp}|$ dépasse les valeurs imposées par le « gabarit ». Dans cette zone on détermine les valeurs approximatives de la fréquence correspondant au maximum de $|S_{yp}|$ et l'atténuation nécessaire. On calcule un dipôle résonant H_{S_i} / P_i à partir de ces spécifications.

Ce dipôle a une faible influence dans les autres zones fréquentielles éloignées de la zone considérée et la synthèse pour satisfaire les contraintes sur S_{yp} est pratiquement terminée.

Etape IIb/2 : utilisation uniquement de H_S

On introduit une paire de zéros complexes supplémentaires dans $H_S(q^{-1})$:

$$H_S(q^{-1}) = 1 + \alpha_1 q^{-1} + \alpha_2 q^{-2}$$

avec un amortissement correspondant à l'atténuation souhaitée pour baisser le maximum de $|S_{yp}(e^{j\omega})|$ en dessous de la valeur admise, ou en général pour baisser les valeurs de $|S_{yp}|$ dans la zone adjacente à la bande d'atténuation.

La fréquence de ces zéros est choisie dans l'intervalle compris entre la fréquence maximale de la bande d'atténuation et la fréquence du maximum de $|S_{yp}|$. Les valeurs typiques de l'amortissement sont $\zeta = 0.5$ à 0.9 . On recalcule le régulateur et on examine la fonction de sensibilité obtenue .

L'utilisation de ce filtre additionnel a comme effet en général :

- un déplacement du maximum de la fonction de sensibilité vers les hautes fréquences ;
- un accroissement de la bande d'atténuation.

Etape IIb/3 : utilisation de H_S et de pôles auxiliaires

On introduit des pôles auxiliaires hautes fréquences de la forme :

$$P_F(q^{-1}) = (1 + p_1 q^{-1})^{n_F} ; -0.05 \geq p_1 \geq -0.5$$

avec des valeurs croissantes de $|p_1|$ à partir de 0.05 en prenant :

$$n_{P_F} \leq n_P - n_{P_D} ; n_P = (\deg P)_{\max} ; n_{P_D} = \deg P_D$$

(à noter que suite à l'introduction de H_S , n_P augmente).

Si la fonction de sensibilité présente un « creux » dans les hautes fréquences, on peut éventuellement utiliser :

$$P_F(q^{-1}) = (1 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2}) (1 + p q^{-1})^{n_{P_F}-2}$$

les pôles complexes permettant de remonter le creux de quelques dB (car l'amortissement doit être plus grand ou égal à 0.7).

En même temps, si la bande d'atténuation a été augmentée d'une manière significative, on ralentit la dynamique des pôles principaux.

Inversement, si la bande d'atténuation a été réduite trop sous l'effet des pôles auxiliaires, soit on augmente la fréquence propre des pôles dominants soit on introduit un dipôle H_S / P_F centré autour de la fréquence correspondant à la bande d'atténuation désirée.

L'effet de l'introduction des pôles auxiliaires hautes fréquences d'une part et le ralentissement éventuel des pôles principaux d'autre part permettent en général d'atteindre les performances spécifiées en termes de bande d'atténuation et marge de module, ou tout au moins d'améliorer les performances qui peuvent être obtenues en spécifiant uniquement les pôles dominants de la boucle fermée.

Cette approche est en général plus difficile à utiliser que celle qui introduit simultanément H_S et P_F sous la forme d'un dipôle résonant.

Etape III

On itère autour des valeurs des pôles additionnels et de la fréquence des pôles principaux pour atteindre les spécifications du gabarit de robustesse et des performances.

Quelle que soit la démarche utilisée, on vérifie en final la marge de retard. Si celle-ci n'est pas satisfaite, soit on augmente la valeur des pôles auxiliaires, soit on place une paire de pôles auxiliaires (complexes) à une fréquence proche de la fréquence de croisement (du cercle unité) correspondant à la marge de retard (en général c'est la plus haute fréquence de croisement).

Calibrage de la fonction de sensibilité perturbation-entrée

L'étape initiale consiste en l'introduction de $H_R(q^{-1})$ de la forme :

$$H_R(q^{-1}) = (1 + \beta q^{-1})^n \quad 0.5 < \beta < 1 \quad n = 1, 2$$

pour assurer une valeur suffisamment faible de la fonction de sensibilité perturbation-entrée dans les hautes fréquences (près de $0.5 f_e$).

Toujours dans l'étape initiale on introduit des $H_{R_i}(q^{-1})$ de la forme :

$$H_{R_i}(q^{-1}) = 1 + \beta_1 q^{-1} + \beta_2 q^{-2}$$

avec des zéros complexes très peu amortis ou des dipôles :

$$\frac{H_{R_i}(q^{-1})}{P_i(q^{-1})} = \frac{1 + \beta_1 q^{-1} + \beta_2 q^{-2}}{1 + \alpha_1 q^{-1} + \alpha_2 q^{-2}}$$

pour introduire une atténuation très importante dans les fréquences où il y a une incertitude sur la précision du modèle (dynamique non-modélisées). S'il s'agit d'obtenir une ouverture de boucle à une certaine fréquence les zéros de $H_{R_i}(q^{-1})$ doivent avoir un amortissement nul.

Après ceci on passe au calibrage de S_{yp} . Une fois le calibrage de S_{yp} achevé on vérifie si $|S_{up}|$ rentre dans le gabarit.

Dans les zones de fréquences où $|S_{up}|$ sort du gabarit on introduit des dipôles résonants H_{R_i}/P_i calculés à partir de la fréquence du maximum de $|S_{up}|$ et de

l'atténuation nécessaire. Pour la zone proche de $0.5 f_e$ on se limite à modifier β dans le filtre introduit pour cette zone.

Une fois terminé le calibrage de $|S_{up}|$ on vérifie la caractéristique de $|S_{yp}|$ et on fait éventuellement quelques réajustements.

REMARQUE.– *L'utilisation des dipôles résonants est plus commode (nécessite moins d'itérations) que l'utilisation successive de H_R et P_F .*

3.6.5. Calibrage de la fonction de sensibilité. Exemple 1

Le modèle de procédé considéré est caractérisé par :

$$A(q^{-1}) = 1 - 0.7 q^{-1} \quad ; \quad B(q^{-1}) = 0.3 q^{-1} \quad ; \quad d = 2 \quad ; \quad T_e = 1s$$

On impose la présence d'un intégrateur dans le régulateur. On considère comme pôles dominants de la boucle fermée ceux d'un polynôme du 2^e ordre résultant de la discrétisation d'un système du 2^e ordre continu avec $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$, et $\zeta = 0.9$. Le régulateur est calculé par *placement de pôles*. La courbe de sensibilité perturbation-sortie correspondante est représentée dans la figure 3.6.12 (courbe A). Elle croise le gabarit de robustesse pour $\Delta M = -6\text{dB}$ et $\Delta\tau = T_e$. Donc, la marge de module est inférieure à -6dB et la marge de retard est inférieure à une période d'échantillonnage. La fréquence maximale de la bande d'atténuation à 0 dB est de 0.058 Hz (voir tableau 3.6.1).

L'objectif est d'obtenir une même bande d'atténuation, mais avec :

$$\Delta M \geq -6\text{dB} \quad (|S_{yp}|_{\max} \leq 6\text{dB}) \quad \text{et} \quad \Delta\tau \geq T_e.$$

On rajoute tout d'abord une paire de pôles auxiliaires réels (ceci n'augmente pas la complexité du régulateur) :

$$P_F(q^{-1}) = (1 - 0.4 q^{-1})^2$$

et on obtient la fonction de sensibilité représentée dans la figure 3.6.11 (courbe B). Les contraintes sur la marge de module et la marge de retard sont satisfaites mais la bande d'atténuation est inférieure 0.058 Hz (0.045 Hz).

Pour augmenter l'atténuation dans cette zone mais sans affecter les hautes fréquences nous introduisons un filtre pôles/zéros $H_S(q^{-1})/P'_F(q^{-1})$ centré à $\omega_0 = 0.4 \text{ rad/s}$ ($f = 0.064 \text{ Hz}$) avec $H_S(q^{-1})$ résultant de la discrétisation d'un 2^e ordre continu avec $\omega_0 = 0.4 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.3$ et $P'_F(q^{-1})$ résultant de la discrétisation

d'un 2^e ordre continu avec $\omega_0 = 0.4 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.5$. Comme l'amortissement des zéros du filtre (H_S) est plus faible que celui des pôles, une atténuation va être introduite autour de 0.064 Hz. La fonction de sensibilité résultante est représentée dans la figure 3.6.11 (courbe C). On observe que la bande d'atténuation est bonne mais il y a un léger dépassement de la valeur maximum admise de $|S_{yp}|$. Pour remédier à cette situation on augmente la valeur des pôles auxiliaires réels qui passeront de 0.4 à 0.44. La fonction de sensibilité finale est représentée dans la figure 3.6.11 (courbe D).

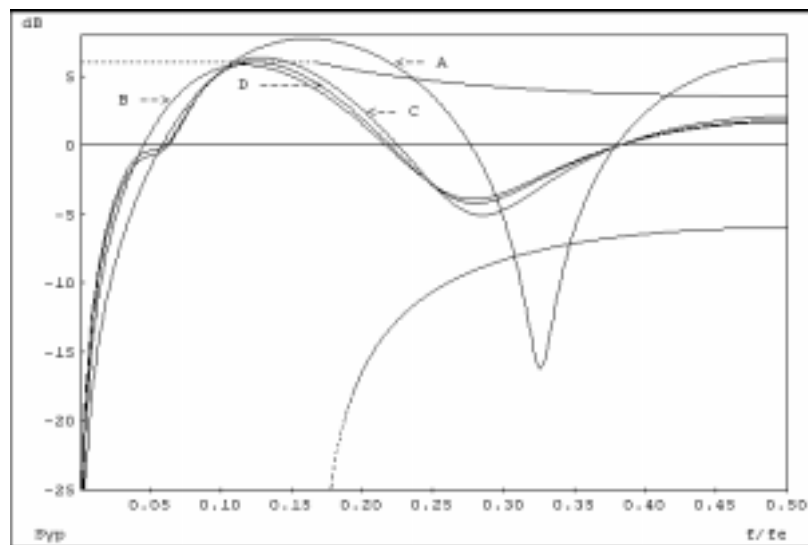


Figure 3.6.11. Fonctions de sensibilité perturbation-sortie pour différents régulateurs R-S-T (pour les détails voir tableau 3.6.1)

3.6.6. Calibrage de la fonction de sensibilité. Exemple 2¹⁰

Le modèle de procédé considéré est caractérisé par :

$$A(q^{-1}) = 1 - q^{-1} \quad ; \quad B(q^{-1}) = 0.5 q^{-1} \quad ; \quad d = 2 \quad ; \quad T_e = 1s$$

Il s'agit d'un procédé intégrateur avec retard. Le procédé subit l'effet de deux types de perturbations :

- des perturbations basses fréquences qui doivent être atténuées,

10. Cet exemple et les spécifications correspondantes proviennent d'un problème rencontré dans l'industrie sidérurgique.

– une perturbation sinusoïdale à 0.25 Hz qui ne doit pas être compensée par le régulateur.

	$H_S(q^{-1})$	Pôles en boucle fermée		Marge de module (dB)	Marge de retard (T_e)	Bande d'atténuation (Hz)
		Dominant	Auxiliaires			
A	$1 - q^{-1}$	$\omega_0 = 1$ $\zeta = 0.9$	---	-7.71	0.4	0.058
B	$1 - q^{-1}$	$\omega_0 = 1$ $\zeta = 0.9$	$(1 - 0.4q^{-1})^2$	-5.81	3.07	0.045
C	$1 - q^{-1}$ $\omega_0=0.4$ $\zeta=0.3$	$\omega_0 = 1$ $\zeta = 0.9$	$(1-0.4q^{-1})^2$ $\omega_0=0.4$ $\zeta=0.5$	-6.33	5.01	0.063
D	idem	$\omega_0 = 0.5$ $\zeta = 0.9$	$(1-0.44q^{-1})^2$ $\omega_0=0.4$ $\zeta=0.5$	-5.99	5.34	0.060

Tableau 3.6.1. Calibrage de la fonction de sensibilité- exemple 1

Le schéma bloc du modèle dynamique correspondant est représenté dans la figure 3.6.12.

Les spécifications de performance et de robustesse sont les suivantes :

- 1) pas d'atténuation de la perturbation sinusoïdale de fréquence $f = 0.25 \text{ Hz}$ ($|S_{yp}| = 0 \text{ dB}$ à 0.25 Hz) ;
- 2) bande d'atténuation des perturbations basses fréquences (bande de fréquence pour laquelle $|S_{yp}| < 0 \text{ dB}$) : 0 à 0.03 Hz ;
- 3) amplification de la perturbation inférieure à 3 dB à 0.07 Hz ($|S_{yp}| < 3 \text{ dB}$ à 0.07 Hz) ;
- 4) marge de module supérieure ou égale à - 6 dB ($|S_{yp}|_{max} \leq 6 \text{ dB}$) ;
- 5) marge de retard supérieure ou égale à 1s (T_e).

Le modèle du procédé étant intégrateur, la présence d'un terme intégral n'a pas été imposée (la démarche reste la même dans le cas de l'introduction d'un terme intégral dans le régulateur).

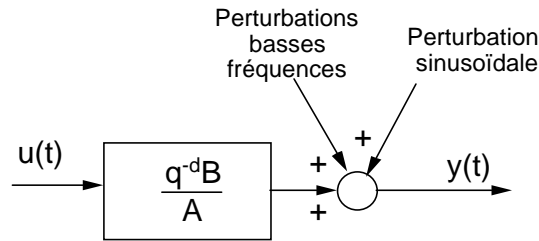


Figure 3.6.12. Schéma bloc du modèle dynamique et des perturbations

Pour synthétiser le régulateur, on commence avec les parties fixes du régulateur $H_R(q^{-1})$ et $H_S(q^{-1})$. Pour obtenir $|S_{yp}| = 0dB$ à $0.25 Hz = 0.25 f_e$, il faut introduire dans $H_R(q^{-1})$ une paire de zéros complexes à amortissement nul à cette fréquence. Pour obtenir ceci, on prend :

$$H_R(q^{-1}) = 1 + \beta q^{-1} + q^{-2}$$

avec :

$$\beta = -2 \cos(\omega T_e) = -2 \cos(2\pi f / f_e)$$

De la condition :

$$H_R(e^{-j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_e/4} = 0$$

il résulte :

$$\beta = -2 \cos(2\pi \cdot 0.25) = 0$$

et donc :

$$H_R(q^{-1}) = 1 + q^{-2}$$

D'autre part, le régulateur n'ayant pas d'intégrateur, dans un premier temps, $H_S(q^{-1}) = 1$.

On choisit les pôles dominants de $P(q^{-1})$ correspondant à la discrétisation d'un système du deuxième ordre continu. Pour cet exemple, on a considéré dans un premier temps $\omega_0 = 0.628 \text{ rad/s}$ ($f_0 = 0.1 \text{ Hz}$) et $\zeta = 0.9$.

La courbe de sensibilité obtenue est représentée dans la figure 3.6.13 (courbe A). On constate que les spécifications à 0.07 Hz ne sont pas satisfaites. A noter que la fonction de sensibilité a la valeur 1(0dB) pour $f = 0.25 f_e = 0.25 \text{ Hz}$.

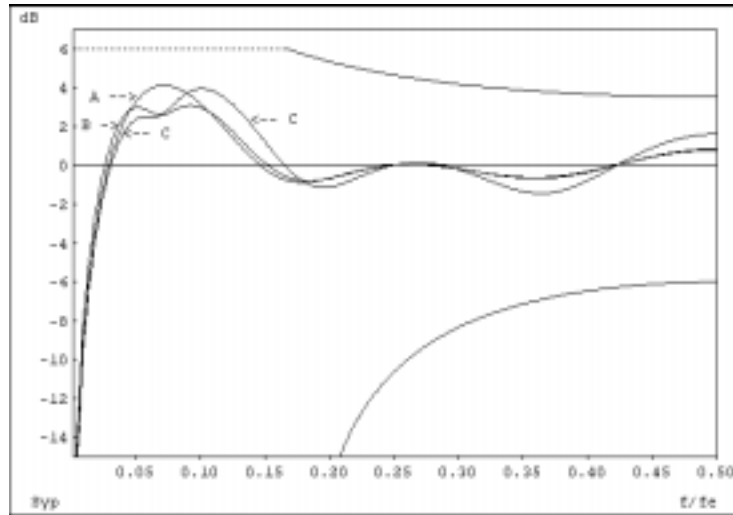


Figure 3.6.13. Fonctions de sensibilité pour différents régulateurs R-S-T (pour les détails voir tableau 3.6.2)

Pour réduire la valeur du module de la fonction de sensibilité à $f = 0.07 \text{ Hz}$, on considère l'introduction d'un filtre d'atténuation bande étroite discret H_S/P_F centré autour de $\omega_0 = 0.44 \text{ rad/s}$ ($f_0 = 0.07 \text{ Hz}$). f_0 étant inférieur à $0.15 f_e$ on peut directement calculer le filtre discret. On choisit pour H_S un $\zeta = 0.3$ et pour P_F un $\zeta = 0.4$, ce qui correspond à une atténuation du filtre à ω_0 d'environ 2.4 dB. En appliquant H_S et P_F on obtient la fonction de sensibilité représentée dans la figure 3.6.13 (courbe B). L'atténuation introduite par ce filtre à 0.07 Hz est suffisante ($|S_{yp}|_{0.07\text{Hz}} = 2.6 \text{ dB}$). Mais la bande d'atténuation est inférieure aux spécifications. Pour remédier à cette situation il suffit d'augmenter la fréquence propre des pôles dominants. Avec $\omega_0 = 0.9 \text{ rad/s}$ (au lieu de 0.628) on obtient une fonction de sensibilité représentée dans la figure 3.6.13 (courbe C). Toutes les spécifications sont satisfaites (voir aussi le tableau 3.6.2).

A noter que le choix du filtre H_S/P_F n'est pas critique. Les spécifications peuvent aussi être satisfaites pour un filtre discret centré à $\omega_0 = 0.5 \text{ rad/s}$ avec $\zeta_{num} = 0.35$ et $\zeta_{den} = 0.45$.

L'ensemble des résultats est résumé dans le tableau 3.6.2.

	H_R	H_S	Pôles en boucle fermée		Bande d'atténuation (Hz)	Marge de module (dB)	Marge de retard (Te)	$ S_{yp} $ 0.07Hz (dB)
			Dominants	Auxiliaires				
A	$1+q^{-2}$	---	$\omega_0 = 0.628$ $\zeta = 0.9$		0.03	-4.12	6.52	4.11
B	$1+q^{-2}$	$\omega_0 = 0.44$ $\zeta = 0.3$	$\omega_0 = 0.628$ $\zeta = 0.9$	$\omega_0 = 0.44$ $\zeta = 0.4$	0.026	-3.06	7.61	2.6
C	$1+q^{-2}$	idem	$\omega_0 = 0.9$ $\zeta = 0.9$		0.03	-3.94	6.62	2.6

Tableau 3.6.2. Calibrage de la fonction de sensibilité - Exemple 2

La même démarche peut être suivie dans le cas où on impose une composante intégrale dans le régulateur.

3.7. Conclusion

Dans ce chapitre, plusieurs méthodes de calcul de régulateurs numériques opérant dans un environnement déterministe ont été présentées.

Tous les régulateurs numériques ont une structure canonique à trois branches (R-S-T), correspondant à une loi de commande de la forme :

$$S(q^{-1}) u(t) + R(q^{-1}) y(t) = T(q^{-1}) y^*(t+d+1)$$

qui peut être exprimée aussi sous la forme :

$$u(t) = \frac{T(q^{-1})y^*(t+d+1) - R(q^{-1})y(t)}{S(q^{-1})}$$

où u est la commande, y la sortie du processus, y^* la trajectoire désirée en poursuite et d le retard pur discret.

Le calcul du régulateur s'effectue en général en deux étapes :

1) calcul des polynômes $S(q^{-1})$ et $R(q^{-1})$ pour obtenir les performances désirées en régulation ;

2) calcul du polynôme $T(q^{-1})$ pour approcher (ou atteindre parfaitement) les performances désirées en poursuite.

Les régulateurs numériques sont parfaitement adaptés pour la régulation des procédés ayant des retards purs ou des modes vibratoires.

La complexité du régulateur (c'est-à-dire les degrés des polynômes $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$, $T(q^{-1})$) dépend des degrés des polynômes de la fonction de transfert échantillonnée du modèle du procédé. Ce modèle peut être obtenu soit directement par une technique d'identification, soit par discrétisation d'un modèle continu du procédé.

La stratégie de commande *placement de pôles* s'applique aux procédés ayant des modèles discrets avec des zéros aussi bien stables qu'instables. Elle permet d'atteindre les performances désirées en régulation et les performances désirées en poursuite filtrées par les zéros du procédé.

La stratégie de commande *poursuite et régulation à objectifs indépendants* permet d'atteindre parfaitement les performances désirées en poursuite et en régulation, mais, pour qu'elle soit applicable, la fonction de transfert échantillonnée du modèle discret du procédé doit avoir des zéros stables.

La stratégie de commande *poursuite et régulation à modèle interne* est un cas particulier du placement de pôles dans lequel les pôles dominants de la boucle fermée sont définis par les pôles du système à commander. Cette stratégie ne s'applique qu'aux procédés stables et suffisamment amortis. La dynamique de la boucle fermée n'est pas plus rapide que celle du procédé en boucle ouverte.

Les régulateurs PID numériques sont calculés directement par le *placement de pôles* à partir de la connaissance du modèle discret du procédé à réguler. Deux structures de régulateurs PID numériques ont été examinées. Ils diffèrent entre eux uniquement par le choix du polynôme $T(q^{-1})$. Il est recommandé d'utiliser $T(q^{-1}) = R(1)$ (correspondant aux régulateurs numériques PID 2), qui offre de meilleures performances en poursuite. Cette technique ne s'applique qu'aux procédés pouvant être caractérisés par des modèles discrets d'ordre réduit ($n_{\max} \leq 2$).

Les régulateurs numériques synthétisés par les méthodes présentées dans ce chapitre mettent en œuvre une *commande prédictive* dans le domaine temporel. Ils englobent implicitement un *modèle de prédiction* du procédé à réguler.

Quelle que soit la méthode de calcul utilisée, il faut vérifier les *marges de robustesse* du système en boucle fermée (en priorité la marge de module et la marge de retard).

La prise en compte simultanée des performances et des marges de robustesse imposées peut nécessiter un calibrage des fonctions de sensibilité perturbation-sortie et perturbation-entrée, à l'aide des parties pré spécifiables du régulateur et du choix des pôles en boucle fermée.

Une méthodologie itérative pour le calibrage des fonctions de sensibilité a été présentée dans paragraphe 3.6.4. Néanmoins, il est possible d'obtenir automatiquement le régulateur permettant de satisfaire les différentes contraintes sur les fonctions de sensibilité, par l'utilisation d'une procédure d'optimisation convexe (voir [ADA 98b, LAN 99]).

3.8. Bibliographie

- [ADA 98b] ADAPTECH, *Optreg – Software for automated design of robust digital controllers using convex optimization* (for Matlab), Adaptech, St. Martin d'Hères, France, 1998.
- [AST 95] ASTRÖM K.J., HÄGGLUND I., *PID Controllers Theory, Design and Tuning*, 2^e édition ISA, Research Triangle Park, N.C., Etats-Unis, 1995.
- [AST 97] ASTRÖM K.J., WITTENMARK B., *Computer Controlled Systems Theory and Design*, 3^e édition, Prentice Hall, New Jersey, Etats-Unis, 1997.
- [GOO 84] GOODWIN G.C., SIN K.S., *Adaptive Filtering Prediction and Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
- [KAI 80] KAILATH T., *Linear systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
- [KEL 86] KELLY R., Quelques résultats théoriques et pratiques sur la commande adaptative, Thèse docteur ingénieur, INPG, janvier 1986.
- [LAN 81] LANDAU I.D., LOZANO R., « Unification of Discrete-Time Explicit Model Reference Adaptive Control Designs », *Automatica*, vol. 12, p. 593-611, 1981.
- [LAN 95] LANDAU I.D., « Robust digital control of systems with time delay (the Smith predictor revisited) », *Int. J. of Control*, vol. 62, p. 325-347, 1995.
- [LAN 96] LANDAU I.D., LANGER J., REY D., BARNIER J., « Robust control of a 360° flexible arm using the combined pole placement/sensitivity function shaping method », *IEEE Trans. on Control Systems Tech.*, vol. 4, n° 4, p. 369-383, 1996.
- [LAN 98] LANDAU I.D., KARIMI A., « Robust digital control using pole placement with sensitivity function shaping method », *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, vol. 8, p. 191-210, 1998.

- [LAN 99a] LANGER J., CONSTANTINESCU A., « Pole placement design using convex optimization criteria for the flexible transmission benchmark », *European Journal of Control*, vol. 5, n° 2-4, p. 193-207, 1999.
- [LAN 99b] LANGER J., LANDAU I.D., « Combined pole placement/sensitivity function shaping method using convex optimization criteria », *Automatica*, vol. 35, n° 6, p. 1111-1120, 1999.
- [LOZ 82] LOZANO R., LANDAU I.D., « Quasi-direct adaptive control for nonminimum phase systems », *Transactions ASME, Journal of DSMC*, vol. 104, n° 4, p. 311-316, décembre 1982.
- [PRE 92] PRESS W.H., VETTERLING W.T., TEUKOLSKY S., FLANERY B., *Numerical recipes in C (The art of scientific computing)*, 2^e édition, Cambridge University Press, Cambridge, Mass., 1992
- [SUN 88] SUNG H.K., HARA S., « Properties of sensitivity and complementary sensitivity functions in single-input, single-output digital systems », *Int. J. of Cont.*, vol. 48, n° 6, p. 2429-2439, 1988.

Chapitre 4

Méthodes de calcul des régulateurs numériques en présence de perturbations aléatoires

De nombreux procédés sont sujet à des perturbations de type aléatoire. Dans la première partie du chapitre on présente des modèles permettant de représenter ces perturbations aléatoires (les modèles ARMAX) et on examine leur propriétés. On présente après trois méthodes de calcul appropriées : 1. la poursuite et régulation à variance minimale (qui minimise l'écart quadratique moyen entre la consigne et la variable réglée), 2. l'approximation de la poursuite et régulation à variance minimale par le placement des pôles (pour le cas des systèmes à zéros instables) et 3. la poursuite et régulation à variance minimale généralisée.

4.1. Modélisation des perturbations aléatoires

4.1.1. Description des perturbations

Considérons d'abord les perturbations déterministes fondamentales : l'impulsion de Dirac, l'échelon et la rampe, représentées dans la figure 4.1.1.

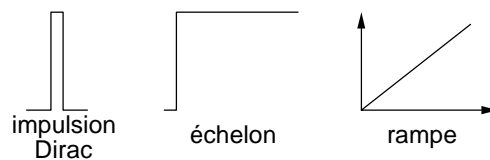


Figure 4.1.1. Principales perturbations déterministes

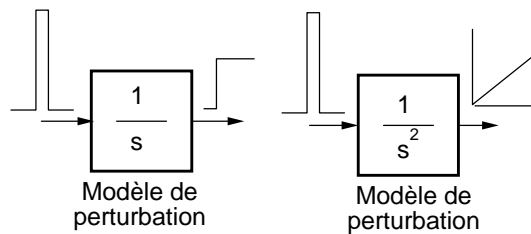


Figure 4.1.2. Modèles de perturbations déterministes

Notons que l'échelon et la rampe peuvent être décrits comme résultant du passage de l'impulsion de Dirac par un filtre, tel que c'est indiqué dans la figure 4.1.2. Les filtres correspondants portent le nom de « modèle de perturbation ». N'importe quelle perturbation déterministe peut s'obtenir par le passage d'une impulsion de Dirac à travers un « modèle de perturbation » (filtre) ayant une structure appropriée. *La connaissance du « modèle de perturbation » est équivalente à la connaissance de la perturbation.*

Nous essayerons par la suite d'étendre ce concept de « modèle de perturbation » à la description des perturbations aléatoires.

Par *perturbations aléatoires ou stochastiques* nous entendons les perturbations qui ne peuvent pas être décrites d'une façon déterministe car elles ne sont pas reproductibles.

A titre d'exemple d'un processus aléatoire (stochastique), on peut considérer l'évolution de la sortie réglée d'un procédé en régime de régulation sur un horizon significatif (1 journée) et pendant plusieurs essais (plusieurs jours). Ceci est illustré dans la figure 4.1.3.

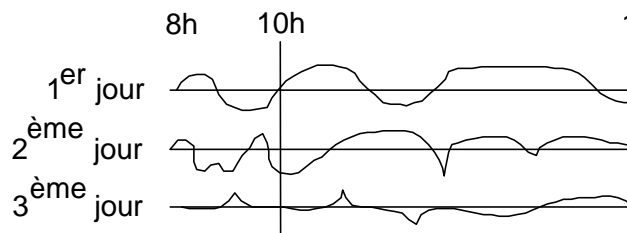


Figure 4.1.3. Enregistrement d'une variable réglée en régulation

En examinant la figure 4.1.3, on note que l'évolution au cours d'une journée peut être décrite par une fonction déterministe $f(t)$, mais cette fonction sera différente tous les jours ($f(t)$ est appelée *réalisation* du processus stochastique).

Si on fixe le temps où on effectue un relevé (par exemple à 10 h), on mesurera chaque journée (à chaque essai) une autre valeur (c'est ce qu'on appelle une *variable aléatoire*). Mais pour l'ensemble des valeurs mesurées tous les jours à la même heure on peut définir une *statistique* caractérisée par la valeur moyenne et la variance des mesures effectuées. On peut aussi définir des probabilités d'apparition des différentes valeurs.

Le processus stochastique représenté (partiellement) dans la figure 4.1.3, dépend du temps (au cours d'une journée) et de l'expérience (1^{re}, 2^e... 4^e journée).

Plus formellement, un *processus aléatoire* (ou stochastique) peut être décrit comme une fonction de deux arguments $f(t, \xi)$ où t représente le temps et appartient à l'ensemble T des réels et ξ représente la variable stochastique (le résultat d'une expérience) qui appartient à un espace de probabilité S^1 . Pour une valeur fixe $\xi = \xi_0$, la fonction $f(t, \xi_0)$ est une fonction du temps appelée *réalisation*. Pour une valeur fixe $t = t_0$, la fonction $f(t_0, \xi)$ est une *variable aléatoire*. L'argument ξ est souvent omis.

Si le processus stochastique (aléatoire) est *ergodique* les statistiques sur une expérience (dans notre exemple sur une journée) sont significatives. C'est-à-dire qu'on obtient le même résultat que sur les mesures effectuées sur plusieurs expériences quand on maintient le temps constant (à la même heure).

Si en plus le processus stochastique est *gaussien* la connaissance de la valeur moyenne et de la variance permet de préciser la probabilité d'apparition d'une valeur donnée (la cloche de Gauss, voir Annexe A.1).

En pratique la plupart des perturbations aléatoires intervenant en Automatique peuvent être décrites avec une bonne précision comme un *bruit blanc discret* passé par un filtre. Le *bruit blanc discret* est un signal aléatoire ayant une énergie uniformément répartie entre toutes les fréquences comprises entre 0 et $0.5 f_e$. Notons que le bruit blanc discret a une réalisation physique car il s'agit d'un signal à énergie finie (la bande de fréquence est finie), alors que le bruit blanc continu ne correspond pas à une réalité physique car l'énergie est constante dans une bande de fréquence infinie (signal d'énergie infinie).

1. Un ensemble S contenant tous les résultats possibles d'une expérience et ayant des sous-ensembles appelés *événements* auxquels une probabilité d'apparition peut être associée est appelé *espace de probabilité*.

Les filtres qui constitueront les *modèles des perturbations aléatoires* modifieront le spectre fréquentiel de répartition d'énergie du bruit blanc pour obtenir une répartition correspondant à la répartition fréquentielle de l'énergie des diverses perturbations aléatoires rencontrées.

Le *bruit blanc* joue dans le cas aléatoire le même rôle que l'impulsion de Dirac dans le cas déterministe. Il constitue le *signal générateur*.

Nous considérons par la suite comme signal générateur le *bruit blanc gaussien*. Il s'agit d'une séquence de variables aléatoires gaussiennes indépendantes de valeur moyenne nulle et variance σ^2 . Cette séquence sera notée $\{e(t)\}$ et sera caractérisée par les paramètres $(0, \sigma)$ où le premier chiffre indique la valeur moyenne et σ indique l'écart type (racine carrée de la variance). Une partie d'une telle séquence est représentée dans la figure 4.1.4.

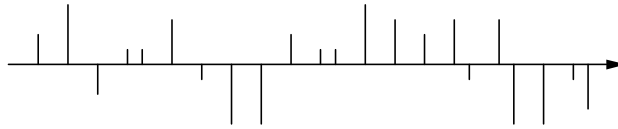


Figure 4.1.4. Séquence bruit blanc discret

La valeur moyenne (ou l'espérance) est donnée par :

$$V.M. = E\{e(t)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e(t) = 0 \quad [4.1.1]$$

et la variance sera donnée par :

$$var = E\{e^2(t)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e^2(t) = \sigma^2 \quad [4.1.2]$$

Notons que la séquence $\{e(t)\}$ est un processus ergodique, voir plus haut.

Nous définissons par *fonction d'autocorrélation* ou *covariance* $R(i)$ l'expression :

$$R(i) = E\{e(t)e(t-i)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e(t)e(t-i) \quad [4.1.3]$$

ou en d'autres mots le produit entre la séquence et la même séquence décalée de i -pas.

Notons que :

$$R(0) = \text{var} = \sigma^2 \quad [4.1.4]$$

Définissons aussi la covariance (ou autocorrélation) normalisée :

$$RN(i) = \frac{R(i)}{R(0)} \quad (RN(0) = 1) \quad [4.1.5]$$

Dans le cas du bruit blanc gaussien, s'agissant d'une séquence de variables aléatoires indépendantes et tenant compte du caractère ergodique du processus, il résulte que la connaissance de $e(t)$ ne permet pas de prédire une approximation de $e(t+1)$, $e(t+2)$... la meilleure prédiction étant 0.

Cette propriété d'indépendance se traduit par la propriété suivante des autocorrélations : (*test d'indépendance ou de blancheur* pour des processus stochastiques gaussiens).

$$R(i) = RN(i) = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, -1, -2, -3, \dots \quad [4.1.6]$$

Si l'on trace l'évolution de la covariance normalisée pour le bruit blanc, on obtient la courbe présentée dans la figure 4.1.5².

Comme $E\{e(t)\} = \text{const.}$ et $E\{e(t) e(t-i)\}$ est uniquement fonction du décalage i le *bruit blanc gaussien discret* a les propriétés d'un processus stochastique faiblement stationnaire (en fait c'est un vrai processus stationnaire car les propriétés de la séquence $\{e(t)\}$ sont les mêmes que celle de la séquence $\{e(t + \tau)\}$). Pour un processus stochastique faiblement stationnaire la connaissance des autocorrélations $R(i)$ rend possible le calcul de la distribution de l'énergie du signal dans le domaine fréquentiel connue sous le nom de *densité spectrale*.

2. Ce test de blancheur s'utilise même dans le cas où l'on dispose d'une séquence finie de longueur N . Dans ce cas, bien entendu $|RN(i)| \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \dots$ mais ils doivent être inférieurs à une certaine valeur. Le teste de blancheur pour N fini est présenté dans le chapitre 6, paragraphe 6.2.

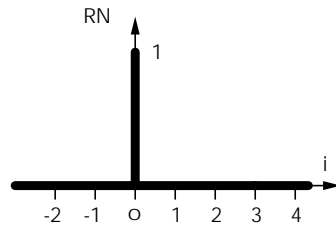


Figure 4.1.5. Autocorrélations normalisées du bruit blanc discret

La densité spectrale est donnée par la transformation discrète de Fourier des fonctions d'autocorrélations :

$$\phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} R(i)e^{-ji\omega}$$

Dans le cas du bruit blanc discret tous les $R(i) = 0$ pour $i \neq 0$ et il résulte que la densité spectrale du bruit blanc discret est constante et égale à :

$$\phi_e(\omega) = \frac{R(0)}{2\pi} = \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

La densité spectrale du bruit blanc est représentée dans la figure 4.1.6.

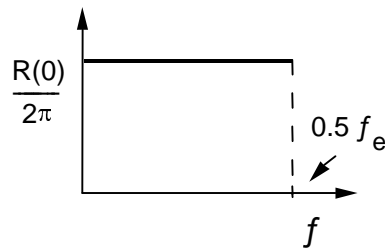


Figure 4.1.6. Densité spectrale du bruit blanc discret

4.1.2. Modèles de perturbations aléatoires

Comme nous l'avons précisé dans le paragraphe 4.1.1, les différents types de perturbations aléatoires ayant une densité spectrale dont la dépendance fréquentielle peut être exprimée (approchée) par une fonction rationnelle de la fréquence, peuvent

être considérés comme résultant du passage d'un bruit blanc par un filtre. Nous examinerons plusieurs types de processus obtenus ainsi.

Processus « moyenne mobile (ajustée) » (MA)

Considérons à titre d'exemple le processus :

$$y(t) = e(t) + c_1 e(t-1) = (1 + c_1 q^{-1}) e(t) \quad [4.1.7]$$

qui correspond au passage d'un bruit blanc à travers un filtre $(1 + c_1 q^{-1})$ tel que c'est représenté dans la figure 4.1.7a.

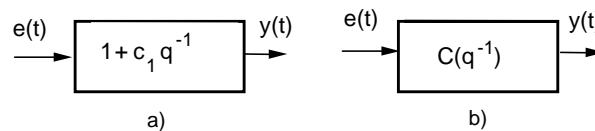


Figure 4.1.7. Génération d'un processus aléatoire « moyenne mobile » :
a) 1^{er} ordre ; b) cas général

La valeur moyenne de $y(t)$ est ³ :

$$V.M. = E\{y(t)\} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e(t) + c_1 \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e(t-1) = 0 \quad [4.1.8]$$

La variance du processus $y(t)$ est :

$$\begin{aligned} R_y(0) = E\{y^2(t)\} &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y^2(t) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e^2(t) + \\ &c_1^2 \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e^2(t-1) + c_1^2 \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N e(t)e(t-1) = (1 + c_1^2) \sigma^2 \end{aligned} \quad [4.1.9]$$

car le troisième terme est nul (voir propriétés du bruit blanc, équations [4.1.3] et [4.1.6]).

De l'équation [4.1.7], nous obtenons par décalage :

3. Par la suite nous supprimons $\lim_{N \rightarrow \infty}$ étant entendu que les formules sont rigoureusement valable seulement pour N très grand ($\rightarrow \infty$).

$$y(t-1) = e(t-1) + c_2 e(t-2) \quad [4.1.10]$$

ce qui permet de calculer $R_y(1)$:

$$R_y(1) = E\{y(t)y(t-1)\} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t)y(t-1) = \frac{1}{N} c_1 \sum_{t=1}^N e^2(t) = c_1^2 \sigma^2 \quad [4.1.11]$$

tous les autres termes étant nuls (espérances de produits de séquences bruit blanc décalées).

On vérifie de la même façon que :

$$R_y(2) = 0 ; R_y(3) = 0 \dots R_y(n) = 0 \quad [4.1.12]$$

Le graphique des autocorrélations normalisées pour ce processus « moyenne mobile » d'ordre 1 est représenté dans la figure 4.1.8.

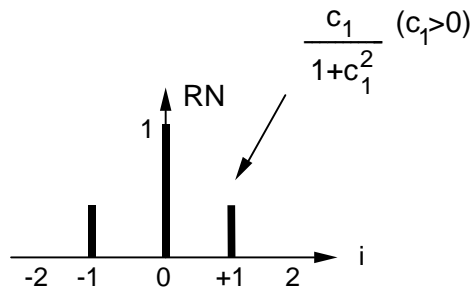


Figure 4.1.8. Les fonctions d'autocorrélations normalisées pour un processus « moyenne mobile » du 1^{er} ordre

La forme générale d'un processus « moyenne mobile » est :

$$y(t) = e(t) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i e(t-i) = C(q^{-1})e(t) \quad [4.1.13]$$

où :

$$C(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_c} c_i q^{-i} \quad [4.1.14]$$

Le schéma correspondant est donné dans la figure 4.1.7b.

Les processus « moyenne mobile » se caractérisent par la propriété :

$$R(i) = 0 \quad i \geq n_c + 1 \quad ; \quad i \leq -(n_c + 1) \quad [4.1.15]$$

La densité spectrale est donnée par la formule :

$$\phi_y(\omega) = C(e^{j\omega})C(e^{-j\omega})\frac{\sigma^2}{2\pi} = |C(e^{j\omega})|^2\frac{\sigma^2}{2\pi} \quad [4.1.16]$$

$\sigma^2/2\pi$ étant la densité spectrale du bruit blanc (notée $\phi_e(e^{j\omega})$).

Ceci permet de donner la relation générale entre le spectre du signal d'entrée (bruit blanc) du filtre générateur et le processus moyenne mobile :

$$\phi_y(z) = C(z)C(z^{-1})\phi_e(z) \quad [4.1.17]$$

la répartition fréquentielle s'obtenant pour $z = e^{j\omega}$.

Des relations [4.1.16] et [4.1.17], on déduit que la connaissance de $C(q^{-1})$ (le filtre générateur) permet par exemple de connaître la répartition spectrale de l'énergie, car la densité spectrale de bruit blanc est constante à toutes les fréquences.

Processus « autorégressif » (AR)

Considérons à titre d'exemple le processus :

$$y(t) = -a_1 y(t-1) + e(t) = \frac{e(t)}{1 + a_1 q^{-1}} \quad |a_1| < 1 \quad [4.1.18]$$

qui correspond au passage d'un bruit blanc par un filtre stable $1/(1+a_1 q^{-1})$ tel que c'est représenté dans la figure 4.1.9a. La forme générale d'un processus « autorégressif » est donnée par :

$$y(t) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t-i) + e(t) \quad [4.1.19]$$

qui s'écrit encore :

$$A(q^{-1})y(t) = e(t) \quad [4.1.20]$$

où :

$$A(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_A} a_i q^{-i} \quad [4.1.21]$$

est un polynôme avec toutes les racines à l'intérieur du cercle unité ($A(z^{-1}) = 0 \Rightarrow |z| < 1$).

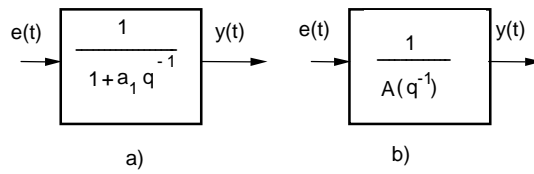


Figure 4.1.9. Génération d'un processus aléatoire « autorégressif » :
a) 1^{er} ordre ; b) cas général

La densité spectrale du processus autorégressif est donnée par l'expression :

$$\phi_y(z) = \frac{1}{A(z)} \frac{1}{A(z^{-1})} \phi_e(z) \quad [4.1.22]$$

où $\phi_e(z) = \sigma^2/2\pi$ et la répartition fréquentielle est donnée par :

$$\phi_y(\omega) = \phi_y(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad [4.1.23]$$

Processus « ARMA » (autorégressif à moyenne ajustée)

Ce processus s'obtient par le passage d'un bruit blanc à travers un filtre (stable) avec des pôles et des zéros tel que c'est illustré dans la figure 4.1.10.

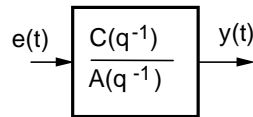


Figure 4.1.10. Génération d'un processus aléatoire ARMA

Ce processus est décrit dans le cas général par :

$$y(t) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t-i) + \sum_{i=1}^{n_C} c_i e(t-i) + e(t) \quad [4.1.24]$$

ou encore sous la forme :

$$A(q^{-1}) y(t) = C(q^{-1}) e(t) \quad [4.1.25]$$

où $A(q^{-1})$ est un polynôme ayant toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité donné par l'équation [4.1.21] et $C(q^{-1})$ est donné par l'équation [4.1.14].

La densité spectrale du processus ARMA est donnée par :

$$\phi_y(z) = \left(\frac{C(z)}{A(z)} \right) \left(\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \right) \phi_e(z) \quad [4.1.26]$$

4.1.3. Le modèle ARMAX (procédé + perturbation)

Il s'agit du modèle utilisé pour représenter ensemble l'effet de la commande et des perturbations sur la sortie du procédé. ARMAX signifie processus ARMA avec entrée *exogène* (externe), qui dans notre cas est $u(t)$. La génération des processus ARMAX est illustrée dans la figure 4.1.11.

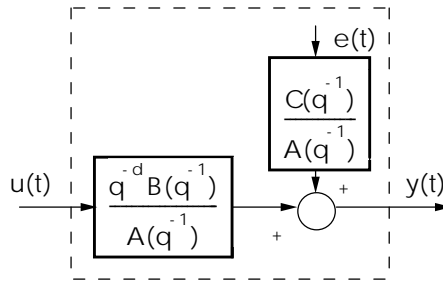


Figure 4.1.11. Génération de processus aléatoire ARMAX

La sortie perturbée du procédé $y(t)$ s'écrit :

$$y(t) = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(t) \quad [4.1.27]$$

où le premier terme représente l'effet de la commande et le deuxième terme l'effet de la perturbation. En multipliant les deux membres de l'équation [4.1.27] par $A(q^{-1})$, nous obtenons :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1}) + C(q^{-1})e(t) \quad [4.1.28]$$

qui en tenant compte des expressions de $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ et $C(q^{-1})$ s'écrit encore :

$$\begin{aligned} y(t+1) &= -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t+1-d-i) + \sum_{i=1}^{n_C} c_i e(t+1-i) \\ + e(t+1) &= -A^*(q^{-1})y(t) + B^*(q^{-1})u(t-d) + C(q^{-1})e(t+1) \end{aligned} \quad [4.1.29]$$

La question que l'on peut se poser concerne la présence du dénominateur $A(q^{-1})$ tant dans la fonction de transfert du procédé que dans la fonction de transfert du filtre générateur de la perturbation (voir équation [4.1.27]). S'agit-il d'une restriction de généralité par rapport au cas où les deux dénominateurs seraient différents, tel que c'est représenté dans la figure 4.1.12 ?

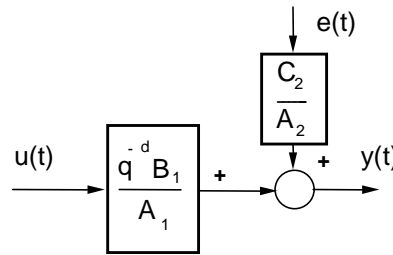


Figure 4.1.12. Modèle ARMAX avec pôles différents

Dans ce cas, la sortie $y(t)$ est donnée par :

$$y(t) = \frac{q^{-d} B_1(q^{-1})}{A_1(q^{-1})} u(t) + \frac{C_2(q^{-1})}{A_2(q^{-1})} e(t) \quad [4.1.30]$$

En ramenant au même dénominateur on obtient :

$$y(t) = \frac{q^{-d} B_1 A_2}{A_1 A_2} u(t) + \frac{C_2 A_1}{A_1 A_2} e(t) = \frac{q^{-d} B}{A} u(t) + \frac{C}{A} e(t) \quad [4.1.31]$$

où :

$$A = A_1 A_2 ; B = B_1 A_2 ; C = C_2 A_1 \quad [4.1.32]$$

ce qui permet en règle générale d'utiliser le modèle donné par l'équation [4.1.27].

4.1.4. Prédiction optimale

Tenant compte de la nature aléatoire des perturbations il n'est pas possible dans le cas des modèles ARMAX de calculer exactement la valeur future de $y(t)$ à l'instant $t + 1$ en connaissant toutes les valeurs de y et de u jusqu'à l'instant t inclus.

Pour cette raison on introduit la notion de *prédiction optimale* de la valeur future de y à l'instant $t + 1$ calculée à partir des connaissances de y et u jusqu'à l'instant t inclus qui sera notée $\hat{y}(t + 1/t)$ ou tout simplement $\hat{y}(t + 1)$.

Nous définissons alors une *erreur de prédiction* :

$$\varepsilon(t + 1) = y(t + 1) - \hat{y}(t + 1) \quad [4.1.33]$$

L'objectif sera de construire un prédicteur fonction des informations disponibles à l'instant t :

$$\hat{y}(t + 1/t) = \hat{y}(t + 1) = f(y(t), y(t - 1), \dots, u(t), u(t - 1), \dots) \quad [4.1.34]$$

afin de minimiser la variance de l'erreur de prédiction :

$$E \left\{ [y(t + 1) - \hat{y}(t + 1)]^2 \right\} = \min \quad [4.1.35]$$

A titre d'exemple, considérons le procédé et la perturbation représentés par le modèle ARMAX suivant :

$$y(t + 1) = -a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t) + e(t + 1) \quad [4.1.36]$$

L'erreur de prédiction aura l'expression :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t + 1) &= y(t + 1) - \hat{y}(t + 1) \\ &= [-a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t) - \hat{y}(t + 1)] + e(t + 1) \end{aligned} \quad [4.1.37]$$

où le premier terme entre parenthèses regroupe toutes les variables disponibles à l'instant t et le second terme est le bruit blanc à l'instant $t+1$ (qui est indépendant de toutes les autres variables à l'instant t ainsi que de $e(t)$).

On calcule la variance de l'erreur de prédiction qu'on souhaite minimiser par un choix approprié de $\hat{y}(t+1)$. En utilisant l'expression [4.1.37] on obtient :

$$\begin{aligned} & E\{[y(t+1) - \hat{y}(t+1)]^2\} \\ &= E\{[-a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t) - \hat{y}(t+1)]^2\} + E\{e^2(t+1)\} \\ &+ 2E\{e(t+1)[-a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t)]\} \end{aligned} \quad [4.1.38]$$

Le troisième terme du membre droit de l'équation [4.1.38] est nul car $e(t+1)$, le bruit blanc à l'instant $t+1$ est indépendant de tous les signaux aux instants $t, t-1, \dots$

Le terme $E\{e^2(t+1)\}$ ne dépend pas du choix du prédicteur. Il résulte que le choix de $\hat{y}(t+1)$ n'affectera que le premier terme qui ne peut être que positif ou nul. La valeur optimale de la prédiction sera celle qui rend ce terme nul à chaque instant, c'est-à-dire :

$$E\{[-a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t) - \hat{y}(t+1)]^2\} = 0 \quad [4.1.39]$$

De cette condition on obtient l'expression du prédicteur optimal :

$$\hat{y}(t+1)|_{opt} = -a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t) \quad [4.1.40]$$

Avec ce choix du prédicteur, l'erreur de prédiction devient :

$$\varepsilon(t+1)|_{opt} = y(t+1) - \hat{y}(t+1)|_{opt} = e(t+1) \quad [4.1.41]$$

c'est-à-dire un bruit blanc.

Observons aussi que dans ce cas :

$$\varepsilon(t) = e(t) \quad [4.1.42]$$

ce qui permet de réécrire le prédicteur optimal sous la forme :

$$\hat{y}(t+1)|_{opt} = -a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 \varepsilon(t) \quad [4.1.43]$$

Ce résultat se généralise pour le cas des modèles ARMAX d'ordre quelconque [4.1.29]. Dans ce cas le prédicteur optimal à un pas s'écrit :

$$\hat{y}(t+1) = -A^*(q^{-1})y(t) + B^*(q^{-1})u(t-d) + C^*(q^{-1})e(t) \quad [4.1.44]$$

et l'on obtient immédiatement que l'erreur de prédiction optimale est un bruit blanc :

$$\varepsilon(t+1)|_{opt} = y(t+1) - \hat{y}(t+1) = e(t+1) \quad [4.1.45]$$

Ce qui permet de réécrire le prédicteur optimal [4.1.44] sous la forme :

$$\hat{y}(t+1) = -A^*(q^{-1})y(t) + B^*(q^{-1})u(t-d) + C^*(q^{-1})\varepsilon(t) \quad [4.1.46]$$

Pour le cas de la prédiction optimale à plusieurs pas voir l'équation [4.2.32] et l'annexe A.2.

4.2. Poursuite et régulation à variance minimale

Cette stratégie concerne le calcul d'un régulateur optimal assurant la variance minimale de la sortie réglée autour de la consigne dans le cas où le procédé est sujet à des perturbations aléatoires. Elle peut s'appliquer uniquement si le modèle échantillonné du procédé à réguler a des zéros stables.

L'objectif de la *poursuite et régulation à variance minimale* est de réduire la variance (l'écart type, la somme de carrés des erreurs) de la sortie réglée autour de la valeur de la consigne soit quand elle est constante (régulation à variance minimale) soit quand elle est variable (poursuite à variance minimale). L'effet d'une commande à variance minimale est illustré dans la figure 4.2.1.

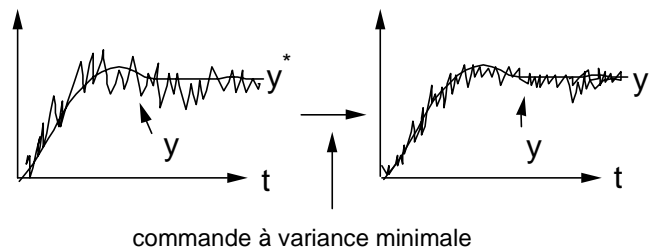


Figure 4.2.1. Effet d'une commande à variance minimale en présence de perturbations aléatoires

L'intérêt d'une minimisation de la variance de la sortie réglée apparaît très clairement si on trace un histogramme des mesures de cette sortie.

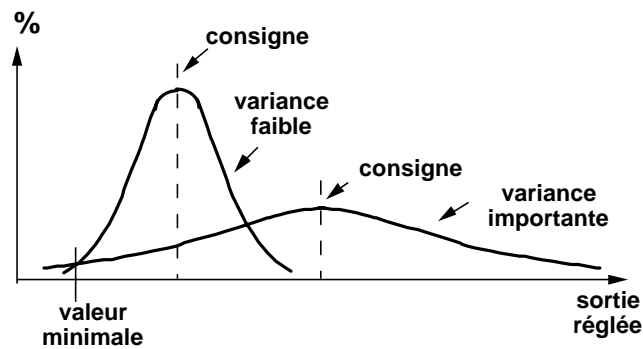


Figure 4.2.2. Histogrammes de la sortie réglée

Si la variance de la sortie réglée est importante, on obtient une distribution des mesures ayant la forme de celle représentée dans la figure 4.2.2. Dans ce cas, un pourcentage important des valeurs mesurées de la sortie réglée se trouvent loin de la valeur de consigne. Comme dans de nombreuses applications, on impose une valeur minimale pour la sortie réglée (par exemple l'épaisseur d'un revêtement, la teneur en eau du papier, etc.) on est obligé de placer la consigne à une valeur sensiblement supérieure à ce minimum.

En revanche, si le régulateur permet de réduire la variance de la sortie réglée, on obtient une distribution des mesures qui se resserre autour de la consigne. Dans ce cas, on pourra non seulement améliorer la qualité du produit (meilleure uniformité), mais aussi réduire la valeur de la consigne pour la rapprocher de la valeur minimale imposée (voir figure 4.2.2). Ceci se traduit en général par des économies très importantes (voir chapitre 8).

En considérant la définition de la variance d'un processus aléatoire (équation [4.1.9]), il résulte que l'objectif sera de calculer $u(t)$ qui minimise le critère suivant :

$$J(u(t)) = E\left\{\left[y(t) - y^*(t)\right]^2\right\} \approx \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[y(t) - y^*(t)\right]^2 = \min \quad [4.2.1]$$

où $y(t) - y^*(t)$ représente l'écart de la sortie par rapport à la valeur souhaitée y^* à l'instant t .

Pour pouvoir résoudre ce problème, il faudra introduire des modèles de perturbation en plus des modèles de procédé. La structure retenue est le modèle ARMAX (voir paragraphe 4.1.3). *Il conviendra donc lors de l'opération d'identification, d'identifier le modèle du procédé et le modèle de perturbation.*

4.2.1. Un exemple

Soit le procédé et la perturbation représentés par le modèle ARMAX suivant :

$$y(t+1) = -a_1 y(t) + b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + c_1 e(t) + e(t+1) \quad [4.2.2]$$

La trajectoire de référence sera $y^*(t+1)$ (elle est soit mémorisée soit engendrée par un modèle dynamique à partir de la consigne).

On calcule la variance de l'écart $y(t+1) - y^*(t+1)$ qui représente le critère de performance à minimiser :

$$E\{[y(t+1) - y^*(t+1)]^2\} = E\{[-a_1 y(t) + b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + c_1 e(t) - y^*(t+1)]^2\} + E\{e^2(t+1)\} + 2E\{e(t+1)[-a_1 y(t) + b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + c_1 e(t) - y^*(t+1)]\} \quad [4.2.3]$$

Le troisième terme du membre droit de l'équation [4.2.3] est nul car $e(t+1)$ le bruit blanc à l'instant $t+1$, est indépendant de tout signal apparaissant aux instants $t, t-1, \dots$ (notons que $y^*(t+1)$ dépend au maximum de la consigne $r(t)$, voir par exemple paragraphe 3.3 équation [3.3.33]). Des deux termes qui restent alors dans le critère de l'équation [4.2.3], $E\{e^2(t+1)\}$ ne dépend pas de $u(t)$. Il résulte que le choix de $u(t)$ n'affectera que le premier terme qui ne peut être que positif ou nul. Il s'ensuit que la minimisation du critère [4.2.3] correspond à trouver $u(t)$ tel que :

$$E\{[-a_1 y(t) + b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + c_1 e(t) - y^*(t+1)]^2\} = 0 \quad [4.2.4]$$

ce qui s'obtient en rendant nulle l'expression entre parenthèses. La loi de commande (théorique) qui résulte est :

$$u(t) = \frac{y^*(t+1) - c_1 e(t) + a_1 y(t)}{b_1 + b_2 q^{-1}} \quad [4.2.5]$$

En introduisant cette expression dans l'équation de la sortie du procédé donnée par l'équation [4.2.2], on obtient que :

$$y(t+1) - y^*(t+1) = e(t+1) \quad [4.2.6]$$

et respectivement :

$$y(t) - y^*(t) = e(t) \quad [4.2.7]$$

Ceci conduit aux remarques suivantes :

a) l'application de la loi de commande donnée par l'équation [4.2.5] conduit à une variance minimale de l'écart $y(t) - y^*(t)$ qui devient un bruit blanc ;

b) le régulateur simplifie les zéros du modèle échantillonné du procédé qui doivent être stables ;

c) on peut remplacer $e(t)$ dans l'équation [4.2.5] par l'expression mesurable donnée dans l'équation [4.2.7]. Ceci conduit à la loi de commande :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{(1 + c_1 q^{-1})y^*(t+1) - (c_1 - a_1)y(t)}{b_1 + b_2 q^{-1}} \\ &= \frac{T(q^{-1})y^*(t+1) - R(q^{-1})y(t)}{S(q^{-1})} \end{aligned} \quad [4.2.8]$$

La structure de la loi de commande à variance minimale est la même que celle pour la *poursuite et régulation à objectifs indépendants* dans le cas déterministe si on choisit $P(q^{-1}) = C(q^{-1})$ (pôles désirés en boucle fermée).

En effet, la fonction de transfert entre $y^*(t+1)$ et $y(t+1)$ s'écrit :

$$H_{BF}(q^{-1}) = \frac{T(q^{-1})q^{-1}B^*(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-1}B^*(q^{-1})R(q^{-1})} \quad [4.2.9]$$

Dans l'exemple considéré :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1}$$

$$B(q^{-1}) = q^{-1} B^*(q^{-1}) ; B^*(q^{-1}) = b_1 + b_2 q^{-1} ; d = 0$$

$$T(q^{-1}) = C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1}$$

$$S(q^{-1}) = B^*(q^{-1}) = b_1 + b_2 q^{-1} ; R(q^{-1}) = r_0 = c_1 - a_1$$

et l'on obtient :

$$H_{BF}(q^{-1}) = \frac{T(q^{-1})q^{-1}}{A(q^{-1}) + q^{-1}R(q^{-1})} = \frac{T(q^{-1})q^{-1}}{C(q^{-1})} = q^{-1} \quad [4.2.10]$$

Les pôles en boucle fermée sont effectivement définis par $C(q^{-1})$ qui caractérise la perturbation.

En d'autres termes, *il existe un choix optimal pour les pôles en boucle fermée (comportement en régulation) et ce choix dépend directement des zéros du modèle de perturbation.*

Enfin, il est possible de faire un test d'optimalité pour le réglage du régulateur en faisant un test de blancheur sur la séquence $\{y(t) - y^(t)\}$, pour le cas sans retard. Dans le cas avec retard, à l'optimum, $\{y(t) - y^*(t)\}$ est un processus MA d'ordre d et donc les fonctions d'autocorrélations $R(i)$ seront nulles pour des décalages $i \geq d + 1$.*

Une interprétation de la commande à la variance minimale

Considérons le prédicteur optimal pour le procédé ARMAX donné dans [4.2.2] :

$$\hat{y}(t+1) = -a_1 y(t) + b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + c_1 e(t)$$

Trouvons maintenant la valeur de $u(t)$ qui assurera :

$$\hat{y}(t+1) = y^*(t+1)$$

On obtient alors exactement l'expression de $u(t)$ donnée par [4.2.5] et respectivement [4.2.8].

On peut donc interpréter la loi de commande à variance minimale comme étant obtenue en deux étapes⁴ :

- 1) calcul d'un prédicteur optimal de la sortie ;
- 2) calcul d'une loi de commande pour que la prédiction de la sortie soit égale à la consigne (où en général qu'elle satisfasse un certain critère déterministe).

Notons que le calcul de la loi de commande pour le prédicteur est un problème déterministe car toutes les variables sont connues au moment du calcul.

4. Comme dans le cas déterministe, il s'agit d'une *commande prédictive*.

Cette stratégie de calcul en deux étapes pour une commande dans un environnement stochastique est très générale (théorème de séparation). Elle peut aussi se résumer ainsi : calculer d'abord la meilleure prédiction de la sortie et traiter ensuite le problème comme un problème de commande déterministe, en remplaçant la vraie sortie mesurée par sa prédiction.

4.2.2. Cas général

Tenant compte de la similitude avec la méthode déterministe de *poursuite et régulation à objectifs indépendants* le calcul du régulateur sera donc identique en choisissant :

$$P(q^{-1}) = C(q^{-1}) \quad [4.2.11]$$

et ceci est résumé dans la figure 4.2.3. Le processus plus la perturbation est décrit dans le cas général par :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t) \quad [4.2.12]$$

où :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_A}q^{-n_A} \quad [4.2.13]$$

$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + \dots + b_{n_B}q^{-n_B} = q^{-1}B^*(q^{-1}) \quad [4.2.14]$$

et :

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_C}q^{-n_C} \quad [4.2.15]$$

Notons que $B(q^{-1})$ doit avoir des zéros stables ainsi que $C(q^{-1})$ qui va spécifier les pôles en boucle fermée. Par ailleurs $C(q^{-1})$ est toujours stable si la perturbation est stationnaire.

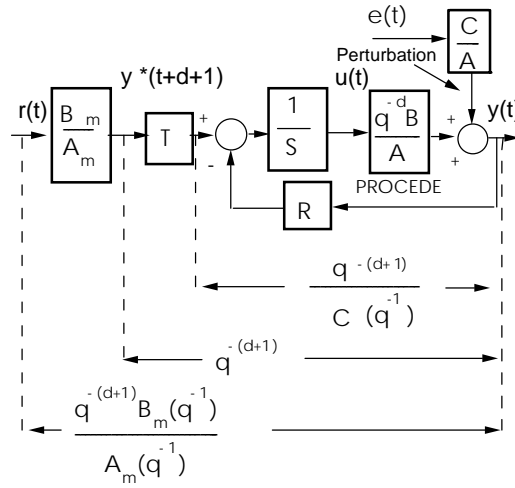


Figure 4.2.3. Poursuite et régulation à variance minimale

Le régulateur est donné par :

$$u(t) = \frac{T(q^{-1})y^*(t+d+1) - R(q^{-1})y(t)}{S(q^{-1})} \quad [4.2.16]$$

où la trajectoire de référence est définie par :

$$y^*(t+d+1) = \frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} r(t) \quad [4.2.17]$$

$$B_m(q^{-1}) = b_{m_0} + b_{m_1}q^{-1} + \dots \quad [4.2.18]$$

$$A_m(q^{-1}) = 1 + a_{m_1}q^{-1} + a_{m_2}q^{-2} + \dots \quad [4.2.19]$$

La fonction de transfert en boucle fermée (sans $T(q^{-1})$) est (voir figure 4.2.3) :

$$\begin{aligned}
 H_{BF_1}(q^{-1}) &= \frac{q^{-(d+1)} B^*(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-(d+1)} B^*(q^{-1})R(q^{-1})} = \frac{q^{-(d+1)}}{C(q^{-1})} \\
 &= \frac{q^{-(d+1)} B^*(q^{-1})}{B^*(q^{-1})C(q^{-1})}
 \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

Comme pour la poursuite et régulation à objectifs indépendants :

$$S(q^{-1}) = B^*(q^{-1}) S'(q^{-1}) \tag{4.2.21}$$

avec :

$$S'(q^{-1}) = 1 + s'_1 q^{-1} + \dots + s'_d q^{-d} \tag{4.2.22}$$

D'autre part :

$$R(q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} + \dots + r_{n_A-1} q^{-(n_A-1)} \tag{4.2.23}$$

Pour calculer $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ il faut résoudre l'équation :

$$A(q^{-1}) S(q^{-1}) + q^{-(d+1)} B^*(q^{-1}) R(q^{-1}) = B^*(q^{-1}) C(q^{-1}) \tag{4.2.24}$$

En tenant compte de la structure de $S(q^{-1})$, l'équation [4.2.24] devient :

$$A(q^{-1}) S'(q^{-1}) + q^{-(d+1)} R(q^{-1}) = C(q^{-1}) \tag{4.2.25}$$

et la solution est la même que pour le cas déterministe en prenant $P(q^{-1}) = C(q^{-1})$.

Pour résoudre [4.2.25] on peut utiliser le logiciel WinREG (Adaptech) ou les fonctions *predisol.sci* (Scilab) et *predisol.m* (Matlab).

Le précompensateur $T(q^{-1})$ devra compenser les pôles en boucle fermée et donc :

$$T(q^{-1}) = C(q^{-1}) \tag{4.2.26}$$

Nous étudierons maintenant l'effet de la loi de commande à variance minimale donnée par l'équation [4.2.16] sur l'erreur $[y(t) - y^*(t)]$.

L'équation [4.2.12] peut se réécrire :

$$A(q^{-1}) y(t+d+1) = B^*(q^{-1}) u(t) + C(q^{-1}) e(t+d+1) \tag{4.2.27}$$

En introduisant la loi de commande $u(t)$ donnée par l'équation [4.2.16] et en multipliant par $S(q^{-1})$ les deux membres, on obtient :

$$A(q^{-1}) S(q^{-1}) y(t+d+1) = B^*(q^{-1}) C(q^{-1}) y^*(t+d+1) - q^{-(d+1)} B^*(q^{-1}) R(q^{-1}) y(t+d+1) + S(q^{-1}) C(q^{-1}) e(t+d+1) \quad [4.2.28]$$

En regroupant les termes en $y(t+d+1)$ et en tenant compte des équations [4.2.24] et [4.2.21], l'équation [4.2.28] devient :

$$B^*(q^{-1}) C(q^{-1}) y(t+d+1) = B^*(q^{-1}) C(q^{-1}) y^*(t+d+1) + S'(q^{-1}) B^*(q^{-1}) C(q^{-1}) e(t+d+1) \quad [4.2.29]$$

et en divisant par $B^*(q^{-1}) C(q^{-1})$ on obtient :

$$y(t+d+1) - y^*(t+d+1) = S'(q^{-1}) e(t+d+1) \quad [4.2.30]$$

c'est à dire que *l'erreur de poursuite (ou régulation) est un processus MA d'ordre d* (pour $d = 0$, $[y(t+d+1) - y^*(t+d+1)]$ est un bruit blanc).

Ceci correspond à la minimisation de la variance de l'erreur $[y(t) - y^*(t)]$. En effet, utilisant l'équation [4.2.25], nous pouvons écrire :

$$C(q^{-1}) y(t+d+1) = [A(q^{-1}) S'(q^{-1}) + q^{-(d+1)} R(q^{-1})] y(t+d+1) \quad [4.2.31]$$

Tenant compte aussi de l'équation [4.2.27] et divisant par $C(q^{-1})$ les deux membres, on obtient⁵ :

$$y(t+d+1) = \frac{R(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + \frac{S'(q^{-1}) B^*(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) + S'(q^{-1}) e(t+d+1) \quad [4.2.32]$$

d'où il résulte :

$$\begin{aligned} E\left\{\left[y(t+d+1) - y^*(t+d+1)\right]^2\right\} = \\ E\left\{\left[\frac{R(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + \frac{S'(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) - y^*(t+d+1)\right]^2\right\} \\ + E\left\{\left[S'(q^{-1}) e(t+d+1)\right]^2\right\} \\ + 2E\left\{\left[\frac{R(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + \frac{S'(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) - y^*(t+d+1)\right] \cdot \left[S'(q^{-1}) e(t+d+1)\right]\right\} \end{aligned} \quad [4.2.33]$$

5. La prédiction optimale $\hat{y}(t+d+1)$ est donnée par les premiers deux termes de l'équation [4.2.32].

Le troisième terme du membre droit sera nul car $S'(q^{-1}) e(t + d + 1)$ contient $e(t + 1), e(t + 2), \dots, e(t + d + 1)$ qui sont tous indépendants de $y(t), y(t-1), \dots, u(t), u(t-1) \dots y^*(t + d + 1), y^*(t + d) \dots$. Le deuxième terme ne dépend pas de $u(t)$ et enfin en utilisant la loi de commande donnée par l'équation [4.2.16] avec $T(q^{-1}) = C(q^{-1})$, le premier terme du second membre est nul ce qui correspond à la minimisation de la variance de $[y(t) - y^*(t)]$.

Notons que l'équation [4.2.30] permet de définir un critère pratique de test d'optimalité d'un régulateur numérique si le retard d est connu car l'erreur doit être une moyenne mobile d'ordre d . En définissant :

$$R(i) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y(t) - y^*(t)] \cdot [y(t-i) - y^*(t-i)] \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad [4.2.34]$$

et respectivement $RN(i) = R(i)/R(0)$, nous devons obtenir :

$$RN(i) \approx 0 \quad i \geq d + 1 \quad [4.2.35]$$

En pratique tenant compte du nombre fini des données, on considère comme une valeur acceptable :

$$|RN(i)| \leq 2.17 / \sqrt{N} \quad ; \quad i \geq d + 1 \quad [4.2.36]$$

où N est le nombre d'échantillons utilisés pour calculer $RN(i)$ (pour $N = 256$, $RN(i) \leq 0.136$, $i \geq d + 1$).

Pour des détails sur les tests d'indépendance avec un nombre fini d'échantillons voir chapitre 6, section 6.2.

Enfin rappelons que *cette méthode ne s'applique qu'aux modèles de procédés à zéros stables*.

Dans le cas où le modèle échantillonné du procédé a des zéros instables on utilise :

- soit une approximation de la loi de commande de poursuite et régulation à variance minimale en utilisant le placement de pôles avec un choix particulier des pôles désirés de la boucle fermée ;

- soit une loi de commande obtenue à partir d'un critère qui introduit une pondération sur l'énergie de commande.

Pôles additionnels

Dans certaines applications les pôles correspondants à $C(q^{-1})$ peuvent être très rapides par rapport à la dynamique du procédé en boucle ouverte. Ceci peut conduire à une sollicitation trop importante de l'actionneur où à des marges de robustesse trop faibles. Dans ce cas, soit on utilise la stratégie de poursuite et régulation à variance minimale généralisée (voir plus loin section 4.3), soit on introduit des pôles additionnels.

Dans ce dernier cas le polynôme définissant les pôles désirés en boucle fermée aura la forme :

$$P(q^{-1}) = C(q^{-1}) \cdot P_F(q^{-1})$$

où $P_F(q^{-1})$ représente le polynôme correspondant aux pôles additionnels. C'est le polynôme $P(q^{-1})$ qui sera utilisé dans l'équation [4.2.25] à la place de $C(q^{-1})$ et bien entendu dans ce cas $T(q^{-1}) = C(q^{-1}) P_F(q^{-1})$.

Cette modification correspond à minimiser la variance de l'erreur de régulation filtrée par $P_F(q^{-1})$, c'est-à-dire :

$$\min E \{ [P_F(q^{-1}) [y(t+d+1) - y^*(t+d+1)]]^2 \}$$

4.2.3. Poursuite et régulation à variance minimale. Exemple

Le tableau 4.2.1 donne les résultats du calcul pour la poursuite et régulation à variance minimale en utilisant WinREG (Adaptech). Le procédé considéré est le même que celui utilisé pour la poursuite et régulation à objectifs indépendants au paragraphe 3.4.4. La dynamique de poursuite désirée est la même que celle utilisée au paragraphe 3.4.4.

Le calcul du régulateur conduit aux valeurs de $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ données dans la partie inférieure du tableau 4.2.1. Avant de lancer la simulation, il faut spécifier la variance et la valeur moyenne du bruit blanc générateur de la perturbation (à travers $C(q^{-1})/A(q^{-1})$).

Les résultats de simulation en changement de consigne et en présence de la perturbation engendrée à partir d'un bruit blanc de valeur moyenne nulle et variance 0.05, sont représentés dans la figure 4.2.4. Ces résultats sont à comparer avec ceux de la poursuite et régulation à objectifs indépendants (figure 3.4.3).

$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$	
Procédé : $d = 0$	
$B(q^{-1}) = 0.2 q^{-1} + 0.1 q^{-2}$	
$A(q^{-1}) = 1 - 1.3 q^{-1} + 0.42 q^{-2}$	
$\rightarrow B_m = +0.0927 + 0.0687 q^{-1}$	
Dynamique de poursuite ---	
$\rightarrow A_m = 1 - 1.2451 q^{-1} + 0.4066 q^{-2}$	
$T_e = 1s, \omega_0 = 0.5000 \text{ rad/s}, \zeta = 0.900$	
Polynôme bruit -----> $C(q^{-1}) = 1 - 1.34 q^{-1} + 0.49 q^{-2}$	
Présécifications : Intégrateur	
***LOI DE COMMANDE ***	
$S(q^{-1}) u(t) + R(q^{-1}) y(t) = T(q^{-1}) y^*(t+d+1)$	
$y^*(t+d+1) = [(B_m q^{-1})/A_m(q^{-1})] \cdot \text{ref}(t)$	
Régulateur : $R(q^{-1}) = 0.96 - 1.23 q^{-1} + 0.42 q^{-2}$	
$S(q^{-1}) = 0.2 - 0.1 q^{-1} - 0.1 q^{-2}$	
$T(q^{-1}) = C(q^{-1})$	
Marge de gain : 2.084	Marge de phase : 61.8 deg
Marge de module : 0.520 (- 5.68 dB)	Marge de retard : 1.3 s

Tableau 4.2.1. Poursuite et régulation à variance minimale

4.3. Cas des zéros instables. Approximation de la poursuite et régulation à variance minimale par le placement des pôles

4.3.1. Calcul du régulateur

Rappelons tout d'abord que la poursuite et régulation à variance minimale dans le cas où les zéros du modèle du procédé à commander sont à l'intérieur du cercle unité (zéros asymptotiquement stables) s'apparente à un placement de pôles pour

$$P(q^{-1}) = B^*(q^{-1})C(q^{-1}) \quad [4.3.1]$$

(voir équation [4.2.20] et [4.2.24]).

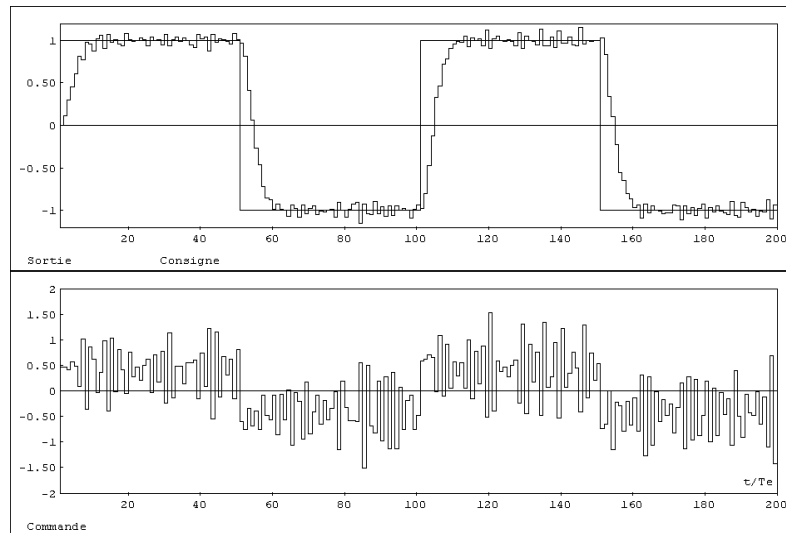


Figure 4.2.4. Performances de la poursuite et régulation à variance minimale

Dans le cas où $B^*(q^{-1})$ contient des zéros instables on va appliquer le placement de pôles mais en remplaçant les zéros instables de $B^*(q^{-1})$ par une approximation stable.

Pour ceci on factorise d'abord le polynôme $B^*(q^{-1})$ sous la forme :

$$B^*(q^{-1}) = B^+(q^{-1})B^-(q^{-1}) \quad [4.3.2]$$

où $B^+(q^{-1})$ contient tous les zéros de $B^*(q^{-1})$ qui se trouvent à l'intérieur du cercle unité (zéros asymptotiquement stables) et $B^-(q^{-1})$ contient tous les zéros de $B^*(q^{-1})$ situés à l'extérieur du cercle unité (zéros instables). La factorisation est faite tel que le coefficient de la plus grande puissance q^{-n_B} du polynôme $B^-(q^{-1})$ soit égal à 1.

Définissons le *polynôme réciproque* de $B^-(q^{-1})$, le polynôme qui s'obtient par l'inversion de l'ordre des coefficients et qui sera noté $B^{-'}(q^{-1})$. Ce polynôme aura tous les zéros à l'intérieur du cercle unité et c'est un polynôme monique.

Exemple

$$B^-(q^{-1}) = 0.5 + q^{-1} \quad ; \quad B^{-'}(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$$

$B^-(q^{-1})$ a un zéro à $2+j0$ (extérieur au cercle unité) et $B^{-'}(q^{-1})$ a un zéro à $0.5+j0$ (à l'intérieur du cercle unité).

Observons que $B^{-'}(q^{-1})$ est une bonne approximation de $B^-(q^{-1})$ dans le domaine fréquentiel car :

$$\left| \frac{B^-(e^{-j\omega})}{B^{-'}(e^{-j\omega})} \right| = 1 \quad \text{pour tout } \omega \quad [4.3.3]$$

Ceci peut être aisément vérifié sur l'exemple considéré plus haut. En effet, dans ce cas on a :

$$\left| \frac{B^-(e^{-j\omega})}{B^{-'}(e^{-j\omega})} \right|^2 = \frac{1.25 + \cos \omega}{1.25 + \cos \omega} = 1 \quad \text{pour tout } \omega$$

L'approximation de la poursuite et régulation à variance minimale s'obtient en appliquant la stratégie du placement des pôles pour :

$$\begin{aligned} P(q^{-1}) &= B^+(q^{-1})B^{-'}(q^{-1})C(q^{-1}) \\ &= A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-(d+1)}B^*(q^{-1})R(q^{-1}) \end{aligned} \quad [4.3.4]$$

Mais en tenant compte de la structure de $B^*(q^{-1})$ (donnée dans l'équation [4.3.2]) il résulte que $S(q^{-1})$ sera de la forme :

$$S(q^{-1}) = B^+(q^{-1})S'(q^{-1})$$

et donc $S(q^{-1})$ et $R(q^{-1})$ sont solutions de l'équation :

$$B^{-'}(q^{-1})C(q^{-1}) = A(q^{-1})S'(q^{-1}) + q^{-(d+1)}B^-(q^{-1})R(q^{-1}) \quad [4.3.5]$$

Le polynôme $T(q^{-1})$ sera donné par :

$$T(q^{-1}) = B^{-'}(q^{-1})C(q^{-1}) / B^*(1) \quad [4.3.6]$$

	$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$
Procédé	$d = 0$ $B(q^{-1}) = 0.1 q^{-1} + 0.2 q^{-2}$ $A(q^{-1}) = 1 - 1.3 q^{-1} + 0.42 q^{-2}$ $\rightarrow B_m(q^{-1}) = 0.0927 + 0.0687 q^{-1}$
Dynamique de poursuite --	$\rightarrow A_m(q^{-1}) = 1 - 1.2451 q^{-1} + 0.4066 q^{-2}$ $T_e = 1s, \omega_0 = 0.5 \text{ rad/s}, \zeta = 0.9$
Dynamique de régulation -->	$P(q^{-1}) = (1 + 0.5 q^{-1})(1 - 1.34 q^{-1} + 0.49 q^{-2})$
Présécifications : Intégrateur	*** LOI DE COMMANDE ***
	$S(q^{-1}) u(t) + R(q^{-1}) y(t) = T(q^{-1}) y^*(t+d+1)$ $y^*(t+d+1) = [B_m(q^{-1})/A_m(q^{-1})] r(t)$
Régulateur :	$R(q^{-1}) = 4.813 - 6.118 q^{-1} + 2.055 q^{-2}$ $S(q^{-1}) = 1 - 0.02139 q^{-1} - 0.9786 q^{-2}$ $T(q^{-1}) = -2.80 q^{-1} - 0.6 q^{-2} + 0.8166 q^{-3}$
Marge de gain : 2.082	Marge de phase : 58.5 deg
Marge de module : 0.520 (- 5.69 dB)	Marge de retard : 1.42 s

Tableau 4.3.1. Approximation de la poursuite et régulation à variance minimale par le placement de pôles

Pour une démonstration d'optimalité stochastique de cette loi de commande voir [AST 97]⁶.

4.3.2. Un exemple

Le tableau 4.3.1 donne les résultats du calcul pour l'approximation de la régulation à variance minimale par le placement de pôles. Le modèle du procédé a un zéro instable. Pour définir les pôles de la boucle fermée nous devons d'abord factoriser $B^*(q^{-1})$:

$$B^*(q^{-1}) = 0.1 + 0.2q^{-1} = 0.2(0.5 + q^{-1}) = B^+(q^{-1})B^-(q^{-1})$$

6. L'idée de cette méthode peut être aussi utilisée en déterministe si on souhaite une meilleure approximation de la poursuite et régulation à objectifs indépendants par le placement de pôles quand le modèle du procédé a des zéros instables.

Donc :

$$B^-(q^{-1}) = 0.5 + q^{-1} \quad B^{-'}(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$$

Le modèle du bruit $C(q^{-1})$ est le même que celui utilisé pour l'exemple 4.2.3 et le régulateur est calculé en utilisant les équations [4.3.4] et [4.3.5].

4.4. Poursuite et régulation à variance minimale généralisée

La stratégie de poursuite et régulation à variance minimale ne s'applique qu'aux procédés ayant un modèle échantillonné avec des zéros stables.

La stratégie de *poursuite et régulation à variance minimale généralisée* est une extension qui permet d'étendre l'algorithme de commande à variance minimale à certains procédés ayant des modèles échantillonnés avec des zéros instables. Cette méthode permet de calculer une commande $u(t)$ qui minimise le critère suivant :

$$\begin{aligned} & E \left\{ \left[y(t+d+1) - y^*(t+d+1) + \frac{Q(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) \right]^2 \right\} \\ & \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[y(t+d+1) - y^*(t+d+1) + \frac{Q(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) \right]^2 = \min \end{aligned} \quad [4.4.1]$$

où :

$$Q(q^{-1}) = \frac{\lambda(1-q^{-1})}{1+\alpha q^{-1}} \quad [4.4.2]$$

et $C(q^{-1})$ caractérise la perturbation dans le modèle ARMAX de la sortie du procédé.

Dans le cas où $\alpha = 0$, le critère de l'équation [4.4.1] s'écrit :

$$E \left\{ \left[y(t+d+1) + \frac{\lambda}{C(q^{-1})} [u(t) - u(t-1)] - y^*(t+d+1) \right]^2 \right\} = \min$$

On interprète la quantité $y(t+d+1) + [\lambda/C(q^{-1})] [u(t) - u(t-1)]$ comme une « sortie généralisée » dont la variance des variations autour de $y^*(t+d+1)$ sera minimisée.

Pour $\lambda = 0$, cette stratégie correspond à la stratégie de *poursuite et régulation à variance minimale*. Pour $\lambda > 0$, la variance de la différence entre la *sortie généralisée* et la trajectoire de référence y^* va être minimisée, mais ceci ne va plus assurer la minimisation de $E\{[y(t+d+1) - y^*(t+d+1)]^2\}$ et pour cette raison une valeur faible de λ assurant la stabilité du système en boucle fermée est souhaitable en pratique.

A noter que λ a un effet de pondération sur les variations de $u(t)$ et par conséquence cette stratégie peut être utilisée même dans les cas où les zéros du modèle du procédé sont stables afin de réduire les variations de la commande (et donc les sollicitations de l'actionneur).

4.4.1. Calcul du régulateur

Nous avons vu dans le paragraphe 4.2.2 que l'utilisation de l'équation [4.2.24] qui sert aux calculs des polynômes $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ pour la poursuite et régulation à variance minimale permet d'exprimer $E\{[y(t+d+1) - y^*(t+d+1)]^2\}$ comme suit (voir équation [4.2.33]) :

$$\begin{aligned} & E\left\{ \left[y(t+d+1) - y^*(t+d+1) \right]^2 \right\} \\ &= E\left\{ \left[\frac{R(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + \frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) - y^*(t+d+1) \right]^2 \right\} \\ &+ E\left\{ \left[S'(q^{-1})e(t+d+1) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad [4.4.3]$$

D'où l'on obtient pour le critère [4.4.1] l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & E\left\{ \left[y(t+d+1) - y^*(t+d+1) + \frac{Q(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) \right]^2 \right\} \\ &= E\left\{ \left[\frac{R(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + \frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) + \frac{Q(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) - y^*(t+d+1) \right]^2 \right\} \\ &+ E\left\{ \left[S'(q^{-1})e(t+d+1) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad [4.4.4]$$

Pour minimiser ce critère, il faut choisir $u(t)$ tel que le premier terme soit nul. On obtient alors :

$$u(t) = \frac{C(q^{-1})y^*(t+d+1) - R(q^{-1})y(t)}{S(q^{-1}) + Q(q^{-1})} \quad [4.4.5]$$

et le schéma correspondant est représenté dans la figure 4.4.1.

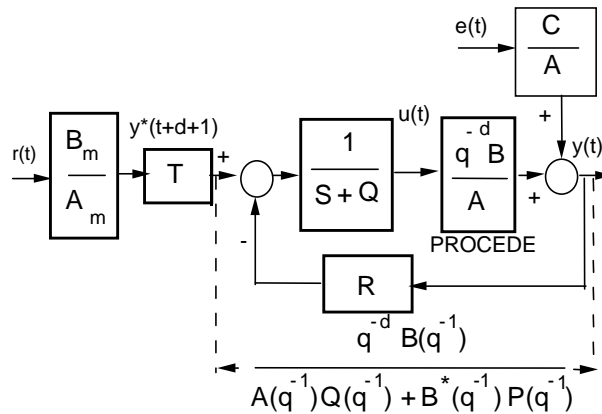


Figure 4.4.1. Poursuite et régulation à variance minimale généralisée

Le calcul du régulateur se fait en deux étapes.

Dans une première étape, on calcule les polynômes $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$ et $T(q^{-1}) = C(q^{-1})$ pour $Q(q^{-1}) = 0$ par la méthode de poursuite et régulation à variance minimale même si $B(q^{-1})$ a des zéros instables.

Dans une deuxième étape, on introduit le polynôme $Q(q^{-1})$ donné par l'équation [4.4.2] avec $\lambda > 0$. La fonction de transfert en boucle fermée sans le précompensateur $T(q^{-1})$ est donnée par (voir figure 4.5.1) :

$$\begin{aligned} H_{BF_1} &= \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})[S(q^{-1}) + Q(q^{-1})] + q^{-(d+1)} B^*(q^{-1}) R(q^{-1})} \\ &= \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})Q(q^{-1}) + B^*(q^{-1})C(q^{-1})} \end{aligned} \quad [4.4.6]$$

car de l'équation [4.2.24], on a :

$$A(q^{-1}) S(q^{-1}) + q^{-(d+1)} B^*(q^{-1}) R(q^{-1}) = B^*(q^{-1}) C(q^{-1}) \quad [4.4.7]$$

On choisit λ (en général plus petit que 1) et on vérifie que le polynôme $[(A(q^{-1}) \ Q(q^{-1}) + B^*(q^{-1}) \ C(q^{-1})]$ définissant les pôles en boucle fermée est asymptotiquement stable. Si ce n'est pas le cas, on change la valeur de λ ⁷.

Pour un choix initial, dans le cas où $B^*(q^{-1})$ est instable, on prend la plus petite valeur de λ permettant d'obtenir pour $\alpha = 0$ un polynôme $S(q^{-1}) + Q(q^{-1})$ stable (car $S(q^{-1}) = B^*(q^{-1}) S'(q^{-1})$ est instable).

A noter qu'il n'existe pas toujours une valeur de λ permettant d'obtenir une boucle fermée stable (surtout s'il y a plusieurs zéros instables) alors qu'avec la technique décrite section 4.3, on obtient toujours une boucle fermée asymptotiquement stable.

4.4.2. Poursuite et régulation à variance minimale généralisée. Exemple

Le tableau 4.5.1 donne les résultats du calcul pour la poursuite et régulation à variance minimale généralisée en utilisant WinREG (Adaptech). Le modèle de procédé considéré à un zéro instable. On a choisi $\lambda = 0.1$ et on vérifie que le zéro correspondant de $S(q^{-1}) + Q(q^{-1})$ est à l'intérieur du cercle unité. On a choisi $\alpha = 0$. Les coefficients du régulateur sont donnés dans la partie inférieure du tableau 4.5.1.

Pour cet exemple les pôles effectifs de la boucle fermée correspondent à un pôle simple situé à -0.546 et à une paire de pôles complexes conjugués caractérisés par $\omega_0 = 0.45 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.743$. Si l'on compare ces pôles avec ceux de l'exemple 4.3.2 on voit qu'ils sont proches (pôle simple à -0.5 et une paire de pôles complexes conjugués caractérisés par $\omega_0 = 0.462 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.772$). On observe aussi que si on fait une normalisation des coefficients du régulateur pour que $s_0 = 1$ on obtient des valeurs pour R et S qui sont proches des valeurs données dans l'exemple 4.3.2.

Par contre, le calcul de $T(q^{-1})$ est différent dans les deux approches (même en faisant abstraction de la normalisation par $B^*(1)$).

4.5. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons considéré la conception et le calcul des régulateurs numériques opérant en présence de perturbations aléatoires. Beaucoup de perturbations aléatoires rencontrées en pratique peuvent être modélisées comme un bruit blanc discret gaussien passé par un filtre. La connaissance du filtre appelé

7. Cette technique peut être utilisée aussi dans le cas déterministe quand les zéros du modèle du procédé sont instables.

modèle de la perturbation permet de caractériser complètement la perturbation (avec l'approximation d'un facteur d'échelle).

$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$	
Processus :	$d = 0$
	$B(q^{-1}) = 0.1 q^{-1} + 0.2 q^{-2}$
	$A(q^{-1}) = 1 - 1.3 q^{-1} + 0.42 q^{-2}$
	$\rightarrow B_m(q^{-1}) = 0.0927 + 0.0687 q^{-1}$
Dynamique de poursuite -----	$\rightarrow A_m(q^{-1}) = 1 - 1.1451 q^{-1} + 0.4066 q^{-2}$
	$T_e = 1s, \omega_0 = 0.5000 \text{ rad/s}, \zeta = 0.9$
Polynôme bruit ----->	$C(q^{-1}) = 1 - 1.34 q^{-1} + 0.49 q^{-2}$
Présécifications : Intégrateur	
Pondération : $\lambda = 0.1, \alpha = 0$	
*** LOI DE COMMANDE ***	
$[S(q^{-1}) + Q(q^{-1})] u(t) + R(q^{-1}) y(t) = T(q^{-1}) y^*(t+d=1)$	
$Q(q^{-1}) \lambda (1 - q^{-1}) / (1 + \alpha q^{-1})$	
Régulateur :	$Q(q^{-1}) = 0.1 (1 - q^{-1})$
	$R(q^{-1}) = 0.96 - 1.23 q^{-1} + 0.42 q^{-2}$
	$S(q^{-1}) = [S(q^{-1}) + Q(q^{-1})] = 0.2 - 0.2 q^{-2}$
	$T(q^{-1}) = C(q^{-1})$
Marge de gain : 2.097	Marge de phase : 59.9 deg
Marge de module : 0.523 (- 5.63 dB)	Marge de retard : 1.5 s

Tableau 4.5.1. Poursuite et régulation à variance minimale généralisée en utilisant WinREG

Pour le calcul des régulateurs numériques en présence de perturbations aléatoires, on considère un modèle représentant simultanément l'effet de la commande et de la perturbation sur la sortie du procédé. Ce modèle est appelé ARMAX (modèle autoregressif à moyenne ajustée et entrée exogène) et il a la forme :

$$y(t) = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(t)$$

où y est la sortie du procédé, u est l'entrée du procédé, et e est la séquence bruit blanc discret. Le premier terme représente l'effet de l'entrée sur la sortie du procédé et le deuxième terme représente l'effet de la perturbation sur la sortie du procédé.

Le modèle ARMAX est souvent écrit sous la forme :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t)$$

La stratégie de poursuite et régulation à variance minimale minimise le critère :

$$E \{ [y(t+d+1) - y^*(t+d+1)]^2 \} = \min$$

où y^* est la trajectoire désirée de la sortie. Cette stratégie de commande est applicable aux procédés ayant un modèle échantillonné avec des zéros stables.

Les pôles du système en boucle fermée sont les zéros du polynôme $C(q^{-1})$ caractérisant le modèle de la perturbation aléatoire auxquels se rajoutent les zéros du polynôme $B^*(q^{-1})$. Le régulateur obtenu est identique aux régulateurs correspondant à la stratégie de *poursuite et régulation à objectifs indépendants* utilisés dans un environnement déterministe si le polynôme $P(q^{-1})$ spécifiant les pôles désirés en boucle fermée est choisi égal à $C(q^{-1})$. A noter que dans certains cas afin de réduire les sollicitations de l'actionneur ou d'améliorer les marges de robustesse, des pôles auxiliaires (de filtrage) sont ajoutés à ceux donnés par $C(q^{-1})$.

Pour le cas où le modèle échantillonné du procédé a des zéros instables on utilise

- soit une approximation de la loi de poursuite et régulation à variance minimale par le placement des pôles ;
- soit une loi de commande obtenue à partir d'un critère qui introduit une pondération sur l'énergie de commande.

La stratégie de *poursuite et régulation à variance minimale généralisée* est une extension de la stratégie de poursuite et régulation à variance minimale pour les cas où les zéros du modèle discret du procédé sont instables. Cette stratégie minimise le critère :

$$E \left\{ \left\{ y(t+d+1) + \frac{\lambda}{C(q^{-1})} [u(t) - u(t-1)] - y^*(t+d+1) \right\}^2 \right\} = \min$$

où $\lambda (> 0)$ est choisi le plus petit possible pour approcher la variance minimale de $y - y^*$ mais tel que la boucle fermée résultante soit asymptotiquement stable. A noter que λ a un effet de pondération sur les variations de $u(t)$. Il peut être aussi utilisé pour adoucir les variations de la commande résultant d'une commande à variance minimale.

Mais attention : quelle que soit la méthode de calcul, dans la phase finale de calcul il faut vérifier les fonctions de sensibilité résultantes et les marges de

robustesse correspondantes. Si elles ne sont pas satisfaisantes, des modifications doivent être faites (voir chapitre 3) car on ne peut pas utiliser en pratique des régulateurs qui ont des marges de robustesse insuffisantes ou qui sollicitent trop l'actionneur dans les zones de fréquence où le procédé a un gain faible (pics importants sur la fonction de sensibilité perturbation-entrée).

4.6. Bibliographie

- [AST 70] ASTRÖM K.J., *Introduction to Stochastic Control Theory*, Academic Press, New York, 1970.
- [AST 97] ASTRÖM K.J., WITTENMARK B., *Computer Controlled Systems - Theory and Design*, 3^e édition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1997.
- [BOX 70] BOX G.E.P., JENKINS G.M., *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden Day, San Francisco, 1970.
- [CLA 75] CLARKE D.W., GAWTHROP P.J., « A self-tuning controller », *Proc. IEEE*, vol. 122, p. 929-934, 1975.
- [CLA 79] CLARKE D.W., GAWTHROP P.J., « Self-tuning Control », *Proc. IEEE*, vol. 126, p. 633-640, 1979.
- [LAN 81] LANDAU I.D., « Model Reference Adaptive Controllers and Stochastic Self-tuning Regulators, A Unified Approach », *Trans. ASME, J. of Dyn. Syst. Meas. and Control*, vol. 103, n° 4, p. 404, 416, 1981.
- [LAN 97] LANDAU I.D., LOZANO R., M'SAAD M., *Adaptive Control*, chapitre 7, Springer, Londres, 1997.

Chapitre 5

Identification des modèles de procédés : les bases

Ce chapitre donne d'abord les principes de base de l'identification des modèles dynamiques de procédés. Il présente ensuite les principaux types d'algorithmes d'adaptation paramétrique intervenant dans les méthodes d'identification récursives. Puis est examiné le choix des entrées pour l'identification et l'influence des perturbations. Dans la dernière partie, on indique la structure générale des méthodes d'identification récursives.

5.1. Principes de l'identification des modèles de procédés

L'identification, c'est l'opération de détermination des caractéristiques dynamiques d'un procédé (système) dont la connaissance est nécessaire pour la conception et la mise en œuvre d'un système performant de régulation. La figure 5.1.1 résume les principes généraux de conception et calcul d'un régulateur. Pour concevoir et ajuster correctement un régulateur, il faut :

- 1) spécifier les performances désirées pour la boucle de commande régulation ;
- 2) connaître le modèle dynamique du procédé (appelé aussi « modèle de commande ») qui décrit la relation entre les variations de la commande et les variations de la sortie ;
- 3) disposer d'une méthode appropriée de calcul du régulateur compatible avec les performances spécifiées et les caractéristiques du modèle du procédé.

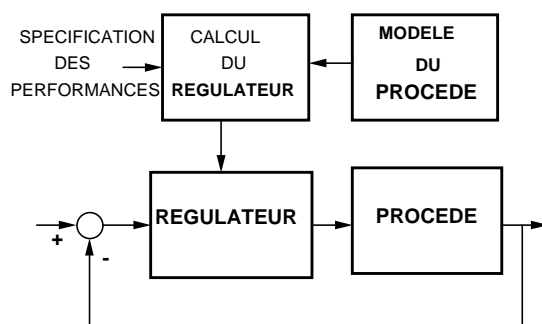


Figure 5.1.1. Principe de la conception et du calcul d'un régulateur

La notion de modèle mathématique d'un système ou d'un phénomène est un concept fondamental. En général, il existe une multitude de types de modèles, chaque type de modèle étant destiné à une application particulière.

Par exemple, les modèles de connaissance (basés sur les lois de la physique, chimie, etc.) permettent une description assez complète des systèmes et sont utilisés pour la simulation et la conception de procédés. Ces modèles sont en général extrêmement complexes et rarement directement utilisables pour l'automatique. Les modèles dynamiques de commande, qui donnent la relation entre les variations des entrées d'un système et les variations de la sortie sont comme on l'a indiqué plus haut, le type de modèle dont on doit disposer pour la conception et l'ajustement des systèmes de commande régulation.

Bien que des indications sur la structure de ces modèles de commande puissent s'obtenir à partir de la structure du modèle de connaissance, il est en général très difficile de déterminer les valeurs des paramètres significatifs à partir de ces modèles.

C'est la raison pour laquelle, dans la majorité des situations pratiques, on est amené à mettre en œuvre une méthodologie d'identification directe de ces modèles dynamiques (de commande) à partir des données entrée/sortie.

Notons que les modèles dynamiques sont de deux types :

- 1) *modèles non paramétriques* (par exemple réponse fréquentielle, réponse à un échelon) ;
- 2) *modèles paramétriques* (par exemple fonction de transfert, équation différentielle ou aux différences).

Nous nous intéresserons par la suite à l'identification des modèles dynamiques paramétriques échantillonnés qui sont les plus appropriés pour la conception et l'ajustement des systèmes numériques de commande et régulation.

L'identification est une approche expérimentale pour la détermination du modèle dynamique d'un système. Elle comporte quatre étapes :

- 1) acquisition des entrées/sorties sous un protocole d'expérimentation ;
- 2) choix ou estimation de la complexité du « modèle » ;
- 3) estimation des paramètres du modèle ;
- 4) validation du modèle identifié.

Une opération complète d'identification doit nécessairement comporter les quatre phases indiquées plus haut. Les méthodes spécifiques utilisées dans chaque phase dépendent du type de modèle recherché (paramétrique ou non paramétrique, continu ou échantillonné) ainsi que des conditions d'expérimentation (par exemple : hypothèses sur le bruit de mesure, identification en boucle ouverte ou en boucle fermée). La *validation* est le point de passage obligé pour décider de l'acceptation ou le rejet du modèle identifié.

Comme il n'existe pas un algorithme d'estimation paramétrique unique et un protocole d'expérimentation unique permettant d'obtenir toujours un bon modèle, les modèles obtenus ne passent pas toujours les tests de validation. Dans ce cas là, il est nécessaire de revoir le choix des algorithmes d'estimation, la complexité du modèle ou les conditions d'expérimentation. Il faut donc voir l'identification comme une procédure itérative telle qu'elle est illustrée dans la figure 5.1.2.

Nous allons ci-dessous résumer brièvement les éléments essentiels caractérisant les différentes étapes de l'identification.

Acquisitions des entrées/sorties sous un protocole d'expérimentation

Il s'agit essentiellement de choisir un signal d'excitation avec un contenu fréquentiel riche couvrant la bande passante du procédé à identifier mais d'amplitude faible (car en pratique il y a une contrainte très forte sur l'amplitude des variations des signaux de commande).

Cet aspect sera discuté en détail dans les sections 5.3 et 7.2.

Choix ou estimation de la complexité du modèle

Le problème typique rencontré est de définir l'ordre des polynômes (numérateur, dénominateur) de l'opérateur (fonction) de transfert échantillonné pouvant représenter le modèle du procédé.

On utilise souvent des procédures essais/erreur, mais des techniques fiables d'estimation de la complexité des modèles ont été développées ces dernières années [DUO 96].

Ces aspects seront discutés dans le chapitre 6, section 6.5 et dans le chapitre 7, section 7.3.

Estimation des paramètres du modèle

La méthode d'identification « classique » utilisée pour obtenir des modèles paramétriques à partir des modèles non paramétriques type « réponse en échelon » est illustrée dans la figure 5.1.3. Cette méthode, initialement utilisée pour obtenir des modèles paramétriques continus, a été étendue pour l'identification des modèles échantillonnés.

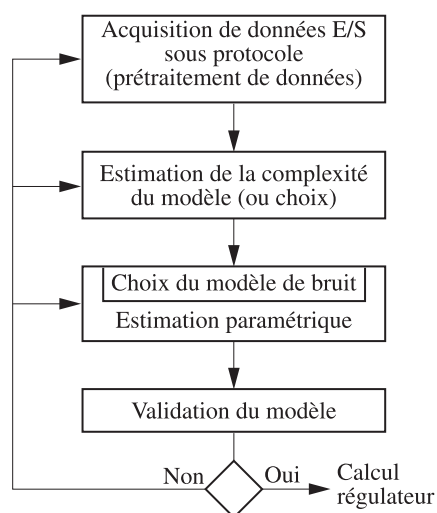


Figure 5.1.2. *Méthodologie de l'identification*

A partir de la forme de la réponse du procédé à un échelon, on choisit un type de modèle et on détermine graphiquement les paramètres de ce modèle. En connaissant la fréquence d'échantillonnage, on peut à l'aide des tables obtenir le modèle échantillonné correspondant.

Les inconvénients de cette méthode sont multiples :

- signaux test d'amplitude importante (rarement tolérés par les installations industrielles) ;

- précision réduite ;
- influence néfaste des perturbations ;
- pas de possibilité de modélisation des perturbations ;
- procédure longue ;
- pas de validation du modèle.

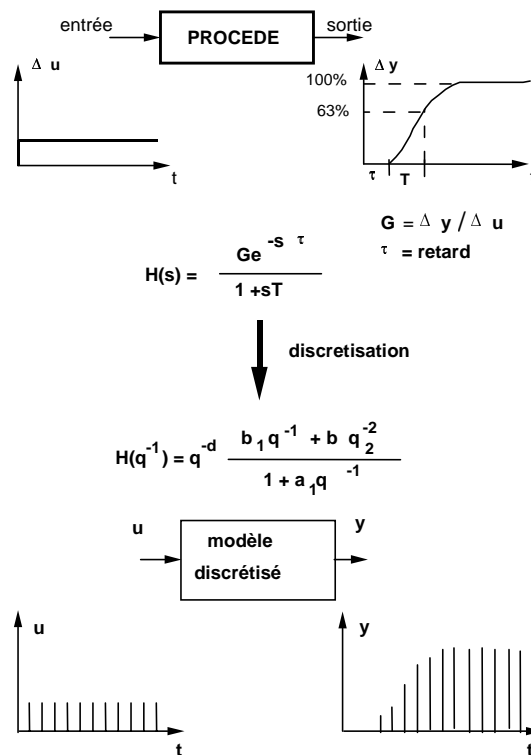


Figure 5.1.3. Méthode « classique » d'identification

La disponibilité d'un ordinateur numérique permet de mettre en place des algorithmes d'estimation automatique des paramètres des modèles échantillonnés des procédés. Il est important de souligner que l'identification des modèles paramétriques échantillonnés permet (par simulation) d'obtenir des modèles non paramétriques type « réponse à un échelon » ou « réponse fréquentielle », avec une précision bien meilleure que lors d'une approche directe et en utilisant des signaux d'excitation extrêmement faibles. L'identification des modèles paramétriques échantillonnés conduit à des modèles d'utilisation très générale et offre de nombreux avantages par rapport aux autres approches.

Des algorithmes d'identification performants, ayant une formulation récursive adaptée aux problèmes d'identification temps réel et à leur mise en œuvre sur micro-ordinateur, ont été développés.

Le fait que ces méthodes d'identification peuvent opérer avec des signaux d'excitation extrêmement faibles constitue une qualité très appréciable en pratique.

Le principe de l'estimation des paramètres des modèles échantillonnés est illustré dans la figure 5.1.4. Une séquence de commande échantillonnée $u(t)$ (où t est le temps discret) est appliquée au procédé physique (ensemble actionneur-procédé-capteur) à travers un convertisseur numérique-analogique (CNA) suivi d'un bloqueur d'ordre zéro (BOZ). La mesure échantillonnée de la sortie du procédé $y(t)$ est obtenue à travers un convertisseur analogique-numérique (CAN).

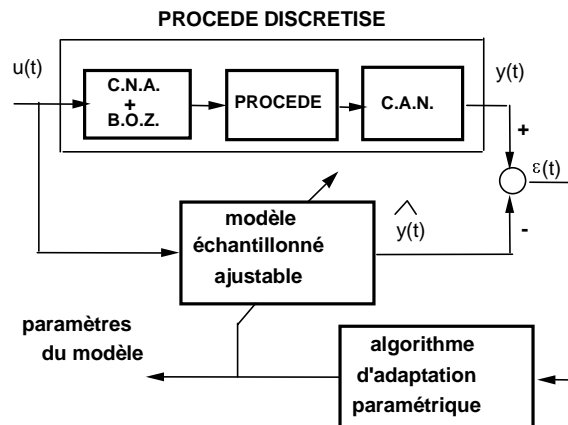


Figure 5.1.4. Principe de l'estimation des paramètres d'un modèle

Un modèle échantillonné à paramètres ajustables est implanté sur le calculateur. L'erreur entre la sortie du procédé à l'instant t , $y(t)$, et la sortie prédite par le modèle $\hat{y}(t)$, appelée *erreur de prédiction*, est utilisée par un *algorithme d'adaptation paramétrique* qui à chaque instant d'échantillonnage va modifier les paramètres du modèle afin de minimiser cette erreur au sens d'un certain critère. L'entrée est en général une séquence binaire pseudo-aléatoire de très faible niveau, engendrée par le calculateur (succession d'impulsions rectangulaires de durée variable aléatoirement). Une fois le modèle obtenu, une validation objective peut être faite par des tests statistiques sur l'erreur de prédiction $\varepsilon(t)$ et la sortie prédite $\hat{y}(t)$. Le test de validation permet pour un procédé donné de choisir le meilleur modèle, respectivement la meilleure structure et le meilleur algorithme pour l'estimation des paramètres.

Enfin, en calculant et en représentant graphiquement la réponse à un échelon et la réponse fréquentielle du modèle identifié, on peut remonter aux caractéristiques du modèle continu (réponse à un échelon ou réponse fréquentielle).

Cette approche moderne pour l'identification des modèles de procédé élimine tous les défauts des méthodes « classiques » mentionnés antérieurement et offre aussi d'autres possibilités telles que :

- suivi des variations des paramètres du procédé en temps réel, permettant un réajustement des régulateurs pendant le fonctionnement,
- identification des modèles de perturbation,
- modélisation des bruits « capteurs » en vue de leur suppression,
- détection et mesure des fréquences de vibration,
- analyse spectrale des signaux.

Un des éléments clés pour la mise en œuvre de cette approche pour l'identification des modèles de procédés est l'*algorithme d'adaptation paramétrique* (AAP) qui pilote les paramètres du modèle ajustable de prédiction à partir des informations recueillies sur le système à chaque pas d'échantillonnage. Cet algorithme a une structure « récursive », c'est-à-dire que la nouvelle valeur des paramètres est égale à la valeur précédente plus un terme de correction qui dépendra des dernières mesures.

On définit en général un « vecteur » des paramètres dont les composantes sont les différents paramètres qui doivent être identifiés. Les algorithmes d'adaptation paramétrique ont tous la structure ci-après :

$$\begin{bmatrix} \text{Nouvelle estimation} \\ \text{des paramètres} \\ \text{(vecteur)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Estimation précédente} \\ \text{des paramètres} \\ \text{(vecteur)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Gain} \\ \text{d'adaptation} \\ \text{(matrice)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{Fonction} \\ \text{des mesures} \\ \text{(vecteur)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{Fonction} \\ \text{de l'erreur de prédiction} \\ \text{(scalaire)} \end{bmatrix}$$

Le vecteur des fonctions des mesures s'appelle aussi le « vecteur des observations ».

Indiquons que les méthodes d'identification paramétrique peuvent aussi être mises en œuvre sous forme non récursive (traitement en bloc des fichiers de données entrée/sortie obtenus sur un horizon de temps). Par rapport à ces techniques, l'identification récursive offre les avantages suivants :

- obtention d'une estimation du modèle au fur et à mesure que le procédé évolue,
- compression importante des données, car les algorithmes récursifs ne traitent à chaque instant qu'une paire entrée/sortie au lieu de l'ensemble de données entrée/sortie,
- nécessité d'une mémoire et d'une puissance de calcul sensiblement plus faible,
- mise en œuvre aisée sur micro-ordinateur,
- possibilité de réalisation de systèmes d'identification temps réel.
- possibilité de poursuite des paramètres des systèmes variables dans le temps.

La section 5.2 est consacrée à la présentation des principaux types d'algorithmes d'estimation (identification) paramétrique sous leur forme récursive. L'influence du bruit de mesure sur les algorithmes d'estimation paramétrique sera discutée dans la section 5.4.

Validation du modèle

Plusieurs points de vue peuvent être considérés pour la mise en place d'une procédure de validation. L'objectif est de vérifier que la sortie du modèle excité par le même signal que le procédé reproduit les variations de la sortie causées par les variations de la commande en s'affranchissant de l'effet de bruit de mesure. Les techniques de validation seront présentées dans le chapitre 6 (sections 6.2 et 6.4).

5.2. Algorithmes pour l'estimation paramétrique

5.2.1. Introduction

Nous allons illustrer le principe de l'identification paramétrique présenté dans la figure 5.1.3 par un exemple.

Considérons le modèle discrétisé d'un procédé décrit par :

$$y(t+1) = -a_1 y(t) + b_1(t)u(t) = \theta^T \phi(t) \quad [5.2.1]$$

où a_1 et b_1 sont des paramètres inconnus.

La sortie de ce modèle peut s'écrire aussi sous la forme d'un produit scalaire entre le *vecteur des paramètres* inconnus :

$$\theta^T = [a_1, b_1] \quad [5.2.2]$$

et le vecteur des mesures :

$$\phi(t)^T = [-y(t), u(t)] \quad [5.2.3]$$

Cette formulation est extrêmement utile car elle permet de traiter aisément des modèles de n'importe quel ordre.

Conformément au schéma donné dans la figure 5.1.3 on doit construire un modèle ajustable de prédiction qui aura la même structure que le modèle discrétisé du procédé donné dans [5.2.1] :

$$\hat{y}^o(t+1) = \hat{y}(t+1|\hat{\theta}(t)) = -\hat{a}_1(t)y(t) + \hat{b}_1(t)u(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad [5.2.4]$$

où $\hat{y}^o(t+1)$ est la sortie prédite à l'instant t sur la base de la connaissance des paramètres estimés à l'instant t ($\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t)$). $\hat{y}^o(t+1)$ porte le nom de prédiction *a priori*. Dans l'équation [5.2.4] :

$$\theta(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t)] \quad [5.2.5]$$

est le vecteur des paramètres estimés à l'instant t .

On peut définir maintenant l'erreur de prédiction (*a priori*) conformément à la figure 5.1.3 :

$$\varepsilon^o(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^o(t+1) = \varepsilon^o(t+1, \hat{\theta}(t)) \quad [5.2.6]$$

Concrètement, $\hat{y}^o(t+1)$ se calcule entre les instants d'échantillonnage t et $t+1$ une fois que $\hat{\theta}(t)$ est disponible et $\varepsilon^o(t+1)$ se calcule à l'instant $t+1$, une fois que l'acquisition de $y(t+1)$ a été faite (rigoureusement parlant, ce calcul se fait après l'acquisition, donc entre $t+1$ et $t+2$). Notons que $\varepsilon^o(t+1)$ dépend de $\hat{\theta}(t)$.

Maintenant il va falloir définir un critère en termes de l'erreur de prédiction qu'on va minimiser par une évolution appropriée des paramètres du modèle ajustables pilotés par l'algorithme d'adaptation paramétrique. Comme l'objectif est de minimiser l'amplitude de l'erreur de prédiction indépendamment de son signe, les critères de type quadratique s'imposent. Une première approche peut être de synthétiser un algorithme d'adaptation paramétrique qui à chaque instant minimise le carré de l'erreur de prédiction *a priori*. Ceci s'exprime : trouver une expression pour $\hat{\theta}(t)$ tel que l'on minimise à chaque pas :

$$J(t+1) = [\varepsilon^o(t+1)]^2 = [\varepsilon^o(t+1, \hat{\theta}(t))]^2 \quad [5.2.7]$$

La structure de l'algorithme d'adaptation paramétrique sera de la forme :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \Delta \hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + f(\hat{\theta}(t), \phi(t), \varepsilon^o(t+1)) \quad [5.2.8]$$

Le terme de correction $f(\hat{\theta}(t), \phi(t), \varepsilon^o(t+1))$ devra dépendre uniquement des informations disponibles à l'instant $t+1$ (dernière mesure de $y(t+1)$, vecteur des paramètres $\hat{\theta}(t)$ et un nombre fini de mesures ou informations aux temps $t, t-1, \dots, t-n$). La solution de ce problème sera donné dans le paragraphe 5.2.2. On obtiendra directement un algorithme d'adaptation récursif pouvant aussi bien être utilisé en temps réel ou en temps différé.

Le critère [5.2.7] n'est pas le seul critère (sur un pas) qu'on peut considérer et cet aspect sera traité aussi dans le paragraphe 5.2.2.

Quand on dispose d'un ensemble de mesures entrée/sortie acquis sur un horizon de temps t ($i = 1, 2, \dots, t$) et on s'intéresse à un problème d'identification en temps différé (hors ligne) on peut se poser la question de l'utilisation optimale de cet ensemble de données. L'objectif est la recherche d'un vecteur des paramètres $\hat{\theta}(t)$, sur la base de mesures disponibles jusqu'à t , qui minimise le critère de la forme :

$$J(t+1) = \sum_{i=1}^t [\varepsilon^o(i, \hat{\theta}(t))]^2 \quad [5.2.9]$$

c'est-à-dire la somme des carrés des erreurs de prédiction sur l'horizon de temps t . Ce point de vue conduira à l'algorithme des moindres carrés qui sera présenté dans le paragraphe 5.2.3 (sous la forme non récursive et récursive).

5.2.2. Algorithme du gradient

L'algorithme d'adaptation paramétrique du gradient a comme objectif de minimiser un critère quadratique en terme de l'erreur de prédiction (sur un pas).

Considérons le même exemple que dans le paragraphe 5.2.1.

Le modèle discrétisé du procédé s'écrit :

$$y(t+1) = -a_1 y(t) + b_1 u(t) = \theta^T \phi(t) \quad [5.2.10]$$

où :

$$\theta^T = [a_1, b_1] \quad [5.2.11]$$

est le vecteur des paramètres et :

$$\phi(t)^T = [-y(t), u(t)] \quad [5.2.12]$$

est le vecteur des mesures ou des observations.

Le modèle de prédiction ajustable (*a priori*) sera décrit dans ce cas par :

$$\hat{y}^o(t+1) = \hat{y}(t+1|\hat{\theta}(t)) = -\hat{a}_1(t)y(t) + \hat{b}_1(t)u(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad [5.2.13]$$

où $\hat{y}^o(t+1)$ représente la prédiction *a priori* dépendant des valeurs des paramètres estimés à l'instant t et :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t)] \quad [5.2.14]$$

est le vecteur des paramètres estimés.

L'erreur de prédiction *a priori* est donnée par :

$$\varepsilon^o(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^o(t+1) \quad [5.2.15]$$

Pour évaluer la qualité de la nouvelle estimation du vecteur des paramètres ajustables $\hat{\theta}(t+1)$ qui sera fournie par l'algorithme d'adaptation paramétrique il est utile de définir aussi la sortie *a posteriori* du prédicteur ajustable qui correspond au recalcul de [5.2.13] avec les nouvelles valeurs des paramètres estimés à l'instant $t+1$.

La sortie *a posteriori* du prédicteur est définie par :

$$\hat{y}(t+1) = \hat{y}(t+1|\hat{\theta}(t+1)) = -\hat{a}_1(t+1)y(t) + \hat{b}_1(t+1)u(t) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \quad [5.2.16]$$

On définit aussi une erreur de prédiction *a posteriori* :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) \quad [5.2.17]$$

On cherche un algorithme d'adaptation paramétrique récursif et avec mémoire. La structure d'un tel algorithme est¹ :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \Delta \hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + f(\hat{\theta}(t), \phi(t), \varepsilon^o(t+1)) \quad [5.2.18]$$

Le terme de correction $f(\hat{\theta}(t), \phi(t), \varepsilon^o(t+1))$ doit dépendre uniquement des informations disponibles à l'instant $t+1$ (dernière mesure $y(t+1)$), paramètres de $\hat{\theta}(t)$ et éventuellement un nombre fini d'informations aux temps $t, t-1, t-2, \dots, t-n$. Le terme de correction doit nous permettre de minimiser à chaque pas l'erreur de prédiction *a priori* au sens du critère :

$$\min_{\hat{\theta}(t)} J(t+1) = [\varepsilon^o(t+1)]^2 \quad [5.2.19]$$

Si on représente le critère J et les paramètres \hat{a}_1 et \hat{b}_1 dans un espace à trois dimensions, on obtient la forme représentée dans la figure 5.2.1 (une surface conique renversée). L'optimum du critère correspond au fond du cône (pic renversé) et la projection de ce point dans le plan \hat{a}_1, \hat{b}_1 nous donne les valeurs (optimales) des paramètres du procédé : a_1 et b_1 . Il est évident que *pour atteindre le plus vite possible ce point (l'optimum du critère) on a intérêt de descendre sur la ligne de plus grande pente*. Analytiquement cette solution est donnée par la *technique du gradient*.

Les sections horizontales de la surface correspondent à des courbes le long desquelles le critère a une valeur constante (courbes isocritère). Si on représente la projection des courbes isocritère ($J = \text{const.}$) dans le plan des paramètres \hat{a}_1, \hat{b}_1 , on obtient des courbes fermées concentriques autour de la valeur minimale du critère correspondant au point a_1, b_1 (les paramètres du modèle du procédé). Les courbes isocritère s'éloignent de plus en plus du minimum au fur et à mesure que la valeur de $J (= \text{const.})$, augmente. Ceci est illustré dans la figure 5.2.1.

Pour minimiser la valeur du critère, on se déplace dans la direction de la ligne de plus grande pente ce qui dans le plan \hat{a}_1, \hat{b}_1 correspond à un déplacement dans la direction inverse du gradient de la courbe iso-critère correspondante. Ceci va nous conduire sur une courbe correspondant à $J = \text{const.}$, de valeur plus petite, tel que c'est indiqué dans la figure 5.2.1.

L'algorithme d'adaptation paramétrique correspondant aura la forme :

1. En effet, si le terme de correction est nul on conserve l'ancienne valeur des paramètres.

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) - F \frac{\partial J(t+1)}{\partial \hat{\theta}(t)} \quad [5.2.20]$$

où $F = \alpha I$ ($\alpha > 0$) est le gain d'adaptation matriciel (I - matrice diagonale unitaire) et $\partial J(t+1)/\partial \hat{\theta}(t)$ est le gradient du critère de l'équation [5.2.19] par rapport à $\hat{\theta}(t)$.

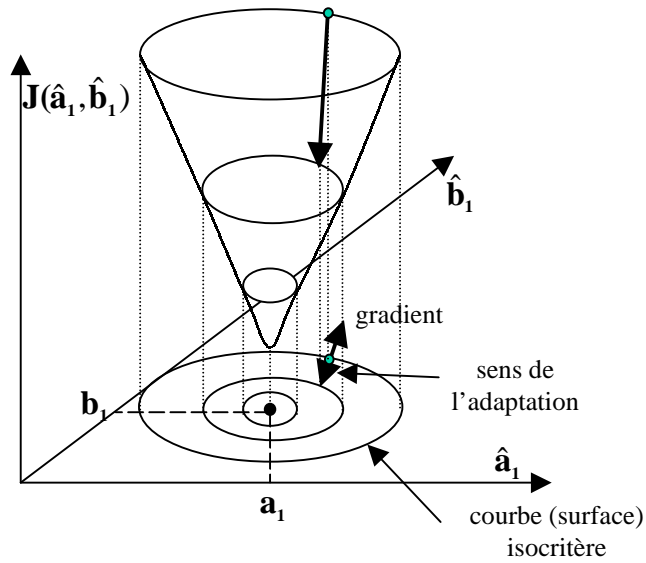


Figure 5.2.1. Principe de la méthode du gradient

De l'équation [5.2.19], on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J(t+1)}{\partial \hat{\theta}(t)} = \frac{\partial \varepsilon^o(t+1)}{\partial \hat{\theta}(t)} \varepsilon^o(t+1) \quad [5.2.21]$$

Mais :

$$\varepsilon^o(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^o(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad [5.2.22]$$

et donc :

$$\frac{\partial \varepsilon^o(t+1)}{\partial \hat{\theta}(t)} = -\phi(t) \quad [5.2.23]$$

En introduisant l'équation [5.2.23] dans l'équation [5.2.20], l'algorithme d'adaptation paramétrique de l'équation [5.2.20] devient :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F\phi(t)\varepsilon^o(t+1) \quad [5.2.24]$$

où F est le gain matriciel d'adaptation. Deux choix sont possibles :

- 1) $F = \alpha I$; $\alpha > 0$;
- 2) $F > 0$ (matrice définie positive)².

L'interprétation géométrique de l'algorithme d'adaptation paramétrique de l'équation [5.2.24] est donnée dans la figure 5.2.2.

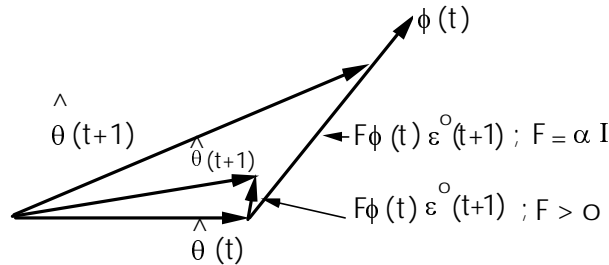


Figure 5.2.2. Interprétation géométrique de l'algorithme d'adaptation du gradient

L'algorithme d'adaptation paramétrique donné dans l'équation [5.2.24] présente des risques d'instabilité si le gain d'adaptation (respectivement α) est grand (ceci peut se comprendre à l'aide de la figure 5.2.1).

En effet, considérons l'équation [5.2.17] de l'erreur *a posteriori*. En utilisant aussi les équations [5.2.13] et [5.2.16] on peut la réécrire sous la forme :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}(t)^T \phi(t) + [\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t+1)]^T \phi(t) \quad [5.2.25]$$

De l'équation [5.2.24] il résulte que :

$$\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t+1) = -F\phi(t)\varepsilon^o(t+1) \quad [5.2.26]$$

2. Une matrice définie positive est caractérisée par : (i) tous les termes de la diagonale sont positifs ; (ii) elle est symétrique ; (iii) les déterminants de tous les mineurs principaux sont positifs.

et en tenant compte aussi de l'équation [5.2.15], l'équation [5.2.25] devient :

$$\varepsilon(t+1) = \varepsilon^o(t+1) - \phi(t)^T F \phi(t) \varepsilon^o(t+1) \quad [5.2.27]$$

qui pour $F = \alpha I$ s'écrit :

$$\varepsilon(t+1) = \left(1 - \alpha \phi(t)^T \phi(t)\right) \varepsilon^o(t+1) \quad [5.2.28]$$

Si $\hat{\theta}(t+1)$ est une meilleure estimation que $\hat{\theta}(t)$ (c'est-à-dire que l'évaluation des paramètres va dans le bon sens) il faut que $\varepsilon(t+1)^2 < \varepsilon^o(t+1)^2$. Il résulte alors de [5.2.28] que le gain d'adaptation α doit satisfaire la condition (nécessaire) :

$$\alpha < 2 / \phi(t)^T \phi(t) \quad [5.2.29]$$

Autrement dit, dans cet algorithme, le gain d'adaptation doit être choisi en fonction de l'amplitude des signaux³.

Pour éviter le risque d'instabilité et la dépendance du choix du gain vis-à-vis des signaux mesurés, on utilise la même approche du gradient mais on considère un autre critère dont l'objectif est de minimiser à chaque pas l'erreur de prédiction *a posteriori* au sens du critère :

$$\min_{\hat{\theta}(t+1)} J(t+1) = [\varepsilon(t+1)]^2 \quad [5.2.30]$$

On obtient alors :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J(t+1)}{\partial \hat{\theta}(t+1)} = \frac{\partial \varepsilon(t+1)}{\partial \hat{\theta}(t+1)} \varepsilon(t+1) \quad [5.2.31]$$

Des équations [5.2.16] et [5.2.17] on obtient :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \quad [5.2.32]$$

et respectivement :

$$\frac{\partial \varepsilon(t+1)}{\partial \hat{\theta}(t+1)} = -\phi(t) \quad [5.2.33]$$

3. On voit par ailleurs de [5.2.28] qu'une valeur optimale de α est $\alpha \approx 1 / \phi(t)^T \phi(t)$.

Introduisant l'équation [5.2.33] dans l'équation [5.2.31], l'algorithme d'adaptation paramétrique de l'équation [5.2.20] devient :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F\phi(t)\varepsilon(t+1) \quad [5.2.34]$$

Cet algorithme dépend de $\varepsilon(t+1)$, qui est une fonction de $\hat{\theta}(t+1)$. Pour pouvoir mettre en œuvre cet algorithme, il faut exprimer $\varepsilon(t+1)$ en fonction de $\varepsilon^o(t+1)$: ($\varepsilon(t+1) = f(\hat{\theta}(t), \phi(t), \varepsilon^o(t+1))$).

L'équation [5.2.32] peut se réécrire :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}(t)^T \phi(t) - [\hat{\theta}(t+1) - \hat{\theta}(t)]^T \phi(t) \quad [5.2.35]$$

Les premiers deux termes du membre droit correspondent à $\varepsilon^o(t+1)$, et de l'équation [5.2.34], on a :

$$\hat{\theta}(t+1) - \hat{\theta}(t) = F\phi(t)\varepsilon(t+1) \quad [5.2.36]$$

ce qui permet d'écrire l'équation [5.2.35] sous la forme :

$$\varepsilon(t+1) = \varepsilon^o(t+1) - \phi(t)^T F \phi(t) \varepsilon(t+1) \quad [5.2.37]$$

d'où on obtient la relation souhaitée entre $\varepsilon(t+1)$ et $\varepsilon^o(t+1)$:

$$\varepsilon(t+1) = \frac{\varepsilon^o(t+1)}{1 + \phi(t)^T F \phi(t)} \quad [5.2.38]$$

et l'algorithme de l'équation [5.2.34] devient :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \frac{F\phi(t)\varepsilon^o(t+1)}{1 + \phi(t)^T F \phi(t)} \quad [5.2.39]$$

qui est un algorithme stable quel que soit le gain F (matrice définie positive). La division par $1 + \phi(t)^T F \phi(t)$ introduit une normalisation qui réduit la sensibilité de l'algorithme par rapport à F et $\phi(t)$.

Le déroulement dans le temps des algorithmes d'estimation récursive peut être résumé ainsi :

1. Avant $t+1$ on dispose de : $u(t), u(t-1), \dots, y(t), y(t-1), \dots, \phi(t), \hat{\theta}(t), F$

2. Avant $t+1$ on calcule : $\frac{F\phi(t)}{1+\phi(t)^T F\phi(t)}$ et $y^0(t+1)$ (donné par [5.2.13]).
3. A l'instant $t+1$ on fait l'acquisition de $y(t+1)$ et on envoie $u(t+1)$.
4. On met en œuvre l'algorithme d'adaptation paramétrique
 - a) On calcule $\varepsilon^0(t+1)$ avec [5.2.15] ;
 - b) On calcule $\hat{\theta}(t+1)$ avec la formule [5.2.39] ;
 - c) (optionnel) On calcule $\varepsilon(t+1)$.
5. On revient à l'étape 1.

5.2.3. Algorithme des moindres carrés

En utilisant l'algorithme du gradient, on minimise à chaque pas $\varepsilon^2(t+1)$ ou plus exactement on se déplace dans la direction de décroissance la plus rapide du critère, avec un pas dépendant du gain d'adaptation F . La minimisation de $\varepsilon^2(t+1)$ à chaque pas, n'entraîne pas nécessairement la minimisation de :

$$\sum_{i=1}^t \varepsilon^2(i)$$

sur un horizon de t pas, comme cela est illustré dans la figure 5.2.3. En effet, dans le voisinage de l'optimum, si le gain n'est pas assez faible, on peut avoir des oscillations autour du minimum. D'autre part, pour avoir une bonne vitesse de convergence au début quand on est loin de l'optimum, il serait souhaitable d'avoir un grand gain d'adaptation. L'algorithme des moindres carrés récursifs offre en fait un tel profil de variation du gain d'adaptation.

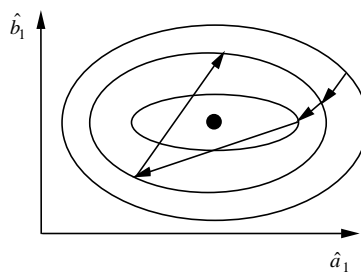


Figure 5.2.3. Evolution d'un algorithme d'adaptation de type gradient

On considère les mêmes équations pour le procédé, le modèle de prédiction et les erreurs de prédiction utilisées dans l'algorithme du gradient, à savoir les équations [5.2.10] à [5.2.17].

L'objectif est de trouver un algorithme récursif de la forme de l'équation [5.2.18] qui minimise le critère des « moindres carrés » :

$$\min_{\hat{\theta}(t)} J(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t [y(i) - \hat{\theta}(t)^T \phi(i-1)]^2 = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \varepsilon^2(i, \hat{\theta}(t)) \quad [5.2.40]$$

Le terme $\hat{\theta}(t)^T \phi(i-1)$ correspond à :

$$\hat{\theta}(t)^T \phi(i-1) = -\hat{a}_1(t)y(i-1) + \hat{b}_1(t)u(i-1) = \hat{y}(i|\hat{\theta}(t)) \quad [5.2.41]$$

C'est donc la prédiction de la sortie à l'instant i ($i \leq t$) basée sur l'estimation des paramètres à l'instant t obtenue à l'aide de t mesures. L'objectif est donc la minimisation de la somme des carrés des erreurs de prédiction.

Dans un premier temps, il s'agit d'estimer un paramètre $\hat{\theta}$ à l'instant t pour qu'il minimise la somme des carrés des écarts entre le procédé et le modèle de prédiction sur un horizon de t mesures. La valeur de $\hat{\theta}(t)$ qui minimise le critère [5.2.40] s'obtient en cherchant la valeur qui annule $\partial J(t)/\partial \theta(t)^4$:

$$\frac{\partial J(t)}{\partial \hat{\theta}(t)} = -2 \sum_{i=1}^t [y(i) - \hat{\theta}(t)^T \phi(i-1)] \phi(i-1) = 0 \quad [5.2.42]$$

De l'équation [5.2.42], tenant compte que :

$$\left[\hat{\theta}(t)^T \phi(i-1) \right] \phi(i-1) = \phi(i-1) \phi(i-1)^T \hat{\theta}(t)$$

on obtient :

$$\left[\sum_{i=1}^t \phi(i-1) \phi(i-1)^T \right] \hat{\theta}(t) = \sum_{i=1}^t y(i) \phi(i-1)$$

4. Il s'agit d'un minimum sous réserve que la dérivée seconde du critère par rapport à $\hat{\theta}(t)$ soit positive, c'est-à-dire : $\frac{\partial^2 J(t)}{\partial \hat{\theta}(t)^2} = 2 \sum_{i=1}^t \phi(i-1) \phi(i-1)^T > 0$ ce qui est en général

le cas pour $t \geq \dim \theta$ (voir aussi section 5.3)

En multipliant à gauche les deux termes de cette équation avec :

$$\left[\sum_{i=1}^t \phi(i-1)\phi(i-1)^T \right]^{-1}$$

il résulte :

$$\hat{\theta}(t) = \left[\sum_{i=1}^t \phi(i-1)\phi(i-1)^T \right]^{-1} \sum_{i=1}^t y(i)\phi(i-1) = F(t) \sum_{i=1}^t y(i)\phi(i-1) \quad [5.2.43]$$

où :

$$F(t)^{-1} = \sum_{i=1}^t \phi(i-1)\phi(i-1)^T \quad [5.2.44]$$

Cet algorithme d'estimation n'est pas récursif. Pour obtenir un algorithme récursif, on considère l'estimation de $\hat{\theta}(t+1)$:

$$\hat{\theta}(t+1) = F(t+1) \sum_{i=1}^{t+1} y(i)\phi(i-1) \quad [5.2.45]$$

$$F(t+1)^{-1} = \sum_{i=1}^{t+1} \phi(i-1)\phi(i-1)^T = F(t)^{-1} + \phi(t)\phi(t)^T \quad [5.2.46]$$

que l'on essaye d'exprimer en fonction de $\hat{\theta}(t)$:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \Delta \hat{\theta}(t+1) \quad [5.2.47]$$

De l'équation [5.2.45], on a :

$$\sum_{i=1}^{t+1} y(i)\phi(i-1) = \sum_{i=1}^t y(i)\phi(i-1) + y(t+1)\phi(t) \pm \phi(t)\phi(t)^T \hat{\theta}(t) \quad [5.2.48]$$

En tenant compte des équations [5.2.43], [5.2.45] et [5.2.46] l'équation [5.2.48] peut se réécrire :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{t+1} y(i)\phi(i-1) &= F(t+1)^{-1}\hat{\theta}(t+1) \\ &= F(t)^{-1}\hat{\theta}(t) + \phi(t)\phi(t)^T \hat{\theta}(t) + \phi(t) \left[y(t+1) - \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \right] \end{aligned} \quad [5.2.49]$$

Mais tenant compte des équations [5.2.46] et [5.2.15], on obtient :

$$F(t+1)^{-1}\hat{\theta}(t+1) = F(t+1)^{-1}\hat{\theta}(t) + \phi(t)\varepsilon^o(t+1) \quad [5.2.50]$$

En multipliant à gauche par $F(t+1)$, il résulte :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t+1)\phi(t)\varepsilon^o(t+1) \quad [5.2.51]$$

L'algorithme d'adaptation de l'équation [5.2.51] a une forme récursive similaire à l'algorithme du gradient donné dans l'équation [5.2.24], avec la différence que la matrice de gain $F(t+1)$ est maintenant variable dans le temps, car elle dépend des mesures (elle corrige automatiquement la direction du gradient et la longueur du pas). Il reste à donner une formule récursive pour $F(t+1)$ à partir de la formule récursive pour $F^{-1}(t+1)$ donnée dans l'équation [5.2.46]. Cela s'obtient en utilisant le *lemme d'inversion matricielle* (donné ci-dessous sous une forme simplifiée).

LEMME.— Soit F une matrice régulière de dimension $(n \times n)$ et ϕ un vecteur de dimension n , alors⁵ :

$$\left(F^{-1} + \phi\phi^T \right)^{-1} = F - \frac{F\phi\phi^T F}{1 + \phi^T F \phi} \quad [5.2.52]$$

On obtient alors des équations [5.2.46] et [5.2.52] :

$$F(t+1) = F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi(t)^T F(t)}{1 + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \quad [5.2.53]$$

et en regroupant les différentes équations, nous donnons ci-après une première formulation de l'algorithme d'adaptation paramétrique (AAP) pour les moindres carrés récurrents (MCR) :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t+1)\phi(t)\varepsilon^o(t+1) \quad [5.2.54]$$

5. Il suffit de multiplier les deux termes par $F^{-1} + \phi\phi^T$ pour vérifier la validité de la formule d'inversion.

$$F(t+1) = F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi(t)^T F(t)}{1 + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \quad [5.2.55]$$

$$\varepsilon^o(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad [5.2.56]$$

Une forme équivalente de cet algorithme s'obtient en introduisant l'expression de $F(t+1)$ donnée par l'équation [5.2.55] dans l'équation [5.2.54]. On obtient alors :

$$\left[\hat{\theta}(t+1) - \hat{\theta}(t) \right] = F(t+1)\phi(t)\varepsilon^o(t+1) = F(t)\phi(t) \frac{\varepsilon^o(t+1)}{1 + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \quad [5.2.57]$$

Mais des équations [5.2.15], [5.2.16] et [5.2.17] et en utilisant aussi [5.2.57] on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t+1) &= y(t+1) - \hat{\theta}(t+1)\phi(t) = y(t+1) - \hat{\theta}(t)\phi(t) - \left[\hat{\theta}(t+1) - \hat{\theta}(t) \right]^T \phi(t) \\ &= \varepsilon^o(t+1) - \phi(t)^T F(t)\phi(t) \frac{\varepsilon^o(t+1)}{1 + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} = \frac{\varepsilon^o(t+1)}{1 + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \end{aligned} \quad [5.2.58]$$

qui exprime la relation entre l'erreur de prédiction *a posteriori* et l'erreur de prédiction *a priori*. En utilisant cette relation dans l'équation [5.2.57] on obtient une forme équivalente de l'algorithme d'adaptation paramétrique des moindres carrés récurrents⁶ :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\phi(t)\varepsilon(t+1) \quad [5.2.59]$$

$$F(t+1)^{-1} = F(t)^{-1} + \phi(t)\phi(t)^T \quad [5.2.60]$$

$$F(t+1) = F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi(t)^T F(t)}{1 + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \quad [5.2.61]$$

6. Cette forme équivalente s'utilise surtout pour l'analyse et la compréhension de l'algorithme.

$$\varepsilon(t+1) = \frac{y(t+1) - \hat{\theta}(t)^T \phi(t)}{1 + \phi(t)^T F(t) \phi(t)} \quad [5.2.62]$$

Pour que l'algorithme des moindres carrés récursifs soit rigoureusement équivalent à l'algorithme non récursif des moindres carrés, il devrait être démarré à l'instant $t_0 = \dim \phi(t)$, car normalement $F(t)^{-1}$ donné par l'équation [5.2.44] devient inversible pour $t = t_0$. En pratique, on démarre l'algorithme à $t = 0$ en posant :

$$F(0) = \frac{1}{\delta} I = (GI)I \quad ; \quad 0 < \delta \ll 1 \quad [5.2.63]$$

une valeur typique étant $\delta = 0.001$ ($GI = 1\ 000$). On peut voir sur l'expression de $F(t+1)^{-1}$ donnée par l'équation [5.2.46] que l'influence de cette erreur initiale décroît avec le temps. Une analyse rigoureuse (à partir de la théorie de la stabilité - voir [LAN 97]) montre néanmoins que pour tout $F(0)$ définie positive ($F(0) > 0$) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t+1) = 0$$

L'algorithme des moindres carrés récursifs est un algorithme à gain d'adaptation décroissant. Ceci se voit très clairement si nous considérons l'estimation d'un seul paramètre. Dans ce cas $F(t)$ et $\phi(t)$ sont des scalaires et l'équation [5.2.61] devient :

$$F(t+1) = \frac{F(t)}{1 + \phi(t)^2 F(t)} \leq F(t)$$

L'algorithme des moindres carrés récursifs donne en fait de moins en moins de poids aux nouvelles erreurs de prédiction, donc aux nouvelles mesures.

En conséquence, ce type de variation du gain d'adaptation ne conviendra pas pour l'estimation des paramètres variables dans le temps. Il faudra donc considérer aussi d'autres profils de variation du gain d'adaptation.

L'algorithme des moindres carrés que nous avons présenté jusqu'ici pour $\hat{\theta}(t)$ et $\phi(t)$ de dimension 2 se généralise pour n'importe quelle dimension résultant de la description des systèmes discrets de la forme :

$$y(t) = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) \quad [5.2.64]$$

où :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_A} q^{-n_A} \quad [5.2.65]$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_B} q^{-n_B} \quad [5.2.66]$$

qui s'écrit encore sous la forme :

$$y(t+1) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t-d-i+1) = \theta^T \phi(t) \quad [5.2.67]$$

où :

$$\theta^T = [a_1, \dots, a_{n_A}, b_1, \dots, b_{n_B}] \quad [5.2.68]$$

$$\phi(t)^T = [-y(t) \dots -y(t-n_A+1), u(t-d) \dots u(t-d-n_B+1)] \quad [5.2.69]$$

Le prédicteur ajustable *a priori* est donné dans le cas général par :

$$\hat{y}^o(t+1) = -\sum_{i=1}^{n_A} \hat{a}_i y(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_B} \hat{b}_i u(t-d-i+1) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad [5.2.70]$$

où :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \dots, \hat{a}_{n_A}(t), \hat{b}_1(t), \dots, \hat{b}_{n_B}(t)] \quad [5.2.71]$$

et, pour l'estimation de $\hat{\theta}(t)$, on utilise l'algorithme donné dans les équations [5.2.54] à [5.2.56] avec la dimension appropriée pour $\hat{\theta}(t)$, $\phi(t)$ et $F(t)$.

5.2.4. Choix du gain d'adaptation

La formule de l'inverse du gain d'adaptation $F(t+1)^{-1}$, donnée par l'équation [5.2.46] (ou [5.2.60]), se généralise en introduisant deux séquences de pondération $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ comme indiqué ci-après :

$$F(t+1)^{-1} = \lambda_1(t)F(t)^{-1} + \lambda_2(t)\phi(t)\phi(t)^T \quad [5.2.72]$$

$$0 < \lambda_1(t) \leq 1 \quad ; \quad 0 \leq \lambda_2(t) < 2 \quad ; \quad F(0) > 0$$

A noter que $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ dans l'équation [5.2.72] ont un effet opposé. $\lambda_1(t) < 1$ tend à augmenter le gain d'adaptation (l'inverse du gain décroît), $\lambda_2(t)$ tend à décroître le gain d'adaptation (l'inverse du gain augmenté). Pour chaque choix des séquences $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ correspond un « profil » de variation du gain d'adaptation et une interprétation en termes de critère d'erreur qui est minimisé par l'AAP⁷.

En utilisant le lemme d'inversion matricielle donné par l'équation [5.2.52], on obtient à partir de l'équation [5.2.72] :

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} \left[F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi(t)^T F(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \right] \quad [5.2.73]$$

Nous donnerons dans ce qui suit un certain nombre de choix possibles pour $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ et leurs interprétations. Ces choix ont été retenus aussi pour le progiciel d'identification WinPIM (Adaptech).

A.1 : gain décroissant (MCR)

Dans ce cas :

$$\lambda_1(t) = \lambda_1 = 1 \quad ; \quad \lambda_2(t) = 1 \quad [5.2.74]$$

et $F(t+1)^{-1}$ est donné par l'équation [5.2.60] qui conduit à un gain d'adaptation décroissant. Le critère minimisé est celui de l'équation [5.2.40].

Ce type de profil convient pour l'identification des systèmes stationnaires (à paramètres constants).

A.2 : facteur d'oubli fixe

Dans ce cas :

$$\lambda_1(t) = \lambda_1 \quad ; \quad 0 < \lambda_1 < 1 \quad ; \quad \lambda_2(t) = \lambda_2 = 1 \quad [5.2.75]$$

Les valeurs typiques pour λ_1 sont : $\lambda_1 = 0.95, \dots, 0.99$.

7. $F(t+1)^{-1}$ donné par l'équation [5.7.72] peut être interprété comme la sortie engendrée par un filtre caractérisé par l'opérateur de transfert $H(q^{-1}) = \lambda_2(t)/(1 - \lambda_1(t)q^{-1})$ dont l'entrée est $\phi\phi^T$.

Le critère minimisé sera :

$$J(t) = \sum_{i=1}^t \lambda_1^{(t-i)} \left[y(i) - \hat{\theta}(t)^T \phi(i-1) \right]^2 \quad [5.2.76]$$

L'effet de $\lambda_1 < 1$ est d'introduire une pondération de plus en plus faible sur les données anciennes ($i < t$). C'est pour cette raison que λ_1 est appelé « facteur d'oubli ». Le poids maximum est donné à la dernière erreur.

Ce type de profil convient pour l'identification des systèmes lentement variables⁸.

A.3 : facteur d'oubli variable

Dans ce cas :

$$\lambda_2(t) = \lambda_2 = 1 \quad [5.2.77]$$

et le facteur d'oubli λ_1 est donné par :

$$\lambda_1(t) = \lambda_0 \lambda_1(t-1) + 1 - \lambda_0 \quad ; \quad 0 < \lambda_0 < 1 \quad [5.2.78]$$

les valeurs typiques étant : $\lambda_1(0) = 0.95, \dots, 0.99$; $\lambda_0 = 0.95, \dots, 0.99$. La relation [5.2.78] conduit à un facteur d'oubli qui asymptotiquement tend vers 1. Le critère minimisé sera :

$$J(t) = \sum_{i=1}^t \left[\sum_{j=1}^{t-1} \lambda_1(j-i) \right] \left[y(i) - \hat{\theta}(t)^T \phi(i-1) \right]^2 \quad [5.2.79]$$

Comme $\lambda_1(t)$ tend vers 1 pour i grand, il résulte uniquement un oubli des données initiales (le gain tend vers un gain décroissant).

Ce type de profil est *très recommandé pour l'identification des systèmes stationnaires*, car il évite une décroissance trop rapide du gain d'adaptation et ceci conduit en général à une accélération de la convergence (maintien d'un gain élevé quand on est loin de l'optimum).

8. En l'absence d'excitation ($\phi(t)\phi(t)^T = 0$), $F(t+1)^{-1}$ tendra vers zéro (car dans ce cas $F(t+1)^{-1} = \lambda_1 F(t)^{-1}$, $\lambda_1 < 1$), ce qui conduira à des gains d'adaptation très grands, situation qui doit être évitée.

A.4 : trace constante

Dans ce cas, $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ sont choisis automatiquement à chaque pas pour assurer une trace constante de la matrice de gain (somme constante des termes diagonaux) :

$$\text{tr}F(t+1) = \text{tr}F(t) = \text{tr}F(0) = nGI \quad [5.2.80]$$

où n est le nombre de paramètres et GI le gain initial (valeurs typiques : $GI=0,1,\dots,4$), la matrice $F(0)$ ayant la forme :

$$F(0) = \begin{bmatrix} GI & & 0 \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ 0 & & GI \end{bmatrix} \quad [5.2.81]$$

Le critère minimisé est de la forme :

$$J(t) = \sum_{i=1}^t f(t,i) \left[y(i) - \hat{\theta}(t)^T \phi(i-1) \right]^2 \quad [5.2.82]$$

où $f(t,i)$ représente le profil d'oubli.

Par cette technique on se déplace à chaque pas dans la direction optimale des MCR, mais on maintient le gain approximativement constant (« regonflage » du gain des MCR).

Les valeurs de $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ se déterminent à partir de l'équation :

$$\text{tr}F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} \text{tr} \left[F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi(t)^T F(t)}{\alpha(t) + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \right] = \text{tr}F(t) \quad [5.2.83]$$

en fixant le rapport $\alpha(t) = \lambda_1(t)/\lambda_2(t)$ (l'équation [5.2.83] est obtenue de l'équation [5.2.73]).

Ce type de profil convient pour l'identification des systèmes à paramètres variables dans le temps.

A.5 : gain décroissant + trace constante

Dans ce cas, on commute de A1 sur A4 quand :

$$\text{tr}F(t) \leq nG \quad ; \quad G = 0.1 \text{ à } 4 \quad [5.2.84]$$

où G est fixé d'avance.

Ce profil convient pour l'identification des systèmes variables dans le temps en absence d'information initiale sur les paramètres.

A.6 : facteur d'oubli variable + trace constante

Dans ce cas, on commute de A3 sur A4 quand :

$$\text{tr}F(t) \leq nG \quad [5.2.85]$$

L'utilisation est la même que pour A5.

A.7 : gain constant (algorithme du gradient amélioré)

Dans ce cas :

$$\lambda_1(t) = \lambda_1 = 1 \quad ; \quad \lambda_2(t) = \lambda_2 = 0 \quad [5.2.86]$$

et donc de l'équation [5.2.72], il résulte :

$$F(t+1) = F(t) = F(0) \quad [5.2.87]$$

On obtient alors l'algorithme d'adaptation du gradient amélioré donné par l'équation [5.2.34] ou l'équation [5.2.39].

On peut utiliser cet algorithme pour l'identification des systèmes stationnaires ou variables dans le temps, mais avec peu de paramètres (≤ 3), et en présence d'un niveau de bruit réduit.

Ce type de gain d'adaptation conduit à des performances inférieures à celles fournies par les profils A1, A2, A3 et A4, mais sa mise en œuvre est plus simple.

Choix du gain initial $F(0)$

Le gain d'adaptation initial $F(0)$ est de la forme donnée par l'équation [5.2.63] respectivement [5.2.81].

En l'absence d'information initiale sur les paramètres à estimer (valeur typique des estimations initiales = 0), on choisit un gain initial (GI) grand pour des raisons qui ont été expliquées au paragraphe 5.2.3 (équation [5.2.63]). Une valeur typique est $GI = 1\ 000$.

Par contre, si l'on dispose d'une estimation initiale des paramètres (résultant par exemple d'une identification antérieure), on choisit un gain initial faible. En général, dans ce cas, $GI \ll 1$.

Comme au fur et à mesure qu'on approche des estimations correctes des paramètres du modèle, le gain d'adaptation décroît (une mesure significative est sa trace), on peut interpréter le gain d'adaptation comme une mesure de la précision de l'estimation (ou de la prédiction). Ceci explique les choix de $F(0)$ proposés plus haut. Notons que sous certaines hypothèses, $F(t)$ est effectivement une mesure de la qualité de l'estimation (covariance du vecteur d'erreur paramétrique) car il représente la covariance du vecteur d'erreur paramétrique $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$ (voir [LAN 01b]). Cette propriété peut donner des indications sur l'évolution d'une procédure d'estimation. Si la trace de $F(t)$ ne décroît pas d'une façon significative, l'estimation des paramètres est en général mauvaise. Ce phénomène apparaît par exemple quand le niveau et le type de commande utilisés ne sont pas appropriés. L'importance de la nature de l'entrée du procédé pour l'identification sera discutée dans le paragraphe suivant.

5.3. Choix de la séquence d'entrée pour l'identification

5.3.1. Le problème

La convergence vers zéro de l'erreur de prédiction $\varepsilon(t)$ n'implique pas dans tous les cas la convergence des paramètres estimés du modèle vers les vrais paramètres du modèle.

Illustrons ceci par un exemple. Soit le modèle échantillonné de procédé décrit par :

$$y(t+1) = -a_1 y(t) + b_1 u(t) \quad [5.3.1]$$

et considérons un modèle estimé décrit par :

$$\hat{y}(t+1) = -\hat{a}_1 y(t) + \hat{b}_1 u(t) \quad [5.3.2]$$

où $\hat{y}(t+1)$ est la sortie prédite par le modèle estimé.

Supposons maintenant que $u(t) = \text{constant}$, et que les paramètres $a_1, b_1, \hat{a}_1, \hat{b}_1$ vérifient la relation suivante :

$$\frac{b_1}{1+a_1} = \frac{\hat{b}_1}{1+\hat{a}_1} \quad [5.3.3]$$

c'est-à-dire que les gains statiques du procédé et du modèle estimé sont égaux sans pour autant que $\hat{b}_1 = b_1$ et $\hat{a}_1 = a_1$.

Sous l'effet de l'entrée constante $u(t) = u$, la sortie du procédé sera donnée par :

$$y(t+1) = y(t) = \frac{b_1}{1+a_1}u \quad [5.3.4]$$

et la sortie du modèle estimé de prédiction sera donnée par :

$$\hat{y}(t+1) = \hat{y}(t) = \frac{\hat{b}_1}{1+\hat{a}_1}u \quad [5.3.5]$$

Mais en tenant compte de la relation [5.3.3], il résulte :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) = 0 \quad \text{pour } u(t) = \text{const} ; \hat{a}_1 \neq a_1 ; \hat{b}_1 \neq b_1 \quad [5.3.6]$$

On conclut donc pour cet exemple que l'application d'une entrée constante ne permet pas de distinguer les deux modèles, car ils ont le même gain statique.

Si l'on représente la caractéristique fréquentielle des deux systèmes, nous obtenons les courbes représentées dans la figure 5.3.1. De cette figure, on voit que pour mettre en évidence la différence entre les deux modèles (c'est-à-dire entre les paramètres), il faut appliquer un signal $u(t) = \sin(\omega t)$ ($\omega \neq 0$) et non pas un signal $u(t) = \text{constant}$.

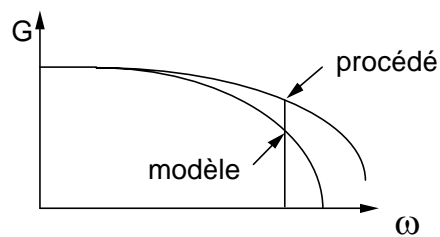


Figure 5.3.1. Caractéristique fréquentielle de deux systèmes ayant le même gain statique

Analysons ce phénomène plus en détail. Quand l'erreur de prédiction est nulle, des équations [5.3.1] et [5.3.2], on obtient :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) = 0 \quad ; \quad -[a_1 - \hat{a}_1]y(t) + [b_1 - \hat{b}_1]u(t) = 0 \quad [5.3.7]$$

A partir de l'équation [5.3.1], nous pouvons exprimer $y(t)$ en fonction de $u(t)$:

$$y(t) = \frac{b_1 q^{-1}}{1 + a_1 q^{-1}} u(t) \quad [5.3.8]$$

En introduisant l'expression de $y(t)$ donnée par l'équation [5.3.8] dans l'équation [5.3.7], on obtient la relation équivalente :

$$\begin{aligned} & \left[(\hat{a}_1 - a_1) b_1 q^{-1} + (b_1 - \hat{b}_1) (1 + a_1 q^{-1}) \right] u(t) \\ & = \left[(b_1 - \hat{b}_1) + q^{-1} (b_1 \hat{a}_1 - a_1 \hat{b}_1) \right] u(t) = 0 \end{aligned} \quad [5.3.9]$$

Nous nous intéressons à trouver la structure de $u(t)$ pour que la vérification de l'équation [5.3.9] conduise à des erreurs paramétriques nulles.

Notons :

$$b_1 - \hat{b}_1 = \alpha_0 \quad ; \quad b_1 \hat{a}_1 - a_1 \hat{b}_1 = \alpha_1 \quad [5.3.10]$$

L'équation [5.3.9] s'écrit alors :

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 q^{-1} \right) u(t) = 0 \quad [5.3.11]$$

qui est une équation récurrente ayant une solution de type exponentielle discrétisée.

Soit :

$$u(t) = z^t = e^{sT_e t} \quad [5.3.12]$$

où T_e est la période d'échantillonnage. L'équation [5.3.11] s'écrit alors :

$$\left(\alpha_0 + z^{-1} \alpha_1 \right) z^t = \left(z \alpha_0 + \alpha_1 \right) z^{t-1} = 0 \quad [5.3.13]$$

et elle sera vérifiée pour z , solution de l'équation caractéristique :

$$z \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \quad [5.3.14]$$

On obtient :

$$z = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = e^{\sigma T_e} \quad \sigma = \text{réel} \quad [5.3.15]$$

et la solution non périodique :

$$u(t) = e^{\sigma T_e t} \quad [5.3.16]$$

conduit à la vérification de l'équation [5.3.11] et respectivement de l'équation [5.3.7] sans que $\hat{a}_1 = a_1$ et $\hat{b}_1 = b_1$. En effet, le signal $u(t) = \text{constant}$, considéré précédemment, correspond à $\sigma = 0$, c'est-à-dire $\alpha_1 = \alpha_0$. Mais :

$$-\alpha_1 = \alpha_0 \Rightarrow b_1 - \hat{b}_1 = a_1 \hat{b}_1 - b_1 \hat{a}_1 \Rightarrow \frac{b_1}{1 + a_1} = \frac{\hat{b}_1}{1 + \hat{a}_1}$$

En d'autres termes, si $u(t) = \text{constant}$, nous n'identifierons que le gain statique.

Il faut donc trouver $u(t)$, tel que $\hat{a}_1 = a_1$ et $\hat{b}_1 = b_1$. Ceci va être obtenu si $u(t)$ n'est pas une solution possible de l'équation [5.3.11].

Soit :

$$u(t) = e^{j\omega T_e t} \quad \text{ou} \quad e^{-j\omega T_e t} \quad [5.3.17]$$

L'équation [5.3.11] devient (pour $u(t) = e^{j\omega T_e t}$) :

$$\left[e^{j\omega T_e} \alpha_0 + \alpha_1 \right] e^{j\omega T_e (t-1)} = 0 \quad [5.3.18]$$

Comme α_0 et α_1 sont réels, $e^{j\omega T_e}$ ne peut être une racine de l'équation caractéristique et il résulte que $\varepsilon(t) = 0$ sera obtenu seulement si :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 0 \Rightarrow \hat{b}_1 = b_1, \quad \hat{a}_1 = a_1 \quad [5.3.19]$$

C'est donc le type d'entrée qui a été proposé précédemment ($\sin \omega t = (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})/2j$) en examinant les caractéristiques fréquentielles des deux modèles. Il faut donc une sinusoïde de fréquence non nulle pour identifier deux paramètres.

Cette approche pour la détermination de l'entrée $u(t)$ permettant de bien identifier les paramètres du modèle s'applique aussi pour les systèmes de la forme générale :

$$y(t) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t-i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t-d-i) \quad [5.3.20]$$

pour lesquels le nombre total des paramètres à identifier est :

$$\text{nombre de paramètres} = n_A + n_B$$

Dans ce cas on peut choisir $u(t)$ comme une somme de p -sinusoïdes de fréquences distinctes :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^p \sin \omega_i T_e t \quad [5.3.21]$$

et la valeur de p , permettant de bien identifier tous les paramètres, est donnée par⁹ :

$$\left. \begin{array}{l} n_A + n_B = \text{pair} \quad p \geq \frac{n_A + n_B}{2} \\ n_A + n_B = \text{impair} \quad p \geq \frac{n_A + n_B + 1}{2} \end{array} \right\} \quad [5.3.22]$$

En d'autres termes, pour bien identifier il faut appliquer une entrée « riche » en fréquences. La solution standard en pratique est fournie par l'utilisation des « séquences binaires pseudo-aléatoires ».

5.3.2. Séquences binaires pseudo-aléatoires (SBPA)

Les séquences binaires pseudo-aléatoires sont des successions d'impulsions rectangulaires modulées en largeur, qui approximent un bruit blanc discret et donc qui ont un contenu *riche* en fréquences.

Elles s'appellent *pseudo-aléatoires* car elles sont caractérisées par une « longueur de séquence » à l'intérieur de laquelle les variations de la largeur des impulsions varient aléatoirement, mais, sur un grand horizon de temps, elles sont périodiques, la période étant définie par la longueur de la séquence.

9. La condition [5.3.22] garantit aussi que $\sum_{i=1}^t \phi(i-1) \phi(i-1)^T$ est une matrice inversible et définie positive pour $t \geq n_A + n_B = \dim \phi$ (voir équations [5.2.42] à [5.2.46]).

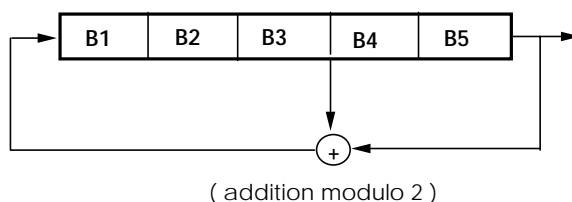


Figure 5.3.2. Génération d'une SBPA de longueur $2^5 - 1 = 31$ périodes d'échantillonnage

Les SBPA sont engendrées à l'aide de registres à décalage (réalisés en matériel ou logiciel) bouclés. La longueur maximale d'une séquence est $2^N - 1$; où N est le nombre de cellules du registre à décalage. La figure 5.3.2 présente la génération d'une SBPA de longueur $31 = 2^5 - 1$ obtenue à l'aide d'un registre à décalage ayant 5 cellules. A noter qu'au moins une des N cellules du registre à décalage doit avoir une valeur logique initiale différente de 0 (en général, on fixe les valeurs logiques initiales de toutes les cellules à 1).

Le tableau 5.3.1 donne pour différents nombres de cellules, la structure des bouclages permettant d'engendrer des SBPA de longueur maximale.

L'annexe A.7. donne un programme de génération de séquences binaires pseudo aléatoires.

Notons aussi un élément caractéristique très important des SBPA : la durée maximale d'une impulsion (t_{im}) de la SBPA est égale à NT_e (où N est le nombre de cellules et T_e la période d'échantillonnage). Cette propriété intervient dans le choix des SBPA pour l'identification.

Nombre de cellules N	Longueur de la séquence $L = 2^N - 1$	Bits additionnés B_i et B_j
2	3	1 et 2
3	7	1 et 3
4	15	3 et 4
5	31	3 et 5
6	63	5 et 6
7	127	4 et 7
8	255	2, 3, 4 et 8
9	511	5 et 9
10	1023	7 et 10

Tableau 5.3.1. Génération des SBPA de longueur maximale

Dimensionnement de la SBPA

Pour bien identifier le gain statique du procédé, il faut que la durée d'au moins une des impulsions (par exemple l'impulsion de durée maximale) soit supérieure au temps de montée t_M du procédé. La durée maximale d'une impulsion étant $N.T_e$, il résulte la condition :

$$t_{im} = N T_e > t_M \quad [5.3.23]$$

qui est illustrée dans la figure 5.3.3.

A partir de la condition [5.3.23], on détermine N et donc la longueur de la séquence $2^N - 1$.

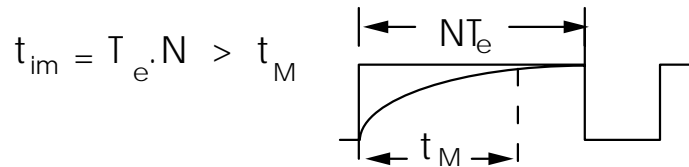


Figure 5.3.3. Choix de la durée maximale d'une impulsion de la SBPA

D'autre part, pour balayer tout le spectre de fréquences, il faut que la longueur d'un essai soit au moins égale à la longueur de la séquence. Dans beaucoup de cas, on choisit la durée de l'essai (L) égale à la longueur de la séquence. Si la durée de l'essai est spécifiée, il faut donc s'assurer que :

$$2^{N-1} T_e < L \quad ; \quad L = \text{durée de l'essai} \quad [5.3.24]$$

A noter que la condition [5.3.23] peut conduire à des valeurs assez grandes de N correspondant à des longueurs de séquence de durée prohibitive soit parce que T_e est très grand, soit parce que le système à identifier risque d'évoluer pendant la durée de l'essai.

C'est la raison pour laquelle dans beaucoup de situations pratiques, on choisit comme fréquence d'horloge pour la SBPA un sous-multiple de la fréquence d'échantillonnage. Si :

$$f_{SBPA} = \frac{f_e}{p} \quad ; \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad [5.3.25]$$

alors la condition [5.2.23] devient :

$$t_{im} = pNT_e > t_M \quad [5.3.26]$$

Cette approche est plus intéressante que l'allongement de la longueur de la séquence (augmentation de N). En effet, si on passe de N à $N' = N+1$, la durée maximale d'une impulsion passe de $N T_e$ à $(N+1) T_e$ mais la durée de la séquence double $L' = 2L$. Par contre si on choisit $f_{SBPA} = f_c/2$, la durée maximale d'une impulsion passe de NT_e à $2NT_e$ pour une durée de la séquence doublée $L' = 2L$. De la comparaison des deux approches, il résulte que la deuxième approche (division de fréquence) permet d'obtenir une impulsion de durée plus grande pour une durée identique de la séquence et donc de l'essai. Si on note par p l'entier diviseur de fréquence, on a dans le cas de la division de la fréquence d'horloge ($t_{im} = \text{durée de l'impulsion maximale}$) :

$$t_{im} = pNT_e \quad ; \quad L' = pL = p(2^{N-1})T_e \quad ; \quad p = 1,2,3,\dots$$

Dans le cas de l'augmentation du nombre de registres N par $p-1$, sans changer la fréquence d'horloge, on a :

$$t_{im} = (N + p - 1)T_e \quad ; \quad L' = (2^{p-1})L \quad ; \quad p = 1,2,3,\dots$$

Notons que l'utilisation d'un diviseur de fréquence pour la fréquence d'horloge de la SBPA va augmenter la densité spectrale de la séquence en basses fréquences (but recherché) mais va réduire la bande de fréquence correspondant à une densité spectrale d'énergie constante.

A titre d'exemple, les densités spectrales des séquences binaires pseudo-aléatoires engendrées avec $N = 8$, pour $p = 1,2,3$ sont représentées dans la figure 5.3.4. On peut observer que pour $p > 1$ l'énergie du signal est réduite en hautes fréquences mais augmentée en basses fréquences. Par ailleurs, pour $p = 3$ il y a un trou à $f_c/3$ (le signal ne contient pas la sinusoïde de fréquence $f_c/3$).

En général ceci ne va pas affecter la qualité de l'identification soit parce que le procédé qui doit être identifié a une bande passante réduite par rapport à la fréquence d'échantillonnage, soit parce que l'effet de la réduction du rapport signal/bruit dans les hautes fréquences peut être compensé par l'utilisation des techniques d'identification appropriées. Néanmoins il est recommandé de choisir $p \leq 4$ (voir [LAN 97, LAN 01b]).

Choix de l'amplitude de la SBPA

L'amplitude de la SBPA peut être très faible, mais elle doit être supérieure au niveau du bruit résiduel. Si le rapport signal/bruit est trop faible, il faut allonger la longueur de l'essai pour pouvoir obtenir une bonne estimation des paramètres.

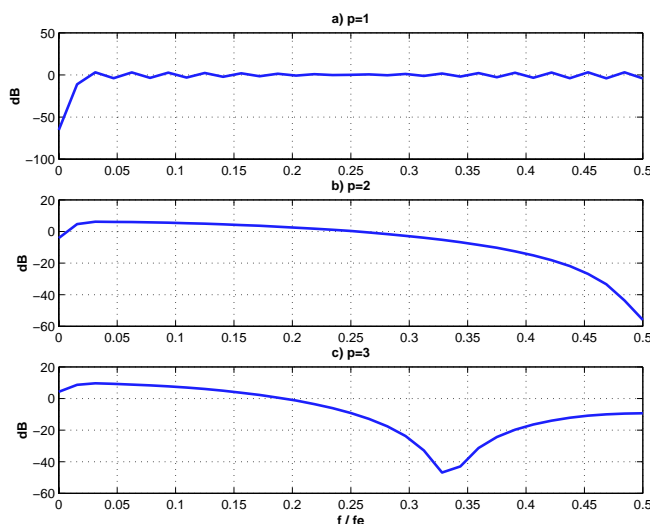


Figure 5.3.4. Densité spectrale pour une SBPA a) $N = 8, p = 1$; b) $N = 8, p = 2$; c) $N = 8, p = 3$

Notons que, dans de nombreuses applications l'augmentation significative du niveau de la SBPA n'est pas souhaitable à cause du caractère non linéaire des procédés à identifier (nous nous intéressons à l'identification d'un modèle linéaire autour d'un point de fonctionnement).

5.4. Effets des perturbations aléatoires sur l'identification

La sortie mesurée des procédés est en général bruitée. Cela est dû soit à l'effet des perturbations aléatoires agissant à différents endroits du procédé, soit à des bruits de mesure. Ces perturbations à caractère aléatoire sont modélisées souvent par des modèles ARMA, le procédé plus la perturbation étant modélisés par un modèle ARMAX (voir le chapitre 4, section 4.1, pour la description des perturbations aléatoires).

Ces perturbations introduisent des erreurs dans l'identification des paramètres des modèles du procédé quand on utilise l'algorithme des moindres carrés (récursif ou non récursif). Ce type d'erreur s'appelle *biais* des paramètres.

Avant de présenter les algorithmes permettant d'éliminer le biais sur les paramètres estimés, analysons d'abord l'effet des perturbations aléatoires sur l'algorithme des moindres carrés.

Remplaçons l'équation du modèle du procédé [5.2.67] par :

$$y(t+1) = \theta^T \phi(t) + w(t) \quad [5.4.1]$$

ou $w(t)$ représente l'effet du bruit de mesure (supposé stationnaire, de valeur moyenne nulle, de variance finie et indépendant de $u(t)$).

En introduisant cette expression de $y(t)$ dans [5.2.43] on obtient pour un nombre de données N :

$$\hat{\theta}(N) = \theta + \left[\sum_{t=1}^N \phi(t-1)\phi(t-1)^T \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \phi(t-1)w(t) \right] \quad [5.4.2]$$

En multipliant et en divisant par N le deuxième terme du membre droit on obtient :

$$\hat{\theta}(N) = \theta + \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi(t-1)\phi(t-1)^T \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi(t-1)w(t) \right] \quad [5.4.3]$$

On s'intéresse aux propriétés de $\hat{\theta}(N)$ quand $N \rightarrow \infty$ et on souhaite établir les conditions permettant d'obtenir une estimation asymptotiquement non-biaisée ($\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}(N) = \theta$).

En examinant l'équation [5.4.3], comme $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^N \phi(t-1)\phi(t-1)^T$ est supposée non singulière (le système est correctement excité, voir section 5.3) il résulte que la condition pour obtenir une estimation asymptotiquement non biaisée est :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-1} \phi(t-1)w(t) \right] = E\{\phi(t-1)w(t)\} = 0 \quad [5.4.4]$$

Donc on obtiendra des estimations paramétriques asymptotiquement non biaisée uniquement si $\phi(t-1)$ et $w(t)$ sont non corrélés. Malheureusement, ceci n'aura lieu que dans le cas où $w(t) = e(t) = \text{bruit blanc}$. En effet, de l'équation [5.2.67] il résulte que $y(t)$ dépend de $w(t)$ et respectivement de $\phi(t-1)$ qui contient $y(t-1)$, $y(t-2)$,..., $y(t-n_A)$ est une fonction de $w(t-1)$, $w(t-2)$,..., $w(t-n_A)$. Donc :

$$\phi(t-1)^T = f(w(t-1), w(t-2), \dots, w(t-n_A), \dots) \quad [5.4.5]$$

La condition [5.4.4] devient alors :

$$E\{w(t-i)w(i)\} = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n_A \quad [5.4.6]$$

et c'est uniquement un bruit blanc qui a la propriété [5.4.6] (voir paragraphe 5.4.1).

Ceci indique clairement que l'utilisation de l'algorithme des moindres carrés conduira à une estimation non biaisée uniquement dans le cas très peu rencontré dans la pratique où $w(t) = e(t) = \text{bruit blanc}$.

En particulier l'estimation des paramètres sera biaisée si le procédé + perturbation est modélisé par un processus ARMAX qui est très représentatif pour de nombreuses situations rencontrées en pratique.

En effet, soit :

$$y(t+1) = -a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t) + e(t+1)$$

On a alors :

$$w(t) = c_1 e(t-1) + e(t);$$

$$w(t-1) = c_1 e(t-2) + e(t-1)$$

et :

$$E\{w(t)w(t-1)\} = c_1 E\{e(t-1)^2\} + E\{e(t)e(t-1)\} + c_1 E\{e(t-2)e(t)\} \\ + c_1^2 E\{e(t-1)e(t-2)\} = c_1 E\{e(t-1)^2\} = c_1 \sigma^2 \neq 0$$

Supposons maintenant que nous connaissons la valeur exacte de θ , à savoir $\hat{\theta} = \theta$ et nous souhaitons que l'algorithme d'estimation laisse inchangée (asymptotiquement) la valeur estimée. Pour $\hat{\theta} = \theta$ l'équation du prédictor des moindres carrés s'écrit :

$$\hat{y}(t+1|\theta) = \theta^T \phi(t) \quad [5.4.7]$$

et l'erreur de prédiction devient :

$$\varepsilon(t+1|\theta) = y(t+1) - \hat{y}(t+1|\theta) = w(t+1) \quad [5.4.8]$$

Il résulte alors de l'équation [5.4.4] que pour avoir $\hat{\theta}(N) = \theta$ quand $t \rightarrow \infty$ il y a une condition nécessaire qui doit être satisfaite pour $\hat{\theta}(t) = \theta = \text{const}$ (en remplaçant $w(t)$ par $\varepsilon(t, \theta)$ en [5.4.4])¹⁰ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \phi(t-1, \theta) \varepsilon(t, \theta) \right] = E\{\phi(t-1, \theta) \varepsilon(t, \theta)\} = 0 \quad [5.4.9]$$

Pour éliminer le *biais*, il faudra donc choisir d'autres vecteurs d'observation, d'autres types de prédicteurs et d'autres erreurs d'adaptation afin que :

$$E\{\phi(t) \varepsilon(t+1)\} = 0 \quad \text{pour} \quad \hat{\theta} \equiv \theta \quad [5.4.10]$$

Deux critères ont été retenus pour engendrer des algorithmes satisfaisant la condition [5.4.10] et conduisant asymptotiquement à des estimations sans biais des paramètres :

- 1) $\varepsilon(t+1)$ (ou $v(t+1) = \text{erreur d'adaptation}$) est un bruit blanc pour $\hat{\theta} \equiv \theta$;
- 2) $\phi(t)$ et $\varepsilon(t+1)$ (ou $v(t+1)$) sont non corrélés (ou indépendants) pour $\hat{\theta} \equiv \theta$.

C'est l'élimination du biais sur les paramètres estimés en présence de perturbations qui est à l'origine du développement de la plupart des méthodes d'identification.

5.5. Structure des méthodes d'identification récursives

Toutes les méthodes d'identification récursives correspondent au schéma de principe donné dans la figure 5.5.1.

10. La notation $\phi(t-1, \theta)$ et $\varepsilon(t, \theta)$ indique que ces variables ont été obtenues pour un vecteur fixe des paramètres estimés θ .

Elles utilisent toutes la même structure pour l'algorithme d'adaptation paramétrique (AAP) avec les différents choix possibles pour le « gain d'adaptation » :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\Phi(t)\varepsilon(t+1) \quad [5.5.1]$$

$$F^{-1}(t+1) = \lambda_1(t)F(t) + \lambda_2\Phi(t)\Phi(t)^T \quad [5.5.2]$$

$$0 < \lambda_1(t) \leq 1 ; 0 \leq \lambda_2(t) < 2 ; F(0) > 0$$

$$\varepsilon(t+1) = \frac{\varepsilon^0(t+1)}{1 + \Phi(t)^T F(t)\Phi(t)} \quad [5.5.3]$$

où $\varepsilon(t+1)$ et $\varepsilon^0(t+1)$ sont respectivement les erreurs de prédiction *a posteriori* et *a priori*, $\Phi(t)$ est le vecteur des observations, $F(t)$ est le gain d'adaptation et $\hat{\theta}(t)$ représente le vecteur des paramètres estimés.

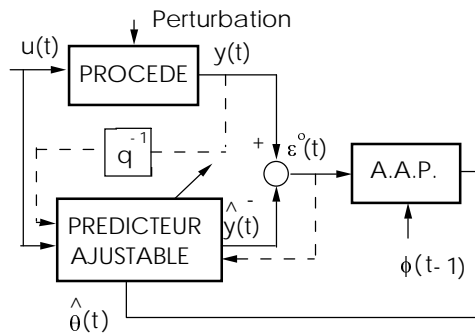


Figure 5.5.1. Structure générale des méthodes d'identification récursives

Les méthodes d'identification se différencient par :

- la structure du prédicteur,
- la nature des composantes du vecteur des observations (ϕ),
- la dimension du vecteur des paramètres ajustables $\hat{\theta}(t)$ et du vecteur des observations $\phi(t)$,
- la manière d'engendrer les erreurs de prédiction et respectivement les erreurs d'adaptation.

Les propriétés de convergence, en présence de perturbations aléatoires, dépendront des différents choix indiqués plus haut.

Toutes ces méthodes d'identification se classent en deux catégories, d'après le critère considéré pour leur développement (afin d'obtenir des paramètres estimés non biaisés).

I) méthodes d'identification basées sur le blanchissement de l'erreur de prédiction (ε) ;

II) méthodes d'identification basées sur la décorrélation du vecteur d'observation (ϕ) et de l'erreur de prédiction (ε) ($E\{\phi(t) \varepsilon(t+1)\} \neq 0$).

Comme les différentes méthodes ont été développées afin de vérifier les deux critères mentionnés, le modèle identifié par une méthode doit être validé en utilisant le critère qui a servi pour définir l'objectif de la méthode. Il résulte que nous aurons deux techniques de validation permettant de vérifier, suivant le cas, les deux critères.

Si l'on tient compte plus en détail de la structure du prédicteur et du choix du vecteur des observations, on peut distinguer trois types de méthodes :

– les méthodes dites *d'équation d'erreur* (moindres carrés récursifs et les différentes extensions : moindres carrés étendus, moindres carrés généralisés, maximum de vraisemblance récursif). Chaque méthode tend à obtenir une erreur de prédiction « blanche » (bruit blanc) pour une classe de modèles de perturbation en modélisant la perturbation ;

– les méthodes dites de *variable instrumentale* (à observations retardées ou à modèle auxiliaire). Chaque méthode tend à obtenir $E\{\phi(t) \varepsilon(t+1)\} = 0$ par la modification du vecteur d'observation $\phi(t)$ de l'algorithme des moindres carrés ;

– les méthodes dites *d'erreur de sortie*. Ces méthodes tendent à obtenir asymptotiquement soit $E\{\phi(t) \varepsilon(t+1)\} = 0$, soit le blanchissement de l'erreur d'adaptation, par la modification du prédicteur et de la méthode d'obtention de l'erreur d'adaptation.

On peut répertorier quatre structures de modèles de représentation de l'ensemble « procédé + perturbation », qui sont représentées dans la figure 5.5.2.

Ces quatre structures sont :

$$S1 : \quad A(q^{-1}) y(t) = q^{-d} B(q^{-1}) u(t) + e(t)$$

La méthode à utiliser pour cette structure est :

1 – Moindres carrés récursifs (MCR)

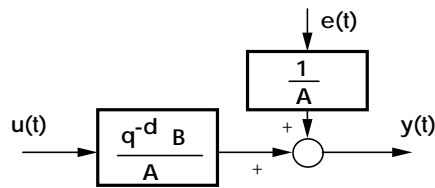
$$S2 : \quad A(q^{-1}) y(t) = q^{-d} B(q^{-1}) u(t) + A(q^{-1}) w(t)$$

Cette structure correspond à un modèle de la forme :

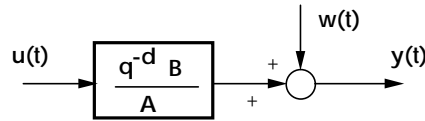
$$y(t) = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) + w(t)$$

où $w(t)$ est une perturbation non modélisée, sur laquelle on fait uniquement les hypothèses qu'elle est de valeur moyenne nulle, puissance finie et *indépendante de l'entrée*.

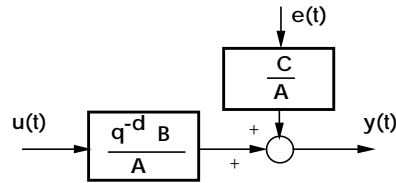
S1 : $A(q^{-1}) y(t) = q^{-d} B(q^{-1}) u(t) + e(t)$



S2 : $A(q^{-1}) y(t) = q^{-d} B(q^{-1}) u(t) + A(q^{-1}) w(t)$



S3 : $A(q^{-1}) y(t) = q^{-d} B(q^{-1}) u(t) + C(q^{-1}) e(t)$



S4 : $A(q^{-1}) y(t) = q^{-d} B(q^{-1}) u(t) + [1/C(q^{-1})]e(t)$

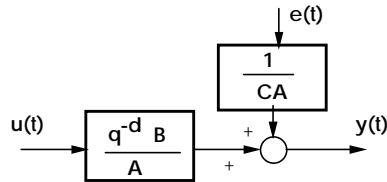


Figure 5.5.2. Structure des modèles « procédé + perturbation ». ($A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots$, $B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \dots$, $C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots$)

Les méthodes qui peuvent être utilisées pour cette structure sont :

- 1 – Variable instrumentale à entrées retardées (VIOR) ;
- 2 – Variable instrumentale à modèle auxiliaire (VIMA) ;
- 3 – Erreur de sortie à compensateur fixe (ESCF) ;
- 4 – Erreur de sortie avec filtrage des observations (ESFO) ;
- 5 – Erreur de sortie avec filtrage adaptatif des observations (ESFAO),

$$S3 : \quad A(q^{-1}) y(t) = q^{-d} B(q^{-1}) u(t) + C(q^{-1}) e(t)$$

Les méthodes qui peuvent être utilisées pour cette structure sont :

- 1 – Moindres carrés étendus (MCE),
- 2 – Maximum de vraisemblance récursif (MVR),
- 3 – Erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu (ESMPE)

$$S4 : \quad A(q^{-1}) y(t) = q^{-d} B(q^{-1}) u(t) + [1/C(q^{-1})] e(t)$$

La méthode à utiliser pour cette structure est :

- 1 – Moindres carrés généralisés (MCG)

Il n'y a pas de structure unique « procédé + perturbation » pour décrire toutes les situations rencontrées en pratique.

En pratique, on peut dire que le modèle 3 correspond à un peu moins de deux tiers des situations, le modèle 2 correspond à approximativement un tiers des situations et les modèles 1 et 4 correspondent aux quelques pourcentages restants.

A noter qu'aucune méthode d'identification ne peut être utilisée avec toutes les structures possibles « procédé + perturbation » pour obtenir toujours des estimations paramétriques non biaisées.

Comme il n'existe pas une structure unique « modèle + perturbation » pour décrire toutes les situations qui peuvent être rencontrées en pratique, et que par ailleurs il n'existe pas une méthode d'identification unique permettant d'obtenir toujours des estimations non biaisées des paramètres, il résulte que, pour effectuer une bonne identification d'un procédé, un système interactif d'identification est nécessaire. Un tel système doit fournir :

- différentes structures « modèle + perturbation »,
- différentes méthodes d'identification et AAP,
- des méthodes de validation des modèles identifiés,
- un système d'acquisition et traitement de données entrée/sortie (incluant la génération de la SBPA),

- des outils d'analyse de modèles,
- un système de visualisation graphique.

WinPIM (Adaptech) : progiciel interactif d'identification des modèles paramétriques des systèmes et signaux, répond aux critères indiqués plus haut. Il intègre :

- 4 structures de modèle « procédé + perturbation »,
- 9 méthodes d'identification (avec présélection en fonction de la structure choisie),
- 7 types de « gain d'adaptation »,
- 2 techniques de validation (en fonction de la structure et de la méthode d'identification), que nous avons mentionnés précédemment,

ainsi que :

- traitement des données entrée/sortie + génération SBPA,
- outils d'analyse des modèles (réponses fréquentielles et temporelles, pôles et zéros, etc.) et de simulation,
- système graphique.

WinPIM constitue une base de connaissances très complète et d'utilisation simple pour l'identification de systèmes et signaux. Il a été utilisé d'une manière extensive depuis 1984 (anciennes versions PIM sous MS-DOS jusqu'en 1994) pour l'identification de nombreux procédés industriels ainsi que pour l'enseignement. Son interactivité (continuellement améliorée) et le guidage fourni par le logiciel ont permis son utilisation avec succès par des utilisateurs ayant une formation réduite aux techniques d'identification des procédés (voir aussi annexe A.5).

L'acquisition de données pour l'identification peut se faire avec le logiciel WinTrac [ADA 97a] ou avec d'autres systèmes d'acquisition temps réel permettant l'envoi d'une commande de type SBPA.

D'autres logiciels d'identification interactifs existent, citons par exemple la boîte à outils « Identification » (Matlab) [MAT 98].

Des routines correspondant aux différentes méthodes d'identification sont disponibles sous Scilab et Matlab (voir annexe A.6 et <http://www-lag.ensieg.inpg.fr/bookIC>).

5.6. Conclusion

Dans ce chapitre, les éléments de base de l'identification des modèles dynamiques ont été présentés.

L'identification des systèmes comporte quatre étapes :

- 1) acquisition des entrées/sorties sous un protocole d'expérimentation ;
- 2) choix ou estimation de la structure du modèle (complexité) ;
- 3) estimation des paramètres du modèle ;
- 4) validation du modèle identifié (structure et valeurs des paramètres).

Des algorithmes d'identification récursifs ou non récursifs peuvent être utilisés pour l'estimation des paramètres d'un modèle à partir des données entrée/sortie. La préférence a été donnée aux algorithmes récursifs pour différentes raisons parmi lesquelles nous mentionnerons : (i) estimation des paramètres du modèle au fur et à mesure de l'évolution du procédé (ii) économie de mémoire et de puissance de calcul, (iii) capacité d'identification en temps réel.

Le cœur des méthodes d'identification récursives est *l'algorithme d'adaptation paramétrique* (AAP qui a la forme :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t+1)\phi(t)\varepsilon^o(t+1)$$

où $\hat{\theta}$ est le vecteur des paramètres estimés, et $F(t+1)\phi(t)\varepsilon^o(t+1)$ représente le terme de correction à chaque pas.

F est le *gain d'adaptation* (constant ou variable dans le temps), ϕ est le *vecteur des observations* (ou des mesures) et ε^o est *l'erreur de prédiction* (ou en général *l'erreur d'adaptation*) c'est-à-dire la différence entre la sortie mesurée du procédé et la sortie prédite.

Différents choix sont possibles pour la séquence des gains d'adaptation en fonction du type de problème d'identification à résoudre (exemple : procédés à paramètres constants ou variables, disponibilité ou non d'une estimation initiale des paramètres).

L'unicité des paramètres identifiés dépend des caractéristiques du signal d'entrée. Pour obtenir un jeu unique de paramètres dans le cas de l'identification d'un modèle de procédé caractérisé par une fonction de transfert irréductible, le signal d'entrée doit contenir un nombre de composantes sinusoïdales distinctes, supérieur à la moitié du nombre des paramètres à identifier.

En pratique, on utilise systématiquement comme signal d'entrée pour l'identification les *séquences binaires pseudo-aléatoires* (SBPA) qui approchent le bruit blanc discret.

Les perturbations aléatoires qui entachent la sortie mesurée du procédé peuvent causer un *biais* sur l'estimation des paramètres. Pour différents types de perturbations, il existe des méthodes appropriées d'identification récursive assurant asymptotiquement une estimation non biaisée des paramètres.

Les différentes méthodes d'identification récursive disponibles utilisent la même structure pour l'AAP. Elles se différencient par :

- la structure du prédicteur,
- la nature des composantes du vecteur des observations (ϕ),
- la dimension du vecteur des paramètres ajustables $\hat{\theta}(t)$ et du vecteur des observations $\phi(t)$,
- la manière d'engendrer les erreurs de prédictions (ou les erreurs d'adaptation).

Ces méthodes d'identification peuvent être regroupées en deux catégories.

1) méthodes d'identification basées sur le blanchissement de l'erreur de prédiction ;

2) méthodes d'identification basées sur la décorrélation du vecteur des observations et de l'erreur de prédiction.

Il n'y a pas de structure unique *procédé + perturbation* pour décrire toutes les situations rencontrées en pratique, et il n'y a pas non plus une méthode unique d'identification donnant dans toutes les situations des estimations non biaisées.

Pour identifier effectivement un modèle de procédé, un système interactif d'identification est nécessaire. Il doit comporter :

- différentes structures « modèle + perturbation »,
- différentes méthodes d'identification et AAP,
- des méthodes de validation de modèles identifiés,
- un système d'acquisition et traitement des données entrée/sortie (incluant la génération de SBPA),
- des outils d'analyse des modèles,
- un système de visualisation graphique.

5.7. Bibliographie

- [ADA 96] ADAPTECH, *WinPIM – Progiciel d’identification des modèles de procédés*, Adaptech, St. Martin d’Hères, France, 1996.
- [ADA 97] ADAPTECH, *WinTrac – Progiciel d’acquisition et de régulation numérique RST temps réel*, Adaptech, St. Martin d’Hères, France, 1997.
- [EYK 74] EYKHOFF P., *System Identification: Parameter and State Estimation*, John Wiley, Londres, 1974.
- [GOO 77] GOODWIN G.C., PAYNE R.L., *Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis*, Academic Press, New York, 1977.
- [GOO 84] GOODWIN G.C., SIN K.S., *Adaptive Filtering Prediction and Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
- [ISE 81] ISERMANN R. (Ed.), « Special Issue on System Identification », *Automatica*, vol. 17, n° 1, 1981.
- [LAN 79] LANDAU I.D., *Adaptive Control - The model reference approach*, Dekker, New York, 1979.
- [LAN 84] LANDAU I.D., « A Feedback System Approach to Adaptive filtering », *IEEE Trans. on Information Theory*, avril 1984.
- [LAN 86] LANDAU I.D., M’SIRDI N., M’SAAID M., « Techniques de modélisation récursives pour l’analyse spectrale paramétrique adaptative », *Traitement du Signal*, vol. 3, p. 183-204, 1986.
- [LAN 97] LANDAU I.D., LOZANO R., M’SAAID M., *Adaptive Control*, Springer, Londres, 1997.
- [LAN 01a] LANDAU I.D., « Les bases de l’identification des systèmes », dans *Identification des Systèmes*, I.D. Landau, A. Bensançon-Voda (Ed.), Hermès, Paris, 2001.
- [LJU 83] LJUNG L., SÖDERSTRÖM T., *Theory and Practice of Recursive Identification*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1983.
- [LJU 99] LJUNG L., *System Identification - Theory for the User*, 2^e édition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1999.
- [MAT 98] MATHWORKS, *Identification toolbox for Matlab*, The Mathworks Inc., Mass. Etats-Unis, 1998.
- [SÖD 89] SÖDERSTRÖM T., STOICA P., *System Identification*, Prentice Hall International, Hertfordshire, 1989.

Chapitre 6

Méthodes d'identification

Ce chapitre présente les deux classes de méthodes d'identification à savoir :

- méthodes basées sur le blanchissement de l'erreur de prédiction,*
- méthodes basées sur la décorrélation du vecteur d'observation et de l'erreur de prédiction,*

sous leur forme récursive. En outre, il décrit les méthodes correspondantes de validation des modèles identifiés. Les méthodes d'estimation de l'ordre des modèles à identifier sont présentées dans la partie finale du chapitre.

6.1. Méthodes d'identification basées sur le blanchissement de l'erreur de prédiction (type I)

Les méthodes d'identification récursive suivantes entrent dans cette catégorie :

- Moindres carrés récursifs (MCR) ;
- Moindres carrés étendus (MCE) ;
- Maximum de vraisemblance récursifs (MVR) ;
- Erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu (ESMPE) ;
- Moindres carrés généralisés (MCG).

6.1.1. Moindres carrés récursifs (MCR)

La méthode des moindres carrés récursifs a été présentée en détail dans le chapitre 5, paragraphe 5.2.3.

L'analyse en présence de perturbations aléatoires a été présentée dans le paragraphe 5.4. Rappelons que la méthode des moindres carrés récursifs donne des estimations non biaisées uniquement pour des modèles « procédé + perturbation » de la forme (structure S1) :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + e(t) \quad [6.1.1]$$

c'est-à-dire pour un modèle de perturbation avec $C(q^{-1}) = 1$ dans l'équation des modèles ARMAX.

6.1.2. Moindres carrés étendus (MCE)

Cette méthode a été développée pour pouvoir identifier sans biais des modèles « procédé + perturbation » de la forme (structure S3) :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t) \quad [6.1.2]$$

L'idée est d'identifier simultanément le modèle de procédé et le modèle de la perturbation, pour pouvoir obtenir une erreur de prédiction (adaptation) asymptotiquement « blanche ».

Nous présenterons la méthode à l'aide d'un exemple. Soit le modèle « procédé + perturbation » :

$$y(t+1) = -a_1y(t) + b_1u(t) + c_1e(t) + e(t+1) \quad [6.1.3]$$

Supposons les paramètres connus, et construisons un prédicteur qui donnera une erreur de prédiction blanche :

$$\hat{y}(t+1) = -a_1y(t) + b_1u(t) + c_1e(t) \quad [6.1.4]$$

Ce prédicteur minimise par ailleurs la variance de l'erreur de prédiction $E\{[y(t+1) - \hat{y}(t+1)]^2\}$ (voir chapitre 4 paragraphe 4.1.4).

L'erreur de prédiction est donnée par :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) = e(t+1) \quad [6.1.5]$$

Ceci permet de réécrire l'équation [6.1.4] sous la forme :

$$\hat{y}(t+1) = -a_1y(t) + b_1u(t) + c_1\varepsilon(t) \quad [6.1.6]$$

Dans le cas des paramètres inconnus, l'équation du prédicteur ajustable sera donnée par l'équation [6.1.6] dans laquelle on remplace les paramètres inconnus par leurs estimations. Le prédicteur ajustable *a priori* aura la forme :

$$\hat{y}^o(t+1) = -\hat{a}_1(t)y(t) + \hat{b}_1(t)u(t) + \hat{c}_1(t)\varepsilon(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad [6.1.7]$$

où :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t), \hat{c}_1(t)] \quad ; \quad \phi(t)^T = [-y(t), u(t), \varepsilon(t)] \quad [6.1.8]$$

Le prédicteur ajustable *a posteriori* sera donné par :

$$\hat{y}(t+1) = -\hat{a}_1(t+1)y(t) + \hat{b}_1(t+1)u(t) + \hat{c}_1(t+1)\varepsilon(t) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t)^T \quad [6.1.9]$$

L'erreur de prédiction *a posteriori* $\varepsilon(t+1)$ est donnée par :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) \quad [6.1.10]$$

et l'erreur de prédiction *a priori* est donnée par :

$$\varepsilon^o(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^o(t+1) \quad [6.1.11]$$

Avec le prédicteur ajustable donné par l'équation [6.1.7], on a ramené la formulation du problème d'identification simultanée du procédé et de la perturbation à une formulation de type moindres carrés, considérée dans le paragraphe 5.2.3.

L'algorithme d'adaptation paramétrique (AAP) donné dans le paragraphe 5.5 (équations [5.5.1] à [5.5.3]) sera utilisé avec $\hat{\theta}(t)$ et $\Phi(t) = \phi(t)$ donné par [6.1.8]. Tous les profils de « gain d'adaptation » peuvent être utilisés.

Par rapport aux moindres carrés simples, le nombre de paramètres à estimer est plus grand. $\hat{\theta}(t)$ comprend en plus les coefficients de $C(q^{-1})$. Bien entendu, le vecteur des observations aura aussi une dimension plus grande. Il contient en plus les erreurs de prédiction *a posteriori* $\varepsilon(t)$, $\varepsilon(t-1)$... $\varepsilon(t-n_C+1)$.

Dans le cas général, le vecteur des paramètres estimés et le vecteur des observations seront de la forme :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t) \dots \hat{a}_{n_A}(t), \hat{b}_1(t) \dots \hat{b}_{n_B}(t), \hat{c}_1(t) \dots \hat{c}_{n_C}(t)]$$

$$\Phi(t)^T = [-y(t) \dots -y(t-n_A+1), u(t-d) \dots u(t-d-n_B+1), \varepsilon(t) \dots \varepsilon(t-n_C+1)]$$

En présence d'une perturbation aléatoire correspondant au modèle ARMAX et avec un gain d'adaptation décroissant asymptotiquement, $\varepsilon(t)$ tend asymptotiquement vers un bruit blanc, ce qui garantit une estimation non biaisée des paramètres de $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ (si l'entrée est suffisamment riche)¹.

Néanmoins, cette convergence est sujette à une condition suffisante (mais pas nécessaire) :

$$\frac{1}{C(z^{-1})} - \frac{\lambda_2}{2} ; \quad 2 > \lambda_2 \geq \max \lambda_2(t) \quad [6.1.12]$$

est une fonction de transfert strictement réelle positive. Une fonction de transfert *strictement réelle positive* est caractérisée par les deux propriétés suivantes : (i) elle est asymptotiquement stable, (ii) la partie réelle de la fonction de transfert est positive à toutes les fréquences. Ce concept est illustré pour le système continu dans la partie supérieure de la figure 6.1.1 et pour les systèmes discrets dans la partie inférieure de la figure 6.1.1.

La non-convergence éventuelle de la méthode pour certaines valeurs de $C(q^{-1})$ et pour certains types de signaux d'entrée peut s'expliquer par la violation de cette condition.

6.1.3. Maximum de vraisemblance récursif (MVR)

C'est une amélioration de la méthode des moindres carrés étendus. Au lieu d'utiliser dans l'algorithme d'adaptation paramétrique $\phi(t)$ donné par l'équation [6.1.8], on le filtre par $1/\hat{C}(t, q^{-1})$ où $\hat{C}(t, q^{-1})$ est une estimation à l'instant t de $C(q^{-1})$. Cette modification a comme effet de supprimer la condition de réelle positivité sur $C(q^{-1})$ dans la phase finale de convergence, et d'accélérer la décorrélation entre le vecteur des observations et l'erreur de prédiction. Nous présenterons cette méthode à l'aide d'un exemple. Le modèle de « procédé + perturbation » est donné par l'équation [6.1.3].

1. Rigoureusement, on garantit la convergence de $\hat{\theta}$ dans un domaine de convergence $D_C : \{\theta | (\theta^* - \theta)^T \phi(t, \theta) = 0\}$ où θ^* sont les vrais paramètres. Pour une entrée riche, ce domaine se réduit à un seul point θ^* . La convergence des paramètres de $C(q^{-1})$ est plus lente que celle des paramètres de $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ et dépend de la réalisation du processus stochastique.

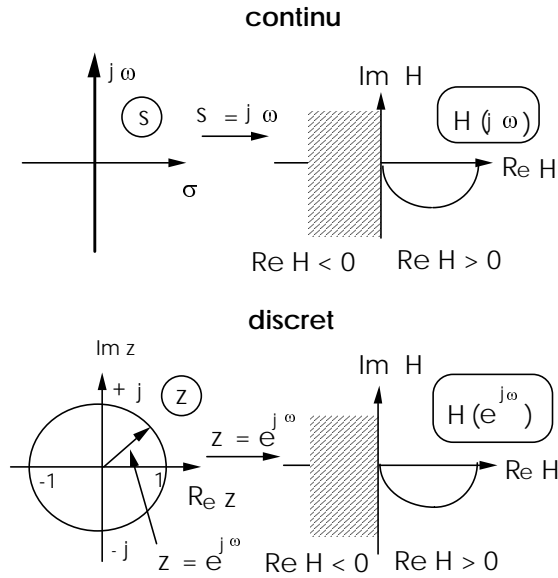


Figure 6.1.1. Fonctions de transfert strictement réelles positives

Le prédicteur ajustable *a priori* s'écrit (similaire au MCE) :

$$\hat{y}^o(t+1) = -\hat{a}_1(t)y(t) + \hat{b}_1(t)u(t) + \hat{c}_1(t)\varepsilon(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t)^T \quad [6.1.13]$$

où :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t), \hat{c}_1(t)] \quad ; \quad \phi(t)^T = [-y(t), u(t), \varepsilon(t)] \quad [6.1.14]$$

Le prédicteur ajustable *a posteriori* s'écrit :

$$\hat{y}(t+1) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \quad [6.1.15]$$

et les erreurs de prédiction correspondantes sont données par :

$$\begin{aligned} \varepsilon^o(t+1) &= y(t+1) - \hat{y}^o(t+1) \\ \varepsilon(t+1) &= y(t+1) - \hat{y}(t+1) \end{aligned} \quad [6.1.16]$$

L'estimation du polynôme $C(q^{-1})$ à l'instant t s'écrit :

$$\hat{C}(t, q^{-1}) = 1 + \hat{c}_1(t)q^{-1} \quad [6.1.17]$$

Le vecteur d'observation $\Phi(t)$ est défini par :

$$\begin{aligned}\Phi(t)^T = \phi_f(t)^T &= \frac{1}{\hat{C}(t, q^{-1})} [-y(t), u(t), \varepsilon(t)] \\ &= \left[\frac{-y(t)}{\hat{C}(t, q^{-1})}, \frac{u(t)}{\hat{C}(t, q^{-1})}, \frac{\varepsilon(t)}{\hat{C}(t, q^{-1})} \right]\end{aligned}\quad [6.1.18]$$

qui correspond au filtrage des composantes de $\phi(t)$ par $I/\hat{C}(t, q^{-1})$.

L'algorithme d'adaptation paramétrique est donné par les équations [5.5.1], à [5.5.3], où $\Phi(t)$ est donné maintenant par l'équation [6.1.18]. Dans le cas général :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(t)^T &= [\hat{a}_1(t) \dots \hat{a}_{n_A}(t), \hat{b}_1(t) \dots \hat{b}_{n_B}(t), \hat{c}_1(t) \dots \hat{c}_{n_C}(t)] \\ \Phi(t)^T = \phi_f(t)^T &= \frac{1}{\hat{C}(t, q^{-1})} \\ &\cdot [-y(t) \dots -y(t - n_A + 1), u(t - d) \dots u(t - d - n_B + 1), \varepsilon(t) \dots \varepsilon(t - n_C + 1)]\end{aligned}$$

Néanmoins, la mise en œuvre de cette méthode ne peut pas se faire dès l'instant $t = 0$ si une bonne estimation de $C(q^{-1})$ n'est pas disponible. Il faut d'abord considérer un *horizon d'initialisation* pendant lequel on utilise les moindres carrés étendus (M.C.E.) afin d'obtenir une première estimation. En règle générale, l'horizon d'initialisation est pris égal à (5 à 8) fois le nombre des paramètres à identifier.

Par ailleurs, le filtrage des observations ne peut se faire que pour des estimations $\hat{C}(t, q^{-1})$ stables. Un test de stabilité doit être incorporé (existe dans WinPIM).

Notons que dans WinPIM (Adaptech) le passage MCE \rightarrow MVR ne se fait que si $\hat{C}(t, q^{-1})$ est stable. Si à la fin de l'horizon d'initialisation, $\hat{C}(t, q^{-1})$ n'est pas stable, la commutation est reportée jusqu'à l'instant où $\hat{C}(t, q^{-1})$ devient stable.

On peut utiliser aussi une transition graduelle des MCE vers le MVR, en introduisant un « coefficient de contraction » dans $\hat{C}(t, q^{-1})$. C'est-à-dire qu'au lieu de filtrer par $(I + c_I q^{-1})$ on filtre par $(I + \alpha c_I q^{-1})$ avec : $0 \leq \alpha \leq 1$. Ceci force les racines du polynôme à l'intérieur du cercle unité. Il est possible d'utiliser un facteur de contraction variable qui tend asymptotiquement vers 1. Ce type de variation peut s'obtenir avec la formule :

$$\alpha(t) = \alpha_0 \alpha(t-1) + 1 - \alpha_0 \quad [6.1.19]$$

qui correspond à un filtre de 1^{er} ordre discret stable avec un gain statique unitaire excité par un échelon unitaire dont la valeur finale est 1. Dans le logiciel WinPIM, on utilise cette formule avec :

$$0.5 \leq \alpha_0 = \alpha(0) \leq 0.99$$

La méthode du maximum de vraisemblance récursif est utilisée pour améliorer éventuellement les résultats des moindres carrés étendus. Néanmoins, si les précautions indiquées plus haut ne sont pas prises en compte, l'algorithme peut diverger.

6.1.4. Erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu (ESMPE)

A l'origine, il s'agit d'une extension de la méthode d'erreur de sortie (voir plus loin section 6.3). Cette méthode peut être interprétée comme une variante des MCE. Elle offre des performances asymptotiques similaires aux MCE, mais avec une meilleure estimation en transitoire (réjection plus rapide du biais). Nous présenterons cette méthode à l'aide d'un exemple.

Le modèle du « procédé + perturbation » est donné par l'équation [6.1.3].

Le prédicteur ajustable *a priori* des MCE donné par l'équation [6.1.7] peut se réécrire sous la forme (en rajoutant et en retranchant le terme $\pm \hat{a}_1(t)\hat{y}(t)$) :

$$\hat{y}^o(t+1) = -\hat{a}_1(t)y(t) + \hat{b}_1(t)u(t) + \hat{c}_1(t)\varepsilon(t) \pm \hat{a}_1(t)\hat{y}(t) \quad [6.1.20]$$

et, en regroupant différemment les termes de l'équation [6.1.20] on obtient la structure du prédicteur ajustable *a priori* utilisé dans l'ESMPE :

$$\hat{y}^o(t+1) = -\hat{a}_1(t)y(t) + \hat{b}_1(t)u(t) + \hat{h}_1(t)\varepsilon(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad [6.1.21]$$

où :

$$\hat{h}_1(t) = \hat{c}_1(t) - \hat{a}_1(t) \quad [6.1.22]$$

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t), \hat{c}_1(t)] \quad ; \quad \phi(t)^T = [-\hat{y}(t), u(t), \varepsilon(t)] \quad [6.1.23]$$

Le prédicteur ajustable *a posteriori* est donné par :

$$\hat{y}(t+1) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \quad [6.1.24]$$

et les erreurs de prédiction sont données par :

$$\begin{aligned} \varepsilon^o(t+1) &= y(t+1) - \hat{y}^o(t+1) \\ \varepsilon(t+1) &= y(t+1) - \hat{y}(t+1) \end{aligned} \quad [6.1.25]$$

L'algorithme d'adaptation paramétrique est celui donné par les équations [5.5.1], [5.5.2] et [5.5.3] avec $\hat{\theta}(t)$ et $\Phi(t) = \phi(t)$ donné par [6.1.23]. Dans le cas général :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t)^T &= [\hat{a}_1(t) \dots \hat{a}_{n_A}(t), \hat{b}_1(t) \dots \hat{b}_{n_B}(t), \hat{h}_1(t) \dots \hat{h}_{n_C}(t)] \\ \Phi(t)^T &= [-\hat{y}(t) \dots -\hat{y}(t-n_A+1), u(t-d) \dots u(t-d-n_B+1), \varepsilon(t) \dots \varepsilon(t-n_C+1)] \end{aligned}$$

Comme pour les MCE, $\varepsilon(t)$ tend asymptotiquement vers un bruit blanc, garantissant ainsi une estimation non biaisée des paramètres de $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ (si l'entrée est suffisamment riche). Comme dans le cas des MCE, la convergence est sujette à la même condition, à savoir que la fonction de transfert donnée par l'équation [6.1.12] doit être à partie réelle strictement positive.

Notons que les valeurs des coefficients de $C(q^{-1})$ s'obtiennent de la relation :

$$c_i = h_i + a_i \quad [6.1.26]$$

La différence avec les MCE se situe essentiellement au niveau du vecteur $\phi(t)$ où la mesure $y(t)$ directement entachée par la perturbation est remplacée par $\hat{y}(t)$ qui dépend indirectement de la perturbation. C'est cela qui explique la meilleure estimation obtenue sur des horizons courts avec cette méthode par rapport aux MCE.

6.1.5. Moindres carrés généralisés (MCG)

L'objectif de cette méthode est d'obtenir une erreur de prédiction « blanche » pour un modèle « procédé + perturbation » ayant la structure (structure S4) :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + \frac{1}{C(q^{-1})}e(t) \quad [6.1.27]$$

(le terme $C(q^{-1})e(t)$ du modèle ARMAX a été remplacé par $[1/C(q^{-1})]e(t)$). Nous présenterons cette méthode à l'aide d'un exemple. Le modèle « procédé + perturbation » est donné par :

$$y(t+1) = -a_1 y(t) + b_1 u(t) + \frac{e(t+1)}{1 + c_1 q^{-1}} \quad [6.1.28]$$

Définissons :

$$\alpha(t+1) = (1 + a_1 q^{-1})y(t+1) - b_1 u(t) = \frac{e(t+1)}{1 + c_1 q^{-1}} \quad [6.1.29]$$

On a alors la relation :

$$(1 + c_1 q^{-1})\alpha(t+1) = e(t+1) \quad [6.1.30]$$

($\alpha(t)$ est un processus AR, voir paragraphe 4.1.2).

En supposant les paramètres connus, nous pouvons construire un prédicteur assurant une erreur de prédiction blanche :

$$\hat{y}(t+1) = -a_1 y(t) + b_1 u(t) - c_1 \alpha(t) \quad [6.1.31]$$

En effet :

$$y(t+1) - \hat{y}(t+1) = \frac{e(t+1)}{1 + c_1 q^{-1}} + c_1 \frac{e(t)}{1 + c_1 q^{-1}} = e(t+1) \quad [6.1.32]$$

Dans le cas des paramètres inconnus, le prédicteur s'obtient en remplaçant les paramètres connus dans l'équation [6.1.31] par leurs estimations. Le prédicteur ajustable *a priori* sera donné par :

$$\hat{y}^o(t+1) = -\hat{a}_1(t)y(t) + \hat{b}_1(t)u(t) - \hat{c}_1(t)\alpha(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad [6.1.33]$$

où :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t), \hat{c}_1(t)] \quad ; \quad \phi(t)^T = [-y(t), u(t), -\alpha(t)] \quad [6.1.34]$$

La quantité $\alpha(t)$ sera estimée à l'aide de l'équation [6.1.29], dans laquelle on remplace les valeurs inconnues des paramètres par leurs estimations :

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \hat{A}(t, q^{-1})y(t) - q^{-d} \hat{B}(t, q^{-1})u(t) \\ &= (1 + \hat{a}_1(t)q^{-1})y(t) - \hat{b}_1(t)u(t-1) \end{aligned} \quad [6.1.35]$$

L'erreur de prédiction *a priori* sera donnée par :

$$\varepsilon^o(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^o(t+1) \quad [6.1.36]$$

Le prédicteur ajustable donné dans l'équation [6.1.33] a la formulation permettant l'utilisation de l'algorithme d'adaptation paramétrique donné par les équations [5.5.1], [5.5.2] et [5.5.3] (comme dans le cas des MCE). Dans ce cas $\Phi(t)$ est donné par l'équation [6.1.34] et $\varepsilon^o(t+1)$ par l'équation [6.1.36]. Dans le cas général :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t)^T &= [\hat{a}_1(t) \dots \hat{a}_{n_A}(t), \hat{b}_1(t) \dots \hat{b}_{n_B}(t), \hat{c}_1(t) \dots \hat{c}_{n_C}(t)] \\ \Phi(t)^T &= [-y(t) \dots -y(t-n_A+1), u(t-d) \dots u(t-d-n_B+1), -\alpha(t) \dots -\alpha(t-n_C+1)] \end{aligned}$$

En présence d'une perturbation aléatoire correspondant à la structure S4, et avec un gain décroissant asymptotiquement, $\varepsilon(t)$ tend asymptotiquement vers un bruit blanc, permettant ainsi une estimation non biaisée des paramètres du modèle.

La convergence de l'algorithme est néanmoins liée à une condition suffisante (mais pas nécessaire) :

$$C(z^{-1}) - \frac{\lambda_2}{2} \quad ; \quad 2 > \lambda_2 \geq \max \lambda_2(t) \quad [6.1.37]$$

est une fonction de transfert strictement réelle positive.

Cette méthode s'utilise tout particulièrement si les perturbations ont un spectre étroit (par exemple une perturbation harmonique proche d'une sinusoïde). En effet, ce type de perturbation se modélise bien par $[1/C(q^{-1})]e(t)$ en utilisant peu de paramètres alors que la modélisation de ce type de perturbation par $C(q^{-1})e(t)$ requiert un ordre très élevé pour $C(q^{-1})$.

6.2. Validation des modèles identifiés avec les méthodes de type I

Il s'agit de la validation des modèles identifiés à l'aide des méthodes d'identification basées sur le « blanchissement » de l'erreur de prédiction. Ces méthodes sont :

- Moindres carrés récursifs (MCR) ;
- Moindres carrés étendus (MCE) ;
- Maximum de vraisemblance récursif (MVR) ;

- Erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu (ESMPE) ;
- Moindres carrés généralisés (MCG).

Le principe de la méthode de validation est le suivant :

- si la structure « modèle + perturbation » choisie est correcte, c'est-à-dire représentative de la réalité,
- si on a utilisé une méthode d'identification appropriée pour la structure choisie,
- si les degrés des polynômes $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$, $C(q^{-1})$ et la valeur de d (retard) ont été correctement choisis, alors l'erreur de prédiction $\varepsilon(t)$ tend asymptotiquement vers un bruit blanc, ce qui implique :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\{\varepsilon(t)\varepsilon(t-i)\} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots; -1, -2, -3, \dots$$

La méthode de validation met en œuvre ce principe. Elle comprend plusieurs étapes :

- 1) constitution d'un fichier E/S pour le modèle identifié (en utilisant la même séquence d'entrée que pour le procédé) ;
- 2) constitution d'un fichier des erreurs de prédiction pour le modèle identifié (minimum 100 données) ;
- 3) test de « blancheur » (de décorrélation) sur la séquence d'erreurs de prédiction.

Le test de blancheur

Soit $\{\varepsilon(t)\}$ la séquence centrée des erreurs de prédiction résiduelles (centré = valeurs mesurées - valeur moyenne).

On calcule :

$$R(0) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) \quad ; \quad RN(0) = \frac{R(0)}{R(0)} = 1 \quad [6.2.1]$$

$$R(i) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)\varepsilon(t-i) \quad ; \quad RN(i) = \frac{R(i)}{R(0)} \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, i_{\max} \quad [6.2.2]$$

où :

$$i_{\max} = \max(n_A, n_B + d)$$

et les $RN(i)$ sont les estimations des autocorrélations (normalisées).

Si la séquence des erreurs de prédiction résiduelles est *parfaitement blanche* (situation théorique) et le nombre d'échantillons très grand ($N \rightarrow \infty$) alors on obtient : $RN(0) = 1$; $RN(i) = 0$ $i \geq 1$.

Dans les situations réelles cela n'est jamais le cas, c'est-à-dire que les $RN(i)$ ne sont pas tout à fait nuls pour $i \geq 1$, car d'une part, $\varepsilon(t)$ contient des erreurs résiduelles de structure (erreurs sur l'ordre, effets non linéaires, bruits non gaussiens), et d'autre part, le nombre des échantillons est relativement petit (quelques centaines). Il faut aussi se rappeler qu'on cherche à identifier des *bons* modèles simples (avec peu de paramètres).

On considère alors comme critère pratique de validation (testé extensivement sur des très nombreuses applications) :

$$RN(0) = 1 \quad ; \quad |RN(i)| \leq \frac{2,17}{\sqrt{N}} \quad ; \quad i \geq 1 \quad [6.2.3]$$

où N est le nombre d'échantillons.

Ce test a été défini en tenant compte que pour une séquence *bruit blanc*, $RN(i)$, ($i \neq 0$) tend asymptotiquement vers une distribution gaussienne avec une valeur moyenne nulle et un écart type : $\sigma = 1/\sqrt{N}$.

L'intervalle de confiance considéré dans l'équation [6.2.3] correspond à un niveau de signification de 3 % pour le test d'hypothèse d'une distribution gaussienne.

En effet, si $RN(i)$ obéit à une distribution gaussienne $(0, 1/\sqrt{N})$, il y a seulement une probabilité de 1.5 % que $RN(i)$ soit supérieur à $2.17/\sqrt{N}$, ou que $RN(i)$ soit inférieur à $-2.17/\sqrt{N}$. Par conséquent, si une valeur calculée de $RN(i)$ est à l'extérieur de l'intervalle de confiance, l'hypothèse que $\varepsilon(t)$ et $\varepsilon(t-i)$ soient indépendants doit être rejetée, c'est-à-dire que $\{\varepsilon(t)\}$ n'est pas une séquence bruit blanc.

Des intervalles de confiance plus serrés peuvent être définis. Le tableau 6.2.1. donne les valeurs du critère de test de blancheur (indépendance) pour différents N et

2. Pour des données gaussiennes, décorrélation implique indépendance. Dans ce cas, $RN(i) = 0$, $i \geq 1$ implique indépendance entre $\varepsilon(t)$, $\varepsilon(t-1)$ c'est-à-dire que la séquence d'erreurs résiduelles $\{\varepsilon(t)\}$ est un bruit blanc.

un niveau de signification de 3 % ainsi que pour les intervalles de confiance du test d'indépendance pour des niveaux de signification de 5 % et 7 %.

Niveau de signification	Critère	N=128	N=256	N=512
3% (critère de validation)	$2.17/\sqrt{N}$	0.192	0.136	0.096
5%	$1.96/\sqrt{N}$	0.173	0.122	0.087
7%	$1.808/\sqrt{N}$	0.16	0.113	0.08

Tableau 6.2.1. Intervalles de confiance pour les tests de blancheur (indépendance)

Les remarques suivantes s'imposent :

– un modèle identifié *acceptable* a en général :

$$|RN(i)| \leq \frac{1.8}{\sqrt{N}} \dots \frac{2.17}{\sqrt{N}} \quad i = 1, \dots, i_{\max}$$

– si l'on tient compte du poids relatif des différentes erreurs non gaussiennes et des erreurs de modélisation qui augmentent avec le nombre des échantillons, le critère de validation peut être légèrement resserré pour des valeurs faibles de N et légèrement relâché pour les grandes valeurs de N . Dans un souci de simplification, on peut considérer comme une valeur numérique pratique pour le critère de validation, la valeur :

$$|RN(i)| \leq 0.15 \quad i = 1, \dots, i_{\max}$$

– un critère de validation *trop bon* indique que des simplifications du modèle sont possibles.

– à *complexité* égale des modèles, on choisit le modèle donné par la méthode qui conduit aux $|RN(i)|$ et $R(0)$ les plus petits.

Notons aussi qu'une validation complète du modèle implique, après la validation utilisant la séquence d'entrées/sorties ayant servi pour l'identification, une validation utilisant un jeu d'entrées/sorties du procédé différent de celui ayant servi pour l'identification.

Il y a un autre aspect de la validation qu'il faut considérer. Si le niveau de l'erreur de prédiction résiduelle est très faible par rapport au niveau de la sortie (par exemple, plus de 60 dB), le test de validation de blancheur de l'erreur résiduelle

perd sa signification. Ceci d'une part, parce que le niveau de bruit est si petit que l'effet de biais sur les MCR est négligeable et d'autre part parce que le bruit résiduel peut contenir dans ce cas-là, une composante significative qui n'est pas gaussienne (par exemple le bruit provoqué par la propagation des erreurs d'arrondi). Cette situation peut apparaître, par exemple, lors de l'identification à partir de fichiers de données entrée/sortie engendrés par des simulations de modèles sans bruit.

6.3. Méthodes d'identification basées sur la décorrélation du vecteur des observations et de l'erreur de prédiction (type II)

Les méthodes d'identification récursive suivantes entrent dans cette catégorie

- Variable instrumentale à modèle auxiliaire (VIMA) ;
- Erreur de sortie à compensateur fixe (ESCF) ;
- Erreur de sortie avec filtrage des observations (ESFO) ;
- Erreur de sortie avec filtrage adaptatif des observations (ESFAO).

6.3.1. Variable instrumentale à modèle auxiliaire

L'idée générale des méthodes de variable instrumentale consiste à créer un nouveau vecteur des observations qui soit fortement corrélé avec les variables non bruitées (et donc représentatif) mais non corrélé avec le bruit pour pouvoir obtenir $E\{\phi(t) \varepsilon(t+1)\} = 0$.

Le modèle « procédé + perturbation » considéré dans ce cas est celui de la structure S2 (voir paragraphe 5.5) :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d} B(q^{-1})u(t) + w'(t+1) \quad [6.3.1]$$

où :

$$w'(t+1) = A(q^{-1})w(t) \quad [6.3.2]$$

et qui correspond au schéma donné dans la figure 6.3.1.

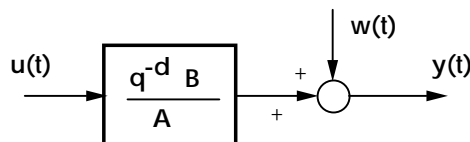


Figure 6.3.1. Structure « procédé + perturbation » (type S2)

$w(t)$ est une perturbation quelconque, indépendante de $u(t)$, à valeur moyenne nulle et variance finie.

L'objectif final est d'obtenir des estimations non biaisées des coefficients de $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ sans prendre en compte une modélisation de la perturbation. Pour ceci on s'intéresse à la construction d'un vecteur instrumental non corrélé avec l'erreur de prédiction engendrée par le prédicteur des moindres carrés.

En effet, prenons l'exemple suivant où le modèle « procédé + perturbation » est décrit par :

$$y(t+1) = -a_1 y(t) + b_1 u(t) + w'(t+1) \quad [6.3.3]$$

où :

$$w'(t+1) = (1 + a_1 q^{-1})w(t+1) \quad [6.3.4]$$

Considérons le prédicteur ajustable des moindres carrés récursifs :

$$\hat{y}^0(t+1) = -\hat{a}_1(t)y(t) + \hat{b}_1(t)u(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad [6.3.5]$$

où :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t)] \quad ; \quad \phi(t)^T = [-y(t), u(t)] \quad [6.3.6]$$

et respectivement :

$$\hat{y}(t+1) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \quad [6.3.7]$$

les erreurs de prédiction étant définies par :

$$\varepsilon^o(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^o(t+1) \quad [6.3.8]$$

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) \quad [6.3.9]$$

Définissons un modèle de prédiction auxiliaire qui va engendrer la variable instrumentale :

$$y_{IV}(t) = -\hat{a}_1(t)y_{IV}(t-1) + \hat{b}_1(t)u(t-1) \quad [6.3.10]$$

Ce modèle de prédiction diffère de celui donné par l'équation [6.3.5] ou l'équation [6.3.7] car *la sortie prédite dépend des prédictions précédentes et non pas*

des sorties précédentes ($y(t - 1)$ a été remplacé par $y_{IV}(t - 1)$). Ces nouvelles variables vont être moins affectées par la perturbation, qui va intervenir uniquement à travers l'AAP. Si l'on utilise un gain d'adaptation décroissant, asymptotiquement $y_{IV}(t)$ va dépendre uniquement de $u(t - 1)$, ce qui n'est pas le cas pour $\hat{y}^\circ(t)$ ou $\hat{y}(t)$ donnés respectivement par les équations [6.3.5] et [6.3.7] (car $y(t)$ est un signal bruité).

Le nouveau vecteur des observations est défini par :

$$\Phi(t)^T = \phi_{IV}(t)^T = [-y_{IV}(t), u(t)] \quad [6.3.11]$$

On remplace donc $y(t), y(t-1), \dots$ par $y_{IV}(t), y_{IV}(t-1) \dots$

Dans le cas général, le vecteur des observations a la structure :

$$\Phi(t)^T = \phi_{IV}(t)^T = [-y_{IV}(t), -y_{IV}(t-1), \dots, u(t-d), u(t-d-1), \dots] \quad [6.3.12]$$

et la variable instrumentale y_{IV} est engendrée par le modèle auxiliaire :

$$\hat{A}(t, q^{-1})y_{IV}(t) = q^{-d}\hat{B}(t, q^{-1})u(t) \quad [6.3.13]$$

où :

$$\hat{A}(t, q^{-1}) = 1 + \hat{a}_1(t)q^{-1} + \dots \quad [6.3.14]$$

$$\hat{B}(t, q^{-1}) = \hat{b}_1(t)q^{-1} + \hat{b}_2(t)q^{-2} + \dots \quad [6.3.15]$$

L'algorithme d'adaptation paramétrique est donné par les équations [5.5.1], [5.5.2] et [5.5.3], dans lequel $\Phi(t)$ est donné par l'équation [6.3.12]. Il s'agit en fait de l'algorithme des moindres carrés récursif dans lequel on a gardé le même prédicteur mais on a modifié le vecteur des observations.

Pour que $y_{IV}(t)$ soit représentatif de $y(t)$, il faut disposer d'une estimation des a_i et b_i . C'est la raison pour laquelle cette méthode doit être initialisée par les moindres carrés récursifs. On choisit, en règle générale, un horizon d'initialisation égal à (5 à 8) fois le nombre des paramètres à identifier. Si l'horizon d'initialisation n'est pas suffisamment long, l'algorithme peut diverger.

6.3.2. Erreur de sortie à compensateur fixe

Le modèle « procédé + perturbation » est celui donné par les équations [6.3.1] et [6.3.2] et respectivement pour l'exemple du premier ordre par les équations [6.3.3] et [6.3.4].

L'idée sous-jacente à cette méthode est l'observation qu'en l'absence de perturbations, la sortie prédite par le prédicteur des MCR $\hat{y}(t+1)$ tend vers $y(t+1)$. Dans ces conditions, on peut remplacer $y(t)$ dans l'équation du prédicteur par $\hat{y}(t)$ (la prédiction *a posteriori*).

En effet, considérons à titre d'exemple le prédicteur ajustable MCR pour le modèle « procédé + perturbation » de l'équation [6.3.3] :

$$\hat{y}^o(t+1) = -\hat{a}_1(t)y(t) + \hat{b}_1(t)u(t) \quad [6.3.16]$$

et remplaçons dans l'équation [6.3.16] $y(t)$ par $\hat{y}(t)$ (prédicteur type « erreur de sortie »). Nous obtenons alors :

$$\hat{y}^o(t+1) = -\hat{a}_1(t)\hat{y}(t) + \hat{b}_1(t)u(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad [6.3.17]$$

où :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t)] \quad ; \quad \phi(t)^T = [-\hat{y}(t), u(t)] \quad [6.3.18]$$

et :

$$\hat{y}(t+1) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \Rightarrow \hat{y}(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t-1) \quad [6.3.19]$$

représente la nouvelle prédiction *a posteriori*.

La différence entre les MCR et l'erreur de sortie est illustrée dans la figure 6.3.2.

L'intérêt de cette modification apparaît clairement en présence de perturbations. Si l'on utilise $\hat{y}(t)$ à la place de $y(t)$ dans l'équation du prédicteur et dans le vecteur des observations, on observe qu'avec un gain d'adaptation décroissant, asymptotiquement $\hat{y}(t)$ ne dépendra que de $u(t)$ (ce qui n'est pas le cas pour le prédicteur MCR) et ceci conduira asymptotiquement à $E\{\phi(t) \varepsilon(t+1)\} = 0$. En conséquence, on obtiendra des estimations non biaisées des paramètres du modèle de procédé.

Dans le cas général, le vecteur des observations utilisé dans le prédicteur et dans l'algorithme d'adaptation paramétrique est de la forme :

$$\Phi(t) = \phi(t)^T = [-\hat{y}(t), -\hat{y}(t-1), \dots, -\hat{y}(t-n_A+1), u(t-d), \dots, u(t-d-n_B+1)] \quad [6.3.20]$$

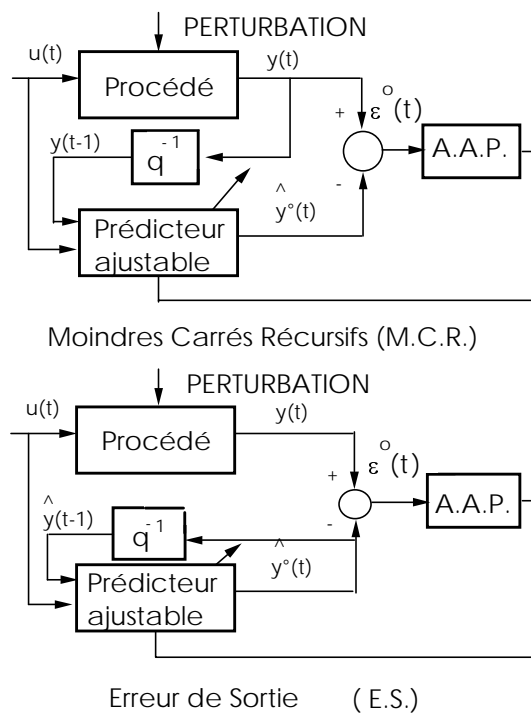


Figure 6.3.2. Comparaison entre la structure de prédiction des moindres carrés récurrents et de l'erreur de sortie

Les erreurs de prédiction de sortie sont définies à partir des équations [6.3.3], [6.3.17] et [6.3.19] :

$$\begin{aligned} \varepsilon^o(t+1) &= y(t+1) - \hat{y}^o(t+1) \\ \varepsilon(t+1) &= y(t+1) - \hat{y}(t+1) \end{aligned} \quad [6.3.21]$$

et on utilise l'algorithme d'adaptation donné par [5.1.1] et [5.1.3].

On définit aussi, dans le cas général, une erreur d'adaptation (v) obtenue par filtrage de l'erreur de prédiction :

$$\begin{aligned} v(t+1) &= D(q^{-1})\varepsilon(t+1) \\ D(q^{-1}) &= 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{n_D}q^{-n_D} \end{aligned} \quad [6.3.22]$$

$$v^o(t+1) = \varepsilon^o(t+1) + \sum_{i=1}^{n_D} d_i \varepsilon(t+1-i) \quad [6.3.23]$$

Dans ce cas, on remplace dans l'algorithme d'adaptation [5.5.1] à [5.5.3] $\varepsilon^o(t+1)$ et $\varepsilon(t+1)$ respectivement par $v^o(t+1)$ et $v(t+1)$.

C'est une méthode qui assure donc une identification non biaisée des coefficients de $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$, sans modélisation de la perturbation et sans une initialisation par une autre méthode.

Cette méthode est sujette à une condition suffisante de convergence (tant dans le cas sans perturbation que dans le cas avec perturbations) :

$$\frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})} - \frac{\lambda_2}{2} \quad ; \quad 2 > \lambda_2 \geq \max \lambda_2(t) \quad [6.3.24]$$

est une fonction de transfert strictement réelle positive. C'est la raison pour laquelle le filtre $D(q^{-1})$ sur l'erreur de prédiction a été introduit.

Pour $n_A \leq 2$ ($n_A = \deg A(q^{-1})$), le compensateur $D(q^{-1})$ n'est pas nécessaire (car $1/A(q^{-1}) - \lambda_2/2$ est strictement positif réel presque partout où $A(q^{-1})$ est asymptotiquement stable). Pour $n_A > 2$ et gain d'adaptation décroissant, le compensateur n'est pas nécessaire (on démontre que l'erreur de prédiction reste bornée). Dans le cas où on introduit le compensateur, on choisit $n_d \leq n_A - 1$ ou n_A ($n_d = \text{degré } D(q^{-1})$).

Comme la condition sur la fonction de transfert [6.3.24] est suffisante mais pas forcément nécessaire, on démarre toujours avec $D(q^{-1}) = 1$ (pas de compensateur) et on introduit un compensateur uniquement si l'erreur de prédiction diverge.

Il est possible aussi d'estimer simultanément les paramètres des modèles et ceux du filtre sur l'erreur de prédiction (erreur de sortie à compensation ajustable). Pour des détails voir [LAN 01b].

6.3.3 Erreur de sortie avec filtrage (adaptatif) des observations

Il s'agit de variantes de la méthodes de l'erreur de sortie dans laquelle le filtrage de l'erreur de prédiction est remplacé par un filtrage du vecteur d'observation (afin de satisfaire les conditions de convergence).

Les équations du prédicteur ajustable et des erreurs de prédiction sont les mêmes que pour l'erreur de sortie à compensateur fixe (équations [6.3.16] à [6.3.19] et [6.3.21]).

On utilise l'erreur de prédiction comme erreur d'adaptation (il n'y a pas de filtrage sur l'erreur). Par contre cet algorithme utilise un filtrage du vecteur des observations.

Dans la méthode *d'erreur de sortie avec filtrage des observations* on définit le filtre à paramètres fixes :

$$L(q^{-1}) = \hat{A}(q^{-1}) \quad [6.3.25]$$

où $\hat{A}(q^{-1})$ est une estimation du polynôme $A(q^{-1})$ obtenue par une autre méthode (par exemple : moindres carrés ou erreur de sortie non filtrée) et on définit le vecteur des observations filtrées $\phi_f(t)$:

$$\Phi(t) = \phi_f(t) = \frac{1}{\hat{A}(q^{-1})} \phi(t) \quad [6.3.26]$$

où $\phi(t)$ est donné par l'équation [6.3.20].

On peut aussi utiliser à la place du filtre [6.3.25] un filtre à paramètres variables dans le temps :

$$L(q^{-1}, t) = \hat{A}(q^{-1}, t) \quad [6.3.27]$$

où $\hat{A}(q^{-1}, t)$ est une estimation du polynôme $A(q^{-1})$ à l'instant t (fournie par l'algorithme d'adaptation paramétrique) et le vecteur des observations est défini par [6.3.26] où $\hat{A}(q^{-1})$ est remplacé par $\hat{A}(q^{-1}, t)$.

On obtient ainsi la méthode de *l'erreur de sortie avec filtrage adaptatif des observations*.

Comme dans le cas de l'algorithme du maximum de vraisemblance récursif, un test de stabilité sur $\hat{A}(q^{-1}, t)$ doit être effectué.

L'initialisation de l'algorithme peut se faire par l'erreur de sortie non-filtrée (et sans compensateur) ou par les moindres carrés (pour avoir une première estimation de $\hat{A}(q^{-1})$), mais elle n'est pas obligatoire (l'algorithme peut démarrer avec $\hat{A}(q^{-1}, 0) = 1$).

La condition suffisante de convergence de l'algorithme s'exprime pour une valeur fixe du filtre $L(q^{-1}, t) = L(q^{-1}, \hat{\theta}) = \hat{A}(q^{-1}, \hat{\theta})$:

$$H'(z^{-1}) = \frac{\hat{A}(z^{-1}, \hat{\theta})}{A(z^{-1})} - \frac{\lambda_2}{2} ; \quad 2 > \lambda_2 \geq \max_t \lambda_2(t) \quad [6.3.28]$$

doit être une fonction de transfert échantillonnée strictement réelle positive. En particulier, cette condition sera toujours satisfaite autour de la valeur correcte $\hat{\theta} = \theta$.

6.4. Validation des modèles identifiés avec les méthodes de type II

Il s'agit de la validation des modèles identifiés à l'aide des méthodes d'identification basées sur la décorrélation des observations et des erreurs de prédiction.

Ces méthodes sont :

- Variable instrumentale à modèle auxiliaire (VIMA) ;
- Erreur de sortie à compensateur fixe (ESCF) ;
- Erreur de sortie avec filtrage des observations (ESFO) ;
- Erreur de sortie avec filtrage adaptatif des observations (ESFAO).

Le principe de la méthode de validation est le suivant :

- si la perturbation est indépendante de l'entrée ($E\{w(t)u(t)\} = 0$),
- si la structure « modèle + perturbation » choisie est correcte, c'est-à-dire représentative de la réalité,
- si l'on a utilisé une méthode d'identification appropriée pour la structure choisie,
- si les degrés des polynômes $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ et la valeur de d (retard) ont été correctement choisis.

alors les sorties prédites engendrées par un modèle de prédiction type « erreur de sortie » :

$$\hat{A}(q^{-1}) \hat{y}(t) = q^{-d} \hat{B}(q^{-1}) u(t)$$

sont asymptotiquement décorrélées de l'erreur de prédiction de sortie, ce qui implique :

$$E\{\varepsilon(t) \hat{y}(t-i)\} \approx \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t) \hat{y}(t-i) = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

La méthode de validation met en œuvre ce principe. Elle comprend plusieurs étapes.

1) constitution d'un fichier E/S pour le modèle identifié (en utilisant la même séquence d'entrée que pour le procédé) ;

2) constitution des fichiers des séquences $\{y(t)\}$; $\{\hat{y}(t)\}$; $\{\varepsilon(t)\}$ (sortie procédé, sortie modèle, erreur de sortie (prédiction) résiduelle). Ces fichiers doivent contenir au minimum 100 données ;

3) test de « décorrélation » entre la séquence d'erreurs de sortie (prédiction) résiduelles et la séquence des sorties du modèle de prédiction.

Test de décorrélation

Soient $\{y(t)\}$ et $\{\hat{y}(t)\}$ les séquences centrées des sorties du procédé et respectivement du modèle identifié.

Soit $\{\varepsilon(t)\}$ la séquence centrée des erreurs de sortie (prédiction) résiduelles (centré = valeur mesurée – valeur moyenne).

On calcule :

$$R(i) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t) \hat{y}(t-i) \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots, i_{\max} \quad [6.4.1]$$

$$RN(i) = \frac{R(i)}{\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \hat{y}^2(t) \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) \right) \right]^{1/2}} \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots, i_{\max} \quad [6.4.2]$$

où :

$$i_{\max} = \max(n_A, n_B + d)$$

et les $RN(i)$ sont les estimations des intercorrélations (normalisées). Notons que : $RN(0) \neq 1$.

Si la décorrélation est parfaite entre $\varepsilon(t)$ et $\hat{y}(t-i)$, $i \geq 1$ (situation théorique), alors :

$$RN(1) = RN(2) = 0 \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots, i_{\max}$$

Dans les situations réelles ceci n'est jamais le cas, soit parce que la durée de l'identification n'a pas été assez grande pour approcher le caractère asymptotique, soit parce qu'on cherche à identifier des bons modèles simples (avec peu de paramètres - sous-estimation des ordres de $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$), ce qui conduit à des erreurs de « structure » qui sont corrélées avec l'entrée $u(t)$.

En pratique, on souhaite que les valeurs de $|RN(i)|$, $i = 1, \dots, i_{\max}$ soient plus petites qu'une certaine valeur à définir (critère de validation).

Le critère de validation pour les méthodes d'identification de type II est basé sur un test de décorrélation. Il va être défini d'une façon similaire à celui pour les méthodes d'identification de type I où on utilise aussi un test de décorrélation mais sur d'autres séquences de variables (voir paragraphe 6.2.). Dans ce cas on considère comme critère de validation la condition :

$$|RN(i)| \leq \frac{2.17}{\sqrt{N}} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, i_{\max}$$

où N est le nombre d'échantillons. Le tableau 6.2.1 peut être utilisé pour trouver les valeurs numériques correspondant à différents N et différents niveaux de signification du test.

Tous les commentaires faits dans la section 6.2 sur la signification des valeurs du critère de validation restent valables dans ce cas.

En particulier, la valeur numérique pratique du critère de validation sera :

$$|RN(i)| \leq 0.15 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, i_{\max}$$

Comme les différentes méthodes d'identification ont été développées pour améliorer les résultats obtenus par la méthode des moindres carrés récurrents (MCR), il est souhaitable de comparer les modèles identifiés obtenus avec des méthodes d'identification de type II avec les modèles identifiés obtenus avec les MCR, ou en général avec d'autres méthodes d'identification de type I.

Pour effectuer cette comparaison, on procède de la façon suivante :

- on utilise la structure du prédicteur considérée pour la validation des méthodes d'identification de type II (prédicteur *erreur de sortie*),
- on utilise le jeu de paramètres (a_i, b_i) obtenus par les MCR (ou par une autre méthode d'identification de type I),
- on calcule les intercorrélations correspondantes en utilisant les équations [6.4.1] et [6.4.2].

Quand on utilise le progiciel WinPIM (Adaptech) ces opérations sont automatiquement effectuées dans le module « Validation des Modèles » lorsqu'on demande une validation par *test d'intercorrélations erreur/sorties prédites*.

Les valeurs des intercorrélations obtenues avec le jeu de paramètres identifiés avec une méthode d'identification de type II doivent être comparées avec les valeurs des intercorrélations obtenues avec le jeu de paramètres fournis par les MCR ou par une autre méthode d'identification de type I. Le meilleur modèle est celui qui donne les valeurs les plus faibles pour les intercorrélations.

Pour la comparaison avec des méthodes qui estiment aussi le polynôme $C(q^{-1})$, on ne prend en compte que les paramètres estimés de $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$.

La même stratégie s'utilise aussi pour comparer entre elles les différentes méthodes de type II.

6.5. Estimation de la complexité d'un modèle³

6.5.1. Un exemple

Pour comprendre le principe de l'estimation de la complexité d'un modèle, considérons un exemple de 1^{er} ordre, dans le cas où il n'y a pas de bruit.

Supposons que le modèle du procédé peut être décrit par :

$$y(t) = -a_1 y(t-1) + b_1 u(t-1) \quad [6.5.1]$$

3. Peut être omis lors d'une première lecture.

et que les données sont non bruitées. L'ordre de ce modèle est $n = \max(n_A, n_B + d) = 1$.

Question : y a-t-il un test permettant de vérifier si l'hypothèse sur l'ordre du modèle est correcte ?

Construisons la matrice suivante :

- sur la première ligne, on place $y(t)$, et les variables présentes dans l'équation [6.5.1],
- les autres lignes sont formées à partir des variables présentes dans l'équation [6.5.1] mais décalées dans le temps :

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} y(t) & \vdots & -y(t-1) & u(t-1) \\ y(t-1) & \vdots & -y(t-2) & u(t-2) \\ y(t-2) & \vdots & -y(t-3) & u(t-3) \end{array} \right] = [Y(t) \quad R(1)] \\ \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ Y(t) \qquad \qquad R(1) = R(\bar{n}) \end{array} \quad [6.5.2]$$

La matrice obtenue peut être divisée en deux parties : la première colonne, notée $Y(t)$, est un vecteur contenant la sortie présente et les sorties passées ; le reste forme une matrice, notée $R(I)$.

Si la structure de l'équation [6.5.1] est vraie (c'est-à-dire qu'elle peut représenter la relation entre u et y), on peut remplacer les éléments de la 1^{ère} colonne de [6.5.2] par leur expression donnée par [6.5.1], et on obtient en évaluant le déterminant :

$$\text{rang}[Y(t) \quad R(1)] = \text{rang} \begin{bmatrix} -a_1 y(t-1) + b_1 u(t-1) & \vdots & -y(t-1) & u(t-1) \\ -a_1 y(t-2) + b_1 u(t-2) & \vdots & -y(t-2) & u(t-2) \\ -a_1 y(t-3) + b_1 u(t-3) & \vdots & -y(t-3) & u(t-3) \end{bmatrix} = 2 (< 3) \quad [6.5.3]$$

car la première colonne est une combinaison linéaire des deux autres colonnes. En effet, $Y(t) = R(1)\theta$ avec $\theta^T = [a_1, b_1]$ et le rang de la matrice est 2 (au lieu de 3).

Il résulte donc que le test de rang de la matrice [6.5.2] (taille du plus grand déterminant non-nul) permet de conclure sur la validité de la structure du modèle considéré pour représenter un système.

Autre exemple : supposons que le procédé est un second ordre, toujours sans bruit. Il peut être décrit par l'équation :

$$y(t) = -\sum_{i=1}^2 a_i y(t-i) + \sum_{i=1}^2 b_i u(t-i) \quad [6.5.4]$$

Si l'on calcule le rang de la matrice [6.5.3] :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} y(t) & \vdots & -y(t-1) & u(t-1) \\ y(t-1) & \vdots & -y(t-2) & u(t-2) \\ y(t-2) & \vdots & -y(t-3) & u(t-3) \end{bmatrix} = 3 \quad (\text{rang plein})$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ Y(t) & & R(1) = R(\hat{n}) \end{array} \quad [6.5.5]$$

Le déterminant de cette matrice est non nul car $Y(t)$ ne peut pas s'exprimer comme une combinaison linéaire des colonnes 2 et 3.

Par contre, si l'on utilise aussi les mesures de l'instant $t-2$, on crée la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} y(t) & \vdots & -y(t-1) & -y(t-2) & u(t-1) & u(t-2) \\ y(t-1) & \vdots & -y(t-2) & -y(t-3) & u(t-2) & u(t-3) \\ y(t-2) & \vdots & -y(t-3) & -y(t-4) & u(t-3) & u(t-4) \\ y(t-3) & \vdots & -y(t-4) & -y(t-5) & u(t-4) & u(t-5) \\ y(t-4) & \vdots & -y(t-5) & -y(t-6) & u(t-5) & u(t-6) \end{bmatrix} = [Y(t) \quad R(2)]$$

$$\begin{array}{ccc} & \underbrace{\hspace{10em}} & \\ \uparrow & & \uparrow \\ Y(t) & & R(2) = R(\hat{n}) \end{array} \quad [6.5.6]$$

Le rang de cette matrice $[Y(t) : R(2)]$ est strictement inférieur à 5 (en fait il est égal à 4), car $Y(t)$ est une combinaison linéaire des colonnes 2, 3, 4 et 5.

L'objectif va donc être de rechercher le nombre de colonnes à rajouter afin de pouvoir exprimer $Y(t)$ comme combinaison linéaire des autres colonnes. Ceci correspond à rechercher l'ordre n du modèle, c'est-à-dire le $\max(n_A, n_B + d)$ (on rajoute le même nombre de colonnes de j et u retardés). L'algorithme s'arrêtera quand la matrice de la forme [6.5.6] ne sera plus de rang plein.

6.5.2 Cas idéal (sans bruit)

Dans le cas idéal, c'est-à-dire en l'absence de bruit, on s'intéresse à l'estimation de l'ordre (complexité) d'un modèle de la forme :

$$y(t) = -\sum_{i=1}^n a_i y(t-i) + \sum_{i=1}^n b_i u(t-i) \quad [6.5.7]$$

par le test de rang. Pour ceci on construit la matrice :

$$R(\hat{n}) = \begin{bmatrix} -y(t-1) & \cdots & -y(t-\hat{n}) & u(t-1) & \cdots & u(t-\hat{n}) \\ -y(t-2) & \cdots & -y(t-\hat{n}-1) & u(t-2) & \cdots & u(t-\hat{n}-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(t-N) & \cdots & -y(t-\hat{n}-N+1) & u(t-N) & \cdots & u(t-\hat{n}-N+1) \end{bmatrix} \quad [6.5.8]$$

$$= \begin{bmatrix} \phi(t-1)^T \\ \phi(t-2)^T \\ \vdots \\ \phi(t-N)^T \end{bmatrix}$$

où :

$$\phi(t-j)^T = [-y(t-j), \dots, -y(t-\hat{n}-j+1), u(t-j), \dots, u(t-\hat{n}-j+1)]; j = 1, \dots, N \quad [6.5.9]$$

et le vecteur :

$$Y(t)^T = [y(t), y(t-1), \dots, y(t-N+1)] \quad [6.5.10]$$

et on teste le rang de la matrice :

$$[Y(t) \quad ; \quad R(\hat{n})] \quad [6.5.11]$$

REMARQUE.- le nombre de données N doit être supérieur à $2n_{max} + 1$ (où n_{max} est l'ordre maximal supposé du système).

On a le résultat suivant :

- si $\hat{n} < n$, $[Y(t) \quad ; \quad R(\hat{n})]$ est une matrice de rang plein (de rang $2\hat{n} + 1$)
- si $\hat{n} \geq n$, $[Y(t) \quad ; \quad R(\hat{n})]$ n'est pas de rang plein (rang $2n$ au lieu de $2\hat{n} + 1$).

La quantité de test à utiliser peut être le déterminant, les valeurs propres de la matrice, etc.

6.5.3. Cas avec bruit

En présence de bruit l'équation [6.5.7] devient :

$$y(t) = - \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) + \sum_{i=1}^n b_i u(t-i) + w(t) \quad [6.5.12]$$

où $w(t)$ représente l'effet du bruit.

En pratique la méthode présentée plus haut ne marche pas quand il y a du bruit, car la matrice $\begin{bmatrix} Y(t) \\ R(\hat{n}) \end{bmatrix}$ ne devient jamais singulière.

Bruit blanc

Observons que le test de rang s'apparente à la recherche d'un vecteur des paramètres $\hat{\theta}$ qui minimise le critère suivant pour une valeur estimée \hat{n} de l'ordre⁴ :

$$J_{MC}(\hat{n}) = \min_{\hat{\theta}} \frac{1}{N} \left\| Y(t) - R(\hat{n}) \hat{\theta}_{\hat{n}} \right\|^2 \quad [6.5.13]$$

où $\hat{\theta}$ exprime la dépendance linéaire de $Y(t)$ par rapport aux colonnes de $R(\hat{n})$. Mais ce critère n'est rien d'autre que le critère des moindres carrés [5.2.40].

En effet, en tenant compte de [6.5.8], [6.5.9] et [6.5.10] l'équation [6.5.13] s'exprime :

$$J_{MC}(\hat{n}) = \min_{\hat{\theta}} \frac{1}{N} \sum_{i=t-N+1}^t \left[y(i) - \hat{\theta}_{\hat{n}}^T(t) \phi(i-1) \right]^2$$

où :

$$\hat{\theta}_{\hat{n}}^T = \left[\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{\hat{n}}, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{\hat{n}} \right]$$

Donc dans le cas où le bruit dans l'équation [6.5.12] est blanc, l'utilisation de l'algorithme des moindres carrés (l'algorithme d'estimation est non biaisé) permet d'estimer l'ordre du modèle en évaluant la valeur effective du critère pour des modèles estimés d'ordre \hat{n} croissant. Si $\hat{n} \geq n$ le critère devient pratiquement nul en absence de bruit ou prend une valeur constante en présence de bruit blanc (ceci est illustré dans la figure 6.5.1).

4. $\|x\| = x^T x$.

Bruit non blanc

Le problème persiste néanmoins dans le cas où le bruit dans [6.5.12] n'est pas un bruit blanc, car la décroissance $J_{MC}(\hat{n}) - J_{MC}(\hat{n}+1)$ ne va pas franchement à 0 lorsque $\hat{n} \geq n$ (c'est-à-dire que l'on a tendance à surestimer l'ordre).

Il faut donc mettre en œuvre un algorithme qui permet d'obtenir une estimation non biaisée de $\hat{\theta}_n$. Pour ceci on peut utiliser une technique de « variables instrumentales ».

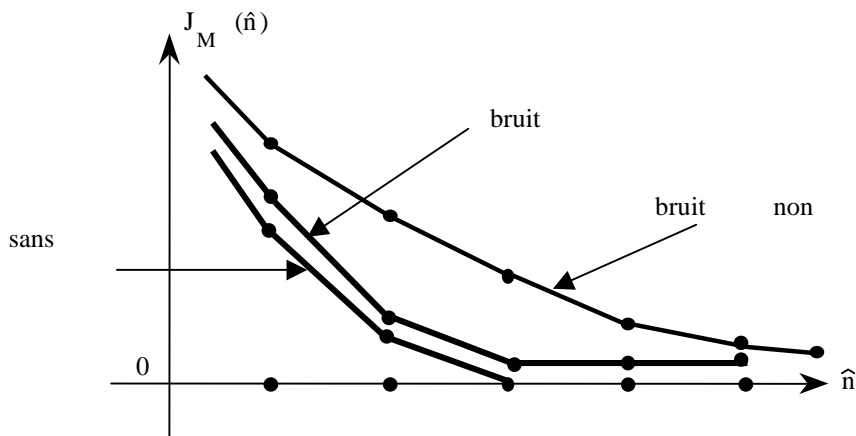


Figure 6.5.1. Evolution du critère des moindres carrés en fonction de \hat{n}

On remplace les mesures par des variables instrumentales corrélées avec les « bonnes » mesures, mais moins corrélées avec le bruit. Le nombre de variables instrumentales à utiliser ($2L$) doit être supérieur au double de l'ordre estimé du système. On peut utiliser comme variable instrumentale par exemple les entrées retardées car $u(t-L)$ est corrélé avec $y(t)$ pour $L \geq \hat{n}$ (voir équation [6.5.7]), mais par ailleurs $u(t)$ n'est pas corrélé avec le bruit.

Concrètement, dans ce cas on remplace $R(\hat{n})$ et $Y(t)$ par $R_{IV}(\hat{n})$ et $Y_{IV}(t)$ où :

$$R_{IV}(\hat{n}) = M_{IV} R(\hat{n}) \quad ; \quad Y_{IV}(t) = M_{IV} Y(t) \quad [6.5.14]$$

M_{IV} est la matrice de variables instrumentales et elle est construite à partir de la matrice :

$$Z^T(\hat{n}) = [\phi_{IV}(t-1), \phi_{IV}(t-2), \dots, \phi_{IV}(t-N)] \quad [6.5.15]$$

où :

$$\phi_{IV}^T(t-j) = [-u(t-L-j), \dots, u(t-L-\hat{n}-j+1), u(t-j), \dots, u(t-\hat{n}-j+1)] \quad [6.5.16]$$

On cherche d'abord une matrice :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

telle que (triangularisation de la matrice $Z(\hat{n})$) :

$$Q_1 Z(\hat{n}) = Z_1(\hat{n})$$

où $Z_1(\hat{n})$ est une matrice triangulaire et :

$$Q_2 Z(\hat{n}) = 0$$

La matrice de variables instrumentales M_{IV} est donnée alors par⁵ :

$$M_{IV} = (Z_1^T)^{-1} Z^T$$

La quantité de test devient dans ce cas :

$$J_{IV}(\hat{n}) = \min_{\hat{\theta}} \frac{1}{N} \|Y_{IV}(t) - R_{IV}(\hat{n})\hat{\theta}\|^2 \quad [6.5.17]$$

Une étude théorique montre que la décroissance de cette quantité de test tend vers 0 [DUO 93]⁶. Ceci fera apparaître un coude franc dans la courbe $J_{IV}(\hat{n})$ permettant une estimation assez claire de l'ordre.

6.5.4. Critère d'estimation de complexité

Un des objectifs de l'identification est d'estimer des modèles d'ordre réduit (principe de parcimonie). Il est donc raisonnable de rajouter dans le critère [6.5.17] un terme qui pénalise la complexité du modèle de la forme :

5. La création des variables instrumentales dans ce cas s'apparente à la projection orthogonale des mesures dans l'espace défini par $Z(\hat{n})$.

6. On montre aussi en [DUO 96] que $J_{IV}(\hat{n})$ a une distribution statistique bien définie permettant d'établir un « risque de surestimation » pour l'estimation \hat{n} de l'ordre du procédé.

$$S(\hat{n}, N) = \frac{2\hat{n} \log(N)}{N} \quad [6.5.18]$$

mais d'autres choix sont possibles [DUO 93, SÖD 89].

On définit alors le critère pour l'estimation de l'ordre d'un modèle :

$$CJ_{IV}(\hat{n}) = J_{IV}(\hat{n}) + S(\hat{n}, N) \quad [6.5.19]$$

et donc \hat{n} sera donné par :

$$\hat{n} = \min_{\hat{n}} CJ_{IV}(\hat{n}) \quad [6.5.20]$$

L'estimation de complexité ainsi réalisée est consistante, c'est-à-dire qu'on trouve l'ordre exact lorsque le nombre de données tend vers l'infini ($N \rightarrow \infty$).

Une courbe typique de l'évolution du critère [6.5.18] en fonction de \hat{n} est donnée dans la figure 6.5.2.

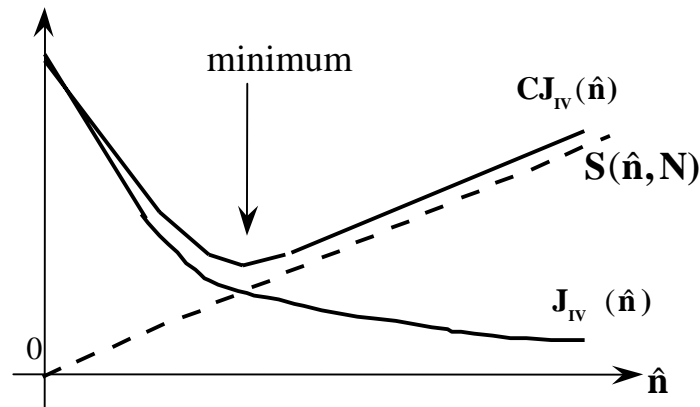


Figure 6.5.2. Evolution du critère pour l'estimation de l'ordre du modèle

Une fois l'ordre \hat{n} estimé, on peut appliquer une procédure similaire pour estimer $\hat{n} - \hat{d}$, \hat{n}_A , $\hat{n}_B + \hat{d}$ d'où \hat{n}_A , \hat{n}_B , et \hat{d} sont obtenus.

Le logiciel WinPIM (Adaptech) utilise ce critère pour une estimation automatique de l'ordre du système et respectivement de n_A , n_B , et d . Les fonctions *estorderls.sci*, *estorderiv.sci* (Scilab) et *estorderls.m*, *estorderiv.m* (Matlab) mettent

en œuvre aussi la technique décrite plus haut pour l'estimation de la complexité d'un modèle.

D'autres aspects de l'estimation de n_A , n_B , et d sont présentés dans le chapitre 7, section 7.3.

6.6. Conclusion

Dans ce chapitre, les méthodes d'identification sous leur forme récursive ont été présentées. Ces méthodes ont été classifiées en deux catégories.

La première catégorie comprend les méthodes d'identification basées sur le *blanchissement de l'erreur de prédiction* afin d'obtenir des estimations non biaisées des paramètres. Les méthodes d'identification récursive suivantes entrent dans cette catégorie :

- Moindres carrés récursifs (MCR) ;
- Moindres carrés étendus (MCE) ;
- Maximum de vraisemblance récursif (MVR) ;
- Erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu (ESMPE) ;
- Moindres carrés généralisés (MCG).

La validation des modèles identifiés en utilisant ces méthodes se fait en testant si la séquence des erreurs de prédiction résiduelles approche les caractéristiques d'un bruit blanc. Pour ceci, on effectue un test de *décorrélation* sur la séquence des erreurs de prédiction résiduelles. Un modèle identifié acceptable doit vérifier la condition :

$$|RN(i)| \leq \frac{2,17}{\sqrt{N}} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, \max(n_A, n_B + d)$$

où :

$$RN(i) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t) \varepsilon(t-i) / \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) \right]$$

et N est le nombre d'échantillons.

La deuxième catégorie de méthodes d'identification comprend les méthodes d'identification basées sur la *décorrélation entre l'erreur de prédiction et la vecteur*

des observations afin d'obtenir des estimations non biaisées des paramètres. Les méthodes d'identification récursive suivantes appartiennent à cette catégorie :

- Variable instrumentale à entrées retardées (VIER) ;
- Variable instrumentale à modèle auxiliaire (VIMA) ;
- Erreur de sortie à compensateur fixe (ESCF) ;
- Erreur de sortie avec filtrage des observations (ESFO) ;
- Erreur de sortie avec filtrage adaptatif des observations (ESFAO).

La validation des modèles identifiés en utilisant ces méthodes se fait en testant si la séquence des erreurs résiduelles de prédiction de sortie et celle des sorties prédites (engendrées par le modèle $A(q^{-1}) \hat{y}(t) = q^{-d} \hat{B}(q^{-1}) u(t)$) sont décorréelées. Pour ceci on effectue un *test de décorrélation*. Un modèle identifié acceptable doit vérifier la condition :

$$|RN(i)| \leq \frac{2.17}{\sqrt{N}} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, \max(n_A, n_B + d)$$

où :

$$RN(i) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t) \hat{y}(t-i) / \left\{ \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \hat{y}^2(t) \right] \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) \right] \right\}^{1/2}$$

et N est le nombre d'échantillons.

En prenant en compte le poids relatif des différentes erreurs non gaussiennes et des erreurs de modélisation, qui augmente avec le nombre des échantillons, le critère de validation peut être légèrement resserré pour les valeurs faibles de N et légèrement relâché pour les grandes valeurs de N . Dans un souci de simplification, on peut considérer comme une valeur numérique pratique pour le critère de validation, la valeur :

$$|RN(i)| \leq 0.15 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, \max(n_A, n_B + d)$$

Bien entendu avant d'effectuer une estimation paramétrique il faut soit estimer à partir des données l'ordre du système soit faire un choix à partir d'informations *a priori*. Les techniques d'estimation de l'ordre des modèles à partir des données ont été présentées dans la section 6.5.

Le problème d'estimation de l'ordre est ramené à un problème d'identification et de recherche de la valeur de l'ordre qui minimise un critère à deux termes. L'un des

termes de ce critère correspond à la variance de l'erreur de prédiction, l'autre terme du critère est un terme de pénalité qui augmente avec la taille du modèle.

6.7. Bibliographie

- [BEN 71] BENDAT J.S., PIERSOL A.G., *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, John Wiley, 1971.
- [BET 76] BETHOUX G., Approche unitaire des méthodes d'identification et de commande adaptative des procédés dynamiques, Thèse 3^{ème} cycle, INPG, juillet 1976.
- [CAN 86] CANDY J.V., *Signal Processing - The Model Based Approach*, MacGraw Hill, New York, 1986.
- [DUG 80] DUGARD L., LANDAU I.D., « Recursive Output Error Identification Algorithms: Theory and Evaluation », *Automatica*, vol. 16, p. 443-462, 1980.
- [DUO 93] DUONG H.N., Identification structurelle et paramétrique des systèmes linéaires monovariabiles et multivariabiles, Thèse 3^{ème} cycle, INPG (LAG), 1993.
- [DUO 96] DUONG H.N., LANDAU I.D., « An I.V. based criterion for model order selection », *Automatica*, vol. 32, n° 6, p. 909-914, 1996.
- [HOG 70] HOGG R., GRAIG A., *Introduction to Mathematical Statistics*, MacMillan, New York, 1970.
- [LAN 79] LANDAU I.D., *Adaptive Control - the model reference approach*, Dekker, New York, Etats-Unis, 1979.
- [LAN 82] LANDAU I.D., « Near Supermartingales for Convergence Analysis or Recursive Identification and Adaptative Control Schemes », *Int. J. of Control*, vol. 35, p. 197-226, 1982.
- [LAN 97] LANDAU I.D., LOZANO R., M'SAAD M., *Adaptive control*, Springer, Londres, Grande-Bretagne, 1997.
- [LAN 01] LANDAU I.D., « Les bases de l'identification des systèmes », dans *Identification des systèmes*, I.D. Landau et A. Besançon-Voda (Eds.), p. 19-129, Hermès, Paris, 2001.
- [LJU 83] LJUNG L., SÖDERSTRÖM T., *Theory and Practice of Recursive Identification*, MIT Press, Cambridge, Etats-Unis, 1983.
- [LJU 99] LJUNG L., *Identification. Theory for the User*, 2^e édition, Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [SÖD 83] SÖDERSTRÖM T., STOICA P., « Instrumental variable methods for system identification », *Lectures Notes in Control and Information Sciences*, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [SÖD 89] SÖDERSTRÖM T., STOICA P., *System Identification*, Prentice Hall, Grande-Bretagne, 1989.
- [SOL 79] SOLO V., « The Convergence of A.M.L. », *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-24, p. 958-963, 1979.

- [YOU 69] YOUNG P.C., « An Instrumental Variable Method for Real Time Identification of a Noisy Process », *Automatica*, vol. 6, p. 271-288, 1969.
- [YOU 79] YOUNG P.C., JAKEMAN A.J., « Refined Instrumental Variable Methods of Recursive Time Series Analysis », Part I, Single-input, Single-output Systems, *Int. J. of Control*, vol. 29, p. 1-30, 1979.

Chapitre 7

Aspects pratiques de l'identification

On passe en revue divers aspects pratiques concernant l'identification de modèles dynamiques de procédés. On présente plusieurs exemples d'identification de modèles simulés, ainsi que l'identification de plusieurs procédés (aérotherme, colonne à distiller, moteur électrique, transmission souple).

7.1. Acquisition des données entrées/sorties

7.1.1. Protocole d'acquisition

Nous avons vu dans le chapitre 5, paragraphe 5.3, qu'une bonne identification nécessite l'utilisation d'un signal d'excitation (commande) du procédé riche en fréquences. Ce signal sera superposé à la valeur statique de la commande correspondant au point de fonctionnement autour duquel on souhaite faire l'identification du procédé.

En règle générale, on utilise comme signal d'excitation une SBPA (séquence binaire pseudo-aléatoire) de faible amplitude, dont les propriétés ont été examinées au chapitre 5, paragraphe 5.3.2.

On rappelle, que pour pouvoir correctement identifier le gain statique du modèle dynamique du procédé, il faut qu'au moins une des impulsions de la SBPA soit plus grande que le temps de montée du système à identifier. Ceci conduit à la condition suivante :

$$pNT_e \geq t_M$$

où :

T_e = période d'échantillonnage ;

p = diviseur de fréquence ;

$p T_e$ = période de l'horloge du générateur de la SBPA (fréquence l'horloge = f_e/p) ;

N = longueur du registre générateur ;

t_M = temps de montée du système.

L'amplitude de la SBPA ne doit pas dépasser en règle générale quelques pour cents du signal de commande statique.

L'acquisition se fait le plus souvent à l'aide d'un ordinateur muni d'une carte d'acquisition entrées/sorties comportant des convertisseurs analogiques/numériques et numériques/analogiques. La carte est émulée par le calculateur qui fournit la SBPA et la composante continue correspondant au point de fonctionnement.

Le logiciel temps réel WINTRAC (Adaptech) sur PC permet d'engendrer des SBPA, de fournir un signal de commande continu pour définir le point de fonctionnement, et d'effectuer l'opération d'acquisition des entrées et des sorties d'un procédé.

L'annexe A.7. donne le programme pour la génération des SBPA.

Plusieurs configurations de connexion au procédé sont possibles.

Procédé en boucle ouverte

C'est le cas le plus typique et le plus simple. Il est illustré dans la figure 7.1.1.

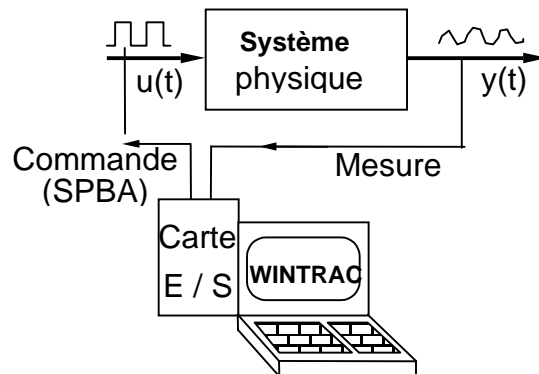


Figure 7.1.1. Acquisition des données pour l'identification - Procédé en boucle ouverte

Dans cette situation, le signal d'excitation superposé au signal de commande du point de fonctionnement est directement appliqué au procédé. *Le lancement du protocole d'acquisition doit être fait une fois que le procédé se trouve dans un régime stationnaire.*

Procédé en boucle fermée

Dans ce cas deux possibilités peuvent être considérées.

Excitation du procédé superposée à la sortie du régulateur

La SBPA est additionnée à la sortie du régulateur, et on procède à l'acquisition de la SBPA, de l'entrée réelle du procédé et de la sortie. Ceci est illustré dans la figure 7.1.2. Le transfert entre y_0 et y_1 sera identifié.

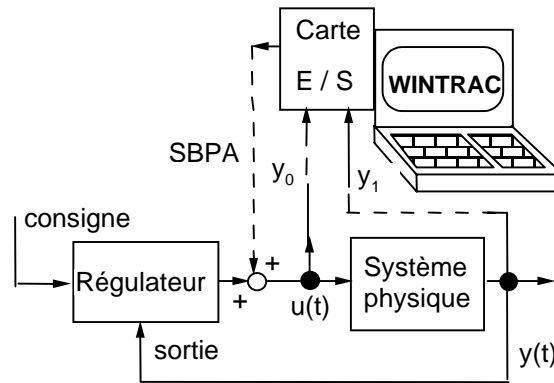


Figure 7.1.2. Acquisition des données pour l'identification - Procédé en boucle fermée avec excitation appliquée à la sortie du régulateur

Excitation sur la consigne

La SBPA est additionnée à la consigne définissant le point de fonctionnement, et on procède à l'acquisition de la SBPA, de l'entrée et de la sortie du procédé. Ceci est illustré dans la figure 7.1.3.

Si l'on souhaite faire l'identification du modèle du procédé à partir des acquisitions en boucle fermée, deux options peuvent être considérées.

Dans le premier cas on essaye d'ignorer la présence du régulateur. Pour ceci il est important d'utiliser un régulateur « mou ». S'il s'agit d'un PID il faut supprimer l'action dérivée et utiliser une action proportionnelle faible mais par contre l'action intégrale est importante pour favoriser le maintien en moyenne du point de fonctionnement. S'il s'agit d'un régulateur R-S-T, conçu sur un modèle imprécis du

procédé, il faut que la boucle fermée soit lente mais la présence d'un intégrateur dans le régulateur est très importante pour le maintien du point de fonctionnement. La qualité du modèle obtenu par cette approche est très variable.

Dans le deuxième cas, on utilise des méthodes spécifiques d'identification en boucle fermée. Ces méthodes qui prennent en compte la présence du régulateur sont présentées dans le chapitre 9. La qualité des modèles obtenus est en général excellente.

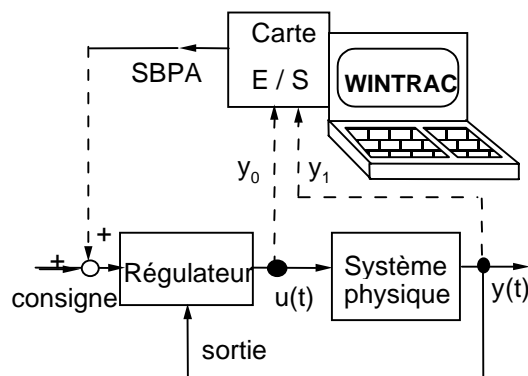


Figure 7.1.3. Acquisition des données pour l'identification - Procédé en boucle fermée avec excitation appliquée sur la consigne

7.1.2. Filtrage antirepliement

Il a été montré dans le chapitre 2, paragraphe 2.2, que la conversion de signaux continus ayant un spectre supérieur à $0.5 f_e$ va introduire une distorsion du signal échantillonné dans la bande utile de 0 à $0.5 f_e$.

Pour éviter cette situation, il faut insérer entre la sortie mesurée du procédé et la carte d'acquisition un *filtre analogique antirepliement* (filtre passe-bas) permettant d'atténuer d'une façon significative les composantes du signal ayant des fréquences supérieures à $0.5 f_e$.

Le non-respect de cette règle peut conduire à d'importantes erreurs lors de l'identification. Même si l'on obtient des modèles échantillonnés qui valident, ceux-ci ne seront pas représentatifs du comportement réel du procédé (respectivement du modèle continu du procédé).

7.1.3. Suréchantillonnage

Différentes situations rencontrées en pratique conduisent à l'utilisation d'une fréquence d'acquisition qui est un multiple de la fréquence d'échantillonnage de la boucle de régulation (suréchantillonnage). Par exemple :

- dans de nombreux systèmes numériques de contrôle et commande (SNCC) la cadence des acquisitions est sensiblement plus rapide que la fréquence d'échantillonnage de la boucle de régulation ;
- dans les systèmes utilisant des périodes d'échantillonnage pour la boucle de régulation supérieures à 1 s, il devient plus difficile d'effectuer un filtrage antirepliement en analogique, et il faut utiliser une technique de filtrage numérique.

Dans les deux cas mentionnés il faut faire une acquisition avec une fréquence multiple de la fréquence d'échantillonnage (ou inversement : la fréquence d'échantillonnage de la boucle de régulation est un sous-multiple de la fréquence d'acquisition) :

$$f_a = n f_e$$

où :

f_a = fréquence d'acquisition ;

n = rapport des fréquences (entier) ;

f_e = fréquence d'échantillonnage de la boucle de régulation.

Le signal discret obtenu après échantillonnage à la fréquence f_a est passé par un filtre numérique antirepliement atténuant toutes les fréquences supérieures à $0.5 f_e = 0.5 f_a/n$. Sur la séquence obtenue à la sortie du filtre antirepliement numérique, on prend alors une donnée tous les n échantillons. La mise en œuvre de l'acquisition par suréchantillonnage est illustrée dans la figure 7.1.4.

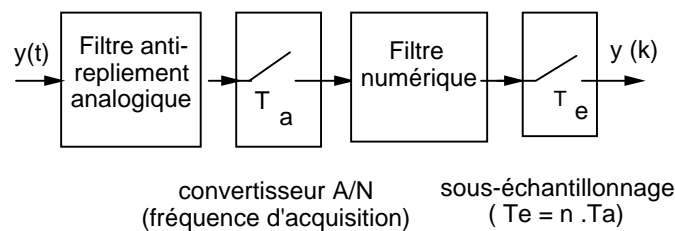


Figure 7.1.4. Mise en œuvre de l'acquisition par suréchantillonnage

Si n est suffisamment grand ($n \geq 4$), un filtre antirepliement type moyenne mobile :

$$y_f(t) = \frac{y(t) + y(t-1) + \dots + y(t-n+1)}{n}$$

est souvent suffisant.

Dans le cas du suréchantillonnage, une attention particulière doit être apportée au choix du diviseur de fréquence d'horloge (p) de la SBPA. *Le diviseur de fréquence p utilisé par la SBPA doit être un multiple de n , pour que la fréquence d'échantillonnage finale f_e reste un multiple de la fréquence d'horloge de la SBPA.*

La fréquence d'horloge de la SBPA est donnée par :

$$f_{SBPA} = \frac{1}{p} f_a$$

La fréquence d'échantillonnage finale est donnée par :

$$f_e = \frac{1}{n} f_a = \frac{p}{n} f_{SBPA}$$

et (p/n) doit être un entier.

7.2. Conditionnement des signaux

7.2.1. Elimination de la composante continue

Les structures des modèles utilisés pour l'identification sont des modèles dynamiques (variations de la sortie en fonction des variations de l'entrée autour d'un point de fonctionnement).

Il convient donc, pour une identification correcte, d'éliminer dans les données entrées-sorties les composantes continues (point de fonctionnement) ou les dérivées lentes du point de fonctionnement.

Cas 1. Elimination des composantes continues stationnaires (ou presque).

Ceci se fait en deux étapes :

- a) on calcule la valeur moyenne (VM) des fichiers E/S ;
- b) on retranche la valeur moyenne des fichiers E/S, et on crée un nouveau fichier.

Cas 2. Elimination des composantes continues non stationnaires (dérives).

On remplace les fichiers des mesures E/S par des variations des mesures E/S éventuellement filtrées.

$$y'(t) = \frac{y(t) - y(t-1)}{1 + f_1 q^{-1}} \quad ; \quad u'(t) = \frac{u(t) - u(t-1)}{1 + f_1 q^{-1}}$$

avec :

$$-0,5 \leq f_1 \leq 0$$

mais d'autres types de filtres peuvent être utilisés.

Ces fonctions sont assurées par exemple dans le progiciel d'identification WinPIM (module « gestion des données »).

7.2.2. Identification d'un procédé contenant un intégrateur pur

On peut identifier directement un procédé incorporant un intégrateur pur. Mais si l'on connaît *a priori* l'existence d'un tel intégrateur, on peut utiliser cette information *a priori* pour réduire la complexité du modèle identifié et améliorer la précision de l'identification. Deux méthodes peuvent être utilisées :

– l'entrée est remplacée par son intégrale, la sortie restant la même :

$$y'(t) = y(t) \quad ; \quad u'(t) = \frac{u(t)}{1 - q^{-1}}$$

– on remplace la sortie par ses variations, l'entrée restant la même :

$$y'(t) = y(t) - y(t-1) \quad ; \quad u'(t) = u(t)$$

On peut éventuellement filtrer aussi $y'(t)$ et $u'(t)$.

Ces fonctions peuvent être réalisées à l'aide du module « gestion de données » du progiciel d'identification WinPIM (Adaptech).

7.2.3. Identification d'un procédé contenant un dérivateur pur

Si l'on connaît l'existence d'un tel dérivateur on peut utiliser cette information. Dans ce cas, l'entrée est remplacée par ses variations, la sortie restant la même :

$$y'(t) = y(t) \quad ; \quad u'(t) = u(t) - u(t-1)$$

7.2.4. Mise à échelle des entrées et sorties

Le vecteur $\Phi(t)$ utilisé dans l'algorithme d'adaptation paramétrique contient des composantes formées par $y(t)$, $y(t-1)$... (ou des variables corrélées avec la sortie) et $u(t)$, $u(t-1)$... :

$$\Phi(t) = [-y(t), -y(t-1), \dots, u(t), u(t-1), \dots]$$

D'autre part le gain d'adaptation $F(t)$ a l'expression :

$$F(t)^{-1} = \sum_{i=1}^t \Phi(i-1)\Phi^T(i-1) + \frac{1}{\delta}I \quad ; \quad \delta \ll 1$$

Si le niveau des $u(t)$, $u(t-1)$... est très différent du niveau de $y(t)$, $y(t-1)$, la matrice de gain sera très déséquilibrée, ce qui conduira à des vitesses de convergence sensiblement différentes pour les paramètres $\hat{a}_i(t)$ et $\hat{b}_i(t)$.

Il convient donc de mettre à l'échelle les fichiers des entrées-sorties (en multipliant si c'est nécessaire soit $u(t)$ soit $y(t)$). Cela aura comme effet une modification du gain statique identifié. Il faudra donc diviser ou multiplier les valeurs des paramètres estimés \hat{b}_i pour obtenir un modèle dont le gain statique est bien celui du procédé.

Cette fonction de mise à échelle est assurée par le module « gestion des données » du progiciel d'identification WinPIM (Adaptech).

7.3. Choix (estimation) de la complexité du modèle

Il s'agit là de la détermination du retard (d) et des degrés des polynômes $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ et $C(q^{-1})$.

Le modèle « procédé + perturbation » à identifier est de la forme :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + w'(t)$$

où, suivant les structures choisies on a :

$$w'(t) = e(t) \quad [7.3.1]$$

$$w'(t) = A(q^{-1})w(t) \quad [7.3.2]$$

$$w'(t) = C(q^{-1})e(t) \quad [7.3.3]$$

$$w'(t) = \frac{1}{C(q^{-1})} e(t) \quad [7.3.4]$$

Pour lancer les méthodes d'estimation des paramètres, nous devons spécifier :

$$n_A = ? \quad ; \quad n_B = ? \quad ; \quad d = ?$$

et pour les structures [S3] et [S4] :

$$n_C = ?$$

où n_A , n_B et n_C sont les degrés des polynômes $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ et $C(q^{-1})$.

Rappelons aussi que l'ordre d'un système échantillonné est donné par $n = \max(n_A, n_B + d)$.

Les techniques d'estimation d'ordre ont été présentées dans le chapitre 6, paragraphe 6.5. Si l'on dispose de fonctions d'estimation de l'ordre il est toujours utile de les utiliser. C'est le cas du progiciel WinPIM, qui permet d'estimer $n = \max(n_A, n_B + d)$, n_A , n_B et d , ou des fonctions *estimorderiv.sci* (Scilab) et *estimorderiv.m* (Matlab), qui estiment n . Mais l'estimation de l'ordre peut se faire aussi à partir des informations « a priori » et d'un certain nombre d'essais. Nous détaillerons cette procédure dans ce qui suit.

Choix « a priori » de n_A

Nous distinguons deux cas :

1) procédé industriel (régulation de température, débit, concentration, etc.).

Pour ce type de procédés en général :

$$n_A \leq 3$$

et la valeur $n_A = 2$, qui est très typique, est un bon choix pour démarrer.

2) systèmes électromécaniques.

n_A résulte de l'analyse structurelle du système.

EXEMPLE.— Transmission souple avec 2 modes de vibrations. Dans ce cas, on choisit $n_A = 4$, car il faut un 2^e ordre pour modéliser chaque mode vibratoire.

Choix initial de d et n_B

Si on n'a pas de connaissances sur le retard, on choisit une valeur initiale : $d = 0$.
Si on connaît une valeur minimale, on choisit une valeur initiale $d = d_{min}$.

Si le retard a été sous-estimé lors de l'identification, les premiers coefficients de $B(q^{-1})$ vont être très faibles. Il faut donc choisir n_B suffisamment grand pour qu'il puisse indiquer la présence des retards tout en permettant d'identifier le numérateur de la fonction de transfert. On choisit alors comme valeur initiale : $n_B = (d_{max} - d_{min}) + 2$.

Il faut en général au minimum deux coefficients dans $B(q^{-1})$ à cause du retard fractionnaire (voir paragraphe 2.3.7). Si le retard est connu, on choisit $n_B \geq 2$, mais 2 reste une bonne valeur initiale.

Choix initial de n_C

On choisit en règle générale $n_C = n_A$.

Détermination du retard d (1^{re} approximation)

Méthode 1. On identifie avec les MCR.

$$\hat{B}(q^{-1}) = \hat{b}_1 q^{-1} + \hat{b}_2 q^{-2} + \hat{b}_3 q^{-3} + \dots$$

Si :

$$|\hat{b}_1| \leq 0.15 |\hat{b}_2|$$

on considère $b_1 \approx 0$, et on augmente le retard d de 1 : $d = d_{in} + 1$ (car si $b_1 = 0$, $B(q^{-1}) = q^{-1} (b_2 q^{-1} + b_3 q^{-2})$).

Si :

$$|\hat{b}_1| < 0.15 |\hat{b}_{d_i+1}| ; \quad i = 1, 2, \dots, d_i$$

on augmente le retard d de d_i : $d = d_{in} + d_i$. Après ces modifications on relance l'identification.

Méthode 2. On identifie avec les MCR un modèle de type « réponse impulsionnelle » :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t-i) \quad ; \quad n_B = \text{grand} \quad (20, \dots, 30)$$

S'il y a un retard pur alors :

$$\left| \hat{b}_1 \right| < 0.15 \left| \hat{b}_{d+1} \right| \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, d$$

Avec cette estimation du retard, on relance l'identification avec un modèle pôles-zéros.

Bien entendu, ces deux méthodes peuvent être complétées par une visualisation de la réponse à un échelon.

L'estimation plus précise du retard d se fait lors d'un deuxième passage dans l'algorithme d'identification, suivi d'une validation du modèle identifié. Notons que si le système est bruité, une estimation précise du retard ne se fera qu'avec la méthode qui permettra de valider le modèle identifié.

Détermination des $(n_A)_{max}$ et $(n_B)_{max}$

L'objectif est d'obtenir le modèle identifié le plus simple qui vérifie les critères de validation. Ceci est lié d'une part à la complexité du régulateur (qui dépendra de n_A et n_B), mais aussi à la robustesse du modèle identifié vis-à-vis des conditions de fonctionnement.

Sur la base des résultats donnés dans le paragraphe 6.5, une première approche pour estimer les valeurs de $(n_A)_{max}$ et $(n_B)_{max}$ est d'utiliser les MCR et d'étudier l'évolution de la variance des erreurs de prédiction résiduelles, c'est-à-dire l'évolution de :

$$R(0) = E\{\varepsilon^2(t)\} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t)$$

en fonction de la valeur de $n_A + n_B$. Une courbe typique est donnée dans la figure 7.3.1.

S'il s'agit d'un exemple simulé et non bruité, la courbe présente un coude net suivi d'un segment horizontal, qui indique que l'accroissement du nombre de paramètres n'améliore pas les performances (voir paragraphe 6.5, figure 6.5.1).

En pratique, ce coude n'est pas franc si il y a du bruit et si ce bruit n'est pas blanc. Le test pratique qu'on peut utiliser pour déterminer $n_A + n_B$ est le suivant :

soit n_A , n_B et la variance correspondante des erreurs résiduelles $R(0)$. Soit $n_A' = n_A + 1$, n_B et la variance correspondante des erreurs résiduelles $R'(0)$. Si :

$$R'(0) \geq 0.8R(0)$$

il n'est pas raisonnable d'augmenter le degré de n_A (même essai avec $n_B' = n_B + 1$).

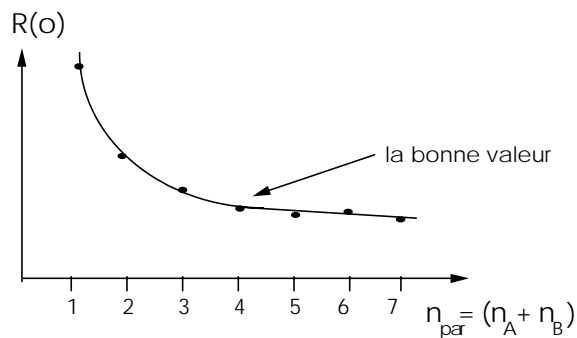


Figure 7.3.1. Evolution de la variance des erreurs résiduelles en fonction du nombre des paramètres du modèle

Il est souhaitable d'augmenter alternativement les valeurs de n_A et n_B . Une augmentation simultanée peut induire une paire de pôles et des zéros très proches qui auront peu d'effet sur le critère par rapport à l'augmentation de n_A ou de n_B mais qui risque de provoquer des problèmes pour le calcul du régulateur.

Avec le choix qui résulte pour n_A et n_B , le modèle identifié par les MCR ne vérifie pas nécessairement le critère de validation. Il faut alors, tout en gardant n_A et n_B , essayer d'autres structures et méthodes pour obtenir un modèle « valide ». Si l'essai de toutes les méthodes ne permet pas d'obtenir un modèle donnant une validation satisfaisante, alors il faut augmenter n_A et n_B .

Les valeurs numériques estimées des coefficients des puissances les plus élevées des polynômes $\hat{A}(q^{-1})$ et $\hat{B}(q^{-1})$ (après l'estimation du retard d) donnent aussi des indications sur l'ordre maximum à choisir. Si ces valeurs sont très faibles par rapport aux précédentes il est souvent possible de réduire l'ordre de $\hat{A}(q^{-1})$ et $\hat{B}(q^{-1})$ (il faut bien entendu relancer l'identification avec l'ordre le plus faible).

Bien qu'il est toujours bon de confronter les résultats d'une estimation automatique de l'ordre (en utilisant les techniques données dans le paragraphe 6.5) avec les informations disponibles, l'utilisation de ces techniques d'estimation automatique de l'ordre permet de réduire considérablement la durée de la recherche des bonnes valeurs pour n_A et n_B et d .

7.4. Exemples simulés d'identification

Nous allons considérer deux fichiers de données simulées entrée/sortie TØ et T1. Chaque fichier contient 256 enregistrements entrée/sortie. L'entrée est dans chaque cas une SBPA engendrée par un registre de longueur 8 et donc une longueur d'une séquence complète est de 255. Ces fichiers ont été engendrés avec le logiciel WinPIM, module « simulation des systèmes »¹.

Le fichier TØ a été obtenu avec le modèle suivant :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-1}B(q^{-1})u(t)$$

où :

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}$$

$$B(q^{-1}) = 1q^{-1} + 0.5q^{-2}$$

Le fichier T1 a été engendré avec les mêmes polynômes $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$, mais des perturbations stochastiques ont été rajoutées, le modèle étant de la forme ARMAX :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-1}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t)$$

où $\{e(t)\}$ est un bruit presque blanc engendré par le calculateur et le degré $C(q^{-1})$ est $n_C = 2$.

FICHER TØ

Revenons maintenant au fichier TØ². La figure 7.4.1. donne une visualisation des entrées et des sorties contenues dans le fichier TØ. Pour le fichier TØ, en utilisant la méthode des *moindres carrés récursif* (MCR) avec gain d'adaptation décroissant, on obtient les résultats suivants :

1. Ces fichiers sont disponibles aussi sur les sites : <http://www.adaptech.com> et <http://www-lag.ensieg.inpg.fr/bookIC>.

2. Avant toute opération d'identification ne pas oublier de centrer les données.

S = 1	M = 1(M.C.R.)	A = 1	FICHER : T0	RETARD D = 1
	INSTANT K			= 50
	FACTEUR D'OUBLI			= 1
	TRACE DU G.A.			= 7.106747E-02
	SORTIE DU PROCESSUS			= -5.030791
	SORTIE DU MODELE			= -5.030789
	ENTREE DU PROCESSUS			= -1
	ERREUR DE PREDICTION			= -1.430511E-06
A(1) = -1.49999	A(2) = .69999	B(1) = .99998	B(2) = .50000	

où S , M , A désignent respectivement la structure, la méthode et le type de gain d'adaptation³ (voir chapitre 5, paragraphes 5.5 et 5.2.4). $A(1)$, $A(2)$, $B(1)$, $B(2)$ désignent les coefficients estimés des polynômes $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$. On observe une convergence très rapide des paramètres estimés vers les bonnes valeurs (valeurs initiales $A(1) = A(2) = B(1) = B(2) = 0$) le système n'étant pas bruité.

Des résultats similaires s'obtiennent avec la méthode de l'erreur de sortie à compensateur fixe, gain d'adaptation décroissant, et degré du compensateur $n_D=0$ (erreur d'adaptation = erreur de prédiction), comme il est indiqué ci-après.

S = 2	M = 4 (E.S.C.F.)	A = 1	FICHER: T0	RETARD D = 1
	INSTANT K			= 50
	FACTEUR D'OUBLI			= 1
	TRACE DU G.A.			= 7.107091E-02
	SORTIE DU PROCESSUS			= -5.030791
	SORTIE DU MODELE			= -5.031748
	ENTREE DU PROCESSUS			= -1
	ERREUR DE PREDICTION			= 9.570122E-04
A(1) = -1.50000			B(1) = 1.00002	
A(2) = .700000			B(2) = .49993	

3. $S = 1$ désigne la structure S1, $M = 1$ désigne la première méthode utilisée pour la structure S1 et $A=1$ correspond au type de gain d'adaptation A.1 décrit dans le paragraphe 5.2.4.

Nous pouvons aussi mettre en évidence sur le fichier TØ, l'identification du retard pur (entier) en absence d'information a priori. En effet, avec les moindres carrés récursifs et gain d'adaptation décroissant nous obtenons pour $n_A = 2$ et $n_B = 4$ et $d = 0$:

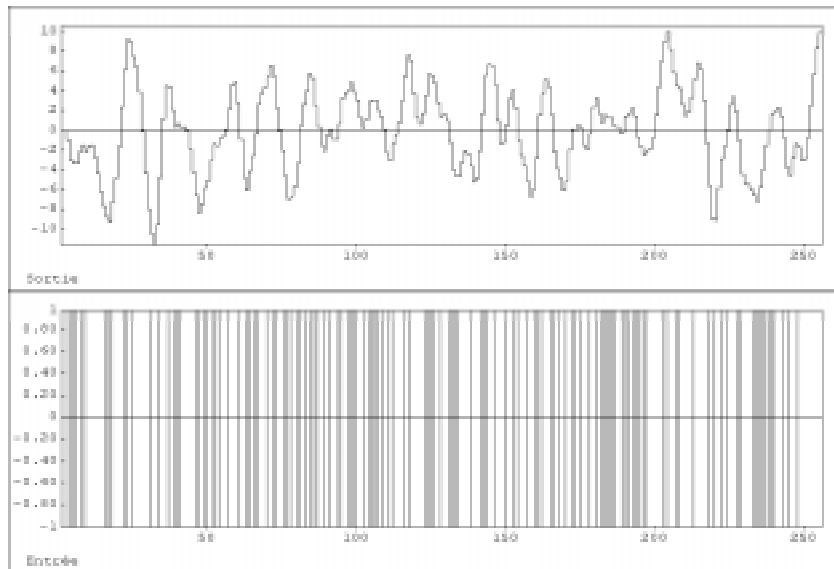


Figure 7.4.1. Fichier TØ : visualisation des entrées et des sorties

S = 1	M = 1 (M.C.R.)	A = 1	FICHIER : T0	RETARD D = 0
	INSTANT K		= 50	
	FACTEUR D'OUBLI		= 1	
	TRACE DU G.A.		= .1623274	
	SORTIE DU PROCESSUS		= -5.030791	
	SORTIE DU MODELE		= -5.030764	
	ENTREE DU PROCESSUS		= -1	
	ERREUR DE PREDICTION		= -2.717972E-05	
	A(1) = -1.49998	B(1) = 5 .39346E-06	B(3) = .50001	
	A(2) = .699984	B(2) = .99998	B(4) = 2.62828E-05	

Les résultats obtenus ($B(1)$ et $B(4)$ très petits par rapport à $B(2)$ et $B(3)$) indiquent clairement que $d = 1$ et $n_B = 2$. Mais attention, si la situation est aussi nette sur cet exemple simulé c'est parce qu'il n'y a pas de bruit perturbateur.

FICHER T1

Le fichier T1 est fortement bruité et certaines méthodes (en particulier les moindres carrés récurrents) vont donner des résultats biaisés. La qualité de l'identification va se refléter dans les résultats obtenus lors de la validation. L'estimation a été faite sur 256 échantillons et la validation a été faite sur le même jeu de données entrées/sorties.

Les résultats obtenus avec les *moindres carrés récurrents* à gain décroissant sont donnés ci-après ⁴ :

S = 1 M = 1 (M.C.R.) A = 1 FICHER : T1 NE = 256 RETARD D = 1	
COEFFICIENTS DU POLYNOME A : A(1) = -1.403533	
A(2) = .6066453	
COEFFICIENTS DU POLYNOME B : B(1) = .9831312	
B(2) = .6512049	
TEST DE VALIDATION : Blancheur de l'erreur résiduelle	
Variance Système : 18.3791	Variance Modèle : 17.9035
Variance Erreur R(0) : 0.4749	
FONCTIONS D'AUTOCORRELATION NORMALISEES	
Critère de validation : Val. Théor. : $ RN(i) \leq 0.136$, Val.Prat. : $ RN(i) \leq 0.15$	
RN(0) = 1.000000	--> RN(1) = -0.505234 <--
RN(2) = 0.115732	RN(3) = -0.054398
RN(4) = 0.016311	

On constate l'apparition d'un biais (erreur) sur les coefficients estimés, ce qui se reflète dans les résultats de validation qui ne sont pas satisfaisants ($|RN(I)| > 0.15$). L'erreur de prédiction résiduelle n'est pas proche d'un bruit blanc. Il convient donc de considérer une autre structure « procédé + perturbation » comme par exemple S3 qui remplace le modèle de perturbation $e(t)$ dans la structure S1 par $C(q^{-1})e(t)$.

Nous choisissons, parmi les méthodes d'identifications applicables à la structure [7.3.3], la méthode de *l'erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu* (M3) et gain d'adaptation décroissant (A1). Les résultats obtenus sur l'ensemble du fichier sont donnés ci-après :

4. Dans les tableaux qui suivent *la variance système* correspond à la variance de la sortie mesurée, *la variance modèle* correspond à la variance de la sortie prédite et *la variance erreur* correspond à la variance de l'erreur de prédiction résiduelle ($R(0)$).

S = 3 M = 3 (ESMPE) A = 1 FICHER : T1 NE = 256 RETARD D = 1	
COEFFICIENTS DU POLYNOME A	A(1) = -1.50009 A(2) = .69614
COEFFICIENTS DU POLYNOME B	B(1) = .95782 B(2) = .54005
COEFFICIENTS DU POLYNOME C	C(1) = -.83917 C(2) = 0.05308
TEST DE VALIDATION : Blancheur de l'erreur résiduelle	
Variance Système : 18.3791	Variance Modèle : 18.1894
Variance Erreur R(0) : 0.2571	
FONCTIONS D'AUTOCORRELATION NORMALISEES	
<i>Critère de validation</i> : Val. Théor. : $ RN(i) \leq 0.136$, Val.Prat. : $ RN(i) \leq 0.15$	
RN(0) = 1.000000	RN(1) = -0.141702
RN(2) = 0.021206	RN(3) = 0.008497
RN(4) = 0.051014	

On constate que les valeurs estimées de $A(1)$, $A(2)$ et $B(2)$ sont meilleures que dans le cas des moindres carrés récursifs (la somme des carrés du biais est plus faible dans ce cas). D'autre part, les résultats de validation sont acceptables, car toutes les fonctions d'autocorrélation normalisées $RN(1)$ à $RN(4)$ ont un module inférieur à 0.15. L'erreur de prédiction résiduelle se rapproche plus d'un bruit blanc, et sa variance a été réduite par rapport à l'estimation à l'aide des moindres carrés récursifs.

Les résultats obtenus peuvent être améliorés si on utilise l'erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu, mais avec un gain d'adaptation à facteur d'oubli variable ($A3$ avec $\lambda_T(0) = 0.97$). On obtient :

S = 3 M = 3 (ESMPE) A = 3 FICHER : T1 NE = 256 RETARD D = 1	
COEFFICIENTS DU POLYNOME A :	A(1) = -1.508445 A(2) = .70574
COEFFICIENTS DU POLYNOME B :	B(1) = .95120 B(2) = .52940
COEFFICIENTS DU POLYNOME C :	C(1) = -.90610 C(2) = 0.08344
TEST DE VALIDATION : Blancheur de l'erreur résiduelle	
Variance Système : 18.3791	Variance Modèle : 18.2276
Variance Erreur R(0) : 0.2531	
FONCTIONS D'AUTOCORRELATION NORMALISEES	
<i>Critère de validation</i> : Val. Théor. : $ RN(i) \leq 0.136$, Val.Prat. : $ RN(i) \leq 0.15$	
RN(0) = 1.0000	RN(1) = -0.091665
RN(2) = 0.032701	RN(3) = 0.025042
RN(4) = 0.064717	

qui correspond à une amélioration des résultats en termes de blancheur et variance de l'erreur de prédiction résiduelle d'une part et en terme de la somme des carrés des biais d'autre part.

Des résultats meilleurs que ceux obtenus avec la méthode des moindres carrés récurrents peuvent être obtenus aussi avec la structure S2 en utilisant la méthode *d'erreur de sortie à compensateur fixe* avec gain d'adaptation décroissant et degré du compensateur $n_D = 0$ (erreur d'adaptation = erreur de prédiction). Les résultats obtenus sont donnés ci-après :

S = 2 M = 3 (ESCF) A = 1 FICHIER : T1 NE = 256 RETARD D = 1	
COEFFICIENTS DU POLYNOME A	A(1) = -1.52885 A(2) = .73410
COEFFICIENTS DU POLYNOME B	B(1) = .93228 B(2) = .51900
TEST DE VALIDATION : Décorrélation prédiction / erreur	
Variance Système : 18.3791	Variance Modèle : 18.5921
Variance Erreur R(0) : 0.4860	
FONCTIONS D'INTERCORRELATION NORMALISEES	
Critère de validation : Val. Théor. : $ RN(i) \leq 0.136$, Val.Prat. : $ RN(i) \leq 0.15$	
RN(0) = -0.116266	RN(1) = -0.028968 RN(2) = 0.103195

Dans le tableau suivant sont donnés les résultats de validation (test de décorrélation) obtenus sur la même structure mais en utilisant le jeu de paramètres identifiés précédemment par les moindres carrés récurrents.

S = 1 M = 1 (MCR) A = 1 FICHIER : T1 NE = 256 RETARD D = 1	
COEFFICIENTS DU POLYNOME A	A(1) = -1.403533 A(2) = .6066453
COEFFICIENTS DU POLYNOME B	B(1) = .9831312 B(2) = .6512049
TEST DE VALIDATION : Décorrélation prédiction/erreur	
Variance Système : 18.3791	Variance Modèle : 18.5921
Variance Erreur R(0) : 0.76355	
FONCTIONS D'INTERCORRELATION NORMALISEES	
Critère de validation : Val. Théor. : $ RN(i) \leq 0.136$, Val.Prat. : $ RN(i) \leq 0.15$	
RN(0) =	.248184
--> RN(1) =	.313691 <--
--> RN(2) =	0.284383 <--

On voit que les paramètres estimés par la méthode de l'erreur de sortie à compensateur fixe sont meilleurs que ceux obtenus par les moindres carrés récursifs. Ceci est corroboré aussi par les résultats des validations, car on réduit les intercorrélations $RN(0)$, $RN(1)$ et $RN(2)$ (c'est $RN(1)$ et $RN(2)$ qui interviennent dans $E\{\phi(t) \varepsilon(t+1)\}$ pour l'exemple considéré, car $n_A = 2$).

Enfin, on peut montrer que même en présence d'un bruit significatif, le retard entier peut être déterminé à partir des valeurs relatives des coefficients du polynôme $B(q^{-1})$. On obtient pour $d = 0$, $n_B = 3$, $n_A = 2$, en utilisant la méthode des moindres carrés récursifs les résultats suivants :

S = 1	M = 1 (MCR)	A = 1	FICHER : T1	RETARD	D = 0
	INSTANT K			= 256	
	FACTEUR D'OUBLI			= 1	
	TRACE DU G.A.			= 1.574461E-02	
	SORTIE DU PROCESSUS			= 11.39311	
	SORTIE DU MODELE			= 11.06473	
	ENTREE DU PROCESSUS			= -1	
	ERREUR DE PREDICTION			= .3283825	
	A(1) = -1.4043			B(1) = -5.39615E-02	
	A(2) = .60742			B(2) = .98315	
				B(3) = .65067	

On voit que $|B(1)| < 0.15 |B(2)|$. Il faut donc considérer $d = 1$ et $n_B = 2$.

EXERCICE.– Comparez le modèle obtenu utilisant la méthode d'erreur de sortie avec compensateur fixe ($S = 2$, $M = 4$) avec le modèle obtenu utilisant la méthode d'erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu ($S = 3$, $M = 3$). Voir chapitre 6, paragraphe 6.4 pour la méthodologie de comparaison.

Si l'on utilise la technique d'estimation de la complexité du modèle (en utilisant le critère d'erreur [6.5.17] et le critère d'estimation de complexité [6.5.19] mis en œuvre dans le progiciel WinPIM) on obtient le minimum pour $n = \max(n_A, n_B + d) = 3$ ce qui est effectivement la bonne valeur (voir figure 7.4.2). Une estimation détaillée de la complexité conduit à $n_A = 2$, $n_B = 2$ et $d = 1$.

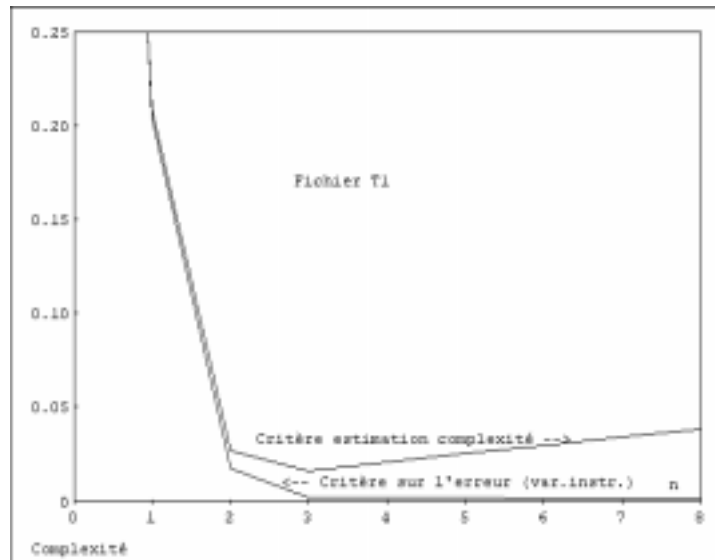


Figure 7.4.2. Estimation de la complexité du modèle à identifier ($n = \max(n_A, n_B + d)$) à partir des données du fichier T1

7.5. Exemples d'identification de procédés

7.5.1. Aérotherme

Le schéma du procédé est représenté dans la figure 7.5.1. L'air est chauffé à l'entrée du tube à l'aide d'une résistance électrique alimentée par un amplificateur de puissance. La circulation de l'air est assurée par un ventilateur. La température de l'air à la sortie est mesurée par un thermocouple. On s'intéresse à identifier, autour d'une certaine température, le modèle dynamique reliant la commande de l'amplificateur de puissance à la température de l'air de sortie. La caractéristique statique de l'aérotherme + amplificateur de puissance est non linéaire. Cela a comme effet l'apparition d'une composante continue en sortie, même pour des signaux d'entrée centrés et de faible amplitude.

Les données ont été acquises pour un point de fonctionnement correspondant à une température de sortie de 60° et une commande $u_0 = 5 \text{ V}$ ($y_0(t) = 3.2 \text{ V}$).

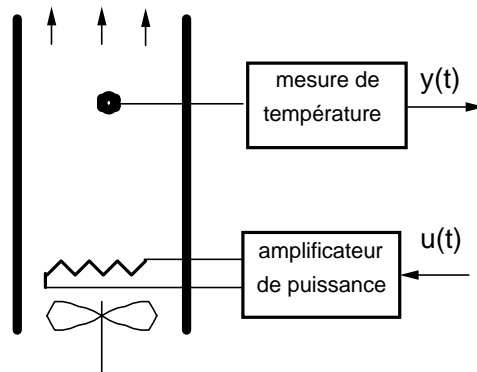


Figure 7.5.1. Représentation schématique de l'aérotherme (laboratoire d'automatique de Grenoble INPG/CNRS)

Le fichier *AERO.dat* contient 128 données entrées/sorties brutes obtenues avec une période d'échantillonnage de 5 s. L'entrée a été une SBPA engendrée avec un registre de longueur 6 et une fréquence d'horloge $f_c/2$ (longueur de la séquence : 126 échantillons). Le fichier de données brutes a été centré. Les données entrée-sortie du fichier centré *AERO.c⁵* sont représentées dans la figure 7.5.2.

On démarre une première identification en utilisant la structure S1 et la méthode des moindres carrés récurrents M1 avec gain décroissant. S'agissant d'un procédé thermique, $n_A = 2$ peut être un bon choix initial. D'autre part $d = 0$ (pas d'information sur le retard) et $n_B = 2$. On obtient les résultats suivants :

S = 1	M = 1(M.C.R.)	A = 1	FICHER : AERO.C	NE = 128	RETARD D = 0
COEFFICIENTS DU POLYNOME A :			A(1) = -0.66872		
			A(2) = 0.00115		
COEFFICIENTS DU POLYNOME B :			B(1) = 0.17360		
			B(2) = 0.05424		

Clairement, le système a un retard pur inférieur à $0.5 T_e$, donc le choix $d=0$ était bon. Le coefficient $A(2)$ étant très faible (produit des pôles) on conclut qu'un des pôles a une valeur très faible et donc peut être négligé.

5. Disponible sur le site : <http://www-lag.ensieg.inpg.fr/bookIC>.

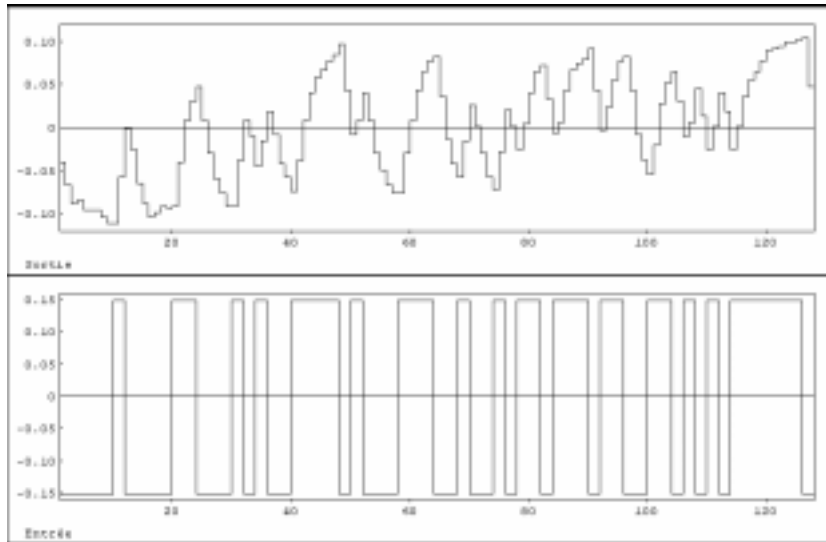


Figure 7.5.2. Fichier des entrées/sorties pour l'aérotherme (AERO.c)

Cette structure de modèle est aussi compatible avec l'estimation de la complexité fournie par le progiciel WinPIM (estimation par la méthode de la variable instrumentale à entrées retardées) qui donne $n = \max(n_A, n_B + d) = 2$ et respectivement $n_A = 1$, $n_B = 2$, $d = 0$.

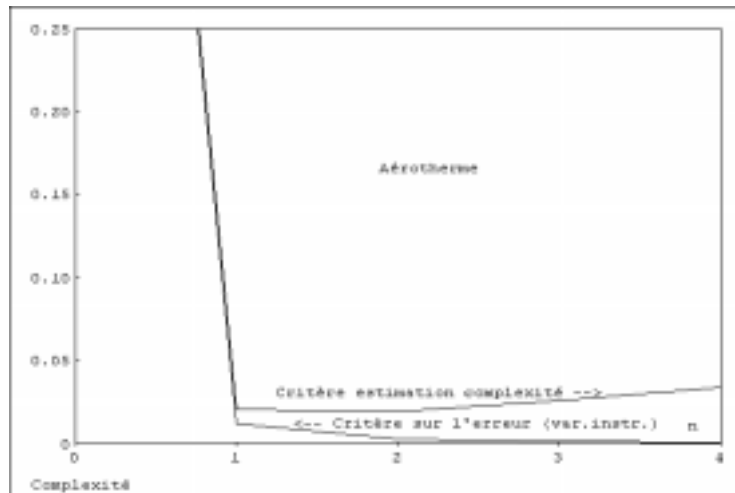


Figure 7.5.3. Estimation de la complexité du modèle de l'aérotherme à partir du fichier de données AERO.c

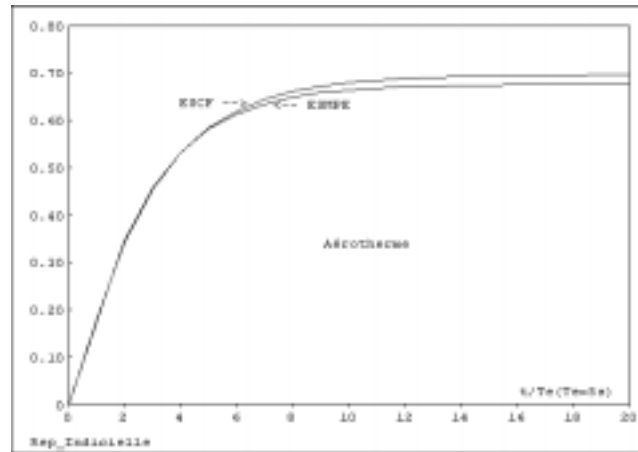


Figure 7.5.4. Réponses à un échelon des modèles identifiés de l'aérotherme.
 a) ESMPE, erreur de sortie à modèle de prédiction étendu, facteur d'oubli variable, $d = 0$, $n_A = 1$, $n_B = 2$; b) ESCF, erreur de sortie à compensateur fixe, $d = 0$, $n_A = 1$, $n_B = 2$

La réponse à un échelon de ce modèle est représentée dans la figure 7.5.4 (courbe ESMPE).

On peut considérer aussi d'utiliser la structure S2 qui doit permettre une identification asymptotiquement non biaisée sans modélisation de la perturbation. On choisit la méthode de l'erreur de sortie à compensateur fixe M3 en prenant $n_D = 0$ (car $n_A = 1$), c'est-à-dire sans compensateur et avec gain d'adaptation à facteur d'oubli variable ($\lambda_1(0) = 0.97$). On obtient :

```
S = 2 M = 4 (ESCF) A = 3 FICHER : AERO.C NE = 128 RETARD D = 0
COEFFICIENTS DU POLYNOME A : A(1) = -0.6837
COEFFICIENTS DU POLYNOME B : B(1) = 0.1771
                               B(2) = 0.043
TEST DE VALIDATION : Décorrélation Prédiction/Erreur
  Variance Système : 0.00351      Variance Modèle : 0.00317
  Variance Erreur R(0) : 9.77 E-05
FONCTIONS D'INTERCORRELATION NORMALISEES
Critère de validation : Val. Théor. : |RN(i)| ≤ 0.192, Val. Prat. : |RN(i)| ≤ 0.15
RN(0) = -0.2208      RN(1) = 0.1508
RN(2) = 0.0432      RN(3) = 0.0116
RN(4) = 0.0469
```

La réponse à un échelon de ce modèle est représentée dans la figure 7.5.4. (courbe ESCF). Le modèle obtenu par l'erreur de sortie à compensateur fixe à un gain statique légèrement plus grand que le modèle précédent et un temps de montée légèrement plus lent.

Dans ce cas, pour pouvoir apprécier la qualité comparative des résultats, il faut se créer une référence (voir chapitre 6, paragraphe 6.4) en utilisant pour le test de décorrélation le jeu de paramètres identifiés précédemment par la méthode de l'erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu. Ceci donne les résultats suivants :

S = 3 M = 3 (ESMPE) A = 1 FICHER : AERO.C NE = 128 RETARD D = 0	
COEFFICIENTS DU POLYNOME A : A(1) = -0.6589	
COEFFICIENTS DU POLYNOME B : B(1) = 0.1724	
B(2) = 0.0579	
TEST DE VALIDATION : Décorrélation Prédiction/Erreur	
Variance Système : 0.00351	Variance Modèle : 0.00317
Variance Erreur R(0) : 1.02E-04	
FONCTIONS D'INTERCORRELATION NORMALISEES	
Critère de validation : Val. Théor. : $ RN(i) \leq 0.192$, Val. Prat.: $ RN(i) \leq 0.15$	
RN(0) = -0.2154	RN(1) = -0.1465
RN(2) = -0.1033	RN(3) = -0.1094
RN(4) = -0.1769	

Les deux modèles passent le test de validation et les résultats sont très proches.

Comme les deux modèles sont très proches, on utilisera un des deux modèles pour le calcul du régulateur et on testera le régulateur sur les deux modèles.

7.5.2. Colonne à distiller

Le schéma de la colonne binaire (eau-méthanol) faisant l'objet de l'identification est donné dans la figure 7.5.5a et une vue du procédé est présentée dans la figure 7.5.5b.

Les variables de commande sont la puissance de chauffe (QB) et le taux de reflux (R). Le débit (LF) et la concentration (XF) du produit d'entrée sont supposés constants (leurs variations provoquent des perturbations dans le système). Les variables réglées sont le débit du produit de tête (LD) et la concentration du produit de tête (XD) (T désigne la température et (LB) le débit du produit de fond. Le schéma bloc correspondant est donné dans la figure 7.5.6.

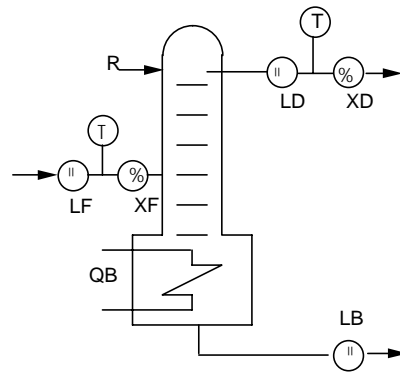


Figure 7.5.5a. Colonne à distiller binaire

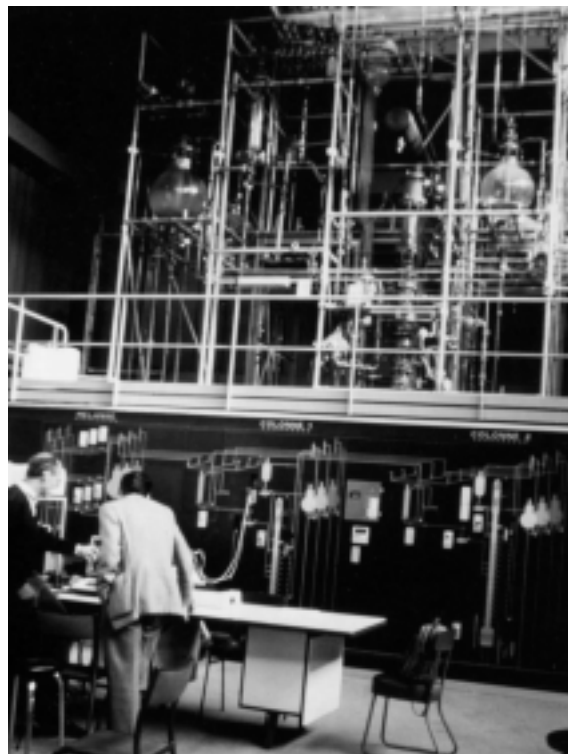


Figure 7.5.5b. Vue de la colonne à distiller binaire
(laboratoire d'automatique de Grenoble, INPG/CNRS)

Autour d'un point de fonctionnement, les variations des sorties et des entrées seront reliées entre elles par un modèle linéaire caractérisé par une matrice de transfert 2×2 :

$$\begin{bmatrix} LD \\ XD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(q^{-1}) & H_{12}(q^{-1}) \\ H_{21}(q^{-1}) & H_{22}(q^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ QB \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

où w_1 et w_2 représentent les perturbations non modélisées. Chaque élément de la matrice de transfert est de la forme :

$$H_{ij}(q^{-1}) = \frac{q^{-d}(b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots)}{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots}$$

qui correspond à un modèle de la forme :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + w(t)$$

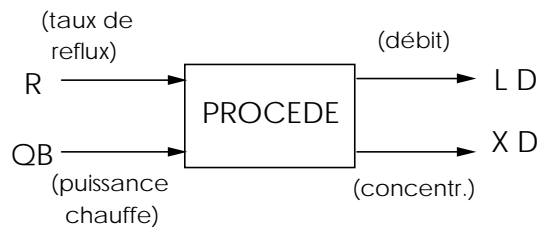


Figure 7.5.6. Schéma bloc entrées-sorties de la colonne à distiller

Nous nous intéressons par la suite à l'identification du transfert entre la puissance de chauffe (QB) et la concentration du produit de tête (XD). Le fichier entrées/sorties porte le nom QXD⁶ (livré avec WinPIM). Il contient 256 paires de mesures. L'entrée est une séquence binaire pseudo-aléatoire avec une longueur de registre $N = 8$ ($L = 255$). La figure 7.5.7 donne une visualisation des entrées et des sorties du fichier QXD centré. La période d'échantillonnage a été de 10 s.

6. Disponible sur les sites <http://www.adaptech.com> et <http://www-lag.ensieg.inpg.fr>.

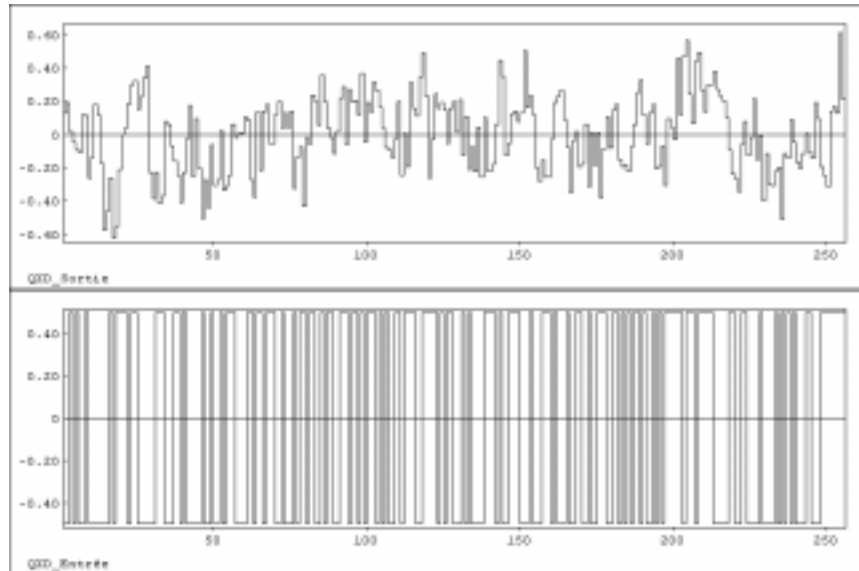


Figure 7.5.7. Fichier des entrées/sorties pour la colonne à distiller QXD

Le fichier à identifier étant centré, l'identification paramétrique peut être commencée. En l'absence d'informations a priori, nous choisissons, pour commencer, la structure S1, la méthode des moindres carrés récursifs (M1) et un gain d'adaptation décroissant A1, retard $d = 0$, degré du polynôme B : $n_B = 4$ (pour pouvoir prendre en compte des retards éventuels) et degré du polynôme A : $n_A = 2$ (s'agissant d'un procédé chimique). La valeur initiale des paramètres estimés a été prise égale à zéro. Les résultats obtenus sont donnés ci-après :

S = 1	M = 1 (MCR)	A = 1	FICHER : QXD	NE = 256	RETARD D = 0
	INSTANT K				= 256
	FACTEUR D'OUBLI				= 1
COEFFICIENTS DU POLYNOME A :		A(1) =	-.23644		
		A(2) =	-.21889		
COEFFICIENTS DU POLYNOME B :		B(1) =	0.01177		
		B(2) =	0.07982		
		B(3) =	.18311		
		B(4) =	.13271		

On constate que $B(1) < 0.15 B(2)$. Il convient donc de considérer qu'il y a au moins un retard d'un pas.

On refait donc une nouvelle identification avec $d = 1$, $n_B = 3$, $n_A = 2$ et les résultats obtenus sont :

S = 1 M = 1(MCR) A = 1 FICHER : QXD NE = 256 RETARD D = 1	
COEFFICIENTS DU POLYNOME A	A(1) = -.23806 A(2) = -.18820
COEFFICIENTS DU POLYNOME B	B(1) = .07982 B(2) = .18303 B(3) = .13244
TEST DE VALIDATION : Blancheur de l'erreur résiduelle	
Variance Système : 0.0542	Variance Modèle : 0.0274
Variance Erreur R(0) : 0.0268	
FONCTIONS D'AUTOCORRELATION NORMALISEES	
<i>Critère de validation</i> : Val. Théor. : $ RN(i) \leq 0.136$, Val. Prat. : $ RN(i) \leq 0.15$	
RN(0) = 1.0000	RN(1) = -0.1216
--> RN(2) = -0.2278 <--	RN(3) = 0.0112
RN(4) = 0.0718	

On constate que la validation n'est pas satisfaisante, car l'erreur résiduelle n'est pas suffisamment blanche ($|RN(2)| > 0.15$). On essaie alors une structure différente (S3) et la méthode de l'erreur de sortie à modèle de prédiction étendu (M3) toujours avec gain d'adaptation décroissant. Ainsi, nous identifierons le modèle de la perturbation. Les résultats obtenus sont :

S = 3 M = 3 (ESMPE) A = 1 FICHER : QXD NE = 256 RETARD D = 1	
COEFFICIENTS DU POLYNOME A	A(1) = -.5065 A(2) = -.1595
COEFFICIENTS DU POLYNOME B	B(1) = 0.0908 B(2) = .1612 B(3) = .0776
COEFFICIENTS DU POLYNOME C	C(1) = -.4973 C(2) = -.2593
TEST DE VALIDATION : Blancheur de l'erreur résiduelle	
Variance Système : 0.0542	Variance Modèle : 0.0308
Variance Erreur R(0) : 0.0231	
FONCTIONS D'AUTOCORRELATION NORMALISEES	
<i>Critère de validation</i> : Val. Théor. : $ RN(i) \leq 0.136$, Val. Prat. : $ RN(i) \leq 0.15$	
RN(0) = 1.000000	RN(1) = -0.0241
RN(2) = -0.0454	RN(3) = 0.0518
RN(4) = 0.1014	

Les résultats de validation obtenus sont satisfaisants. C'est donc un modèle représentatif. La figure 7.5.8 donne la réponse à un échelon de ce modèle avec $n_A = 2$ (gain normalisé).

L'analyse de cette réponse permet de déterminer que le temps de montée : $t_M \approx 10 T_e$ (avec le retard $d = 1$), ce qui correspond à une fréquence d'échantillonnage relativement élevée. D'autre part, la longueur du registre générateur de la SBPA étant $N = 8$, la durée de la plus grande impulsion est inférieure à t_M . La validation ne sera donc pas significative pour le gain statique (plusieurs modèles peuvent être validés sans que leur gain statique soit le même). Une vérification directe du gain statique montre que la valeur obtenue (0.987) est correcte.

Notons aussi que le polynôme $B(q^{-1})$ est instable, $B(1) < B(2)$ indiquant l'existence d'un retard fractionnaire équivalent supérieur à $0.5 T_e$.

Comme le coefficient $A(2)$ est relativement faible par rapport à $A(1)$ et que les résultats de validation sont très bons, on peut essayer d'identifier un modèle avec $n_A = 1$. Les résultats obtenus sont :

S = 3 M = 3 (ESMPE) A = 1 FICHER : QXD NE = 256 RETARD D = 1	
COEFFICIENTS DU POLYNOME A	A(1) = -.7096
COEFFICIENTS DU POLYNOME B	B(1) = .0839
	B(2) = 0.1415
	B(3) = 0.0528
COEFFICIENTS DU POLYNOME C	C(1) = -.688
TEST DE VALIDATION : Blancheur de l'erreur résiduelle	
Variance Système : 0.0542	Variance Modèle : 0.02952
Variance Erreur R(0) : 0.0227	
FONCTIONS D'AUTOCORRELATION NORMALISEES	
<i>Critère de validation</i> : Val. Théor. : $ RN(i) \leq 0.136$, Val. Prat. : $ RN(i) \leq 0.15$	
RN(0) = 1.0000	RN(1) = -0.0035
RN(2) = -0.0748	RN(3) = -0.0131
RN(4) = 0.0442	

Le modèle obtenu passe les tests de validation. Le gain statique du modèle est de 0.958. Il conviendra donc d'ajuster les coefficients de $B(q^{-1})$ pour obtenir le même gain statique que précédemment (bien que l'effet de cette différence de gain est négligeable).

Les réponses normalisées à un échelon des deux modèles sont représentées dans la figure 7.5.8.

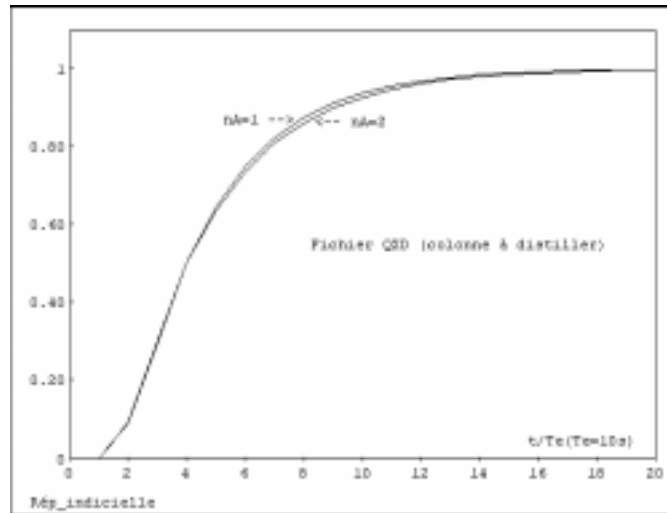


Figure 7.5.8. Réponses normalisées à un échelon du transfert QXD pour les deux modèles identifiés (gain statique normalisé à 1)

7.5.3. Moteur à courant continu

Il s'agit de l'identification d'un moteur à courant continu. L'entrée du procédé est la tension de commande d'un amplificateur de puissance qui alimente l'induit du moteur, et la sortie est la vitesse mesurée à travers une génératrice tachimétrique. Une description sommaire du procédé est présentée dans la figure 7.5.9. Du point de vue de l'identification on considère l'ensemble : amplificateur de puissance, moteur, génératrice tachimétrique, filtre de la mesure.

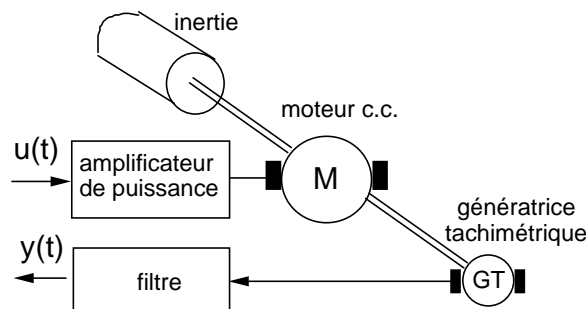


Figure 7.5.9. Représentation schématique du moteur à c.c. et des éléments additionnels

Le fichier *MOT3.c*⁷ contient 256 données entrées/sorties centrées obtenues avec une période d'échantillonnage de 15 ms. L'entrée a été une SBPA engendrée avec un registre de longueur 7 et un fréquence d'horloge $f_c/2$ (longueur de la séquence : 254). L'amplitude de la SBPA a été de 0.3 V et elle a été appliquée autour d'un point de fonctionnement correspondant à une tension d'entrée de 3 V (l'échelle des u : 0 - 10 V correspondant à une variation de vitesse de 0 à + 1 500 rpm). Ce fichier est représenté dans la figure 7.5.10.

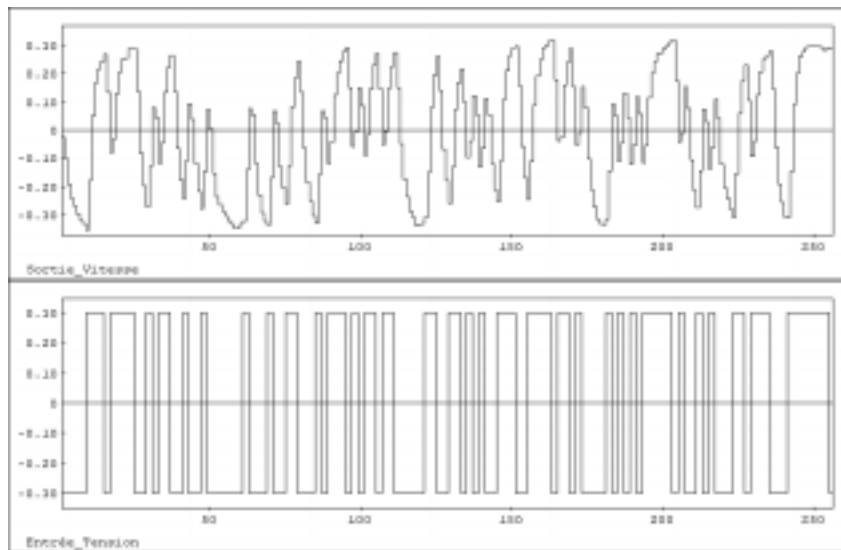


Figure 7.5.10. Fichier des entrées/sorties pour le moteur à c.c. (*MOT3.c*)

En utilisant l'algorithme d'estimation de complexité (méthode de la variable instrumentale à entrée retardée) du progiciel WinPIM on obtient (voir figure 7.5.11) :

$$n = \max(n_A, n_B + d) = 2$$

L'estimation détaillée de la complexité donne les valeurs $n_A = 1$, $n_B = 2$, $d = 0$. Cette complexité est cohérente avec le modèle physique du moteur de courant continu qui a un maximum de deux constantes de temps, mais où la constante électrique est certainement dans ce cas très faible par rapport à la constante de temps électromécanique. L'absence de retard est aussi logique dans le cas de ce système.

7. Disponible sur le site : <http://www-lag.ensieg.inpg.fr/bookIC>.

La valeur , $n_B = 2$ met en évidence l'existence d'un retard fractionnaire qui reflète l'effet du filtrage antirepliement sur la mesure.

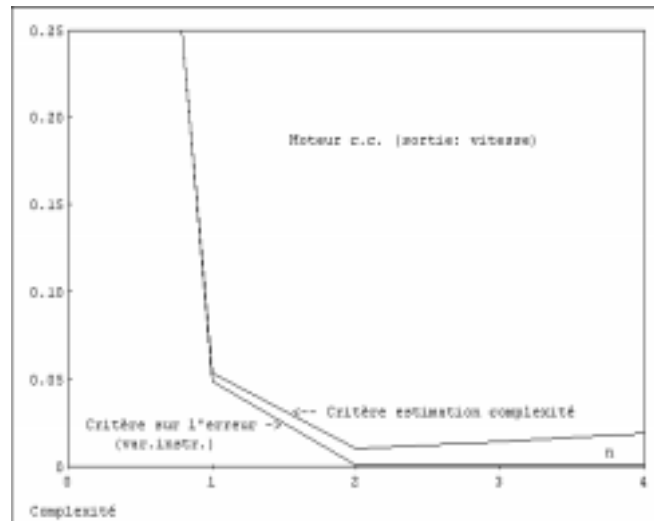


Figure 7.5.11. Estimation de la complexité du modèle du moteur de courant continu (entrée : tension, sortie : vitesse) à partir du fichier de données MOT3.c

En effectuant une première identification en utilisant la structure (S1) et l'algorithme des moindres carrés récursifs (M1) avec un gain décroissant on obtient les résultats suivants :

S = 1 M = 1(MCR) A = 1 FICHIER : MOT3.c NE = 256 RETARD D = 0	
COEFFICIENTS DU POLYNOME A	A(1) = - 0.5402
COEFFICIENTS DU POLYNOME B	B(1) = 0.2629
	B(2) = 0.2257
TEST DE VALIDATION : Blancheur de l'erreur résiduelle	
Variance Système : 0.0412	Variance Modèle : 0.041
Variance Erreur R(0) : 1.157 E-4	
FONCTIONS D'AUTOCORRELATION NORMALISEES	
Critère de validation : Val. Théor.: RN(i) ≤ 0.136, Val. Prat. : RN(i) ≤ 0.15	
RN(0) = 1.0000	--> RN(1) = - 0.4529 <--
RN(2) = 0.3113	RN(3) = 0.0332
RN(4) = - 0.0297	

Le modèle obtenu ne valide pas.

On refait un essai avec la structure S3 en utilisant la méthode de l'erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu (M3) qui estime simultanément un modèle de la perturbation en prenant $n_C = 1$ (bien entendu toujours avec un gain d'adaptation décroissant). Les résultats obtenus sont les suivants :

S = 3 M = 3 (ESMPE) A = 1 FICHIER:MOT3.c NE = 256 RETARD D = 0	
COEFFICIENTS DU POLYNOME A	A(1) = - 0.5372
COEFFICIENTS DU POLYNOME B	B(1) = 0.2628 B(2) = 0.2273
COEFFICIENTS DU POLYNOME C	C(1) = 0.3808
TEST DE VALIDATION : Blancheur de l'erreur résiduelle	
Variance Système : 0.0412	Variance Modèle : 0.041
Variance Erreur R(0) : 1.004 E-04	
FONCTIONS D'AUTOCORRELATION NORMALISEES	
<i>Critère de validation</i> : Val. Théor.: $ RN(i) \leq 0.136$, Val. Prat. : $ RN(i) \leq 0.15$	
RN(0) = 1.0000	RN(1) = - 0.0144
--> RN(2) = 0.3414 <--	RN(3) = 0.0952
RN(4) = 0.0399	

On observe que le modèle obtenu ne valide pas encore. Si on suppose que $n_C = 1$ ne permet pas de modéliser d'une manière satisfaisante la perturbation (car $RN(2)$ a encore une valeur importante), il convient de refaire un essai avec $n_C = 2$. On obtient les résultats suivants pour le test de blancheur des erreurs de prédiction résiduelles et pour le test de décorrélation prédiction/erreur de sortie résiduelle :

S = 3 M = 3 (ESMPE) A = 1 FICHIER : MOT3.c NE = 256 RETARD D = 0		
COEFFICIENTS DU POLYNOME A	A(1) = - 0.535	
COEFFICIENTS DU POLYNOME B	B(1) = 0.2617	B(2) = 0.2288
COEFFICIENTS DU POLYNOME C	C(1) = - 0.84848	C(2) = 0.19255
TEST DE VALIDATION : Blancheur de l'erreur résiduelle		
Variance Système : 0.0042	Variance Modèle : 0.041	Variance Erreur R(0) : 8.856 E-05
FONCTIONS D'AUTOCORRELATION NORMALISEES		
<i>Critère de validation</i> : Val. Théor.: $ RN(i) \leq 0.136$, Val. Prat. : $ RN(i) \leq 0.15$		
RN(0) = 1.0000	RN(1) = - 0.0432	RN(2) = 0.0404
RN(3) = 0.0453	RN(4) = 0.01179	
TEST DE VALIDATION : Décorrélation Prédiction/Erreur		
Variance Système : 0.0412	Variance Modèle : 0.0408	Variance Erreur R(0) : 2.71 E-04
FONCTIONS D'INTERCORRELATION NORMALISEES		
<i>Critère de validation</i> : Val. Théor.: $ RN(i) \leq 0.136$, Val. Prat. : $ RN(i) \leq 0.15$		
RN(0) = 0.0119	RN(1) = 0.0156	RN(2) = 0.0284
RN(3) = 0.0356	RN(4) = 0.0186	

On observe que le test de blancheur est satisfait et que le test de décorrélation est satisfait aussi. On a donc un modèle qui valide.

On peut néanmoins essayer une autre structure et méthode pour la même complexité du modèle de procédé. En choisissant la structure S2 et la méthode de l'erreur de sortie avec compensateur fixe (M4) qui doit permettre une estimation asymptotique non biaisée sans modélisation de la perturbation, on obtient ($d = 0$) :

S = 2 M = 4 (ESCF) A = 1 FICHER : MOT2C NE = 256 RETARD D = 0	
COEFFICIENTS DU POLYNOME A	A(1) = - 0.5347
COEFFICIENTS DU POLYNOME B	B(1) = 0.2629
	B(2) = 0.2266
TEST DE VALIDATION : Décorrélation Prédiction/Erreur	
Variance Système : 0.0412	Variance Modèle : 0.0406
Variance Erreur R(0) : 2.723 E -04	
FONCTIONS D'INTERCORRELATION NORMALISEES	
Critère de validation : Val. Théor. : $ RN(i) \leq 0.136$, Val. Prat.: $ RN(i) \leq 0.15$	
RN(0) = 0.043	RN(1) = 0.0591 RN(2) = 0.0631
RN(3) = 0.0564	RN(4) = 0.031

On observe que les résultats de validation très bons, mais légèrement moins bons que ceux obtenus avec la méthode d'erreur de sortie à modèle de prédiction étendu. Par ailleurs, les paramètres obtenus dans les deux cas sont très proches. Les réponses à un échelon des deux modèles sont indiscernables et sont représentées dans la figure 7.5.12.

7.5.4. Transmission souple

Il s'agit de l'identification en vue de sa commande du modèle dynamique d'une transmission souple qui présente des modes de vibration très peu amortis. Une vue de la transmission souple est donnée dans la figure 7.5.13 et le schéma du système de commande est représenté dans la figure 7.5.14.

La transmission souple se compose de trois poulies reliées par des ressorts (voir figure 7.5.13). L'une des poulies est solidaire avec l'axe d'un moteur à courant continu. Le moteur est asservi en position par un asservissement analogique local (retour vitesse et position). La dynamique de l'asservissement local de position est beaucoup plus rapide que celle du système mécanique. Le problème de commande est de positionner la troisième poulie en agissant sur la tension de consigne de l'asservissement de position du moteur qui entraîne la première poulie. La sortie $y(t)$ du procédé est la position angulaire de la troisième poulie et la commande $u(t)$ est la

consigne de position de la première poulie. Les charges mécaniques sur la troisième poulie modifient l'inertie du système et par conséquent, les modes de vibration du système mécanique. Nous nous intéressons par la suite à l'identification en boucle ouverte du modèle du procédé (entre $u(t)$ et $y(t)$) pour le cas sans charge.

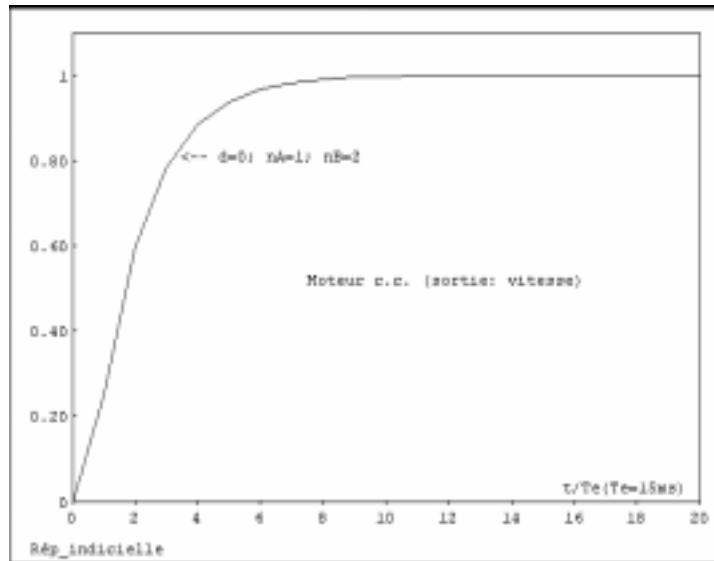


Figure 7.5.12. Réponses à un échelon des modèles identifiés du moteur à courant c.c. (erreur de sortie à modèle de prédiction étendu et erreur de sortie à compensateur fixe avec $d = 0$, $n_A = 1$, $n_B = 2$)



Figure 7.5.13. Vue de la transmission souple (laboratoire d'automatique de Grenoble INPG/CNRS/UJF)

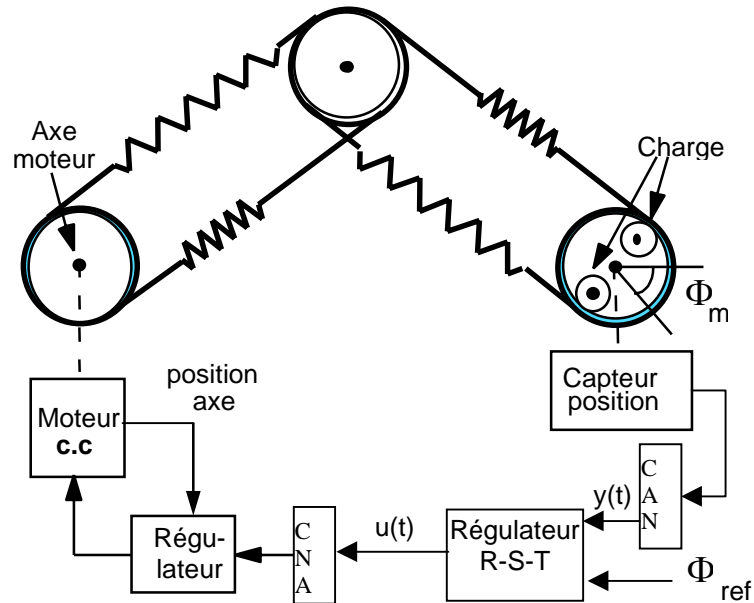


Figure 7.5.14. Schéma de commande de la transmission souple

La fréquence d'échantillonnage choisie est de 20 Hz ($T_e = 50ms$). Le signal d'excitation est une SBPA de faible amplitude engendrée par un registre de longueur $N = 7$ et avec un diviseur de fréquence $p = 2$. Le fichier entrée/sortie centré (*poulbo1.c*) contient 256 données. La figure 7.5.15 donne une visualisation des données du fichier *poulbo1.c*⁸.

Le système a deux modes de vibration ce qui suggère d'utiliser $n_A = 4$. Mais en utilisant le progiciel WinPIM nous pouvons estimer l'ordre du modèle en utilisant les techniques décrites dans le chapitre 6, paragraphe 6.5.

Les résultats obtenus sont illustrés dans la figure 7.5.16 qui indique clairement que l'ordre à choisir pour le modèle à estimer est⁹ :

$$n = \max(n_A, n_B + d) = 4$$

Une estimation détaillée donne les valeurs $n_A = 4$, $n_B = 2$, $d = 2$.

8. Disponible sur le site : <http://www-lag.ensieg.inpg.fr>.

9. Le risque de surestimation donné par WinPIM est de 0,8 %, ce qui indique qu'il est très peu probable de pouvoir estimer un bon modèle avec n inférieure à 4.

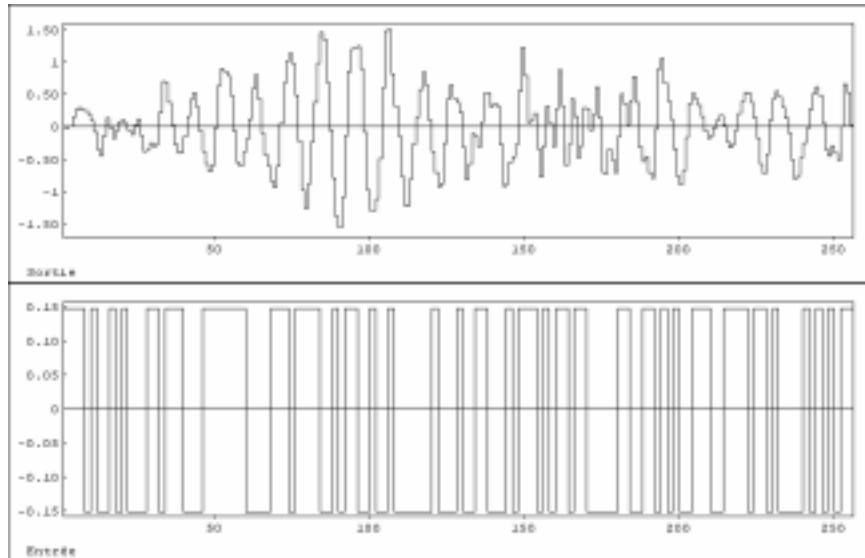


Figure 7.5.15. Visualisation du fichier entrée / sortie pour la transmission souple

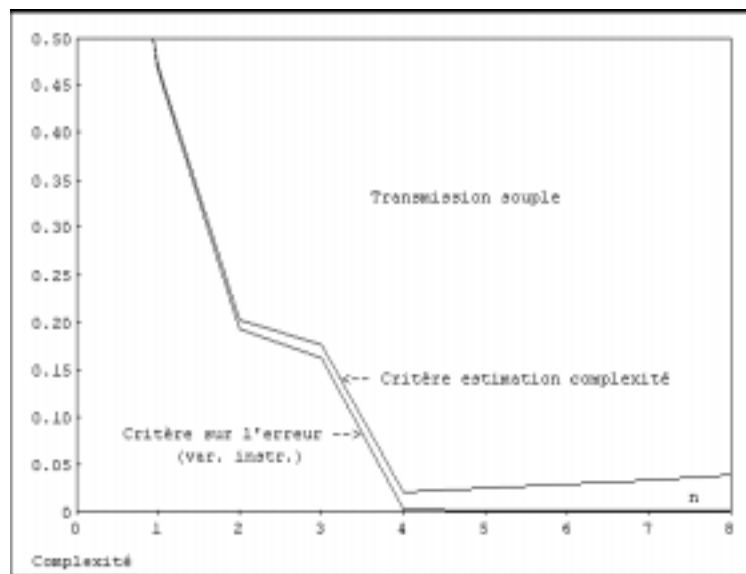


Figure 7.5.16. Estimation de la complexité du modèle de la transmission souple à partir du fichier poulb01.c

L'estimation du retard peut être vérifiée en faisant une estimation par les MCR, avec $n_A = n_B = 4$, $d = 0$. Les résultats obtenus sont les suivants :

S = 1 M = 1(MCR) A = 1 FICHIER : POULBO1.C RETARD D = 0	
A(1) = -1.6189	B(1) = 0.0302
A(2) = 1.8975	B(2) = -0.0154
A(3) = -1.5410	B(3) = 0.2880
A(4) = 0.9141	B(4) = 0.4325

On observe que $|B(1)|, |B(2)| \ll 0.15|B(3)|$ ce qui permet de conclure qu'effectivement $d = 2$. En effectuant maintenant une nouvelle identification paramétrique avec $d = 2$, $n_B = 2$, $n_A = 4$ en utilisant la structure S1 et les méthodes des moindres carrés récursifs on obtient les résultats suivants :

S = 1 M = 1 (MCR) A = 1 FICHIER : POULBO1.C NE = 256 RETARD D = 2		
COEFFICIENTS DU POLYNOME A : A(1) = -1.6184		
A(2) = 1.8968	A(3) = -1.54074	A(4) = 0.91429
COEFFICIENTS DU POLYNOME B : B(1) = 0.2776 B(2) = 0.4377		
TEST DE VALIDATION : Blancheur de l'erreur résiduelle		
Variance Système : 0.3317 Variance Modèle : 0.3299 Variance Erreur R(0) : 0.0016		
FONCTIONS D'AUTOCORRELATION NORMALISEES		
Critère de validation : Val. Théor. : $ RN(i) \leq 0.136$, Val. Prat. : $ RN(i) \leq 0.15$		
RN(0) = 1.0000	-->RN(1) = -0.4809 <--	
-->RN(2) = 0.2355 <--	RN(3) = 0.0305	
RN(4) = -0.0273		

On observe que la validation n'est pas satisfaisante ($RN(1)$, $RN(2)$ sont supérieurs à 0.15). La caractéristique fréquentielle de ce modèle est représentée dans la figure 7.5.17 (courbe MCR).

On essaie alors la structure S3 qui introduit une modélisation de la perturbation (modèle ARMAX). On utilise la méthode de l'erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu (ESMPE) et gain d'adaptation décroissant (A1). Les résultats d'identification et validation sont donnés ci-après :

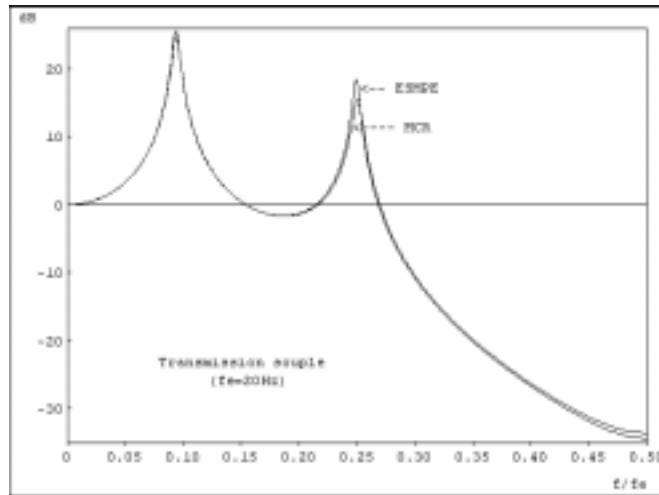


Figure 7.5.17. Caractéristiques fréquentielles des modèles identifiés de la transmission souple (MRC : moindres carrés récurrents, ESMPE : erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu)

S = 3 M = 3 (ESMPE) A = 1 FICHER : POULBO1.C NE = 256 RETARD D = 2		
COEFFICIENTS DU POLYNOME A : A(1) = -1.6394		
A(2) = 1.9410	A(3) = -1.5833	A(4) = 0.9309
COEFFICIENTS DU POLYNOME B : B(1) = 0.2771 B(2) = 0.4232		
COEFFICIENTS DU POLYNOME C : C(1) = -0.6381		
C(2) = 0.4523	C(3) = -0.0608	C(4) = -0.0594
TEST DE VALIDATION : Blancher de l'erreur résiduelle		
Variance Système : 0.3317		Variance Modèle : 0.3314
Variance Erreur R(0) : 0.0011		
FONCTIONS D'AUTOCORRELATION NORMALISEES		
Critère de validation : Val. Théor. : $ RN(i) \leq 0.136$, Val. Prat. : $ RN(i) \leq 0.15$		
RN(0) = 1.0000	RN(1) = 0.1021	
RN(2) = -0.0109	RN(3) = 0.0152	RN(4) = -0.0240

La validation est très satisfaisante, car tous les modules des $RN(i)$ sont inférieurs à 0.136 pour $i = 1, 2, 3, 4$. La caractéristique fréquentielle de ce modèle est représentée dans la figure 7.5.17 (courbe ESMPE).

En comparant cette caractéristique avec celle obtenue à partir du modèle identifié par les moindres carrés récurrents, on constate que la validation satisfaisante de ce modèle correspond à une meilleure identification du 2^e mode de vibration.

7.6. Conclusion

Dans ce chapitre on a montré comment se conduit effectivement une opération d'identification d'un procédé. Les différentes étapes peuvent se résumer ainsi :

- acquisition des entrées/sorties en utilisant une SBPA (séquence binaire pseudo-aléatoire) comme entrée ;
- conditionnement des données acquises (élimination de la composante continue, mise à échelle, filtrage) ;
- sélection ou estimation initiale de l'ordre du système $n = \max(n_A, n_B + d)$;
- sélection ou estimation des valeurs de n_A , n_B , d soit par des techniques d'estimation d'ordre, soit par examen des valeurs numériques ;
- identification et validation de modèles utilisant différentes structures *procédé* + *perturbation* et différentes méthodes d'identification avec l'objectif d'obtenir le meilleur modèle acceptable pour les valeurs les plus petites de n_A et n_B ;
- analyse du modèle identifié et validé dans le domaine temporel et/ou fréquentiel.

7.7. Bibliographie

- [ADA 01] ADAPTECH *La Lettre d'Adaptech*, 4 rue du Tour de L'Eau, St. Martin d'Hères, France, 1990-2001.
- [ISE 80] ISERMANN R., « Practical aspects of process identification », *Automatica*, vol. 16, p. 575-587, 1980.
- [LAN 93] LANDAU I.D., ROLLAND F., « Identification and digital control of electrical drives », *Control Engineering Practice*, vol. 1, n° 3, 1993.
- [LAN 96] LANDAU I.D., LANGER J., REY D., BARNIER J., « Robust control of a 360° flexible arm using the combined pole placement (sensitivity function shaping method) », *IEEE Trans. On Control Systems Technology*, vol. 4, n° 4, p. 369-383, juillet 1996.
- [LAN 01] LANDAU I.D., « Identification des systèmes. Les bases », dans *Identification des systèmes*, I.D. Landau, A. Besançon-Voda (Eds.), Hermès, Paris, 2001.
- [RIC 91] RICHALET J., *Pratique de l'identification*, Hermès, Paris, 1991.
- [VAN 86] VAN DEN BOSSCHE E., DUGARD L., LANDAU I.D., « Modelling and Identification of a Flexible Arm », *Proceedings American Control Conference*, Seattle, Etats-Unis, 1986.

Chapitre 8

Aspects pratiques de la régulation numérique

Les méthodes de calcul des régulateurs numériques et l'identification des modèles dynamiques des procédés fournissent les outils de base pour la conception d'un système de commande-régulation performant. Dans ce chapitre, on met en exergue les étapes finales de la conception des régulateurs numériques.

La première partie du chapitre passe en revue différents aspects de la mise en œuvre des régulateurs numériques : effets de la conversion numérique/analogique, des saturations, du retard de calcul, le passage manuel/automatique, les différents supports matériels, l'adaptation des paramètres du régulateur, le choix et la mesure des performances.

Dans la deuxième partie du chapitre, on illustre, à travers des applications, comment utiliser conjointement les techniques d'identification et de calcul des régulateurs pour concevoir un système de régulation performant et robuste. Les applications décrites concernent :

- la régulation de température d'un aérotherme,*
- la régulation de vitesse d'un moteur de c.c.,*
- la régulation en cascade de la position d'un moteur de c. c.,*
- la régulation de position à travers une transmission souple,*
- la régulation de la position d'un bras manipulateur souple,*
- la régulation d'épaisseur de zinc sur la ligne de galvanisation par essorage de Sollac-Florange.*

8.1. Mise en œuvre des régulateurs numériques

8.1.1. Choix des performances désirées

Le choix des performances désirées, en termes de temps de réponse, est lié d'une part, à la dynamique du procédé en boucle ouverte et à la disponibilité de puissance de l'actionneur pendant le transitoire, et d'autre part aux considérations de « robustesse ».

En effet, l'accélération de la réponse naturelle d'un processus nécessite des « pointes » de commande en transitoire, supérieures à la valeur stationnaire.

Si, par exemple, un procédé a la fonction de transfert $1/(1 + sT)$ et nous souhaitons accélérer le système en boucle fermée deux fois, c'est-à-dire obtenir une fonction de transfert $1/(1 + sT/2)$, on aura transitoirement $u_{max} = 2 u_{stat}$ (u_{stat} = valeur de la commande en régime stationnaire).

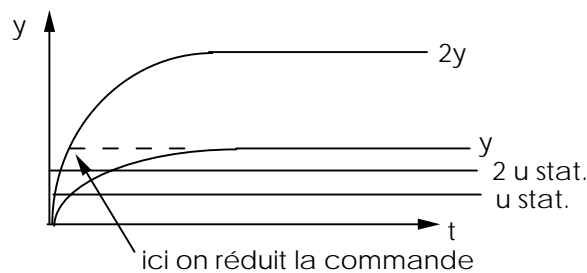


Figure 8.1.1. Accélération de la réponse naturelle d'un procédé

Ceci est illustré dans la figure 8.1.1. En appliquant $2u_{stat}$, nous atteignons la valeur $2y$ au bout de la réponse naturelle du système, mais la valeur y va être obtenue approximativement au bout d'une durée égale à la moitié du temps de réponse. Le régulateur devra alors réduire la commande à u_{stat} pour atteindre en stationnaire la valeur souhaitée y .

On peut alors considérer la relation :

$$\frac{u_{max}}{u_{stat}} \approx \frac{\text{vitesse désirée}}{\text{vitesse naturelle}} \approx \frac{\text{bande passante désirée}}{\text{bande passante naturelle}}$$

Il résulte que les performances en boucle fermée dépendront de la disponibilité de puissance de l'actionneur. Ou vice versa, il faudra choisir les actionneurs en fonction des performances désirées et de la réponse en boucle ouverte du procédé.

En ce qui concerne la structure des modèles de spécification des performances en poursuite ($A_m(q^{-1})$) et en régulation ($P(q^{-1})$), on choisit de préférence, pour un même temps de réponse, des modèles du 2^e ordre au lieu des modèles du 1^{er} ordre. Ce choix est dicté par le fait que, pour un même temps de réponse les sollicitations transitoires des actionneurs seront plus faibles avec des modèles du 2^e ordre (à cause d'une pente plus faible de la réponse au début du transitoire).

Il a été montré, dans le chapitre 2, paragraphe 2.6, que la robustesse du système en boucle fermée vis-à-vis des incertitudes ou des variations des paramètres du modèle de procédé dépend du rapport entre la bande passante (respectivement *temps de montée*) de la dynamique de régulation en boucle fermée (définie essentiellement par $P(q^{-1})$), et la bande passante (respectivement *temps de montée*) du procédé en boucle ouverte (définie essentiellement par $A(q^{-1})$ – le dénominateur de la fonction de transfert du procédé). Plus ce rapport est proche de 1, plus la robustesse est, en général, meilleure (en supposant que le système est stable en boucle ouverte).

Dans le cas où la dynamique de régulation souhaitée en boucle fermée est sensiblement plus rapide que la dynamique du procédé en boucle ouverte, il est plus difficile d'assurer les marges typiques de robustesse. Dans ce cas il faut :

- 1) optimiser le choix des racines de $P(q^{-1})$ et des parties fixes de $S(q^{-1})$ et $R(q^{-1})$ pour obtenir les meilleures marges de robustesse possibles ;
- 2) améliorer la qualité du modèle du procédé et réduire les incertitudes par :
 - une meilleure identification conduisant à un modèle représentatif pour une bande de fréquences plus grande (correspondant à la bande passante désirée en boucle fermée),
 - une réduction des plages de fonctionnement pour lesquelles on considère un seul modèle de procédé, et donc un seul régulateur,
 - l'utilisation d'une « commande adaptative ».

A noter que les techniques d'identification en boucle fermée qui sont décrites dans le chapitre 9 permettent, en règle générale, d'améliorer la qualité des modèles destinés au calcul des régulateurs performants.

En ce qui concerne la dynamique de poursuite désirée, celle-ci est surtout limitée par la puissance des actionneurs. Néanmoins, si cette dynamique est sensiblement plus rapide que celle du procédé, les dynamiques hautes fréquences du procédé vont être excitées. Il convient donc, dans ces cas, de disposer d'un modèle du procédé, représentatif du comportement du procédé au-delà de sa bande passante.

8.1.2. Effet du retard de calcul

Nous distinguons deux situations :

1) temps de calcul égal ou supérieur à $0.5 T_e$. Dans ce cas, les valeurs mesurées à l'instant t sont utilisées pour le calcul de la commande u qui sera envoyée à l'instant $t+1$. Le calculateur introduit donc un retard entier de 1 et le nouveau retard à considérer pour la conception du régulateur sera :

$$d' = d + 1$$

Ceci est illustré dans la figure 8.1.2a ;

2) temps de calcul inférieur à $0.5 T_e$. Dans ce cas, la commande est envoyée dès la fin du calcul. Ceci est illustré dans la figure 8.1.2b. Le calculateur introduit alors un retard fractionnaire, qui se traduit par l'introduction d'un zéro ou la modification des zéros existants dans la fonction de transfert échantillonné du procédé. Cet effet est négligeable si le temps de calcul est sensiblement plus petit que la période d'échantillonnage.

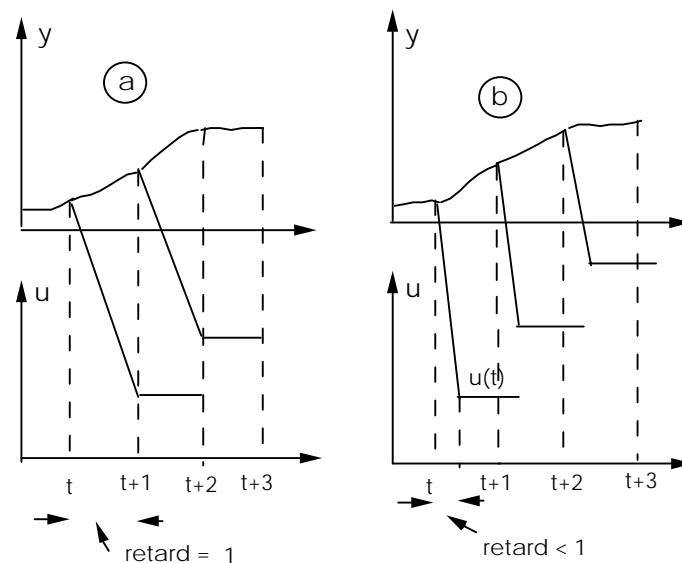


Figure 8.1.2. Procédure de conversion pour la mesure et la commande calculée.
a) temps de calcul supérieur à $0.5 T_e$; b) temps de calcul inférieur à $0.5 T_e$

8.1.3. Effets du convertisseur numérique/analogique

Les commandes envoyées par les régulateurs numériques, souvent calculées en virgule flottante (ou fixe) sur 16, 32 ou 64 bits, ont un nombre de valeurs distinctes supérieur au nombre des valeurs distinctes d'un convertisseur numérique/analogique qui, en général, ne dépasse pas 12 bits (4 096 valeurs différentes seulement).

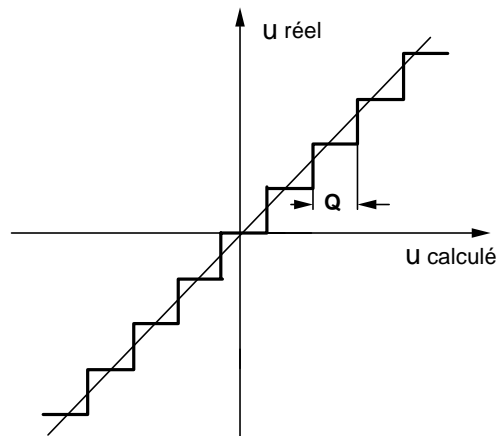


Figure 8.1.3. Caractéristiques du convertisseur numérique/analogique

La figure 8.1.3 montre la caractéristique d'un convertisseur numérique/analogique, où on a représenté sur l'axe des abscisses les valeurs calculées sur l'axe des ordonnées les valeurs arrondies (u_r) réellement obtenues en sortie du convertisseur.

Dans un régulateur numérique, la commande à l'instant t dépend des valeurs des commandes antérieures *effectivement appliquées* au procédé. Il faut donc effectuer l'arrondi de la commande $u(t)$ à l'intérieur du régulateur numérique et utiliser ces valeurs pour le calcul des valeurs futures de la commande.

L'équation du régulateur s'écrit en général sous la forme :

$$S(q^{-1})u(t) + R(q^{-1})y(t) = T(q^{-1})y^*(t + d + 1) \quad [8.1.1]$$

et respectivement :

$$u(t) = \frac{1}{s_0} \left[T(q^{-1})y^*(t + d + 1) - S^*(q^{-1})u(t-1) - R(q^{-1})y(t) \right] \quad [8.1.2]$$

où $s_0 = 1$ dans le cas du placement des pôles.

Pour tenir compte de l'effet du convertisseur numérique/analogique, les équations du régulateur numérique deviennent :

$$u(t) = \frac{1}{s_0} [T(q^{-1})y^*(t+d+1) - S^*(q^{-1})u_r(t-1) - R(q^{-1})y(t)] \quad [8.1.3a]$$

et :

$$|u_r(t) - u(t)| \leq 1/2Q \quad [8.1.3b]$$

où $u_r(t)$ est la commande arrondie effective envoyée au convertisseur numérique/analogique, et Q est le pas de quantification.

Si cette opération d'arrondi n'est pas effectuée, un bruit équivalent est induit sur l'entrée du processus, ce qui conduit en général à une augmentation de la variance de la sortie du procédé ou, dans certains cas, à l'apparition d'oscillations de faible amplitude sur la sortie.

8.1.4. Effets des saturations – Dispositif antisaturation

L'effet de saturation de l'actionneur peut être gênant, en particulier si le régulateur contient un intégrateur. Comme dans le calcul de la commande $u(t)$ interviennent les valeurs précédentes de cette commande, on remplace ces valeurs calculées précédemment par les valeurs réellement appliquées *ce qui est équivalent à l'incorporation d'une « copie » de la caractéristique non linéaire de l'actionneur dans le régulateur*. Dans ce cas, la loi de commande s'écrira :

$$u(t) = \frac{T(q^{-1})y^*(t+d+1) - R(q^{-1})y(t)S^*(q^{-1})\bar{u}(t-1)}{s_0} \quad [8.1.4]$$

Dans l'équation [8.1.4], $\bar{u}(t-1)$ est le vecteur constitué par les valeurs précédentes de $u(t)$ passées par la caractéristique non linéaire.

Ceci est illustré dans la figure 8.1.4 pour la loi de commande :

$$u(t) = \frac{T(q^{-1})y^*(t+1) - r_0y(t) - s_1\bar{u}(t-1)}{s_0} \quad [8.1.5a]$$

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } |u(t)| < u_{sat} \\ u_{sat} & \text{si } u(t) \geq u_{sat} \\ -u_{sat} & \text{si } u(t) \leq -u_{sat} \end{cases} \quad [8.1.5b]$$

correspondant à la poursuite et régulation à objectifs indépendants pour un modèle échantillonné de procédé décrit par :

$$y(t+1) = -a_1y(t) + b_1u(t) + b_2u(t-1) \quad [8.1.6]$$

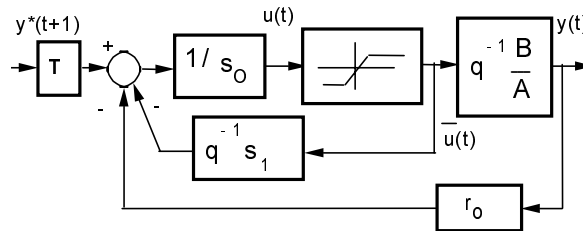


Figure 8.1.4. Régulation numérique en présence de saturation (dispositif antisaturation)

Les effets de la saturation de la commande et du dispositif antisaturation sont illustrés dans la figure 8.1.5 pour le cas de la boucle de régulation de position d'un moteur de c.c. (qui est décrite dans le paragraphe 8.4). Le régulateur contient un intégrateur et le procédé contient aussi un intégrateur.

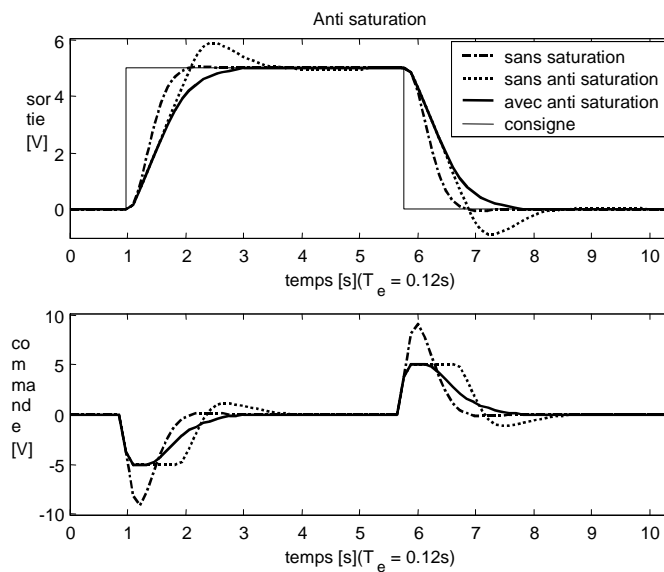


Figure 8.1.5. Réponse (simulation) d'une régulation numérique (de position) en présence de saturation de la commande

On observe que la saturation de la commande ralentit la réponse du système et provoque un dépassement important par rapport à la situation sans saturation en absence d'un dispositif antisaturation. L'introduction du dispositif antisaturation permet d'obtenir une réponse sans aucun dépassement, mais qui est plus lente que la réponse en régime linéaire.

On peut se poser la question, en regardant l'évolution de la commande dans la figure 8.1.5 s'il n'est pas possible d'accélérer la réponse du système en présence de saturation en maintenant la commande à la valeur de saturation pour une durée plus grande, tout en assurant une réponse sans dépassement ou avec un dépassement très faible.

Pour ceci il faut imposer une dynamique de sortie de saturation (différente d'un simple gain). Un tel schéma est représenté figure 8.1.6, où la dynamique de sortie de saturation est définie par le polynôme :

$$P_S(q^{-1}) = 1 + q^{-1}P_S^*(q^{-1}) \quad [8.1.7]$$

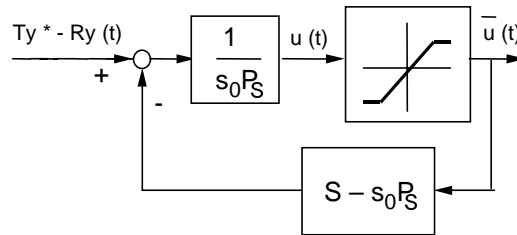


Figure 8.1.6. Dispositif antisaturation avec dynamique de sortie de saturation

Dans le domaine linéaire ($|u(t)| < |u_{sat}| \rightarrow \bar{u}(t) = u(t)$), ce système a la fonction de transfert $1/S(q^{-1})$. En effet, de la figure 8.1.6, il vient :

$$\frac{1}{\frac{s_0 P_S(q^{-1})}{1 - \frac{S(q^{-1}) - s_0 P_S(q^{-1})}{s_0 P_S(q^{-1})}}} = \frac{1}{s_0 P(q^{-1}) + S(q^{-1}) - s_0 P_S(q^{-1})} = \frac{1}{S(q^{-1})} \quad [8.1.8]$$

L'équation du régulateur s'écrit dans le cas général :

$$s_0 P_S(q^{-1})u(t) = T(q^{-1})y^*(t+d+1) - R(q^{-1})y(t) - [S(q^{-1}) - s_0 P_S(q^{-1})]\bar{u}(t) \quad [8.1.9]$$

et respectivement :

$$u(t) = (1/s_0) \left\{ T(q^{-1})y^*(t+d+1) - R(q^{-1})y(t) - [S(q^{-1}) - s_0 P_s(q^{-1})] \bar{u}(t) - s_0 P_s^*(q^{-1})u(t-1) \right\} \quad [8.1.10]$$

mais :

$$\begin{aligned} S(q^{-1}) - s_0 P(q^{-1}) &= s_0 + q^{-1} S^*(q^{-1}) - [s_0 + q^{-1} s_0 P_s(q^{-1})] = \\ &= q^{-1} [S^*(q^{-1}) - s_0 P^*(q^{-1})] \end{aligned} \quad [8.1.11]$$

On obtient alors, pour le régulateur numérique, les équations suivantes :

$$u(t) = (1/s_0) \left\{ T(q^{-1})y^*(t+d+1) - R(q^{-1})y(t) - [S(q^{-1}) - s_0 P_s^*(q^{-1})] \bar{u}(t-1) - s_0 P_s^*(q^{-1})u(t-1) \right\} \quad [8.1.12a]$$

où :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } |u(t)| < u_{sat} \\ u_{sat} & \text{si } u(t) \geq u_{sat} \\ -u_{sat} & \text{si } u(t) \leq -u_{sat} \end{cases} \quad [8.1.12b]$$

La question qui se pose est le choix de la dynamique de sortie de régulation. En règle générale on choisit :

$$P_s(q^{-1}) = 1 + p_{S_1} q^{-1} \quad ; \quad -0.8 < p_{S_1} < 0 \quad [8.1.13]$$

Le choix effectif de p_{S_1} s'interprète plus facilement si on considère [8.1.13] comme le dénominateur d'un filtre échantillonné du 1^{er} ordre résultant de la discrétisation d'un filtre continu du 1^{er} ordre caractérisé par une constante de temps T_{sat} ($p_{S_1} = -e^{-T_e/T_{sat}}$). Dans ce cas, les valeurs typiques pour T_{sat} sont :

$$0 < T_{sat} \leq 4T_e$$

($T_{sat} = 4T_e$ correspond à $p_1 = -0.778$).

La figure 8.1.7 illustre l'effet d'accélération de la réponse en présence de saturation quand on utilise une dynamique de sortie de saturation. On observe que pour $T_{sat} = 2T_e$ ($p_1 = -0.602$) on obtient une accélération de la réponse par rapport à $T_{sat} = 0$ et toujours sans dépassement.

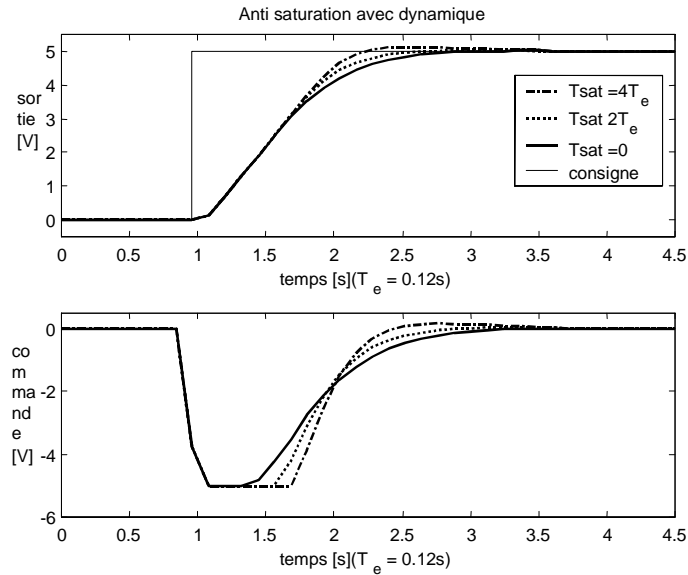


Figure 8.1.7. Réponse (simulation) d'une régulation numérique (de position) avec dispositif antisaturation et dynamique de sortie de saturation

A noter que le choix fin de $p_{S_1}(T_{sat})$ est spécifique à chaque problème.

8.1.5. Passage manuel \rightarrow automatique

Pour éviter des « à-coups » lors du passage du fonctionnement en boucle ouverte au fonctionnement en boucle fermée, il faut initialiser la « mémoire » du régulateur (lui fournir les informations $y(t-1)$, $y(t-2)$..., $u(t-1)$, $u(t-2)$, ..., $r(t-1)$, ...).

Une méthode pour initialiser le régulateur (lorsqu'il est encore en boucle ouverte) est la suivante :

- 1) on remplace la consigne et la sortie désirée par la mesure ($y^*(t+d+1) = y(t)$; $r(t) = y(t)$) ;
- 2) on conserve dans la mémoire du régulateur la commande $u(t)$ appliquée en boucle ouverte ;
- 3) on répète les points 1 et 2, un nombre de pas égal à $n = \max(n_A + n_S, d + n_B + n_R)$;
- 4) on bascule du fonctionnement en boucle ouverte au fonctionnement en boucle fermée.

En procédant de cette sorte, la sortie du régulateur à l’instant de la fermeture de la boucle aura la valeur de la commande manuelle appliquée à l’instant précédent.

En effet, en supposant $y(t) = \text{constant}$ pendant la phase d’initialisation et la présence d’un intégrateur, l’équation du régulateur à l’instant t (instant de commutation) s’écrit :

$$u(t) = (1/s_0) [T(1)y(t) - R(1)y(t) - S^*(1)u(t-1)] \tag{8.1.14}$$

car $y^*(t+d+1)$ a été remplacé par $y(t)$.

Si le régulateur a un intégrateur, alors $S(1) = 0$ et respectivement $S^*(1) = -s_0$, car $[S(q^{-1}) = s_0 + q^{-1} S^*(q^{-1})]$. Par ailleurs, dans ces conditions, $T(1) = R(1)$ (car on a un gain statique unitaire entre y^* et y). On obtient alors de l’équation [8.1.14] :

$$u(t) = u(t-1) \quad ; \quad t = \max(n_A + n_S; d + n_B + n_R) \tag{8.1.15}$$

Le programme en C++ d’un régulateur numérique R-S-T englobant la prise en compte de CNA, le dispositif antisaturation et le protocole de passage manuel/automatique est donné dans l’annexe A.8.

8.1.6. Régulation numérique en cascade

La régulation en *cascade* est une solution utilisée depuis longtemps en pratique. Elle a probablement son origine dans l’observation qu’entre l’actionneur et la grandeur principale à régler, il y a des variables physiques intermédiaires qu’il est intéressant à contrôler aussi pour différentes raisons.

Le schéma de principe d’une régulation en cascade est illustré dans la figure 8.1.8.

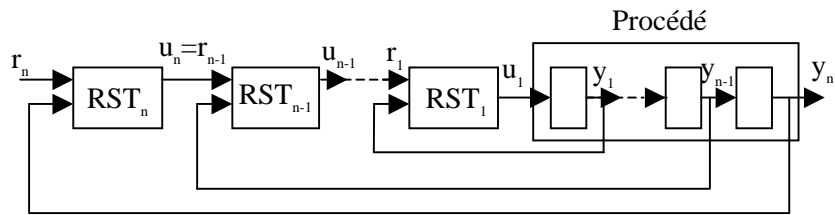


Figure 8.1.8. Schéma de principe d’une régulation en cascade

Le régulateur de la variable régulée principale (n) prescrit la valeur désirée pour la variable intermédiaire ($n-1$). Le régulateur de la variable (k) va prescrire la valeur

désirée de la variable ($k - 1$). Avec ce type de schéma, la limitation de la variable intermédiaire ($k - 1$) s'obtient facilement en limitant la sortie du régulateur (k) qui produit la consigne pour la boucle ($k - 1$).

L'ordre logique des variables dans une régulation en cascade résulte de la physique du système. Par exemple dans le cas d'un asservissement à moteur de c.c. la position va dépendre de la vitesse qui, à son tour, va dépendre du courant qui lui sera commandé par la tension appliquée au moteur. Les contraintes physiques impliquent néanmoins pendant un transitoire de positionnement (en poursuite ou en régulation) une limitation de la vitesse de rotation maximale et du courant maximal. Cette limitation s'obtiendra tout simplement en limitant la sortie du régulateur de position, respectivement du régulateur de vitesse.

Une situation similaire est rencontrée par exemple dans la régulation du niveau d'un liquide dans un réservoir où le niveau du réservoir dépendra du débit qui, à son tour, dépendra d'une ouverture de vanne.

Un autre aspect important est lié aux dynamiques des variables intermédiaires qui sont en général de plus en plus rapides, au fur et à mesure qu'on se rapproche de l'actionneur. Ceci permet de fractionner le transfert entre la commande de l'actionneur et la variable réglée principale en plusieurs parties, chacune étant caractérisée par une échelle de temps différente.

Ceci est particulièrement important dans le cas de la régulation numérique où la période d'échantillonnage de chaque boucle de régulation dépendra de la dynamique associée à la variable intermédiaire. C'est certainement à ce niveau que se situe la différence entre une régulation en cascade analogique et une régulation en cascade numérique.

En pratique, il faudra choisir d'abord la fréquence d'échantillonnage de la première boucle de régulation, caractérisée par la dynamique la plus rapide. La fréquence d'échantillonnage des autres boucles devra être un sous-multiple entier de la fréquence d'échantillonnage de la première boucle de régulation et en plus, la fréquence d'échantillonnage de la boucle (k) devra être soit un sous-multiple entier de la fréquence d'échantillonnage de la boucle ($k - 1$), soit égale à celle-ci¹.

La mise en œuvre comporte d'abord l'identification du transfert entre l'actionneur et la première variable intermédiaire, suivie du calcul du régulateur R-S-T pour cette boucle. Une fois cette boucle mise en œuvre, il s'agit d'identifier le modèle correspondant à la boucle fermée 1 en cascade, avec la partie du procédé

1. Il s'agit de la fréquence d'échantillonnage de la boucle de régulation, à ne pas confondre avec la fréquence d'acquisition qui elle peut être la même pour toutes les boucles.

reliant la variable 1 à la variable 2. La séquence d'excitation est appliquée à l'entrée « consigne » du régulateur R-S-T de la boucle (voir paragraphe 8.4 pour un exemple) et la sortie est la variable intermédiaire 2. Sur la base de ce modèle et des spécifications on calcule le régulateur R-S-T pour la boucle 2. La procédure est ensuite répétée pour les boucles suivantes.

8.1.7. Moyens matériels de mise en œuvre

Différents moyens matériels peuvent être utilisés pour la mise en œuvre d'une régulation numérique.

Pour un test rapide avant une réalisation dédiée, on peut utiliser par exemple le logiciel WinTRAC (Adaptech) sur PC (voir annexe A.5). Il s'agit d'un régulateur numérique R-S-T temps réel. Il utilise la même configuration matérielle que pour l'acquisition des données destinée à l'identification et il peut effectuer une lecture directe du fichier contenant le régulateur R-S-T au format WinREG ou Matlab. WinTRAC peut mettre en œuvre une régulation numérique en cascade (2 boucles).

Toujours pour un test rapide avant une réalisation dédiée on peut utiliser les systèmes de simulation Vissim (Visual Solution) et Simulink (Mathworks) auxquels sont associés des noyaux d'exécution temps réel.

Le logiciel WinREG (Adaptech) fournit directement le programme en langage C++ du régulateur calculé avec le dispositif d'antisaturation incorporé et le protocole de passage manuel/automatique (voir aussi l'annexe A.8).

On peut aussi utiliser des programmes dédiés écrits sur PC. C'est la solution adoptée par exemple par les entreprises Pourtier pour leur machine de fabrication de câbles téléphoniques. Les programmes sont écrits en C. Ils gèrent simultanément cinq boucles de régulation numérique et toute la partie de commande logique de la machine (voir [VIE 91]).

Une autre option est offerte maintenant par la plupart des systèmes numériques de contrôle commande (SNCC) qui possèdent un langage de programmation et suffisamment de mémoire permettant de coder un algorithme R-S-T. Cette approche a été adoptée par ATOCHEM pour une régulation de température d'un réacteur d'oxychloration (voir [ROL 91]).

Les automates programmables constituent aussi un excellent support pour la mise en œuvre des régulateurs numériques R-S-T. Une telle approche a été utilisée par Valéo Embrayage pour la régulation du couple de glissement sur un banc d'essai d'embrayage. Des nombreux automates (voir figure 8.1.9) incorporent des fonctions

« régulateurs R-S-T » (LTI 160 (Leroy), Alspa (Alstom), Quantum (Schneider Modicon)).

Un guide pour l'intégration des régulateurs R-S-T sur cibles programmables existe [ADA 01]².



Figure 8.1.9. Automate programmable Leroy LT160 incorporant plusieurs régulateurs numériques R-S-T et modules d'acquisition (Leroy Automatisme)

Les régulateurs programmables (T640 (Eurotherm), μ - pilot (Soléa)) permettent aussi la mise en œuvre des régulateurs numériques R-S-T.

Les cartes microcontrôleurs, les cartes VME sous système d'exploitation temps réel OS9 et les cartes DSP permettent aussi la mise en œuvre des régulateurs numériques R-S-T, à des cadences d'échantillonnage éventuellement très élevées.

Enfin, tout ordinateur doté d'une chaîne d'acquisition et d'un système d'exploitation temps réel permet de mettre en œuvre une régulation numérique.

8.1.8. Mesure de la qualité d'une régulation

Un des aspects très importants de la conception et de la mise en œuvre d'un régulateur est la mesure des performances réalisées. Si cela ne pose pas en général de problèmes particuliers pour le comportement en poursuite (il suffit de faire quelques essais de changements de consigne), il est souvent difficile de vérifier par des essais le comportement en régulation (on n'est pas maître des perturbations). Ce problème est particulièrement important dans les procédés de fabrication continue, où toute amélioration des performances en régulation a un impact économique très

2. Disponible sur le site : <http://www.adaptech.com>.

important (amélioration de la qualité du produit, économie de matière et d'énergie, réduction des sollicitations du matériel, augmentation de la production, etc.).

Pour le cas des procédés de fabrication continue, l'évaluation de la qualité de la régulation se fait à l'aide des *histogrammes des mesures* de la sortie réglée sur un certain horizon (relativement long pour que les résultats obtenus puissent avoir une signification statistique).

La figure 8.1.10 illustre les histogrammes correspondant à une « bonne » et une « mauvaise » régulation.

Si la régulation n'est pas de bonne qualité, on observe une dispersion importante des mesures autour de la valeur moyenne, ce qui nécessite un déplacement du point de consigne (et donc de la valeur moyenne) vers des valeurs plus élevées pour pouvoir garantir une valeur minimale de la variable réglée (par exemple une épaisseur minimale de dépôt de zinc sur la tôle ou un taux d'humidité minimum dans les procédés de séchage, etc.).

Si la régulation est « bonne », on observe un resserrement des mesures de la variable réglée autour de sa valeur moyenne (correspondant au point de consigne). Ce resserrement correspond à une diminution de l'écart type (respectivement de la variance) entre la valeur de consigne et la valeur mesurée. Parmi les conséquences de cette amélioration, nous mentionnons :

- meilleure uniformité et donc qualité des produits ;
- possibilité de déplacer le point de consigne en se rapprochant des limites des tolérances, ce qui induit en général une économie de matières ou une augmentation de production.

Concrètement à partir d'un histogramme on fait les calculs suivants :

- valeur moyenne :

$$y_M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(i)$$

Si le régulateur à une composante intégrale, la valeur moyenne est souvent très proche de la valeur de la consigne (bien entendu, si les perturbations sur l'horizon de mesure ont une valeur moyenne nulle - ce qui est souvent le cas dans les procédés de fabrication continue, quand l'horizon de mesure est suffisamment grand) ;

- écart type :

$$\sigma = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y(i) - y_M)^2 \right\}^{1/2}$$

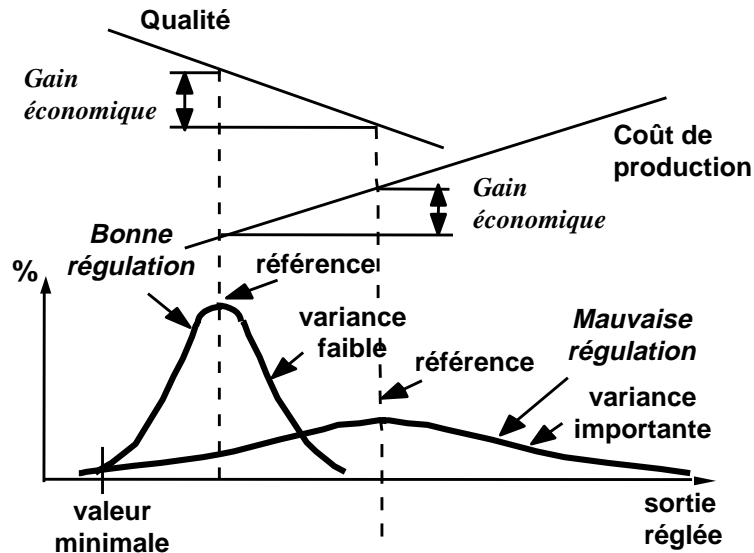


Figure 8.1.10. Histogrammes de la variable réglée

A noter que si l'histogramme a une forme se rapprochant d'une cloche de Gauss (distribution gaussienne), 63 % des points de mesure se trouveront dans l'intervalle $\pm \sigma$ autour de la valeur moyenne et plus de 95 % des points de mesure se trouveront dans l'intervalle de $\pm 2 \sigma$ autour de la valeur moyenne (voir annexe A.3.2).

Par ailleurs, on peut directement, à partir de l'histogramme, déterminer le pourcentage de points qui sont à l'intérieur d'une certaine zone de tolérance.

Il est important de mentionner que, pour des procédés ayant une production importante, une amélioration de la qualité de la régulation (c'est-à-dire une réduction de l'écart type) de 1 % ou même moins peut conduire à des gains économiques très importants, bien supérieurs à l'investissement nécessaire pour améliorer la régulation (en faisant par exemple une campagne d'identification, et en remplaçant un régulateur PID par un régulateur numérique R-S-T).

8.1.9. La commande adaptative

La « commande adaptative » est un ensemble de techniques utilisées pour l'ajustement automatique en ligne et en temps réel des régulateurs des boucles de commande, et ceci, afin de réaliser ou maintenir un certain niveau de performances :

– quand les paramètres du procédé à commander sont inconnus, et/ou varient dans le temps,

– quand les paramètres du procédé à commander sont connus mais les caractéristiques des perturbations sont inconnues ou varient dans le temps.

Les techniques de « commande adaptative » doivent être envisagées pour des applications où, à cause de la variabilité des paramètres du procédé, l'utilisation d'un régulateur robuste à paramètres fixes, calculé à partir de l'identification d'un modèle de procédé dans un régime de fonctionnement, ne suffit plus pour garantir les performances requises dans l'ensemble des régimes de fonctionnement possibles.

Les techniques de « commande adaptative » peuvent être divisées en deux catégories :

- 1) système de commande adaptative en « boucle fermée » ;
- 2) système de commande adaptative en « boucle ouverte ».

Les systèmes de commande adaptative en « boucle fermée » combinent, en règle générale, un algorithme d'identification temps réel du modèle du procédé avec un calcul en temps réel des paramètres du régulateur, à partir du modèle du procédé identifié et des performances désirées.

Le recalcul des paramètres du régulateur peut se faire à chaque pas d'échantillonnage ou à une cadence différente. Dans ce cas, on distingue un « horizon » d'estimation des paramètres du modèle suivi d'un recalcul du régulateur. Si cet horizon d'estimation est sensiblement plus grand que le nombre des paramètres à estimer et que par ailleurs, pendant l'horizon d'estimation des paramètres du modèle, une excitation extérieure est appliquée (le régulateur étant fixe pendant cet horizon de temps) nous avons ce qu'on appelle un schéma itératif qui combine l'identification en boucle fermée suivie d'un recalcul du régulateur³.

Un tel système doit nécessairement comporter un organe de supervision qui vérifie les conditions de bon fonctionnement de la boucle d'adaptation (exemples : richesse des signaux utilisés pour l'identification, compatibilité du modèle identifié avec la loi de commande, etc.). Le schéma de principe d'un système de commande adaptative en « boucle fermée », est illustré dans la figure 8.1.11a. Il comporte une boucle de régulation, un boucle d'adaptation des paramètres du régulateur, et un organe de supervision. Les schémas de commande adaptative en boucle fermée, faisant apparaître explicitement dans la boucle d'adaptation un bloc d'estimation du modèle du procédé en temps réel suivi d'un bloc de calcul en temps réel des

3. Les techniques d'identification en boucle fermée sont présentées dans le chapitre 9.

paramètres du régulateur, portent le nom de schémas de « commande adaptative indirecte » (en boucle fermée).

Dans certains cas on peut directement adapter (estimer) les paramètres du régulateur sans passer par l'estimation explicite des paramètres du modèle du procédé. On a alors un schéma de « commande adaptative directe », comme celui représenté dans la figure 8.1.11b. (exemple : commande adaptative à modèle de référence, poursuite et régulation adaptative à objectifs indépendants ou à variance minimale, rejet adaptatif de perturbations).

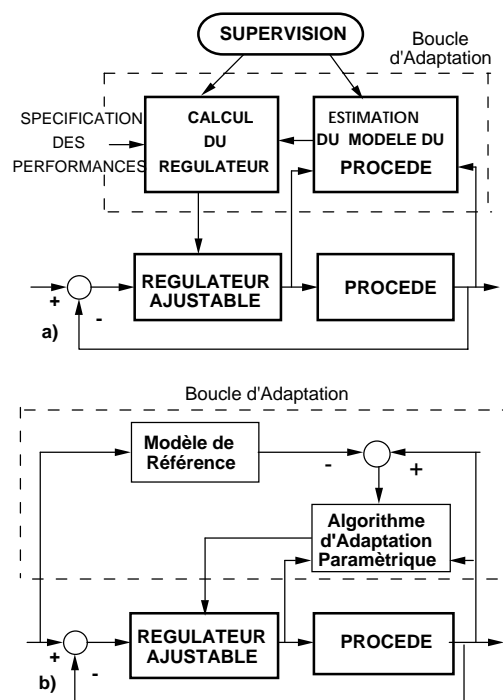


Figure 8.1.11. Commande adaptative en boucle fermée (schémas de principe).
a) commande adaptative indirecte ; b) commande adaptative directe

Les schémas de commande adaptative peuvent fonctionner en *régime d'auto-ajustement* ou en *régime adaptatif*. Dans le premier cas, l'opération d'adaptation est déclenchée lors d'une dégradation des performances et elle s'arrête une fois que les performances souhaitées ont été atteintes. Dans le deuxième cas, l'algorithme d'adaptation est actif en permanence.

Les caractéristiques du modèle dynamique dépendent souvent d'un ensemble de variables mesurables définissant le *point de fonctionnement* (par exemple, sur une ligne de galvanisation par essorage, les caractéristiques dynamiques du procédé dépendent de la vitesse de déroulement de la tôle et de la distance des buses d'air par rapport à la tôle – voir paragraphe 8.7). Dans ces situations, on peut utiliser une commande adaptative en « boucle ouverte », dont la figure 8.1.12 illustre le principe.

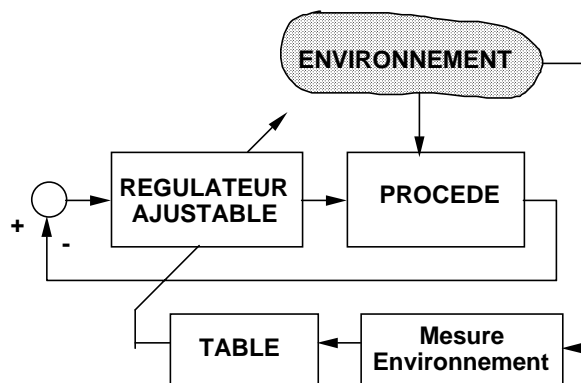


Figure 8.1.12. Système de commande adaptative en boucle ouverte

Pour un certain nombre de points de fonctionnement représentatifs, on effectue une identification du modèle dynamique du procédé, et on calcule un régulateur assurant les performances désirées dans une certaine zone de fonctionnement autour de chacun des points de fonctionnement. Les résultats du calcul sont mémorisés dans un table. Chaque fois que le procédé se trouvera dans une certaine zone de fonctionnement, les valeurs de paramètres correspondant au régulateur préalablement calculé pour cette zone de fonctionnement seront envoyés au régulateur ajustable.

Dans un grand nombre d'applications présentant une variabilité importante des modèles dynamiques des procédés (souvent dépendants du point de fonctionnement) l'utilisation d'une commande adaptative en « boucle ouverte » est largement suffisante pour garantir les performances du système de régulation dans l'ensemble des régimes de fonctionnement.

C'est cette approche qui a été mise en œuvre, par exemple, sur la ligne de galvanisation par essorage de Sollac-Florange (voir plus loin paragraphe 8.6).

Pour une présentation plus détaillée des différentes techniques de commande adaptative, voir par exemple [AST 95, CON 01, LAN 79, LAN 86, LAN 93, LAN 97].

8.2. Régulation numérique d'un aérotherme

L'objectif de ce paragraphe est d'illustrer sur un procédé réel (un aérotherme) la mise en œuvre sur un PC d'un régulateur numérique R-S-T calculé d'après une des méthodes présentées dans le chapitre 3 (en utilisant WinREG) à partir d'un modèle échantillonné de procédé identifié à l'aide du progiciel WinPIM (pour les détails de l'identification de l'aérotherme, voir chapitre 7, paragraphe 7.5.1).

Le schéma du procédé et de la boucle de régulation numérique est représenté dans la figure 8.2.1.

L'air est chauffé à l'aide d'une résistance alimentée par un amplificateur de puissance à thyristors, commandé par l'intermédiaire du calculateur. La variable réglée est la température de l'air à la sortie, qui est mesurée par un thermocouple.

Deux modèles ont été identifiés et validés pour cet aérotherme avec $T_e = 5$ s (voir chapitre 7, paragraphe 7.5.1).

$$\begin{aligned} \text{Modèle1} & : \frac{0,1724q^{-1} + 0,0579q^{-2}}{1 - 0,6589q^{-1}} \quad (\text{E.S.M.P.E.}) \\ \text{Modèle2} & : \frac{0,1771q^{-1} + 0,043q^{-2}}{1 - 0,6837q^{-1}} \quad (\text{E.S.C.F.}) \end{aligned}$$

On a utilisé pour le calcul du régulateur la stratégie du placement de pôles⁴. On a considéré la même dynamique en poursuite et régulation. Le temps de montée des deux modèles est de l'ordre de $6 T_e$ ($\approx 30s$) (voir figure 7.5.4). Dans un premier temps, nous allons considérer une accélération de la réponse en boucle fermée de 1.25 fois (temps de montée désiré $\approx 24s$) sans dépassement (ou presque). Afin d'obtenir un temps de montée de $24s$ en boucle fermée, il résulte, d'après les diagrammes de la figure 1.1.10 (ou 1.1.11b), que pour un système du 2^{me} ordre avec $\zeta = 0,9$, il faut choisir $\omega_0 = 0,136$ rad/s. Nous choisirons donc comme pôles désirés en boucle fermée ceux résultant de la discrétisation d'un deuxième ordre continu

4. Pour cette application on peut utiliser aussi la poursuite et régulation à objectifs indépendants car le zéro du modèle du procédé est stable ($b_2 < b_1$).

avec $\omega_0 = 0.136 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.9$ (car la réponse est pratiquement sans dépassement) pour $T_e = 5 \text{ s}$.

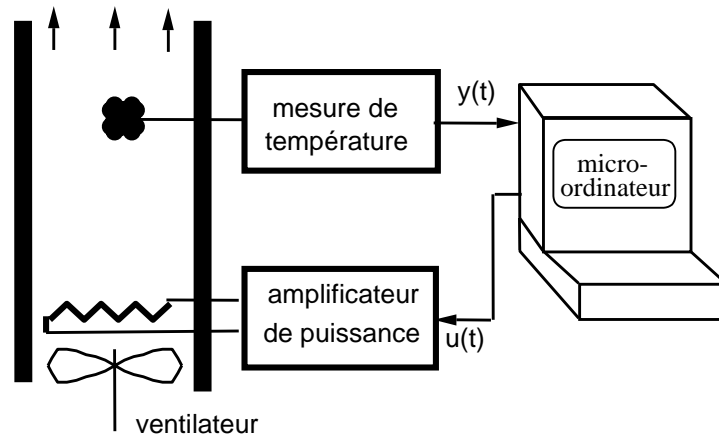


Figure 8.2.1. Régulation numérique d'un aérotherme

Le tableau 8.2.1 résume les calculs effectués avec WinREG pour le cas du modèle 1. On a utilisé le *placement des pôles*.

La figure 8.2.2 donne la caractéristique fréquentielle du module de la fonction de sensibilité S_{yp} . On observe que la courbe obtenue est bien à l'intérieur du gabarit de robustesse.

Les résultats des calculs du régulateur ont été testés d'abord en simulation, sur le modèle 1 et sur le modèle 2. La figure 8.2.3 illustre le comportement en boucle fermée dans les deux cas (simulation). Le temps de montée est de l'ordre de 5 périodes d'échantillonnage ($\approx 25 \text{ s}$) correspondant aux performances désirées. Les différences entre les réponses obtenues sur les 2 modèles sont négligeables (on observe des différences uniquement sur la commande, dues à la différence entre les gains statiques).

***** PROCEDE *****

$d = 0$
 $B(q^{-1}) = 0.1724 q^{-1} + 0.0579 q^{-2}$
 $A(q^{-1}) = 1 - 0.6589 q^{-2}$

$\rightarrow B_m(q^{-1}) = 0.1543 + 0.1024 q^{-1}$

Dynamique de poursuite ----
 $\rightarrow A_m(q^{-1}) = -1.0372 q^{-1} + 0.2940 q^{-2}$
 $T_e = 5s, \omega_0 = 0.136 \text{ rad/s}, \zeta = 0.9$

Dynamique de régulation -----
 $\rightarrow P(q^{-1}) = 1 - 1.0372 q^{-1} + 0.2940 q^{-2}$
 $T_e = 5s, \omega_0 = 0.136, \zeta = 0.9$

Préspécifications : Intégrateur
***** LOI DE COMMANDE *****
 $S(q^{-1}) u(t) + R(q^{-1}) y(t) = T(q^{-1}) \cdot y^*(t+d+1)$
 $y^*(t+d+1) = (B_m(q^{-1}) / A_m(q^{-1})) \cdot r(t)$

Régulateur :
 $R(q^{-1}) = 2.7637 - 1.6491 q^{-1}$
 $S(q^{-1}) = 1 - 0.8549 q^{-1} - 0.1451 q^{-2}$
 $T(q^{-1}) = 4.34 - 4.5017 q^{-1} + 1.2762 q^{-2}$

Marge de gain : 5.61 Marge de phase : 63.6 deg
Marge de module : 0.732 (-2.71 dB) Marge de retard : 9.6 s

Tableau 8.2.1. Régulateur « placement des pôles » pour l'aérotherme, avec $\omega_0 = 0,136 \text{ rad/s}$, et $\zeta = 0.9$ (poursuite et régulation)

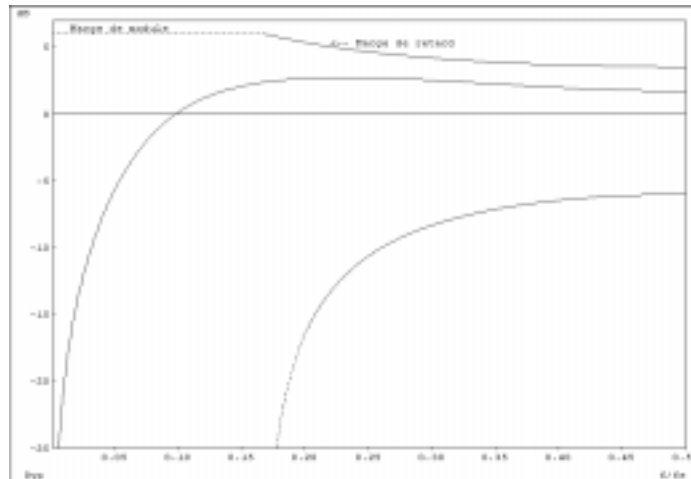


Figure 8.2.2. La fonction de sensibilité perturbation-sortie pour le régulateur calculé avec $\omega_0 = 0.136 \text{ rad/s}$, et $\zeta = 0.9$

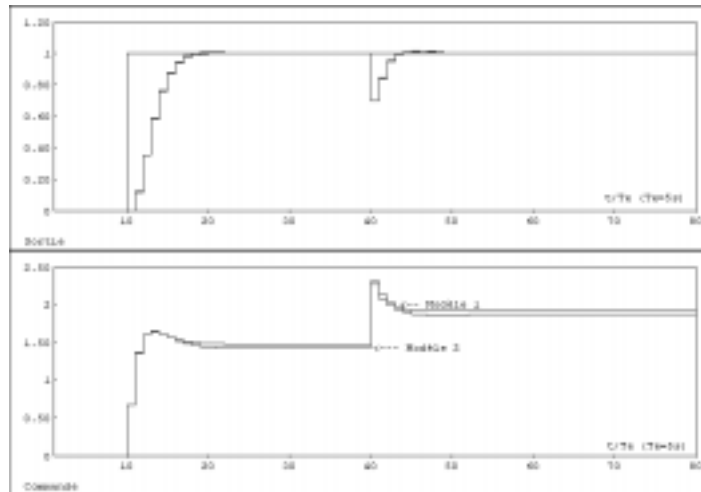


Figure 8.2.3. Réponse en boucle fermée de l'aérotherme simulé (modèle 1 et modèle 2) avec le régulateur calculé en utilisant le modèle 1 de l'aérotherme pour $\omega_0 = 0,136 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0,9$

Les résultats expérimentaux autour de la température de 60°C (3.2V) sont donnés dans la figure 8.2.4. On constate en effet que le temps de montée est de l'ordre de 25 s.

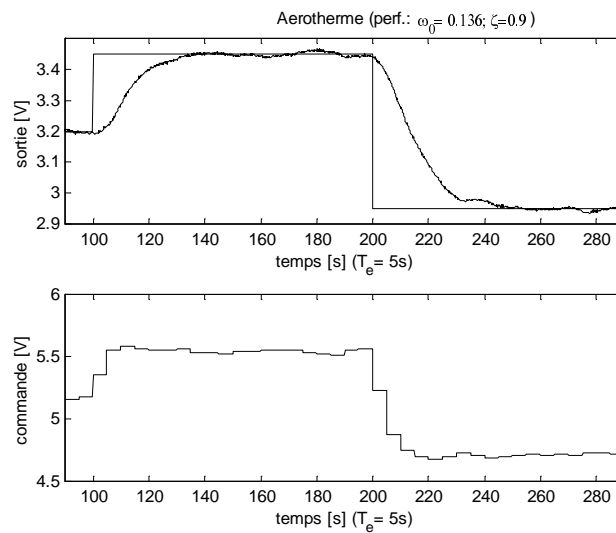


Figure 8.2.4. Réponse temps réel de l'aérotherme, pour le régulateur calculé avec $\omega_0=0,136 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0,9$

Nous considérons maintenant le cas où on souhaite une accélération plus significative du temps de réponse en boucle fermée par rapport à la réponse naturelle du procédé en boucle ouverte. Pour un temps de montée de l'ordre de 15 s (réduction de moitié du temps de montée en boucle ouverte), il résulte des diagrammes de la figure 1.1.11, qu'il faut choisir comme dynamique désirée, l'équivalent d'un système du 2^e ordre avec $\omega_0 = 0.226 \text{ rad/s}$; $\zeta = 0.9$. Le nouveau régulateur devra néanmoins assurer une marge de module supérieure ou égale à 0.5 et une marge de retard d'au moins 5 s ($1 T_e$).

Avec ces nouvelles spécifications, les résultats du calcul du régulateur sont donnés dans le tableau 8.2.2. On constate une réduction des marges de robustesse par rapport au cas précédent, suite à l'augmentation des performances désirées (réduction du temps de réponse). En particulier la marge de retard obtenue est très proche de la limite ($T_e = 5 \text{ s}$). Mais les conditions de robustesse sur la marge de module et la marge de retard sont encore satisfaisantes.

*** PROCEDE ***	
$d = 0$	
$B(q^{-1}) = 0.1724 q^{-1} + 0.0579 q^{-2}$	
$A(q^{-1}) = 1 - 0.6589 q^{-2}$	
	$\rightarrow B_m(q^{-1}) = 0.3281 + 0.1652 q^{-1}$
Dynamique de poursuite --	
	$\rightarrow A_m(q^{-1}) = 1 - 0.6373 q^{-1} + 0.1308 q^{-2}$
	$T_e = 5 \text{ s}, \omega_0 = 0.226, \zeta = 0.9$
Dynamique de régulation ---->	$P(q^{-1}) = 1 - 0.637 q^{-1} + 0.1308 q^{-2}$
	$T_e = 5 \text{ s}, \omega_0 = 0.226, \zeta = 0.9$
Présécifications : Intégrateur	
*** LOI DE COMMANDE ***	
$S(q^{-1}) u(t) + R(q^{-1}) y(t) = T(q^{-1}) y^*(t+d+1)$	
$y^*(t+d+1) = (B_m(q^{-1}) / A_m(q^{-1})) \cdot r(t)$	
Régulateur :	
$R(q^{-1}) = 4.6461 - 2.5045 q^{-1} + 0.1147 q^{-2}$	
$S(q^{-1}) = 1 - 0.7797 q^{-1} - 0.2202 q^{-2}$	
$T(q^{-1}) = 4.34 - 2.7662 q^{-1} + 0.5677 q^{-2}$	
Marge de gain : 3.159	Marge de phase : 51.9 deg
Marge de module : 0.613 (- 4.25 dB)	Marge de retard : 5.05 s

Tableau 8.2.2. Régulateur « placement de pôles » pour l'aérotherme, avec $\omega_0 = 0.226 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.9$

Le module de la fonction de sensibilité perturbation-sortie est représentée dans la figure 8.2.5. On constate que la fonction de sensibilité atteint le gabarit. Il n'est donc pas possible d'accélérer plus la réponse du système sans compromettre sa robustesse (ou sans un calibrage de la fonction de sensibilité).

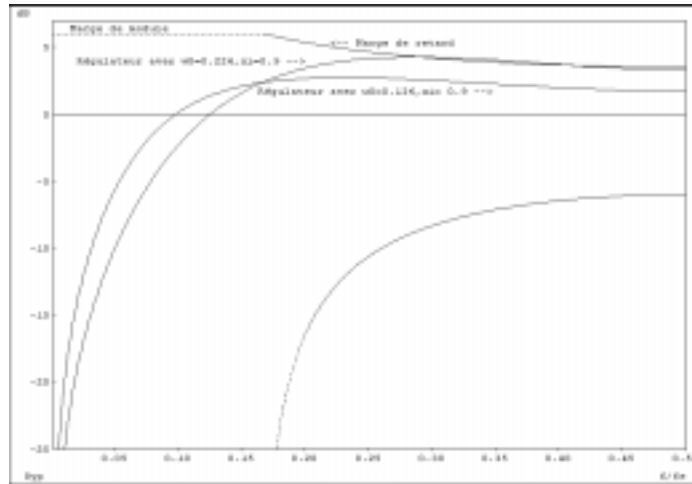


Figure 8.2.5. Les fonctions de sensibilité perturbation-sortie pour les régulateurs calculés avec $\omega_0 = 0.226$ rad/s, et $\zeta = 0.9$ et respectivement avec $\omega_0 = 0.136$ rad/s, et $\zeta = 0.9$

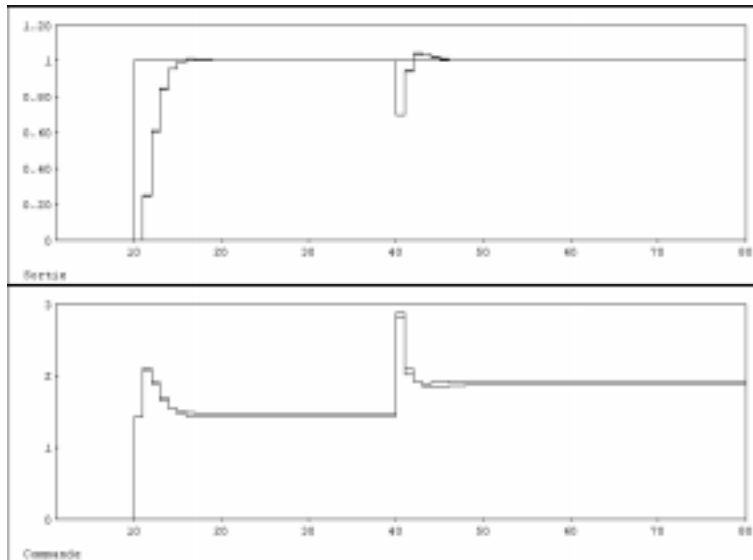


Figure 8.2.6. Réponse en boucle fermée de l'aérotherme simulé (modèle 1 et modèle 2) pour le régulateur calculé avec $\omega_0 = 0.226$ rad/s et $\zeta = 0.9$

Les réponses en simulation pour les deux modèles de l'aérotherme sont représentées dans la figure 8.2.6. Les réponses obtenues en simulation avec les deux modèles sont à nouveau extrêmement proches. La seule différence visible apparaît au niveau de la valeur stationnaire du signal de commande (gain différent). Le temps de montée est de l'ordre de 15 s. On note une augmentation de la sollicitation en transitoire de l'actionneur due à la réduction du temps de réponse (à comparer avec la figure 8.2.3)

Les résultats expérimentaux obtenus dans ce cas autour de la température de 60 °C (3.2 V) sont donnés dans la figure 8.2.7. On constate effectivement qu'avec le régulateur calculé avec $\omega_0 = 0.226 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.9$ on obtient les performances désirées (temps de montée $\approx 15 \text{ s}$, pas de dépassement).

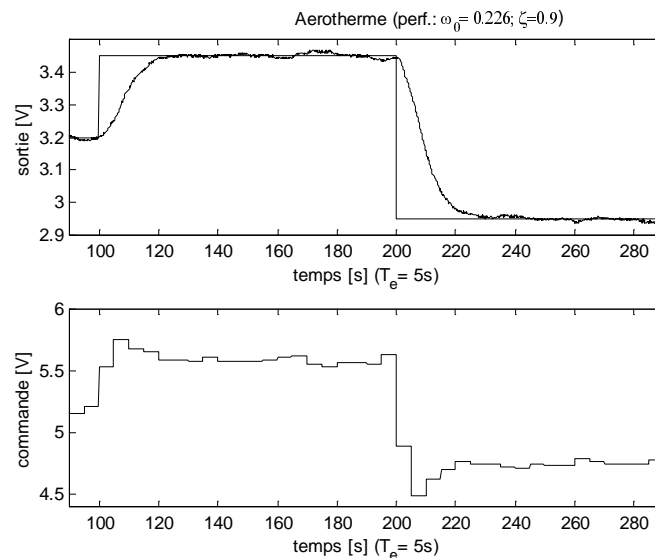


Figure 8.2.7. Réponse temps réel de l'aérotherme pour le régulateur calculé avec $\omega_0 = 0.226 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.9$

La figure 8.2.8 illustre le comportement en régulation (autour de 65°C) pour une perturbation introduite par une variation en échelon de la vitesse du ventilateur (voir figure 8.2.1).

8.3. Régulation numérique de la vitesse d'un moteur à courant continu

L'objectif de ce paragraphe est d'illustrer la régulation numérique de la vitesse d'un moteur à courant continu à l'aide du logiciel WinTRAC (Adaptech). Le calcul du régulateur a été fait à l'aide du progiciel WinREG en utilisant le modèle échantillonné du moteur identifié à l'aide du progiciel WinPIM (voir chapitre 7, paragraphe 7.5.3). Le schéma du procédé et de la boucle de régulation est représenté dans la figure 8.3.1.

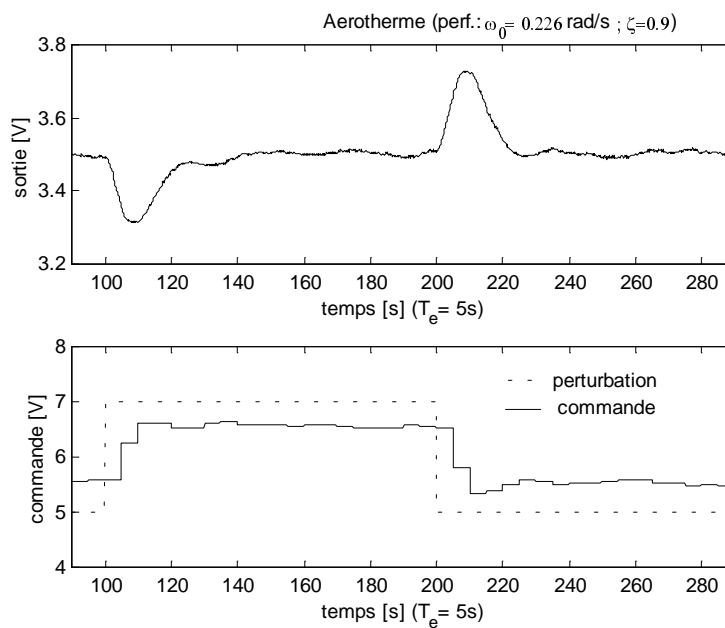


Figure 8.2.8. Réponse en régulation de l'aérotherme pour le régulateur calculé avec $\omega_0 = 0.226 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.9$

Le modèle identifié qui a été retenu pour le calcul du régulateur, est le modèle identifié avec ESMPE ($T_e = 15 \text{ ms}$) (voir chapitre 7, paragraphe 7.5.3) :

$$\text{Modèle moteur: } \frac{0.2617q^{-1} + 0.2288q^{-2}}{1 - 0.535q^{-1}}$$

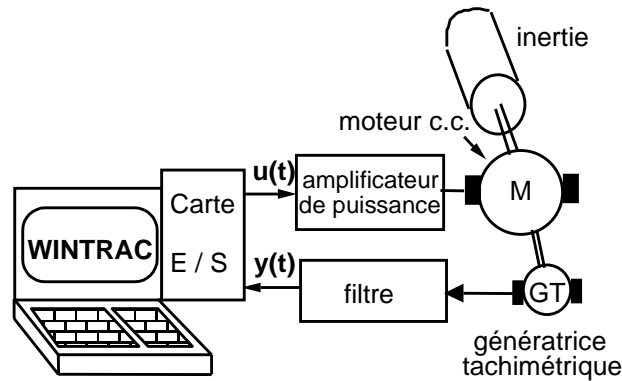


Figure 8.3.1. Régulation numérique d'un moteur de c.c à l'aide du logiciel WinTRAC

*** PROCEDE ***	
$d = 0$	
$A(q^{-1}) = 1 - 0.5351 q^{-1}$	
$B(q^{-1}) = 0.2617 q^{-1} + 0.2288 q^{-2}$	
	$\rightarrow B_m = 0.3262 + 0.1647 q^{-1}$
Dynamique de poursuite ---	
	$\rightarrow A_m = 1 - 0.6409 q^{-1} + 0.1319 q^{-2}$
	$T_e = 0.015s, \omega_0 = 75 \text{ rad/s}, \zeta = 0.9$
Dynamique de régulation ----->	$P = 1 - 0.6409 q^{-1} + 0.1319 q^{-2}$
	$T_e = 0.015s, \omega_0 = 75, \zeta = 0.9$
Préspécifications : Intégrateur	
*** LOI DE COMMANDE ***	
$S(q^{-1}) \cdot u(t) + R(q^{-1}) \cdot y(t) T(q^{-1}) y^*(t+d+1)$	
$y^*(t+d+1) = (B_m(q^{-1}) / A_m(q^{-1})) \cdot ref(t)$	
Régulateur :	
$R(q^{-1}) = 1.9176 - 0.9168 q^{-1}$	
$S(q^{-1}) = 1 - 0.6078 q^{-1} - 0.3921 q^{-2}$	
$T(q^{-1}) = 2.0382 - 1.3065 q^{-1} - 0.269 q^{-2}$	
Marge gain : 3.205	Marge de phase : 57.8 deg
Marge de module : 0.625 (- 4.08 dB)	Marge de retard : 22 ms ($1.46 T_e$)

Tableau 8.3.1. Régulateur « placement de pôles » avec $\omega_0 = 75 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.9$ pour la boucle de vitesse (moteur c.c.)

Le modèle a un zéro stable, car $b_2 < b_1$, mais très près du cercle unité. Il n'est donc pas recommandé d'utiliser la stratégie de *poursuite et régulation à objectifs indépendants*. On utilise le *placement des pôles*. Le temps de montée du modèle est de l'ordre de $4.5 T_e$ ($\approx 67 \text{ ms}$) (voir figure 7.5.11). On souhaite une accélération de la réponse en boucle fermée de 1.33 fois (temps de montée désiré $\approx 50 \text{ ms}$ avec un dépassement très réduit. Afin d'obtenir un temps de montée de $t_M \approx 50 \text{ ms}$ il résulte d'après les diagrammes de la figure 1.1.10 que pour un 2^e ordre avec $\zeta = 0.9$ il faut choisir $\omega_0 \approx 75 \text{ rad/s}$. Nous choisirons donc comme pôles désirés en boucle fermée ceux résultant de la discrétisation d'un deuxième ordre continu avec $\omega_0 = 75 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0.9$ et $T_e = 15 \text{ ms}$. La même dynamique a été aussi choisie pour la poursuite.

Le tableau 8.3.1 résume les calculs effectués avec WinREG pour le modèle identifié du moteur. Les marges de robustesse sont satisfaisantes. La figure 8.3.2 illustre les résultats obtenus en poursuite et régulation pour le cas du procédé simulé avec le modèle identifié. Le temps de réponse est $\approx 55 \text{ ms}$ (il ne faut pas oublier que dans le placement de pôles se rajoute la dynamique de $B(q^{-1})$ qui, dans ce cas est un retard fractionnaire).

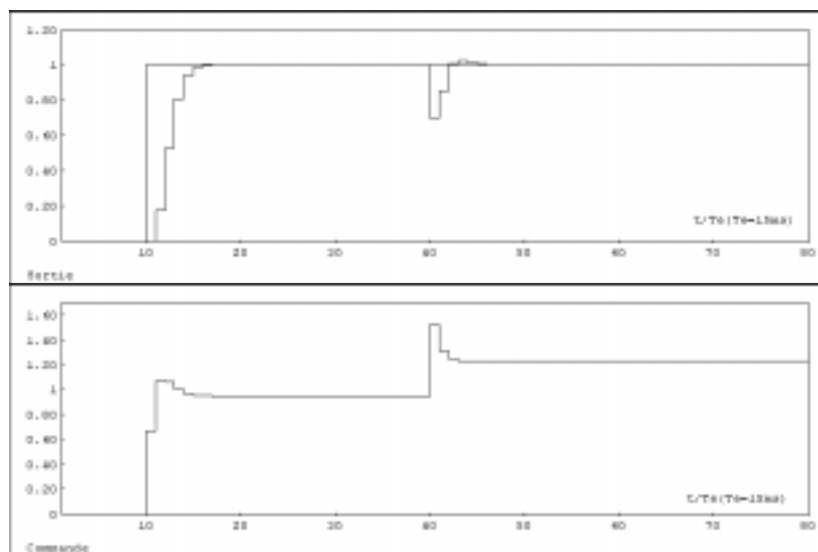


Figure 8.3.2. Réponse en poursuite et régulation du moteur simulé pour le régulateur calculé avec $\omega_0 = 75 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.9$

Le régulateur numérique R-S-T calculé par WinREG a été mis en œuvre par le logiciel temps réel WinTRAC (Adaptech) sur un PC doté d'une carte de conversion (CAN et CNA).

La figure 8.3.3 présente la réponse du moteur lors d'un changement en échelon de la consigne de vitesse. Le temps de montée est comparable avec celui obtenu en simulation ($\approx 55 \text{ ms}$). La figure 8.3.4 illustre le comportement du système en boucle fermée à une perturbation de charge. Il s'agit d'un freinage brutal suivi d'un relâchement de la charge à $393 T_e$. Le temps de rejet de perturbation est de l'ordre de 105 ms.

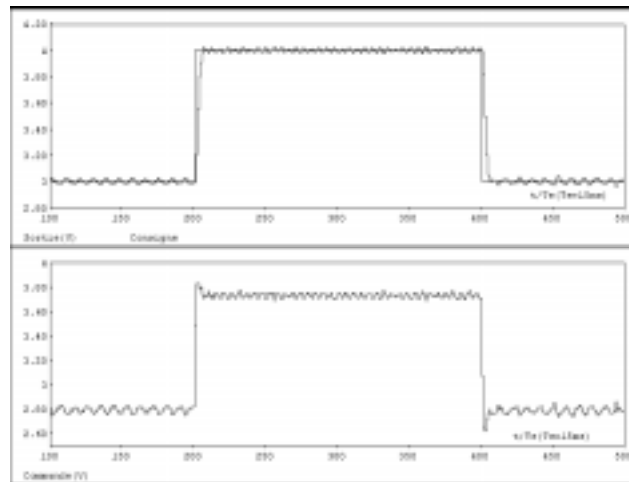


Figure 8.3.3. Réponse en boucle fermée de la vitesse du moteur à courant continu à un changement de consigne (dynamique de poursuite $\omega_0 = 75 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0.9$)

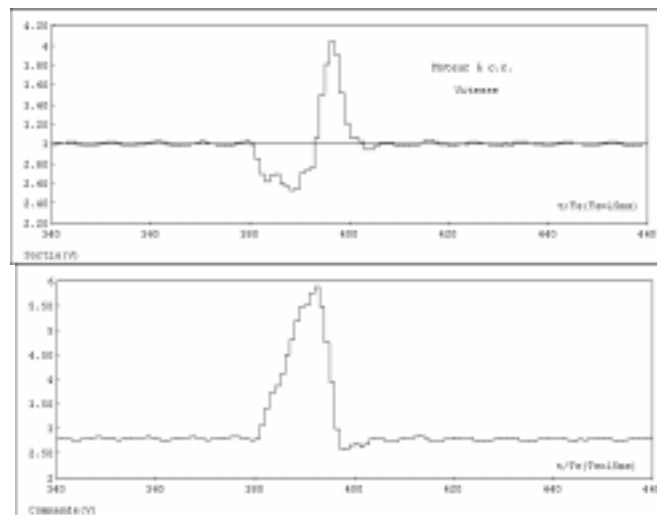


Figure 8.3.4. Réponse en boucle fermée du moteur à courant continu à une perturbation de charge (dynamique de régulation $\omega_0 = 75 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0.9$)

8.4. Régulation numérique en cascade de la position

Le schéma de principe de la régulation en cascade de la position de l'axe d'un moteur de c.c. est représenté dans la figure 8.4.1.

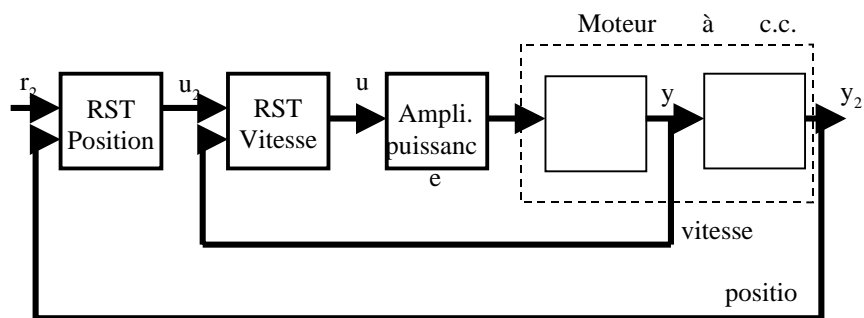


Figure 8.4.1. Régulation numérique en cascade de la position de l'axe d'un moteur à c.c. (les convertisseurs CAN et CNA ne sont pas représentés)

Dans le cas précis de cette application il s'agit du moteur à courant continu considéré dans l'exemple du paragraphe 8.3. Le calcul et la mise en œuvre du régulateur R-S-T pour la boucle de vitesse ont été décrits dans le paragraphe 8.3. Il s'agit maintenant de l'intégration de cette boucle dans la boucle de position et la mise en œuvre temps réel de deux régulateurs R-S-T en cascade qui a été faite à l'aide du progiciel temps réel WinTRAC (Adaptech)⁵.

La période d'échantillonnage de la boucle de vitesse est de 15 ms (voir paragraphe 8.3). La dynamique de la boucle de position étant sensiblement plus lente (présence d'un intégrateur) on a choisi une période d'échantillonnage de 120ms pour cette boucle (multiple de 15 ms). Pour le calcul du régulateur de position il faudra au préalable identifier le modèle dynamique entre la consigne de vitesse et la position de l'axe.

La SBPA pour l'identification a été appliqué à l'entrée consigne du régulateur de vitesse. Les caractéristiques de la SBPA ont été les suivantes :

- nombre de registres : $N = 7$;
- fréquence d'horloge : $f_{SBPA} = f_e/2$ ($T_{SBPA} = 240$ ms) ;
- amplitude : 2V (300 rot/min) ;
- longueur de l'essai : 256 échantillons.

5. On peut aussi utiliser des automates programmables qui permettent la mise en œuvre temps réel de cascades de régulateurs.

Les résultats de l'acquisition (après centrage) sont présentés dans la figure 8.4.2. On observe le comportement intégrateur du système.

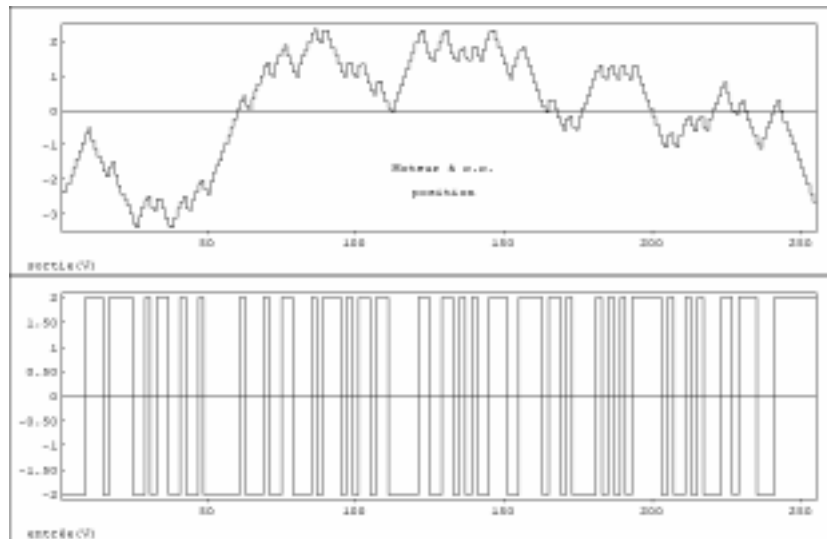


Figure 8.4.2. Séquence entrée/sortie (entrée : référence vitesse ; sortie : position axe)

Traitement des données

En sachant qu'il y a un intégrateur dans le système (la position est l'intégrale de la vitesse) et conformément aux indications du chapitre 7, paragraphe 7.2.2, on va constituer un nouveau fichier entrées/sorties contenant la séquence d'excitation comme entrée et les variations de la sortie entre les instants de l'échantillonnage ($y(t) - y(t-1)$) comme sortie. Ceci a été obtenu avec le module « gestion des données » de WinPIM. Le fichier correspondant (après élimination des composantes continues résiduelles) est représenté dans la figure 8.4.3.

On observe dans la figure 8.4.3 que les sorties ont un niveau environ cinq fois plus faible que le niveau de l'entrée. Conformément aux indications données dans le paragraphe 7.2.3 il convient de faire une mise à l'échelle des données en multipliant les sorties par un facteur 5 (WinPIM – module « gestion des données »). Dans le modèle final on devra en contrepartie diviser par 5 les paramètres estimés du polynôme $B(q^{-1})$.

Estimation de la complexité

En utilisant le module « estimation de complexité » de WinPIM (méthode de variable instrumentales à entrées retardées) on obtient pour le modèle sans

intégrateur $n = \max(n_A, n_B + d) = 2$ (voir figure 8.4.4) et respectivement $n_A = 1$, $n_B = 2$, $d = 0$, avec un risque de surestimation de 0.1%. Ces ordres sont raisonnables car le temps de réponse de la boucle de vitesse est de l'ordre de la moitié d'une période d'échantillonnage de la boucle de position ce qui se traduit par un retard fractionnaire. A cette dynamique se rajoutent d'autres dynamiques parasites non prises en compte.

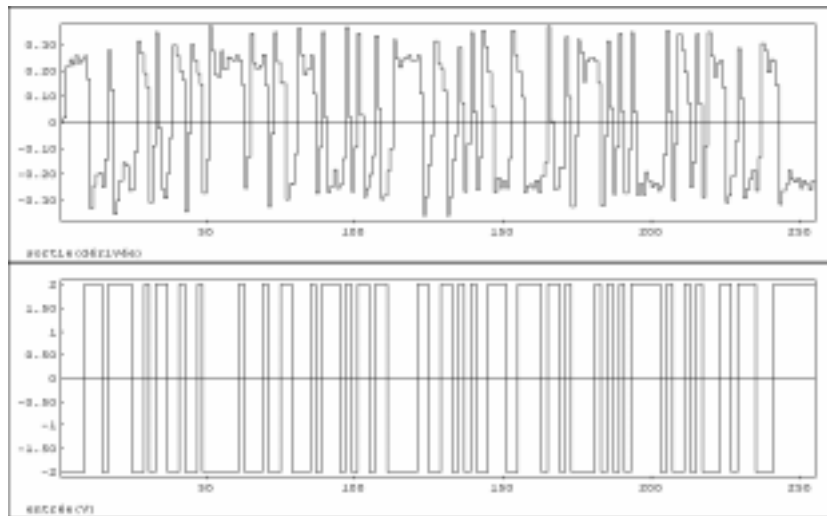


Figure 8.4.3. Fichier entrées/sorties pour le système sans intégrateur

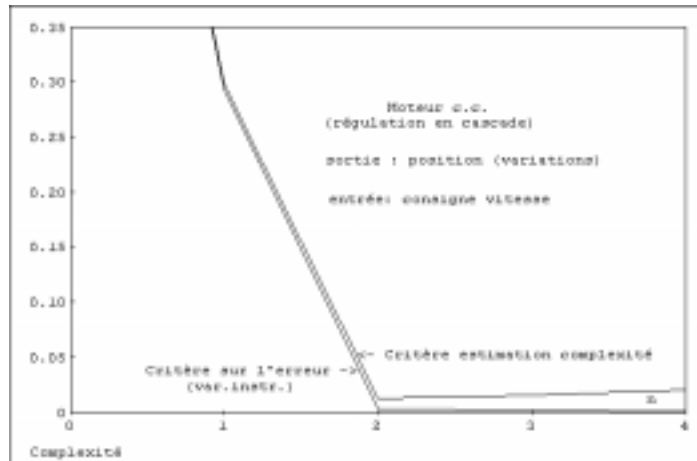


Figure 8.4.4. Estimation de la complexité du modèle sans intégrateur à partir des données

Identification paramétrique et validation

Le modèle (sans intégrateur) identifié avec la structure S1 et la méthode des moindres carrés ne passe pas le test de validation statistique. En choisissant la structure S3 et la méthode d'erreur de sortie à modèle de prédiction étendu (ESMPE) avec $n_A = 1$, $n_B = 2$, $d = 0$ et $n_C = 2$ on obtient un modèle qui passe le test de validation. Les résultats sont résumés dans le tableau 8.4.1.

Modèle sans intégrateur et gain multiplié par 5 $n_A=1, n_B=2, n_C=2, d=0$	
COEFFICIENTS DU POLYNÔME $A(q^{-1})$:	$A(1) = 0.2154$
COEFFICIENTS DU POLYNÔME $B(q^{-1})$:	$B(1) = -0.1737$ $B(2) = -0.5563$
COEFFICIENTS DU POLYNÔME $C(q^{-1})$:	$C(1) = -0.3176$ $C(2) = -0.1878$
TEST DE VALIDATION : Blancher de l'erreur résiduelle	
Critère de validation: Val. Théor.: $ RN(i) \leq 0.136$, Val.Prat.: $ RN(i) \leq 0.15$	
$RN(1) = 0.0422$	$RN(2) = 0.0057$
$RN(3) = -0.136$	$RN(4) = 0.0497$

Tableau 8.4.1. Paramètres du modèle identifié (sans intégrateur)

REMARQUES.–

- 1) Les résultats de la validation peuvent être améliorés en utilisant un facteur d'oubli variable, mais les réponses temporelles des deux modèles sont pratiquement indiscernables.
- 2) Le gain statique du modèle est négatif, correspondant à la polarité de la mesure utilisée.

En insérant un intégrateur dans le modèle et en divisant par 5 les coefficients de polynôme B (options disponibles dans WinPIM) on obtient le modèle complet donné dans le tableau 8.4.2.

Modèle « position » (avec intégrateur) $n_A=2, n_B=2, d=0$	
COEFFICIENTS DU POLYNÔME $A(q^{-1})$:	$A(1) = -0.7846$ $A(2) = -0.2154$
COEFFICIENTS DU POLYNÔME $B(q^{-1})$:	$B(1) = -0.03476$ $B(2) = -0.1112$

Tableau 8.4.2. Paramètres du modèle complet (entrée : consigne vitesse, sortie : position)

Le polynôme $B(q^{-1})$ ayant $|b_2| > |b_1|$, il résulte que le modèle a un zéro instable et donc il faudra utiliser la stratégie du placement de pôles.

Calcul du régulateur

Sur la base du modèle identifié on a calculé un régulateur R-S-T en utilisant le placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité (à l'aide du logiciel WinREG).

Les spécifications considérées sont :

- dynamique dominante de régulation : discrétisation d'un 2^e ordre continu avec $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.8$,
- intégrateur dans le régulateur,
- ouverture de la boucle à $0.5 f_e$,
- marge de module $\Delta M \geq 0.5$; marge de retard $\Delta \tau \geq 1T_e$,
- dynamique de poursuite : discrétisation d'un 2^e ordre continu avec $\omega_0 = 4.5 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.9$.

L'intégrateur dans le régulateur implique l'introduction d'une partie fixe $H_S(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$. L'ouverture de la boucle à $0.5 f_e$ implique l'introduction d'une partie fixe $H_R(q^{-1}) = 1 + q^{-1}$.

En absence du filtre H_R , le module de la fonction de sensibilité perturbation-commande est très élevé en hautes fréquences, là où le système n'a plus de gain (car c'est un intégrateur). Ceci conduit à une très importante sollicitation de l'actionneur sans effet sur la sortie.

Les figures 8.4.5 et 8.4.6 donnent les modules des fonctions de sensibilité perturbation-sortie et perturbation-entrée dans trois configurations de calcul :

- a) sans H_R , sans pôles auxiliaires ;
- b) avec H_R , sans pôles auxiliaires ;
- c) avec H_R et 3 pôles auxiliaires à 0.1.

Le régulateur final correspond au cas (c), les pôles auxiliaires ayant été introduits pour réduire plus fortement les sollicitations de l'actionneur à partir de $0.3 f_e$. On observe que cette solution conduit à une légère diminution de la marge du module qui reste néanmoins à une valeur supérieure à 0.5 ($|S_{yp}(q^{-1})|_{max} < 6 \text{ dB}$). Les coefficients du régulateur calculé (c) sont donnés dans le tableau 8.4.3.

Polynôme $R(q^{-1})$	Polynôme $S(q^{-1})$	Polynôme $T(q^{-1})$	Polynôme $B_m(q^{-1})$
$R(0)=-1.2139$ $R(1)=-0.7543$ $R(2)=0.9699$ $R(3)=0.5111$	$S(0)=1.0000$ $S(1)=-1.0222$ $S(2)=0.2836$ $S(3)=-0.2614$	$T(0)=-6.8479$ $T(1)=12.0843$ $T(2)=-7.0639$ $T(3)=1.4625$ $T(4)=-0.1255$ $T(5)=0.0038$	$B_m(0)=0.1057$ $B_m(1)=0.076381$
			Polynôme $A_m(q^{-1})$
			$A_m(0)=1.0000$ $A_m(1)=-1.1962$ $A_m(2)=0.3783$

Tableau 8.4.3. Régulateur R-S-T pour la boucle de position

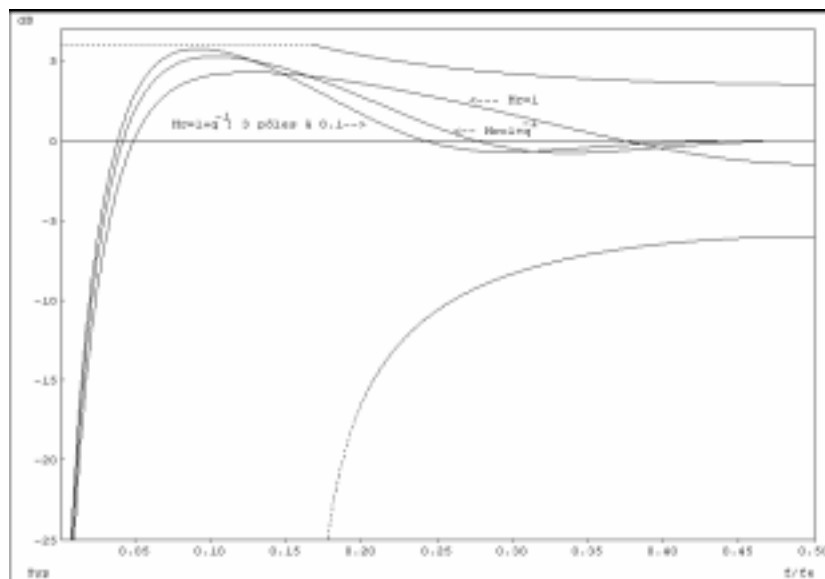


Figure 8.4.5. Fonction de sensibilité perturbation-sortie (module) pour différents régulateurs

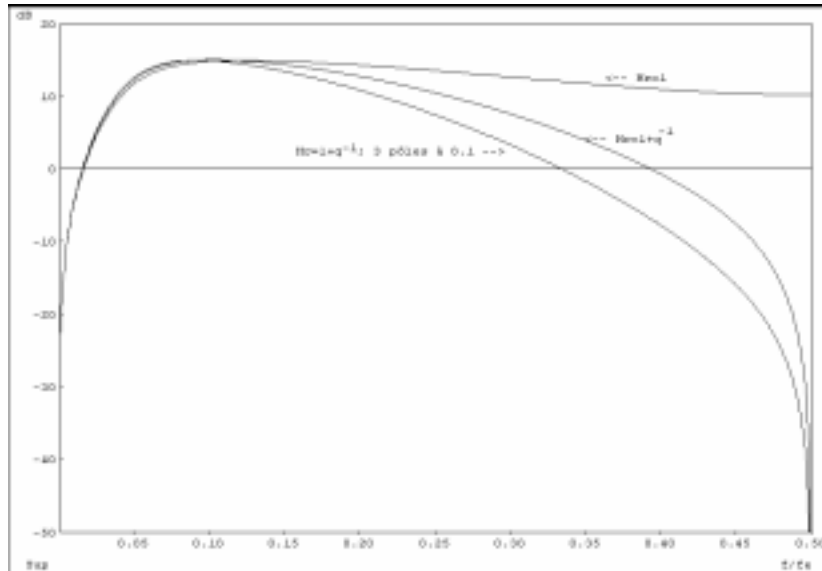


Figure 8.4.6. Fonction de sensibilité perturbation-entrée (module) pour différents régulateurs

La figure 8.4.7 illustre les résultats obtenus en simulation (poursuite et régulation) pour la boucle de position. Le temps de montée est légèrement supérieur à $7T_e = 840$ ms.

Les résultats expérimentaux obtenus avec le progiciel WinTRAC qui implémente les deux régulateurs R-S-T en cascade (position, vitesse) sont illustrés dans la figure 8.4.8. Les figures 8.4.8a et 8.4.8b donnent l'évolution de la position à des changements en échelon de la consigne de position et de la sortie du régulateur de position qui constitue la consigne de la boucle interne de vitesse. Le temps de montée est pratiquement égal au temps de montée obtenu en simulation (840 ms). Les figures 8.4.8c et 8.4.8d donnent l'évolution de la vitesse et de la commande tension moteur. Pour la vitesse et la commande fournie par le régulateur de vitesse l'échelle « temps » est la même que pour la position, mais le nombre d'échantillons n'est pas le même dans les deux boucles car les fréquences d'échantillonnages sont différentes.

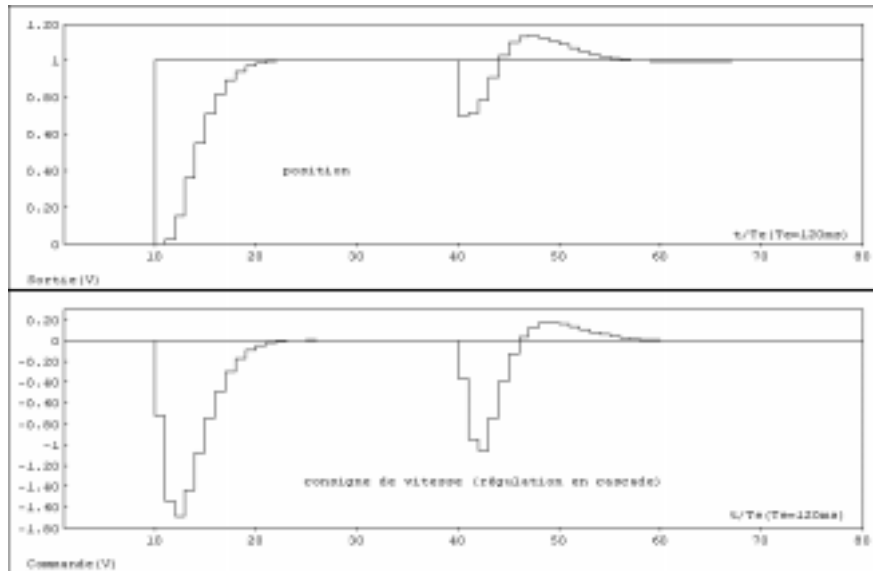


Figure 8.4.7. Réponse de la boucle de position en simulation

8.5. Régulation de position à travers une transmission souple

La transmission souple a été décrite dans le chapitre 7, paragraphe 7.5.4. Dans ce paragraphe nous traiterons le problème de la commande en boucle fermée de la position de la troisième poulie (voir figure 8.5.1), à partir de la connaissance du modèle identifié avec WinPIM (voir paragraphe 7.5.4). La variable de commande de système est la consigne de position de l'axe de la première poulie. Rappelons que ce système a deux modes de vibration très peu amortis et que la période d'échantillonnage est de 0.05 s. Le modèle identifié est :

$$\begin{aligned}
 A(q^{-1}) &= 1 - 1.609555q^{-1} + 1.87644q^{-2} - 1.49879q^{-3} + 0.88574q^{-4} \\
 B(q^{-1}) &= 0.3053q^{-1} + 0.3943q^{-2} \\
 d &= 2
 \end{aligned}$$

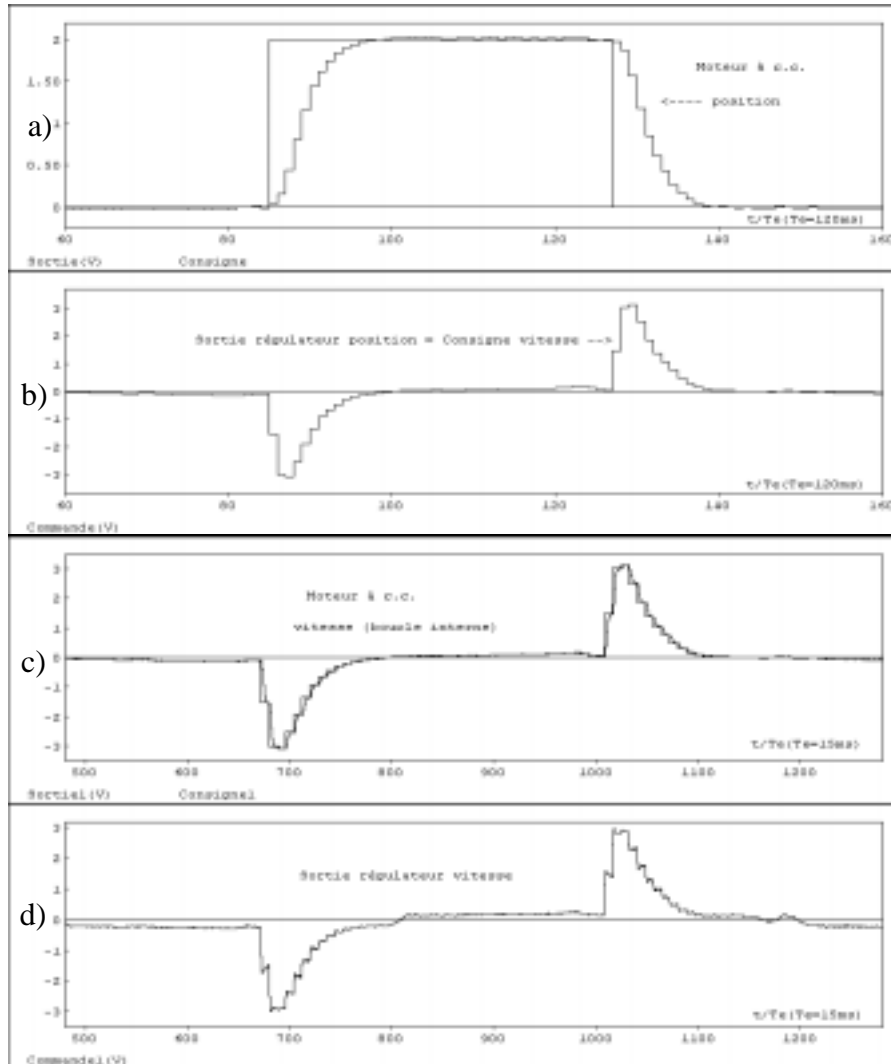


Figure 8.4.8. Evolution temps réel de l'ensemble des variables de la régulation en cascade de la position du moteur à c.c. : (a) position et consigne de position ; (b) sortie régulateur position (consigne vitesse) ; (c) vitesse et consigne vitesse ; (d) commande tension moteur

La caractéristique fréquentielle de ce modèle a été représentée dans la figure 7.5.15.

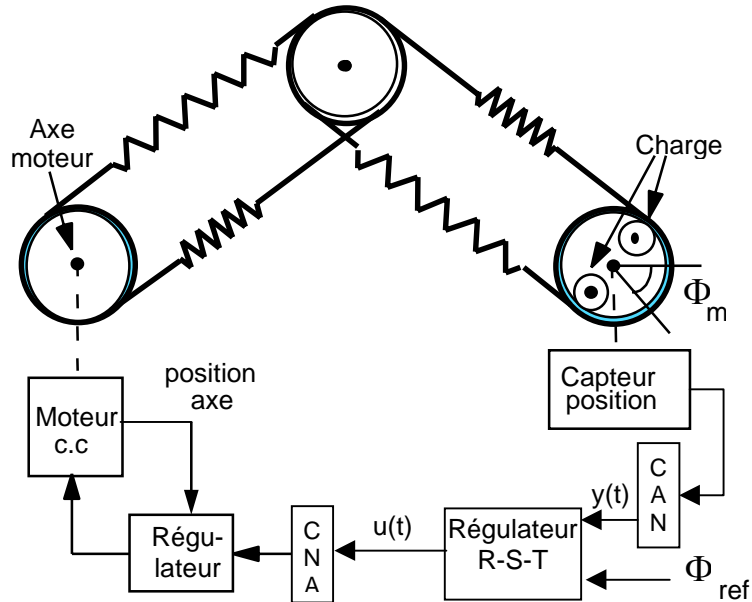


Figure 8.5.1. Commande numérique d'une transmission souple

Les deux modes de vibration du modèle sont caractérisés par $\omega_0 = 11.949 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0.042$ et $\omega_0 = 31.462 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0.023$. Le modèle a un zéro instable (car $|b_2| > |b_1|$).

S'agissant d'un modèle avec des zéros instables, on utilise la méthode du *placement de pôles*. On souhaite obtenir un comportement en régulation et en poursuite caractérisé par une paire de pôles dominants amortis correspondant au premier mode de vibration de la transmission. D'autre part, le régulateur doit assurer une marge de retard $\Delta\tau \geq T_e$, une marge de module $\Delta M \geq 0.5$ et une valeur maximale de $|S_{up}|$ en hautes fréquences inférieure à 10dB. Les spécifications pour le calcul du régulateur sont donc les suivantes :

- dynamique de poursuite : discrétisation d'un 2^e ordre continu avec $\omega_0 = 11.94 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.9$ (temps de réponse $t_M \approx 0,285s$ ce qui correspond à $\approx 6T_e$),
- erreur statique nulle (le régulateur devra contenir un intégrateur),
- pôles dominants de la boucle fermée correspondant à la discrétisation 2^e ordre continu avec $\omega_0 = 11.94 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.8$,

- marge de module $\Delta M \geq 0.5$; marge de retard $\Delta \tau \geq 0.05s$,
- $|S_{up}(q^{-1})|_{max} \geq 10 \text{ dB}$ pour $f \geq 0.35 f_e$.

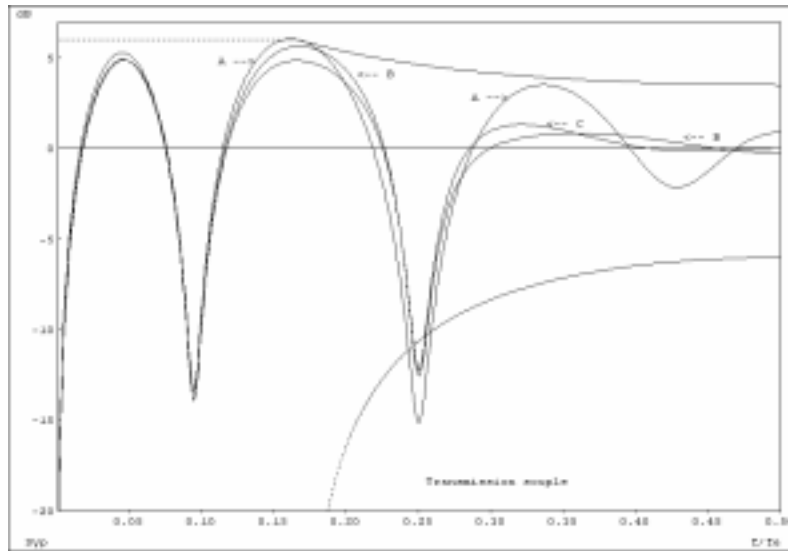


Figure 8.5.2. Fonctions de sensibilité perturbation-sortie pour différents régulateurs

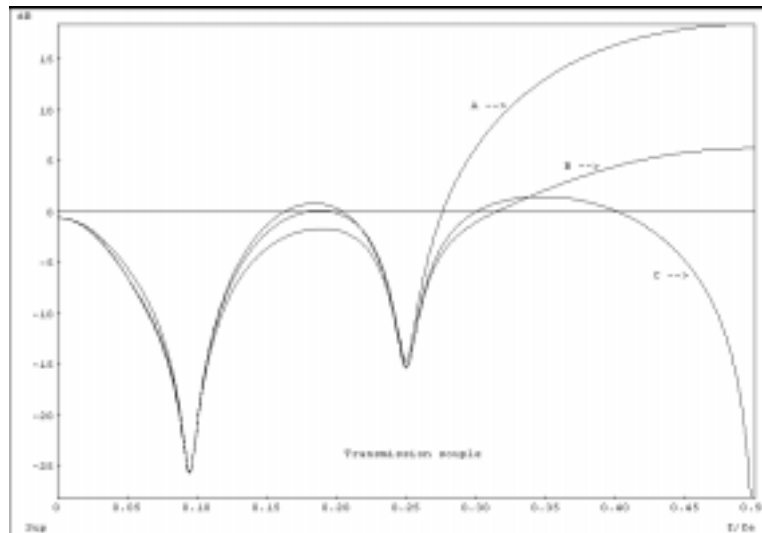


Figure 8.5.3. Fonctions de sensibilité perturbation-entrée pour différents régulateurs

Le calcul d'un premier régulateur en spécifiant uniquement les pôles dominants conduit aux fonctions de sensibilité S_{yp} et S_{up} représentées dans la figure 8.5.2 et 8.5.3 (courbes A). La marge de module $\Delta M = 0.498$ est légèrement inférieure aux spécifications, la marge de retard $\Delta \tau = 0.043s$ est inférieure aux spécifications et le maximum de $|S_{up}(q^{-1})|$ en hautes fréquences dépasse la valeur de 10 dB (voir tableau 8.5.1).

Le nombre de pôles de la boucle fermée que nous pouvons spécifier pour une taille minimale du régulateur ($n_R = n_S = 4$) est dans ce cas :

$$n_P = n_A + n_B + n_{H_S} + d - 1 = 8$$

Du fait qu'on a spécifié qu'une paire de pôles en boucle fermée correspondant à la fréquence du premier mode de vibration, mais avec un amortissement $\zeta = 0.8$, il résulte que tous les autres pôles de la boucle fermée ont été fixé automatiquement à 0. (qui correspond à des pôles apériodiques situés à $0.5 f_e$).

Le régulateur (A) amortit donc les pôles correspondant au premier mode de vibration sans changer leur fréquence mais il va aussi très fortement amortir et accélérer le deuxième mode de vibration ($z = 0$ correspond à $\omega_0 = 62.8 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 1$). Ceci demande des efforts de commande importants, dans une zone fréquentielle où le système a moins de gain ce qui induit l'augmentation de $|S_{up}|$.

Pour éviter ce phénomène il faut spécifier une deuxième paire de pôles pour la boucle fermée à la fréquence de la 2^e paire de pôles du système et avec un amortissement égal ou supérieur à la valeur de l'amortissement du mode de vibration en boucle ouverte. Plus l'amortissement imposé sera élevé, plus la valeur de $|S_{up}|$ dans cette zone de fréquences sera élevée. On choisit donc une deuxième paire de pôles pour la boucle fermée avec $\omega_0 = 31.46 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.15$ (cette valeur n'est pas critique). Il nous reste à choisir les quatre pôles auxiliaires restants. Comme indiqué dans le chapitre 3, paragraphe 3.6, il est judicieux de choisir des pôles apériodiques situés sur l'axe réel entre 0.05 et 0.5. Ces pôles ont un effet bénéfique sur le maximum de $|S_{up}|$ en hautes fréquences. Dans ce cas on a choisit quatre pôles situés à 0.2. La valeur de ces pôles n'est pas critique mais elle influencera le max de $|S_{up}|$ en hautes fréquences. Les caractéristiques de S_{yp} et S_{up} pour le nouveau régulateur sont représentées dans les figures 8.5.2 et 8.5.3 (courbes B). Le nouveau régulateur satisfait le cahier de charges (voir tableau 8.5.1).

	$H_S(q^{-1})$	$H_R(q^{-1})$	Pôles en boucle fermée		Marge de module (dB)	Marge de retard (s)	Max $ S_{up} $ (dB)
			Dominants	Auxiliaires			
A	$1-q^{-1}$		$\omega_0 = 11.94$ $\zeta = 0.8$		0.498 (-6.06)	0.043	18.43
B	$1-q^{-1}$		$\omega_0 = 11.94$ $\zeta = 0.8$	$\omega_0 = 31.46$ $\zeta = 0.15$ $(1-0.2q^{-1})^4$	0.522 (-5.65)	0.062	6.24
C	$1-q^{-1}$	$1+q^{-1}$	$\omega_0 = 11.94$ $\zeta = 0.8$	$\omega_0 = 31.46$ $\zeta = 0.15$ $(1-0.2q^{-1})^4$	0.544 (-5.29)	0.057	1.5

Tableau 8.5.1. Spécifications, marge de module, marge de retard et maximum de $|S_{up}|$ pour les différents régulateurs

Les figures 8.5.4 et 8.5.5 donnent les résultats obtenus sur le système réel avec le régulateur B. La figure 8.5.4, correspond à des changements de consigne en échelon. On observe que le temps de montée obtenu sur le système réel est proche de celui spécifié ($6T_e$ plus le retard de $2T_e$). La figure 8.5.5 illustre le comportement en régulation suite à une perturbation de position suivie d'un relâchement brusque (c'est le retour à la position d'équilibre qui est intéressant pour évaluer les performances en régulation).

Une étude plus fine du signal de commande (voir figures 8.5.4 et 8.5.5) indique la présence de réactions de la commande en hautes fréquences sans effets sur la sortie (car nous sommes bien au delà de la bande passante). Ce phénomène est même visible sur le système réel où la position de la première poulie constitue le signal de commande du système.

En fait la fonction de sensibilité perturbation-entrée amplifie de quelques dB le bruit de mesure haute fréquence (qui est interprété comme une perturbation). Pour remédier à cette situation il suffit d'ouvrir la boucle en hautes fréquences par l'introduction d'une partie fixe dans le régulateur $H_R = 1 + q^{-1}$ (le gain du

régulateur sera nul à $0.5f_e$) et de recalculer le régulateur. Les caractéristiques de ce régulateur (C) sont résumées dans le tableau 8.5.1. Les fonctions de sensibilité ainsi obtenues sont représentées dans les figures 8.5.2 et 8.5.3 (courbes C) et les résultats temps réel sont donnés dans les figures 8.5.6 et 8.5.7 (à comparer avec les figures 8.5.4 et 8.5.5). Les paramètres des régulateurs B et C sont données dans le tableau 8.5.2.

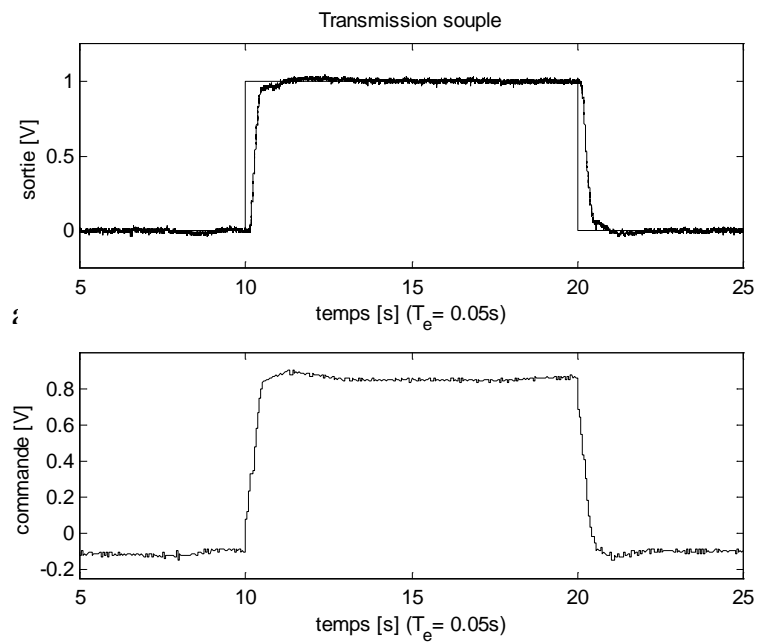


Figure 8.5.4. Réponse en position de la transmission souple pour une suite d'échelons de consigne (régulateur B)

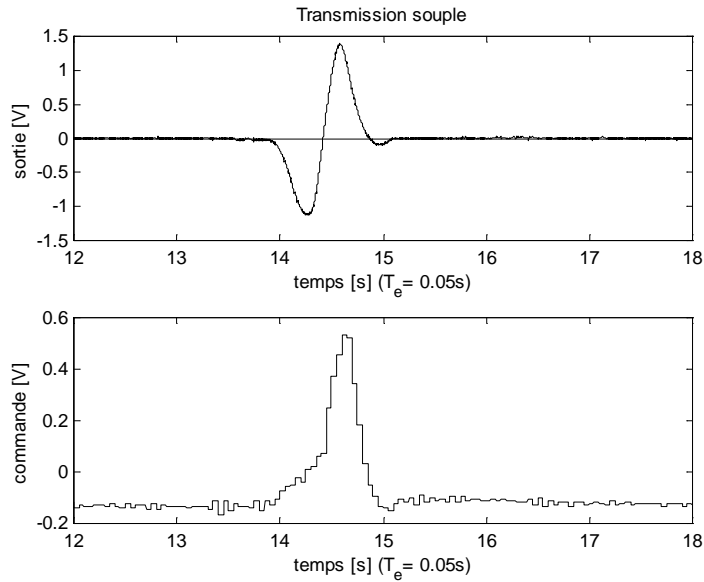


Figure 8.5.5. Transmission souple – Réjection d'une perturbation en position (régulateur B)

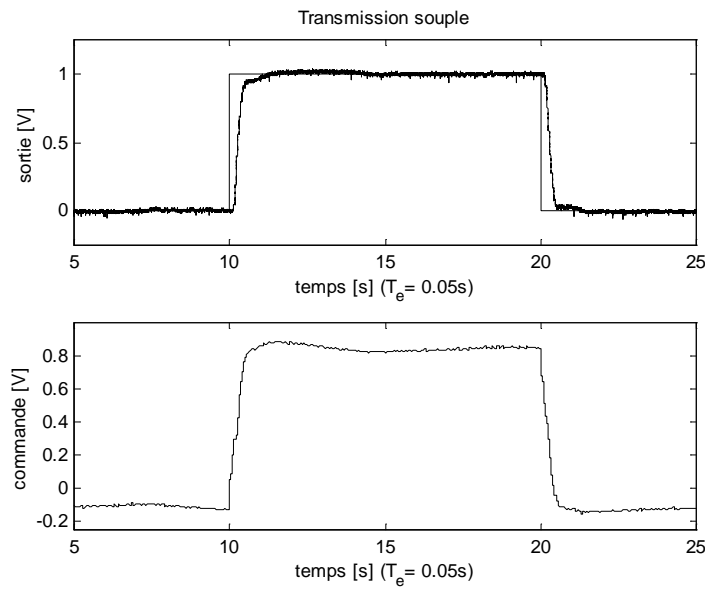


Figure 8.5.6. Réponse en position de la transmission souple pour une suite d'échelons de consigne (régulateur C)

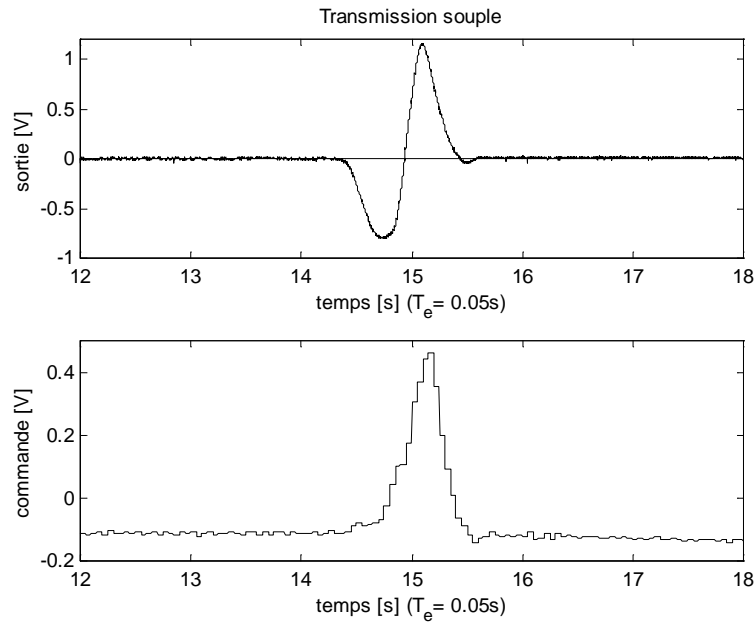


Figure 8.5.7. Transmission souple – Réjection d'une perturbation en position (régulateur C)

REGULATEUR B		REGULATEUR C	
Coefficients du polynôme $R(q^{-1})$			
R(0) = 0.497161	R(3) = -0.186272	R(0) = 0.307895	R(3) = 0.452544
R(1) = -1.009731	R(4) = 0.285405	R(1) = -0.515832	R(4) = -0.165905
R(2) = 0.622142		R(2) = -0.037637	R(5) = 0.167641
Coefficients du polynôme $S(q^{-1})$			
S(0) = 1.000000	S(3) = -0.239733	S(0) = 1.000000	S(3) = -0.181950
S(1) = -0.376884	S(4) = -0.126644	S(1) = -0.376884	S(4) = -0.109785
S(2) = -0.256739		S(2) = -0.256739	S(5) = 0.074642
Coefficients du polynôme $T(q^{-1})$ (identiques pour B et C)			
T(0) = 1.429225	T(3) = -2.687952	T(6) = 0.118277	
T(1) = -2.839061	T(4) = 1.594832	T(7) = -0.012656	
T(2) = 3.181905	T(5) = -0.576414	T(8) = 5.488E-04	
Coefficients des polynômes $B_m(q^{-1})$ et $A_m(q^{-1})$ (identiques pour B et C)			
B _m (0) = 0.124924		A _m (0) = 1.000000	
B _m (1) = 0.087209		A _m (1) = -1.129301	
		A _m (2) = 0.341434	

Tableau 8.5.2. Les valeurs des paramètres des régulateurs RST (B et C) pour la transmission souple

8.6. Commande d'un bras manipulateur souple 360°

La figure 8.6.1 donne une vue du bras manipulateur (robot) souple.

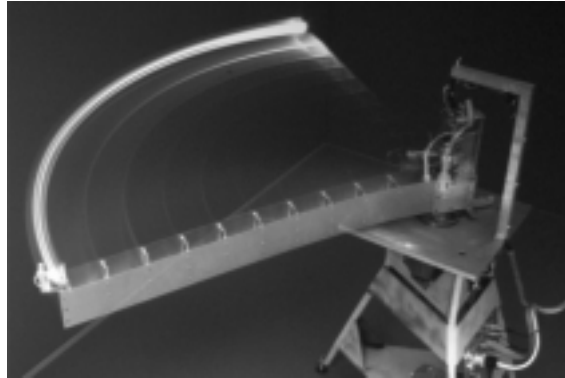


Figure 8.6.1. Bras manipulateur souple 360°
(laboratoire d'automatique de Grenoble, INPG/CNRS/UJF)

Il est constitué de deux lames d'aluminium d'un mètre de longueur, 10 cm de largeur et 0.7 mm d'épaisseur. Les lames sont reliées de façon souple par une dizaine de pontons rigides. Le système étant extrêmement souple, il présente de nombreux modes de vibration. L'énergie est concentrée essentiellement dans les premiers trois modes de vibration. La fréquence d'échantillonnage (20 Hz) a été choisie pour que ces trois modes se trouvent dans la zone fréquentielle à $0.5 f_e$. L'acquisition est faite à travers des filtres antirepliement. Le schéma du système de commande du bras souple est représentée dans la figure 8.6.2.

Une des extrémités du bras est asservie en position angulaire (mesurée par un potentiomètre) à l'aide d'un moteur de courant continu. L'asservissement local de position du moteur comporte des boucles de courant, vitesse et position. La dynamique de cet asservissement est plus rapide que celle des premiers modes de vibration du bras.

La sortie du procédé est la position de l'extrémité libre. La mesure de cette position est obtenue en combinant les informations sur la position du moteur (fournies par un codeur incrémental) et celles fournies par un capteur embarqué donnant la position de l'extrémité du bras par rapport à la position de l'extrémité fixe, solidaire avec le moteur (pour des détails concernant le système de mesure de position voir [LAN 96]). Le système de mesure permet de couvrir une rotation de 0 à 360°. Les acquisitions et la commande se font par un calculateur numérique. La commande fournie par le calculateur est la consigne de position du moteur.

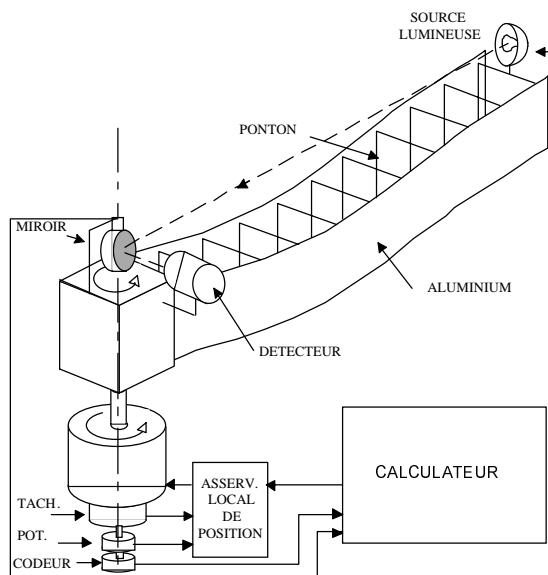


Figure 8.6.2. Schéma de commande du bras manipulateur souple 360°

Le modèle identifié et validé est le suivant (cas sans charge) [LAN 97] :

$$\begin{aligned}
 A(q^{-1}) &= 1 - 2.1049 q^{-1} + 1.04851 q^{-2} + 0.33836 q^{-3} + 0.46 q^{-4} \\
 &\quad - 1.5142 q^{-5} + 0.7987 q^{-6} \\
 B(q^{-1}) &= 0.0064 q^{-1} + 0.0146 q^{-2} - 0.0697 q^{-3} + 0.044 q^{-4} \\
 &\quad + 0.0382 q^{-5} - 0.007 q^{-6} \\
 d &= 0
 \end{aligned}$$

La caractéristique fréquentielle est représentée dans la figure 8.6.3.

Ce modèle est caractérisé par trois modes de vibration très peu amortis ($\omega_1 = 2.6173$, $\zeta_1 = 0.018$; $\omega_2 = 14.4027$, $\zeta_2 = 0.025$; $\omega_3 = 48.1169$, $\zeta_3 = 0.038$). La configuration des pôles et des zéros est représentée dans la figure 8.6.4. On observe la présence des zéros instables. A noter que les zéros instables de partie réelle positive correspondent à des zéros instables en continu (système à non-minimum de phase). S'agissant d'un système à zéros instables il faut utiliser le *placement de pôles* pour la synthèse du régulateur.

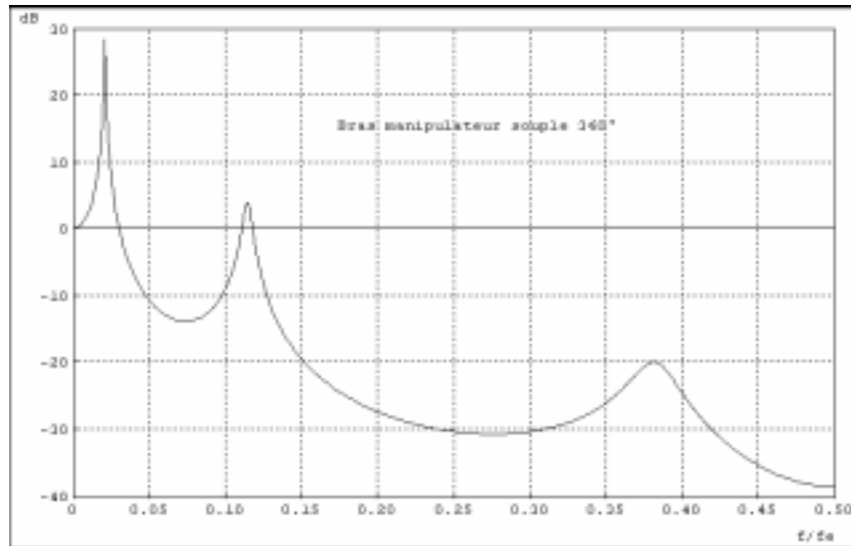


Figure 8.6.3. Caractéristique fréquentielle du modèle identifié du bras manipulateur souple 360°

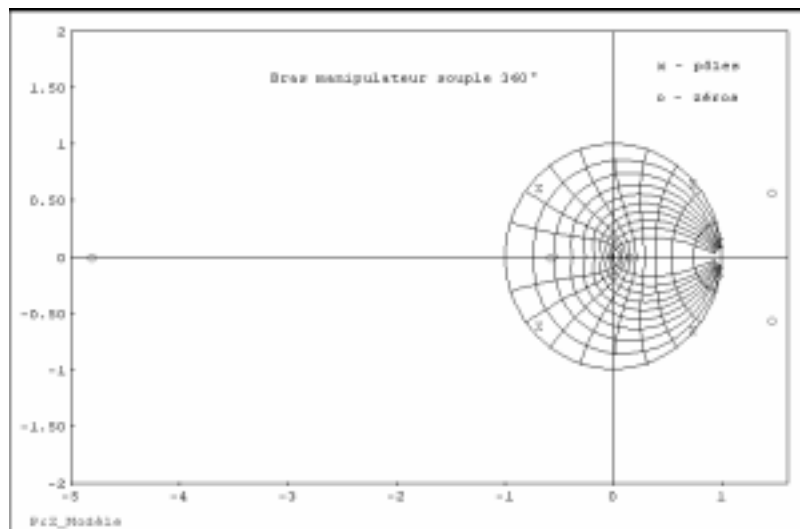


Figure 8.6.4. Configuration des pôles et des zéros pour le modèle identifié du bras souple

Dans [LAN 97] le régulateur a été calculé par la méthode itérative de placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité avec ajustement alternatif de H_S

et des pôles auxiliaires (voir chapitre 3, paragraphe 3.6). Dans [LAN 99] le régulateur a été calculé par le placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité en utilisant l'optimisation convexe. Pour des résultats expérimentaux voir [LAN 97, LAN 99].

Dans ce qui suit nous illustrerons le calcul du régulateur pour les mêmes spécifications que dans [LAN 99], en utilisant la méthode itérative de placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité avec ajustement simultané de H_S (respectivement H_R) et des pôles auxiliaires (voir chapitre 3, paragraphe 3.6). Les calculs ont été faits avec le *ppmaster* (Matlab) [PRO 01]. Les spécifications sont les suivantes :

- dynamique de poursuite : équivalente à un 2^e ordre continu avec $\omega_0 = 2.6173 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.9$;
- pôles dominants de la boucle fermée : définis par la discrétisation d'un 2^e ordre continu avec $\omega_0 = 2.6173 \text{ rad/s}$ et $\zeta = 0.8$;
- marge de module $\Delta M \geq 0.5$ (– 6 dB) ; marge de retard $\Delta \tau \geq 0.05 \text{ s}$ ($1T_e$) ;
- contraintes sur la fonction de sensibilité perturbation-commande : 15 dB en basses fréquences (< 4 Hz) ; 0 dB de 4.5 Hz à 6.5 Hz ; 15 dB de 6.5 Hz à 8 Hz ; 10 dB entre 8 et 10 Hz ;
- erreur statique nulle.

La valeur faible de $|S_{up}|$ imposée entre 4.5 Hz et 6.5 Hz est due à la valeur très faible du gain du système et aux incertitudes sur les modèles dans cette zone fréquentielle. La limitation en hautes fréquences est introduite pour limiter l'effet du bruit de mesure sur la commande.

Les gabarits sur les modules des fonctions de sensibilité sont représentés dans les figures 8.6.5 et 8.6.6 (traits continus épais).

On fixe les pôles dominants conformément aux spécifications et on introduit un intégrateur dans le régulateur ($H_{S_1} = 1 - q^{-1}$). La bande passante du système étant définie par les pôles dominants, la trajectoire de référence ayant une vitesse de variation résultant du choix d'un filtre A_m/B_m avec $\omega_0 = 2.6173 \text{ rad/s}$ et les perturbations de position étant elles aussi en basse fréquence, il résulte qu'il n'est pas nécessaire d'amortir le 2^e et 3^e mode de vibration. On va donc laisser ces pôles inchangés, en les spécifiant comme pôles de la boucle fermée (méthode du modèle interne partiel).

Les résultats de ce premier calcul conduisent à un régulateur pour lequel $|S_{yp}|$ et $|S_{up}|$ sortent largement des gabarits en hautes fréquences (figures 8.6.5 et 8.6.6 – courbes A). Dans ce cas, il convient de rajouter des pôles auxiliaires aperiodiques.

Le nombre total de pôles qui peuvent être spécifiés (sans augmentation de la taille du régulateur) est :

$$n_p = n_A + n_B + d + n_{H_{S_1}} - 1 = 12$$

Nous avons choisi déjà six pôles, il est donc possible de rajouter des pôles auxiliaires de la forme :

$$P_F(z^{-1}) = (1 + p_1 z^{-1})^6 \quad ; \quad -0.5 \leq p_1 \leq -0.05$$

En prenant $p_1 = -0.5$ on obtient un régulateur qui conduit à des fonctions de sensibilité qui dépassent encore les gabarits imposés sur les fonctions de sensibilité (figures 8.6.5 et 8.6.6 – courbes B). On constate que sur $|S_{yp}|$ le gabarit est violé autour de 1 Hz et pour $|S_{up}|$ entre 4 et 6 Hz. Pour remédier à cette situation, nous allons tout d'abord considérer l'introduction d'un dipôle résonant H_{S_2} / P_2 dans S_{yp} . Le filtre continu qui servira de base de calcul sera choisi avec une fréquence de résonance de $f_0 = 1 \text{ Hz}$ (6.28 rad/s). On choisit pour le dénominateur un amortissement $\zeta_{den} = 0.8$ (pour que les pôles auxiliaires qui seront introduits soient bien amortis) et une atténuation désirée $M_t = -5.5 \text{ dB}$, conduisant à $\zeta_{num} = 0.424$. Les caractéristiques des filtres discrets H_{S_2} et P_2 sont données dans le tableau 8.6.1. S'agissant d'une fréquence de résonance inférieure à $0.15 f_e$, les calculs peuvent se faire aussi avec une excellente précision directement en discret. Les résultats obtenus avec le nouveau régulateur sont illustrés dans les figures 8.6.5 et 8.6.6 – courbes C. Il reste maintenant à corriger la caractéristique fréquentielle de $|S_{up}|$ entre 4 et 6 Hz. Pour ceci on choisit un dipôle résonant H_{R_1} / P_3 dans $|S_{up}|$, centré autour de 5 Hz. Cette fréquence étant supérieure à $0.15 f_e$, il faut obligatoirement passer par un calcul d'un filtre continu qui sera après discrétisé. En choisissant $f_0 = 4.7 \text{ Hz}$, $M_t = -16.4 \text{ dB}$ et $\zeta_{den} = 0.9$ on obtient les résultats désirés (figures 8.6.5 et 8.6.6 – courbes D). Les caractéristiques de H_{R_1} et P_3 sont données dans le tableau 8.6.1.

La taille du régulateur est $n_R = n_S = 10$, proche de la taille du régulateur obtenu par l'optimisation convexe [LAN 99] et les caractéristiques obtenues pour S_{up} et S_{yp} dans les deux cas sont aussi très proches.

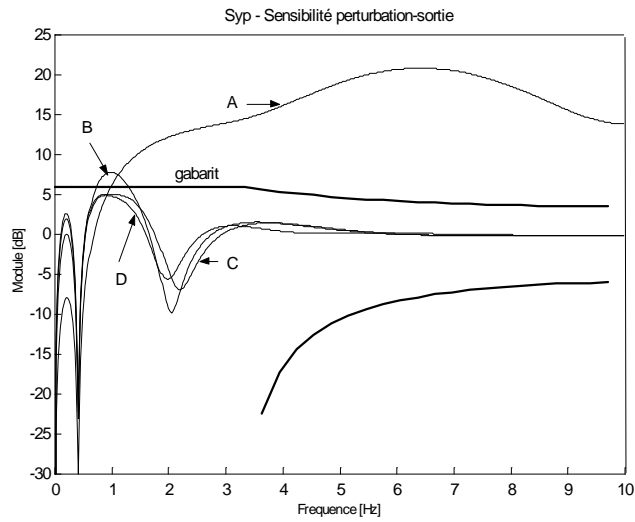


Figure 8.6.5. Bras manipulateur souple. Fonctions de sensibilité perturbation-sortie ($|S_{yp}|$) pour différents régulateurs

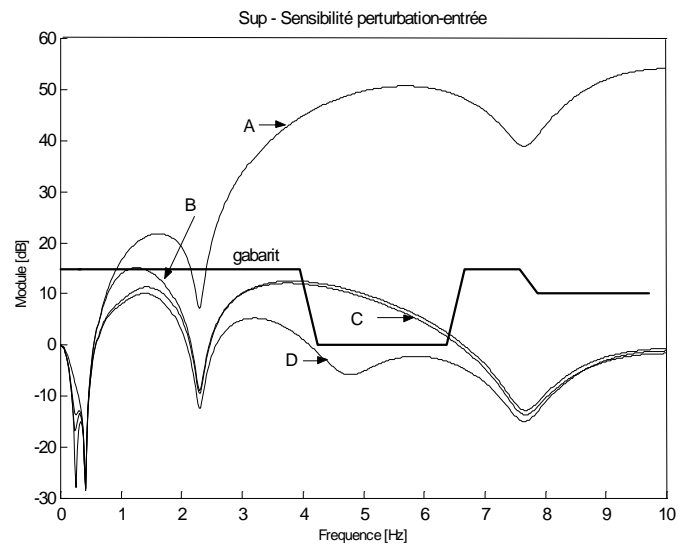


Figure 8.6.6. Bras manipulateur souple. Fonctions de sensibilité perturbation-entrée ($|S_{up}|$) pour différents régulateurs

	$H_S(q^{-1})$	$H_R(q^{-1})$	Pôles en boucle fermée	
			Dominants	Auxiliaires
A	$1 - q^{-1}$	-	$\omega_0 = 2.1673$ $\zeta = 0.8$	-
B	$1 - q^{-1}$	-	$\omega_0 = 2.1673$ $\zeta = 0.8$	$(1 - 0.5q^{-1})^6$
C	$1 - q^{-1}$ $\omega_0 = 6.28$ $\zeta = 0.424$	-	$\omega_0 = 2.1673$ $\zeta = 0.8$	$(1 - 0.5q^{-1})^6$ $\omega_0 = 6.28$ $\zeta = 0.8$
D	$1 - q^{-1}$ $\omega_0 = 6.28$ $\zeta = 0.424$	$\omega_0 = 29.57$ $\zeta = 0.092$	$\omega_0 = 2.1673$ $\zeta = 0.8$	$(1 - 0.5q^{-1})^6$ $\omega_0 = 6.28$ $\zeta = 0.8$ $\omega_0 = 40.1$ $\zeta = 0.74$

Tableau 8.6.1. Spécifications des différents régulateurs pour le bras souple

8.7. Régulation de l'épaisseur du zinc sur la ligne de galvanisation par essorage de Sollac-Florange

Cette application de la régulation numérique sur la ligne de galvanisation par essorage de Sollac-Florange (démarrage de la ligne et de la régulation numérique : 1991) est intéressante à plusieurs titres :

- elle montre clairement les gains que peut apporter une bonne régulation ;
- elle illustre la cohabitation d'une régulation numérique mise en œuvre sur PC avec des régulations traditionnelles, des automates programmables et des calculateurs de supervision. (la communication s'effectuant à travers un réseau d'usine) ;
- elle illustre l'apport de la régulation numérique R-S-T dans le cas des procédés ayant un retard pur important ;
- elle illustre le concept de « commande adaptative en boucle ouverte ».

Une présentation détaillée de cette réalisation se trouve dans [FEN 93a, FEN 93b, VIG 91].

8.7.1. Description du procédé

L'opération de galvanisation consiste à déposer du zinc sur une tôle. La méthode utilisée sur la ligne de Sollac-Florange consiste à faire passer cette tôle dans un bain de zinc liquéfié (figure 8.7.1), la régulation de l'épaisseur du dépôt de zinc s'effectue par une technique dite d'essorage, en plaçant des buses d'air à la sortie du bain. Celles-ci envoient de l'air sous pression pour réduire la couche de zinc avant qu'elle ne soit solidifiée (figure 8.7.2).

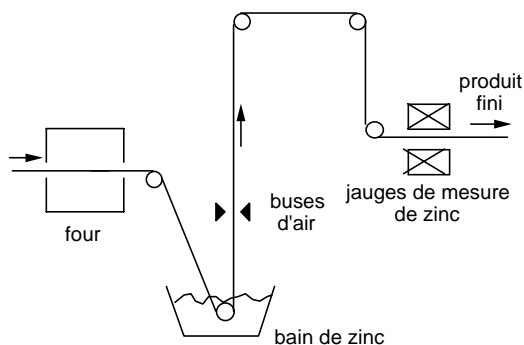


Figure 8.7.1. Schéma du procédé de galvanisation par essorage de Sollac-Florange

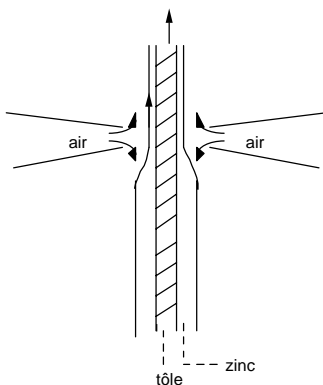


Figure 8.7.2. Détail de la technique d'essorage

Principale difficulté de cette régulation : la mesure de l'épaisseur de dépôt de zinc ne peut se faire qu'une fois l'ensemble refroidi. Les jauges sont donc situées à plus d'une centaine de mètres en aval du bain de zinc, d'où un retard important entre l'action sur la pression d'air au niveau des buses et la mesure de l'effet correspondant par les jauges. La régulation numérique R-S-T choisie est naturellement adaptée à ce type de « procédé avec retard » auquel la régulation type PID ne peut convenir.

En outre le retard dépend du temps de transport de la tôle entre les buses d'air et les jauges d'épaisseur de zinc, donc de la vitesse de la ligne ; celle-ci peut varier du simple au triple. Le comportement de ce système est aussi fortement corrélé à la position de la tôle par rapport aux buses.

8.7.2. Modélisation

Le modèle statique du procédé de galvanisation par essorage peut être approché par :

$$m = KD \sqrt{\frac{V}{P}} + \zeta_m$$

où m est la masse du dépôt de zinc, K est une constante de proportionnalité, D est la distance entre les buses et la tôle, P est la pression de l'air, V la vitesse de la tôle et ζ_m représente les effets des erreurs de modélisation ou des perturbations non prédictibles.

Un modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement (P_0, D_0, V_0) peut être obtenu :

$$m = KD_0 \sqrt{\frac{V_0}{P_0}} + \alpha \Delta D + \beta \Delta V - \mu \Delta P + \zeta_m$$

où P_0, D_0, V_0 sont respectivement les valeurs de la pression, distance et vitesse définissant le point de fonctionnement et $\Delta P, \Delta D, \Delta V$, les variations de ces grandeurs. On observe que l'utilisation de la pression comme variable de commande permet de compenser l'effet des variations de la distance, de la vitesse et des erreurs additives ζ_m .

La pression de l'air envoyé par les buses est régulée par une boucle de pression dont le comportement peut être approximé par un système du 1^{er} ordre. D'autre part, le retard du système dépend linéairement de la vitesse de la tôle.

On peut donc considérer pour ce procédé un modèle dynamique reliant les variations de pression aux variations de la masse du dépôt de zinc de la forme :

$$H(s) = \frac{G e^{-s\tau}}{1 + sT} \quad ; \quad \tau = \frac{L}{V}$$

où L est la distance entre les buses d'air et les capteurs de mesure de l'épaisseur et V est la vitesse de la tôle.

Quand on discrétise ce modèle, la principale difficulté provient du retard variable. Afin d'obtenir un régulateur numérique de complexité constante, le retard du modèle discrétisé doit rester constant. Pour ceci on choisit une période d'échantillonnage reliée à la vitesse de la tôle (il s'agit d'une « adaptation en boucle ouverte ») afin obtenir un modèle discret de complexité constante :

$$T_e = \frac{\left(\frac{L}{V} + \delta\right)}{d} ; \quad d = \text{entier}$$

où d est le retard discret et δ est le retard dû au réseau de communication. Le modèle discret du procédé qui a été identifié autour des différents points de fonctionnement est de la forme :

$$H(q^{-1}) = \frac{q^{-d}(b_1 q^{-1})}{1 + a_1 q^{-1}}$$

Le retard fractionnaire est négligeable (pas de terme $b_2 q^{-2}$) à cause de la manière dont on a sélectionné la période d'échantillonnage (ceci a été confirmé lors de l'identification).

8.7.3. Identification

L'identification du modèle discret du procédé a été faite en superposant une SBPA sur la consigne de la boucle de pression tel que cela est illustré dans la figure 8.7.3.

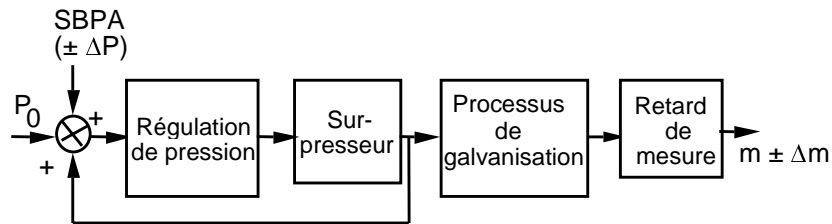


Figure 8.7.3. Schéma bloc du procédé identifié

L'amplitude de la SBPA a été choisie de l'ordre de 4 % de la valeur statique de la pression (P_0). La SBPA a été engendrée par un registre avec $N = 5$ cellules et un diviseur de fréquence d'horloge égale à 2. Des fichiers d'environ 128 points ont été utilisés pour l'identification dans différents points de fonctionnement. La figure 8.7.4. présente un fichier des entrées/sorties utilisé pour l'identification.

L'acquisition des données a été faite en utilisant un suréchantillonnage conformément au schéma donné dans le chapitre 7, paragraphe 7.1.4. Des modèles pour la face « avant » et face « arrière » de la tôle ont été identifiés.

Une étude comparative a permis d'établir que pour cette application la méthode de *l'erreur de sortie avec compensateur fixe* donne les meilleurs résultats en terme de validation du modèle identifié.

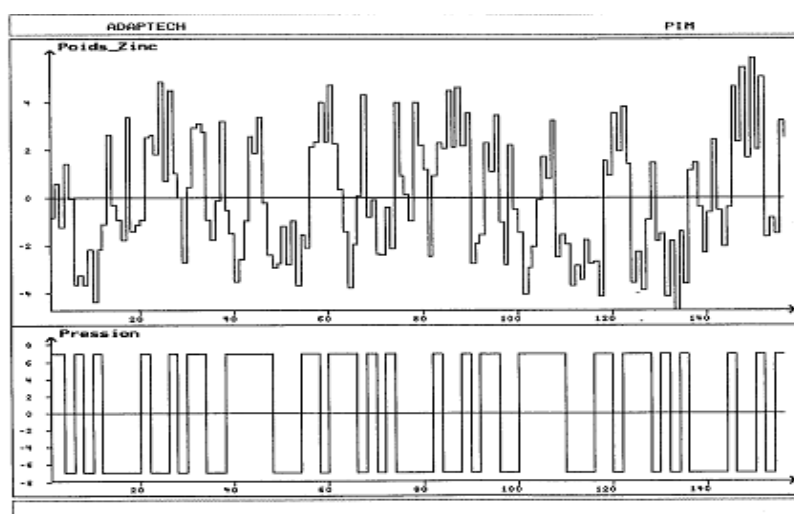


Figure 8.7.4. Fichier des entrées/sorties utilisé pour l'identification du procédé de galvanisation

Les tableaux 8.7.1 et 8.7.2 donnent les valeurs des paramètres identifiés pour différentes vitesses de la tôle et des valeurs de la distance buses/tôles. On observe une variabilité significative des paramètres, ce qui a imposé l'utilisation d'une *commande adaptative en boucle ouverte*.

Vitesse (m/min)	Retard	a_1	b_1	Gain statique ($b_1/(a_1 + b_1)$)
60	7	-0.143	-0.272	-0.37
95	7	-0.349	-0.291	-0.448
100	7	-0.232	-0.232	-0.302
110	7	-0.273	-0.225	-0.309
115	7	-0.171	-0.216	-0.210
135	7	-0.178	-0.384	-0.467

Tableau 8.7.1. Modèles identifiés pour une distance buses-tôles X_1

Vitesse (m/min)	Retard	a_1	b_1	Gain statique ($b_1/(a_1 + b_1)$)
75	7	-0.105	-0.617	-0.690
80	7	-0.198	-0.301	-0.998
109	7	-0.250	-0.266	-0.356
114	7	-0.263	-0.317	-0.430

Tableau 8.7.2. Modèles identifiés pour une distance buses-tôles X_2

8.7.4. Calcul du régulateur

Les régulateurs R-S-T (avec composante intégrale) pour les différentes zones de fonctionnement ont été calculés en utilisant la stratégie de *poursuite et régulation à objectifs indépendants* (chapitre 3, paragraphe 3.4) car le modèle du procédé a toujours des zéros stables (la période d'échantillonnage est reliée à la vitesse de la tôle – voir plus haut). Une des spécifications importantes est l'obtention d'une marge de retard supérieure à $2 T_e$.

Le polynôme $P(q^{-1})$ définissant les pôles en boucle fermée a un degré maximum donné par :

$$\deg P(q^{-1}) \leq (n_A + n_B + d + n_{H_S} - 1)$$

car le régulateur comporte un intégrateur ($n_{H_S} = 1$).

Dans cette application :

$$n_A + n_B + d + n_{H_S} - 1 = 9$$

et donc on peut spécifier 9 pôles. Deux pôles ont été placés en 0.2 et 0.3 (respectivement 0.2 et 0.4 en fonction des zones de fonctionnement et du pôle du modèle identifié) et les sept pôles auxiliaires additionnels ont été placés en 0.1⁶.

Ces pôles auxiliaires introduisent une atténuation dans les hautes fréquences (en dehors de la bande passante) et améliore la robustesse du système en boucle fermée (en particulier la marge de retard) sans pour autant réduire la bande de réjection des perturbations en basses fréquences.

6. Le choix qui a été fait pour les pôles dominants (et les pôles auxiliaires) de la boucle fermée se rapproche de la commande à modèle interne des systèmes avec retard (chapitre 3, paragraphe 3.5.7).

La figure 8.7.5a. donne le diagramme de Nyquist pour le cas où seulement deux pôles sont spécifiés dans $P(q^{-1})$ (0.2 et 0.3) et la figure 8.7.5b permet de voir l'effet des pôles auxiliaires additionnels (7 pôles à 0.1). On remarque une augmentation significative de la *marge de retard* qui passe de 10.9 s à 25.7 s ($T_e = 12$ s) car le lieu de Nyquist n'intersecte plus le cercle unité en hautes fréquences. L'introduction des pôles auxiliaires additionnels a aussi comme effet une réduction significative du module de la fonction de sensibilité perturbation-entrée en hautes fréquences, ce qui réduit la sollicitation de l'actionneur dans cette zone de fréquences. Par ailleurs les autres marges de robustesse sont tout à fait satisfaisantes dans les deux cas ($\Delta M > -6$ dB $\Delta G > 2$ $\Delta \phi > 60$ deg.).

Les essais en simulation ont montré que le système en boucle fermée tolère des variations du retard de $\pm T_e$ (une période d'échantillonnage) et des variations de ± 50 % des paramètres du modèle.

Des procédures d'arrondi antisaturation et de passage manuel-automatique sans à coups ont été mises en œuvre (voir paragraphes 8.1.3, 8.1.4. et 8.1.5).

Comme la vitesse de la tôle est mesurée il est possible de faire une compensation directe de cette « perturbation mesurable ». Cette compensation a un effet favorable en transitoire, le temps que l'intégrateur annule l'erreur statique due à cette perturbation.

8.7.5. Adaptation en boucle ouverte

L'adaptation est faite en fonction de :

- la vitesse de la tôle,
- la distance entre les buses et la tôle.

En dehors de l'adaptation de la période d'échantillonnage, le domaine de fonctionnement de la ligne de galvanisation a été découpé en 3 zones de vitesse (la vitesse de la tôle pouvant varier entre 30 m/min et 180 m/min) et 3 zones de distance buse-tôle ce qui donne un total de 9 zones de fonctionnement. Pour chacune de ces zones de fonctionnement, une identification a été effectuée (avec WinPIM) et un régulateur a été calculé avec WinREG à partir du modèle identifié et mémorisé dans une table.

Le schéma bloc de la régulation de l'épaisseur de zinc est donné dans la figure 8.7.6.

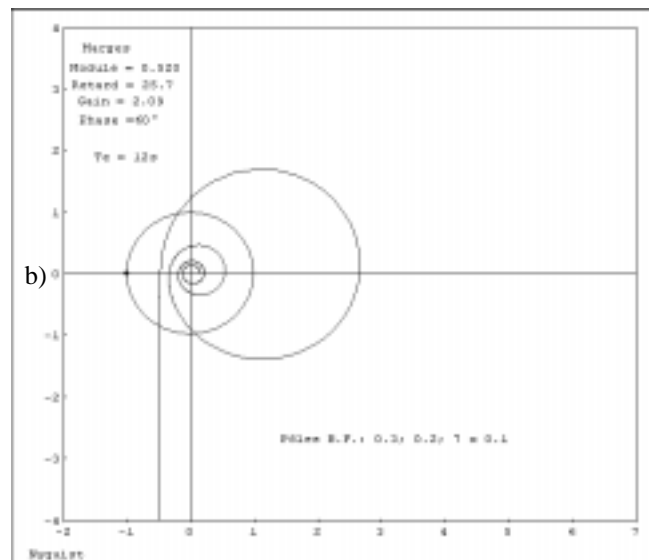
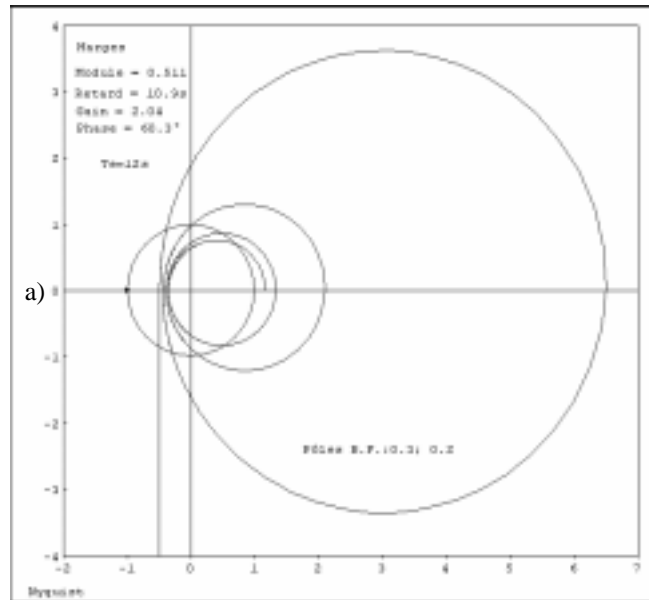


Figure 8.7.5. Diagramme de Nyquist pour la régulation d'épaisseur du zinc ($a_1 = -0.2$).
a) pôles B.F. : 0.2 ; 0.3 ; b) pôles B.F. 0.2 ; 0.3 ; 7 x 0.1

8.7.6. L'environnement matériel

La ligne de galvanisation de Sollac-Florange est contrôlée par 22 automates programmables, 4 minicalculateurs (VAX) et 10 PC industriels, l'ensemble étant relié à travers le réseau d'usine comportant un réseau général (MEDIAMAT-S) et un réseau local (MEDIAMAT-P)

Les deux boucles de régulation d'épaisseur du zinc (face avant et face arrière) ont été mises en œuvre sur un PC doté d'une carte entrées/sorties analogiques et qui communique avec le réseau afin de recevoir par ce moyen les consignes d'épaisseur, la position des buses, la vitesse de la ligne et les différentes commandes logiques. Le PC transmet directement la commande (correction de pression) à l'automate de régulation Bailey Sereg qui assure la régulation de pression.

La figure 8.7.7 donne une image de l'environnement matériel pour la régulation de l'épaisseur de zinc.

Les deux boucles de régulation, la gestion de l'environnement logique et le calcul du profil de la tôle sont mis en œuvre sur un PC industriel (Intel 80286 + coprocesseur) en utilisant l'environnement de génération d'applications d'automatique GRAP (Adaptech).

8.7.7. Résultats

La figure 8.7.8 montre des résultats typiques obtenus quand sur l'une des faces on utilise la régulation numérique et l'autre face une commande manuelle assistée par ordinateur (l'opérateur dispose d'un histogramme sur un petit horizon glissant de l'épaisseur du zinc et des commandes appliquées).

L'analyse de cette courbe permet de mettre en évidence deux faits majeurs :

1) une moins grande dispersion de l'épaisseur du revêtement (l'écart type sur la face avec régulation et d'environ 30 % plus faible que celui sur la face sans régulation). *Ceci permet d'assurer une meilleure qualité du produit fini.*

2) une baisse sensible de la moyenne de l'épaisseur du zinc ($\approx 3\%$), tout en respectant les normes concernant le dépôt minimum. L'impact économique est indéniable et se traduit par *une économie significative de matières premières* (plus de 300 Keuros sur un an).

A noter que le fonctionnement en boucle fermée réduit aussi le nombre des tâches de l'opérateur.

Le tableau 8.7.3 résume des résultats obtenus dans différentes zones de fonctionnement.

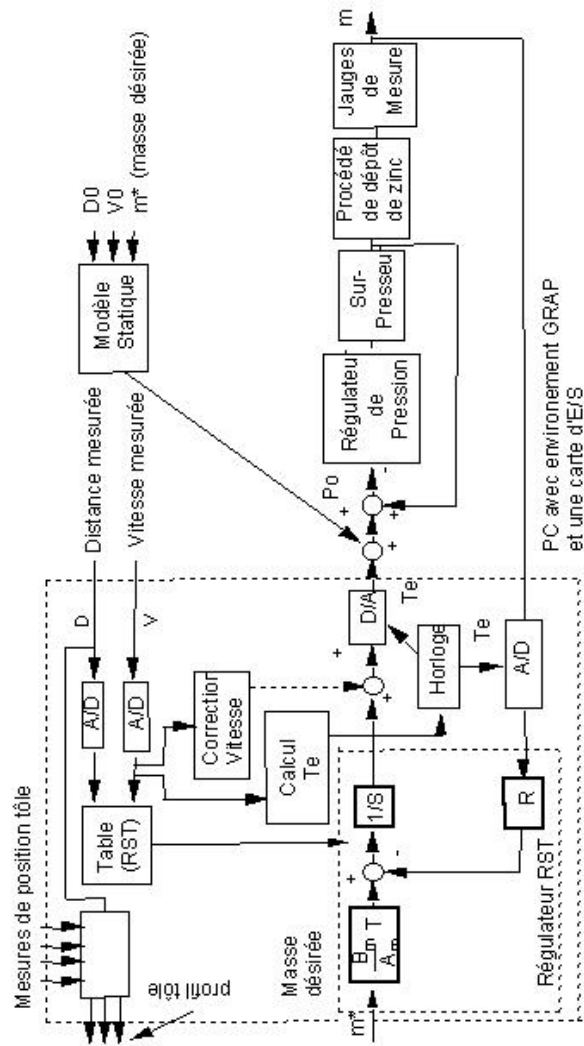


Figure 8.7.6. Régulation numérique de l'épaisseur du dépôt de zinc avec adaptation en boucle ouverte.

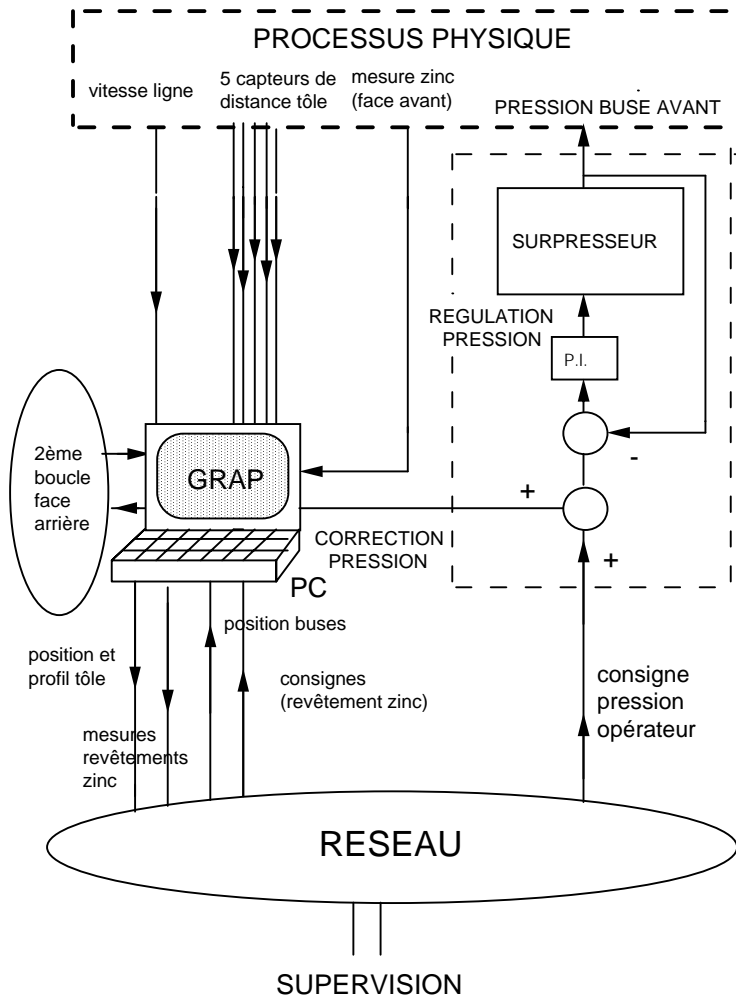


Figure 8.7.7. Mise en œuvre de la régulation de l'épaisseur de zinc (Sollac-Florange)

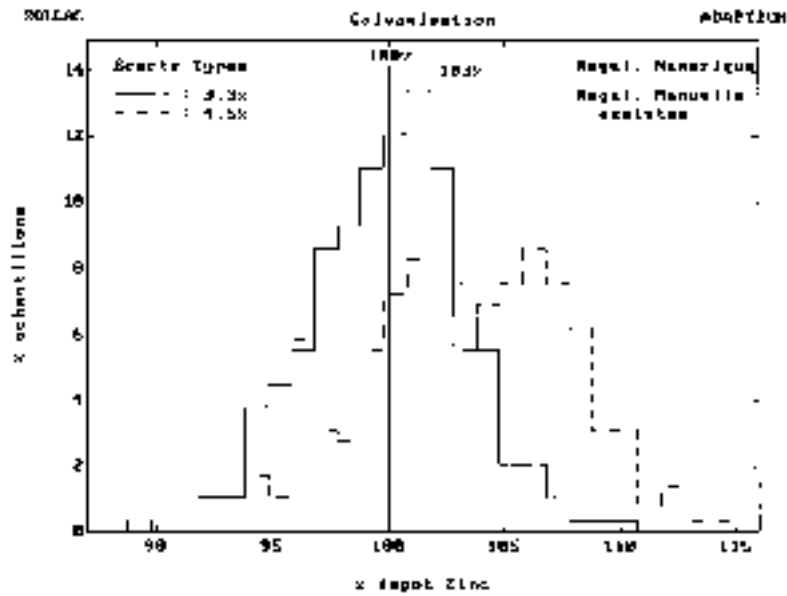


Figure 8.7.8. Performances typiques de la régulation numérique de l'épaisseur de dépôt de zinc (Sollac-Florange)

Distance (mm)	Vitesse (m/mm)	Régulation numérique			Commande manuelle assistée par ordinateur		
		Valeur moyenne %	Ecart type %	Hors référence ± 10 %	Valeur moyenne %	Ecart type %	Hors référence ± 10 %
10	60-90	100	4.7	4.3	102.5	6.7	10.1
10	95	100	3.3	0.7	103	4.5	5.9
10	85-100	100	2.9	0	99	5.2	5.9
10	110-116	100	4.3	2.5	105	4.3	3.9
10	100-117	100	5.1	6.4	100	6.3	8.4
15	70	100	1.5		102	2	

Tableau 8.7.3. Performances de la régulation numérique du dépôt de zinc (Sollac-Florange)

8.6. Conclusion

La mise en œuvre des régulateurs numériques peut se faire sur des matériels très divers. Mais cette mise en œuvre doit tenir compte d'un certain nombre d'aspects à savoir :

- spécification des performances désirées en tenant compte des disponibilités de puissance des actionneurs, de la réponse en boucle ouverte du procédé, des marges de robustesse souhaitées,
- prise en compte du retard de calcul,
- prise en compte des caractéristiques du convertisseur numérique/analogique,
- introduction des dispositifs antisaturation,
- mise en place d'une procédure de passage manuel/automatique sans « à coups ».

Pour les applications où des variations importantes des caractéristiques du modèle dynamique du procédé ont lieu, lors des changements des points de fonctionnement, il convient :

- d'identifier le modèle du procédé dans différentes zones de fonctionnement,
- de calculer un régulateur pour chaque zone de fonctionnement,
- de stocker les valeurs calculées dans une table,
- de changer de paramètres du régulateur pour chaque zone de fonctionnement en reprenant les valeurs stockées dans la table. Cette procédure porte le nom de « commande adaptative en boucle ouverte »,
- enfin il est très utile (pour les procédés de fabrication continus) de mesurer la qualité de la régulation à l'aide d'histogrammes de la grandeur réglée.

Les exemples d'application présentés (ainsi que de nombreuses autres applications) montrent l'efficacité de la méthodologie proposée pour la conception et la mise en œuvre d'une régulation numérique performante.

8.7. Bibliographie

- [ADA 01] ADAPTECH, *Guide d'intégration du régulateur R-S-T sur cibles programmables*, 4, Rue de la Tour de l'Eau, St. Martin d'Hères, France, 2001.
- [AST 95] ASTRÖM K.J., WITTENMARK B., *Adaptive Control*, 2^e édition, Addison Wesley, Reading, Mass., 1995.
- [AST 97] ASTRÖM K.J., WITTENMARK B., *Computer Controlled Systems - Theory and Design*, 3^e édition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1997.

- [CON 01] CONSTANTINESCU A., Commande robuste et adaptative d'une suspension active, thèse docteur INPG, Laboratoire d'automatique de Grenoble (INPG/CNRS), décembre 2001.
- [FEN 93a] FENOT C., ROLLAND F., VIGNERON G., LANDAU I.D., « Open loop adaptive feedback control of deposited zinc in hot dip galvanizing », *Control Engineering Practice*, vol. 1, n° 5, 1993.
- [FEN 93b] FENOT C., VIGNERON G., ROLLAND F., LANDAU I.D., « Régulation d'épaisseur de dépôt de zinc à Sollac, Florange », *Revue Générale d'Electricité*, n° 11, p. 25-30, décembre 1993.
- [FRA 90] FRANKLIN G.F., POWELL J.D., WORKMAN M.L., *Digital Control of Dynamic Systems*, 2^e édition, Addison Wesley, Reading, Mass., 1990.
- [LAN 79] LANDAU I.D., *Adaptive control – the model reference approach*, Dekker, New York, 1979.
- [LAN 86] LANDAU I.D., « La Commande Adaptative : Un Tour Guidé », dans *Commande adaptative - Aspects pratiques et théoriques*, Landau, Dugard (Eds.), Masson, Paris, 1986.
- [LAN 93a] LANDAU I.D., « Evolution of Adaptive Control », *ASME Transactions, Journal DSC*, vol. 115, n° 2, p. 381-391, juin 1993.
- [LAN 93b] LANDAU I.D., ROLLAND F., « Identification and digital control of electrical drives », *Control Eng. Practice*, vol. 1, n° 3, 1993.
- [LAN 96] LANDAU I.D., LANGER J., REY D., BARNIER J., « Robust control of a 360° flexible arm using the combined pole placement/sensitivity function shaping method », *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol. 4, n° 4, juillet 1996.
- [LAN 97] LANDAU I.D., LOZANO R., M'SAAD M., *Adaptive control*, Springer, Londres, 1997.
- [LAN 99] LANGER J., LANDAU I.D., « Combined pole placement/sensitivity function shaping method using convex optimization criteria », *Automatica*, vol. 55, n° 6, p. 1111-1120, 1999.
- [PRO 01] PROCHAZKA. H., LANDAU I.D., Pole placement with sensitivity function shaping using 2 zeros/2 poles digital band-stop filters, Note Interne, LAG (INPG), Grenoble, octobre 2001.
- [ROL 91] ROLLAND F., LANDAU I.D., « Pour mieux réguler le PC va vous aider », *Mesures*, p. 71-73, décembre 1991.
- [VIE 91] VIEILLARD J.P., « Machine automatique pour la fabrication de câbles torsadés téléphoniques », *La Lettre d'Adaptech*, n° 2, p. 1-2, Adaptech, St. Martin d'Hères, France, 1991.
- [VIG 91] VIGNERON G., Etude et réalisation d'une régulation auto-adaptative d'épaisseur de zinc sur une ligne de galvanisation, Mémoire d'Ingénieur CNAM, Metz, 1991.
- [YOU 91] YOUNSI A., Nouvelle génération de banc d'essais d'embrayages, Mémoire d'ingénieur CNAM, Paris, 1991.

Chapitre 9

Identification en boucle fermée

On présente les techniques d'identification des modèles de procédé opérant en boucle fermée ainsi que les techniques de validation correspondantes. Les possibilités offertes par l'identification en boucle fermée en vue de l'obtention de meilleurs modèles pour le recalcul des régulateurs permettant une amélioration des performances est illustrée dans la partie finale du chapitre.

9.1. Introduction

Il existe en pratique des situations où l'identification en boucle fermée (c'est-à-dire en présence d'un régulateur) s'impose.

– la première classe de situations est liée aux caractéristiques du procédé. Pour les procédés intégrateurs ou instables, ou pour les procédés présentant une dérive importante du point de fonctionnement il est très difficile et même des fois dangereux d'effectuer des essais d'identification en boucle ouverte ;

– la deuxième classe de situations est constituée par les systèmes où un régulateur existe déjà et où il n'est pas souhaitable (ou possible) d'ouvrir la boucle pour effectuer une identification ;

– enfin, la troisième classe de situations est constituée par les boucles conçues à partir d'une identification en boucle ouverte et où soit pour la validation de la boucle de régulation en temps réel et l'amélioration des performances du régulateur, soit pour la maintenance du régulateur, il est nécessaire d'effectuer une identification en boucle fermée.

C'est ce dernier aspect qui a pris une grande importance ces dernières années, car l'identification en boucle fermée fournit en général des meilleurs modèles pour le calcul des régulateurs que l'identification en boucle ouverte.

L'objectif de l'identification en boucle fermée est d'obtenir un modèle de procédé permettant de décrire avec le plus de fidélité possible le comportement du système en boucle fermée réel pour un régulateur donné. L'objectif sous-jacent est l'amélioration des performances du système bouclé à travers l'utilisation du modèle identifié en boucle fermée.

En d'autres termes, en supposant que le système réel est linéaire, on cherche un modèle de procédé qui en boucle fermée avec le même régulateur donne une fonction de transfert (fonction de sensibilité) la plus proche possible de celle du système en boucle fermée réel.

Il a été montré [LAN 97b, LAN 01b] que l'identification en boucle fermée sous réserve de l'utilisation d'un algorithme d'identification approprié permet d'obtenir en général des meilleurs modèles pour le calcul des régulateurs. En effet, il est possible d'améliorer la qualité du modèle identifié dans les zones fréquentielles critiques pour la commande. Ces zones critiques pour la commande sont celles où le hodographe de la fonction de transfert boucle ouverte est proche du point critique.

Pour comprendre les potentialités de l'identification en boucle fermée ainsi que les difficultés, considérons l'identification en boucle fermée d'un procédé où une excitation externe a été superposée sur la sortie du régulateur (voir figure 9.1.1a). La figure 9.1.1b donne un schéma équivalent qui matérialise la fonction de transfert entre l'excitation externe r_u et l'entrée u du procédé et l'effet du bruit sur l'entrée du procédé. Supposons que l'excitation est une SBPA qui a un spectre fréquentiel pratiquement constant de 0 à $0.5 f_e$. On observe que l'excitation externe est préfiltrée par la fonction de sensibilité S_{yp} dont le module a un maximum dans les zones fréquentielles près du point critique $[-1, j0]$ (voir chapitre 2, paragraphe 2.6.2). Il résulte que l'amplitude du signal effectif appliqué au procédé sera renforcée dans cette zone de fréquences et donc la précision du modèle identifié dans cette zone de fréquences sera meilleure. Malheureusement la contre-réaction introduit une corrélation entre le bruit de mesure et la commande. Ceci conduit à un biais important si on essaye d'identifier par des techniques d'identification type boucle ouverte basées sur la décorrélation (décrites dans le chapitre 6) sans tenir compte de la contre-réaction. On pourrait espérer que les techniques d'identification type boucle ouverte basées sur le blanchiment de l'erreur de prédiction continuent de donner des bons résultats en boucle fermée. Malheureusement, à cause de la contre-réaction il résulte une interdépendance entre le modèle du bruit et celui du procédé, ce qui conduit aussi à des résultats biaisés [KAR 98].

Pour une bonne identification en boucle fermée on a besoin donc de méthodes d'identification qui tirent avantage de l'amélioration des caractéristiques fréquentielles du signal d'excitation effectivement appliqué à l'entrée du procédé et qui ne sont pas affectées par la corrélation entre le bruit de mesure et l'entrée du procédé provoquée par la contre-réaction.

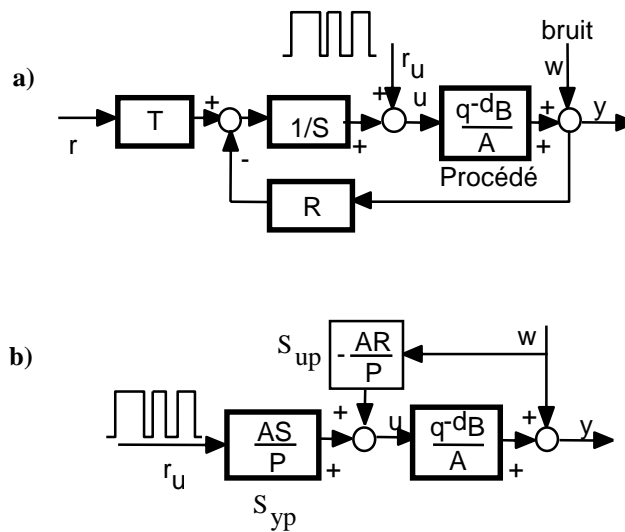


Figure 9.1.1. Identification en boucle fermée : a) système réel avec excitation superposée sur la sortie du régulateur ; b) schéma équivalent

Une solution efficace à ce problème est fournie par les méthodes d'identification d'erreur de sortie en boucle fermée (CLOE – Closed loop output error) qui seront présentées dans le paragraphe 9.2.

Les schémas d'acquisition de données pour le cas de l'identification en boucle fermée ont été présentés dans le chapitre 7 (paragraphe 7.1).

9.2. Méthodes d'identification d'erreur de sortie en boucle fermée

9.2.1. Le principe

Le principe des méthodes d'identification en boucle fermée est illustré dans la figure 9.2.1. La partie supérieure représente le système réel et les parties inférieures représentent un prédicteur ajustable du système en boucle fermée. Le prédicteur ajustable de la boucle fermée utilise le même régulateur que le système réel.

L'erreur de prédiction entre la sortie réelle du système bouclé et la sortie du prédicteur de la boucle fermée (erreur de sortie en boucle fermée) est une mesure de l'écart entre le vrai modèle du procédé et son estimation. Cette erreur peut être utilisée pour adapter le modèle du procédé afin de minimiser l'erreur de prédiction en boucle fermée. En d'autres termes, *l'objectif de l'identification d'un modèle en boucle fermée est de trouver le meilleur modèle du procédé qui minimise l'écart entre la sortie prédite et la sortie réelle du système en boucle fermée.*

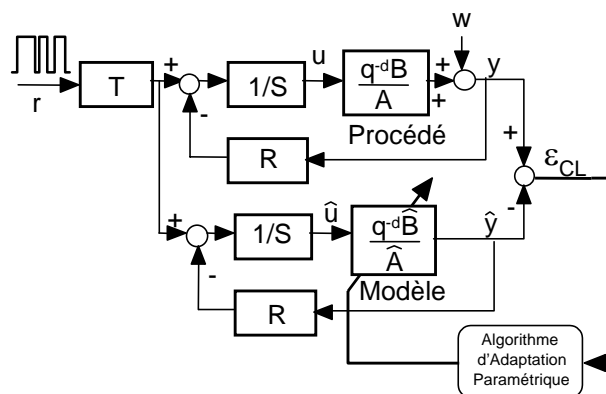


Figure 9.2.1. Schéma de principe de l'identification en boucle fermée par la méthode d'erreur de sortie (excitation superposée sur la consigne)

A noter que dans la figure 9.2.1, l'excitation est superposée sur la consigne. Elle peut aussi être superposée à la sortie du régulateur tel que c'est indiqué dans la figure 9.2.2 (la consigne n'a pas été représentée).

Dans les deux cas l'algorithme d'estimation paramétrique est le même, mais les caractéristiques des modèles identifiés peuvent être légèrement différentes (dans la figure 9.2.1 on essaye d'approcher S_{yr} et dans la figure 9.2.2 on essaye d'approcher S_{yv}).

L'utilisation de ces méthodes requiert la connaissance du régulateur.

Les différentes méthodes qui seront présentées sont disponibles dans le logiciel WinPIM (Adapttech) et la boîte à outils CLID (Adapttech) pour Matlab.

9.2.2. Les méthodes CLOE, F-CLOE et AF-CLOE

Erreur de sortie en boucle fermée (CLOE)

Nous présenterons les algorithmes à partir d'un exemple du 1^{er} ordre pour le modèle du procédé.

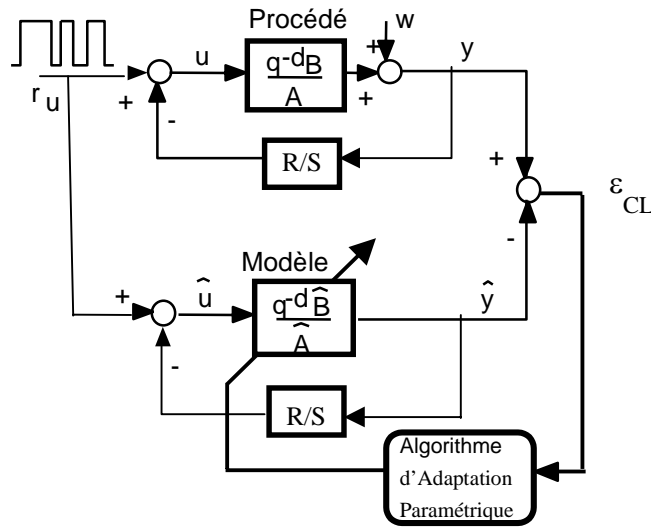


Figure 9.2.2. Identification en boucle fermée par la méthode d'erreur de sortie (excitation superposée à la sortie du régulateur)

Le système en boucle fermée est décrit par :

$$y(t+1) = -a_1 y(t) + b_1 u(t) = \theta^T \phi_0(t) \quad [9.2.1]$$

$$\theta^T = [a_1, b_1]; \quad \phi_0(t)^T = [-y(t), u(t)] \quad [9.2.2]$$

$$u(t) = -\frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})} y(t) + r_u(t) \quad [9.2.3]$$

L'équation [9.2.1] est l'équation du procédé et la commande $u(t)$ engendrée par le régulateur est donnée par l'équation [9.2.3]. $r_u(t)$ représente l'excitation superposée à la sortie du régulateur (voir figure 9.2.2).

Dans le cas de l'excitation superposée à la consigne, $r_u(t)$ dans [9.2.3] est remplacé par (voir figure 9.2.1) :

$$r_u(t) = \frac{T(q^{-1})}{S(q^{-1})} r(t) \quad [9.2.4]$$

Le prédicteur ajustable (erreur de sortie) de la boucle fermée est décrit par :

$$\hat{y}^\circ(t+1) = -\hat{a}_1(t)\hat{y}(t) + \hat{b}_1(t)\hat{u}(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad [9.2.5]$$

$$\hat{y}(t+1) = -\hat{a}_1(t+1)\hat{y}(t) + \hat{b}_1(t+1)\hat{u}(t) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \quad [9.2.6]$$

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t)]; \quad \phi(t)^T = [-\hat{y}(t), \hat{u}(t)] \quad [9.2.7]$$

$$\hat{u}(t) = -\frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})} \hat{y}(t) + r_u(t) \quad [9.2.8]$$

où $\hat{y}^\circ(t+1)$ et $\hat{y}(t+1)$ représentent les sorties *a priori* respectivement *a posteriori* du prédicteur ajustable. $\hat{u}(t)$ est le signal de commande engendré par le régulateur (identique au régulateur sur le système réel) à partir de prédiction *a posteriori* de la sortie et non pas à partir des mesures (à comparer [9.2.8] avec [9.2.3]).

L'erreur de prédiction de la boucle fermée est donnée par :

$$\varepsilon_{CL}^\circ(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^\circ(t+1) \quad \textit{a priori} \quad [9.2.9]$$

$$\varepsilon_{CL}(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) \quad \textit{a posteriori} \quad [9.2.10]$$

L'algorithme d'adaptation paramétrique utilisé est similaire aux algorithmes utilisés pour l'identification en boucle ouverte :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\Phi(t)\varepsilon_{CL}(t+1) \quad [9.2.11]$$

$$F(t+1)^{-1} = \lambda_1(t)F(t)^{-1} + \lambda_2(t)\Phi(t)\Phi(t)^T ; \quad 0 < \lambda_1(t) \leq 1; 0 \leq \lambda_2(t) < 2 \quad [9.2.12]$$

$$\varepsilon_{CL}(t+1) = \frac{\varepsilon_{CL}^\circ(t+1)}{1 + \Phi(t)^T F(t)\Phi(t)} \quad [9.2.13]$$

$$\Phi(t) = \phi(t) \quad [9.2.14]$$

La différence fondamentale par rapport à l'identification en boucle ouverte en utilisant l'erreur de sortie, réside dans l'utilisation d'un prédicteur ajustable différent et d'un vecteur des observations différent.

REMARQUE.— Si $S(q^{-1}) = 1$ et $R(q^{-1}) = 0$ nous sommes dans un fonctionnement en boucle ouverte et on obtient ainsi comme un cas particulier l'algorithme d'erreur de sortie en boucle ouverte.

Dans le cas général l'équation [9.2.1] est remplacée par :

$$y(t+1) = -A^*(q^{-1})y(t) + B^*(q^{-1})u(t-d) + A(q^{-1})w(t+1). \quad [9.2.15]$$

où w représente l'effet du bruit. Le bruit w est centré, de puissance finie et indépendant de l'excitation externe r_u . Les équations [9.2.5] et [9.2.6] gardent la même forme avec :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \dots, \hat{a}_{n_A}(t), \hat{b}_1(t), \dots, \hat{b}_{n_B}(t)] \quad [9.2.16]$$

$$\phi(t)^T = [-\hat{y}(t), \dots, -\hat{y}(t-n_A+1), \hat{u}(t-d), \dots, \hat{u}(t-n_B+1-d)] \quad [9.2.17]$$

et l'algorithme d'adaptation paramétrique est celui donné par les équation [9.2.11] à [9.2.14].

La convergence de cet algorithme (CLOE), en absence de bruit, est sujette à une condition suffisante : la fonction de transfert :

$$\frac{S(z^{-1})}{P(z^{-1})} - \frac{\lambda_2}{2} \quad ; \quad 2 > \lambda_2 \geq \max \lambda_2(t) \quad [9.2.18]$$

doit être *strictement réelle positive*, où :

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1}). \quad [9.2.19]$$

est le polynôme caractéristique de la boucle fermée définissant les pôles de la boucle fermée.

On montre que sous la condition suffisante [9.2.18], la méthode d'erreur de sortie en boucle fermée (CLOE) donne des estimations paramétriques asymptotiquement non biaisées en présence de bruit (indépendant de l'excitation externe r_u) si le modèle d'estimation et le modèle réel ont la même structure.

Méthode d'erreur de sortie en boucle fermée avec filtrage (F-CLOE)

Pour relâcher la condition [9.2.18] on peut envisager de filtrer le vecteur $\phi(t)$ par $S(q^{-1})/\hat{P}(q^{-1})$ où $\hat{P}(q^{-1})$ est une estimation du polynôme caractéristique de la boucle fermée. En effet si on dispose d'une estimation du modèle du procédé $q^{-d}\hat{B}(q^{-1})/\hat{A}(q^{-1})$ on calcule :

$$\hat{P}(q^{-1}) = \hat{A}(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d}\hat{B}(q^{-1})R(q^{-1}). \quad [9.2.20]$$

et dans l'algorithme d'adaptation paramétrique on utilise :

$$\Phi(t) = \frac{S(q^{-1})}{\hat{P}(q^{-1})}\phi(t). \quad [9.2.21]$$

On obtient ainsi la méthode F-CLOE. Dans ce cas, la fonction de transfert [9.2.18] est remplacée par :

$$\frac{\hat{P}(z^{-1})}{P(z^{-1})} - \frac{\lambda_2}{2} \quad ; \quad 2 > \lambda_2 \geq \max \lambda_2(t) \quad [9.2.22]$$

qui doit être *strictement réelle positive* (condition suffisante).

Une première estimation du modèle du procédé nécessaire pour le calcul du filtre peut provenir soit d'une identification en boucle ouverte, soit d'une identification en boucle fermée, en utilisant une méthode d'identification type boucle ouverte, soit encore en utilisant la méthode AF-CLOE (ci-dessous).

Méthode d'erreur de sortie en boucle fermée avec filtrage adaptatif (AF-CLOE)

On peut aussi envisager de filtrer $\phi(t)$ par un filtre à paramètres variables $S(q^{-1})/\hat{P}(q^{-1},t)$ ou $\hat{P}(q^{-1},t)$ est l'estimation au temps t , du polynôme caractéristique de la boucle fermée :

$$\hat{P}(q^{-1},t) = \hat{A}(q^{-1},t)S(q^{-1}) + q^{-d}\hat{B}(q^{-1},t)R(q^{-1}) \quad [9.2.23]$$

calculé à partir des estimations à l'instant t de $\hat{A}(q^{-1},t)$ et $\hat{B}(q^{-1},t)$. Ceci correspond à l'algorithme AF-CLOE.

Dans ce cas le vecteur $\Phi(t)$ donné par [9.2.21] est remplacé par :

$$\Phi(t)^T = \frac{S(q^{-1})}{\hat{P}(q^{-1}, t)} \phi(t)^T. \quad [9.2.24]$$

9.2.3. Méthode d'erreur de sortie étendue en boucle fermée (X-CLOE)

On considère dans ce cas que les perturbations affectant la sortie du procédé peuvent être modélisées par un modèle de type ARMAX. Les équations [9.2.1] et [9.2.3] deviennent :

$$y(t+1) = -A^*(q^{-1})y(t) + B^*(q^{-1})u(t-d) + C^*(q^{-1})e(t) + e(t+1) \quad [9.2.25]$$

$$u(t) = -\frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})}y(t) + r_u(t) \quad [9.2.26]$$

où $e(t)$ est un bruit blanc gaussien et :

$$C(q^{-1}) = 1 + q^{-1}C^*(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_c}q^{-n_c}$$

est un polynôme asymptotiquement stable.

X-CLOE est une méthode d'identification basée sur le blanchissement de l'erreur de prédiction en boucle fermée. On considère un prédicteur ajustable de la boucle fermée de la forme :

$$\begin{aligned} \hat{y}^0(t+1) &= -\hat{A}^*(t, q^{-1}) + \hat{B}^*(t, q^{-1})\hat{u}(t-d) + \hat{H}^*(t, q^{-1})\frac{\varepsilon_{CL}(t)}{S(q^{-1})} \\ &= \hat{\theta}_e(t)^T \phi_e(t) \end{aligned} \quad [9.2.27]$$

où :

$$\hat{u}(t) = -\frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})}\hat{y}(t) + r_u(t) \quad [9.2.28]$$

$$\hat{\theta}_e(t)^T = [\hat{a}_1(t), \dots, \hat{a}_{n_A}(t), \hat{b}_1(t), \dots, \hat{b}_{n_B}(t), \hat{h}_1^*(t), \dots, \hat{h}_{n_H}^*(t)] \quad [9.2.29]$$

$$\phi_e(t)^T = [\phi(t)^T, \varepsilon_{CL_f}(t), \dots, \varepsilon_{CL_f}(t - n_H + 1)] \quad [9.2.30]$$

$$\varepsilon_{CLf}(t) = \frac{\varepsilon_{CL}(t)}{S(q^{-1})} \quad [9.2.31]$$

$$\varepsilon_{CL}^0(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^0(t+1) \quad [9.2.32]$$

$$\varepsilon_{CL}(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}_e(t+1)^T \phi_e(t) \quad [9.2.33]$$

Pour $\hat{A}^*(t, q^{-1}) = A^*(q^{-1})$, $\hat{B}^*(t, q^{-1}) = B^*(q^{-1})$ et $\hat{H}^*(t, q^{-1}) = H^*(q^{-1})$ où¹ :

$$H(q^{-1}) = 1 + q^{-1}H^*(q^{-1}) = 1 + C(q^{-1})S(q^{-1}) - P(q^{-1}) \quad [9.2.34]$$

l'erreur de prédiction de la boucle fermée est un bruit blanc [LAN 01b].

L'algorithme d'adaptation paramétrique est celui donné dans [9.2.11] à [9.2.14] où :

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}_e(t) \quad ; \quad \Phi(t) = \phi_e(t)$$

Dans le cas déterministe (sans bruit) à la différence des algorithmes précédents il n'y a pas de condition suffisante de convergence à satisfaire. En présence d'une perturbation de type ARMA on obtient des estimations paramétriques asymptotiquement non biaisées sous la condition suffisante de convergence :

$$\frac{1}{C(z^{-1})} - \frac{\lambda_2}{2} \quad ; \quad 2 > \lambda_2 \geq \max \lambda_2(t) \quad [9.2.35]$$

doit être une fonction de transfert *strictement réelle positive* (même type de conditions que pour le cas boucle ouverte).

9.2.4. Identification en boucle fermée des procédés contenant un intégrateur pur

Les méthodes d'identification en boucle fermée présentées précédemment sont plus précises dans l'estimation d'un intégrateur pur que les méthodes d'identification boucle ouverte. Néanmoins si on connaît a priori l'existence d'un tel intégrateur, il est souhaitable d'en tenir compte. Deux procédures peuvent être

1. De [9.2.34] il résulte que :

$$n_H = \max(n_C + n_S, n_P).$$

utilisées et elles entraînent une modification du régulateur utilisé dans le prédictiveur ajustable afin de préserver la fonction de transfert de la boucle fermée.

1) L'entrée est remplacée par son intégrale, la sortie restant la même. Dans ce cas les équations du prédictiveur ajustable deviennent :

$$\hat{y}'^0(t+1) = -\hat{A}_1^*(t, q^{-1})\hat{y}'(t) + \hat{B}^*(t, q^{-1})\hat{u}'(t-d) \quad [9.2.36]$$

$$\hat{u}'(t) = \frac{1}{1-q^{-1}} \left[-\frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})} \hat{y}'(t) + r_u(t) \right] \quad [9.2.37]$$

avec :

$$A(q^{-1}) = (1-q^{-1})[1+q^{-1}A_1^*(q^{-1})] = (1-q^{-1})A_1(q^{-1}) \quad [9.2.38]$$

2) La sortie est remplacée par ses variations, l'entrée restant la même. Dans ce cas, la sortie de procédé en boucle fermée est :

$$y'(t) = y(t) - y(t-1) = (1-q^{-1})y(t) \quad [9.2.39]$$

et les équations du prédictiveur ajustable deviennent :

$$\hat{y}'^0(t+1) = -\hat{A}_1^*(t, q^{-1})\hat{y}'(t) + \hat{B}^*(t, q^{-1})\hat{u}'(t-d) \quad [9.2.40]$$

$$\hat{u}'(t-d) = -\frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})(1-q^{-1})} y'(t) + r_u(t) \quad [9.2.41]$$

L'erreur de prédiction de la boucle fermée est dans ce cas :

$$\varepsilon_{CL}^0(t+1) = y'(t) - \hat{y}'^0(t+1) \quad [9.2.42]$$

La figure 9.2.3 (a et b) illustre ces modifications pour le cas de l'excitation externe appliquée à la sortie du régulateur.

9.2.5. Validation des modèles identifiés en boucle fermée

Comme dans le cas de l'identification en boucle ouverte, c'est la validation qui permettra d'une part de dire si le modèle obtenu est bon et d'autre part de choisir le meilleur modèle parmi les modèles fournis par les différentes méthodes.

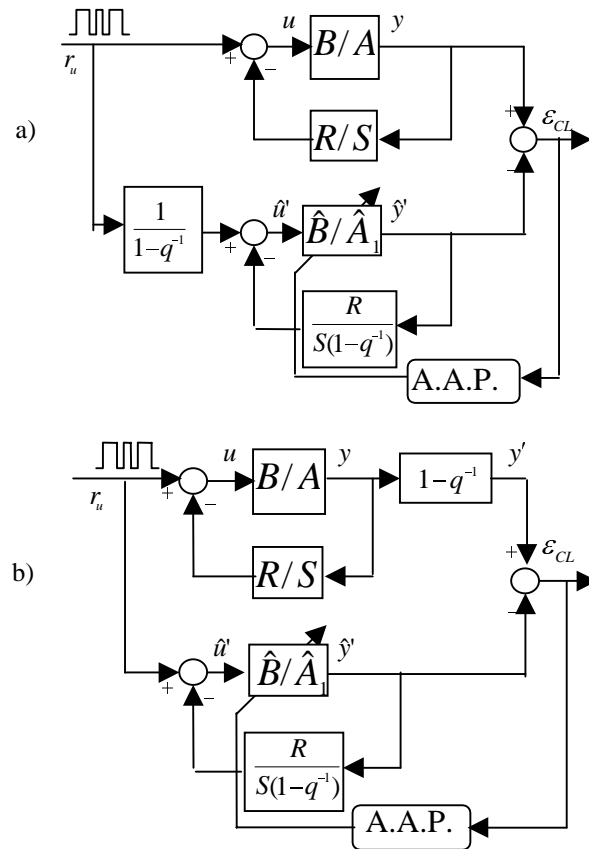


Figure 9.2.3. Prise en compte d'un intégrateur pur lors de l'identification en boucle fermée ($A(q^{-1}) = (1 - q^{-1})A_1(q^{-1})$) : (a) entrée remplacée par son intégrale ; (b) sortie remplacée par ses variations

L'objectif de la validation est de trouver quel est le modèle de procédé qui, avec le régulateur utilisé, permet d'obtenir la meilleure prédiction du comportement du système en boucle fermée. La validation d'un modèle identifié en boucle fermée sera dépendante du régulateur utilisé.

Trois procédures de validation peuvent être définies:

- i) tests statistiques de validation sur l'erreur de sortie en boucle fermée (test d'intercorrélation entre $\varepsilon_{CL}(t+1)$ et $\phi(t)$);

- ii) proximité des pôles calculés de la boucle fermée et des pôles identifiés du système réel en boucle fermée ;
- iii) validation temporelle (comparaison des réponses temporelles du système réel et du prédicteur de la boucle fermée).

Validation statistique

La validation statistique peut être développée d'après les principes utilisés lors de l'identification en boucle ouverte, avec la différence qui provient de l'utilisation d'un prédicteur de la boucle fermée incorporant le modèle du procédé identifié pour calculer l'erreur de prédiction résiduelle. On utilisera un test de décorrélation.

En utilisant la configuration de la figure 9.2.1 (ou 9.2.2) où le prédicteur est donné par les équations [9.2.5] à [9.2.8], on calcule pour les valeurs identifiées des paramètres :

- les corrélations entre l'erreur de sortie en boucle fermée $\varepsilon_{CL}(t+1)$ et les composantes du vecteur d'observation $\phi(t)$ ($\hat{y}(t), \hat{u}(t-d)$ et leurs valeurs retardées),
- la covariance de l'erreur résiduelle de la sortie en boucle fermée.

Ce type de test est motivé d'une part par le fait que la décorrélation entre les observations (les composantes de $\phi(t)$) et l'erreur de sortie en boucle fermée conduit à des estimations paramétriques non biaisées et d'autre part, cette décorrélation implique la décorrélation entre l'erreur de prédiction de sortie en boucle fermée et l'excitation externe (ce qui veut dire que l'erreur résiduelle de prédiction ne contient aucune information dépendant de l'excitation externe et donc toutes les corrélations entre l'excitation externe et la sortie du système en boucle fermée sont représentées par le prédicteur).

On définit :

$$R(i) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_{CL}(t) \hat{y}(t-i) \quad [9.2.43]$$

et on calcule :

$$RN(i) = \frac{R(i)}{\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \hat{y}^2(t) \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_{CL}^2(t) \right) \right]^{1/2}}; \quad i=0,1,2,\dots,\max(n_A, n_B + d) \quad [9.2.44]$$

Comme test de validation, on utilise le critère [LAN 97]:

$$|RN(i)| \leq \frac{\alpha}{\sqrt{N}}$$

où α est le niveau de confiance (une valeur typique est 2.17 qui correspond à un niveau de confiance de 97 %) et N est le nombre de données (voir chapitre 6).

Dans beaucoup de situations pratiques, à partir d'un jeu de données, plusieurs modèles peuvent être identifiés en utilisant différentes méthodes (même un modèle identifié en boucle ouverte peut être disponible). Une validation comparative est nécessaire pour sélectionner le meilleur modèle. Les indicateurs de comparaison sont fournis par la variance de l'erreur de prédiction et $\max|RN(i)|$ pour chaque modèle.

Validation par proximité des pôles

Si le modèle identifié en contre-réaction avec le régulateur utilisé pendant l'identification permet de construire un bon prédicteur pour le système réel en boucle fermée, ceci implique que les pôles du système en boucle fermée et ceux du prédicteur sont proches (sous réserve d'une excitation externe persistante). En conséquence, la proximité des pôles du prédicteur (qui peuvent être calculés) et ceux du système réel en boucle fermée (qui peuvent être identifiés par une identification de la boucle fermée entre l'excitation externe et la sortie) donnera une indication sur la qualité du modèle identifié.

La proximité des pôles peut être jugée par un examen visuel de la carte des pôles. Il est possible de quantifier la distance entre les deux configurations de pôles (ou entre deux fonctions de transfert) en calculant la distance de Vinnicombe (v-gap) entre les deux fonctions de transfert (voir annexe A3).

Des simulations extensives, et des nombreux résultats expérimentaux ont montré que les tests statistiques et les tests de proximité des pôles donnent des résultats cohérents et permettent une comparaison claire entre plusieurs modèles identifiés [LAN 97b]. L'identification des pôles de la boucle fermée réelle se fait tout simplement en identifiant le transfert entre l'excitation externe et la sortie du système en boucle fermée par des techniques standard d'identification et validation en boucle ouverte. A noter que cette identification se fait avec les mêmes données utilisées pour l'identification du modèle du procédé en boucle fermée.

Validation temporelle

Pour la validation temporelle, on compare les réponses temporelles du système en boucle fermée réel et du prédicteur de la boucle fermée. Malheureusement, en

pratique, il n'est pas toujours facile d'évaluer comparativement plusieurs modèles en utilisant cette approche. En fait, une bonne validation par proximité des pôles implique une bonne superposition des réponses temporelles, alors que la réciproque n'est pas toujours vraie.

9.3. Autres méthodes d'identification en boucle fermée

9.3.1. *Identification type boucle ouverte utilisant des données filtrées*

Il s'agit d'approximations des méthodes présentée dans le paragraphe 9.2. On utilise des algorithmes pour l'identification des procédés en boucle ouverte mais les données entrée/sortie (u, y) sont préalablement filtrées. Les filtres utilisés correspondent à l'estimation des diverses fonctions de sensibilité. L'utilisation de ces méthodes requiert la connaissance du régulateur [LAN 97b, LAN 01b].

9.3.2. *Identification directe*

Il s'agit d'identifier le modèle du procédé à partir des entrées et sorties du procédé en faisant abstraction de l'effet de la boucle fermée (l'excitation extérieure ayant été appliquée soit sur la référence, soit sur la sortie du régulateur). Les algorithmes d'identification en boucle ouverte sont utilisés et en particulier la structure S3 (moindres carrés étendus, erreur de sortie à modèle de prédiction étendu...). Cette approche est un cas particulier de l'approche précédente.

La qualité des résultats obtenus est très variable. Bien que la connaissance du régulateur n'est pas nécessaire, les résultats dépendent néanmoins fortement du régulateur utilisé et du niveau de bruit de mesure. Il faut en règle générale utiliser un régulateur « mou » qui assure essentiellement une stabilisation du point de fonctionnement.

9.3.3. *Identification en plusieurs étapes*

Ces méthodes ont comme objectif d'une part de s'affranchir de la connaissance du régulateur et d'autre part d'éliminer l'effet du bruit (particulièrement critique pour le cas de l'utilisation des méthodes d'identification type « boucle ouverte ») [ADA 97b, VAN 93].

Pour comprendre cette approche il faut se référer à la figure 9.1.2. La mise en œuvre comporte plusieurs étapes.

1) on identifie la fonction de sensibilité $S_{yp} = AS/P$ entre l'excitation externe $r_u(t)$ et l'entrée du procédé $u(t)$;

2) on filtre l'excitation externe $r_u(t)$ par la fonction de sensibilité estimée \hat{S}_{yp} et on obtient une variable instrumentale $\hat{u}(t)$ qui n'est pas corrélée avec le bruit :

$$\hat{u}(t) = \hat{S}_{yp}(q^{-1})r_u(t)$$

3) on utilise un algorithme d'identification en boucle ouverte sur les données $\hat{u}(t)$, $y(t)$.

9.4. Identification en boucle fermée, un exemple simulé

Le modèle utilisé pour la simulation est :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t)$$

avec :

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2} ; \quad B(q^{-1}) = q^{-1} + 0.5q^{-2} ; \quad d = 0$$

$$C(q^{-1}) = 1 + 1.6q^{-1} + 0.9q^{-2}$$

où $e(t)$ est un bruit blanc (moyenne nulle, variance finie).

Le régulateur utilisé (SIMUBF.reg) est caractérisé par :

$$R(q^{-1}) = 0.8659 - 1.2763q^{-1} + 0.5204q^{-2}$$

$$S(q^{-1}) = 1 - 0.6283q^{-1} - 0.3717q^{-2}$$

$$T(q^{-1}) = 0.11$$

Le signal d'excitation superposé à la consigne est une SBPA engendrée par un registre de longueur $N = 7$, avec un diviseur de fréquence égal à 2 ($f_{SBPA} = 0.5f_e$). Le nombre d'échantillons est 1 024. Le niveau de bruit a été volontairement choisi à un niveau élevé (rapport bruit/signal de l'ordre de 20 %).

Dans ces conditions, avec 1 024 échantillons, on ne peut pas atteindre des résultats asymptotiques, mais ceci permet de bien mettre en évidence les performances relatives des différentes méthodes. Les signaux d'excitation externe,

de commande et de sortie sont stockés dans le fichier SIMUBF4.ACQ² et sont représentés dans la figure 9.4.1.

Le tableau 9.4.1 donne les valeurs des paramètres et les résultats de validation statistique en boucle fermée pour les modèles identifiés avec différentes méthodes.

Méthode	a_1	a_2	b_1	b_2	Variance erreur BF R(0)	Intercorrélations normalisées (Seuil validation 0.068) RN(max) .
Modèle nominal	-1.5	0.7	1	0.5		
AF-CLOE	-1.4689	0.6699	0.991	0.5276	0.03176	0.0092
CLOE	-1.476	0.6674	0.9592	0.4862	0.03181	0.0284
F-CLOE	-1.4692	0.6704	0.9591	0.5152	0.03175	0.0085
X-CLOE	-1.49	0.6822	0.9668	0.3775	0.0312	0.0237
Identification type BO (MCE)	-1.3991	0.6034	0.975	0.508	0.0323	0.0843

Tableau 9.4.1. Modèles identifiés en boucle fermée

La dernière ligne du tableau 9.4.1 donne les résultats du meilleur modèle (en termes de validation statistique boucle fermée) obtenu par une identification directe type boucle ouverte en utilisant la commande et la sortie du procédé. C'est la méthode des moindres carrés étendus qui a donné le meilleur résultat. On observe néanmoins que le modèle obtenu ne passe pas le test de validation et que la valeur maximale des intercorrélations normalisées est bien plus grande que les valeurs obtenues lors de l'utilisation des méthodes spécifiques pour l'identification en boucle fermée.

2. Disponible sur le site : <http://www-lag.ensieg.inpg.fr/bookIC>.

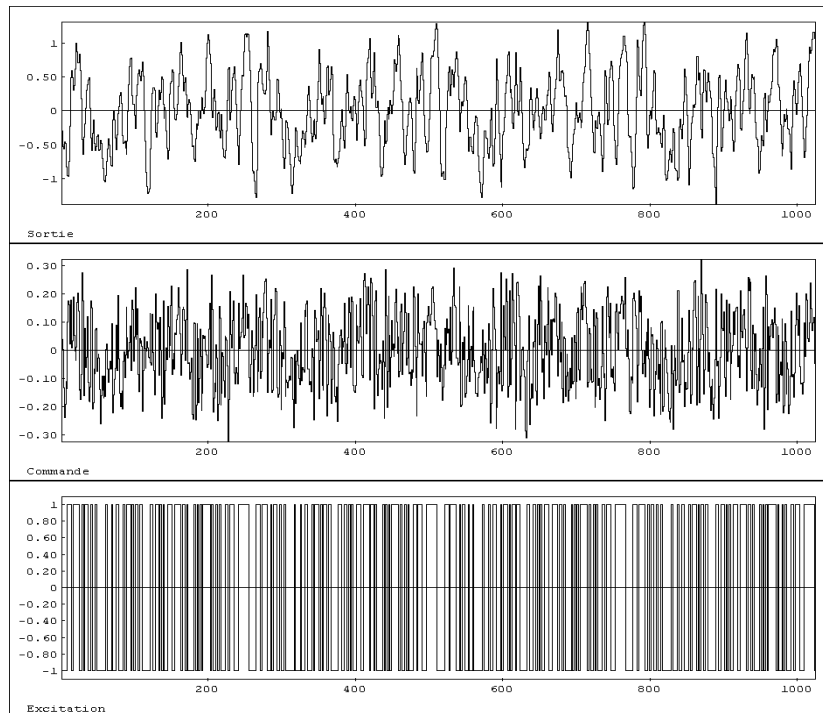


Figure 9.4.1. La séquence d'excitation, commande et sortie (fichier SIMUBF4.ACQ) pour l'identification en boucle fermée

La figure 9.4.2 illustre les caractéristiques fréquentielles du modèle nominal, du modèle identifié par F-CLOE et du modèle identifié par les moindres carrés étendus (MCE). C'est le modèle identifié par F-CLOE qui se rapproche le plus du modèle nominal. Sous réserve d'un nombre de données plus grand, les modèles qui s'obtiennent avec F-CLOE se rapprochent de plus en plus du modèle nominal. Voir par exemple [LAN 97, LAN 97a].

9.5. Identification en boucle fermée et recalcul du régulateur (transmission souple)

Nous allons illustrer l'intérêt de l'identification en boucle fermée pour l'amélioration des performances des systèmes en boucle fermée dans le cas de la transmission souple (voir aussi chapitre 7). Le système et le schéma bloc ont été décrits dans le chapitre 7, paragraphe 7.5.2 et dans le chapitre 8, paragraphe 8.5. Le

schéma du système est rappelé dans la figure 9.5.1 (le point d'application de l'excitation pour l'identification en boucle fermée est aussi indiqué).

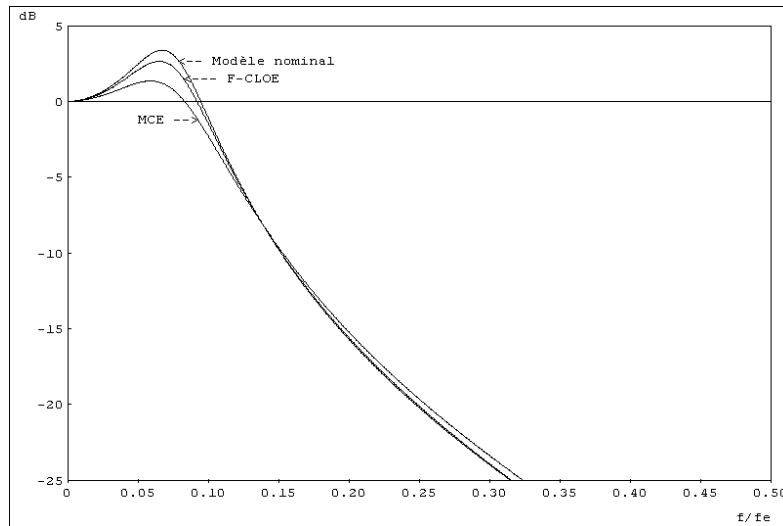


Figure 9.4.2. Caractéristiques fréquentielles des différents modèles

L'identification en boucle fermée a été effectuée avec WinPIM (Adaptech). Le régulateur utilisé est le régulateur R-S-T (B) calculé au chapitre 8, paragraphe 8.5. (voir tableaux 8.5.1 et 8.5.2). Le signal d'excitation (la même SBPA utilisée pour l'identification en boucle ouverte) a été ajoutée à la sortie du régulateur (voir figure 9.5.1).

Le modèle identifié avec F-CLOE (utilisant pour le filtrage le modèle identifié par AF-CLOE) a donné les meilleurs résultats de validation. Les résultats de validation pour les différents modèles sont données dans le tableau 9.5.1 et les paramètres du modèle retenu (F-CLOE) sont :

$$d = 2$$

$$B(q^{-1}) = 0.42415q^{-1} + 0.27288q^{-2}$$

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.5782q^{-1} + 1.8181q^{-2} - 1.41982q^{-3} + 0.84288q^{-4}$$

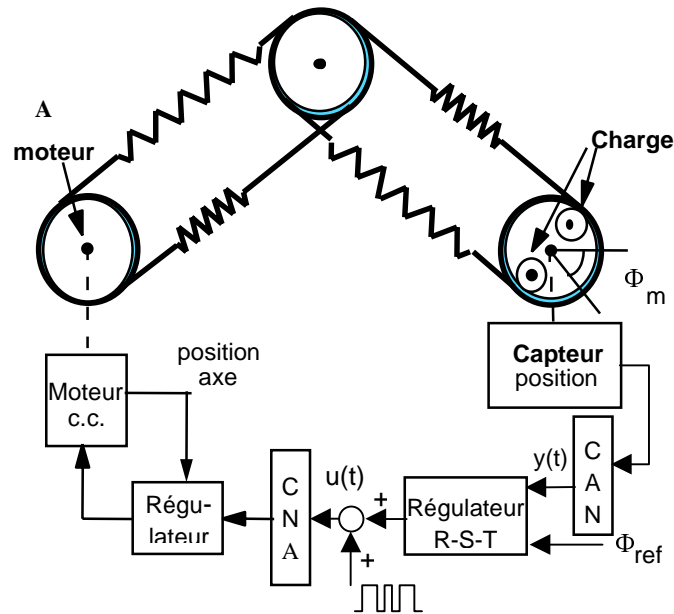


Figure 9.5.1. Schéma de commande de la transmission souple

Méthode	Variance erreur BF $R(0)$	Intercorrelations normalisées $ RN(\max) $.
AF-CLOE	0.01164	0.0498
CLOE	0.01310	0.0998
F-CLOE	0.01117	0.0147
Modèle identifié en B.O.	0.01455	0.3821

Tableau 9.5.1. Validation statistique en boucle fermée des différents modèles identifiés de la transmission souple

Les caractéristiques fréquentielles du modèle identifié en boucle ouverte (voir chapitre 7, paragraphe 7.5.2) et du modèle identifié en boucle fermée sont représentées dans la figure 9.5.2. On observe une différence au niveau des amortissements des deux modes de vibration (le modèle identifié en boucle ouverte est moins amorti). La validation statistique en boucle fermée (tableau 9.5.1) indique

clairement que le modèle identifié en boucle fermée est meilleur que le modèle identifié en boucle ouverte. Ceci est confirmé aussi par la validation utilisant la proximité des pôles identifiés et calculés de la boucle fermée. Dans la figure 9.5.3 sont représentés les « vrais » pôles de la boucle fermée (obtenus par identification type « boucle ouverte » entre le point d'application de l'excitation et la sortie, en utilisant le même fichier de données que pour l'identification du modèle du procédé) et les pôles calculés de la boucle fermée à partir du modèle identifié en boucle ouverte et le régulateur (B) calculé au paragraphe 8.5. On observe tout d'abord une différence qualitative, car les pôles dominants calculés correspondent à une paire de pôles avec amortissement $\zeta = 0.8$ et $\omega_0 = 11.94$ rad/s alors que les « vrais » pôles dominants sont constitués d'un pôle aperiodique (à 0.763) et une paire de pôles ayant un amortissement $\zeta = 0.523$ et $\omega_0 = 11.6$ rad/s.

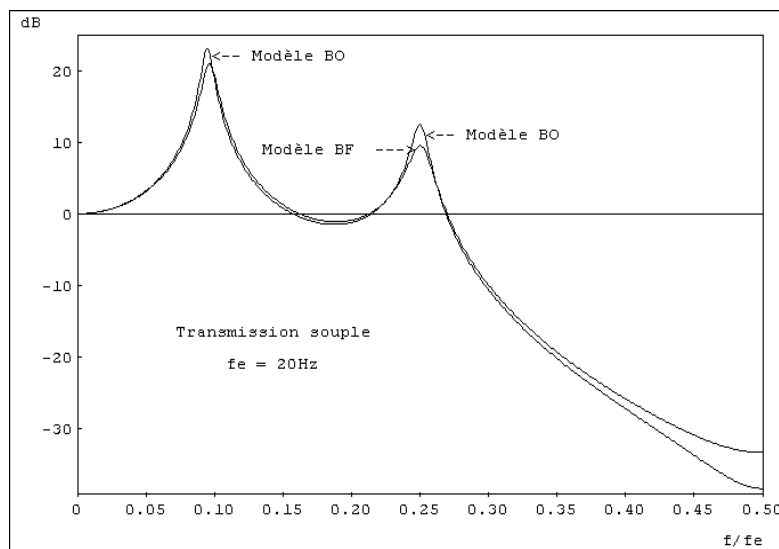


Figure 9.5.2. Caractéristiques fréquentielles des modèles identifiés de la transmission souple en boucle ouverte (BO) et boucle fermée (BF)

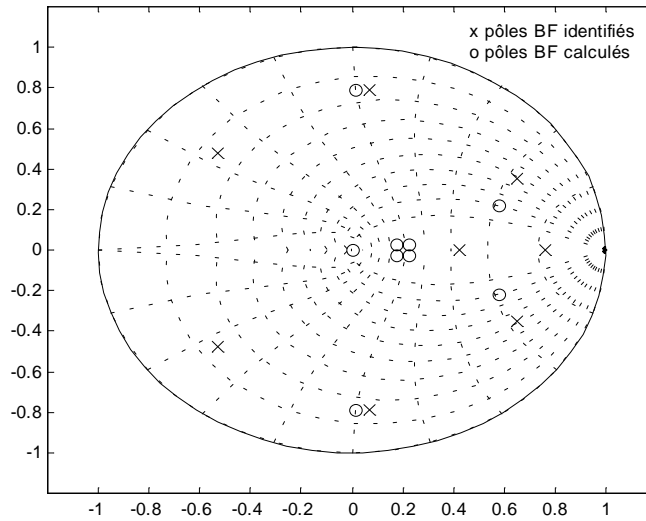


Figure 9.5.3. Validation par proximité des pôles : x – pôles de la boucle fermée identifiés ; o – pôles de la boucle fermée calculés avec le modèle identifié en boucle ouverte

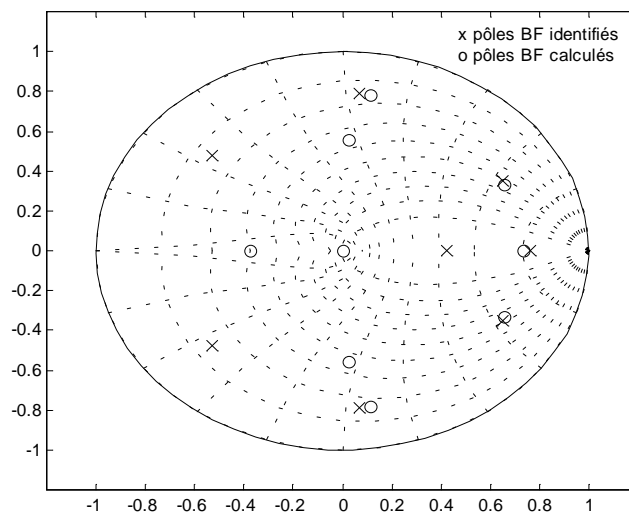


Figure 9.5.4. Validation par proximité des pôles : x – pôles de la boucle fermée identifiés ; o – pôles de la boucle fermée calculés avec le modèle identifié en boucle fermée

Dans la figure 9.5.4 sont représentés les « vrais » pôles des la boucle fermée (identifiés) et les pôles calculés de la boucle fermée à partir du modèle identifié en boucle fermée (F-CLOE) et du même régulateur que précédemment. On observe une presque superposition des pôles dominants et d'une paire de pôles auxiliaires. La comparaison des figures 9.5.3 et 9.5.4 confirme sans aucun doute que le modèle identifié en boucle fermée donne une description plus fidèle du comportement de la boucle fermée.

Le modèle identifié de la « boucle fermée » dont les pôles sont utilisés dans les figures 9.5.3 et 9.5.4 a été obtenu avec la structure S3, méthode de maximum de vraisemblance récursif avec gain décroissant et un horizon d'initialisation de 120 pas. La taille du modèle résulte de la complexité du modèle de la transmission et du régulateur utilisé ($n_A = 8, n_B = 8, n_C = 8, d = 0$).

La meilleure qualité du modèle en boucle fermée est confirmé aussi par la validation temporelle. Les figures 9.5.5 et 9.5.6 comparent les réponses temporelles simulés et réelles de la position pour une commande en échelon. On observe une meilleure cohérence entre la simulation et le temps réel dans la figure 9.5.6 ou la simulation utilise le modèle de la transmission identifié en boucle fermée (F-CLOE).

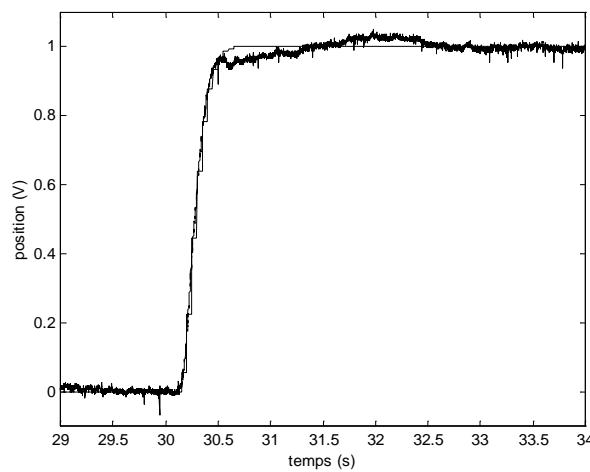


Figure 9.5.5. Validation temporelle : (-) - simulation utilisant le modèle identifié en boucle ouverte ; (-) - réponse temps réel

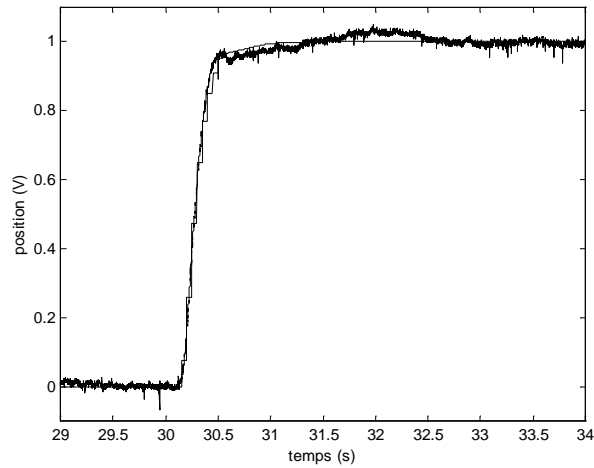


Figure 9.5.6. Validation temporelle : (-) - simulation utilisant le modèle identifié en boucle fermée ; (-) - réponse temps réel

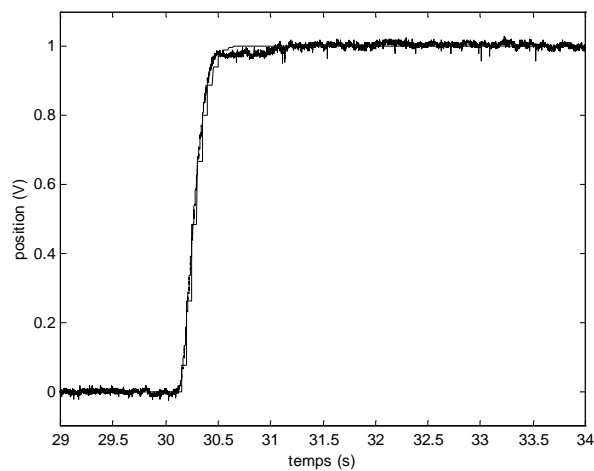


Figure 9.5.7. Amélioration des performances par l'utilisation d'un régulateur calculé sur la base du modèle identifié en boucle fermée : (-) - simulation ; (-) - temps réel

Nous allons illustrer dans ce qui suit que ce meilleur modèle obtenu par identification en boucle fermée nous permet de calculer un régulateur plus performant (dans le sens où les résultats temps réel se rapprocheront plus des

performances spécifiées). En effet, en gardant les mêmes spécifications que pour le régulateur calculé sur la base du modèle identifié en boucle ouverte on obtient un nouvel régulateur (marge de module $\Delta M = 0.537$, marge de retard $\Delta \tau = 0.075s$) dont les performances sont illustrées dans la figure 9.5.7 (à comparer avec la figure 9.5.5).

9.6. Conclusion

Nous avons examiné dans ce chapitre le problème très important de l'identification des modèles des procédés opérant en boucle fermée. L'identification en boucle fermée doit être envisagée dans les situations suivantes :

- 1) procédé instable en boucle ouverte ou présentant une dérive importante du point de fonctionnement ;
- 2) existence déjà d'un régulateur ;
- 3) amélioration des performances du système en boucle fermée.

L'objectif de l'identification en boucle fermée est d'obtenir pour un régulateur donné un modèle de procédé permettant de décrire avec le plus de fidélité possible le comportement du système en boucle fermée réel.

L'identification en boucle fermée, sous réserve de l'utilisation d'algorithmes appropriés, permet d'obtenir des meilleurs modèles de procédé pour le calcul des régulateurs.

Les méthodes d'identification d'erreur de sortie en boucle fermée (CLOE) sont particulièrement adaptées pour l'identification des modèles des procédés opérant en boucle fermée. Elles requièrent la connaissance du régulateur.

Comme pour l'identification en boucle ouverte, les modèles identifiés en boucle fermée doivent être validés. Plusieurs techniques de validation ont été définies :

- validation statistique (tests de décorrélation) ;
- proximité de pôles du système boucle fermée réel et du prédicteur de la boucle fermée (modèle en contre-réaction avec le régulateur) ;
- validation temporelle (comparaisons des réponses de la boucle fermée réelle et de la boucle fermée simulée).

Le choix du meilleur modèle pour le recalcul du régulateur se fait par la comparaison des résultats de validation obtenus pour chaque modèle. Il est utile de prendre aussi en compte pour cette validation comparative le modèle identifié en boucle ouverte (s'il est disponible).

9.7. Bibliographie

- [ADA 97] ADAPTECH, *WinPIM-BF – Module logiciel d'identification en boucle fermée*, 4 rue de la Tour de l'Eau, St. Martin d'Hères, France, 1997.
- [ADA 99] ADAPTECH, *CLID – Plant model identification in closed loop* (toolbox for Matlab), 4 rue de la Tour de l'Eau, St. Martin d'Hères, France, 1999.
- [GEV 93] GEVERS M., « Towards a joint design of identification and control », dans *Essays in Control*, H.L. Trentelman, J.C. Willems (Eds.), Birkhäuser, Boston, Etats-Unis, p. 111-152, 1993.
- [KAR 98] KARIMI A., LANDAU I.D., « Comparison of the closed loop identification methods in terms of the bias distribution », *Systems and Control Letters*, vol. 34, p. 159-167, 1998.
- [LAN 96] LANGER J., LANDAU I.D., « Improvement of robust digital control by identification in closed loop. Application to a 360° flexible arm », *Control Engineering Practice*, vol. 8, n° 4, p. 1079-1088, 1996.
- [LAN 97] LANDAU I.D., LOZANO R., M'SAAD M., *Adaptive Control*, chapitre 9, Springer, Londres, 1997.
- [LAN 97a] LANDAU I.D., KARIMI A., « An output error recursive algorithm for unbiased identification in closed loop », *Automatica*, vol. 33, n° 8, p. 933-938, 1997.
- [LAN 97b] LANDAU I.D., KARIMI A., « Recursive algorithms for identification in closed-loop – a unified approach and evolution », *Automatica*, vol. 33, n° 8, p. 1499-1523, 1997.
- [LAN 01] LANDAU I.D., KARIMI A., « Identification des modèles de procédé en boucle fermée », dans *Identification de systèmes*, I.D. Landau, A. Besançon-Voda (Eds.), p. 213-244, Hermès, Paris, 2001.
- [LAN 01a] LANDAU I.D., « Identification in closed loop: a powerful design tool (better models, simple controllers) », *Control Engineering Practice*, vol. 9, p. 51-65, 2001.
- [VAN 93] VAN DEN HOF P., SHRAMA R., « An indirect method for transfer function estimation from closed loop data », *Automatica*, vol. 29, n° 6, p. 1523-1528, 1993.

Chapitre 10

Réduction de la complexité des régulateurs

On présente des techniques de réduction de complexité des régulateurs basées sur l'estimation en boucle fermée des régulateurs d'ordre réduit. Les méthodes de validation des régulateurs d'ordre réduit sont aussi présentées. Les techniques de réduction sont illustrées par leurs application à la commande d'une suspension active.

10.1. Introduction

La complexité (ordre des polynômes R et S) des régulateurs calculés sur la base des modèles identifiés dépend

- de la complexité du modèle identifié ;
- des spécifications des performances ;
- des contraintes de robustesse.

Rappelons tout d'abord que le polynôme définissant les pôles de la boucle fermée résulte de l'équation :

$$P(q^{-1}) = A(q^{-1})H_S(q^{-1})S'(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})H_R(q^{-1})R'(q^{-1}) \quad [10.1.1]$$

où A , B , d correspondent au modèle du procédé et H_R et H_S correspondent aux parties fixes du régulateur (souvent introduites pour des raisons de performance et robustesse). Les polynômes $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ du régulateur sont donnés par :

$$R(q^{-1}) = H_R(q^{-1})R'(q^{-1}) \quad [10.1.2]$$

$$S(q^{-1}) = H_S(q^{-1})S'(q^{-1}) \quad [10.1.3]$$

et les ordres minimaux correspondants sont :

$$n_R = n_A + n_{H_S} + n_{H_R} - 1 \quad [10.1.4]$$

$$n_S = n_B + d + n_{H_S} + n_{H_R} - 1 \quad [10.1.5]$$

Dans de nombreuses applications, la réduction de la complexité des régulateurs s'impose tout d'abord par des contraintes de puissance de calcul (réduction du nombre de multiplications et additions). Ces contraintes de puissance de calcul peuvent être dictées par des raisons de :

- coût (exemple : automobile) ;
- miniaturisation et réduction de la consommation d'énergie sur certains systèmes embarqués ;
- fréquence d'échantillonnage.

Mais on peut aussi se poser la question s'il n'est pas possible d'obtenir les mêmes performances (ou presque) et les mêmes propriétés de robustesse (ou presque) en utilisant un régulateur plus simple.

La règle de base pour développer des procédures de réduction de la complexité des régulateurs est de rechercher des régulateurs d'ordre réduit qui préservent aux mieux les propriétés de la boucle fermée. Une simplification directe du régulateur par des techniques traditionnelles (simplification des pôles et zéros proches, approximation dans le domaine fréquentiel, troncature équilibrée, etc.) sans tenir compte des propriétés de la boucle fermée conduit en général à des résultats non satisfaisants.

Deux approches peuvent être considérées pour la réduction de la complexité des régulateurs.

1) *Approche indirecte*. Cette approche comporte deux étapes :

- a) réduction de la complexité du modèle tout en conservant les caractéristiques essentielles du modèle nominal dans les régions fréquentielles critiques pour la commande ;
- b) calcul du régulateur sur la base du modèle réduit.

2) *Approche directe* :

– recherche d'une approximation d'ordre réduit du régulateur nominal qui préserve les propriétés de la boucle fermée.

L'approche indirecte présente plusieurs défauts, à savoir :

- ne garanti pas la complexité du régulateur résultant (car entre autre les spécifications de robustesse sont plus sévères quand on utilise des modèles réduits) ;
- les erreurs faites lors de la réduction de modèle se propagent dans le calcul du régulateur.

L'approche directe semble la plus appropriée pour la réduction de la complexité des régulateurs car l'approximation se fait dans la dernière étape de la procédure de conception du régulateur et les performances résultantes peuvent s'évaluer facilement. C'est cette approche qui sera développée dans ce chapitre.

Deux types de critères peuvent être considérés pour la réduction directe de la complexité des régulateurs :

- *poursuite de la commande nominale*. Dans ce cas on souhaite que la commande engendrée en boucle fermée par le régulateur réduit soit la plus proche possible de la commande engendrée par le régulateur nominal en boucle fermée ;
- *poursuite de la sortie nominale*. Dans ce cas on souhaite que la sortie de la boucle fermée quand on utilise le régulateur d'ordre réduit soit la plus proche possible de la sortie de la boucle fermée obtenue avec le régulateur nominal.

Ces deux critères sont illustrés dans les figures 10.1.1a et 10.1.1b, où l'on a noté le régulateur nominal par K :

$$K = \frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})} \quad [10.1.6]$$

où :

$$R(q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} + \dots + r_{n_R} q^{-n_R} \quad ; \quad S(q^{-1}) = 1 + s_1 q^{-1} + \dots + r_{n_S} q^{-n_S} \quad [10.1.7]$$

le régulateur réduit par \hat{K} :

$$\hat{K} = \frac{\hat{R}(q^{-1})}{\hat{S}(q^{-1})} \quad [10.1.8]$$

où :

$$\hat{R}(q^{-1}) = \hat{r}_0 + \hat{r}_1 q^{-1} + \dots + \hat{r}_{n_r} q^{-n_r} ; \quad \hat{S}(q^{-1}) = 1 + \hat{s}_1 q^{-1} + \dots + \hat{r}_{n_s} q^{-n_s} \quad [10.1.9]$$

et le modèle du procédé par \hat{G} :

$$\hat{G} = \frac{q^{-d} \hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})} \quad [10.1.10]$$

où :

$$\hat{A}(q^{-1}) = 1 + \hat{a}_1 q^{-1} + \dots + \hat{a}_{n_A} q^{-n_A} ; \quad \hat{B}(q^{-1}) = \hat{b}_1 q^{-1} + \dots + \hat{b}_{n_B} q^{-n_B} \quad [10.1.11]$$

Pour la poursuite de la commande nominale (figure 10.1.1a) on essaye de trouver un régulateur d'ordre réduit \hat{K} qui minimise l'écart entre la fonction de sensibilité du système simulé nominal :

$$\hat{S}_{up} = \frac{K}{1 + K\hat{G}} \quad [10.1.12]$$

calculée avec K et \hat{G} et la fonction de sensibilité du système simulé utilisant le régulateur réduit :

$$\hat{S}_{up} = \frac{\hat{K}}{1 + \hat{K}\hat{G}} \quad [10.1.13]$$

calculée avec \hat{K} et \hat{G} . Ceci est équivalent à trouver un régulateur d'ordre réduit \hat{K} qui minimise l'erreur entre les deux boucles (au sens d'un certain critère) pour une excitation type bruit blanc (SBPA).

Pour la poursuite de la sortie nominale (figure 10.1.1b) le principe reste le même sauf que dans ce cas on cherche à minimiser l'écart entre¹ :

$$\hat{S}_{yr} = \frac{K\hat{G}}{1 + K\hat{G}} \quad [10.1.14]$$

1. A noter que $\hat{S}_{yr} - \hat{S}_{yp} = \hat{S}_{yp} - \hat{S}_{yp}$ et donc la poursuite de la sortie nominale est équivalente à la minimisation de l'écart entre les fonctions de sensibilité perturbation-sortie nominale et réduite.

calculée avec K et \hat{G} et la fonction de sensibilité du système simulé utilisant le régulateur réduit :

$$\hat{S}_{yr} = \frac{\hat{K}\hat{G}}{1 + \hat{K}\hat{G}} \quad [10.1.15]$$

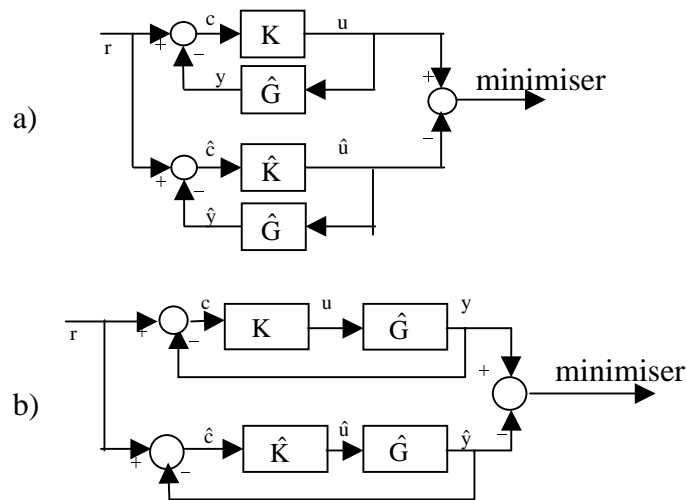


Figure 10.1.1. Critère de réduction de la complexité des régulateurs.
(a) poursuite de la commande nominale ; (b) poursuite de la sortie nominale

On voit immédiatement que dans les deux cas on peut formuler le problème d'estimation d'un régulateur d'ordre réduit comme un problème d'identification en boucle fermée (voir chapitre 9) dans lequel on remplace le modèle de procédé à identifier par le régulateur d'ordre réduit à estimer et le régulateur par le modèle estimé du procédé (problème dual).

L'ensemble des procédures de réduction et validation des régulateurs d'ordre réduit qui sont présentées dans ce chapitre sont disponibles dans la boîte à outils REDUC [ADA 99] sous Matlab.

10.2. Estimation des régulateurs d'ordre réduit par identification en boucle fermée

10.2.1. Méthode de la poursuite de la commande en boucle fermée (CLIM)

Le schéma de principe est représenté dans la figure 10.2.1.

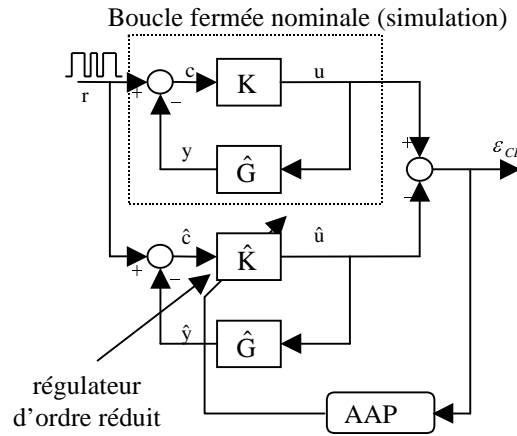


Figure 10.2.1. Estimation des régulateurs d'ordre réduit par la méthode de la poursuite de la commande en boucle fermée (CLIM). Utilisation de données simulées

La partie supérieure représente le simulateur du système en boucle fermée nominal. Il est constitué du régulateur nominal (K) et le meilleur modèle identifié du procédé (\hat{G}). Ce modèle peut éventuellement être obtenu par identification en boucle fermée et il doit en principe assurer la meilleure cohérence entre les données réelles obtenues en boucle fermée et les données simulées en boucle fermée.

La partie inférieure est constituée d'un régulateur ajustable d'ordre réduit (\hat{K}) en contre réaction avec le même modèle du procédé (\hat{G}), utilisé pour la simulation du système nominal. L'algorithme d'adaptation paramétrique (AAP) va rechercher le meilleur régulateur d'ordre réduit qui va minimiser l'erreur de commande en boucle fermée. Celle-ci s'exprime comme la différence entre la commande fournie par le système simulé nominal et la commande fournie par le système en boucle fermée utilisant le régulateur d'ordre réduit.

La sortie du régulateur nominal est donnée par :

$$u(t+1) = -S^*(q^{-1})u(t) + R(q^{-1})c(t+1) \quad [10.2.1]$$

où :

$$c(t+1) = r(t+1) - y(t+1) \quad [10.2.2]$$

La sortie prédite *a priori* du régulateur ajustable d'ordre réduit est donnée par :

$$\hat{u}^0(t+1) = -S^*(t, q^{-1})\hat{u}(t) + \hat{R}(t, q^{-1})\hat{c}(t+1) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad [10.2.3]$$

et la sortie prédite *a posteriori* est donnée par :

$$\hat{u}(t+1) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \quad [10.2.4]$$

où :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{s}_1(t), \dots, \hat{s}_{n_s}(t), \hat{r}_0(t), \dots, \hat{r}_{n_r}(t)] \quad [10.2.5]$$

$$\phi(t)^T = [-\hat{u}(t), \dots, -\hat{u}(t - n_s + 1), \hat{c}(t+1), \dots, \hat{c}(t - n_r + 1)] \quad [10.2.6]$$

$$\hat{c}(t+1) = r(t+1) - \hat{y}(t+1) = r(t+1) + A^*(q^{-1})\hat{y}(t) - B^*(q^{-1})u(t-d) \quad [10.2.7]$$

L'erreur d'entrée de la boucle fermée est donnée par :

$$\varepsilon_{CL}^0(t+1) = u(t+1) - \hat{u}^0(t+1) \quad (\text{a priori}) \quad [10.2.8]$$

$$\varepsilon_{CL}(t+1) = u(t+1) - \hat{u}(t+1) \quad (\text{a posteriori}) \quad [10.2.9]$$

et l'algorithme d'adaptation paramétrique est donné par :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\Phi(t)\varepsilon_{CL}(t+1) \quad [10.2.10]$$

$$F^{-1}(t+1) = \lambda_1(t)F^{-1}(t) + \lambda_2(t)\Phi(t)\Phi(t)^T \quad [10.2.11]$$

$$0 < \lambda_1(t) \leq 1 ; 0 \leq \lambda_2(t) < 2 ; F(0) > 0 \quad [10.2.12]$$

$$\varepsilon_{CL}(t+1) = \frac{\varepsilon_{CL}^0(t+1)}{1 + \Phi(t)^T F(t)\Phi(t)} \quad [10.2.13]$$

Des algorithmes spécifiques s'obtiennent en fonction du choix du vecteur d'observations :

- algorithme CLIM : $\Phi(t) = \phi(t)$;
- algorithme F-CLIM : $\Phi(t) = \frac{\hat{A}(q^{-1})}{\hat{P}(q^{-1})} \phi(t)$.

où :

$$\hat{P}(q^{-1}) = \hat{A}(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d}\hat{B}(q^{-1})R(q^{-1}) \quad [10.2.14]$$

L'introduction du filtrage de $\phi(t)$ est motivée par l'élimination d'une condition suffisante de convergence qui dans le cas de l'algorithme CLIM est relié à $\hat{A}(z^{-1})/\hat{P}(z^{-1})$. Une analyse détaillée des propriétés de ces algorithmes se trouve dans la référence [LAN 01].

L'estimation des régulateurs d'ordre réduit est aussi possible en utilisant des données réelles (si le prototype du régulateur nominal peut être mis en œuvre sur le système réel). Ceci est illustré dans la figure 10.2.2. La partie supérieure représente maintenant le vrai système en boucle fermée. On montre dans [LAN 01] que l'utilisation des données réelles permet de prendre en compte des erreurs entre le modèle et le procédé réel dans certaines zones de fréquence.

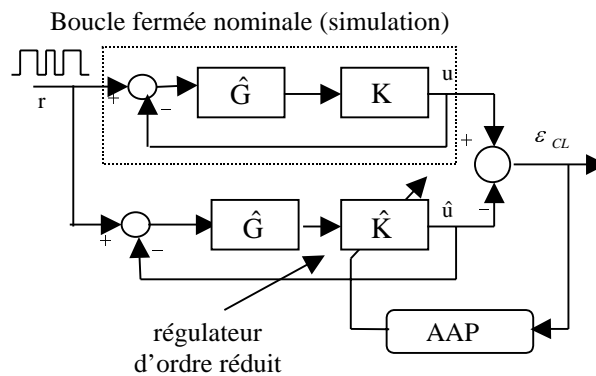


Figure 10.2.2. Utilisation des données réelles pour l'estimation des régulateurs d'ordre réduit par la méthode de la poursuite de la commande en boucle fermée (CLIM)

10.2.2. Méthode de la poursuite de la sortie en boucle fermée (CLOM)

Le schéma de principe de cette méthode est représenté dans la figure 10.2.3.

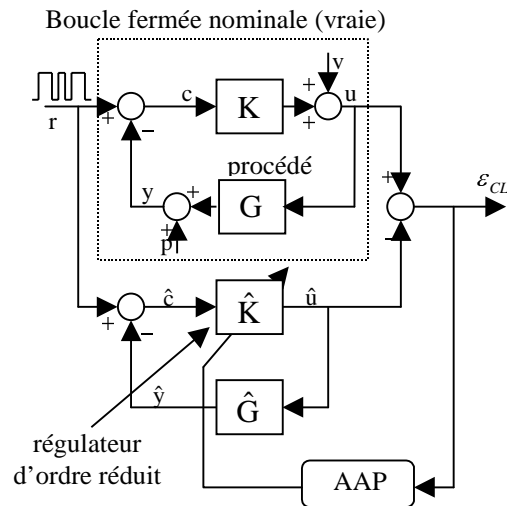


Figure 10.2.3. Estimation des régulateurs d'ordre réduit par la méthode de la poursuite de la sortie en boucle fermée (CLOM). Utilisation de données simulées

Bien que le point d'application de l'excitation et le point de mesure est différent de celui de la figure 10.1.1b, la fonction de transfert entre $r(t)$ et $u(t)$ est donnée toujours par la relation [10.1.14]. C'est-à-dire qu'en absence de perturbation (c'est le cas en simulation) le nouveau $u(t)$ engendré dans la partie supérieure du schéma donné dans la figure 10.2.23 est égal à $y(t)$ donné dans la figure 10.1.1b. En procédant ainsi, l'algorithme d'estimation du régulateur d'ordre réduit par la méthode de la poursuite de la sortie en boucle fermée (CLOM) est similaire à l'algorithme CLIM (ou F-CLIM) avec la seule différence que $c(t)$ dans [10.2.1] est remplacé par :

$$x(t) = \hat{G}(q^{-1})(r(t) - u(t)) \quad [10.2.15]$$

et respectivement $\hat{c}(t)$ dans [10.2.3] et [10.2.6] est remplacé par $\hat{x}(t)$:

$$\hat{x}(t) = \hat{G}(q^{-1})(r(t) - \hat{u}(t)) \quad [10.2.16]$$

Il faut noter aussi que l'ordre des blocs dans la partie supérieure de la figure 10.2.3 peut être interchangé. Cette observation reste valable aussi lors de l'utilisation des données temps réel.

10.2.3. Prise en compte des parties fixes du régulateur

Lors de la réduction de la complexité du régulateur on souhaite le maintien de certaines parties fixes prévues dans le régulateur nominal (par exemple : intégrateur, ouverture de boucle à $0.5f_e$ ou à une autre fréquence). Pour ceci on factorise d'abord le régulateur nominal sous la forme² :

$$K = K_F K' \quad [10.2.16]$$

où K_F représente l'ensemble des parties fixes qu'on souhaite conserver.

On factorise le régulateur d'ordre réduit sous la forme :

$$\hat{K} = K_F \hat{K}' \quad [10.2.17]$$

On remplace dans l'algorithme CLIM l'entrée \hat{c} du régulateur \hat{K} par l'entrée du régulateur \hat{K}' , notée \hat{c}' , où \hat{c}' est donné par :

$$\hat{c}'(t) = K_F(q^{-1})\hat{c}(t) \quad [10.2.18]$$

et on remplace dans $\phi(t)$, \hat{c} par \hat{c}' . Dans l'algorithme CLOM, on remplace $\hat{x}(t)$ par $\hat{x}'(t)$ donné par :

$$\hat{x}'(t) = K_F(q^{-1})\hat{G}(q^{-1})[r(t) - y(t)] \quad [10.2.19]$$

10.2.4. Recalcul du polynôme $T(q^{-1})$

Une fois qu'un régulateur d'ordre réduit a été obtenu et validé, on recalcule un polynôme $T(q^{-1})$ en utilisant le nouveau polynôme caractéristique de la boucle fermée donné par :

$$\hat{P}(q^{-1}) = \hat{A}(q^{-1})\hat{S}(q^{-1}) + q^{-d}\hat{B}(q^{-1})\hat{R}(q^{-1}) \quad [10.2.20]$$

10.3. Validation des régulateurs d'ordre réduit

Une fois qu'un régulateur d'ordre réduit a été estimé il doit être validé avant de considérer sa mise en œuvre sur le système réel.

2. Si éventuellement le régulateur nominal contient de pôles instables (ce qui n'est absolument pas souhaitable), ces pôles instables doivent être conservés comme tels et donc être inclus dans K_F .

10.3.1. Utilisation des données simulées

On suppose que le régulateur nominal stabilise le modèle nominal du procédé (utilisé pour la réduction) et le vrai procédé. On suppose donc implicitement que les incertitudes de modélisation ont été prises en compte lors de la conception du régulateur nominal.

Le régulateur réduit doit satisfaire les conditions suivantes :

- il stabilise le modèle nominal du procédé ;
- les fonctions de sensibilité *réduites* (calculées avec le régulateur réduit) sont proches des fonctions de sensibilité nominales dans les régions fréquentielles critiques pour les performances et la robustesse. En particulier, on examine cette proximité pour les fonctions de sensibilité perturbation-sortie et perturbation-entrée ;
- la *marge de stabilité généralisée* (voir annexe 3) du système en boucle fermée utilisant un régulateur d'ordre réduit doit être proche de la marge de stabilité du système en boucle fermée nominal. Elle s'exprime par la condition :

$$\left| b(K, \hat{G}) - b(\hat{K}, \hat{G}) \right| < \varepsilon \quad ; \quad \hat{a} > 0$$

où $b(K, \hat{G})$ et $b(\hat{K}, \hat{G})$ sont les marges de stabilité généralisées correspondant au régulateur nominal et au régulateur réduit et ε est un nombre positif petit. La proximité des deux marges de stabilité permet de préserver les propriétés de robustesse du régulateur nominal.

La proximité des fonctions de sensibilité nominales et réduites peut être jugée par un examen visuel. Mais il existe la possibilité de faire au préalable un test numérique en calculant la *distance de Vinnicombe* (v gap) entre la fonction de sensibilité nominale et la fonction de sensibilité réduite (voir annexe 3). La distance de Vinnicombe permet avec un nombre unique (compris entre 0 et 1) de faire une première évaluation de cette proximité et de classer les résultats obtenus avec différents régulateurs d'ordre réduit.

10.3.2. Utilisation des données réelles

L'utilisation des données réelles (dans le cas où le prototype du régulateur nominal peut être mis en œuvre) permet de compléter les tests de validation effectués avec données simulées.

En faisant référence à la figure 10.2.2, l'objectif est de tester dans quelle mesure la boucle simulée avec le régulateur d'ordre réduit estimé est proche du système en boucle fermée réel réalisé avec le régulateur nominal.

Une première information est fournie par la variance résiduelle de l'erreur de la boucle fermée.

Une deuxième information s'obtient en identifiant la fonction de transfert du système en contre réaction réel (entre r_u et u) et en comparant dans le domaine fréquentiel cette fonction de transfert identifiée avec la fonction de transfert calculée du système en boucle fermée simulé utilisant le régulateur d'ordre réduit. Dans ce cas aussi, l'utilisation de la *distance de Vinnicombe* permet de faire une classification rapide des résultats obtenus avec différents régulateurs d'ordre réduit.

10.4. Aspects pratiques

La qualité de la réduction de complexité va dépendre de la capacité du modèle de procédé utilisé de bien reproduire en boucle fermée avec le régulateur nominal, le comportement du système réel.

S'il est possible d'avoir accès au système réel et le régulateur nominal peut être mis en œuvre, il convient de procéder d'abord à une identification du procédé en boucle fermée suivi d'une validation comparative des différents modèles disponibles (pour le choix du meilleur modèle).

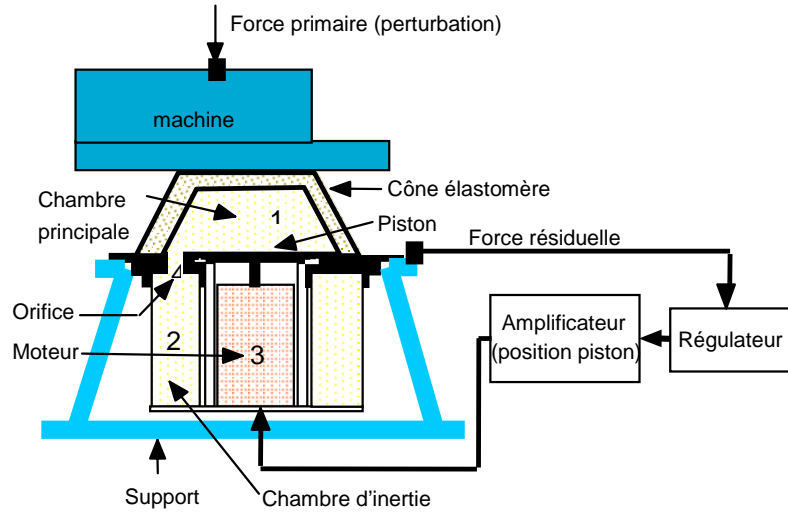
Par ailleurs, le même jeu de données entrée/sortie utilisé pour l'identification en boucle fermée peut être utilisé pour la réduction à partir des données temps réel.

Une fois que le meilleur modèle de procédé a été choisi, on met en œuvre la procédure de réduction des régulateurs (avec des données simulées et/ou des données réelles).

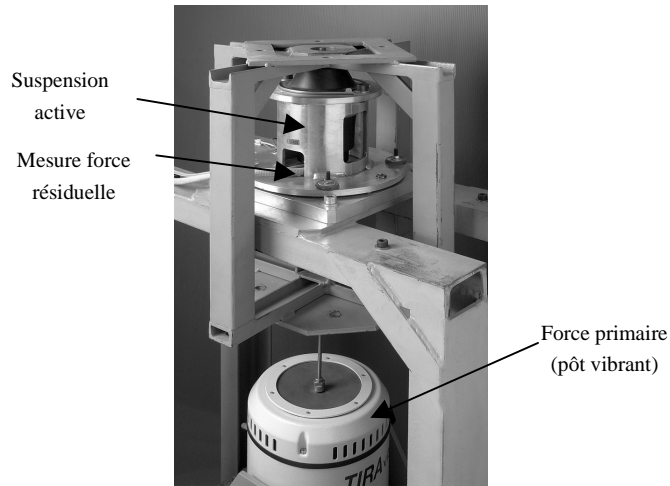
Concrètement, en utilisant les méthodes présentées on estime des régulateurs d'ordre réduit pour tous les ordres de R et S inférieurs aux valeurs nominales, en utilisant un seul jeu de données. On sélectionne après, par les techniques de validation, ceux qui offrent une bonne approximation du comportement du système en boucle fermée nominal.

10.5. Commande d'une suspension active – Réduction de l'ordre du régulateur

Le système de suspension active est représentée dans la figure 10.5.1a et la figure 10.5.1b donne une vue de la partie hydraulique de la suspension active (Hutchinson).



(a)



(b)

Figure 10.5.1. Suspension active (Hutchinson) :
 (a) diagramme fonctionnel ; (b) vue de la partie hydraulique

Les parties composantes de la suspension active sont :

- un cône élastomère qui délimite la chambre principale (1) remplie d'huile de silicone ;
- une chambre secondaire (2) délimitée par une membrane souple ;
- un piston (3) ; ce piston est déplacé par un moteur ;
- un orifice (4) qui permet le passage de l'huile entre les deux chambres.

En déplaçant le piston, on modifie dynamiquement la raideur du plot pour absorber les vibrations. On distingue un chemin primaire entre les vibrations appliquées et la vibration résiduelle au niveau du bâti et un chemin secondaire entre la commande du piston et la force résiduelle. A noter que le chemin secondaire est caractérisé par la présence d'un double dérivateur (commande en position, sortie en force).

Le schéma bloc du système de commande en boucle fermée est représenté dans la figure 10.5.2. Il s'agit d'un schéma de régulation, l'objectif étant l'atténuation de l'effet des perturbation vibrationnelles (force primaire) au niveau du bâti (force résiduelle). Le problème de régulation spécifique posé est un problème d'atténuation dit « large bande ». Le spectre des vibrations à atténuer (source primaire) est uniformément réparti entre 0 et 200 Hz. Le système est commandé par un PC à travers une carte entrée/sortie. La fréquence d'échantillonnage est de 800 Hz. Pour le test des performances du système de suspension active, la force primaire est engendrée par un pot vibrant commandé par ordinateur. La densité spectrale de la force résiduelle en absence de régulation est représenté dans la figure 10.5.5 (ligne $\cdot \cdot \cdot \cdot$). Cette densité spectrale met en évidence l'existence de plusieurs modes de vibration peu amortis sur la voie primaire. En particulier, un mode vibratoire principal à 31.47 Hz, avec un amortissement $\zeta = 0.093$. L'objectif est de calculer un régulateur qui atténue significativement la force résiduelle autour du mode vibratoire principal et qui essaye de répartir l'amplification de la perturbation vers les hautes fréquences (moins de 3 dB d'amplification entre 40 et 150 Hz – rappelons qu l'intégrale de l'atténuation/amplification dans le domaine fréquentiel doit être nulle (voir paragraphe 3.6)). C'est cette contrainte de répartition de l'amplification qui conduit (avec aussi la complexité du modèle) à un régulateur d'ordre élevé³.

Le modèle identifié du chemin secondaire entre le piston et la force résiduelle (le procédé à commander) présente lui aussi un nombre important de modes de vibration peu amortis (en plus de caractère double dérivateur). Ceci conduit à un

3. Un calcul direct par placement de pôles permet d'atténuer autour du mode de vibration principal, mais introduira en général une amplification significative dans le voisinage fréquentiel (inférieur et supérieur) de la zone d'atténuation.

modèle d'ordre élevé, avec $d = 2, n_B = 11, n_A = 12$. Cette complexité du modèle se reflétera aussi dans la complexité du régulateur.

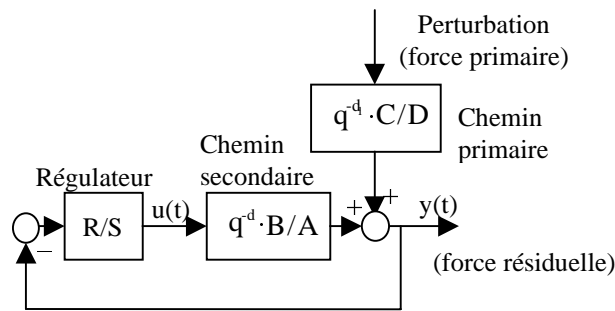


Figure 10.5.2. Schéma bloc de la régulation en boucle fermée de la suspension active

La figure 10.5.3 illustre les caractéristiques fréquentielles de deux modèles du chemin secondaire :

- 1) modèle identifié en boucle ouverte et utilisé pour le calcul du régulateur nominal ;
- 2) modèle identifié en boucle fermée avec le régulateur nominal. Ce modèle donne des meilleurs résultats de validation en boucle fermée et sera utilisé pour la réduction de complexité du régulateur nominal.

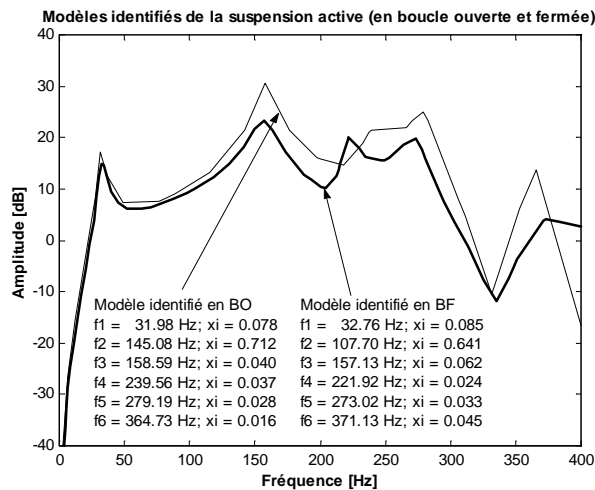


Figure 10.5.3. Caractéristiques fréquentielles des modèles identifiés du chemin secondaire

Le régulateur nominal a été calculé en utilisant la méthode de placement de pôles avec calibrage de fonctions de sensibilité par optimisation convexe [ADA 98, LAN 99]. Une paire de pôles dominants a été fixée à la fréquence du premier mode de vibration avec un amortissement de $\zeta = 0.8$. Une partie fixe $H_R(q^{-1}) = 1 + q^{-1}$ a été introduite pour ouvrir la boucle à $0.5f_e$. Le régulateur nominal, satisfaisant les spécifications imposées sur la force résiduelle ainsi que sur S_{up} , est caractérisé par les ordres $n_R = 27, n_S = 28$. Il est important de noter que la complexité d'un régulateur standard de type placement de pôles est $n_R = 12, n_S = 13$ (en prenant en compte H_R). Malheureusement on ne sait pas *a priori* si un tel régulateur permettant de satisfaire les spécifications existe et en plus on ne sait pas comment placer l'ensemble des pôles pour atteindre le résultat souhaité. L'objectif de la réduction de complexité du régulateur nominal est d'obtenir un régulateur plus simple, ayant une complexité inférieure au placement de pôles standard et permettant de satisfaire les spécifications.

Les résultats les plus significatifs, obtenus avec la méthode CLIM en utilisant des données simulées, sont résumés dans le tableau 10.5.1. L'entrée externe utilisée est une SBPA engendrée par un registre de longueur $N=10$ et une fréquence d'horloge $f_{SBPA} = 0.5f_e$ ($L = 4096$ données). Dans l'algorithme d'adaptation paramétrique on utilise le *facteur d'oubli variable* avec $\lambda_1 = 0.95, \lambda_0 = 0.9$ (voir chapitre 5, paragraphe 5.2.4).

Dans le tableau 10.5.1, il y a trois régulateurs d'ordre réduit. A noter que le régulateur K_2 a la complexité du placement de pôles standard. Donc la procédure de réduction de complexité nous permet *a posteriori* de trouver la configuration optimale des pôles de la boucle fermée permettant de satisfaire les spécifications. Le régulateur K_3 a une complexité inférieure au placement de pôles standard.

Les premières deux lignes du tableau 10.5.1 donnent les distances normalisées de Vinnicombe (ν gap) entre les fonctions de sensibilité nominales et réduites. Les valeurs sont relativement faibles, en particulier pour S_{yp} . La troisième ligne est peut-être la plus importante. Elle donne la marge de stabilité généralisée pour les différents régulateurs. En particulier, les régulateurs K_1 et K_3 ont une marge de stabilité généralisée très proche de celle du régulateur nominal.

Les lignes 4 et 5 donnent des résultats de validation temps réel. La ligne 4 donne la distance de Vinnicombe entre la fonction de sensibilité nominale S_{up} nominale identifiée sur le système réel et les fonctions S_{up} calculées sur le système simulé pour les différents régulateurs. On observe que cette distance augmente quand on réduit la complexité du régulateur mais elle reste de même ordre de grandeur que

pour les valeurs simulées données dans la ligne 1. La ligne 5 donne l'évolution de la variance de l'erreur résiduelle de commande en boucle fermée. Celle-ci reste dans tous les cas à une valeur très acceptable et son évolution est cohérente avec l'évolution de la distance de Vinnicombe donnée dans la ligne 4.

	Régulateur	K_n $n_R = 27$ $n_S = 28$	K_1 $n_R = 19$ $n_S = 20$	K_2 $n_R = 12$ $n_S = 13$	K_3 $n_R = 9$ $n_S = 10$
1	$\delta_v(S_{up}^n, S_{up}^i)$	0	0.1487	0.4388	0.4503
2	$\delta_v(S_{yp}^n, S_{yp}^i)$	0	0.0928	0.1206	0.1233
3	$b(k)$	0.0800	0.0786	0.0685	0.0810
4	$\delta_v(S_{up}^n(TR), S_{up}^i(SIM))$	0.1296	0.2461	0.5435	0.5522
5	Variance erreur BF	0.0023	0.0083	0.0399	0.0398

Tableau 10.5.1. Comparaison des régulateurs réduits avec le régulateur nominal (validation)

La figure 10.5.4 donne les caractéristiques fréquentielles des fonctions de sensibilité perturbation sortie pour les différents régulateurs. Ces courbes permettent de prédire les propriétés d'atténuation/amplification des perturbations pour chaque régulateur. On observe que toutes les courbes sont proches de la caractéristique nominale.

Les performances obtenues sur le système réel avec les différents régulateurs sont illustrées dans la figure 10.5.5. Cette figure présente la densité spectrale de la force résiduelle en boucle ouverte et en boucle fermée. La source d'excitation primaire est une SBPA ($f_{SBPA} = f_e$). La zone fréquentielle qui intéresse se situe entre 0 et 200 Hz. On observe que les régulateurs d'ordre réduit ont des performances similaires au régulateur nominal. Ils atténuent sensiblement les vibrations externes autour du mode de vibration principal et l'amplification des perturbations dans les hautes fréquences est faible (elle est par ailleurs largement compensée par l'atténuation naturelle du système). Pour plus de détails expérimentaux voir [CON 01, LAN 01].

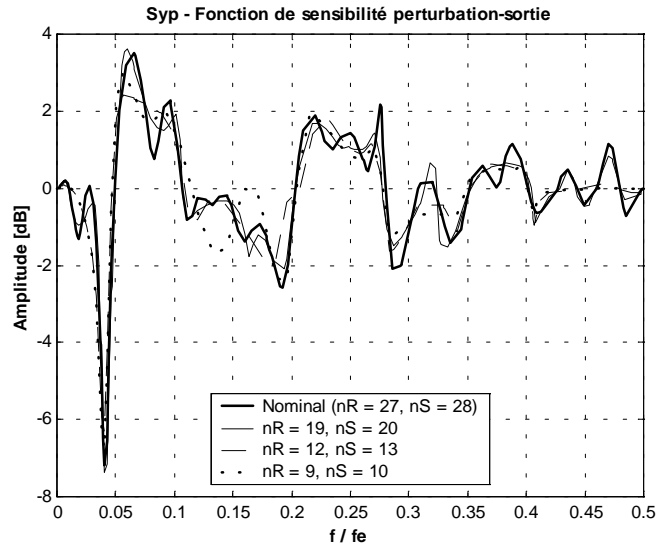


Figure 10.5.4. Caractéristique fréquentielle des fonctions de sensibilité perturbation-sortie pour le régulateur nominal et les régulateurs réduits

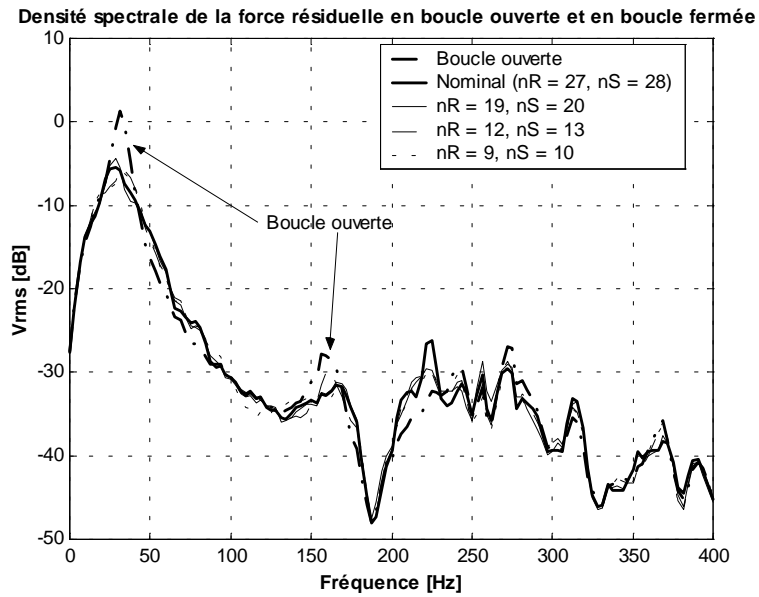


Figure 10.5.5. Densité spectrale de l'accélération résiduelle en boucle ouverte et boucle fermée (pour différents régulateurs)

10.6. Conclusion

Dans ce chapitre un ensemble de méthodes de réduction directe de la complexité des régulateurs a été présenté.

Ces méthodes sont basées sur l'utilisation des techniques d'identification en boucle fermée d'un régulateur d'ordre réduit. L'objectif est de trouver un régulateur d'ordre réduit tel que les caractéristiques de la boucle fermée avec le régulateur d'ordre réduit soit les plus proches possible des caractéristiques de la boucle fermée nominale.

Deux objectifs spécifiques ont été traités :

- poursuite de la commande nominale ;
- poursuite de la sortie nominale.

Avant l'utilisation effective du régulateur réduit il est absolument nécessaire de le valider. Des techniques spécifiques de validation ont été présentées.

En dehors des considérations pratiques qui imposent la réduction de la complexité des régulateurs calculés, les techniques de réduction permettent de donner une réponse indirecte aux deux questions suivantes :

- quel est le choix optimal des pôles de la boucle fermée pour une conception des régulateurs par le placement des pôles standard ?
- comment calculer un régulateur de complexité spécifiée réduite pour un système caractérisé par un modèle dynamique d'ordre élevé ?

10.7. Bibliographie

- [AND 89] ANDERSON B.D.O., LIU Y., « Controller reduction: concepts and approaches », *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 34, n° 8, p. 802-812, 1989.
- [AND 93] ANDERSON B.D.O., « Controller reduction: moving from theory to practice », *IEEE Control Magazine*, vol. 13, p. 16-25, 1993.
- [LAN 01] LANDAU I.D., KARIMI A., CONSTANTINESCU A., « Direct controller reduction by identification in closed loop », *Automatica*, vol. 37, n° 11, p. 1689-1702, 2001.
- [ADA 96] ADAPTECH, *REDUC – Controller order reduction by closed-loop identification* (Toolbox for Matlab), Adaptech, 4 rue de la Tour de l'Eau, St. Martin d'Hères, France, 1999.
- [CON 01] CONSTANTINESCU A., *Commande robuste et adaptative d'une suspension active*, Thèse de doctorat INPG, Laboratoire d'automatique de Grenoble (INPG/CNRS), décembre 2001.

- [LAN 01] LANDAU I.D., KARIMI A., « A unified approach to closed-loop plant identification and direct controller reduction », *Proceedings European Control Conference 2001 (ECC01)*, Porto, Portugal, septembre 2001.
- [LAN 99] LANGER J., LANDAU I.D., « Combined pole placement/sensitivity function shaping using convex optimization criteria », *Automatica*, vol. 35, p. 1111-1120, 1999.
- [ADA 98] ADAPTECH, *Optreg –Digital Controller design by convex optimization* (for Matlab), rue de la Tour de l'Eau, St. Martin d'Hères, France, 1998.

Annexe A.1

Quelques rappels

A.1.1. Quelques signaux fondamentaux

Pour l'analyse temporelle des systèmes, on utilise quelques signaux types.

Impulsion de Dirac

Il s'agit du signal *fondamental*, tous les autres signaux s'obtenant suite au passage de l'*impulsion de Dirac* par un filtre.

L'impulsion de Dirac se définit comme la limite pour $\Delta \rightarrow 0$, d'une impulsion de surface unitaire de durée Δ et d'amplitude $1/\Delta$ (voir figure A.1.1).

Pour $\Delta \rightarrow 0$, l'amplitude de l'impulsion tend vers l'infini.

L'impulsion de Dirac s'écrit :

$$u(t) \begin{cases} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ = 0, & t < 0, t > \Delta \end{cases}$$

Bien qu'il s'agisse d'une fiction mathématique, dans de nombreuses situations, la durée d'une impulsion appliquée à un système est très courte par rapport aux constantes de temps, et elle peut être approximée par une impulsion de Dirac.

La réponse d'un système à une impulsion de Dirac porte le nom de *réponse impulsionnelle*.

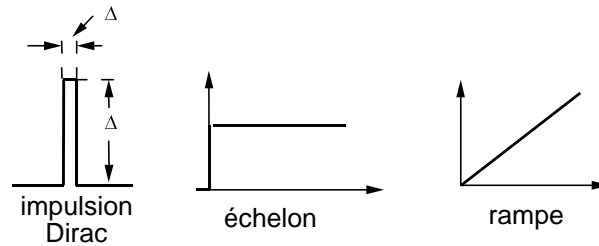


Figure A.1.1.1. Impulsion de Dirac, échelon et rampe

L'équivalent de l'impulsion de Dirac pour les systèmes discrets (appelée aussi fonction *delta* ou fonction de Kronecker) s'écrit :

$$u(t) \begin{cases} = 1 & t = 0 \\ = 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

Echelon

L'échelon unitaire est défini comme suit :

$$u(t) \begin{cases} = 0 & t < 0 \\ = 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

L'échelon peut être interprété comme l'intégrale de l'impulsion de Dirac.

L'échelon discret est défini d'une façon similaire :

$$u(t) \begin{cases} = 0 & t < 0 \\ = 1 & t = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

L'échelon discret peut s'obtenir par l'intégration numérique de l'impulsion de Dirac échantillonnée (fonction δ).

La réponse à un échelon porte souvent le nom de *réponse indicielle*.

Rampe

La *rampe* est définie comme suit :

$$u(t) \begin{cases} = 0 & t < 0 \\ = t & t \geq 0 \end{cases}$$

La rampe correspond à l'intégration de l'échelon unitaire ou à la double intégration de l'impulsion de Dirac. En discret, la rampe est définie par :

$$u(t) \begin{cases} = 0 & t < 0 \\ = t & t = 0, 1, 2, 3 \dots \end{cases}$$

A.1.2. La transformée en z

Soit $f(k)$ une séquence échantillonnée définie pour tout $k \geq 0$, ($k = 0, 1, 2, \dots$).

La transformée en z de la séquence $f(k)$ est définie par :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

Si $U(z)$ est la transformée en z de la séquence échantillonnée d'entrée $u(k)$ d'un système linéaire et $Y(z)$ est la transformée en z de la séquence échantillonnée de sortie $y(k)$, on peut définir la fonction de transfert du système échantillonné par :

$$H(z) = Y(z)/U(z)$$

(pour une définition équivalente voir chapitre 2, paragraphe 2.3.2).

La transformée en z de l'impulsion de Dirac échantillonnée est 1. Donc la fonction de transfert $H(z)$ d'un système linéaire échantillonné est égale à la transformée en z de la sortie quand l'entrée est une impulsion de Dirac échantillonnée.

A.1.3. La cloche de Gauss

Il est très important, dans le cas d'une variable aléatoire (ou d'un processus stochastique ergodique), de pouvoir préciser quelle est la probabilité que cette variable prenne une valeur dans un certain intervalle, ou quel est le pourcentage de points, sur un ensemble de mesures de la variable aléatoire ou du processus stochastique ergodique, qui se trouveront dans un certain intervalle.

Si la variable aléatoire est gaussienne (normale) ou si le processus stochastique ergodique est gaussien, cette information s'obtient à partir de la mesure de l'aire sous la « cloche de Gauss » comprise entre les coordonnées x_1 et x_2 (voir figure A.1.3.1).

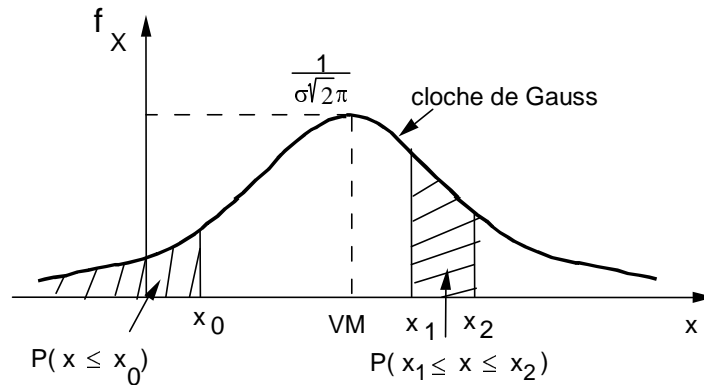


Figure A.1.3.1. La cloche de Gauss

L'expression de la « Cloche de Gauss » est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-VM)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad [\text{A.1.3.1}]$$

où, dans le cas d'un processus stochastique gaussien, VM est l'espérance (ou la valeur moyenne) :

$$VM = E\{X(t)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X(t) \quad [\text{A.1.3.2}]$$

et σ est l'écart type relié à la variance du processus stochastique par la relation :

$$Var. = E\{(X(t) - VM)^2\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (X(t) - VM)^2 = \sigma^2 \quad [\text{A.1.3.3}]$$

De l'équation [A.1.3.1], il résulte que plus l'écart type σ est faible plus la « cloche de Gauss » se rétrécit autour de la valeur moyenne et le pic de la courbe augmente. Ceci est illustré dans la figure A.1.3.2.

La probabilité que X prenne une valeur entre $-\infty$ et $+\infty$ étant égale à 1, il résulte que l'aire totale sous la cloche de Gauss est égale à 1 (ou 100 %).

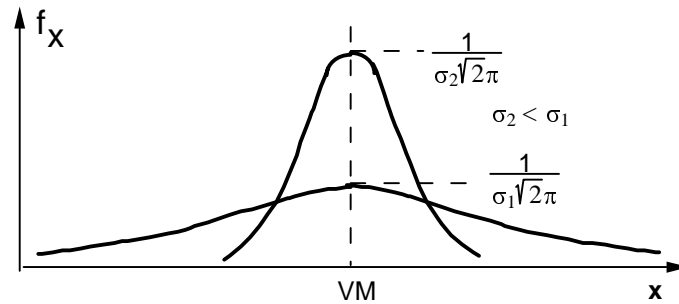


Figure A.1.3.2. Cloches de Gauss pour deux valeurs différentes de l'écart type

D'autre part, la probabilité que X prenne une valeur $\leq x_0$ est égale à l'aire sous la cloche pour $-\infty < x \leq x_0$. Cette probabilité (notée P) est une fonction qui dépend de x . Elle s'appelle *fonction de répartition* :

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{-\infty < X \leq x\} \quad [A.1.3.4]$$

De la figure A.1.3.1., il résulte que :

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} = F_X(x_2) - F_X(x_1) \quad [A.1.3.5]$$

La dérivée de la fonction de répartition (si elle existe) s'appelle la *densité de probabilité* de la variable aléatoire :

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad [A.1.3.6]$$

où :

$$dF_X(x) = P\{x \leq X \leq x + dx\}$$

$F(x)$ étant représenté par l'aire sous la cloche de Gauss, on déduit que la cloche de Gauss donne la densité de probabilité pour les variables aléatoires gaussiennes (ou les processus stochastiques ergodiques gaussiens).

D'autre part, de l'équation [A.1.3.6], il résulte que :

$$dF_X(x) = P\{x \leq X \leq x + dx\} = f_X(x)dx \quad [A.1.3.7]$$

c'est-à-dire que la probabilité qu'une variable aléatoire prenne une valeur entre x et $x + dx$ est égale à $f_X(x) dx$.

Revenons maintenant à l'expression de la densité de probabilité donnée dans l'équation [A.1.3.1].

Si l'on centre la variable aléatoire (ou la réalisation du processus stochastique) en soustrayant la valeur moyenne, la Cloche de Gauss sera centrée autour de 0. Dans la figure A.1.3.3, on a représenté une cloche de Gauss centrée autour de 0 en indiquant la valeur de l'aire entre différentes valeurs de x , respectivement le pourcentage de points qui se trouveront entre ces valeurs (ou la probabilité qu'une variable aléatoire gaussienne prenne une valeur dans cet intervalle).

Quelques valeurs significatives concernant la cloche de Gauss sont résumées dans le tableau A.1.3.1.

α	σ	$1,808\sigma$	$1,96\sigma$	2σ	$2,17\sigma$	$2,58\sigma$	3σ
$ X \leq \alpha$ (%)	63	93	95	95,5	97	99	99,7

Tableau A.1.3.1. Pourcentage de points vérifiant $|X| \leq \alpha$, $\alpha \geq 0$ pour un processus stochastique ergodique gaussien

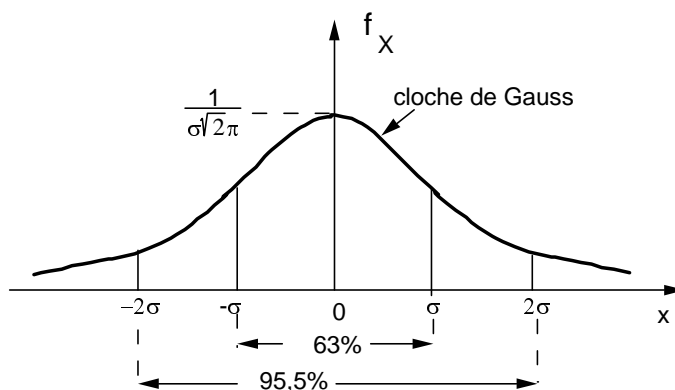


Figure A.1.3.3. Cloche de Gauss centrée. Pourcentage des points se situant entre deux valeurs de x

Annexe A.2

Synthèse des régulateurs numériques R-S-T dans le domaine temporel

Dans le chapitre 3, nous avons présenté la synthèse des régulateurs numériques dans un environnement déterministe en utilisant exclusivement la représentation par fonction (opérateur) de transfert (c'est-à-dire une synthèse dans le domaine fréquentiel).

Les mêmes résultats s'obtiennent en faisant la synthèse dans le domaine temporel. L'approche temporelle met en évidence le caractère *prédictif* de la régulation numérique par placement de pôles. Elle permet d'une part d'éclaircir la façon dont se fait la régulation dans le cas des systèmes avec retard, en mettant en évidence l'existence d'un prédicteur à l'intérieur du régulateur, et d'autre part, elle permet de mieux comprendre le lien avec la synthèse des régulateurs dans un environnement stochastique.

Nous illustrerons l'approche temporelle pour la stratégie de *poursuite et régulation à objectifs indépendants* qui est un cas particulier de la stratégie du *placement de pôles*.

L'élément essentiel pour la synthèse des régulateurs numériques dans le domaine temporel est la construction (explicite ou implicite) d'un prédicteur pour les modèles échantillonnés.

A.2.1. Prédicteurs pour les modèles échantillonnés

Le modèle échantillonné d'un procédé discrétisé est décrit dans le cas général par :

$$y(t) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t-i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t-d-i) \quad [\text{A.2.1}]$$

Le modèle échantillonné linéaire donné dans l'équation [A.2.1] est en fait un prédicteur à un pas. En passant de t à $t+1$ son expression devient :

$$\begin{aligned} y(t+1) &= -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t+1-d-i) = A^*(q^{-1})y(t) + q^{-d}B^*(q^{-1})u(t) \\ &= f[y(t), y(t-1), \dots, u(t), u(t-1), \dots] \end{aligned} \quad [\text{A.2.2}]$$

où $A^*(q^{-1})$ et $B^*(q^{-1})$ sont donnés par les équations [2.3.22] et [2.3.24]. On observe en effet que $y(t+1)$ ne dépend que des valeurs de y et u jusqu'à l'instant t .

Un problème important est de pouvoir prédire les valeurs de la sortie y pour $t+1, t+2, \dots$ en utilisant les informations (mesures) disponibles jusqu'à l'instant t . Ce problème par exemple se pose pour la commande des procédés ayant un retard échantillonné d . Dans ce cas, nous souhaitons soit prédire la valeur de la sortie $d+1$ pas en avance en se basant sur les informations disponibles à l'instant t , soit de calculer la valeur $u(t)$ permettant d'atteindre une certaine valeur pour la sortie y à l'instant $t+d+1$. C'est à dire nous recherchons une expression de la forme :

$$\hat{y}(t+j) = \hat{y}(t+j/t) = f[y(t), y(t-1), \dots, u(t), u(t-1), \dots] ; j \leq d+1 \quad [\text{A.2.3}]$$

où $\hat{y}(t+j/t)$ noté d'une façon simplifiée $\hat{y}(t+j)$ représente la prédiction de la sortie à l'instant $t+j$ basée sur la connaissance de y et u jusqu'à l'instant t inclus.

Pour illustrer ce concept et le calcul du prédicteur considérons d'abord un exemple.

Exemple

Soit :

$$y(t+1) = -a_1 y(t) + b_1 u(t-1) \quad [\text{A.2.4}]$$

qui correspond à un système avec un retard échantillonné $d = 1$.

Nous nous intéressons à prédire à l'instant t la valeur de la sortie $y(t+2)$ sur la base des informations disponibles à l'instant t . Pour calculer cette prédiction on exprime d'abord la sortie $y(t+2)$ en fonction des informations disponibles à l'instant t . De [A.2.4] on obtient :

$$y(t+2) = -a_1 y(t+1) + b_1 u(t) \quad [\text{A.2.5}]$$

qui peut s'écrire encore sous la forme :

$$A(q^{-1})y(t+2) = B^*(q^{-1})u(t); \quad A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1}; \quad B^*(q^{-1}) = b_1 \quad [\text{A.2.6}]$$

Observons que $y(t+2)$ donné par [A.2.5] dépend de $y(t+1)$ qui n'est pas connu à l'instant t . Ce n'est donc pas une expression permettant d'obtenir une prédiction à 2 pas. Mais $y(t+1)$ dans [A.2.5] peut être remplacé par son expression donnée par [A.2.4]. On obtient alors

$$\begin{aligned} y(t+2) &= -a_1[-a_1 y(t) + b_1 u(t-1)] + b_1 u(t) = f_0 y(t) + (1 + e_1 q^{-1})b_1 u(t) \\ &= F(q^{-1})y(t) + E(q^{-1})B^*(q^{-1})u(t) \end{aligned} \quad [\text{A.2.7}]$$

avec :

$$F(q^{-1}) = f_0 = a_1^2; \quad E(q^{-1}) = 1 + e_1 q^{-1} = 1 - a_1 q^{-1} \quad [\text{A.2.8}]$$

On observe que le membre droit de l'équation [A.2.7] ne dépend que d'informations disponibles à l'instant t et donc l'expression du prédicteur à 2 pas sera donnée par :

$$\hat{y}(t+2) = F(q^{-1})y(t) + E(q^{-1})B^*(q^{-1})u(t) \quad [\text{A.2.9}]$$

où $F(q^{-1})$ et $E(q^{-1})$ sont données par [A.2.8].

Cette technique de substitution successive des prédictions à un pas peut être généralisée quels que soient d , A et B . Mais on peut aussi déterminer directement les polynômes $E(q^{-1})$ et $F(q^{-1})$. En utilisant [A.2.6] dans [A.2.7] pour remplacer le terme $B^*(q^{-1})u(t)$ on obtient :

$$\begin{aligned} y(t+2) &= F(q^{-1})y(t) + E(q^{-1})A(q^{-1})y(t+2) \\ &= [A(q^{-1})E(q^{-1}) + q^{-2}F(q^{-1})]y(t+2) \end{aligned} \quad [\text{A.2.10}]$$

Pour que les deux membres de [A.2.10] soit égaux, il résulte que $E(q^{-1})$ et $F(q^{-1})$ doivent vérifier l'équation polynomiale :

$$1 = A(q^{-1})E(q^{-1}) + q^{-2}F(q^{-1}) \quad [\text{A.2.11}]$$

Autrement dit, les coefficients des polynômes $E(q^{-1})$ et $F(q^{-1})$ nécessaires pour calculer la prédiction $\hat{y}(t+2)$ à l'instant t , sont les solutions de l'équation polynomiale [A.2.11]. Rappelons qu'une équation polynomiale correspond à un système d'équations linéaires (les coefficients des puissances de q dans les deux membres de [A.2.11] doivent être égaux).

Pour l'exemple considéré on a :

$$1 = (1 + a_1q^{-1})(1 + e_1q^{-1}) + q^{-2}f_0 \quad [\text{A.2.12}]$$

qui conduit à :

$$\begin{aligned} q^0 & \quad 1 = 1 \\ q^{-1} & \quad 0 = a_1 + e_1 \\ q^{-2} & \quad 0 = a_1e_1 + f_0 \end{aligned}$$

dont les solutions sont données par [A.2.8].

Observons aussi que l'équation [A.2.12] peut se mettre sous la forme d'une équation matricielle :

$$Mx = p$$

où :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \end{bmatrix}; p^T = [1 \quad 0 \quad 0]; x^T = [1 \quad e_1 \quad f_1]$$

dont la solution s'exprime :

$$x = M^{-1}p$$

M étant triangulaire inférieure l'inverse existe toujours et dans ce cas particulier on a :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 \\ a_1^2 & -a_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cette démarche se généralise quel que soit A , B et d .

En règle générale on recherche l'expression d'une prédiction filtrée :

$$P(q^{-1})\hat{y}(t+d+1) = f_P[y(t), y(t-1), \dots, u(t), u(t-1), \dots] \quad [\text{A.2.13}]$$

où $P(q^{-1})$ est un polynôme monique (le coefficient de q^0 est 1) asymptotiquement stable. Le système échantillonné [A.2.2] peut se réécrire sous la forme :

$$A(q^{-1})y(t+d+1) = B^*(q^{-1})u(t) \quad [\text{A.2.14}]$$

On va rechercher une expression de la sortie de la forme :

$$P(q^{-1})y(t+d+1) = F(q^{-1})y(t) + E(q^{-1})B^*(q^{-1})u(t) \quad [\text{A.2.15}]$$

avec :

$$F(q^{-1}) = f_0 + f_1q^{-1} + \dots + f_{n_F}q^{-n_F} \quad [\text{A.2.16}]$$

$$E(q^{-1}) = 1 + e_1q^{-1} + \dots + e_{n_E}q^{-n_E} \quad [\text{A.2.17}]$$

En utilisant [A.2.14], l'équation [A.2.15] devient :

$$P(q^{-1})y(t+d+1) = [A(q^{-1})E(q^{-1}) + q^{-d-1}F(q^{-1})]y(t+d+1) \quad [\text{A.2.18}]$$

et donc $E(q^{-1})$ et $F(q^{-1})$ sont les solutions de l'équation polynomiale :

$$P(q^{-1}) = A(q^{-1})E(q^{-1}) + q^{-d-1}F(q^{-1}) \quad [\text{A.2.19}]$$

avec :

$$n_F = \max(n_A - 1, n_P - d - 1) \quad ; \quad n_E = d$$

pour assurer l'unicité des solutions.

et l'erreur de prédiction définie par :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) \quad [\text{A.2.25}]$$

va satisfaire l'équation :

$$P(q^{-1})\varepsilon(t+d+1) = 0 \quad [\text{A.2.26}]$$

qui s'obtient en soustrayant [A.2.24] de [A.2.15]. En d'autres mots, l'erreur de prédiction va tendre vers zéro quel que soit l'erreur de prédiction initiale si $P(q^{-1})$ est asymptotiquement stable. Pour $P(q^{-1}) = 1$ cette erreur est nulle à $t+d+1$.

A.2.2. Poursuite et régulation à objectifs indépendants

En ayant une expression de la sortie prédite avec $d+1$ pas d'avance il devient possible de calculer la commande $u(t)$ permettant d'obtenir à $t+d+1$ une sortie $y(t+d+1) = y^*(t+d+1)$ où $y^*(t+d+1)$ est la sortie souhaitée.

En effet, considérons l'exemple [A.2.4]. La condition $y(t+2) = y^*(t+2)$ s'exprime à partir de [A.2.7] et [A.2.8] :

$$y^*(t+2) = a_1^2 y(t) - a_1 b_1 u(t-1) + b_1 u(t)$$

d'où l'on obtient :

$$u(t) = \frac{y^*(t+2) - a_1^2 y(t) + a_1 b_1 u(t-1)}{b_1} \quad [\text{A.2.27}]$$

Dans le cas général on souhaite obtenir $P(q^{-1})y(t+d+1) = P(q^{-1})y^*(t+d+1)$ et on obtient à partir de [A.2.15]

$$P(q^{-1})y^*(t+d+1) = F(q^{-1})y(t) + E(q^{-1})B^*(q^{-1})u(t) \quad [\text{A.2.28}]$$

et respectivement :

$$u(t) = \frac{P(q^{-1})}{E(q^{-1})B^*(q^{-1})} y^*(t+d+1) - \frac{F(q^{-1})}{E(q^{-1})B^*(q^{-1})} y(t) \quad [\text{A.2.29}]$$

En introduisant les notations :

$$R(q^{-1}) = F(q^{-1}) \quad [\text{A.2.30}]$$

$$S(q^{-1}) = b_1 + q^{-1}S^*(q^{-1}) = E(q^{-1})B^*(q^{-1}) \quad [\text{A.2.31}]$$

$$T(q^{-1}) = P(q^{-1}) \quad [\text{A.2.32}]$$

l'équation [A.2.27] se réécrit :

$$S(q^{-1})u(t) = T(q^{-1})y^*(t+d+1) - R(q^{-1})y(t) \quad [\text{A.2.33}]$$

et respectivement :

$$u(t) = \frac{T(q^{-1})}{S(q^{-1})}y^*(t+d+1) - \frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})}y(t) \quad [\text{A.2.34}]$$

qui correspond à un régulateur R-S-T.

De [A.2.31] et [A.2.29] on obtient aussi l'expression de $u(t)$ pour la mise en œuvre :

$$u(t) = \frac{1}{b_1} \left[P(q^{-1})y^*(t+d+1) - R(q^{-1})y(t) - S^*(q^{-1})u(t-1) \right]$$

(la valeur désirée de la sortie à $t+d+1$ notée $y^*(t+d+1)$ est supposée connue à l'instant t).

Etant donné que nous avons choisi dans le cas général $u(t)$ pour que [A.2.28] soit satisfaite à chaque instant, il résulte de [A.2.25] et [A.2.28] :

$$P(q^{-1})\hat{y}(t+1) = P(q^{-1})y^*(t+1) \quad [\text{A.2.35}]$$

et respectivement en tenant compte de la définition de $\varepsilon(t+1)$ donnée dans [A.2.25] et de [A.2.26] :

$$P(q^{-1}) \left[y(t+d+1) - y^*(t+d+1) \right] = 0, \quad \forall t > 0 \quad [\text{A.2.36}]$$

qui peut être considéré comme l'*objectif* de la stratégie de *poursuite et régulation à objectifs indépendants*. Le problème de synthèse de la loi de commande est de calculer :

$$u(t) = f_u(y(t), y(t-1), \dots, u(t-1), u(t-2), \dots) \quad [\text{A.2.37}]$$

tel que [A.2.35] soit satisfaite (avec $P(q^{-1})$, polynôme asymptotiquement stable).

La solution s'obtient donc en deux étapes.

Etape I

Calcul du prédicteur à $d+1$ pas de la sortie, tel que l'erreur de prédiction satisfait l'équation :

$$P(q^{-1})\varepsilon(t+d+1) = 0$$

Etape II

Calcul de $u(t)$ pour que

$$P(q^{-1})\hat{y}(t+d+1) = P(q^{-1})y^*(t+d+1), \quad \forall t > 0$$

Notons aussi que le même résultat s'obtient si le critère [A.2.36] est remplacé par :

$$\min_{u(t)} J(t+d+1) = \left\{ P(q^{-1}) \left[y(t+d+1) - y^*(t+d+1) \right] \right\}^2$$

A.2.3. Interprétation de la commande des systèmes avec retard

Nous allons montrer dans ce qui suit que le régulateur R-S-T pour un procédé avec retard se décompose en un prédicteur à d pas de la sortie et un régulateur R-S-T pour le procédé sans retard qui utilise, au lieu de la sortie du procédé, la sortie du prédicteur.

Considérons d'abord un procédé sans retard ($d = 0$) dont le modèle discrétisé est donné par :

$$A(q^{-1})y(t+1) = B^*(q^{-1})u(t) \quad [\text{A.2.38}]$$

et dont les pôles désirés en boucle fermée sont définis par $P(q^{-1})$. En utilisant la stratégie de *poursuite et régulation à objectifs indépendants*, l'équation du régulateur s'écrit :

$$u(t) = \frac{P(q^{-1})y^*(t+1) - R_0(q^{-1})y(t)}{S'_0(q^{-1})B^*(q^{-1})} \quad [\text{A.2.39}]$$

où $S'_0(q^{-1}) = I$ et $R_0(q^{-1})$ est solution de l'équation polynomiale :

$$A(q^{-1})S'_0(q^{-1}) + q^{-1}R_0(q^{-1}) = P(q^{-1}) \quad [\text{A.2.40}]$$

L'opérateur de transfert entre la trajectoire de référence et la sortie a l'expression :

$$H_0(q^{-1}) = \frac{q^{-1}T(q^{-1})}{A(q^{-1})S'_0(q^{-1}) + q^{-1}R_0(q^{-1})} = \frac{q^{-1}T(q^{-1})}{P(q^{-1})} \quad [\text{A.2.41}]$$

Le régulateur correspondant est représenté dans la figure A.2.1.

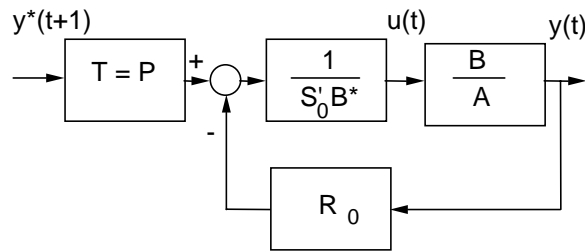


Figure A.2.1. Régulateur numérique R-S-T pour procédé sans retard ($d = 0$)

Considérons maintenant le cas d'un procédé avec retard dont le modèle discrétisé a la forme :

$$A(q^{-1})y(t+d+1) = B^*(q^{-1})u(t) \quad [\text{A.2.42}]$$

et dont les pôles désirés en boucle fermée sont définis par le même polynôme $P(q^{-1})$. En utilisant la stratégie de poursuite et régulation à objectifs indépendants, l'équation du régulateur s'écrit :

$$u(t) = \frac{T(q^{-1})y^*(t+1) - R_d(q^{-1})y(t)}{S'_d(q^{-1})B^*(q^{-1})} \quad [\text{A.2.43}]$$

où $R_d(q^{-1})$ et $S'_d(q^{-1})$ sont les solutions de l'équation polynomiale :

$$A(q^{-1})S'_d(q^{-1}) + q^{-d-1}R_d(q^{-1}) = P(q^{-1}) \quad [\text{A.2.44}]$$

Le régulateur correspondant est représenté dans la figure A.2.2.

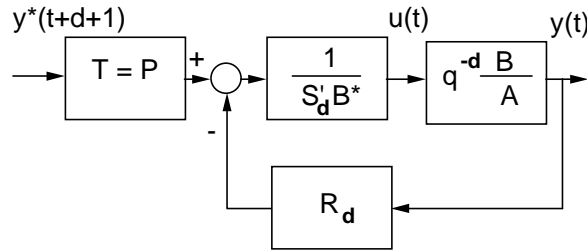


Figure A.2.2. Régulateur numérique R-S-T pour procédés avec retard (d pas)

L'opérateur de transfert entre la trajectoire de référence et la sortie a l'expression :

$$H_d(q^{-1}) = \frac{q^{-d-1}T(q^{-1})}{A(q^{-1})S'_d(q^{-1}) + q^{-d-1}R_d(q^{-1})} = \frac{q^{d-1}T(q^{-1})}{P(q^{-1})} \quad [\text{A.2.45}]$$

Nous allons montrer que ce régulateur peut se représenter sous la forme équivalente donnée dans la figure A.2.3a, où le régulateur calculé est remplacé par le régulateur pour le procédé sans retard qui utilise, au lieu de la sortie mesurée, la prédiction à d pas de la sortie donnée par le prédicteur :

$$\hat{y}(t+d/t) = F(q^{-1})y(t) + q^{-1}E(q^{-1})B^*(q^{-1})u(t) \quad [\text{A.2.46}]$$

où $E(q^{-1})$ et $F(q^{-1})$ sont solutions de l'équation polynomiale (de prédiction):

$$A(q^{-1})E(q^{-1}) + q^{-d}F(q^{-1}) = 1 \quad [\text{A.2.47}]$$

En effet, en utilisant l'équation [A.2.42] du procédé, on observe que l'équation [A.2.46] devient :

$$\hat{y}(t+d/t) = [A(q^{-1})E(q^{-1}) + q^{-d}F(q^{-1})]y(t+d) \quad [\text{A.2.48}]$$

En imposant la condition $\hat{y}(t+d/t) = y(t+d)$ pour tout t , on obtient l'équation [A.2.47].

En utilisant l'équation du prédicteur [A.2.46], le schéma de la figure A.2.3a prend successivement les formes équivalentes représentées dans les figures A.2.3b, etc.

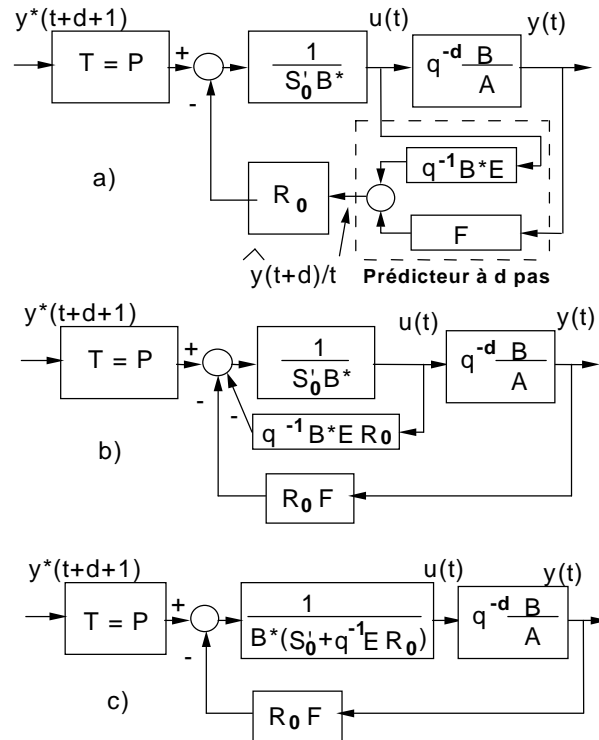


Figure A.2.3. Représentations équivalentes du régulateur R-S-T pour procédés avec retard

Si l'on calcule maintenant, à partir de la figure A.2.3c, l'opérateur (ou la fonction) de transfert entre la trajectoire de référence et la sortie, on obtient :

$$\begin{aligned}
 H_d &= \frac{q^{-d-1} T(q^{-1})}{A(q^{-1}) S'_0(q^{-1}) + q^{-1} R_0(q^{-1}) [A(q^{-1}) E(q^{-1}) + q^{-d} F(q^{-1})]} \\
 &= \frac{q^{-d-1} T(q^{-1})}{A(q^{-1}) S'_0(q^{-1}) + q^{-1} R_0(q^{-1})} = \frac{q^{-1} T(q^{-1})}{P(q^{-1})} \quad [A.2.49]
 \end{aligned}$$

car $A(q^{-1}) E(q^{-1}) + q^{-d} F(q^{-1}) = 1$ et $A(q^{-1}) S'_0(q^{-1}) + q^{-1} R_0(q^{-1}) = P(q^{-1})$ (voir les équations [A.2.40] et [A.2.47]).

La même interprétation s'obtient aussi pour le *placement des pôles* ou la *commande à modèle interne* (en remplaçant les équations [A.2.40] et [A.2.44] par les équations correspondantes utilisées pour le calcul du régulateur dans chaque stratégie de commande).

REMARQUES.–

1) La synthèse dans le domaine temporel peut se faire aussi pour les autres stratégies (placement de pôles, commande à modèle interne). Les principes de calcul restent les mêmes, seul l'objectif de commande change. Voir [LAN 95, LAN 97].

2) Les pôles en boucle fermée, dans le cas des systèmes avec retard, peuvent être interprétés comme une partie provenant du prédictor de la sortie (qui fournira une sortie prédite filtrée) et une partie provenant du régulateur pour le système sans retard. Dans l'exemple considéré, tous les pôles du prédictor ont été placés à zéro.

3) Le régulateur « PI + prédictor de Smith » utilisé pour la régulation des systèmes à retard peut être interprété dans sa version discrétisée comme un régulateur R-S-T particulier résultant de la combinaison d'un régulateur PI discrétisé utilisant, à la place de la sortie du procédé, une sortie prédite à d pas, le prédictor ayant la dynamique du procédé (dans l'équation [A.2.46], 1 est remplacé par $A(q^{-1})$). Voir [LAN 95].

A.2.4. Bibliographie

[LAN 97] LANDAU I.D., LOZANO R., M'SAAD M., *Adaptive Control*, chapitre 7, Springer, Londres, 1997.

[LAN 95] LANDAU I.D., « Robust digital control of systems with time delay (the Smith predictor revisited) », *Int. J. of Control*, vol. 62, n° 22, p. 325-347, 1995.

Annexe A.3

Marge de stabilité généralisée et distance normalisée entre deux fonctions de transfert

A.3.1. Marge de stabilité généralisée

Dans le chapitre 2, paragraphe 2.6.2, on a présenté la *marge de module*, qui donne la distance minimale de l'hodographe du système en boucle ouverte par rapport au point critique, comme étant un indicateur de la robustesse du système. Rappelons que la marge de module s'exprime :

$$\Delta M = \left(\left| S_{yp}(e^{-j\omega}) \right|_{\max_{\omega}} \right)^{-1} = \left\| S_{yp}(e^{-j\omega}) \right\|_{\infty}^{-1}, \text{ pour } \omega = 0 \text{ à } \pi f_e \quad [\text{A.3.1}]$$

En effet, le maximum du module d'une fonction de transfert porte aussi le nom de « norme H infini », notée H_{∞} . Donc, la marge de module est égale à l'inverse de la norme H_{∞} de la fonction de sensibilité perturbation-sortie.

Dans le paragraphe 2.6, il a aussi été mentionné que pour un système en boucle fermée, asymptotiquement stable, les quatre fonctions de sensibilité doivent être asymptotiquement stables. Par ailleurs, toujours dans le paragraphe 2.6 il a été montré que les tolérances admises sur les variations de la fonction de transfert du procédé dépendent aussi des fonctions de sensibilité. Ces tolérances admises seront d'autant plus faibles que les maximums des différentes fonctions de sensibilité seront élevés.

On peut donc se poser la question d'une caractérisation globale de la marge de stabilité et de la robustesse du système bouclé, en tenant compte simultanément de l'ensemble des quatre fonctions de sensibilité. Ce problème peut être vu comme une généralisation de la « marge de module ».

En notant le régulateur par :

$$K = \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})} \quad [\text{A.3.2}]$$

et la fonction de transfert du procédé par :

$$G = \frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad [\text{A.3.3}]$$

on définit pour le système en boucle fermée (K, G) la matrice des fonctions de sensibilité ($z = e^{j\omega}$) :

$$\mathbf{T}(j\omega) = \begin{bmatrix} S_{yr}(j\omega) & S_{yv}(j\omega) \\ -S_{up}(j\omega) & S_{yp}(j\omega) \end{bmatrix} \quad [\text{A.3.4}]$$

où $S_{yr}, S_{yv}, S_{up}, S_{yp}$ ont été définies au chapitre 2, paragraphe 2.5 (équations [2.5.14] à [2.5.18]).

Pour pouvoir donner une interprétation similaire au module d'une fonction de transfert, on est obligé de mettre la matrice $\mathbf{T}(j\omega)$ sous la forme (décomposition en valeurs singulières) :

$$\mathbf{T}(j\omega) = \mathbf{U}\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{V}^* \quad [\text{A.3.5}]$$

où \mathbf{U} et \mathbf{V} sont des matrices orthonormales (unité) avec la propriété $\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{I}$, $\mathbf{V}\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^*\mathbf{V} = \mathbf{I}$ (* indique le complexe conjugué) et

$$\mathbf{S}(j\omega) = \begin{bmatrix} \sigma_1(j\omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2(j\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3(j\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4(j\omega) \end{bmatrix} \quad [\text{A.3.6}]$$

est une matrice diagonale (de fonctions de transfert), avec la propriété :

$$|\sigma_1(j\omega)| \geq |\sigma_2(j\omega)| \geq |\sigma_3(j\omega)| \geq |\sigma_4(j\omega)| \quad \text{pour } \omega = 0 \text{ à } \pi f_e \quad [\text{A.3.7}]$$

$\sigma_1(j\omega)$ porte le nom de « la plus grande valeur singulière de $\mathbf{T}(j\omega)$ » et elle est notée :

$$\bar{\sigma}(j\omega) = \sigma_1(j\omega) \quad [\text{A.3.8}]$$

On définit alors le « module » de $\mathbf{T}(j\omega)$ comme suit :

$$|T(j\omega)| = |\bar{\sigma}(j\omega)| \quad [\text{A.3.9}]$$

et respectivement le « maximum du module » $\mathbf{T}(j\omega)$:

$$|\mathbf{T}(j\omega)|_{\max} = |\bar{\sigma}(j\omega)|_{\max} = \|\mathbf{T}(j\omega)\|_{\infty}, \text{ pour } \omega = 0 \text{ à } \pi f_e \quad [\text{A.3.10}]$$

Similaire à la marge de module on définit la *marge de stabilité généralisée* par :

$$b(K, G) = \begin{cases} \left(|\mathbf{T}(j\omega)|_{\max} \right)^{-1} = \|\mathbf{T}(j\omega)\|_{\infty}^{-1} & \text{si } (K, G) \text{ est stable} \\ 0 & \text{si } (K, G) \text{ est instable} \end{cases} \quad [\text{A.3.11}]$$

La marge de stabilité généralisée peut être calculée avec la fonction *smarg.m* (Matlab) de la boîte à outils REDUC [ADA 99a].

Plus la valeur de $b(K, G)$ est faible, plus on est proche de la situation d'instabilité et donc aussi le système sera moins robuste par rapport aux variations de la fonction de transfert nominale du procédé.

Nous allons mettre en évidence dans ce qui suit que les relations entre les modules des fonctions de sensibilité et la tolérance sur les incertitudes de modélisation peuvent aussi être globalisées et reliées à la marge de stabilité généralisée. Pour ceci il faut introduire au préalable une notion de distance normalisée entre deux fonctions de transfert.

A.3.2. Distance normalisée entre deux fonctions de transfert

Si l'on note par n_{z_i} le nombre de zéros instables et par n_{p_i} le nombre de pôles instables d'une fonction de transfert G , le nombre d'encerclements de l'origine est donné par :

$$wno(G) = n_{z_i}(G) - n_{p_i}(G) \quad [\text{A.3.12}]$$

(valeur positive = encerclements en sens inverse des aiguilles d'une montre ; valeur négative = encerclements dans le sens des aiguilles d'une montre).

On ne peut comparer que deux fonctions de transfert G_1 , G_2 vérifiant la propriété suivante :

$$wno(1 + G_2^* G_1) + n_{p_i}(G_1) - n_{p_i}(G_2) - n_{p_i}(G_2) = 0 \quad [\text{A.3.13}]$$

où G_2^* est le complexe conjugué de G_2 et $n_{p_i}(G_2)$ est le nombre de pôles sur le cercle unité de G_2 ¹.

La *distance normalisée* entre deux fonctions de transfert vérifiant la propriété [A.3.13] est appelée *distance de Vinnicombe* ou *v-gap* [VIN 93].

On introduit une différence normalisée entre deux fonctions de transfert $G_1(j\omega)$ et $G_2(j\omega)$:

$$\Psi[G_1(j\omega), G_2(j\omega)] = \frac{G_1(j\omega) - G_2(j\omega)}{\left(1 + |G_1(j\omega)|^2\right)^{1/2} \left(1 + |G_2(j\omega)|^2\right)^{1/2}} \quad [\text{A.3.14}]$$

et la *distance normalisée (distance de Vinnicombe)* est définie par :

$$\delta_v(G_1, G_2) = \left| \Psi[G_1(j\omega), G_2(j\omega)] \right|_{\max_{\omega}} = \left\| \Psi[G_1(j\omega), G_2(j\omega)] \right\|_{\infty} \quad [\text{A.3.15}]$$

pour $\omega = 0$ à πf_e

On observe immédiatement à partir de la structure de Ψ que :

$$0 \leq \delta_v(G_1, G_2) < 1 \quad [\text{A.3.16}]$$

Si la condition [A.3.13] n'est pas vérifiée, par définition :

$$\delta_v(G_1, G_2) = 1$$

La distance de Vinnicombe peut être calculée par exemple en utilisant la fonction *vgap.m* (Matlab) de la boîte à outils REDUC [ADA 99a].

A.3.3. Condition de stabilité robuste

En utilisant la *marge de stabilité généralisée* et la *distance normalisée* de Vinnicombe entre deux fonctions de transfert on peut exprimer la condition de robustesse en stabilité (condition suffisante) pour un régulateur K calculé sur la base

1. La condition [A.3.13] est moins restrictive que la condition utilisée dans le paragraphe 2.6.2 où on a considéré deux fonctions de transfert ayant le même nombre de pôles instables et le même nombre d'encerclements de l'origine.

du modèle (nominal) G_1 ainsi : Le régulateur K qui stabilise le modèle G_1 va stabiliser aussi le modèle G_2 si :

$$\delta_\nu(G_1, G_2) \leq b(K, G_1) \quad [\text{A.3.17}]$$

Cette condition peut être remplacée par une condition moins restrictive, mais qui doit être vérifiée à toutes les fréquences, à savoir² :

$$|\Psi[G_1(j\omega), G_2(j\omega)]|_{\max_\omega} \leq |T(j\omega)|^{-1} \quad [\text{A.3.18}]$$

A.3.4. Bibliographie

Les concepts de « distance de Vinnicombe » (ν -gap) et « marge de stabilité généralisée » sont extrêmement utiles en pratique pour caractériser par un seul nombre soit la distance entre deux fonctions de transfert, soit la robustesse d'un régulateur. La référence originale est :

[VIN 93] VINNICOMBE G., « Frequency domain uncertainty and the graph topology », *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 38, n° 9, p. 1371-1383, 1993.

Pour une présentation très pédagogique, mais faisant appel extensivement au concept de norme H_∞ , voir :

[ZHU 98] ZHU K., *Essentials of robust control*, Prentice Hall, New Jersey, Etats-Unis, 1998.

Ces concepts se sont avérés utiles dans diverses applications et en particulier, pour la validation des régulateurs issus des procédures de réduction de complexité (voir chapitre 10) et pour la validation des modèles identifiés en boucle fermée (voir chapitre 9). Des détails de calcul et exemples se trouvent dans :

[ADA 99] ADAPTECH, *REDUC – Controller order reduction by closed-loop identification* (Toolbox for Matlab), rue de la Tour de l'Eau, St. Martin d'Hères, France, 1999.

[LAN 01] LANDAU I.D., KARIMI A., CONSTANTINESCU A., « Direct controller reduction by identification in closed loop », *Automatica*, vol. 37, n° 11, p. 1689-1702, 2001.

2. Cette condition est à rapprocher des conditions données dans le paragraphe 2.6.2 (équations [2.6.7], [2.6.9] et [2.6.10]). Il s'agit ici (équation [A.3.17]) d'une généralisation.

Annexe A.4

Travaux pratiques

Cette annexe suggère un certain nombre de travaux pratiques qui doivent permettre une familiarisation rapide avec les bases des techniques décrites dans ce livre. Des travaux pratiques peuvent aussi être développés à partir des exemples et des applications présentés dans les chapitres 3, 4, 7, 8 et 9. D'autres travaux pratiques sont disponibles sur le site <http://www-lag.ensieg.inpg.fr/bookIC>. Les travaux pratiques décrits dans cette annexe peuvent être mis en œuvre avec les logiciels WinPIM, WinREG, WinTRAC et les boîtes à outils CLID, OPTREG et REDUC d'Adaptech, mais aussi avec Scilab et Matlab en utilisant en dehors de routines de base, les différentes routines mentionnées dans le livre et qui sont disponibles sur le site <http://www-lag.ensieg.inpg.fr/bookIC> (voir annexe A.6).

A.4.1. TP systèmes échantillonnés

Objectif

Se familiariser avec la représentation des modèles discrétisés de procédés.

Séquence des opérations

1) Etudier les réponses à un échelon (réponses indicielles) du modèle de 1^{er} ordre :

$$H(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

pour $a_1 = -0.2 ; -0.5 ; -0.7 ; -0.9$ en choisissant chaque fois b_1 tel que le gain statique $b_1 / (1 + a_1) = 1$. Superposer les courbes correspondantes sur la même figure pour une comparaison aisée.

2) Déterminer pour chaque cas la constante de temps équivalente (normalisée par rapport à la période d'échantillonnage).

Rappel : la constante de temps est égale au temps nécessaire pour atteindre 63 % de la valeur finale.

3) Question : $a_1 = -0.2$ correspond-il à un échantillonnage rapide ou lent d'un système du premier ordre continu ?

Même question pour $a_1 = -0.9$.

4) Quelles sont les valeurs approximatives de a_1 pour une période d'échantillonnage $T_e = T/4$ et $T_e = T$ ($T =$ constante de temps).

5) Etudier les réponses temporelles pour $a_1 = 0.5$ et 0.7 . Interpréter les résultats.

6) Etudier l'effet de la période d'échantillonnage et du retard fractionnaire sur le modèle discrétisé avec BOZ de :

$$H(s) = \frac{G \cdot e^{-sL}}{1 + sT}$$

pour $G = 1 ; T = 10 \text{ s} ; L = 0 ; 0.5 \text{ s} ; 1 \text{ s} ; 2 \text{ s} ; 3 \text{ s}$ et $T_e = 5 \text{ s}$ et 10 s .

Analyser les propriétés des pôles et des zéros des fonctions (opérateurs) de transfert échantillonnés pour chaque situation.

A.4.2. TP PID numérique

Objectif

Se familiariser avec le PID numérique et mettre en évidence l'intérêt des régulateurs numériques à trois branches (R-S-T).

Séquence des opérations

1) Calculer le modèle discrétisé avec BOZ de :

$$H(s) = \frac{G.e^{-sL}}{1+sT} \quad \text{pour } G = 1, T = 10s, L = 3s \text{ et } T_e = 5s$$

2) Trouver le PID numérique de type 1 avec équivalent continu qui assure les meilleures performances, correspondant à un deuxième ordre avec amortissement 0.8.

3) Une fois ce PID calculé, faire une simulation temporelle de ce système en boucle fermée. On utilisera comme consigne un signal en créneau.

Peut-on obtenir une réponse en boucle fermée plus rapide qu'en boucle ouverte pour ce rapport retard/constante de temps égal à 0.3 ?

4) Trouver un PID numérique de type 1 sans équivalent continu qui accélère environ deux fois le temps de montée en boucle fermée par rapport au temps de montée en boucle ouverte.

5) Faire une simulation temporelle. Expliquer à partir des valeurs de $R(q^{-1})$ les éventuels dépassements.

6) Dans les conditions du point 4, comparer les régulateurs PID numériques 1 et 2.

A.4.3. TP identification

Objectifs

TP1 : se familiariser avec les méthodes récursives d'identification paramétriques et les procédures de validation des modèles.

TP2 : Identifier deux processus réels (une colonne à distiller et un robot souple) à partir uniquement des données E/S.

TP1

Fichiers de données

Les fichiers à utiliser sont TØ, T1 et XQ, chacun contenant 256 données E/S¹.

1. Fichiers disponibles sur les sites : <http://www.adaptech.com> et <http://www-lag.ensieg.inpg.fr/bookIC>.

L'entrée est une SBPA engendrée par un registre de longueur 8. Le fichier TØ a été obtenu en simulant le modèle suivant:

$$A(q^{-1}) y(t) = q^{-d} B(q^{-1}) u(t) \quad ; u - \text{entrée}, y - \text{sortie}$$

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.5 q^{-1} + 0.7 q^{-2} \quad ; B(q^{-1}) = 1 q^{-1} + 0.5 q^{-2} \quad ; d = 1$$

Le fichier T1 a été engendré avec les mêmes polynômes A et B , mais une perturbation stochastique a été rajoutée en sortie.

Le fichier XQ est donné sans aucune information *a priori* (degré de $A \leq 5$).

Séquence des opérations

1) Utiliser la structure 1 et la méthode MCR (moindres carrés récurrents) avec gain d'adaptation décroissant pour identifier le modèle correspondant à TØ.

2) Essayer degré $B = 4$ et $d = 0$ sur le fichier TØ avec le même algorithme que précédemment, pour voir comment on peut mettre en évidence le retard (le premier coefficient de B est inférieur d'un ordre de grandeur par rapport au second).

3) Identifier le modèle correspondant au fichier T1 en utilisant la structure 1 et la méthode des moindres carrés récurrents avec gain d'adaptation décroissant (comme pour le fichier TØ). Observer le biais des paramètres identifiés. Faire une validation du modèle identifié.

4) Essayer d'autres structures et méthodes pour améliorer les résultats (S3 puis S2).

5) Quand une validation satisfaisante sera obtenue, calculer la réponse à un échelon et faire une visualisation graphique.

6) Effectuer une estimation de la structure (valeur de n_A, n_B, d) par les différentes méthodes décrites dans les chapitres 6 et 7.

7) Identifier le modèle correspondant au fichier XQ.

TP2

Fichiers de données : QXD, ROB2

QXD : 256 données E/S correspondant au transfert entre la puissance de chauffe au fond d'une colonne de distillation binaire et la concentration du produit de tête. L'entrée est une SBPA engendrée avec un registre de longueur 8. Période

d'échantillonnage : 10 s. Information *a priori* : pour les colonnes à distiller, le degré du polynôme A ne dépasse pas en général 3.

Séquence des opérations

Identifier le (ou les) modèle(s) correspondant à ce fichier, valider les modèles identifiés, et visualiser la (ou les) réponse(s) à un échelon.

Question 1 : quel est le temps de montée du procédé ?

Question 2 : la SBPA a-t-elle été correctement choisie ?

ROB2 : 256 données E/S correspondant à un bras manipulateur très flexible. Entrée : couple moteur. Sortie : position de l'extrémité du bras. La séquence d'entrée est une SBPA. Période d'échantillonnage : 200 ms. Les modes de vibration supérieurs à 2.5 Hz sont éliminés par un filtre antirepliement. Information *a priori* : dans le domaine 0-2.5 Hz, il y a deux modes de vibration.

Séquence des opérations

Identifier le (ou les) modèle(s) correspondant à ce fichier. Valider les modèles identifiés, et visualiser la (ou les) réponses fréquentielles (≥ 200 points).

Question 1 : quelles sont les fréquences des modes de vibration et leur coefficient d'amortissement ?

Question 2 : comment se traduisent sur les caractéristiques fréquentielles les différences entre un modèle qui valide et un modèle qui ne valide pas ?

A.4.4. TP régulation numérique (commande de la colonne à distiller)

Le but de ce TP est de calculer des algorithmes de régulation pour la colonne à distiller précédemment étudiée (fichier QXD), et d'évaluer leurs performances en simulation.

Pour ce faire, on propose d'utiliser deux modèles de cette colonne à distiller qui correspondent l'un à un retard $d = 1$, l'autre à un retard $d = 2$ (période d'échantillonnage : 10 s). Pour chacun d'eux, on calculera une loi de commande, qui sera évaluée ensuite en simulation à l'aide de l'autre modèle. Ces modèles sont les suivants :

$$d = 1$$

$$\text{M1 : } \begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 - 0.5065 q^{-1} - 0.1595 q^{-2} \\ B(q^{-1}) &= 0.0908 q^{-1} + 0.1612 q^{-2} + 0.0776 q^{-3} \end{aligned}$$

$$d = 2$$

$$\text{M2 : } \begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 - 0.589q^{-1} - 0.098q^{-2} \\ B(q^{-1}) &= 0.202q^{-1} + 0.0807q^{-2} \end{aligned}$$

Séquence des opérations

1) Déterminer un algorithme de régulation (avec intégrateur) pour le modèle M1 de la colonne.

Pour ce faire, on utilisera une méthode de commande déterministe appropriée au modèle utilisé (en fonction de la position des zéros par rapport au cercle unité).

La dynamique de la boucle fermée (régulation) sera spécifiée par un système du 2^e ordre, avec un amortissement de 0.9, qui accélère (réduit) de 20 % le temps de réponse de la boucle fermée par rapport à celui évalué en boucle ouverte. La dynamique de poursuite sera spécifiée par un 2^e avec la même dynamique que pour la régulation.

2) Calculer un régulateur assurant les performances spécifiées ci-dessus et des marges de robustesse $\Delta M \geq 0.5$, $\Delta \tau \geq 10s$.

3) Effectuer des tests de simulations croisés avec les deux régulateurs et les deux modèles. Interpréter les résultats.

4) Reprendre la démarche ci-dessus pour des performances désirées en poursuite et en régulation correspondant à une accélération (réduction) de 50 % du temps de réponse du système par rapport à la boucle ouverte et dépassement inférieur à 5 % (en poursuite et régulation), tout en assurant les marges de robustesse ($\Delta M \geq 0.5$, $\Delta \tau \geq 10s$). La priorité sera donnée aux marges de robustesse dans le choix de la dynamique de régulation.

Question : peut-on garantir les marges de robustesse pour cette dynamique de régulation (accélération de 50 %) ?

5) Effectuer des tests de simulation croisés avec les deux régulateurs et les deux modèles. Interpréter les résultats. Comparer aussi avec le cas précédent.

Annexe A.5

Présentation des progiciels

A.5.1. MIRCOD (Model Identification and Robust Controller Design)

MIRCOD (Model Identification and Robust COntroller Design) est un logiciel pour l'identification des systèmes mono entrée - mono sortie et le calcul des régulateurs robustes pour ce type de système. Il est doté d'une interface utilisateur graphique (GUI). Il propose des techniques d'identification en boucle ouverte et boucle fermée. La synthèse des régulateurs se fait par la technique de placement de pôles combinée avec le calibrage des fonctions de sensibilité

Il a été développé par T.B. Airimitoiaie pour mettre en oeuvre les techniques d'identification et commande présentées dans ce livre.

Le logiciel MIRCOD a été développé pour Microsoft Windows (Windows 7) mais il a été aussi utilisé dans un environnement en utilisant Wine.

Pour démarrer MIRCOD on doit double cliquer sur l'icône MIRCOD.exe. Une fenêtre comme celle montré dans la figure A.1 apparait.

Il faut ensuite sélectionner le bouton correspondant pour choisir une fonctionnalité (identification, calcul de régulateur, réduction de complexité du régulateur).

Le logiciel offre la possibilité de choisir la langue d'utilisation (français ou anglais).

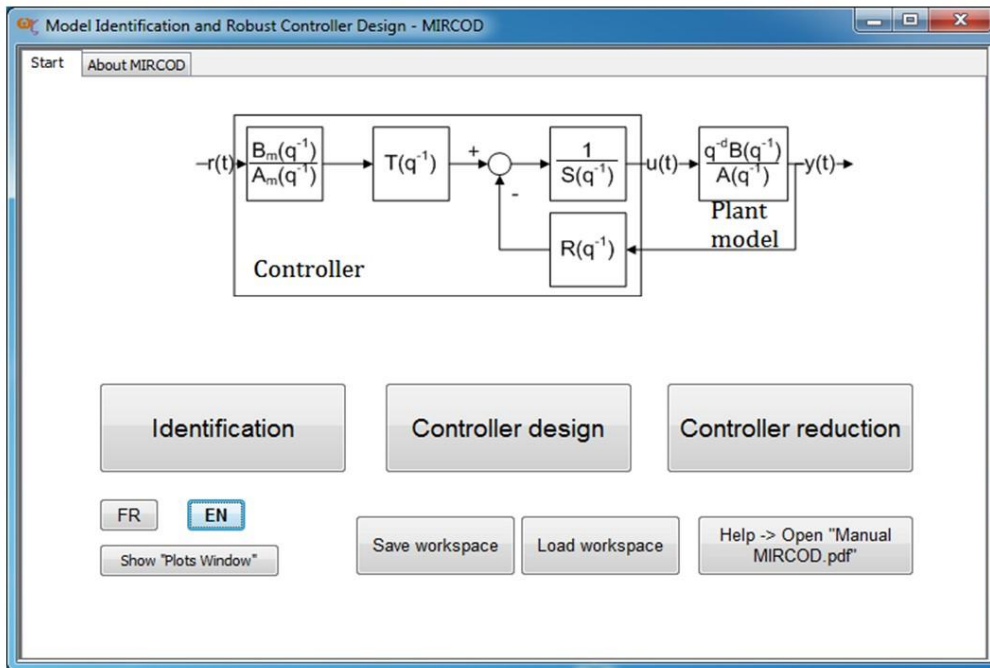


Fig.A.5.1 Fenêtre d'ouverture du Logiciel MIRCOD

MIRCOD est disponible sur le site <http://tudor-bogdan.airimitoiaie.name/mircod.html>. Contacter tudor-bogdan.airimitoiaie@u-bordeaux.fr.

A.5.5. Boîte à outils CLID

La boîte à outils CLID sous Matlab met en œuvre l'ensemble des méthodes d'identification en boucle fermée basées sur l'approche « erreur de sortie en boucle fermée » ainsi que les procédures de validation pour l'identification en boucle fermée (les techniques correspondantes sont décrites dans le chapitre 9).

A.5.6. Boîte à outils REDUC

La boîte à outils REDUC sous Matlab met en œuvre l'ensemble des méthodes de réduction directe de la complexité des régulateurs par estimation en boucle fermée ainsi que les procédures de validation des régulateurs d'ordre réduit (les techniques correspondantes sont décrites dans le chapitre 10 et l'annexe 3).

A.5.4. Présentation du logiciel Optreg

Il s'agit d'un logiciel fonctionnant sous Matlab et destiné au calcul des régulateurs numériques robustes en utilisant la méthode de placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité par optimisation convexe.

Cette technique n'est pas décrite dans cet ouvrage. Elle est présentée dans le manuel du logiciel ainsi que dans les publications [Langer, Landau (1999)] et [Langer, Landau (2002)]. Elle permet une synthèse « automatique » d'un régulateur numérique robuste à partir de la connaissance du modèle, de la spécification des pôles dominants désirés, des gabarits de robustesse désirés pour les fonctions de sensibilité et des parties fixes souhaitées dans le régulateur. Le seul élément à choisir en fin de compte est la complexité du régulateur permettant d'atteindre les spécifications. On commence avec la complexité minimale correspondant au placement de pôles standard et on augmente cette complexité jusqu'au moment où toutes les spécifications sont satisfaites. Ce logiciel est particulièrement adapté pour la synthèse rapide des régulateurs robustes pour les procédés caractérisés par des modèles d'ordre élevé.

A.5.7. Notes et indications bibliographiques

Une description détaillée des différents outils logiciels est fournie par les manuels d'utilisation correspondants.

Pour la synthèse des régulateurs numériques robustes par optimisation convexe voir :

Langer J., Landau I.D., (1999) : « Combined pole placement / sensitivity function shaping method using convex optimization criteria », *Automatica*, 35(6), pp. 1111-1120.

Langer J., Landau I.D., (2002) : « Placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité par optimisation convexe », dans *Conception de commandes robustes*, (J. Bernusson, A. Oustaloup, Eds), chap. 4, Hermes, Paris.

Annexe A.6

Fonctions Scilab¹ et Matlab²

Les différentes fonctions mentionnées dans le tableau ci-dessous sont disponibles sur le site :

<http://www.gipsa-lab.grenoble-inp.fr/~ioandore.landau/identificationandcontrol/>

<i>Fonction Scilab</i>	<i>Fonction Matlab</i>	<i>Description</i>
bezoutd.sci	bezoutd.m	Résout l'équation de Bezout: $P=AS_0H_S+BR_0H_R$
cont2disc.sci	cont2disc.m	Transformée en $z : F(s) \rightarrow F(z)$ avec bloqueur d'ordre zéro
fd2pol.sci	fd2pol.m	Calcule un 2 ^{ème} ordre discret à partir de la fréquence naturelle et l'amortissement d'un 2 ^{ème} ordre continu
omega_dmp.sci	omega_dmp.m	Calcule la fréquence naturelle et l'amortissement d'un 2 ^{ème} ordre continu à partir du temps de montée et du dépassement désirés
predisol.sci	predisol.m	Résout l'équation de calcul d'un prédicteur
nyquist_ol.sci	nyquist_ol.m	Calcule le lieu de Nyquist
filter22.sci	filter22.m	Calcule un filtre dipôle résonant
	ppmaster.m	Calcul des régulateurs numériques par placement de pôles
estorderls.sci	estorderls.m	Estimation de complexité avec le critère des moindres carrés
estorderiv.sci	estorderiv.m	Estimation de complexité avec le critère de variable instrumentale.
nrls.sci	nrls.m	Moindres carrés non récursif
rls.sci	rls.m	Moindres carrés récursif
rels.sci	rels.m	Moindres carrés étendus (récursif)
oloe.sci	oloe.sci	Erreur de sortie (récursif)
foloe.sci	foloe.m	Erreur de sortie avec filtrage des observations
afoloe.sci	afoloe.m	Erreur de sortie avec filtrage adaptatif des observations

¹ Scilab est une marque déposée de l'I.N.R.I.A.

² Matlab est une marque déposée de Mathworks Inc.

xoloe.sci	xoloe.m	Erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu
	olvalid.m	Validation des modèles identifiés en boucle ouverte
	udrls.m	Moindres carrés récursifs sous forme de factorisation U-D
	Clid.zip	Boîte à outils pour identification en boucle fermée
	Reduc.zip	Boîte à outils pour réduction de complexité des régulateurs
	prbs.m/prbs.c	Séquence Binaire Pseudo-Aléatoire
	rst.c	Algorithme de commande RST

Les polynômes (A, B, R, \dots) sont traités dans Matlab sous forme de vecteur des coefficients. Scilab, par contre, utilise l'objet « polynôme » directement. Pour rester cohérent avec Matlab, même dans les fonctions pour Scilab, les polynômes doivent être entrés comme vecteurs des coefficients. Les sorties seront aussi les vecteurs des coefficients et non pas l'objet « polynôme ».

Annexe A.7

Séquence binaire pseudo-aléatoire (programme)

On donne dans ce qui suit une présentation des programmes pour la génération des séquences binaires pseudo aléatoires utilisées pour l'identification. Ces programmes élaborés par Adaptech [ADA 01] sont dans le domaine public et peuvent être utilisés librement (sous réserve de la mention de l'auteur).

A.7.1. Présentation de la génération des SBPA sous forme de programme

SBPA appliquée autour d'un point de fonctionnement.

Description des variables :

N = nombre de registres,

REG(.) = registre à décalage,

K1, K2 = bits à additionner du registre,

NE = nombre d'échantillons à acquérir,

P = entier diviseur de fréquence,

UI = point de fonctionnement du processus,

U(.) = vecteur contenant les entrées (excitations) à envoyer aux processus

AS = amplitude de la SBPA

Programme :

initialisation des bits à additionner

```

K1 = N - 1
K2 = N
IF N=5 THEN K1 = 3
IF N=7 THEN K1 = 4
IF N=9 THEN K1 = 5
IF N=10 THEN K1 = 7
IF N=11 THEN K1 = 9
initialisation du registre à décalage
FOR I=1 TO N
    REG(I) = 1
NEXT I
NE = INT(NE/P) * P      NE = multiple de P
initialisation du vecteur U par groupes de P éléments
FOR K=1 TO NE STEP P
    UIU = 1 or -1 (bit du registre à décalage)
    UIU = -REG(K1) * REG(K2)
    IF N=8 THEN UIU = -REG(2) * REG(3) * REG(4) * REG(8)
    initialisation de P éléments du vecteur U
    FOR J=K TO (K+P-1)
        U(J) = UIU * AS + UI
        (+/-1 * amplitude SBPA) + point de fonctionnement
    NEXT J
    décalage du registre
    FOR I=N TO 2 STEP -1
        REG(I) = REG(I-1)
    NEXT I
    REG(1) = UIU
NEXT K

```

A.7.2. Programme en C++ pour la génération d'une SBPA

```

//-----
// Fonction : Creer_sbpa( )
// Génère la Séquence Binaire Pseudo-Aléatoire dans un tableau.
// Auteur : Adaptech

```



```

//Création du fichier : 14/02/2000
//-----
void Creer_sbpa(float ValUnit, float ValAmpli, float ValDecal, int ValLgReg,
               int ValDivi, int nombre_valeur, float *signal_sbpa )
{
  /* Les paramètres d'entrée sont :
     ValUnit : Valeur initiale du signal
     ValAmpli : Amplitude du signal
     ValDecal : Offset
     ValLgReg : valeur du registre N (entre 2 et 11)
     ValDivi : valeur du diviseur de fréquence p (entre 1 et 3)
     nombre_valeur : nombre de valeur de sbpa =  $p \cdot 2^{(N-1)}$ 

     Après création du signal, le paramètre de sortie est le vecteur signal_sbpa qui contient
     les valeurs de la sbpa à appliquer à chaque instant d'échantillonnage. */
  int k1, k2, i, j, uiu, sbpa[11];

  k1 = ValLgReg-1;
  k2 = ValLgReg;
  if (ValLgReg == 5) {k1 = 3;}
  if (ValLgReg == 7) {k1 = 4;}
  if (ValLgReg == 9) {k1 = 5;}
  if (ValLgReg == 10) {k1 = 7;}
  if (ValLgReg == 11) {k1 = 9;}

  for (i=1; i<=11; i++)
    sbpa[i] = 1;
  i = 1;
  while(i <= nombre_valeur){
    uiu = -sbpa[k1]*sbpa[k2];
    if (ValLgReg == 8)
      uiu = -sbpa[2]*sbpa[3]*sbpa[4]*sbpa[8];
    j = 1;
    while(j<=ValDivi){
      signal_sbpa[i-1] = uiu * ValAmpli + ValDecal + ValUnit;
      i++;
      j++;
    }
    for (j=ValLgReg; j >= 2; j--)
      sbpa[j] = sbpa[j-1];
    sbpa[1] = uiu;
  }
}

```

```
}  
}
```

A.7.3. Bibliographie

Plus de détails sont disponibles dans :

[ADA 01] ADAPTECH, *Guide d'intégration SBPA (séquence binaire pseudo aléatoire)*, Adaptech, 4 Rue de la Tour de l'Eau, Saint Martin d'Hères, France, 2001.


```

//          cinit = valeur initiale de la consigne
//-----

void init_stockage ( float yinit, float uinit, float cinit);

//-----
// Fonction : execute_rst
// Cette fonction doit être appelée à chaque période d'échantillonnage Te
// Variables d'entrée : consigne = consigne à l'instant t
//          mesure = sortie du procédé à l'instant t
// Variable de sortie : commande à appliquer à l'instant t
//-----

float execute_rst (float consigne, float mesure);

//=====
// Dans le cas où il est nécessaire de minimiser le temps entre
// l'acquisition de la mesure et l'envoi de la commande, on peut
// utiliser la décomposition en 3 fonctions présentée ci-dessous:
//=====

void precalcul_rst (void);

float execalcul_rst (float consigne, float mesure);

//=====
// Variables d'entrée : consigne = consigne à l'instant t
//          mesure = sortie du procédé à l'instant t
// Variable de sortie : commande à appliquer à l'instant t
//=====

void postcalcul_rst(float commande);

//=====
// Variable d'entrée : commande appliquée à l'instant t
// A chaque période d'échantillonnage Te, on doit donc réaliser
// l'enchaînement présenté ci-après :
// ...
//   precalcul_rst();
//   ... Acquisition de la mesure (et calcul de la consigne)

```

```

//   execalcul_rst(consigne, mesure);
//   ... Envoi de la commande
//   postcalcul_rst(commande);
//   ...
//=====

//=====
// rst.c
// Description : Algorithme du Régulateur RST
// Equations de base:  $yrt = Bm(q^{-1}) * ur(t) - Am(q^{-1}) * yrt(t-1)$ 
//                    $S(q^{-1}) * u(t) = T(q^{-1}) * yr(t) - R(q^{-1}) * y(t)$ 
// Auteur : ADAPTECH
// Création du fichier : 14/02/2000
//=====

#include "rst.H"

#define Rdeg 2
float R[Rdeg+1] = { 1.332245, -1.905430, 0.781800 };

#define Sdeg 3
float S[Sdeg+1] = { 1.000000, 0.511808, -0.904179, -0.607629 };

#define Tdeg 2
float T[Tdeg+1] = { 0.666840, -0.659073, 0.200848 };

#define Amdeg 2
float Am[Amdeg+1] = { 1., -0.988352, 0.301194 };

#define Bmdeg 1
float Bm[Bmdeg+1] = { 0.187539, 0.125304 };

// Vecteurs utilisés pour le stockage des signaux :
// L'indice i correspond au temps t-i, t étant l'instant actuel
// par exemple, ut[1] représente u(t-1), yt[3] représente y(t-3)

float yt[Rdeg+1], ut[Sdeg+1], yref[Tdeg+1];
float yrt[Amdeg+1], urt[Bmdeg+1];

float compo_continu; // Composante continue du régulateur

```

```

float prepa_cmde;      // Valeur intermédiaire pour le calcul

//-----
// Fonction: init_stockage
// appelée une fois en début de programme afin d'initialiser
// les vecteurs de stockage et la composante continue du régulateur
//-----

void init_stockage ( float yinit, float uinit, float cinit)
{
    int j;
    float sigmaR, sigmaT, sigmaS;

    sigmaR = 0.;
    for (j = 0; j <= Rdeg; j++)
    {
        yt[j] = yinit;
        sigmaR += R[j];
    }
    sigmaS = 0.;
    for (j = 0; j <= Sdeg; j++)
    {
        ut[j] = uinit;
        sigmaS += S[j];
    }
    sigmaT = 0.;
    for (j = 0; j <= Tdeg; j++)
    {
        yreft[j] = cinit;
        sigmaT += T[j];
    }

    // Calcul de la composante continue à prendre en compte dans la sommation,
    // avant la division par S0:
    compo_continu = (sigmaR-sigmaT) * yinit + sigmaS * uinit;

//-----
// Fonction execute_rst
// appelée à chaque période d'échantillonnage
//-----

```

```

float execute_rst (float consigne, float mesure)
{
    float commande;
    float yref; // Sortie du modèle de référence de poursuite

    precalcul_rst();

    yref = calc_ref(consigne);
    commande = calc_cmde(yref, mesure);

    decal_trajref(consigne, yref);
    decal_obser(yref, mesure, commande);

    return commande;
}
//==== VARIANTE en 3 PHASES optimisant les temps de traitement ====
// - precalcul_rst
// - execalcul_rst => /calc_ref /calc_cmde
// - poscalcul_rst => /decal_trajref /decal_obser
//=====

//-----
// Fonction: precalcul_rst
// appelée à chaque période d'échantillonnage
//-----

void precalcul_rst (void)
{
    float somme;
    int j;

    somme = compo_continu;
    for (j=1; j<=Tdeg; j++)
    { somme += T[j]*yref[j]; }
    for (j=1; j<=Rdeg; j++)
    { somme -= R[j]*yt[j]; }
    for (j=1; j<=Sdeg; j++)
    { somme -= S[j]*ut[j]; }
    prepa_cmde = somme;
    return;
}

```

```

}

//-----
// Fonction execalcul_rst
// appelée à chaque période d'échantillonnage
// après l'acquisition des mesures et avant l'envoi de la commande
//-----

float execalcul_rst (float consigne, float mesure)
{
    float commande;

    yt[0] = mesure;
    urt[0] = consigne;
    yref[0] = calc_ref(consigne);
    commande = calc_cmde(yref[0], mesure);
    return commande;
}

//-----
// Fonction: calc_ref
// utilisée par la fonction execalcul_rst
//-----

float calc_ref (float nvcons)

// Calcul de la sortie du modèle de référence, selon :
//  $yrt = Bm \cdot urt - Am \cdot yrt(t-1)$ 
// ATTENTION : la valeur calculée n'est pas stockée dans yrt[0]

{
    int j;
    float somme;
    somme = Bm[0] * nvcons;
    for (j = 1; j <= Bmdeg; j++)
        { somme += Bm[j] * urt[j]; }
    for (j = 1; j <= Amdeg; j++)
        { somme -= Am[j] * yrt[j]; }
    return(somme);
}

```



```

//-----
// Fonction: calc_cmde
// utilisée par la fonction execalcul_rst
//-----

float calc_cmde (float yref, float mesure)
{
    float somme;

    somme = prepa_cmde;
    somme -= R[0]*mesure;
    somme += T[0]*yref;
    somme = somme / S[0];

    return somme;
}

//-----
// Fonction postcalcul_rst
// appelée à chaque période d'échantillonnage
// après l'envoi de la commande
//-----

void postcalcul_rst (float commande)
{
    decal_trajref(urt[0], yref[0]);
    decal_obser(yref[0], yt[0], commande);
    return;
}

//-----
// Fonction: decal_trajref
// utilisée par la fonction postcalcul_rst
//-----

void decal_trajref (float consigne, float yref)
{
    int j;
    for (j=Bmdeg; j>1; j--)
        { urt[j] = urt[j-1]; }
}

```

```

    for (j=Amdeg; j>1; j--)
    { yrt[j] = yrt[j-1]; }

    urt[1] = consigne;
    yrt[1] = yref;
}

//-----
// Fonction: decal_obser
// utilisée par la fonction postcalcul_rst
//-----

void decal_obser(float yref, float mesure, float commande)
{
    int j;
    for (j=Rdeg; j>1; j--)
    { yt[j] = yt[j-1]; }
    for (j=Sdeg; j>1; j--)
    { ut[j] = ut[j-1]; }
    for (j=Tdeg; j>1; j--)

    { yreft[j] = yreft[j-1]; }

    yt[1] = mesure;
    ut[1] = commande;
    yreft[1] = yref;
}

//===== Fin de l'algorithme RST =====

```

A.8.2. Bibliographie

Plus de détails sur les programmes et leur implémentation effective sur différentes cibles (automates programmables, régulateur programmable, carte microcontrôleur, PC superviseur, SNCC) sont disponibles dans :

[ADA 01] ADAPTECH, *Guide d'intégration du régulateur R-S-T sur cibles programmables*, Adaptech, 4 Rue de la Tour de l'Eau, Saint Martin d'Hères, France, 2001.

Annexe A.9

Paramétrisation Youla–Kučera des Régulateurs

A.9.1 Paramétrisation des Régulateurs

La paramétrisation de Youla-Kučera permet de caractériser l'ensemble des régulateurs permettant de stabiliser un modèle donné d'un procédé. Cette paramétrisation a des implications importantes dans le calcul des régulateurs RST.

Considérons le modèle de procédé caractérisé par la fonction de transfert :

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (\text{A.9.1})$$

un régulateur stabilisant $R_0(z^{-1})/S_0(z^{-1})$ appelé aussi “régulateur central” et une fonction de transfert asymptotiquement stable, rationnelle et propre :

$$Q(z^{-1}) = \frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})} \quad (\text{A.9.2})$$

Les pôles de la boucle fermée quand on utilise le “régulateur central” sont définis par les racines du polynôme:

$$P = AS_0 + z^{-d}BR_0 \quad (\text{A.9.3})$$

Paramétrisation Youla – Kucera

Tous les régulateurs rationnels stabilisants pour le procédé $G(z^{-1})$ sont donnés par:

$$\frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})} = \frac{R_0 + AQ}{S_0 - z^{-d}BQ} \tag{A.9.4}$$

Ces régulateurs conduisent à l'expression suivante du polynôme définissant les pôles de la boucle fermée:

$$P = A(\alpha S_0 - \beta z^{-d}B) + z^{-d}B(\alpha R_0 + A\beta) = \alpha(AS_0 + z^{-d}BR_0) \tag{A.9.5}$$

En comparant l'équation (A.9.5) avec l'équation (A.9.3) et tenant compte des hypothèses faites sur $Q(z^{-1})$, il résulte que les pôles de la boucle fermée vont être asymptotiquement stables. On observe aussi que le dénominateur de $Q(z^{-1})$ est présent dans le polynôme caractéristique définissant les pôles de la boucle fermée (*i.e.* ceci permet d'introduire des pôles additionnels de valeur désirée).

La structure d'un régulateur utilisant la paramétrisation de Youla – Kucera est présentée dans la Figure A.9.1.

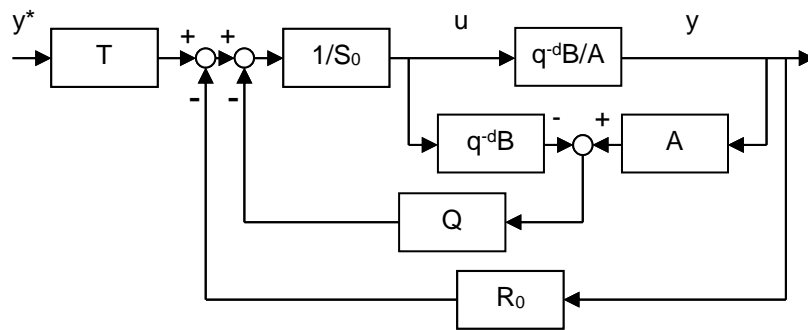


Figure A.9.1. Régulateur RST utilisant la paramétrisation Youla – Kucera

Pour un article de synthèse traitant la paramétrisation de Youla-Kucera voir Anderson (1998).

Nous présenterons brièvement dans ce qui suit les implications de la paramétrisation de Youla-Kučera pour le calcul des régulateurs RST. On suppose que le *régulateur central* a été calculé pour que la boucle fermée soit asymptotiquement stable et l'objectif sera de re-calculer le régulateur pour atteindre certains objectifs mais sans recalculer le *régulateurs central*. Pour ceci nous ajusterons $Q(z^{-1})$ pour atteindre les propriétés désirées pour la boucle fermée. Nous examinerons dans ce qui suit plusieurs situations.

Introduction des pôles auxiliaires (pour la robustesse)

De l'Equation (A.9.5) on voit que les pôles auxiliaires désirés peuvent être introduits en choisissant:

$$Q(z^{-1}) = \frac{1}{\alpha(z^{-1})} = \frac{1}{P_F(z^{-1})} \quad (\text{A.9.6})$$

Paramétrisation Affine des Fonctions de Sensibilité

En utilisant le filtre Q donné dans l'Equation (A.9.2), les fonctions de sensibilité données dans le Chapitre 2, Equations (2.5.14) à 2.5.16 et (2.5.18), vont prendre la forme :

$$\begin{aligned} S_{yp} &= \frac{AS}{P} = \frac{AS_0}{P} - \frac{q^{-d}BA}{P}Q = S_{yp0} - \frac{q^{-d}BA}{P}Q \\ S_{up} &= -\frac{AR}{P} = -\frac{AR_0}{P} - \frac{AA}{P}Q = S_{up0} - \frac{AA}{P}Q \\ S_{yb} &= -\frac{q^{-d}BR}{P} = -\frac{q^{-d}BR_0}{P} - \frac{q^{-d}BA}{P}Q = S_{yb0} - \frac{q^{-d}BA}{P}Q \\ S_{yv} &= \frac{q^{-d}BS}{P} = \frac{q^{-d}BS_0}{P} - \frac{q^{-d}Bq^{-d}B}{P}Q = S_{yv0} - \frac{q^{-d}Bq^{-d}B}{P}Q \end{aligned}$$

(A.9.7)

On distingue deux cas:

$Q = \beta(z^{-1}); \alpha(z^{-1})=1$: ceci permet de calibrer les fonctions de sensibilité en utilisant les coefficients de $\beta(z^{-1})$ sans changer les pôles de la boucle fermée.

$Q = \beta(z^{-1})/\alpha(z^{-1})$: ceci permet de calibrer les fonctions de sensibilité en utilisant les coefficients de $\beta(z^{-1})$ et en modifiant les pôles auxiliaires en utilisant les coefficients du $\alpha(z^{-1})$

Le calibrage automatique des fonctions de sensibilité en tenant compte de la forme affine des fonctions de sensibilité peut être faite en utilisant les techniques d'optimisation convexe. Voir Boyd and Barratt (1991); Rantzer and Megretsky (1994); Langer and Landau (1999).

Introduction et ajustement du Modèle Interne des régulateurs sans changer les pôles de la boucle fermée

Dans le contexte des régulateurs RST, le modèle interne de la perturbation est introduit dans le polynôme H_S (voir Chapitre 3), qui est un facteur du polynôme S. Mais le modèle interne peut être introduit aussi en utilisant la paramétrisation Youla-Kučera. Dans ce cas il faut choisir β tel que:

$$S = S' H_S = S_0 - z^{-d} B \beta \quad (\text{A.9.8})$$

Pour ne pas changer les pôles de la boucle fermée il faut prendre $\alpha(z^{-1})=1$ et $\beta(z^{-1})$ doit satisfaire l'équation polynômiale suivante, résultant de la condition donnée dans l'équation l'Equation (A.9.8) :

$$S'H_S + -z^{-d}B\beta = S_0 \quad (\text{A.9.9})$$

où $z^{-d}B$, H_S et S_0 sont connu et β et S' sont les inconnues. L'ordre du polynôme S_0 est:

$$n_{S_0} \leq n_{H_S} + n_B + d - 1$$

et il résulte que:

$$n_\beta = n_{H_S} - 1; n_{S'} = n_B + d - 1.$$

Ceci permet de déterminer l'ordre et les coefficients du polynôme $\beta(z^{-1}) = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots$. Voir Tsytkin (1997); Landau *et al.* (2005). Dans Landau *et al.* (2005) une procédure adaptative pour l'estimation directe des coefficients de $\beta(z^{-1})$ en présence de perturbations inconnues est présentée.

A.9.2 Références

- Anderson B.D.O. (1998) From Youla-Kučera to identification, adaptive and nonlinear control, *Automatica* vol. 34, 1485-1506.
- Boyd St.P, Barratt C.H. (1991) *Linear controller design. Limits of performance*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Langer J., Landau I.D. (1999) Combined pole placement/sensitivity function shaping method using convex optimization criteria, *Automatica*, vol.35, 1111-1120.
- Rantzer A., Megretski A. (1994) A convex parametrization of robustly stabilizing controllers, *IEEE Trans. Aut. Control*. Vol. 39, pp. 1802-1808.
- Tsytkin Y.Z. (1997) Stochastic discrete systems with internal models, *Journal of Automation and information Sciences*, Vol. 29 pp. 156-161.
- Landau I.D., Constantinescu A., Rey D. (2005) Adaptive narrow band disturbance rejection applied to an active suspension – an internal model approach, *Automatica* vol. 41, no.4.

Annexe A.10

Utilisation de la factorisation U-D pour la mise à jour du gain d'adaptation

A.10.1 La factorization U-D

Le gain d'adaptation matriciel variable donné dans l'Equation (5.2.73) et en principe sensible aux erreurs d'arrondi, en particulier si le nombre d'échantillons à traiter est très élevé (situation typique rencontrée dans les applications temps-réel). L'objectif est de préserver la propriété de matrice définie positive pour la matrice de gain d'adaptation en présence d'erreurs d'arrondi. Ce problème est discuté en détail dans Bierman (1977) où la factorisation $U-D$ a été développée pour assurer la robustesse numérique de la matrice de gain d'adaptation. Dans ce contexte la matrice de gain d'adaptation est réécrite sous la forme :

$$F(t) = U(t)D(t)U(t)^T \quad (\text{A.10.1})$$

où $U(t)$ est une matrice triangulaire supérieure avec tous les éléments sur la diagonale égaux à 1 et $D(t)$ est une matrice diagonale (avec des éléments positifs). Ceci permet à la matrice $F(t)$ de rester définie positive même en présence d'erreurs d'arrondi.

Définissons:

$$\begin{aligned} G(t) &= D(t)V(t) \\ V(t) &= U(t)^T \Phi(t) \\ \beta(t) &= 1 + V(t)^T G(t) \\ \delta(t) &= \frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + V(t)^T G(t) \end{aligned} \quad (\text{A.10.2})$$

et:

$$\Gamma(t) = \frac{U(t)G(t)}{\beta(t)} = \frac{F(t)\Phi(t)}{1 + \Phi(t)^T F(t)\Phi(t)} \quad (\text{A.10.3})$$

L'algorithme de factorisation *U-D* pour la mise à jour du gain d'adaptation est donné ci-dessous.

On initialise $U(0)$ et $D(0)$ à $t=0$. Ceci permet de définir la valeur initiale du gain d'adaptation $F(0) = U(0)D(0)U(0)^T$. A $t+1$, on calcule $\Gamma(t)$ et on met à jour $D(t+1)$ and $U(t+1)$ en effectuant les opérations suivantes :

- On calcule $V(t)$, $G(t)$, $\beta_0 = 1$ et $\delta_0 = \lambda_1(t) / \lambda_2(t)$;
- Pour $j=1$ à n_p (nombre de paramètres) on calcule

$$\begin{aligned} \beta_j(t) &= \beta_{j-1}(t) + V_j(t)G_j(t) \\ \delta_j(t) &= \delta_{j-1}(t) + V_j(t)G_j(t) \\ D_{jj}(t+1) &= \frac{\delta_{j-1}(t)}{\delta_j(t)\lambda_1(t)} D_{jj}(t) \\ \Gamma_j(t) &= G_j(t) \\ M_j(t) &= -\frac{V_j(t)}{\delta_{j-1}(t)} \end{aligned}$$

Si $j=1$ aller à l'étape suivante

Si $j \neq 1$ alors

Pour $i=1$ à $j-1$ on calcule

$$\begin{aligned} U_{ij}(t+1) &= U_{ij}(t) + \Gamma_i(t)M_j(t) \\ \Gamma_i(t) &= \Gamma_i(t) + U_{ij}(t)\Gamma_j(t) \end{aligned}$$

- Pour $i=1$ à n_p on calcule

$$\Gamma_i(t) = \frac{1}{\beta_{n_p}(t)} \Gamma_i(t)$$

Une borne inférieure pour le gain d'adaptation s'obtient en maintenant les éléments de la matrice $D(t)$ au-dessus d'un seuil spécifié.

L'algorithme U-D est mis en œuvre par la fonction: *udrls.m* (MATLAB®) (disponible sur le site web du livre).

A.10.2 Références

- Bierman, G. (1977) Factorization methods for discrete sequential estimation, Academic Press, New York.
- Landau I.D., Lozano R., M'Saad M. (1997) Adaptive control, Springer, London, U.K.

Bibliographie

- [ADA 90] ADAPTECH, *La Lettre d'Adaptech*, 4 rue du Tour de L'Eau, St. Martin d'Hères, France, 1990-2001.
- [ADA 96a] ADAPTECH, *WinPIM – Progiciel d'identification des modèles de procédés*, 4 Rue du Tour de l'Eau, St. Martin d'Hères, France, 1996.
- [ADA 96b] ADAPTECH, *WinREG – Progiciel de calcul et optimisation des régulateurs numériques*, 4 Rue du Tour de l'Eau, St. Martin d'Hères, France, 1996.
- [ADA 97a] ADAPTECH, *WinTRAC – Progiciel d'acquisition et de régulation numérique R-S-T temps réel*, Adaptech, St. Martin d'Hères, France, 1997.
- [ADA 97b] ADAPTECH, *WinPIM-BF – Module logiciel d'identification en boucle fermée*, 4 rue de la Tour de l'Eau, St. Martin d'Hères, France, 1997.
- [ADA 98] ADAPTECH, *Optreg – Software for automated design of robust digital controllers using convex optimization* (for Matlab), Adaptech, St. Martin d'Hères, France, 1998.
- [ADA 99a] ADAPTECH, *REDUC – Controller order reduction by closed-loop identification* (Toolbox for Matlab), Adaptech, 4 rue de la Tour de l'Eau, St. Martin d'Hères, France, 1999.
- [ADA 99b] ADAPTECH, *CLID – Plant model identification in closed loop* (Toolbox for Matlab), 4 rue de la Tour de l'Eau, St. Martin d'Hères, France, 1999.
- [ADA 01a] ADAPTECH, *Guide d'intégration du régulateur R-S-T sur cibles programmables*, 4, Rue de la Tour de l'Eau, St. Martin d'Hères, France, 2001.
- [ADA 01b] ADAPTECH, *Guide d'intégration SBPA (séquence binaire pseudo aléatoire)*, Adaptech, 4 Rue de la Tour de l'Eau, Saint Martin d'Hères, France, 2001.
- [AND 89] ANDERSON B.D.O., LIU Y., « Controller reduction: concepts and approaches », *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 34, n° 8, p. 802-812, 1989.
- [AND 93] ANDERSON B.D.O., « Controller reduction: moving from theory to practice », *IEEE Control Magazine*, vol. 13, p. 16-25, 1993.

- [AND 71] ANDERSON B.D.O., MOORE J.B., *Linear Optimal Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- [AST 70] ASTRÖM K.J., *Introduction to Stochastic Control Theory*, Academic Press, New York, 1970.
- [AST 95] ASTRÖM K.J., HÄGGLUND I., *PID Controllers Theory, Design and Tuning*, 2^e édition ISA, Research Triangle Park, N.C., Etats-Unis, 1995.
- [AST 95] ASTRÖM K.J., WITTENMARK B., *Adaptive Control*, 2^e édition, Addison Wesley, Reading, Mass., 1995.
- [AST 97] ASTRÖM K.J., WITTENMARK B., *Computer Controlled Systems - Theory and Design*, 3^e édition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1997.
- [BEN 71] BENDAT J.S., PIERSON A.G., *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, John Wiley, 1971.
- [BET 76] BETHOUX G., Approche unitaire des méthodes d'identification et de commande adaptative des procédés dynamiques, Thèse de 3^e cycle, Institut National Polytechnique de Grenoble, juillet 1976.
- [BOU 91] BOURLES H., IRVING E., « La méthode LQG/LTR : une interprétation polynomiale, temps continu/temps discret », *RAIRO-APII*, vol. 25, p. 545-568, 1991.
- [BOX 70] BOX G.E.P., JENKINS G.M., *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden Day, San Francisco, 1970.
- [CAN 86] CANDY J.V., *Signal Processing - The Model Based Approach*, MacGraw Hill, New York, 1986.
- [CLA 75] CLARKE D.W., GAWTHROP P.J., « A Self-Tuning Controller », *Proc. IEEE*, vol. 122, p. 929-934, 1975.
- [CLA 79] CLARKE D.W., GAWTHROP P.J., « Self-tuning Control », *Proc. IEEE*, vol. 126, p. 633-640, 1979.
- [CON 01] CONSTANTINESCU A., Commande robuste et adaptative d'une suspension active, Thèse docteur INPG, Laboratoire d'automatique de Grenoble (INPG/CNRS), décembre 2001.
- [DOY 92] DOYLE J.C., FRANCIS B.A., TANENBAUM A.R., *Feedback Control Theory*, MacMillan, New York, 1992.
- [DUG 80] DUGARD L., LANDAU I.D., « Recursive Output Error Identification Algorithms: Theory and Evaluation », *Automatica*, vol. 16, p. 443-462, 1980.
- [DUG 88] DUGARD L., LANDAU I.D., *Commande Adaptative - Méthodologie et Applications*, Hermès, Paris, 1988.
- [DUO 93] DUONG H.N., Identification structurelle et paramétrique des systèmes linéaires monovariabiles et multivariabiles, Thèse docteur, Laboratoire d'automatique de Grenoble (INPG/CNRS), 1993.
- [DUO 96] DUONG H.N., LANDAU I.D., « An I.V. based criterion for model order selection », *Automatica*, vol. 32, n^o 6, p. 909-914, 1996.

- [EYK 74] EYKHOFF P., *System Identification: Parameter and State Estimation*, John Wiley, Londres, 1974.
- [FEN 93a] FENOT C., ROLLAND F., VIGNERON G., LANDAU I.D., « Open loop adaptive feedback control of deposited zinc in hot dip galvanizing », *Control Engineering Practice*, vol. 1, n° 5, 1993.
- [FEN 93b] FENOT C., VIGNERON G., ROLLAND F., LANDAU I.D., « Régulation d'épaisseur de dépôt de zinc à Sollac-Florange », *Revue Générale d'Electricité*, n° 11, p. 25-30, décembre 1993.
- [FOU 85] FOULARD C., GENTIL S., SANDRAZ J.P., *Commande et Régulation par Calculateur*, Eyrolles, Paris, 1985.
- [FRA 86] FRANKLIN G., POWELL J.D., *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1986.
- [FRA 90] FRANKLIN G.F., POWELL J.D., WORKMAN M.L., *Digital Control of Dynamic Systems*, 2^e édition, Addison Wesley, Reading, Mass., 1990.
- [GEV 93] GEVERS M., « Towards a joint design of identification and control », dans *Essays in Control*, H.L. Trentelman, J.C. Willems (Eds.), Birkhäuser, Boston, Etats-Unis, p. 111-152, 1993.
- [GIL 67] GILLES J.Ch., DECAULNE P., PELLEGRIN M., *Dynamique de la Commande Linéaire*, Dunod, Paris, 1967.
- [GOO 77] GOODWIN G.C., PAYNE R.L., *Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis*, Academic Press, New York, 1977.
- [GOO 84] GOODWIN G.C., SIN K.S., *Adaptive Filtering Prediction and Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
- [HOG 70] HOGG R., GRAIG A., *Introduction to Mathematical Statistics*, MacMillan, New York, 1970.
- [ISE 80] ISERMANN R., « Practical aspects of process identification », *Automatica*, vol. 16, p. 575-587, 1980.
- [ISE 81] ISERMANN R. (Ed.), « Special Issue on System Identification », *Automatica*, vol. 17, n° 1, 1981.
- [KAI 80] KAILATH T., *Linear systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
- [KAR 98] KARIMI A., LANDAU I.D., « Comparison of the closed loop identification methods in terms of the bias distribution », *Systems and Control Letters*, vol. 34, p. 159-167, 1998.
- [KEL 86] KELLY R., Quelques résultats théoriques et pratiques sur la commande adaptative, Thèse docteur ingénieur, INPG, janvier 1986.
- [KUO 80] KUO B., *Digital Control Systems*, Holt Saunders, Tokyo, 1980.
- [KUO 91] KUO B.C., *Automatic Control Systems* (6^e édition), Prentice Hall, New Jersey, 1991.

- [KWA 94] KWAKERNAAK H., « La commande robuste : optimisation à sensibilité mixte » dans *La robustesse*, A. Oustaloup (Ed.), Hermès, Paris, p. 75-162, 1994.
- [LAN 75] LANDAU I.D., *Systèmes non linéaires*, Notes de cours, Laboratoire d'automatique, ENSGP, Grenoble, 1975.
- [LAN 79] LANDAU I.D., *Adaptive control – the model reference approach*, Dekker, New York, 1979.
- [LAN 81] LANDAU I.D., « Model Reference Adaptive Controllers and Stochastic Self-tuning Regulators, A Unified Approach », *Trans. ASME, J. of Dyn. Syst. Meas. and Control*, vol. 103, n° 4, p. 404, 416, 1981.
- [LAN 82] LANDAU I.D., « Near Supermartingales for Convergence Analysis or Recursive Identification and Adaptive Control Schemes », *Int J. of Control*, vol. 35, p. 197-226, 1982.
- [LAN 83] LANDAU I.D., *Lectures Notes on Adaptive Control*, University of California, Continuing Education in Engineering, Berkeley, 1983.
- [LAN 84] LANDAU I.D., « A Feedback System Approach to Adaptive filtering », *IEEE Trans. on Information Theory*, avril 1984.
- [LAN 86] LANDAU I.D., « La Commande Adaptative : Un Tour Guidé » dans *Commande adaptative - Aspects pratiques et théoriques*, Landau, Dugard (Eds.), Masson, Paris, 1986.
- [LAN 89] LANDAU I.D., « Adaptive Control - Robustness and Performance Enhancement », *Actes du 3^e Symposium International IFAC Adaptive Systems in Control and Signal Processing*, Glasgow, avril 1989.
- [LAN 93] LANDAU I.D., « Evolution of Adaptive Control », *ASME Transactions, Journal DSMC*, vol. 115, n° 2, p. 381-391, juin 1993.
- [LAN 95] LANDAU I.D., « Robust digital control of systems with time delay (the Smith predictor revisited) », *Int. J. of Control*, vol. 62, p. 325-347, 1995.
- [LAN 01a] LANDAU I.D., « Identification in closed loop: a powerful design tool (better models, simple controllers) », *Control Engineering Practice*, vol. 9, n° 1, p. 51-65, 2001.
- [LAN 01b] LANDAU I.D., « Les bases de l'identification des systèmes », dans *Identification des Systèmes*, I.D. Landau, A. Bensançon-Voda (Eds.), p. 19-130, Hermès, Paris, 2001.
- [LAN 92] LANDAU I.D., CYROT Ch., REY D., Robust control design using the combined pole placement sensitivity function shaping method, Note interne, Laboratoire d'automatique de Grenoble, ENSIEG, n° 92-194, Grenoble, 1992.
- [LAN 86] LANDAU I.D., DUGARD L., *Commande adaptative - Aspects pratiques et théoriques*, Masson, Paris, 1986.
- [LAN 97a] LANDAU I.D., KARIMI A., « An output error recursive algorithm for unbiased identification in closed loop », *Automatica*, vol. 33, n° 8, p. 933-938, 1997.
- [LAN 97b] LANDAU I.D., KARIMI A., « Recursive algorithms for identification in closed-loop – a unified approach and evolution », *Automatica*, vol. 33, n° 8, p. 1499-1523, 1997.

- [LAN 98] LANDAU I.D., KARIMI A., « Robust digital control using pole placement with sensitivity function shaping method », *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, vol. 8, p. 191-210, 1998.
- [LAN 01a] LANDAU I.D., KARIMI A., « A unified approach to closed-loop plant identification and direct controller reduction », *Proceedings European Control Conference 2001 (ECC01)*, Porto, Portugal, septembre 2001.
- [LAN 01b] LANDAU I.D., KARIMI A., « Identification des modèles de procédé en boucle fermée », dans *Identification de systèmes*, I.D. Landau, A. Besançon-Voda (Eds.), p. 213-244, Hermès, Paris, 2001.
- [LAN 01] LANDAU I.D., KARIMI A., CONSTANTINESCU A., « Direct controller reduction by identification in closed loop », *Automatica*, vol. 37, n° 11, p. 1689-1702, 2001.
- [LAN 96] LANDAU I.D., LANGER J., REY D., BARNIER J., « Robust control of a 360° flexible arm using the combined pole placement/sensitivity function shaping method », *IEEE Trans. on Control Systems Tech.*, vol. 4, n° 4, p. 369-383, 1996.
- [LAN 81] LANDAU I.D., LOZANO R., « Unification of Discrete-Time Explicit Model Reference Adaptive Control Designs », *Automatica*, vol. 12, p. 593-611, 1981.
- [LAN 97] LANDAU I.D., LOZANO R., M'SAAD M., *Adaptive Control*, Springer, Londres, 1997.
- [LAN 86] LANDAU I.D., M'SIRDI N., M'SAAD M., « Techniques de modélisation récursives pour l'analyse spectrale paramétrique adaptative », *Traitement du Signal*, vol. 3, p. 183-204, 1986.
- [LAN 93] LANDAU I.D., ROLLAND F., « Identification and digital control of electrical drives », *Control Engineering Practice*, vol. 1, n° 3, 1993.
- [LAN 99] LANGER J., CONSTANTINESCU A., « Pole placement design using convex optimization criteria for the flexible transmission benchmark », *European Journal of Control*, vol. 5, n° 2-4, p. 193-207, 1999.
- [LAN 96] LANGER J., LANDAU I.D., « Improvement of robust digital control by identification in closed loop. Application to a 360° flexible arm », *Control Engineering Practice*, vol. 8, n° 4, p. 1079-1088, 1996.
- [LAN 99] LANGER J., LANDAU I.D., « Combined pole placement/sensitivity function shaping using convex optimization criteria », *Automatica*, vol. 35, p. 1111-1120, 1999.
- [LAN 02] LANGER J., LANDAU I.D., « Placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité par optimization convexe », dans *Conception de commandes robustes*, J. Bernusson, A. Oustaloup (Eds.), chap. 4, Hermès, Paris, 2002.
- [LJU 99] LJUNG L., *System Identification - Theory for the User*, 2^e édition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1999.
- [LJU 83] LJUNG L., SÖDERSTRÖM T., *Theory and Practice of Recursive Identification*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1983.
- [LON 95] LONGCHAMP R., *Commande numérique de systèmes dynamiques*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1995.

- [LOZ 82] LOZANO R., LANDAU I.D., « Quasi-direct adaptive control for nonminimum phase systems », *Transactions ASME, Journal of DSMC*, vol. 104, n° 4, p. 311-316, décembre 1982.
- [MAT 98] MATHWORKS, *Identification toolbox for Matlab*, The Mathworks Inc., Mass., Etats-Unis, 1998.
- [MSA 91] M'SAAD M., LANDAU I.D., « Adaptive Control: An overview », *Actes du Symposium International IFAC ADCHEM 91*, p. 3-11, Toulouse, 1991.
- [NAR 73] NARENDRA K.S., TAYLOR J.H., *Frequency Domain Criteria for Absolute Stability*, Academic Press, New York, 1973.
- [OGA 90] OGATA K., *Modern Control Engineering* (2^e édition), Prentice Hall, New Jersey, 1990.
- [OGA 87] OGATA K., *Discrete-Time Control Systems*, Prentice Hall, New Jersey, 1987.
- [PRE 92] PRESS W.H., VETTERLING W.T., TEUKOLSKY S., FLANERY B., *Numerical recipes in C (The art of scientific computing)*, 2^e édition, Cambridge University Press, Cambridge, Mass., 1992.
- [PRO 01] PROCHAZKA. H., LANDAU I.D., Pole placement with sensitivity function shaping using 2 zeros/2 poles digital band-stop filters, Note Interne, LAG (INPG), Grenoble, octobre 2001.
- [RIC 91] RICHALET J., *Pratique de l'identification*, Hermès, Paris, 1991.
- [ROL 91] ROLLAND F., LANDAU I.D., « Pour mieux réguler le PC va vous aider », *Mesures*, p. 71-73, décembre 1991.
- [SEV 73] SEVELY Y., *Systèmes et Asservissements Linéaires Echantillonnés*, Dunod, Paris, 1973.
- [SHI 79] SHINSKEY F.G., *Process Control Systems*, McGraw Hill, New York, 1979.
- [SÖD 83] SÖDERSTRÖM T., STOICA P., « Instrumental variable methods for system identification », *Lectures Notes in Control and Information Sciences*, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [SÖD 89] SÖDERSTRÖM T., STOICA P., *System Identification*, Prentice Hall International, Hertfordshire, 1989.
- [SOL 79] SOLO V., « The Convergence of A.M.L. », *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-24, p. 958-963, 1979.
- [SUN 88] SUNG H.K., HARA S., « Properties of sensitivity and complementary sensitivity functions in single-input, single-output digital systems », *Int. J. of Cont.*, vol. 48, n° 6, p. 2429-2439, 1988.
- [TAK 70] TAKAHASHI Y., RABINS M., AUSLANDER D., *Control*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1970.
- [VAN 87] VAN DEN BOSSCHE E., Etude et commande adaptative d'un bras manipulateur flexible, Thèse docteur-ingénieur, INPG, 1987.

- [VAN 86] VAN DEN BOSSCHE E., DUGARD L., LANDAU I.D., « Modelling and Identification of a Flexible Arm », *Proceedings A.C.C.*, Seattle, Etats-Unis, 1986.
- [VAN 93] VAN DEN HOF P., SHRAMA R., « An indirect method for transfer function estimation from closed loop data », *Automatica*, vol. 29, n° 6, p. 1523-1528, 1993.
- [VIE 91] VIEILLARD J.P., « Machine automatique pour la fabrication de câbles torsadés téléphoniques », *La Lettre d'Adaptech*, n° 2, p. 1-2, Adaptech, St. Martin d'Hères, France, 1991.
- [VIG 91] VIGNERON G., Etude et réalisation d'une régulation auto-adaptative d'épaisseur de zinc sur une ligne de galvanisation, Mémoire d'ingénieur CNAM, Metz, 1991.
- [VIN 93] VINNICOMBE G., « Frequency domain uncertainty and the graph topology », *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 38, n° 9, p. 1371-1383, 1993.
- [VOD 95a] VODA A., LANDAU I.D., « A method for the auto-calibration of PID controllers », *Automatica*, n° 2, 1995.
- [VOD 95b] VODA A., LANDAU I.D., « The auto-calibration of PI controllers based on two frequency measurements », *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 9, n° 5, p. 395-422, 1995.
- [WIR 91] WIRK G.S., *Digital Computer Systems*, MacMillan, Londres, 1991.
- [YOU 69] YOUNG P.C., « An Instrumental Variable Method for Real Time Identification of a Noisy Process », *Automatica*, vol. 6, p. 271-288, 1969.
- [YOU 79] YOUNG P.C., JAKEMAN A.J., « Refined Instrumental Variable Methods of Recursive Time Series Analysis », Part I, Single-input, Single-output Systems, *Int. J. of Control*, vol. 29, p. 1-30, 1979.
- [YOU 91] YOUNSI A., Nouvelle génération de banc d'essais d'embrayages, Mémoire d'ingénieur CNAM, Paris, 1991.
- [ZAM 66] ZAMES G., « On the input-output stability of time-varying non linear feedback systems », *IEEE-TAC*, vol. AC-11, p. 228-238, p. 445-476, avril-juillet 1966.
- [ZHU 98] ZHU K., *Essentials of robust control*, Prentice Hall, New Jersey, Etats-Unis, 1998.
- [ZIE 42] ZIEGLER J.G., NICHOLS N.B., « Optimum Settings for Automatic Controllers », *Trans. ASME*, vol. 64, p. 759-768, 1942.

Index

A

acquisition des données 337
action
 dérivée 56
 intégrale 55, 56
aérotherme 356
algorithme
 d'adaptation paramétrique 264,
 266, 272
 du gradient 262
 d'estimation récursive 268
approche
 directe 473
 indirecte 472
aspect pratique 337
asymptotiquement stable 28, 83
autocorrélation 312

B

bande passante 31
biais 289
bloqueur d'ordre zéro (BOZ) 61, 64
boucle ouverte 43
bras manipulateur souple 425
bruit blanc
 discret 219
 gaussien 220

C

cercle de rayon unitaire 77
cloche de Gauss 493
coefficient
 d'amortissement 34
 de contraction 306
colonne à distiller 361
commande
 à modèle interne 171
 par calculateur 61
constante de temps T 24
convertisseur
 analogique-numérique (CAN)
 61, 63
 numérique/analogique 383
 numérique-analogique (CNA)
 61
covariance 220
critère
 de stabilité 29, 83, 107
 de stabilité de Nyquist 47
 de validation 323
 pratique de validation 312

D

densité
 de probabilité 495

- spectrale 222, 225, 226, 487
- dépassement maximal 30
- détermination du retard 346
- discrétisation 64
- dispositif antisaturation 384
- distance de Vinnicombe 458, 482, 514
- domaine
 - de convergence 304
 - domaine temporel 23, 70
 - de stabilité 28
 - fréquentiel 25, 75

E

- écart type 220
- échelon 492
- effet de la saturation 385
- élimination de la composante continue 342
- équation
 - aux différences 71
 - d'erreur 293
 - différentielle 23
 - récurrente 71
- ergodique 219
- erreur
 - d'adaptation 319
 - d'entrée de la boucle fermée 477
 - de prédiction 229, 23
 - de prédiction résiduelle 311
 - de sortie (prédiction) résiduelle 322
 - de sortie 314, 320
 - de sortie avec modèle de prédiction étendu 301, 307, 311
 - de sortie en boucle fermée 449
 - statique 42, 94
 - statique nulle 95
- estimation
 - de la complexité d'un modèle 324
 - des paramètres 256

- des régulateurs d'ordre réduit 475

F

- facteur
 - de résonance 31
 - d'oubli fixe 276
 - d'oubli variable 277
- filtrage
 - antirepliement 340
 - sur l'action dérivée 56
- filtre antirepliement 67
- fonction
 - d'autocorrélation 220
 - de répartition 495
 - de sensibilité bruit de mesure-sortie 102
 - de sensibilité complémentaire 102
 - de sensibilité perturbation-entrée 101
 - de sensibilité perturbation-sortie 44
 - de transfert 26, 43
 - de transfert strictement réelle positive 310, 319
 - des mesures 259
 - de transfert échantillonnées 78
- forme récursive 301
- fréquence
 - complexe 25
 - d'échantillonnage 64, 68
 - de coupure 31
 - de Nyquist 66

G

- gain
 - constant 279
 - d'adaptation 265, 275
 - décroissant 276
 - initial 279
 - proportionnel 55
 - statique 42, 84, 95
- galvanisation 431

gaussien 219
 gestion de fichiers de données 524
 GRAP 439

H, I

hodographe 45
 horizon d'initialisation 306, 316
 identification 259, 519
 d'erreur de sortie en boucle
 fermée 447
 d'un moteur à courant continu
 367
 en boucle fermée 445
 en vue 371
 paramétrique sous forme
 récursive 260
 impulsion de Dirac 217, 491
 intégrateur numérique 75

L

lemme d'inversion matricielle 272
 lieu de Nyquist 45, 105
 logiciel 523

M

marge
 de gain 47, 109
 de module 50, 110
 de phase 48, 109
 de retard 49, 110
 de stabilité généralisée 511, 513
 matrice définie positive 266
 maximum de vraisemblance récursif
 301, 304
 méthode d'erreur de sortie
 en boucle fermée avec filtrage
 adaptatif 452
 étendue en boucle fermée 453
 méthode
 d'identification 301, 314
 de type I 310
 de type II 321
 mise à échelle 344
 modèle

ajustable de prédiction 261
 de commande 253
 de connaissance 254
 de perturbation 218
 de perturbation aléatoire 222
 dynamique 253
 échantillonné 70, 79
 échantillonné à paramètres
 ajustables 258
 échantillonné des procédés avec
 bloqueur 84
 interne partiel 178
 mathématique 254
 non paramétrique 254
 paramétrique 254
 paramétrique continu 256
 continu 23
 moindre carré
 étendu 301, 302
 généralisé 301, 308
 récursif 272
 moteur à courant continu 367
 moyenne mobile (ajustée) 223

O, P

opérateur
 de retard 73
 de transfert échantillonné 80
 performance désirée 132, 380
 perturbation aléatoire 217, 288
 PID numérique 518
 placement des pôles 147
 plan de la variable complexe s 28
 plan z 77
 pôle 26, 83
 poursuite 156, 167, 175
 à objectifs indépendants 160
 de la commande en boucle
 fermée 475
 de la sortie en boucle fermée
 478
 et régulation à variance
 minimale 231

- et régulation à variance
 - minimale généralisée 246
- prédicteur type erreur de sortie 317
- procédé
 - contenant un intégrateur pur 343, 454
 - discrétisé 62
- processus
 - aléatoire 219
 - ARMA 226
 - ARMAX 227
 - autorégressif 225
 - stochastique 219
- progiciel 523
- pulsation naturelle 34

R

- rampe 492
- réalisation 219
- réduction de complexité des régulateurs 471
- régulateur
 - d'ordre réduit 480
 - numérique PID 2 140
 - numérique R-S-T 537
 - PI 53
 - PI numérique 98
 - PID 55
 - PID numérique 1 127
 - PID numérique 127
 - réduit 473
 - numérique 99
- régulation 431
 - à objectifs indépendants 160
 - d'un moteur à courant continu 405
 - numérique 521
 - numérique d'un aérotherme 398
 - numérique en cascade de la position 409
- repliement du spectre 66
- réponse
 - fréquentielle 31
 - impulsionnelle 525

- temporelle 29
- retard
 - de calcul 382
 - fractionnaire 87
 - pur 37
 - pur multiple entier de la période d'échantillonnage 80
- robustesse 109
- R-S-T 99

S

- séquence
 - binaire pseudo-aléatoire 284, 533
 - d'entrée 280
- simulation 24, 525
- sortie généralisée 247
- spécification des performances 132
- spectre du signal 66
- stabilité 27
 - des systèmes échantillonnés 82
- strictement réelle positive 304, 451, 452
- suspension active 482
- système
 - avec retard 37
 - échantillonné 517
 - échantillonné en boucle fermée 93
 - en boucle fermée 39

T

- temps
 - d'établissement 30
 - de montée 29
 - discret normalisé 71
- test
 - d'indépendance ou de blancheur 221
 - de blancheur 311
 - de décorrélation 322
 - de validation 258
- trace constante 278
- transformée 493

transmission souple 371, 416, 462
travaux pratiques 517

V

valeur

finale *Voir* VF
moyenne 219, 220

validation 458

des modèles identifiés en
boucle fermée 455
du modèle 260
du modèle identifié 255

variable

aléatoire 219, 220
instrumentale 293, 314
instrumentale à modèle
auxiliaire 314

variance 219

vecteur

des observations 259
des paramètres 259, 261

VF 30

Z

zéro 26, 88

instable 88
stable 161