



**HAL**  
open science

# MODELISATION DES CHOCS BIOMERIQUEES EN ASSURANCE DE PERSONNES

Stéphane Loisel, Anani Olympio, Jérémy Zozime

► **To cite this version:**

Stéphane Loisel, Anani Olympio, Jérémy Zozime. MODELISATION DES CHOCS BIOMERIQUEES EN ASSURANCE DE PERSONNES. 2020. hal-02563112

**HAL Id: hal-02563112**

**<https://hal.science/hal-02563112>**

Preprint submitted on 5 May 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# MODELISATION DES CHOCS BIOMERIQUES EN ASSURANCE DE PERSONNES

Stephane LOISEL<sup>1</sup>

Université de Lyon, Université de Lyon 1, Institut de Science Financière et d'Assurance, Laboratoire SAF

Anani OLYMPIO \*<sup>2</sup>

CNP Assurances

Université de Lyon, Université de Lyon 1, Institut de Science Financière et d'Assurance, Laboratoire SAF

Jérémy ZOZIME\*\*<sup>3</sup>

Actuaire membre de l'Institut des Actuaire

## Résumé

Les Actes Délégués de la norme prudentielle Solvabilité 2, ne fournissent pas de méthodes de calibrage des paramètres spécifiques à l'entreprise (*USP*) pour les risques d'incapacité et de morbidité du module Santé assimilable à la vie « *Health SLT* ». L'objectif de cet article est de proposer une approche cohérente d'estimation de ces chocs d'expérience, comme alternative aux paramètres arbitraires fixés dans la Formule Standard. Elle permet de calibrer ces paramètres à partir d'un processus autorégressif d'ordre 1 ou du modèle Log-normal. Nous retenons le cadre théorique de la Crédibilité à Variation Limitée pour gérer les conditions de volumétrie et d'historiques suffisants requises sur les données. A titre d'illustration, nous appliquons notre approche aux risques d'incidence et de maintien de la garantie d'arrêt de travail d'un portefeuille de prêts d'un assureur leader du marché. Les bases de gestion utilisées possèdent plus de 20 années d'historiques et une taille de plus de 12 millions de polices. Les résultats sont prometteurs car ils conduisent à une réduction non négligeable du SCR de souscription. Ils sont intéressants en termes d'optimisation financière dans un cadre *Best Estimate*.

**Mots clés :** *USP*, *best estimate*, fonds propres économiques, SCR, arrêt de travail, incidence, maintien, rétablissement, série temporelle, modèle Log-normal, facteur de crédibilité, TCVL, Formule Standard.

---

<sup>1</sup> Professeur des universités, HDR et directeur du laboratoire SAF (EA n°2429), Université de Lyon, Université de Lyon 1, Institut de Science Financière et d'Assurance (ISFA), [stephane.Loisel@univ-lyon1.fr](mailto:stephane.Loisel@univ-lyon1.fr)

<sup>2</sup> PhD, Actuaire certifié de l'Institut des Actuaire, expert ERM CERA, responsable de la recherche et prospective stratégique chez CNP assurances, chercheur associé au laboratoire SAF (EA n°2429), [aaolympio@yahoo.fr](mailto:aaolympio@yahoo.fr)

<sup>3</sup> Actuaire qualifié de l'Institut des Actuaire, [jeremy.zozime@gmail.com](mailto:jeremy.zozime@gmail.com)

## 1. Introduction

Sous la norme Solvabilité 2, la Formule Standard n'est pas la seule façon de déterminer le capital économique. D'une part, les compagnies peuvent, si elles le souhaitent, développer un modèle interne total. Toujours dans le respect des principes de la norme, ces modèles sont construits de manière à mieux refléter les profils de risques spécifiques aux entités. D'autre part, une approche alternative consiste à mettre en place un modèle interne partiel permettant de déroger à la Formule Standard pour certains de ses modules de risques et matrices de corrélations. Enfin, pour le calcul du besoin de fonds propres lié au risque de réserve et de prime du module de souscription non-vie, l'*European Insurance and Occupational Pensions Authority* (EIOPA) laisse la possibilité aux compagnies d'utiliser leurs propres données et expériences pour le calibrage des paramètres spécifiques à leurs entités. Il s'agit des *Undertaking Specific Parameters* également connu sous le nom d'USP non-vie (*Undertaking Specific Parameters*, cf. 7. de l'article 104 de la directive Solvabilité II et la section SCR.10 des spécifications techniques du QIS5).

Dans ce contexte, les méthodes utilisées doivent s'adapter aux contraintes propres à la norme. L'estimation des réserves est réalisée à un horizon d'un an plutôt qu'à l'ultime. De manière opérationnelle, les textes prévoient, par exemple pour les risques non-vie, l'utilisation de l'expérience du portefeuille pour l'estimation des paramètres de calcul du SCR (*Solvency Capital Requirement*). Elle est autorisée pour les risques de tarification (ou *premium risk*) et de provisionnement (ou *reserve risk*) des modules Non-vie et Santé non assimilées à la vie (*Health NSLT*). Elle est aussi autorisée pour le risque de révision des modules Vie et Santé assimilables à la vie. Enfin, elle l'est pour le facteur d'ajustement dans le cadre de la réassurance non proportionnelle. L'utilisation totale ou partielle d'un modèle interne est conditionnée à l'autorisation du superviseur local à charge de la compagnie. L'entreprise soumet à son superviseur un dossier complet contenant des justificatifs sur son modèle à une maille assez fine (segment, unité d'affaires, produits, groupe de contrats). Elle doit justifier de la pertinence des choix des périmètres concernés (entité solo ou groupe). Elle doit prouver l'adéquation des modèles et des méthodes eu égard à son profil de risque, de la qualité et de la suffisance des données utilisées lors des calibrages des paramètres de calculs du SCR.

Contrairement au module Santé non assimilable à la vie (*Health NSLT*), la norme ne propose pas de méthodologie USP pour le module Santé assimilable à la vie (*Health SLT*). Or, il apparaît que ce module Santé recouvre une hétérogénéité importante de situations. Il regroupe notamment des contrats collectifs et des contrats individuels, avec et sans sélection à l'entrée, des produits de prêts (contrats emprunteurs) et de prévoyance, des engagements de durée très variable. Ainsi, un paramétrage de chocs forfaitaires comme proposé par la Formule Standard paraît inadapté pour capter la réalité économique des risques catégorisés dans ce module Santé assimilable à la vie. L'objectif principal de cet article est de proposer un cadre méthodologique cohérent et une illustration opérationnelle de calibrage des USP du risque d'incapacité et d'invalidité des contrats de prévoyance classés dans le module *Health SLT*. Nous appliquons cette démarche aux lois d'incidence et de maintien (ou de rétablissement) de la garantie arrêt de travail d'un contrat de prêts (immobilier et consommation) d'un assureur vie. Ce portefeuille compte plus de 12 millions d'assurés. Il est caractérisé par la présence de différentes générations de souscription, de volumétrie et de profondeur d'historique variables.

Le reste de l'article est organisé de la manière suivante. La deuxième section, revue de la littérature, donne un aperçu de l'état de l'art. La troisième section présente le cadre méthodologique et les outils de calibrage des chocs propres à l'entité retenus. La quatrième section est consacrée à la description des données du portefeuille étudié. La section 5 décrit et commente les applications ainsi que les résultats obtenus. Nous terminons par une conclusion à la section 6.

## 2. Revue de la littérature

Parmi les nombreux travaux académiques, certains proposent des cadres généraux pour construire un modèle interne (partiel ou total) alors que d'autres apportent des éclairages sur les démarches d'implémentation de modèles internes et des USP non-vie proposés par l'EIOPA.

Planchet (2010) propose un cadre général pour construire un modèle interne (total ou partiel) pour des contrats d'assurance de personnes. Il utilise une approche combinant des calculs analytiques et des simulations pour évaluer les différentes valeurs économiques (*best estimate*, marge pour risque et SCR).

Cambon (2011) présente une démarche de construction d'un modèle interne partiel pour le risque de souscription non-vie d'un portefeuille d'assurance construction, spécialisée dans les branches longues, afin tenir compte des spécificités propres à ces risques. Il utilise une approche stochastique basée sur la méthode du *Bootstrap* pour capter la variabilité temporelle du montant cumulé des règlements à l'ultime, à horizon d'un an. La différence entre la charge ultime vue à l'exercice N+1 et celle vue à l'exercice N permet de déterminer le besoin en capital relatif au risque de prime et de réserve. Le besoin en capital relatif au risque de souscription sera obtenu en prenant le quantile à 99.5% de la distribution de la différence entre la charge ultime vue à fin N+1 et vue à fin N.

Perrin (2012) applique les différentes méthodes de calcul des USP proposées par l'EIOPA sur des portefeuilles d'assurance non-vie des branches *Marine Aviation and Transport, Other motor* et *Third-party liability*. Il propose une alternative aux méthodes de calcul du risque de réserve.

Aguir (2012) fournit une modélisation interne partielle du risque de souscription de la garantie perte d'emploi d'un portefeuille d'assurance emprunteur. Elle observe que le risque de perte d'emploi a une forte composante économique, démontrée par la crise économique de 2008. Les données utilisées dans cette étude sont des données de l'INSEE (entre 1975 et 2010) permettant de capter les valeurs extrêmes. Parmi les trois approches de modélisation du chômage (modèle d'Alghrim, modèles ARIMA, théorie des valeurs extrêmes), le processus ARIMA est retenu pour modéliser le nombre de chômeurs et calculer le besoin de capital requis pour cette garantie.

Enfin, les Actes Délégués parus au Journal Officiel le 17 Janvier 2015 présentent différentes méthodes de calibrage des USP non-vie. Ils proposent respectivement : une méthode pour le calibrage du risque de prime, une méthode pour calibrer le facteur d'ajustement de la réassurance non proportionnelle, deux méthodes pour calibrer le risque de réserve, et une méthode pour calibrer le risque de révision. Les textes fixent également certaines règles sur les données d'expérience nécessaires pour l'utilisation de ces méthodes. L'historique de données doit couvrir au moins cinq années d'expérience. Les risques considérés doivent être homogènes. Les observations doivent justifier les hypothèses sous-jacentes. Dans la pratique, ces conditions peuvent être difficiles à réunir.

## 3. Cadre méthodologique et outils

### 1. Principe général de modélisation

Le risque d'incidence correspond à l'incertitude sur la probabilité d'entrer en état d'incapacité (ou d'invalidité) et le risque de maintien (ou de rétablissement) est l'incertitude sur la durée de l'incapacité (ou d'invalidité). Les deux principales sources de volatilité de ces risques sont l'*erreur d'estimation* et l'*erreur de process variance* (ou *erreur process*). L'*erreur d'estimation*, correspondant à l'écart entre la loi estimée et la loi intrinsèque. Elle traduit notamment les fluctuations d'échantillonnage. L'*erreur*

*process* correspond à la fluctuation temporelle des lois de sinistralité liée à des conditions endogènes ou exogènes. Pour un risque donné, incidence ou maintien, le niveau de choc est une combinaison de ces deux sources d'erreurs.

D'une part, afin de modéliser la dynamique de l'*erreur process* de ces différents taux, nous proposons deux types de modélisation : un modèle linéaire généralisé (ou GLM) de type Log-normal et un processus des séries temporelles de type ARMA (*AutoRegressive Moving-Average*). L'intérêt pour les séries temporelles vient du fait qu'elles sont couramment utilisées dans de nombreux domaines comme la prévision d'indices économiques, l'évolution des cours de la bourse en finance, l'analyse de l'évolution d'une population en démographie, l'analyse de données sismiques en géophysique. Ces modèles s'adaptent en général bien à la problématique posée. Dans le cadre de notre approche, le processus autorégressif d'ordre 1 (ou AR(1)) a été sélectionné pour son caractère prudent lors des tests d'ajustements sur l'échantillon d'expérience disponible.

D'autre part, il convient, suivant le niveau de prudence souhaitée dans les calculs, d'évaluer l'*erreur d'estimation* comme étant la variance de l'estimateur de la loi moyenne retenue. Cette précaution est particulièrement nécessaire dans le cas où l'approche GLM est retenue.

Nous n'intégrons pas dans cette approche les lois de passage de l'état d'incapacité à l'état d'invalidité. Ce choix est cohérent avec la définition de la garantie arrêt de travail du portefeuille de prêts qui ne fait pas cette distinction. Ainsi, les trois différentes causes de sortie, supposées indépendantes, suite à un arrêt de travail sont les suivantes : le rétablissement, le décès et la fin contractuelle de la garantie. Enfin, dans certains contrats, la garantie d'arrêt de travail est limitée contractuellement par un âge maximal de couverture.

Le calibrage des chocs USP se fait à la maille d'une unité d'affaires, composée d'un ensemble de contrats de prêts de même nature, lorsque les risques sont jugés suffisamment homogènes. Ce choix permet de disposer d'un échantillon de taille suffisante et d'historique conséquent.

L'*erreur process* spécifique d'un sous-segment (par exemple d'un contrat particulier) est déduite de la valeur estimée à la maille unité d'affaires. Cette précaution est nécessaire pour préserver une certaine robustesse dans l'estimation des paramètres spécifiques. Par contre, l'*erreur d'estimation* est estimée au niveau de chaque sous-segment, sans prise en compte d'éventuels effets de diversification. Ainsi, une approche totalement comonotone est retenue pour l'agrégation des niveaux de volatilité des sous-segments de l'unité d'affaires. Enfin, d'un point de vue pratique, il conviendrait de vérifier avec les tests statistiques appropriés que les *erreurs d'estimation* peuvent être considérées comme décorréelées entre elles. Nous supposons également que les *erreurs d'estimation* sont décorréelées de toutes les autres sources d'erreurs, et en particulier de l'*erreur process*.

Ainsi, de façon générale, la démarche proposée se déroule en trois étapes principales. Elle s'appuie sur l'estimation des écarts-types associés aux deux sources d'erreurs (*estimation* et *process*). Dans la première étape, les paramètres des modèles associés à l'*erreur process* sont estimés à partir des taux d'évolution du taux (d'incidence ou de maintien). L'*erreur d'estimation* est égale à la variance de l'estimateur retenu pour le calcul de ce taux. La deuxième étape correspond à la phase de projection de l'évolution temporelle de la dynamique des taux à horizon d'un an ( $t+1$ ). Cette distribution permet de calculer l'espérance, la variance et le coefficient de variation associé. Enfin, à la troisième étape, l'on procède au calcul des niveaux de chocs. Le choc marginal correspondant à l'*erreur de process* est approché par le produit du coefficient de variation estimé à  $t+1$  et du taux calculé à  $t$ . Le choc marginal correspondant à l'*erreur d'estimation* est défini comme la variance de l'estimateur des taux estimé à date  $t$ . Sous les hypothèses que les *erreurs d'estimation* sont décorréelées entre elles et de toutes autres

sources d'aléas, le niveau de choc global associé au risque est obtenu par agrégation des deux chocs marginaux précédemment estimés.

Enfin, rappelons que les Actes Délégués s'appuient sur une approche Log-normale et des facteurs de crédibilité. Notre approche, même si différemment, s'inscrit dans cette logique. Les données d'expérience doivent répondre aux critères de qualité (exhaustivité, exactitude, pertinence), aux contraintes de taille d'échantillons et de profondeur suffisante d'historiques. Pour pallier cette contrainte, nous proposons une démarche basée sur la théorie de Crédibilité. Nous nous inspirons du cadre théorique de la Crédibilité à Variation Limitée (TCVL) ou Crédibilité américaine proposée dans la note éducative de l'Institut Canadien des Actuaires (2012).

De façon similaire à la Formule Standard, l'approche proposée est basée sur le principe d'application d'un choc conjoint aux risques d'incidence et de maintien. Le choc global obtenu pour chaque risque après intégration des facteurs de crédibilité sera comparé aux chocs de la Formule Standard dont nous rappelons les paramètres dans le tableau 1 ci-dessous.

RISQUE	FORMULE STANDARD	PROPOSITION USP
Incidence en incapacité ou invalidité	Année de projection t=1 : 35% Année de projection t>1 : 25%	$\Delta_{(s,USP)}^{inc}$
Maintien en incapacité ou invalidité	Si taux de maintien < 50% : augmentation de 20% des taux de maintien Si taux de maintien > 50% : diminution de 20% des taux de rétablissement	$\Delta_{(s,USP)}^{Recov}$

Tableau 1 : Récapitulatif des chocs Formule Standard

## 2. Calibrage des chocs d'incidence

Notons  $i(x, s, t)$  le taux d'incidence fonction de l'âge  $x$  atteint, de l'unité d'affaires  $s$  et de la période d'estimation  $t$  ;  $\sigma_{estim,s}$  l'écart-type associé à l'erreur d'estimation ;  $T \geq 1$  est l'amplitude des fenêtres d'estimation. Pour chaque date  $t \in [t_{min}; t_{max}]$  nous pouvons calibrer sur les périodes  $[t - T; t]$  des lois d'incidence d'expérience. Nous obtenons ainsi pour tout  $x$  donné, la série des taux d'incidence d'expérience  $(i(x, s, t))_t$ . Le risque étant à la hausse des taux d'incidence, nous présentons dans ce qui suit les méthodologies permettant de disposer des chocs d'incidence au quantile à 99.5% en intégrant les deux types d'erreur décrites précédemment.

### Estimation de l'erreur d'estimation

Le choix de l'estimateur du taux d'incidence dépend de la structure des données disponibles. La littérature académique propose plusieurs estimateurs chacun avec ses limites (voir Planchet (2011)). Nous retenons l'estimateur actuariel introduit par Bömer (1912). Cet estimateur permet d'utiliser des données agrégées et tient compte des censures et des troncatures. Il est plus simple à mettre en œuvre que l'estimateur de Kaplan-Meier. De plus, les censures et les troncatures sont supposées indépendantes et uniformément réparties dans l'intervalle. Sous les conditions du respect des bonnes hypothèses, notamment le nombre d'incidence suit une loi binomiale, la formule de l'estimateur

actuariel pour calculer le taux d'incidence dit central  $i(x, s, t)$  sur le segment  $s$ , à l'âge ou tranche d'âge  $x$  et à la date  $t$  (année ou tranche d'années) est donné par  $i(x, s, t) = \frac{\text{Inc}(x, s, t)}{\text{Er}(x, s, t)}$ , où  $\text{Inc}(x, s, t)$  correspond au nombre d'entrées en incapacité/invalidité observé pour le segment  $s$  des individus d'âge  $x$  durant l'année  $t$ ,  $\text{Er}(x, s, t)$  est l'exposition au risque pour le segment  $s$  des individus d'âge  $x$  durant à la date  $t$ .

L'*erreur d'estimation* est estimée pour le segment  $s$  en déterminant la variance de l'estimateur du taux d'incidence central  $i(x, s, t)$ . Dans ce cas l'*erreur d'estimation* correspond à la variance de l'estimateur actuariel, soit  $\sigma_{(estim,s)}^2 = \frac{i(x,s,t_{max}) \times [1 - i(x,s,t_{max})]}{\text{Er}(x,s,t_{max})}$ .

### Estimation de l'erreur process

Nous recherchons à capter l'*erreur de process*. Pour cela, il convient dans certains cas de réaliser des regroupements suivant une maille d'agrégation  $s'$  contenant suffisamment d'individus afin de minimiser l'erreur d'estimation dans le calcul des taux d'incidence. Les calculs pourraient par exemple être réalisés à une maille tout sexe confondu, regroupant des tranches d'âges, des portefeuilles du même segment, dès lors que ce regroupement est composé de risques homogènes. Ainsi, disposant des taux d'incidence  $i(x, s, t)$  calculés précédemment, on en déduira par exemple les calculs des taux d'incidence agrégés à la maille  $s'$  noté  $i(s', t)$  en faisant une moyenne pondérée par les expositions moyennes (expositions moyennes calculées sur tout l'historique de calibrage).

### Modèle autorégressif d'ordre 1

Pour la première approche nous retiendrons le processus AR(1). Elle repose sur le suivi de la variation des lois d'incidence d'expérience afin d'étudier l'évolution du risque dans le temps.

Considérons la série chronologique des taux d'évolution des taux d'incidence  $(W_{(s',t)})_t$  pour un sous-segment  $s'$  de risques homogènes de  $s$ , où  $W_{(s',t)}$  est défini par  $W_{(s',t)} = \frac{i(s',t+1) - i(s',t)}{i(s',t)}$ . De manière formelle  $W_{(s',t)} = \alpha_{(s')} + \beta_{(s')} \times W_{(s',t-1)} + \sigma_{(s')} \times \varepsilon_{(s',t)}$ , où  $(\varepsilon_{(s',t)})_{s',t}$  est un ensemble de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes. Les coefficients  $\alpha_{(s')}$  et  $\beta_{(s')}$  sont estimés à l'aide de l'estimateur des moindres carrés ordinaires (ou pondérés par les expositions). Le facteur  $\sigma_{(s')}$  correspond à l'écart-type empirique des résidus. Le choix mensuel du pas de temps est souhaitable, si les données le permettent afin de capter les effets de saisonnalité.

Les résidus notés  $r_{(s',t)}$  sont obtenus par différence entre les espérances conditionnelles théoriques des variables  $W_{(s',t)}$  et leurs réalisations  $r_{(s',t)} = W_{(s',t)} - \{W_{(s',t)} | W_{(s',t-1)}\}$ . Ce qui revient à obtenir l'égalité  $r_{(s',t)} = W_{(s',t)} - (\alpha_{(s')} + \beta_{(s')} \times W_{(s',t-1)})$ .

Ainsi, la dynamique des taux d'incidence est  $i(s', t_{max} + 1) = i(s', t_{max}) \times (1 + W_{(s',t-1)})$ , soit  $i(s', t_{max} + 1) = i(s', t_{max}) \times (1 + \alpha_{(s')} + \beta_{(s')} \times W_{(s',t_{max}-1)} + \sigma_{(s')} \times \varepsilon_{(s',t_{max})})$ , où  $\varepsilon_{(s',t_{max})}$  suit une loi normale centrée réduite.

A partir de cette formule, l'on peut déduire l'indicateur statistique d'espérance mathématique  $\{i(s', t_{max} + 1)\} = i(s', t_{max}) \times (1 + \alpha_{(s')} + \beta_{(s')} \times W_{(s', t_{max}-1)})$ , puis la variance  $\text{Var}\{i(s', t_{max} + 1)\} = (i(s', t_{max}))^2 \times (\alpha_{(s')})^2$ .

Nous pouvons ensuite, sur le sous-segment  $s'$ , calculer le coefficient de variation associé à l'*erreur process* par la formule  $CV_{(s')} = \frac{\sqrt{\text{Var}\{i(s', t_{max}+1)\}}}{\{i(s', t_{max}+1)\}}$ , soit  $CV_{(s')} = \frac{i(s', t_{max}) \times \alpha_{(s')}}{i(s', t_{max}) \times (1 + \alpha_{(s')} + \beta_{(s')} \times W_{(s', t_{max}-1)})}$ .

C'est donc à partir de ce coefficient de variation que l'écart-type de l'*erreur process* des taux d'incidence est estimé sur le segment  $s$  et à la date  $t_{max}$  par  $\sigma_{(process, s)} = CV_{(s')} \times i(x, s, t_{max})$ .

### Modèle linéaire généralisé

La seconde approche proposée consiste à mesurer l'*erreur process* du risque d'incidence par une modélisation Log-normale de la série des taux d'incidence. Dans ce cas, pour un sous-segment  $s'$  donné du segment  $s$ , la dynamique des taux d'incidence est  $\text{Log}\left(\frac{i(s', t)}{i(s', t-1)}\right) = \alpha_{(s')} + \sigma_{(s')} \times \varepsilon_{(s', t)}$ , où  $\varepsilon_{(s', t)}$  est distribué selon une loi normale centrée réduite et le coefficient  $\alpha_{(s')}$  est estimé à l'aide de l'estimateur des moindres carrés ordinaires (ou pondérés par les expositions). Le facteur  $\sigma_{(s')}$  correspond à l'écart-type empirique des résidus.

Les résidus  $r_{(s', t)}$  sont ensuite calculés par différence entre les espérances théoriques (conditionnelles) de  $\text{Log}\left(\frac{i(s', t)}{i(s', t-1)}\right)$  et leurs réalisations  $r_{(s', t)} = \text{Log}\left(\frac{i(s', t)}{i(s', t-1)}\right) - \left\{\text{Log}\left(\frac{i(s', t)}{i(s', t-1)}\right) \middle| \text{Log}\left(\frac{i(s', t-1)}{i(s', t-2)}\right)\right\}$ , soit  $r_{(s', t)} = \text{Log}\left(\frac{i(s', t)}{i(s', t-1)}\right) - \alpha_{(s')}$ . Finalement, la dynamique des taux d'incidence est donnée par  $i(s', t_{max} + 1) = i(s', t_{max}) \times \exp(\alpha_{(s')} + \sigma_{(s')} \times \varepsilon_{(s', t_{max})})$ , où  $\varepsilon_{(s', t_{max})}$  suit une loi normale centrée réduite.

De manière équivalente à l'approche précédente, on peut calculer respectivement l'espérance mathématique  $\{i(s', t_{max} + 1)\} = i(s', t_{max}) \times \exp\left(\alpha_{(s')} + \frac{(\sigma_{(s')})^2}{2}\right)$ , puis la variance  $\text{Var}\{i(s', t_{max} + 1)\} = (i(s', t_{max}))^2 \times \left(\exp\left[(\alpha_{(s')})^2\right] - 1\right) \times \exp\left[2 \times \alpha_{(s')} + (\alpha_{(s')})^2\right]$  et ensuite, sur le sous-segment  $s'$ , le coefficient de variation de l'*erreur process* est donné par la formule  $CV_{(s')} = \sqrt{\exp\left[(\alpha_{(s')})^2\right] - 1}$ . Enfin, l'écart-type de l'*erreur process* des taux d'incidence est estimé sur le segment  $s$  et à la date  $t_{max}$  par  $\sigma_{(process, s)} = CV_{(s')} \times i(x, s, t_{max})$ .

### Estimation du choc USP du risque d'incidence

Sous hypothèse de non corrélation entre l'*erreur d'estimation* et l'*erreur process*, le niveau de choc global proposé est défini par la formule  $\Delta_{(s, USP)}^{inc} = \frac{\sqrt{(\sigma_{(estim, s)})^2 + (\sigma_{(process, s)})^2}}{i(s, t_{max})} \times VaR_{99,5\%}(\varepsilon)$ , où  $VaR_{99,5\%}(\varepsilon)$  représente le quantile à 99,5% d'une loi normale centrée réduite ( $\varepsilon \sim N(0,1)$ ).

### 3. Calibrage des chocs de maintien ou de rétablissement

Notons  $m(x, a, s, t)$  le taux de maintien à l'âge  $x$  à l'entrée dans l'état incapacité/invalidité, de l'ancienneté  $a$  dans l'état, du segment  $s$  et à la date  $t$  (notons  $r(x, a, s, t)$  le taux de rétablissement correspondant).

Dans ce qui suit, nous décrivons uniquement la méthodologie permettant de disposer des chocs de rétablissement de l'état d'incapacité/invalidité en intégrant les deux niveaux d'erreur requis. Le risque étant à la baisse des taux de rétablissement, nous présentons les méthodologies permettant de disposer des chocs de rétablissement au quantile à 0,5%. De manière triviale, la même démarche s'applique au calibrage des chocs de maintien. Le risque dans ce cas étant à la hausse des taux de maintien, les chocs de maintien correspondent au niveau de quantile à 99,5%.

#### Estimation de l'erreur d'estimation

De la même manière que pour le risque d'incidence, le choix de l'estimateur du taux de maintien dépend de la structure des données disponibles. Dans le cadre de notre étude, nous disposons de données sinistres suffisamment détaillées pour utiliser de l'estimateur de Kaplan Meier. Cet estimateur est non-paramétrique et permet d'approcher la forme empirique prise par le risque de sortie de l'état d'incapacité/invalidité sans adopter une quelconque spécification de loi. Il nécessite de connaître exactement toutes les dates d'entrée et de sortie du portefeuille, y compris les dates d'entrée en incapacité/invalidité. Ceci peut constituer un inconvénient dans le cas où le fichier de données serait mal renseigné. Il convient également de s'assurer du caractère homogène des risques (voir Planchet, 2011).

Sur le segment  $s$ , notons  $T_i$  instant de sortie de l'état d'incapacité/invalidité;  $n_{x,s,T_i}$  le nombre d'individus d'âge  $x$  d'entré dans l'état exposé au risque d'incapacité/invalidité juste avant la date  $T_i$ ;  $d_{x,s,T_i}$  le nombre d'individus d'âge  $x$  d'entrée dans l'état et sorti de l'état à la date  $T_i$ . L'estimateur de Kaplan-Meier des taux de maintien en incapacité/invalidité calculé à l'âge  $x$  pour tout  $t \in \{a_{min}, \dots, a_{max}\}$  ( $a_{min}$  l'ancienneté minimale et  $a_{max}$  l'ancienneté maximale) est donné par la formule  $\hat{S}_{(x,s,t)} = \prod_{T_i \leq t} \left(1 - \frac{d_{x,s,T_i}}{n_{x,s,T_i}}\right)$ . En pratique, l'estimateur de Kaplan-Meier donne lieu à un calcul

que lorsqu'une personne sort de l'état à la date  $T_i$ . Par ailleurs, en toute rigueur, il n'y a pas d'ex aequo, car la probabilité que deux personnes sortent exactement au même instant est nulle presque sûrement. Néanmoins, comme les observations dont nous disposons sont volumineuses, et que, la durée des arrêts de travail est comptée en jours (observations discrètes), on est confronté à la présence d'ex aequo. On peut utiliser donc la formule approchée, pour tout  $t \in \{a_{min}, \dots, a_{max}\}$ ,

$\hat{S}_{(x,s,t)} = \prod_{i=a_{min}}^t \left(1 - \frac{d_{x,s,i}}{n_{x,s,i}}\right)$ . Le taux de rétablissement de l'état d'incapacité/invalidité à la date  $t$  est donné par  $\hat{R}_{(x,s,t)} = 1 - \frac{\hat{S}_{(a,x,s,t)}}{\hat{S}_{(a-1,x,s,t-1)}}$ .

Dans le cas de l'utilisation de Kaplan-Meier pour estimer les taux de rétablissement  $\hat{R}_{(x,s,t)}$ , l'erreur d'estimation associée peut-être approchée par l'estimateur de la variance de Greenwood. La formule

mathématique de cet estimateur est  $\hat{R}_{(x,s,t)} = \left(1 - \hat{R}_{(x,s,t)}\right)^2 \times \sum_{i=a_{min}}^t \left(\frac{d_{x,s,i}}{n_{x,s,i} \times (n_{x,s,i} - d_{x,s,i})}\right)$ .

## Estimation de l'erreur process

La méthodologie repose sur le suivi temporel de la variation des taux de rétablissement afin d'étudier l'évolution de ce risque. En effet, sur un historique de données suffisamment profond, il est possible de construire des lois d'expérience pour chaque année  $t$ . Ce calibrage est réalisé sur les périodes  $[t - T; t]$ , où  $T \geq 1$  est l'amplitude des fenêtres d'estimation. Nous obtenons ainsi la série des taux de rétablissement de l'état d'incapacité/invalidité notée  $(R_{(s,t)})_t$ .

Considérons la série chronologique des taux d'évolution des taux de rétablissement  $(Z_{(s',t)})_t$  pour un sous-segment  $s'$  de risques homogènes de  $s$ , où  $Z_{(s',t)}$  est défini par  $Z_{(s',t)} = \frac{R_{(s',t+1)} - R_{(s',t)}}{R_{(s',t)}}$ . En retenant comme dynamique le processus AR(1), de manière similaire à l'approche 1 présentée précédemment, nous obtenons l'écart-type associé à l'erreur process sur le taux de rétablissement de l'état d'incapacité/invalidité et à la date  $t_{max}$  par  $\sigma_{(process,s)} = CV_{(s')} \times R_{(s,t_{max})}$ , où  $CV_{(s')}$  est coefficient de variation associé à l'erreur de process.

## Estimation du choc USP du risque de rétablissement

Sous hypothèse de non corrélation entre l'erreur d'estimation et l'erreur process, le niveau de choc

global proposé est défini par la formule  $\Delta_{(s,USP)}^{Recov} = \frac{\sqrt{(\sigma_{(estim,s)})^2 + (\sigma_{(process,s)})^2}}{R_{(s,t_{max})}} \times VaR_{0,5\%}(\varepsilon)$ , où  $VaR_{0,5\%}(\varepsilon)$  représente le quantile à 0,5% d'une loi normale centrée réduite ( $\varepsilon \sim N(0,1)$ ).

## 4. Détermination des facteurs de crédibilité

L'introduction des facteurs de crédibilité dans le calibrage des USP permet de tenir compte, dans une certaine mesure, de l'expérience propre à l'entité sur les segments ne respectant pas toutes les conditions requises sur les données. D'un point de vue théorique, la théorie de Crédibilité de Bühlmann (1967, 1969) est préférable car elle est complète. En pratique, les conditions nécessaires, notamment sur les données d'expérience de la plupart des compagnies ne permettent pas sa mise en œuvre opérationnelle. Nous proposons de manière pragmatique une variante normalisée de la théorie de la Crédibilité à Variation Limitée (TCVL) ou Crédibilité américaine. Cette approche est préconisée dans la note éducative de l'Institut des Actuaire Canadiens (2002). Elle permet d'intégrer les données d'expérience dans l'estimation des hypothèses d'évaluation de mortalité d'expérience lorsque les résultats sont crédibles.

### Notion de données crédibles

Une population d'assurés sera considérée homogène si sa structure ou sa composition est uniforme pour l'ensemble des individus face au risque étudié. Le terme crédible s'entend au sens de données fiables au plan statistique. Les données sont jugées crédibles à 100 % lorsque les deux principales conditions suivantes sont réunies. D'une part, les données d'expérience vérifient une taille suffisante validée d'après les critères de Cochran (Cochran, 1952) et d'exposition minimale (voir Koehler et Larntz, 1980) pour assurer le calibrage robuste des lois centrales. D'autre part, la profondeur d'historique est jugée suffisante au sens de la stabilité des niveaux de chocs globaux. Cette stabilité

est vérifiée lorsque les niveaux de chocs ne sont pas modifiés en augmentant la profondeur d'historique d'une nouvelle année d'historique.

Dans ce cas des données crédibles, la compagnie peut estimer des paramètres spécifiques en se fondant exclusivement sur ses propres données. Dans le cas contraire, plusieurs situations sont possibles. Si les critères de Cochran et d'exposition minimale ne sont pas vérifiés, nous retiendrons les paramètres de la Formule Standard, car les lois centrales estimées à partir de ces données seront trop volatiles. Si le critère de profondeur d'historique seul n'est pas vérifié, il s'agit de données partiellement crédible. En cas de crédibilité partielle, le choc USP est une combinaison linéaire pondérée par le facteur de crédibilité du choc estimé à partir des données d'expérience et les paramètres de la Formule Standard. Formellement, cela revient à écrire  $\Delta_{USP}^{Risque} = C \times \Delta_{Exp}^{Risque} + (1 - C) \times \Delta_{FS}^{Risque}$ , où  $\Delta_{USP}^{Risque}$  le choc USP,  $\Delta_{Exp}^{Risque}$  le choc estimé sur la base des données d'expérience,  $\Delta_{FS}^{Risque}$  le choc de la Formule Standard et  $C$  le facteur de crédibilité.

### **Notion de la Théorie de Crédibilité à Variation Limitée (TCVL)**

Dans la pratique, les critères associés à une bonne méthode de crédibilité sont à la fois qualitatifs et quantitatifs. Ainsi une bonne méthode de crédibilité doit être d'application facile, utilisée tous les renseignements pertinents disponibles, l'application des paramètres issus de l'utilisation des facteurs de crédibilité obtenus doivent permettre de valider le niveau de sinistralité du portefeuille suivant différentes mailles de segmentation pertinente.

Il existe deux principales théories de crédibilité : la Théorie de la Crédibilité à Variation Limitée (TCVL) et la Théorie de la Crédibilité fondée sur la plus Grande Exactitude (TCGE). La forme normalisée de la TCVL est celle qui répond opérationnellement le mieux aux critères d'une bonne méthode de crédibilité.

La TCGE ou « crédibilité européenne » repose sur les travaux de Bühlmann. Elle est meilleure au plan théorique à la TCVL. Les résultats issus des calculs sont « équilibrés », ce qui permet d'éviter de les normaliser. Elle permet d'établir une estimation des sources de variation à l'intérieur et entre les sous-catégories (de la population d'assurés du portefeuille étudié). Au plan théorique, elle est complète et satisfait aux critères d'une bonne méthode de crédibilité. Malheureusement, elle comporte une lacune en ce qu'elle exige des renseignements supplémentaires au sujet des résultats plus précis sur l'ensemble du secteur concerné (au-delà des données habituellement recueillies et diffusées). Abstraction faite de ces difficultés d'ordre pratique, la TCGE serait probablement la méthode de crédibilité privilégiée à utiliser pour établir l'hypothèse d'évaluation des paramètres des risques étudiés. Il existe plusieurs versions de la TCGE. Le modèle plus simple de Bühlmann et le modèle un peu plus complexe de Bühlmann-Straub.

La TCVL propose un critère de pleine crédibilité fondé sur la taille du portefeuille. On entend par pleine crédibilité, le cas où les données du portefeuille sont suffisantes pour le calibrage des paramètres d'expérience sans tenir compte des données de l'ensemble du secteur. En outre, cette théorie prévoit une méthodologie spéciale pour établir la crédibilité partielle, à savoir que les résultats du portefeuille et ceux de l'industrie sont pondérés.

A l'instar des USP non-vie et par application de la TCVL, les contraintes sur les données d'expérience pour une pleine crédibilité seront fonction de la nature du risque étudié. La détermination des facteurs

de crédibilité à appliquer aux chocs sera réalisée à partir des lois centrales calibrées. L'utilisation de ces facteurs de crédibilité pour calculer les chocs USP est une hypothèse forte, car elle sous-entend qu'il y a indépendance entre les chocs et les facteurs de crédibilité. Cette hypothèse est toutefois raisonnable, car les facteurs de crédibilité pourraient être ajustés sur la base de l'expérience future de l'évolution du risque.

Sur cette base, l'hypothèse prévue pour le montant global des sinistres d'une société à l'égard d'une année  $t$  peut être exprimée par  $X_t = CX + (1 - C)\mu$ , où  $X_t$  désigne le montant global prévu des sinistres de l'année  $t$ ,  $C$  désigne le facteur de crédibilité,  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  les montants des sinistres survenus sur les  $n$  années d'observation,  $X$  représente la moyenne de ces sinistres et  $\mu$  représente la moyenne de la distribution sous-jacente correspondant au montant prévu de sinistre d'après les données de l'industrie pour le même portefeuille. En pratique, le facteur de crédibilité est appliqué au nombre de sinistre ou au ratio entre le nombre de sinistre réel sur le nombre de sinistre théorique, plutôt qu'aux montants prévus des sinistres. Les raisons de ce choix sont multiples. D'une part, l'incomplétude des données fournies par l'industrie, ce qui ne permet pas de réaliser des lois de place, correspondant au profil de risque de l'entreprise et pouvant servir de référence pour le calcul de la moyenne  $\mu$ . D'autre part, les données disponibles ne valident pas toutes les exigences pour déterminer avec précision la distribution des montants des sinistres  $(X_i)_i$ .

La méthode normalisée est l'approche que nous avons privilégiée dans le cadre de notre étude. Cette méthode utilise la crédibilité et les ratios sinistre réel sur sinistre théorique prévu (notés R/P). Cependant, ces ratios R/P sont rajustés pour reproduire le niveau des sinistres prévus découlant du ratio total R/P de la compagnie ajusté pour tenir compte de la crédibilité de l'ensemble des portefeuilles étudiés de la société. La méthode normalisée offre plusieurs avantages. La somme des sinistres prévus pour les sous-catégories correspond au nombre total de sinistres prévus, d'après le ratio R/P, calculé à l'échelle de la société (c'est-à-dire que le nombre de sous-catégories sélectionnées n'a pas d'effet sur le résultat global). Tous les renseignements sont utilisés : les ratios R/P de l'ensemble de la société et ceux des sous-catégories, de même que les facteurs de crédibilité. Les résultats sont raisonnables dans des cas extrêmes ou limitatifs. Les ratios R/P des sous-catégories demeurent à l'intérieur de la fourchette initiale. Les effets interactifs entre les sous-catégories peuvent être saisis ; et il s'agit d'une méthode facile à mettre en pratique. Bien que cette méthode ne comporte pas un fondement solide au plan théorique, elle est pratique et satisfait aux critères associés à une bonne méthode de crédibilité.

### **Calcul du facteur de crédibilité**

L'utilisation du nombre de sinistre est plus efficace d'un point de vue opérationnel. Dans ce cas, l'entreprise pourra s'appuyer sur des jugements d'experts objectivement justifiés. Enfin, le fait que cette formule de crédibilité moyenne pondérée comporte un attrait intuitif, la TCVL ne prévoit pas un modèle théorique sous-jacent de distribution des valeurs  $(X_i)_i$  qui soit conforme à la formule. Ainsi, en vertu de la TCVL, on obtient  $X_t$  en sélectionnant un paramètre d'écart  $r$  ( $r > 0$ ) et un niveau de probabilité  $p$  ( $0 < p < 1$ ), de sorte que l'écart entre  $X_t$  et sa moyenne  $\mu$  est faible. Dans le cas d'un modèle de Poisson de paramètre  $\gamma$ , ce critère peut s'exprimer de la manière suivante :  $Pr\{|X_t - \mu| \leq r\gamma\} \geq p$ , où  $r$  représente la marge d'erreur et  $p$  l'intervalle de confiance. En d'autres termes,  $X_t$  représente une bonne estimation de la sinistralité future prévue s'il y a une probabilité

élevée que l'écart entre  $X_t$  et sa moyenne  $\mu$  soit faible relativement à  $\mu$ . Le tableau suivant énonce le nombre de sinistres requis pour obtenir une pleine crédibilité selon diverses valeurs de  $p$  et  $r$ .

Table normale standard – Paramètres d'écart et de probabilité					
Nombre de sinistres requis pour obtenir une pleine crédibilité					
Paramètre de probabilité $p$	Paramètre de fourchette $r$				
	5 %	4 %	3 %	2 %	1 %
90 %	1 082	1 691	3 007	6 765	27 060
95 %	1 537	2 401	4 268	9 604	38 416
99 %	2 654	4 147	7 373	16 589	66 538
99,9 %	4 331	6 767	12 030	27 068	108 274

**Tableau 2 : Table normale standard – Paramètres d'écart et de probabilité**  
(Extrait de la note éducative, Institut Canadien des Actuaire, juillet 2002)

Dans bien des cas, il est raisonnable d'établir la distribution de  $\bar{X}$  (moyenne de ces montants des sinistres survenus sur les  $n$  années d'observation) comme étant une distribution normale. Dans ces cas, le nombre de sinistres correspondant aux différentes valeurs des paramètres  $p$  et  $r$ , noté  $N_{p,r}$ , peut être obtenu à partir de tables normales types. Lorsque l'on détermine l'hypothèse d'évaluation de la sinistralité centrale prévue, on pourrait vouloir utiliser un seuil élevé pour établir une pleine crédibilité, notamment  $p = 90\%$  et  $r = 3\%$  pour lequel la valeur provenant de cette distribution est  $N_{90\%,3\%} = 3007$  sinistres. Dans le cas du choix d'un seuil pour déterminer les facteurs de crédibilité à appliquer à des chocs, nous suggérons de faire le choix d'un seuil plus élevé notamment  $p = 99\%$  et  $r = 3\%$  pour lequel la valeur est  $N_{99\%,3\%} = 7373$  sinistres.

La distribution théorique du risque d'incapacité/invalidité d'une garantie d'arrêt de travail est de forme binomiale. Toutefois, lorsque les probabilités d'incidence sont faibles, la distribution de Poisson offre une approximation raisonnable de la distribution binomiale. Dans le modèle de Poisson, la seule variable aléatoire est le nombre de sinistres, qui est réputée correspondre au modèle de Poisson. Les variations quant à la taille des sinistres ne sont pas prises en compte. S'il y a dispersion importante du montant net des sinistres pour chaque police du portefeuille étudié, le recours au modèle de Poisson simple pourrait ne pas convenir. Le modèle de Poisson composé intègre l'effet de la variante de taille des sinistres, et il se traduirait normalement par un relèvement du seuil des sinistres requis pour atteindre le même niveau de crédibilité. Ainsi, faisant l'hypothèse que l'ensemble des sinistres d'un portefeuille de polices peut être décrit comme un modèle de Poisson composé reflétant le nombre et le montant des sinistres, lorsqu'on y ajoute la variabilité de la taille des sinistres, le seuil de pleine crédibilité est majoré par rapport au modèle de Poisson. Supposons que  $N$  est une variable aléatoire représentant le nombre de sinistres d'un portefeuille et qu'il suit une distribution de Poisson dont la moyenne et la variance sont  $\gamma$ . Le nombre de sinistres observés est  $m$ . Pour  $k = 1, 2, 3, \dots, m$ , supposons que  $Y_k$  est la variable aléatoire représentant le montant du  $k$ ème sinistre. Supposons que les variables  $Y_k$  sont indépendantes et ont une distribution dont la moyenne est  $\mu_Y$  et la variance est  $\sigma_Y^2$ . Supposons également que le nombre de sinistres  $N$  est indépendant du montant des sinistres  $Y_k$ . Le montant total de sinistres  $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$  a une distribution de Poisson combinée.

En résumé, la valeur  $X_i$  a une distribution de Poisson composée avec paramètre de Poisson  $\gamma$  et une distribution du montant des sinistres ayant une moyenne  $\mu_Y$  et une variance  $\sigma_Y^2$ . À l'aide du modèle de Poisson composé assorti des valeurs paramétriques  $r$  et  $p$ , on peut constater que le nombre de

sinistres requis pour une pleine crédibilité est obtenu par  $Seuil = N_{p,r} \times \frac{\left(\sum_{i=1}^m i_{(s'_i,t)} V_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^m i_{(s'_i,t)}\right)}{\left(\sum_{i=1}^m i_{(s'_i,t)} V_i\right)^2}$ , où

$i = 1, 2, \dots, m$  le nombre d'individus sinistrés observés,  $s'_i$  est la maille de segmentation retenue pour le calibrage de la loi centrale,  $t$  correspond à l'année de calcul,  $\delta_{(s'_i,t)}$  est la loi de sinistralité centrale,  $V_i$  correspond au montant de la provision du sinistre ou au capital restant dû de l'individu  $i$ , des valeurs paramétriques  $r = 3\%$  et  $p = 99\%$ ,  $N_{99\%,3\%} = 7373$  sinistres.

Pour établir la valeur du facteur de crédibilité  $C$  à l'égard du modèle de Poisson composé, il convient de calculer la moyenne  $\mu_Y$  et l'écart-type  $\sigma_Y$  de la distribution du montant des sinistres. Ces valeurs peuvent être calculées à partir du risque total ou faire l'objet d'une estimation à l'aide des sinistres réels. Pour que la crédibilité soit totale, le nombre de sinistre figurant dans les résultats du portefeuille doit dépasser le nombre  $Seuil$ . Si le critère de pleine crédibilité n'est pas respecté, on peut appliquer une crédibilité partielle. Ainsi, pour les valeurs  $p = 99\%$  et  $r = 3\%$ , l'application de la règle de la « racine carrée » se traduit par un facteur de crédibilité  $C$  calculé avec la formule  $C = \text{Min} \left\{ \sqrt{\frac{X}{Seuil}}, 1 \right\}$ , où  $Seuil$  représente le critère de pleine crédibilité et  $X$  le nombre de sinistres observés dans le portefeuille. On peut remarquer que si l'on ne tient compte que du nombre de sinistre la valeur de  $Seuil$  est 7373.

L'exemple de modèle de Poisson composé peut être élargi pour tenir compte des données portant sur plus d'une période (ou année), où  $N_j$  est une variable aléatoire représentant le nombre de sinistres au cours de la période  $j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ),  $Y_{j,k}$  est la variable aléatoire représentant le montant du  $k$ -ième sinistre au cours de la période  $j$ ,  $X_j$  est la variable aléatoire qui représente le montant global des sinistres pour la société au cours de la période  $j$  (avec :  $X_j = Y_{j,1} + Y_{j,2} + \dots + Y_{j,m}$ ). Si la compagnie désire tenir compte des résultats des sous-catégories (comme le sexe, la catégorie socio-professionnelle, la durée d'indemnisation, les franchises...), mais que les résultats de ces sous-catégories ne sont pas crédibles à 100%, elle pourrait décider d'utiliser un facteur de crédibilité global ou le facteur de crédibilité moins élevé qui convient aux résultats de la sous-catégorie.

On peut regrouper des distributions disparates à l'intérieur des données globales à certaines conditions. Supposons que le portefeuille comporte six sous-catégories différentes suivant la répartition hommes et femmes, à savoir : avec examen médical, sans examen médical et avec examen paramédical. Pour chaque sous-catégorie, la distribution du nombre de sinistres se conforme à une distribution de Poisson assortie d'un paramètre différent. A cette fin, supposons que la variable aléatoire à l'étude est le ratio sinistre réel à prévu calculé pour chaque catégorie. Si les proportions relatives des sous-catégories sont stables au fil du temps, on peut utiliser le facteur de crédibilité fondé sur la distribution globale de ces distributions hétérogènes de Poisson pour chacune des sous-catégories. L'exigence selon laquelle la composition du portefeuille doit être stable au fil des années en ce qui touche les principales sous-catégories peut limiter l'applicabilité de ce résultat. La composition du portefeuille peut être considérée comme stable au fil du temps si les proportions des sous-catégories pertinentes sont constantes. Cette règle doit être respectée tant pour la période à l'étude que pour la période de projection future. Si les proportions relatives des sous-catégories ne sont pas stables au fil du temps, d'où l'invalidité des hypothèses, il pourrait convenir de tenir compte

de la crédibilité des sous-catégories dans le cadre de l'établissement des hypothèses de sinistralité prévue. Pour déterminer si les conditions sont valables, l'on doit faire preuve de jugement.

## 4. Description des données

### Composition du portefeuille

Notre étude porte sur un portefeuille d'assurances de contrats de couverture de prêts. Il contient essentiellement des contrats de prêts immobiliers, commercialisés par plusieurs partenaires. Ils couvrent le risque décès PTIA (Perte Totale et Irréversible d'Autonomie) et le risque d'arrêt de travail pour cause d'incapacité/invalidité. Nous disposons de bases de données de gestion de plus de 12 millions de polices, de plus de 20 années d'historique. L'âge moyen de souscription des garanties est de 40 ans, pour un capital assuré moyen de 48 000 € et un montant de sinistre moyen de 12 000 €.

### Structure des bases d'étude

La base d'étude a été constituée à partir de 3 sources d'informations. Les bases dites « **assurés tête par tête** » sont des bases de données contenant des informations détaillées sur chaque tête assurée. Pour ces bases, la profondeur d'historique dépend du partenaire (certaines disposant d'une profondeur de moins de 5 ans). Les bases dites « **assurés agrégés** » sont des bases de données agrégées par tranche d'âges des assurés (en général d'historique plus profond). Les bases dites « **sinistrés tête par tête** » sont des bases de données contenant des informations détaillées sur chaque tête sinistrée avec une profondeur d'historique conséquente (le contrat le plus ancien dispose d'un historique de plus de 20 ans). Ces données de gestion répondent aux critères de qualité requis et elles sont certifiées dans le cadre des travaux d'inventaires.

### Limites et solutions de contournement

La principale limite de ces bases de données c'est qu'il n'existe pas de clé d'identification permettant de relier les assurés à leurs sinistres entre les bases « assurés tête par tête » (données externes provenant des partenaires) et les bases « sinistrés tête par tête » (données internes provenant du système de gestion des sinistres). Ce qui pose un problème d'identification des assurés lors des calculs des taux d'incidence.

Comme nous l'avons souligné ci-dessus, le peu de profondeur de l'historique est une deuxième limite pour le calibrage des chocs associés au risque d'incidence. En effet, les modèles proposés en vue de l'évaluation des *erreurs d'estimation* et des *erreurs process* nécessitent de disposer d'un historique de données suffisamment profond pour bien capter les variations et les évolutions du risque dans le temps. Pour pallier à cette limite, une approche par crédibilité a été mise en œuvre. Dans certains cas, pour disposer d'historique suffisant, nous avons procédé à des regroupements dès lors que nous savons prouver que nous sommes en présence de risques homogènes.

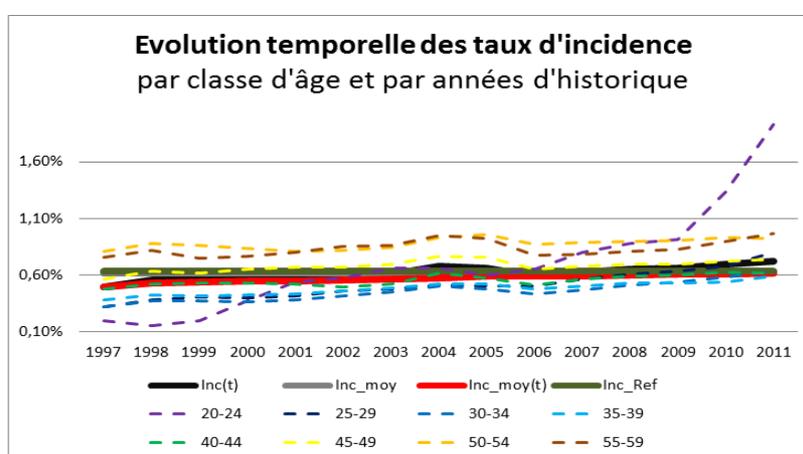
Enfin, notons que le risque de maintien en arrêt de travail n'a pas posé de difficulté particulière aussi bien pour estimer la loi de maintien et de rétablissement que pour calibrer les chocs associés. Les modélisations s'effectuent à partir de la seule base des sinistrés, qui de plus est détaillée et d'historique très profond.

## 5. Applications numériques

### 1. Calibrage du choc d'incidence d'expérience

#### Evolutions des taux d'incidence

Les taux d'incidence en incapacité/invalidité sont estimés avec l'estimateur actuariel sur les données des bases « assurés tête par tête » et « sinistrés tête par tête ». Cet estimateur permet de contourner la limite liée à l'absence de clé d'identification commune. Afin de disposer d'une taille et d'un historique suffisants d'échantillons, nous avons procédé, lorsque les conditions d'homogénéité sont vérifiées (limites des garanties, conditions tarifaires, caractéristiques techniques...), au regroupement des portefeuilles de certains partenaires. Le graphique ci-dessus présente l'évolution des différents taux d'incidence calculés.



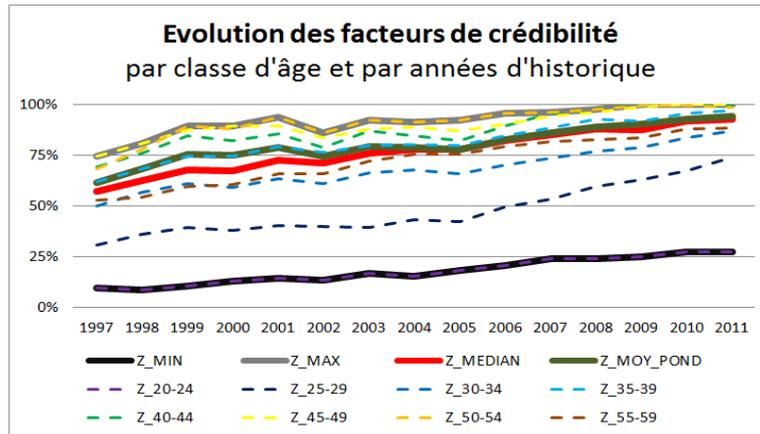
Graphique 1 : Evolution des taux d'incidence dans le temps

Nous disposons des taux d'incidence par tranche d'âge de 5 ans (entre 20 ans et 59 ans) calculés année par année sur l'historique 1997 à 2011 (notés 20-24, 25-29, ..., 55-59). Ils permettent d'apprécier l'évolution temporelle des lois d'incidence suivant les tranches d'âges retenues. Pour notre analyse, nous estimons également : les taux d'incidence tout âge confondu (notés  $Inc(t)$ ), les taux d'incidence moyens pondérés par les expositions tout âge confondu (notés  $Inc\_moy(t)$ ), le taux d'incidence moyen global sur l'historique de 1997 à 2011 (notés  $Inc\_moy$ ), le taux d'incidence de référence 2012 calculés sur un historique de 5 ans entre 2007 et 2011 (notés  $Inc\_Ref$ ).

Sans surprise, en comparant les taux d'incidence centraux par tranche d'âge nous observons qu'ils sont globalement croissants suivant l'âge. Nous observons également une légère tendance à la hausse en fonction du temps. En particulier, la tranche 20-24 ans est la plus instable dans le temps, ceci est dû à la faible exposition de cette tranche. Les tranches 25-29 ans à 44-49 ans sont moins volatiles, avec une hausse globale de la sinistralité dans le temps, tout en gardant des niveaux croissant en fonction de la tranche d'âge. Enfin, les tranches 50-54 ans et 55-59 ans représentent les taux d'incidence les plus élevés et le plus stables dans le temps. Ainsi, mis à part la tranche 20-24 ans, le risque d'incidence est principalement expliqué par l'effet âge, correspondant à l'impact du vieillissement sur l'état de santé des assurés. Une analyse des taux d'incidence, tout âge confondu, permet d'observer une légère tendance haussière en fonction du temps (voir l'évolution des taux  $Inc(t)$  et  $Inc\_moy(t)$ ). Ces taux sont assez proches des taux globaux ( $Inc\_moy$  et  $Inc\_Ref$ ) et sont compris entre 0,5% et 0,7%.

## Calibrage des facteurs de crédibilité

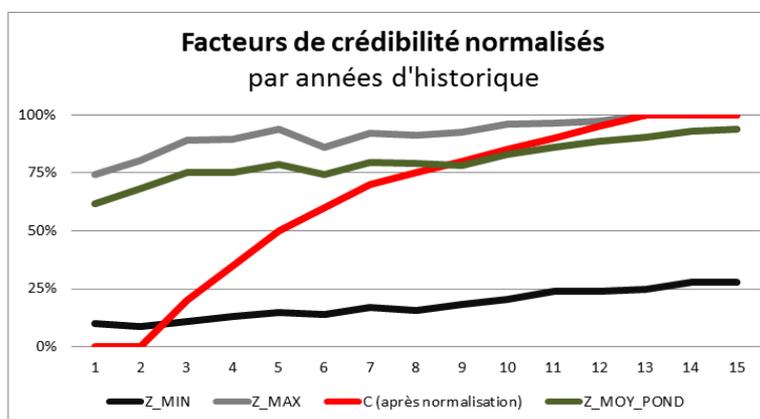
Disposant de 15 années d'historique, on détermine le facteur de crédibilité par la méthode TCVL normalisée avec les paramètres  $r = 3\%$  et  $p = 99\%$ , correspondant à un nombre minimum requis pour une pleine crédibilité de 7373 sinistres. Le graphique ci-dessous présente les facteurs de crédibilité obtenus par tranches d'âges.



Graphique 2 : Evolution des facteurs de crédibilité des lois d'incidence

Augmentation des coefficients de crédibilités en fonction de l'âge et du temps. Cette évolution traduit principalement l'augmentation de la taille des effectifs suivant l'âge et dans le temps. Nous proposons de retenir avant l'étape de normalisation, les coefficients moyens pondérés par les expositions (notés Z\_Moy\_POND). La normalisation sert à ajuster, année par année, ces coefficients pour reproduire le niveau global des sinistres du portefeuille étudié.

Les coefficients de crédibilité obtenus avant normalisation sont significatifs (62% la première année et 68% la seconde année) à cause de la taille de ce portefeuille. Malgré cela, nous proposons par prudence, de garder une limite minimale de 3 ans d'historique en-deçà de laquelle nous considérons que ces coefficients sont nuls. En effet, il est souvent difficile de calibrer des lois d'expérience robustes sur un historique de moins de trois ans. Le graphique et le tableau ci-dessous présentent les coefficients de crédibilité de la loi d'incidence (noté C) par année d'historique (notée Année).



Graphique 3 : Facteurs de crédibilité en fonction de l'historique

Facteurs de crédibilité par années d'historique disponibles de la loi d'incidence											
Année	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 et +
C	20%	35%	50%	60%	70%	75%	80%	85%	90%	95%	100%

Tableau 4 : Facteurs de crédibilité de la loi d'incidence

## Calibrage des chocs d'incidence USP

A partir des facteurs de crédibilité estimés ci-dessus, nous pouvons déterminer les niveaux des chocs USP en fonction de l'historique des données disponibles.

### Application du modèle AR(1) pour estimer le choc *process*

- **Historique de calibrage disponible de 16 années**

Pour un historique de calibrage disponible de 16 années, le facteur de crédibilité est  $C = 100\%$ . Le niveau de choc USP d'incidence ne tient donc pas compte du choc de la Formule Standard. Dans ce cas, nous obtenons par exemple un choc USP d'incidence de 68% sur la tranche d'âge de 20-24 ans, 12% sur la tranche de 25- 49 ans et 18% sur la tranche 50 ans et plus.

- **Historique de calibrage disponible de 5 années**

Pour un historique de calibrage disponible de 5 années, le facteur de crédibilité est  $C = 50\%$ . Le niveau de choc USP d'incidence tient donc compte de 50% du choc de la Formule Standard.

Tranche âge	Choc Expérience	FS (t=1 an)	FS (t>1 an)	Crédibilité	Choc USP (t=1 an)	Choc USP (t>1 an)
20-24 ans	49%	35%	25%	50%	42%	37%
25-49 ans	9%	35%	25%	50%	22%	17%
50 ans et plus	7%	35%	25%	50%	21%	16%

Tableau 5 : Chocs USP d'incidence (modèle AR(1), historique de 5 ans,  $C=50\%$ ).

Par rapport aux chocs de la Formule Standard (35% pour la première année et 25% au-delà), le niveau de choc estimé avec le modèle AR(1) sur les données d'expérience sur les tranches d'âge moins de 25 ans sont plus élevés. Il correspond à 68% pour un historique de 16 ans et à 49% pour un historique de 5 ans. L'application du facteur de crédibilité permet d'atténuer l'effet de volatilité dû à la taille plus réduite des effectifs sur la tranche d'âge 20-24 ans, lorsque l'historique disponible est de 5 ans. Le choc USP après application du facteur de crédibilité passe de 49% à 42% la première année (vs 35% pour la Formule Standard) et à 37% les années précédentes (vs 25% pour la Formule Standard). Ainsi, pour cette tranche d'âge, l'effet volatilité lié à la taille des effectifs induira un faible impact sur le calcul de SCR. Au-delà de la tranche 20-24 ans, les paramètres spécifiques à l'entité restent toujours plus intéressants que les chocs de la Formule Standard.

### Application du modèle Log-normal pour estimer le choc *process*

- **Historique de calibrage disponible de 16 années**

Pour un historique de calibrage disponible de 16 années, le facteur de crédibilité est  $C = 100\%$ . Le niveau de choc USP d'incidence ne tient donc pas compte du choc de la Formule Standard. Dans ce cas, nous obtenons par exemple un choc USP d'incidence de 111% sur la tranche d'âge de 20-24 ans, 17% sur la tranche de 25- 49 ans et 22% sur la tranche 50 ans et plus.

Nous observons également que les niveaux de chocs sont différents suivant la méthode utilisée. Ils sont en effet plus conservateurs avec la méthode Log-normale qu'avec l'approche AR(1) dans notre exemple.

## 2. Calibrage du choc de maintien d'expérience

### Calibrage des facteurs de crédibilité

De manière analogue, nous obtenons les coefficients de crédibilité de la loi de maintien.

Facteurs de crédibilité par années d'historique disponibles de la loi de maintien vs rétablissement											
années	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15 et +
C	30%	40%	50%	60%	70%	75%	80%	85%	90%	95%	100%

Tableau 6 : Facteurs de crédibilité de la loi de maintien vs rétablissement

### Calibrage des chocs de maintien et de rétablissement USP

#### Application du modèle AR(1) pour estimer le choc process

- **Historique de calibrage disponible de 23 années**

Pour un historique de calibrage disponible de 23 années, le facteur de crédibilité est  $C = 100\%$ . Le niveau de choc USP d'incidence ne tient donc pas compte du choc de la Formule Standard. Pour illustrer nos propos, nous présentons les niveaux de chocs pour la 3<sup>ème</sup> année d'ancienneté en incapacité/invalidité. Dans ce cas, nous obtenons un choc USP d'incidence de +15% sur le taux de maintien pour la tranche d'âge de 20-29 ans (car le taux de maintien est inférieur à 50%), de -10% sur le taux de rétablissement pour la tranche de 25- 49 ans (car le taux de maintien est supérieur à 50%), et -13% sur le taux de rétablissement pour la tranche de 50 ans et plus. Les niveaux de chocs USP restent encore très compétitifs dans ce cas par rapport aux chocs de la Formule Standard (+20% sur taux de maintien si taux de maintien inférieur à 50% vs -20% sur taux de rétablissement sinon). La première grande différence avec les chocs proposés par la Formule Standard est que l'on observe de fortes variations entre les niveaux de chocs appliqués aux différentes anciennetés et classes d'âge.

- **Historique de calibrage disponible de 7 années**

Pour un historique de calibrage disponible de 7 année, le facteur de crédibilité est  $C = 50\%$ . Le niveau de choc USP d'incidence ne tient donc pas compte du choc de la Formule Standard. Pour illustrer nos propos, nous présentons les niveaux de chocs pour la 3<sup>ème</sup> année d'ancienneté en incapacité/invalidité.

Tranche âge	Taux maintien Expérience	Choc Expérience :	Choc FS :	Facteur de Crédibilité	Choc USP :
		(+) maintien vs (-) rétablissement	(+) maintien vs (-) rétablissement		(+) maintien vs (-) rétablissement
20-29 ans	Taux maintien < 50%	14%	20%	50%	17%
30-49 ans	Taux maintien < 50%	-9%	-20%	50%	-15%
50 ans et plus	Taux maintien < 50%	-12%	-20%	50%	-16%

Tableau 7 : Chocs de maintien et rétablissement (modèle AR(1), historique de 7 ans, C=50%).

Avant application des facteurs de crédibilité, les chocs d'expérience sont plus faibles que ceux de l'historique de 23 ans. Ceci découle du fait que l'écart-type associé à l'erreur *process* est plus faible dans ce cas que lorsque l'on considère un historique plus long. Dans notre exemple, l'introduction du facteur de crédibilité permet de compenser cet effet indu. Au global, les niveaux de chocs obtenus avec l'historique le plus court sont plus sévères que ceux obtenus avec l'historique long mais reste néanmoins une alternative à la Formule Standard avantageuse dans l'illustration proposée.

### 3. Impacts fonds propres économiques

Pour rappel, l'étude concerne le calibrage des USP pour le module de risque Santé similaire à la vie (« *Health SLT* »). L'application des chocs USP sur les risques d'incidence et de maintien a un impact direct sur le sous-module «*Disability/Morbidity*». Il y a un impact indirect via les matrices de corrélation sur les montants de SCR agrégés (« *Health SLT* », « *Health NSLT* », « *Adj* » et « *BSCR* ») et sur le montant de SCR global. Le tableau ci-dessous présente les comparaisons des SCR de souscription, du module « *Health SLT* », calculés respectivement avec les chocs USP estimés sur un historique long (de 16 années) et un historique court (de 5 ans). Les chocs retenus sont ceux obtenus par l'approche AR(1). Les calculs sont réalisés en respectant la segmentation par tranche d'âge pour l'application des chocs USP.

Historique de données	Provisions Best estimate	SCR avec Chocs USP	SCR avec Chocs FS	Variation
16 ans	1 000	261	856	-70%
5 ans	1 000	500	856	-42%

Tableau 9 : Impacts Chocs UPS sur SCR de souscription

Le calcul réalisé sur un historique long de 16 années avec les chocs USP conduit à une économie substantielle de 70% sur celui calculé avec les paramètres de la Formule Standard. Cette diminution est de 42% sur un historique plus faible de 5 ans. Dans notre exemple, nous remarquons également que le passage des chocs USP d'un historique court de 5 ans à un historique long de 16 ans joue à la baisse du SCR de souscription de l'ordre de 48%. L'impact en terme d'économie de SCR de souscription est donc très important.

## 6. Discussions

Dans notre illustration, la loi d'incidence dispose d'un historique minimal de 3 ans alors que pour la loi de maintien (vs rétablissement) il est de 5 ans. Dans ces conditions, il conviendrait d'appliquer pour les contrats d'anciennetés inférieures les chocs de la Formule Standard par défaut. Nous avons proposé dans notre approche de répondre aux contraintes de données (profondeur d'historique et taille suffisante de l'échantillon) en utilisant des estimateurs adaptés à la structure des informations et la théorie de crédibilité TVCL.

Le choix d'un processus AR(1) parmi les séries chronologiques est conservateur pour les portefeuilles étudiés. Il conviendrait lors de la mise en œuvre de l'approche de choisir meilleure série chronologique.

Nous avons fait l'hypothèse que les facteurs de crédibilité calibrés sur les lois centrales sont les mêmes que ceux applicables aux chocs. Sous cette hypothèse, nous acceptons sans le prouver, l'invariance des coefficients de crédibilité par les transformations conduisant à passer des lois centrales aux lois choquées. Toutefois s'agissant d'une première approximation, la démarche de crédibilité permet une révision régulière de ces facteurs de crédibilité lors des mises à jour des informations. Ils pourraient donc être revus à la hausse ou à la baisse.

## 7. Conclusion

La norme Solvabilité II permet de remplacer un sous-ensemble de paramètres de la Formule Standard par des paramètres de chocs propres à la compagnie d'assurance (*Undertaking Specific Parameters, USP*). Le travail réalisé dans le cadre de cet article est de proposer une approche permettant de calibrer des chocs USP pour les risques d'incidence et de maintien de la garantie arrêt de travail qui sont classés dans le module « Santé assimilable à la vie ». Nous proposons comme modèles un processus autorégressif d'ordre 1 et un Log-normal, combinées à des facteurs de crédibilité calibrés suivant la théorie de crédibilité TVCL. L'application de cette approche sur un portefeuille de prêts a permis d'apprécier les gains potentiels sur le SCR de souscription du module « *Health SLT* ». Nous obtenons des réductions significatives du besoin en capital propre par rapport à la Formule Standard de l'ordre de 40% pour un historique minimal de 5 années (70% pour un historique de 16 années). Ces résultats sont prometteurs en termes d'optimisation financière, d'évaluation interne des risques et de la solvabilité (*Own Risk and Solvency Assessment*). Notre approche est également utilisable dans le cadre d'un modèle interne.

## Références

- Aguir N. (2012), Impact de la modélisation multi-états sur le SCR en prévoyance, Mémoire de fin d'étude présenté devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon le 26 Septembre 2012
- Bühlmann, H. (1967), «Experience rating and credibility», ASTIN Bulletin, vol. 4, p. 199–207
- Bühlmann, H. (1969), «Experience rating and credibility», ASTIN Bulletin, vol. 5, p. 157–165
- Cambron A. (2011), Elaboration d'un modèle interne partiel concernant le risque de souscription non-vie pour tenir compte des spécificités d'une société spécialisée dans les branches longues, Mémoire présenté devant l'Institut de Statistique de l'Université Pierre et Marie Curie pour l'obtention du diplôme de statisticien mention actuariat
- Canadian Institute of Actuaries (2002), Commission des rapports financiers des compagnies d'assurances vie, Note éducative, mortalité prévue : polices canadiennes d'assurances vie individuelle avec tarification complète
- Canadian Institute of Actuaries (2014), Commission des rapports financiers des régimes de retraite, Note éducative révisée : sélection des hypothèses de mortalité aux fins des évaluations actuarielles des régimes de retraite
- CEIOPS (Janvier 2010) – CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency 2 : SCR standard formula – Article 111 j, k Undertaking-specific parameters. Consultation Paper 75.
- Cerchiara R. R., Magatti V., Undertaking Specific Parameters or a Partial Internal Model under Solvency 2?, 30th International Congress of Actuaries, 30 March to 4 April 2014, Washington, D.C., USA
- Cochran (1952), The chi 2 the test of goodness of fit, Annals of Mathematics Statistics, Vol. 23, n°3 p. 315
- De Vylder, F. (1981), «Practical credibility theory with emphasis on parameter estimation», ASTIN Bulletin, vol. 12, p. 115–131
- European Commission (Juillet 2014) – Delegated Acts Solvency II (Annexes).
- EIOPA (2011) – Draft proposal for Implementing Technical Standard on Undertaking Specific Parameters : Methods ,EIOPA-FinReq-11/023
- EIOPA (1er Avril 2014) – Technical Specification for the Preparatory Phase (Part 1, Part 2 & Annexes).
- EIOPA (1er Avril 2014) – Consultation Paper in the proposal for implementing technical standards with regard to the supervisory approval procedure to use undertaking-specific parameters.
- EIOPA (2 Juin 2014) – Consultation Paper on the proposal for Guidelines on Solvency II relating to Pillar 1 requirements.
- EIOPA (25 Juillet 2014) – The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation.
- Guibert Q., M. Juillard, O. N. Teuguia, F. Planchet (2014), Solvabilité Prospective en Assurance Méthodes quantitatives pour l'ORSA, Ed. Economica
- Journal Officiel de la Commission Européenne (17 Janvier 2015) – Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission.
- Koehler, K.J. and Larntz, K. (1980) An Empirical Investigation of Goodness of Fit Statistics for Sparse Multinomials. Journal of the American Statistical Association, 75, 336-344.
- Olympio A., et al. (2012), Gestion des risques d'entreprise : qualité des données, levier de pilotage stratégique, article congrès ERM AFIR Lyon juin 2012.
- Olympio A. (2019), Contributions au provisionnement en assurance de personnes et à la gestion des risques. Gestion et management. Université de Lyon, 2019. Français. NNT : 2019LYSE1148. Tel-02365540.
- Perrin M. (2012), Calibration des Undertaking Specific Parameters et leurs impacts sur les fonds propres, Mémoire d'actuariat.
- Planchet F., Therond P. (2011), Modèles de durée, Applications actuarielles, Ed. Economica
- Planchet F., Guibert Q., Juillard M. (2010), Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes : application à un contrat de rentes viagères, Bulletin Français d'Actuariat, Institut des Actuaire, 2010, 10 (20), pp. 5-34. <hal-00530864>