HAL
open science

SUR LES TRIANGLES AVEC UN CÔTÉ MINUSCULE

Christophe Cornut

To cite this version:

Christophe Cornut. SUR LES TRIANGLES AVEC UN CÔTÉ MINUSCULE. Journal of Lie Theory, 2021, 31 (4), pp.957-968. 10.48550/arXiv.2005.01521 . hal-02561382v2

HAL Id: hal-02561382

https://hal.science/hal-02561382v2

Submitted on 29 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LES TRIANGLES AVEC UN CÔTÉ MINUSCULE

CHRISTOPHE CORNUT

Résumé. Soit $W \subset O(V)$ le groupe de Weyl d'un système de racines $R \subset V$. Si $a+b+c=0=a'+b'+c'$ avec a, b et c respectivement conjugués à a', b' et c' dans V, alors (a,b,c) est conjugué à (a',b',c') dans V^3 lorsque a est, dans chaque composante irréductible de V, colinéaire à un copoids minuscule.

1. Introduction

Dans un espace affine euclidien A, deux triangles sont transformés l'un dans l'autre par une isométrie de A si et seulement si les longueurs de leurs côtés sont les mêmes, c'est-à-dire si et seulement si leurs côtés sont, deux à deux, transformés l'un dans l'autre par une isométrie de A [4, Proposition 8]. Pour l'espace vectoriel euclidien sous-jacent V de A, cette propriété élémentaire se traduit ainsi : l'injection

$$V_0^3 = \left\{(a,b,c) \in V^3 : a+b+c=0\right\} \hookrightarrow V^3$$

induit une *injection* de $G\backslash V_0^3$ dans $(G\backslash V)^3$, où G est le groupe orthogonal $O(V)$. Cela n'est plus nécessairement vrai pour un sous-groupe G de $O(V)$, comme on voit en dimension 2 avec $G = SO(V)$. Lorsque $G = W$ est le groupe de Weyl d'un système de racines réduit R dans V, la propriété ci-dessus reste cependant vraie pour les triangles dont l'un des côtés est *minuscule* ; on dit d'un élément a de V qu'il est minuscule lorsque $|\{(\alpha,a) : \alpha \in R_i\}| \leq 3$ pour toute composante irréductible R_i de R, où $(-,-)$ est le produit scalaire W-invariant de V. Ainsi :

Proposition 1. *Si $a \in V$ est minuscule, alors pour toute paire (b,b') d'éléments W-conjugués de V telle que $a+b$ et $a+b'$ sont également W-conjugués, b et b' sont déjà conjugués sous le stabilisateur W_a de a dans W.*

Remarque 2. Si a n'est pas minuscule, le résultat peut être vrai ou faux. Pour le système de racines de type A_2 dans $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$, où $W = \mathfrak{S}_3$, le résultat est faux pour $a = (-1,0,1)$: $b = (1,-1,0)$ et $b' = (0,1,-1)$ sont W-conjugués, $a+b = (0,-1,1)$ et $a+b' = (-1,1,0)$ sont W-conjugués, mais b et b' ne sont pas conjugués sous le stabilisateur $W_a = \{1\}$ de a dans W. Inversement, pour les systèmes de racines de type B_n ou C_n dans $V = \mathbb{R}^n$, qui ont le même groupe de Weyl mais pas les mêmes éléments minuscules, le résultat reste évidemment vrai pour tout $a \in V$ qui est minuscule pour le système de racines dual, C_n ou B_n.

Proposition 3. *Si $a \in V$ est minuscule, alors l'algèbre des fonctions polynomiales W_a-invariantes sur V est engendrée par les fonctions polynomiales W-invariantes $f : V \to \mathbb{R}$ et leurs translatées $v \mapsto f(v+a)$.*

2000 *Mathematics Subject Classification.* $20F55$.

Pour tout groupe fini G agissant linéairement sur V, les G-orbites dans V sont séparées par les fonctions polynomiales G-invariantes sur V. La proposition 1 résulte donc de la proposition 2. Pour leur démonstration, on se ramène facilement au cas où R est irréductible et engendre V. On peut aussi supposer que a est non nul, dominant relativement au choix d'une base Δ de R, et quitte à multiplier a par un scalaire strictement positif, on peut enfin supposer que $\{(\alpha, a) : \alpha \in R\} \subset \{0, \pm 1\}$. On dit alors que a est un *copoids dominant minuscule* de R. Ce sont ceux des éléments de la base duale de Δ qui correspondent aux racines simples de multiplicité 1 dans la plus haute racine positive de R. Le tableau ci-dessous, extrait de [1], donne pour chaque système de racines irréductible réduit les multiplicités des racines simples dans la plus haute racine positive, et les racines qui nous concernent y ont été encadrées. On traite séparément chacun de ces cas dans les sections suivantes, en s'appuyant sur les résultats connus concernant les invariants de W dans l'algèbre symétrique S de V ([1] pour A_n, B_n, C_n et D_n, et [5] pour E_6 et E_7). On y identifie systématiquement S à l'algèbre des fonctions polynomiales sur V grâce au produit scalaire de V. La translation $f(v) \mapsto f(v + a)$ sur les fonctions devient l'automorphisme $\tau(a)$ de S qui envoie $v \in V \subset S$ sur $v + (v, a)$. Il s'agit de montrer que la sous-algèbre $\boldsymbol{S}_a$ de S^{W_a} engendrée par S^W et $\tau(a)(S^W)$ est égale à S^{W_a}.

R	Diagramme de Dynkin avec multiplicités
A_n	$\boxed{1}$ — $\boxed{1}$ — $\cdots$ — $\boxed{1}$
B_n	$\boxed{1}$ — 2 — $\cdots$ — 2 =>= 2
C_n	2 — $\cdots$ — 2 =<= $\boxed{1}$
D_n	$\boxed{1}$ — 2 — $\cdots$ — 2 — $\boxed{1}$ | $\boxed{1}$
E_8	2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 4 — 2 | 3
E_7	$\boxed{1}$ — 2 — 3 — 4 — 3 — 2 | 2
E_6	$\boxed{1}$ — 2 — 3 — 2 — $\boxed{1}$ | 2
F_4	2 — 3 =>= 4 — 2
G_2	2 ≡>≡ 3

Je suis arrivé à cette étrange question via la théorie de Hodge p-adique, en étudiant une stratification des variétés affines de Deligne-Lusztig basée sur une classification de triangles, qui me semblait plus naturelle que les stratifications connues, basées sur la classification des côtés de ces triangles. Les résultats de cet article montrent que les deux approches sont équivalentes dans le cas minuscule. Je remercie Ariane Mezard de m'avoir encouragé à traiter les cas exceptionnels.

2. Le cas de A_n

Soit n un entier positif. Références pour cette section : [1, Chap. VI, §4, n°7].

2.1. On munit $V_{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ du produit scalaire $((x_i),(y_i)) = \sum x_i y_i$ et de la forme quadratique $q(x) = \frac{1}{2}(x,x)$. On note $I_{n+1} = \mathbb{Z}^{n+1}$, $e = (1^{n+1}) \in I_{n+1}$, V_n l'orthogonal de e, et $A_n = I_{n+1} \cap V_n = \{(x_i) \in I_{n+1} : \sum x_i = 0\}$. C'est un réseau pair d'indice $n+1$ dans son dual $A_n^* \subset V_n$, qui est engendré par ses racines $R_n = \{\alpha \in A_n : q(\alpha) = 1\}$, de base et diagramme de Dynkin donnés par

$$\begin{array}{lccccc} \alpha_1 & 1 & -1 & & & \\ \alpha_2 & & 1 & -1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ \alpha_n & & & & 1 & -1 \end{array} \qquad \alpha_1 \text{ — } \alpha_2 \text{ — } \cdots \text{ — } \alpha_n$$

La plus haute racine est $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Pour $r \in \{1, \cdots, n\}$ et $s = n+1-r$,

$$a_r = \frac{1}{n+1}\left(\underbrace{s, \cdots, s}_{r \text{ termes}}, \underbrace{-r, \cdots, -r}_{s \text{ termes}}\right) \in A_n^*$$

est dominant minuscule, orthogonal à toutes les racines simples sauf α_r, avec $q(a_r) = \frac{rs}{2(n+1)}$. On note W_n le groupe de Weyl de R_n. On étend l'action de W_n sur V_n à $V_{n+1} = V_n \perp \mathbb{R}e$ par l'action triviale sur $\mathbb{R}e$. On obtient ainsi l'action usuelle de $W_n = \mathfrak{S}_{n+1}$ sur V_{n+1}, par permutation des coordonnées. Le stabilisateur de a_r dans W_n est le sous-groupe $W_{r-1} \times W_{s-1} = \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s$ qui permute entre elles les r-premières et les s-dernières coordonnées. Il agit sur l'orthogonal $V_{r-1} \perp V_{s-1}$ de a_r dans V_n, où l'on a posé

$$\begin{aligned} V_{r-1} &= \{(x_1, \cdots, x_r, 0^s) : \textstyle\sum x_i = 0\}, \\ \text{et} \quad V_{s-1} &= \{(0^r, y_1, \cdots, y_s) : \textstyle\sum y_i = 0\}. \end{aligned}$$

2.2. On note $S_n \subset S_{n+1}$ les algèbres symétriques de $V_n \subset V_{n+1}$, donc

$$S_n[e] = S_{n+1} \quad \text{et} \quad S_n^{W_n}[e] = S_{n+1}^{\mathfrak{S}_{n+1}}.$$

Il est bien connu que $S_{n+1}^{\mathfrak{S}_{n+1}}$ est une algèbre graduée de polynômes engendrée par les polynômes symétriques élémentaires en $v \in \mathcal{V}$. D'après les relations de Newton de [2, Chap. IV, §6, n°4, Lemme 4] ou [5, §3], cette algèbre est aussi engendrée par

$$\mathfrak{v}_i = \sum_{v \in \mathcal{V}} v^i \quad \text{pour} \quad i = \{1, \cdots, n+1\}$$

où $\mathcal{V}$ est la $\mathfrak{S}_{n+1}$-orbite de $v_1 = (1, 0, \cdots, 0)$ dans V_{n+1}. Comme $e = \mathfrak{v}_1$ est fixé par $W_n = \mathfrak{S}_{n+1}$ et $a_1 = v_1 - \frac{1}{n+1}e$ est la projection orthogonale de v_1 sur V_n, $\mathcal{V} = A + \frac{1}{n+1}e$ où A est la W_n-orbite de a_1 dans V_n, donc

$$\mathfrak{v}_i = \sum_{a \in A} (a + \tfrac{1}{n+1}e)^i = \sum_{j=0}^{i} \tbinom{i}{j} \mathfrak{a}_j \cdot (\tfrac{1}{n+1}e)^{i-j} \quad \text{dans} \quad S_n^{W_n}[e]$$

avec $\mathfrak{a}_i = \sum_{a \in A} a^i$ dans S_n. On a donc aussi $S_{n+1}^{\mathfrak{S}_{n+1}} = \mathbb{R}[\mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_{n+1}][e]$ et

$$S_n^{W_n} = \mathbb{R}[\mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_{n+1}].$$

2.3. La W_n-orbite $A \subset V_n$ de a_1 se décompose en deux $W_{r-1} \times W_{s-1}$-orbites, B' et C', de cardinal r et s, avec $a_1 \in B'$ et

$$B' = \left\{ a \in A : (a, a_r) = \frac{s}{n+1} \right\} \quad \text{et} \quad C' = \left\{ a \in A : (a, a_r) = \frac{-r}{n+1} \right\}.$$

Les projections orthogonales B et C de ces orbites sur $V_{r-1} \perp V_{s-1} \subset V_n$ sont

$$B = B' - \tfrac{1}{r} a_r = W_{r-1} \cdot \tfrac{1}{r} \left(r-1, (-1)^{r-1}, 0^s \right) \subset V_{r-1}$$

$$C = C' + \tfrac{1}{s} a_r = W_{s-1} \cdot \tfrac{1}{s} \left(0^r, s-1, (-1)^{s-1} \right) \subset V_{s-1}$$

Comme ci-dessus, on a donc

$$S_{r-1}^{W_{r-1}} = \mathbb{R}[\mathfrak{b}_2, \cdots, \mathfrak{b}_r] \quad \text{et} \quad S_{s-1}^{W_{s-1}} = \mathbb{R}[\mathfrak{c}_2, \cdots, \mathfrak{c}_s]$$

où $\mathfrak{b}_i = \sum_{b \in B} b^i$ et $\mathfrak{c}_i = \sum_{c \in C} c^i$. Comme $S_n = S_{r-1} \otimes S_{s-1}[a_r]$, on obtient

$$S_n^{W_{r-1} \times W_{s-1}} = S_{r-1}^{W_{r-1}} \otimes S_{s-1}^{W_{s-1}}[a_r] = \mathbb{R}[\mathfrak{b}_2, \cdots, \mathfrak{b}_r, \mathfrak{c}_2, \cdots, \mathfrak{c}_s, a_r].$$

2.4. On note $\tau = \tau(a_r) \in \mathrm{Aut}(S_n)$ et $\boldsymbol{S}$ la sous-algèbre de $S_n^{W_{r-1} \times W_{s-1}}$ engendrée par $S_n^{W_n}$ et $\tau(S_n^{W_n})$. On se propose de montrer que $\boldsymbol{S} = S_n^{W_{r-1} \times W_{s-1}}$, et il suffit pour cela de vérifier que a_r et tous les $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$ sont dans $\boldsymbol{S}$.

2.5. Soit $\mathfrak{r}_2 = \sum_{\alpha \in R_n} \alpha^2$. C'est un élément de degré 2 de $S_n^{W_n}$ et

$$(\tau - 1)(\mathfrak{r}_2) = \sum_{\alpha \in R_n} (\alpha + (a_r, \alpha))^2 - \alpha^2 = 2 \sum_{\alpha \in R_n^+} (\alpha + 1)^2 - \alpha^2 = 4 \sum_{\alpha \in R_n^+} \alpha + 2 \left| R_n^+ \right|$$

où $R_n^+ = \{\alpha \in R_n : (\alpha, a_r) = 1\}$ est de cardinal rs et stable sous $W_{r-1} \times W_{s-1}$. Puisque $V_n^{W_{r-1} \times W_{s-1}} = \mathbb{R} a_r$, $\sum_{\alpha \in R_n^+} \alpha = \lambda a_r$ avec $\lambda (a_r, a_r) = \sum_{R_n^+} (a_r, \alpha) = |R_n^+|$, donc $\lambda = n+1$. Ainsi, $4(n+1) a_r = (\tau - 1)(\mathfrak{r}_2) - 2rs$ et $a_r \in \boldsymbol{S}$.

2.6. Comme $A = B' \coprod C'$, $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}'_i + \mathfrak{c}'_i$ avec $\mathfrak{b}'_i = \sum_{b \in B'} b^i$ et $\mathfrak{c}'_i = \sum_{c \in C'} c^i$. On a

$$(\tau - 1) \mathfrak{a}_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} \binom{i+1}{j} \left[\left(\tfrac{s}{n+1} \right)^{i+1-j} \mathfrak{b}'_j + \left(\tfrac{-r}{n+1} \right)^{i+1-j} \mathfrak{c}'_j \right].$$

Or $\mathfrak{a}_i$ et $(\tau - 1)\mathfrak{a}_{i+1}$ sont dans $\boldsymbol{S}$. Puisque la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{s}{n+1} & \frac{-r}{n+1} \end{pmatrix}$$

est inversible, on en déduit par récurrence sur i que $\mathfrak{b}'_i$ et $\mathfrak{c}'_i$ sont dans $\boldsymbol{S}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Or $B = B' - \frac{1}{r} a_r$ et $C = C' + \frac{1}{s} a_r$, donc

$$\mathfrak{b}_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \left(-\tfrac{1}{r} a_r \right)^{i-j} \mathfrak{b}'_j \quad \text{et} \quad \mathfrak{c}_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \left(\tfrac{1}{s} a_r \right)^{i-j} \mathfrak{c}'_j$$

sont également dans $\boldsymbol{S}$.

3. Les cas D_n, B_n et C_n

Soit n un entier positif, qui sera supérieur ou égal à 2 dans les cas B_n et C_n, et supérieur ou égal à 3 dans le cas D_n. Références : [1, Chap. VI, §4, n°5, 6, 8].

3.1. On munit $V_n = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire $((x_i),(y_i)) = \sum x_i y_i$ et de la forme quadratique $q(x) = \frac{1}{2}(x,x)$. On note $I_n = \mathbb{Z}^n$ et $D_n = \{(x_i) : \sum x_i \equiv 0 \bmod 2\}$. C'est un réseau pair d'indice 4 dans son dual $D_n^* \subset V_n$, qui est engendré par ses racines $R_n^D = \{\alpha \in D_n : q(\alpha) = 1\}$, de base et diagramme de Dynkin donnés par

$$\begin{array}{ccccc}
\alpha_1 & 1 & -1 & & \\
\alpha_2 & & 1 & -1 & \\
\vdots & & & \ddots & \ddots \\
\alpha_{n-1} & & & 1 & -1 \\
\alpha_n^D & & & 1 & 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccc}
\alpha_1 & — & \alpha_2 & — & \cdots & — & \alpha_{n-2} & — & \alpha_{n-1} \\
 & & & & & & | & & \\
 & & & & & & \alpha_n^D & &
\end{array}$$

La plus haute racine est $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n^D$ et

$$\begin{aligned}
b &= (1, 0, \cdots, 0) \\
c' &= \tfrac{1}{2}(1, \cdots, 1, -1) \\
c &= \tfrac{1}{2}(1, \cdots, 1)
\end{aligned}$$

sont les poids dominants minuscules, orthogonaux à toutes les racines simples sauf respectivement α_1, α_{n-1} et α_n^D. On a $q(b) = \frac{1}{2}$ et $q(c) = q(c') = \frac{n}{8}$. Le groupe de Weyl est $W_n^\circ = \{\pm 1\}_\circ^n \rtimes \mathfrak{S}_n$, où $\{\pm 1\}_\circ^n = \{(\epsilon_i) \in \{\pm 1\}^n : \prod \epsilon_i = 1\}$.

3.2. C'est un sous-groupe distingué de $W_n = \{\pm 1\}^n \rtimes \mathfrak{S}_n$, qui est le groupe de Weyl commun aux deux systèmes de racines duaux de type B_n et C_n,

$$\begin{aligned}
R_n^B &= \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j : 1 \le i < j \le n\} \cup \{\pm\epsilon_i : 1 \le i \le n\} \\
R_n^C &= \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j : 1 \le i < j \le n\} \cup \{\pm 2\epsilon_i : 1 \le i \le n\}
\end{aligned}$$

où $\epsilon_i = (\delta_{i,j})_j$ est la base canonique. Des bases de ces systèmes sont données par

$$\begin{array}{ccccc}
\alpha_1 & 1 & -1 & & \\
\alpha_2 & & 1 & -1 & \\
\vdots & & & \ddots & \ddots \\
\alpha_{n-1} & & & 1 & -1 \\
\alpha_n^B & & & & 1
\end{array}
\quad \text{et} \quad
\begin{array}{ccccc}
\alpha_1 & 1 & -1 & & \\
\alpha_2 & & 1 & -1 & \\
\vdots & & & \ddots & \ddots \\
\alpha_{n-1} & & & 1 & -1 \\
\alpha_n^C & & & & 2
\end{array}$$

Leurs diagrammes de Dynkin sont

$$\alpha_1 \text{ —— } \cdots \text{ —— } \alpha_{n-1} \text{ =>= } \alpha_n^B \quad \text{et} \quad \alpha_1 \text{ —— } \cdots \text{ —— } \alpha_{n-1} \text{ =<= } \alpha_n^C \ ,$$

leurs plus hautes racines sont

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-1} + 2\alpha_n^B \quad \text{et} \quad 2\alpha_1 + \cdots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n^C,$$

et leurs poids dominants minuscules sont

$$b = (1, 0, \cdots, 0) \quad \text{et} \quad c = \tfrac{1}{2}(1, \cdots, 1),$$

orthogonaux à toutes les racines simples sauf, respectivement, α_1 et α_n^C. On note $W_b \simeq \{\pm 1\}^{n-1} \rtimes \mathfrak{S}_{n-1}$ et $W_c \simeq \mathfrak{S}_n$ les stabilisateurs, $V_b = \{(x_i) : x_1 = 0\}$ et $V_c = \{(x_i) : \sum x_i = 0\}$ les orthogonaux de b et c dans V_n, et $S_b, S_c \subset S_n$ les algèbres symétriques de $V_b, V_c \subset V_n$. On note $\beta = \tau(b)$ et $\gamma = \tau(c)$, $\boldsymbol{S}_b$ la sous-algèbre de $S_n^{W_b}$ engendrée par $S_n^{W_n}$ et $\beta(S_n^{W_n})$, et $\boldsymbol{S}_c$ la sous-algèbre de $S_n^{W_c}$ engendrée par $S_n^{W_n}$ et $\gamma(S_n^{W_n})$. On se propose de montrer que $\boldsymbol{S}_b = S_n^{W_b}$ et $\boldsymbol{S}_c = S_n^{W_c}$.

3.3. On note B la W_n-orbite de b, qui a $2n$ éléments. Elle se décompose en trois W_b-orbites, les points fixes $\pm b$ et leur complémentaire B', qui est orthogonal à b, et en deux W_c-orbites B^+ et $B^- = -B^+$, avec $B^\pm = \{x \in B : (x,c) = \pm\frac{1}{2}\}$. On note A la projection orthogonale de B^+ sur V_c. C'est la W_c-orbite de $\frac{1}{n}(n-1,-1,\cdots,-1) \in V_c$. On a $S_n^{W_b} = S_b^{W_b}[b]$ et $S_n^{W_c} = S_c^{W_c}[c]$. D'après [5, §3], ou en adaptant la preuve de [1, Chap. VI, §4, n°5 (IX)] en y remplaçant les polynômes symétriques élémentaires par des sommes de puissances comme en 2.2, on sait que

$$\begin{array}{rclcrcl} S_n^{W_n} & = & \mathbb{R}[\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_4,\cdots,\mathfrak{b}_{2n}] & \text{avec} & \mathfrak{b}_i & = & \sum_{x\in B} x^i \\ S_b^{W_b} & = & \mathbb{R}[\mathfrak{b}'_2,\mathfrak{b}'_4,\cdots,\mathfrak{b}'_{2(n-1)}] & \text{avec} & \mathfrak{b}'_i & = & \sum_{y\in B'} y^i \\ S_c^{W_c} & = & \mathbb{R}[\mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_3,\cdots,\mathfrak{a}_n] & \text{avec} & \mathfrak{a}_i & = & \sum_{z\in A} z^i \end{array}$$

Comme dans le cas de A_n, on vérifie que

$$(\beta-1)\mathfrak{r}_2^B = 4(2n-1)b + 2(2n-1) \quad \text{et} \quad (\gamma-1)\mathfrak{r}_2^C = 8(n+1)c + (n^2+n)$$

où $\mathfrak{r}_2^B = \sum_{\alpha\in R_n^B}\alpha^2$ et $\mathfrak{r}_2^C = \sum_{\alpha\in R_n^C}\alpha^2$ sont fixés par W_n, donc $b \in \boldsymbol{S}_b$ et $c \in \boldsymbol{S}_c$. Puisque $B = \{\pm b\}\coprod B'$, $\mathfrak{b}_{2i} = 2b^{2i} + \mathfrak{b}'_{2i}$ et $\mathfrak{b}'_{2i} \in \boldsymbol{S}_b$ pour tout i, donc $\boldsymbol{S}_b = S_n^{W_b}$. D'autre part, $\mathfrak{b}_{2i} = 2\mathfrak{b}_{2i}^+$ où $\mathfrak{b}_i^+ = \sum_{y\in B^+} y^i$, donc $\mathfrak{b}_{2i}^+ \in S_n^{W_n}$ pour tout i. Or $(\gamma-1)\mathfrak{b}_{2i}^+ = \sum_{j=0}^{2i-1}\binom{2i}{j}(\frac{1}{2})^{2i-j}\mathfrak{b}_j^+$, donc $\mathfrak{b}_i^+ \in \boldsymbol{S}_c$ pour tout i par récurrence. Enfin $A = B^+ - \frac{2}{n}c$, donc $\mathfrak{a}_i = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\mathfrak{b}_j^+(\frac{-2}{n}c)^{i-j} \in \boldsymbol{S}_c$ pour tout i, et $\boldsymbol{S}_c = S_n^{W_c}$.

3.4. Soient maintenant W_b°, W_c° et $W_{c'}^\circ$ les stabilisateurs de b, c et c' dans W_n°. On note $\boldsymbol{S}_b^\circ$, $\boldsymbol{S}_c^\circ$, et $\boldsymbol{S}_{c'}^\circ$ les sous-algèbres de $S_n^{W_b^\circ}$, $S_n^{W_c^\circ}$ et $S_n^{W_{c'}^\circ}$ engendrées par $S_n^{W_n^\circ}$ et son image par, respectivement, $\beta = \tau(b)$, $\gamma = \tau(c)$ et $\gamma' = \tau(c')$. On vérifie que $W_c^\circ = W_c$, donc $S_n^{W_c} = \boldsymbol{S}_c \subset \boldsymbol{S}_c^\circ \subset S_n^{W_c^\circ} = S_n^{W_c}$, i.e. $\boldsymbol{S}_c^\circ = S_n^{W_c^\circ}$. Puisque c et c' sont conjugués sous W_n, on a de même $\boldsymbol{S}_{c'}^\circ = S_n^{W_{c'}^\circ}$. Il reste à montrer que $\boldsymbol{S}_b^\circ = S_n^{W_b^\circ}$. D'après [5, §3] ou [1, Chap. VI, §4, n°8 (IX)], $S_n^{W_n^\circ} = S_n^{W_n}[\mathfrak{d}]$ avec $\mathfrak{d} = \prod_{x\in B^+} x$, et de même $S_b^{W_b^\circ} = S_b^{W_b}[\mathfrak{d}']$ avec $\mathfrak{d}' = \prod_{x\in B'^+} x$ où $B'^+ = B' \cap B^+$. On voit donc que

$$S_n^{W_b^\circ} = S_b^{W_b^\circ}[b] = S_b^{W_b}[\mathfrak{d}', b] = S_n^{W_b}[\mathfrak{d}'].$$

Puisque $S_n^{W_b} = \boldsymbol{S}_b \subset \boldsymbol{S}_b^\circ$, il reste à vérifier que $\mathfrak{d}' \in \boldsymbol{S}_b^\circ$. Or $B^+ = \{b\} \cup B'^+$, donc $\mathfrak{d} = b\mathfrak{d}'$, et $(\beta-1)(\mathfrak{d}) = (\beta(b)-b)\mathfrak{d}' = \mathfrak{d}'$ est dans $\boldsymbol{S}_b^\circ$ puisque $\mathfrak{d}$ est dans $S_n^{W_n^\circ}$.

3.5. **Remarque.** Soient C et C' les W_n°-orbites de c et c'. Alors $\mathfrak{c}_i = \sum_{y\in C} y^i$ et $\mathfrak{c}'_i = \sum_{y\in C'} y^i$ sont fixés par W_n° et échangés par tout élément de $W_n \setminus W_n^\circ$. D'après ce qui précède, il existe un unique couple $(\mathfrak{c}_i^0, \mathfrak{c}_i^1)$ de $S_n^{W_n}$ tel que $\mathfrak{c}_i = \mathfrak{c}_i^0 + \mathfrak{c}_i^1\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{c}'_i = \mathfrak{c}_i^0 - \mathfrak{c}_i^1\mathfrak{d}$. Pour $i = n$, un calcul dans l'algèbre de polynômes $S_n = \mathbb{R}[x; x \in B_+]$ montre que $\mathfrak{c}_n^1 = \frac{n!}{2} \neq 0$, donc $\mathfrak{d} = \frac{1}{n!}(\mathfrak{c}_n - \mathfrak{c}'_n)$ et $S_n^{W_n^\circ} = S_n^{W_n}[\mathfrak{c}_n] = S_n^{W_n}[\mathfrak{c}'_n]$. Lorsque n est impair, $C' = -C$, donc $\mathfrak{c}'_i = (-1)^i\mathfrak{c}_i$ pour tout i, et $\mathfrak{c}_n = \frac{n!}{2}\mathfrak{d} = -\mathfrak{c}'_n$.

4. Les cas E_6 et E_7

Références : [1, Chap. VI, §4, n°10, 11, 12]

4.1. On munit $V_8 = \mathbb{R}^8$ du produit scalaire $((x_i),(y_i)) = \sum x_i y_i$ et de la forme quadratique $q(x) = \frac{1}{2}(x,x)$. On note $I_8 = \mathbb{Z}^n$, $D_8 = \{(x_i) \in I_8 : \sum x_i \equiv 0 \bmod 2\}$, et $E_8 = D_8 + \mathbb{Z}(\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}) = \{(x_i) \in \mathbb{Z}^8 \cup (\frac{1}{2}+\mathbb{Z})^8 : \sum x_i \in 2\mathbb{Z}\}$. C'est un réseau unimodulaire pair, engendré par ses racines $R_8 = \{\alpha \in E_8 : q(\alpha) = 1\}$, de base

$$\begin{array}{lcccccccc}
\alpha_1 & 1 & -1 & & & & & & \\
\alpha_2 & & 1 & -1 & & & & & \\
\alpha_3 & & & 1 & -1 & & & & \\
\alpha_4 & & & & 1 & -1 & & & \\
\alpha_5 & & & & & 1 & -1 & & \\
\alpha_6 & & & & & & 1 & -1 & \\
\alpha_7 & & & & & & 1 & 1 & \\
\alpha_8 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2}
\end{array}$$

et de diagramme de Dynkin

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\alpha_1 & — & \alpha_2 & — & \alpha_3 & — & \alpha_4 & — & \alpha_5 & — & \alpha_7 & — & \alpha_8 \\
 & & & & & & & & | & & & & \\
 & & & & & & & & \alpha_6 & & & &
\end{array}$$

4.2. On note $V_7 = \{(x_i) : \sum x_i = 0\}$ l'orthogonal de α_8 dans V_8. Alors $E_7 = V_7 \cap E_8$ est un réseau pair d'indice 2 dans son dual $E_7^* \subset V_7$, qui est engendré par ses racines $R_7 = V_7 \cap R_8 = \{\alpha \in E_7 : q(\alpha) = 1\}$, de base et diagramme de Dynkin

$$\begin{array}{lcccccccc}
\alpha_1 & 1 & -1 & & & & & & \\
\alpha_2 & & 1 & -1 & & & & & \\
\alpha_3 & & & 1 & -1 & & & & \\
\alpha_4 & & & & 1 & -1 & & & \\
\alpha_5 & & & & & 1 & -1 & & \\
\alpha_6 & & & & & & 1 & -1 & \\
\alpha_7' & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
\alpha_1 & — & \alpha_2 & — & \alpha_3 & — & \alpha_4 & — & \alpha_5 & — & \alpha_6 \\
 & & & & & & | & & & & \\
 & & & & & & \alpha_7' & & & &
\end{array}$$

La plus haute racine est $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7'$, et le vecteur

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}, \cdots, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right) \in E_7^*$$

est l'unique élément dominant minuscule de E_7^*, orthogonal à toutes les racines simples sauf α_1. On a $q(a) = \frac{3}{4}$. On note W_7 le groupe de Weyl de R_7, de cardinal $|W_7| = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$; c'est aussi le groupe orthogonal $O(E_7)$ de E_7.

On note A la W_7-orbite de a dans V_7.

4.3. On note V_6 l'orthogonal de a dans V_7. Alors $E_6 = V_6 \cap E_7$ est un réseau pair d'indice 3 dans son dual $E_6^* \subset V_6$, qui est engendré par ses racines $R_6 = V_6 \cap R_7 = \{\alpha \in E_6 : q(\alpha) = 1\}$, de base et diagramme de Dynkin

$$\begin{array}{lcccccccc}
\alpha_2 & & 1 & -1 & & & & & \\
\alpha_3 & & & 1 & -1 & & & & \\
\alpha_4 & & & & 1 & -1 & & & \\
\alpha_5 & & & & & 1 & -1 & & \\
\alpha_6 & & & & & & 1 & -1 & \\
\alpha_7' & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_2 & — & \alpha_3 & — & \alpha_4 & — & \alpha_5 & — & \alpha_6 \\
 & & & & | & & & & \\
 & & & & \alpha_7' & & & &
\end{array}$$

La plus haute racine est $\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha'_7 + 2\alpha_5 + \alpha_6$, et les vecteurs

$$b^+ = \frac{1}{3}\left(\frac{-3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-1}{2}, \cdots, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$
$$b^- = \frac{1}{3}\left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

sont les éléments dominants minuscules de E_6^*, orthogonaux à toutes les racines simples sauf respectivement α_2 et α_6. On a $q(b^\pm) = \frac{2}{3}$. On note W_6 le groupe de Weyl de R_6. C'est le stabilisateur de a dans W_7, il est de cardinal $|W_6| = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$, donc $|A| = 2^3 \cdot 7 = 56$. Le groupe orthogonal de E_6 est $O(E_6) = W_6 \times \{\pm 1\}$.

On note B^+ et B^- les W_6-orbites de b^+ et b^- dans V_6.

4.4. Pour $\epsilon \in \{+, -\}$, on note V_5^ϵ l'orthogonal de b^ϵ dans V_6. Alors $E_5^\epsilon = V_5^\epsilon \cap E_6$ est un réseau pair d'indice 4 dans son dual $E_5^{\epsilon *} \subset V_5^\epsilon$, qui est engendré par ses racines $R_5^\epsilon = V_5^\epsilon \cap R_6 = \{\alpha \in E_5^\epsilon : q(\alpha) = 1\}$. Pour $\epsilon = +$, une base de R_5^+ est

$$\begin{array}{lcccccccc}
\alpha_3 & & & 1 & -1 & & & & \\
\alpha_4 & & & & 1 & -1 & & & \\
\alpha_5 & & & & & 1 & -1 & & \\
\alpha_6 & & & & & & 1 & -1 & \\
\alpha'_7 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
\alpha_3 & - & \alpha_4 & - & \alpha_5 & - & \alpha_6 \\
 & & | & & & & \\
 & & \alpha'_7 & & & &
\end{array}$$

la plus haute racine est $\alpha_3 + \alpha'_7 + \alpha_6 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5$ et les vecteurs

$$c^+ = \tfrac{1}{4}(-1, -1, 1, \cdots, 1, -3, 1) \quad \text{et} \quad d^+ = \tfrac{1}{8}(-3, -3, 7, -1, \cdots, -1, 3)$$

de E_5^{+*} sont dominants minuscules, orthogonaux à toutes les racines simples sauf respectivement α_6 et α_3. Pour $\epsilon = -$, une base de R_5^- est

$$\begin{array}{lcccccccc}
\alpha_2 & & 1 & -1 & & & & & \\
\alpha_3 & & & 1 & -1 & & & & \\
\alpha_4 & & & & 1 & -1 & & & \\
\alpha_5 & & & & & 1 & -1 & & \\
\alpha'_7 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
\alpha_2 & - & \alpha_3 & - & \alpha_4 & - & \alpha_5 \\
 & & & & | & & \\
 & & & & \alpha'_7 & &
\end{array}$$

la plus haute racine est $\alpha_2 + \alpha_5 + \alpha'_7 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4$, et les vecteurs

$$c^- = \tfrac{1}{4}(-1, 3, -1, \cdots, -1, 1, 1) \quad \text{et} \quad d^- = \tfrac{1}{8}(-3, 1, \cdots, 1, -7, 3, 3)$$

de E_5^{-*} sont dominants minuscules, orthogonaux à toutes les racines simples sauf respectivement α_2 et α_5. Pour $\epsilon \in \{+, -\}$, on note W_5^ϵ le groupe de Weyl de R_5^ϵ. C'est le stabilisateur de b^ϵ dans W_6, il est de cardinal $|W_5^\epsilon| = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$, donc $|B^\epsilon| = 2^3 = 27$. Le groupe orthogonal de E_5^ϵ est $O(E_5^\epsilon) = W_5^\epsilon \times \{\pm 1\}$.

On note C^ϵ et D^ϵ les W_5^ϵ-orbites de c^ϵ et d^ϵ dans V_5^ϵ. Le stabilisateur de c^ϵ (resp. d^ϵ) dans W_5^ϵ est le groupe de Weyl d'un système de racines de type D_4 (resp. A_4), il est de cardinal $2^6 \cdot 3$ (resp. $2^3 \cdot 3 \cdot 5$), donc $|C^\epsilon| = 10$ et $|D^\epsilon| = 16$.

4.5. Revenons à E_7 et à la W_7-orbite A de a. Puisque $|A| = 56$ et W_7 contient $\mathfrak{S}_8$ et $\{\pm 1\}$, A est l'ensemble de tous les vecteurs obtenus par permutation des coordonnées de $\pm\frac{1}{2}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-1}{2}, \cdots, \frac{-1}{2})$. Considérons sur $A \times A$ la fonction W_7-invariante définie par $d(x, x') = q(x - x') = \frac{3}{2} - (x, x')$. On vérifie qu'elle est à valeur dans $\{0, 1, 2, 3\}$, que c'est une distance, et que $d(x, x') + d(x, -x') = 3$. En fait, l'ensemble

A muni de la relation d'incidence $x \sim x' \iff d(x,x') = 1$ est le graphe considéré dans [3] [1], dont d est la distance, et dont W_7 est le groupe des automorphismes.

4.6. On en déduit d'abord une partition de A en quatre parties stables sous W_6, échangées deux à deux par $-1 \in W_7$: les points fixes $\{a\}$ et $\{-a\}$, et deux parties à 27 éléments, A^+ et $A^- = -A^+$, qui sont respectivement définies par

$$A^+ = \{x \in A : d(a,x) = 1\} \quad \text{et} \quad A^- = \{x \in A : d(a,x) = 2\}.$$

D'autre part, on vérifie que

$$\begin{array}{rrcccl} & a^+ & := & b^+ + \frac{1}{3}a & = & \frac{1}{4}(-1,3,-1,\cdots,-1,3) \quad \in A^+ \\ \text{et} & a^- & := & b^- - \frac{1}{3}a & = & \frac{1}{4}(-3,1,\cdots,1,-3,1) \quad \in A^-. \end{array}$$

Pour $\epsilon \in \{+,-\}$ et puisque $|B^\epsilon| = 27$, il en résulte que $A^\epsilon = B^\epsilon + \frac{\epsilon}{3}a$ est la W_6-orbite de a^ϵ, et que B^ϵ est la projection orthogonale de $A^\epsilon \subset V_7$ sur V_6. En particulier, les W_6-orbites B^+ et B^- sont échangées par $-1 \in O(E_6)$. Puisque la restriction de d à A^ϵ est à valeur dans $\{0,1,2\}$, on obtient ensuite une décomposition de A^ϵ en trois parties stables sous W_5^ϵ : le point fixe $\{a^\epsilon\}$, et les sous-ensembles

$$C_7^\epsilon \;=\; \{x \in A^\epsilon : d(a^\epsilon, x) = 2\} \qquad \text{et} \qquad D_7^\epsilon \;=\; \{x \in A^\epsilon : d(a^\epsilon, x) = 1\}$$

qui ont respectivement 10 et 16 éléments. Leur projection orthogonale sur V_6 donne une décomposition analogue de B^ϵ en trois parties stables sous W_5^ϵ : le point fixe $\{b^\epsilon\}$ et des sous-ensembles $C_6^\epsilon = C_7^\epsilon - \frac{\epsilon}{3}a$ et $D_6^\epsilon = D_7^\epsilon - \frac{\epsilon}{3}a$, caractérisés par

$$C_6^\epsilon \;=\; \left\{y \in B^\epsilon : (y, b^\epsilon) = \tfrac{-2}{3}\right\} \qquad \text{et} \qquad D_6^\epsilon \;=\; \left\{y \in B^\epsilon : (y, b^\epsilon) = \tfrac{1}{3}\right\}\ .$$

On vérifie enfin que

$$c^\epsilon - \tfrac{1}{2}b^\epsilon + \tfrac{\epsilon}{3}a \;\in\; C_7^\epsilon \qquad \text{et} \qquad d^\epsilon + \tfrac{1}{4}b^\epsilon + \tfrac{1}{3}\epsilon a \;\in\; D_7^\epsilon,$$

donc

$$c^\epsilon - \tfrac{1}{2}b^\epsilon \;\in\; C_6^\epsilon \qquad \text{et} \qquad d^\epsilon + \tfrac{1}{4}b^\epsilon \;\in\; D_6^\epsilon.$$

Puisque $|C^\epsilon| = 10$ et $|D^\epsilon| = 16$, il en résulte que $C_6^\epsilon = C^\epsilon - \frac{1}{2}b^\epsilon$ et $D_6^\epsilon = D^\epsilon + \frac{1}{4}b^\epsilon$. On en déduit que les W_5^ϵ-orbites C^ϵ et D^ϵ de V_5^ϵ sont les projections orthogonales des W_5^ϵ-orbites que sont finalement C_7^ϵ et D_7^ϵ dans V_7, ou C_6^ϵ et D_6^ϵ dans V_6.

4.7. Soient $S_5^\epsilon \subset S_6 \subset S_7$ les algèbres symétriques de $V_5^\epsilon \subset V_6 \subset V_7$. On a donc $S_7^{W_6} = S_6^{W_6}[a]$ et $S_6^{W_5^\epsilon} = (S_5^\epsilon)^{W_5^\epsilon}[b^\epsilon]$. Il résulte de [5] [2] et de la remarque 3.5 que $S_6^{W_6}$ et $(S_5^\epsilon)^{W_5^\epsilon}$ sont les algèbres graduées respectivement engendrées par

$$\mathfrak{b}_i^\epsilon = \sum_{b \in B^\epsilon} b^i \quad \text{pour } i \in \{2,5,6,8,9,12\},$$

$$\mathfrak{c}_i^\epsilon = \sum_{c \in C^\epsilon} c^i \quad \text{pour } i \in \{2,4,6,8\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{d}_i^\epsilon = \sum_{d \in D^\epsilon} d^i \quad \text{pour } i = 5.$$

Soient $\tau = \tau(a)$ et $\tau^\epsilon = \tau(b^\epsilon)$. Notons $\boldsymbol{S}_7$ la sous-algèbre de $S_7^{W_6}$ engendrée par $S_7^{W_7}$ et $\tau(S_7^{W_7})$, et $\boldsymbol{S}_6^\epsilon$ la sous-algèbre de $S_6^{W_5^\epsilon}$ engendrée par $S_6^{W_6}$ et $\tau^\epsilon(S_6^{W_6})$. On

1. Avec les notations de [3], l'identification de $\Omega = P \cup P^*$ avec A se fait en associant à $p_\alpha \in P$ (resp. $p_\alpha^* \in P^*$) le vecteur de coordonnées $x_i = \frac{3}{4}$ (resp. $-\frac{3}{4}$) pour $i \in \alpha$ et $x_i = -\frac{1}{4}$ (resp. $\frac{1}{4}$) pour $i \notin \alpha$, où α décrit l'ensemble $\Phi^{(2)}$ des parties à deux élements de $\Phi = \{1,\cdots,8\}$.

2. Avec les notations de [5, § 2.1] pour E_6, $(y_1, x_1, \cdots, x_6, y_2)$ est la base duale de la base canonique de V_8, $-\frac{1}{2}(y_1 - y_2) + \frac{1}{6}S_1 - x_6$ est la forme linéaire $(b^-, -)$ sur V_8, et les générateurs I_k de Mehta pour $S_6^{W_6}$ sont donc nos $\mathfrak{b}_k^- = (-1)^k \mathfrak{b}_k^+$ pour $k \in \{2,5,6,8,9,12\}$.

se propose de montrer que $\boldsymbol{S}_7 = S_7^{W_6}$ et $\boldsymbol{S}_6^\epsilon = S_6^{W_5^\epsilon}$. Il suffit donc de montrer que (1) a et tous les $\mathfrak{b}_i^+$ sont dans $\boldsymbol{S}_7$, et (2) b^ϵ et tous les $\mathfrak{c}_i^\epsilon$, $\mathfrak{d}_i^\epsilon$ sont dans $\boldsymbol{S}_6^\epsilon$.

4.8. Posons $\mathfrak{r}_{7,2} = \sum_{\alpha\in R_7} \alpha^2$ et $\mathfrak{r}_{6,2} = \sum_{\alpha\in R_6} \alpha^2$, qui sont respectivement dans $S_7^{W_7}$ et $S_6^{W_6}$. On vérifie comme dans les cas précédents les relations

$$(\tau-1)(\mathfrak{r}_{7,2}) = 54 + 72a \quad \text{et} \quad (\tau^\epsilon - 1)(\mathfrak{r}_{6,2}) = 32 + 48b^\epsilon,$$

donc $a \in \boldsymbol{S}_7$ et $b^\epsilon \in \boldsymbol{S}_6^\epsilon$.

4.9. Notons $\mathfrak{a}_i = \sum_{x\in A} x^i$, un élément de degré i dans $S_7^{W_7}$. Comme

$$A = \{a\}\coprod A^+ \coprod (-A^+) \coprod \{-a\}$$

on voit que $\mathfrak{a}_i = 0$ pour $i \equiv 1 \bmod 2$, tandis que $\mathfrak{a}_i = 2(a^i + \mathfrak{a}_i^+)$ pour $i \equiv 0 \bmod 2$, avec $\mathfrak{a}_i^+ = \sum_{x\in A^+} x^i$. Comme a^i et $(\tau-1)(a^i) = (a+\frac{3}{2})^i - a^i$ sont dans $\boldsymbol{S}_7$, on en déduit que $\mathfrak{a}_{2i}^+$ et $(\tau-1)(\mathfrak{a}_{2i}^+)$ sont dans $\boldsymbol{S}_7$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Or $(a, A^+) = \frac{1}{2}$, donc

$$(\tau-1)\mathfrak{a}_{2i}^+ = \sum_{x\in A^+} (x+\tfrac{1}{2})^{2i} - x^{2i} = \sum_{j=0}^{2i-1} \tbinom{2i}{j}\, 2^{j-2i}\mathfrak{a}_j^+$$

et $\mathfrak{a}_i^+ \in \boldsymbol{S}_7$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ par récurrence. Enfin, $B^+ = A^+ - \frac{1}{3}a$, donc

$$\mathfrak{b}_i^+ = \sum_{x\in A^+} (x - \tfrac{1}{3}a)^i = \sum_{j=0}^{i} \tbinom{i}{j} (-\tfrac{1}{3}a)^{i-j}\mathfrak{a}_j^+ \in \boldsymbol{S}_7.$$

On a donc bien $\boldsymbol{S}_7 = S_7^{W_6}$.

4.10. Comme $B^\epsilon = \{b^\epsilon\}\coprod C_6^\epsilon \coprod D_6^\epsilon$, on voit que $\mathfrak{b}_i^\epsilon = (b^\epsilon)^i + \mathfrak{C}_i^\epsilon + \mathfrak{D}_i^\epsilon$ où

$$\mathfrak{C}_i^\epsilon = \sum_{y\in C_6^\epsilon} y^i \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}_i^\epsilon = \sum_{z\in D_6^\epsilon} z^i.$$

Comme $(b^\epsilon)^i$ et $(\tau^\epsilon - 1)(b^\epsilon)^i = (b^\epsilon + \frac{4}{3})^i - (b^\epsilon)^i$ sont dans $\boldsymbol{S}_6^\epsilon$, on en déduit que $\mathfrak{C}_i^\epsilon + \mathfrak{D}_i^\epsilon$ et $(\tau^\epsilon - 1)(\mathfrak{C}_i^\epsilon + \mathfrak{D}_i^\epsilon)$ sont dans $\boldsymbol{S}_6^\epsilon$. Or $(b^\epsilon, C_6^\epsilon) = \frac{-2}{3}$ et $(b^\epsilon, D_6^\epsilon) = \frac{1}{3}$, donc

$$(\tau^\epsilon - 1)(\mathfrak{C}_i^\epsilon + \mathfrak{D}_i^\epsilon) = \sum_{j=0}^{i-1} \tbinom{i}{j} \cdot \left((-\tfrac{2}{3})^{i-j}\mathfrak{C}_j^\epsilon + (\tfrac{1}{3})^{i-j}\mathfrak{D}_j^\epsilon\right).$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ étant inversible, on en déduit par récurrence sur i que $\mathfrak{C}_i^\epsilon$ et $\mathfrak{D}_i^\epsilon$ sont dans $\boldsymbol{S}_6^\epsilon$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Comme enfin $C^\epsilon = C_6^\epsilon + \frac{1}{2}b^\epsilon$ et $D^\epsilon = D_6^\epsilon - \frac{1}{4}b^\epsilon$,

$$\mathfrak{c}_i^\epsilon = \sum_{y\in C_6^\epsilon} (y + \tfrac{1}{2}b^\epsilon)^i = \sum_{j=0}^{i} \tbinom{i}{j} (\tfrac{1}{2}b^\epsilon)^{i-j}\mathfrak{C}_j^\epsilon$$

$$\text{et} \quad \mathfrak{d}_i^\epsilon = \sum_{z\in D_6^\epsilon} (z - \tfrac{1}{4}b^\epsilon)^i = \sum_{j=0}^{i} \tbinom{i}{j} (\tfrac{-1}{4}b^\epsilon)^{i-j}\mathfrak{D}_j^\epsilon$$

sont également dans $\boldsymbol{S}_6^\epsilon$: on a donc bien $\boldsymbol{S}_6^\epsilon = S_6^{W_5^\epsilon}$.

Références

[1] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968.

[2] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique.* Masson, Paris, 1981. Algèbre. Chapitres 4 à 7. [Algebra. Chapters 4–7].

[3] Bruce N. Cooperstein. A note on the Weyl group of type E_7. *European J. Combin.*, 11(5) :415–419, 1990.

[4] Euclide. *Les éléments. Vol. 1.* Bibliothèque d'Histoire des Sciences. [History of Science Library]. Presses Universitaires de France, Paris, 1990. Livres I–IV : géométrie plane. [Books I–IV : plane geometry], Translated from the text of Heiberg and with a commentary by Bernard Vitrac, With an introduction by Maurice Caveing.

[5] M. L. Mehta. Basic sets of invariant polynomials for finite reflection groups. *Comm. Algebra*, 16(5) :1083–1098, 1988.