HAL
open science

Méthode de perturbation à haut ordre pour l'estimation de valeurs propres aléatoires proche d'une zone de veering

Martin Ghienne, Benoit Nennig

To cite this version:

Martin Ghienne, Benoit Nennig. Méthode de perturbation à haut ordre pour l'estimation de valeurs propres aléatoires proche d'une zone de veering. 14ème Colloque National en Calcul des Structures, May 2019, Presqu'île de Gien, France. hal-02561331

HAL Id: hal-02561331

https://hal.science/hal-02561331v1

Submitted on 3 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2019
14ème Colloque National en Calcul des Structures
13-17 Mai 2019, Presqu'île de Giens (Var)

Méthode de perturbation à haut ordre pour l'estimation de valeurs propres aléatoires proche d'une zone de veering

M. Ghienne[1], B. Nennig[1]

[1] *Laboratoire Quartz EA7393, Institut Supérieur de Mécanique de Paris - Supméca, 3 rue Fernand Hainaut, 93400 Saint-Ouen*
{martin.ghienne,benoit.nennig}@supmeca.fr

Résumé — Une méthode de perturbation à haut ordre est proposée pour estimer les valeurs propres aléatoires d'une structure dont les paramètres sont supposés incertains. Une méthode itérative est utilisée pour calculer les dérivées $n^{\text{émes}}$ des valeurs et vecteurs propres du problème. En dehors des zones de veering, cette approche converge. En revanche, dans les zones de veering, on peut montrer que le rayon de convergence de la méthode est limité par la présence de singularités dans le plan complexe du paramètre. Ces singularités sont liées à des points de branchement appelés points exceptionnels.
Mots clés — Méthode de perturbation, Lieu de valeurs propres, Point Exceptionnel, Veering, Valeurs propres aléatoires.

1 Introduction

La caractérisation du comportement vibratoire des structures en présence de paramètres incertains permet de proposer des solutions plus robustes aux sources de variabilités des systèmes réels. La propagation des incertitudes au travers des modèles de structures reste néanmoins un défi en terme de simulation dû aux coûts de calculs élevés pour ce type d'applications.

Différentes approches peuvent être mises en place afin de propager les incertitudes au travers du modèle de comportement d'un système. On distingue les approches probabilistes [1, 2] ou non [3, 4] et parmi les approches probabilistes, on choisit de placer ce travail dans un cadre probabiliste paramétrique. Trois grandes familles de méthodes peuvent alors être identifiées : les méthodes basées sur un échantillonnage statistique ou méthode de Monte-Carlo [5, 6], les méthodes spectrales [7, 8] et les méthodes de perturbation [9, 10]. Les méthodes statistiques sont difficilement applicables pour les calculs de structures du fait du nombre important d'échantillons nécessaires pour garantir la convergence du résultat. En effet, le temps de calcul d'une simulation de Monte-Carlo devient rapidement rédhibitoire lorsque le temps de calcul d'un seul calcul déterministe de la structure étudiée augmente. Introduite par Ghanem et Spanos [7] à partir de travaux initiés par Wiener [11], la méthode des éléments finis stochastiques spectraux consiste à discrétiser les variables aléatoires du problème sur une base de polynômes multi-variés orthogonaux fonctions de variables aléatoires de distribution connue. Cette base est appelé Chaos Polynomial. L'identification des coefficients de cette décomposition peut être obtenue à l'aide de méthodes intrusives de type méthode de Galerkin [8] ou à l'aide de méthodes non-intrusives dites de Chaos creux [12]. Les principaux inconvénients des méthodes basées sur le Chaos Polynomial sont leur complexité de mise en oeuvre et leur coût de calcul qui peut s'avérer important lorsque le nombre de paramètres aléatoires augmente et que des polynômes d'ordre élevé sont requis. Les méthodes de perturbation sont basées sur l'approximation des variables aléatoires d'intérêt à l'aide d'un développement de Taylor tronqué. Elles sont par conséquent très simples à mettre en œuvre et permettent de réduire considérablement le temps de calcul comparé à une simulation de Monte-Carlo. Elles sont toutefois limitées aux problèmes considérant de faibles variabilités des paramètres aléatoires d'entrée [8, 13]. Dans le contexte de vibration des structures, les méthodes de perturbation sont réputées limitées au cas de valeurs propres suffisamment espacées les unes des autres [10]. Bien que les limitations des méthodes de perturbation soient souvent évoquées dans la littérature, il ne semble pas émerger de critère quantitatif a priori permettant de statuer sur la qualité de l'approximation.

Ces limitations sont-elles intrinsèques ou sont-elles dues au faible degré (1 ou 2) des séries de Taylor utilisées ? Il est connu, que la convergence des méthodes de perturbation est moins bonne lorsque deux

valeurs propres deviennent très proches [10]. Dans un contexte déterministe, ce phénomène est connu sous le nom de *veering* [14]. L'étude paramétrique des valeurs propres d'un système montre en effet que, suivant les valeurs du paramètre considéré, les valeurs propres se rapprochent, s'évitent puis s'éloignent [15]. Ce phénomène est d'autant plus marqué que le système possède des symétries ou de la périodicité.

L'objectif de ce travail est d'évaluer le potentiel des méthodes de perturbation à haut ordre pour la caractérisation vibratoire des structures en présence de paramètres incertains. On étudiera en particulier l'influence de l'ordre de l'approximation et de l'interaction entre les valeurs propres (veering). L'approche employée peut également être adaptée à l'étude des conditions de stabilité du système ou à l'optimisation de ses performances vis à vis de critères vibratoires.

La première partie de ce travail présente la méthode de perturbation et notamment son implémentation à haut ordre. Ensuite, sa convergence est étudiée en fonction de l'ordre et de l'intensité du veering sur un cas test de référence [10] correspondant à un système masse-ressort à 3 degrés de liberté (ddl) dépendant d'un seul paramètre aléatoire. Ce système, facilement paramétrable, permet d'évaluer la qualité de l'approximation obtenue par la méthode de perturbation par rapport à une simulation de Monte Carlo.

2 Méthode de perturbation d'ordre élevé pour la résolution du problème aux valeurs propres aléatoires

On s'intéresse au cas d'un système non amorti (ou proportionnellement amorti) dont certains paramètres varient aléatoirement. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ l'espace probabilisé associé à l'expérience et $L_2(\Omega)$ l'espace de Hilbert des variables aléatoires de carré intégrable et $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$ la norme associée. Dans le cas d'un système à N ddl, le problème aux valeurs propres aléatoires généralisé s'écrit alors

$$\lambda_i(\theta)\mathbf{M}(\theta)\mathbf{\Phi}_i(\theta) = \mathbf{K}(\theta)\mathbf{\Phi}_i(\theta), \tag{1}$$

où

$$\lambda_i(\theta) \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{\Phi}_i(\theta) \in \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{M}(\theta) \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad \mathbf{K}(\theta) \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad \theta \in \Omega.$$

Ici, $\lambda_i(\theta)$ et $\mathbf{\Phi}_i(\theta)$ sont les valeurs propres et vecteurs propres (voir section 2.1 pour leur normalisation) aléatoires du problème. Les matrices $\mathbf{M}(\theta)$ et $\mathbf{K}(\theta)$ représentent les matrices de masse et de raideur du système. On suppose que les incertitudes sont dues uniquement à la présence de paramètres aléatoires et l'on note $\boldsymbol{\nu}(\theta) = [\nu_1(\theta), ..., \nu_m(\theta)]^t$ le vecteur constitué de ces paramètres aléatoires. Tant que les paramètres sont réels, ces matrices sont réelles et symétriques. Les valeurs propres sont donc réelles et positives. On notera dans la suite $\mathrm{E}[\cdot]$ et $\sigma[\cdot]$ les opérateurs mathématiques correspondants à l'espérance et l'écart-type.

On définit $\overline{\mathbf{M}}$ et $\overline{\mathbf{K}}$ les parties déterministes des matrices de masse et de raideur obtenues en prenant la moyenne du vecteur aléatoire $\mathrm{E}[\boldsymbol{\nu}(\theta)] = \boldsymbol{\mu}$. Ainsi $\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\mu})$ et $\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\mu})$. La partie déterministe des valeurs propres $\overline{\lambda}_i = \lambda_i(\boldsymbol{\mu})$ est alors obtenue en résolvant le problème aux valeurs propres déterministe

$$\overline{\mathbf{K}}\overline{\mathbf{\Phi}}_i = \overline{\lambda}_i\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{\Phi}}_i. \tag{2}$$

2.1 Méthode de perturbation

La méthode de perturbation consiste à approcher une variable ou un vecteur aléatoire à l'aide de son développement de Taylor (généralement) pris au voisinage de $\boldsymbol{\nu}(\theta) = \boldsymbol{\mu}$. Les valeurs propres du problème étant des fonctions non-linéaires du vecteur de paramètre $\boldsymbol{\nu}$, on suppose que ces fonctions $\lambda_i(\boldsymbol{\nu}) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ sont continues et au moins n fois différentiables dans la mesure où $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$ sont continues et n fois différentiables par rapport à $\boldsymbol{\nu}$. Le développement de Taylor à l'ordre n de la $i^{\text{ème}}$ valeur propre s'écrit alors

$$\lambda_i(\boldsymbol{\nu}) = \lambda_i(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{k=1}^{m}\left(\left.\frac{\partial\lambda_i}{\partial\nu_k}\right|_{\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\mu}}(\nu_k-\mu_k)\right) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\lambda_i}{\partial\nu_k\partial\nu_j}\right|_{\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\mu}}(\nu_k-\mu_k)(\nu_j-\mu_j)\right) + \dots. \tag{3}$$

Au premier ordre, le développement de Taylor suppose une relation linéaire de la valeur propre par rapport aux variables aléatoires du problème. Cette première approximation est valable pour une faible variabilité de $\boldsymbol{\nu}$. Lorsque les paramètres aléatoires sont assimilables à des variables aléatoires gaussiennes,

cette approche revient à assimiler les valeurs propres aléatoires du problème comme des variables aléatoires également gaussiennes dont les densités de probabilité peuvent être facilement estimées analytiquement [9]. Lorsques les valeurs propres ne peuvent être assimilées à des variables aléatoires gaussiennes, la méthode de perturbation à un ordre plus élevé permet d'estimer les grandeurs statistiques (premiers moments) nécessaires à l'identification des densités de probabilité associées à ces valeurs propres aléatoires. Adhikari et Friswell [10] se basent par exemple sur une méthode de perturbation d'ordre deux pour estimer les premiers moments statistiques des valeurs propres aléatoires d'un système multivarié dont les paramètres aléatoires sont assimilés à des variables gaussiennes.

La partie suivante présente une méthode de calcul des dérivées $n^{\text{èmes}}$ des valeurs propres du système nécessaires à la construction du développement de Taylor d'ordre n.

2.2 Calcul de dérivées d'ordre élevé

Le calcul des dérivées des valeurs et vecteurs propres a été largement étudié ces dernières décennies, ces grandeurs intervenant dans de nombreuses applications telles que l'optimisation de forme, le recalage de modèle ou l'analyse de sensibilité. Une revue rapide des différentes méthodes existantes est proposée par Ghienne et al [16] pour le calcul des dérivées $n^{\text{ème}}$ des valeurs propres et vecteurs propres de problèmes hermitiens. Dans un contexte plus général dédié aux matrices non-hermitiennes, se referrer à [17]. On retiendra que ces méthodes peuvent être classées en trois catégories, on parle alors de méthodes dites *adjointes*, *itératives* ou *directes*. Généralement, les méthodes directes nécessitent uniquement le calcul du vecteur propre à droite et la factorisation d'un système linéaire pour chaque valeur propre dont on souhaite calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$, et ce indépendamment du nombre de paramètre du problème et quelque soit l'ordre de la dérivée. Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse à un nombre limité de valeurs propres et l'ordre de dérivation peut être élevé ce qui rend les approches directes tout à fait adaptées. On choisit de se baser sur la méthode directe proposée par Andrews et al. [17].

On définit le problème aux valeurs propres dépendant de m paramètres complexes déterministes $\boldsymbol{\nu} = [\nu_1, ..., \nu_m]^t$. Ce problème peut s'écrire sous la forme d'une fonction matricielle d'ordre $N \times N$ notée $\mathbf{L}(\lambda_i(\boldsymbol{\nu}), \boldsymbol{\nu})$ et telle que

$$\mathbf{L}(\lambda_i(\boldsymbol{\nu}), \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{\nu}) = \mathbf{0}, \tag{4}$$

avec $\lambda_i(\boldsymbol{\nu})$ la $i^{\text{ème}}$ valeur propre du problème, $\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{\nu}) \neq \mathbf{0}$ le vecteur propre à droite associé et $N \geq 2$. On suppose que $\mathbf{L}$ est une fonction analytique dépendant de $\boldsymbol{\nu}$ et de λ_i au voisinage de $\boldsymbol{\nu}_0$. On suppose également que toutes les valeurs propres sont simples (ou semi-simples). $\mathbf{L}$ peut représenter un problème aux valeurs propres généralisé complexe symétrique ou quadratique. Les vecteurs propres du problème étant définis à une constante multiplicative près, leurs dérivées succéssives ne peuvent être calculées de manière unique. On définit alors la condition de normalisation

$$\mathbf{v}^t \boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{\nu}) = 1. \tag{5}$$

Ici, $\mathbf{v}$ est un vecteur constant et ^{t} est l'opérateur de transposition (voir [17] pour d'autres normalisations). Les dérivées successives de λ_i peuvent alors être calculées de manière récursive en résolvant le système linéaire constitué de la dérivée $n^{\text{ème}}$ du problème aux valeurs propres (4) et de la condition de normalisation (5)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} & \partial_\lambda \mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}_i \\ \mathbf{v}^t & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_i^{(n)} \\ \lambda_i^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_n \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Le second membre $\mathbf{F}_n$ de l'équation (6) contient les termes issus des dérivations successives du couple de valeurs propres / vecteurs propres considérés. La dernière ligne du second membre s'annule du fait de la normalisation choisie pour les vecteurs propres du problème. Dans le cas général, une expression explicite de la dérivée peut être obtenue en utilisant la formule de Faá Di Bruno dans le cas de fonction composées ou avec la formule de Liebnitz pour les produits de fonctions. On notera qu'en terme de temps de calcul, cet algorithme nécessite une nouvelle factorisation de l'opérateur $\mathbf{L} \equiv \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}$ [17] pour chaque mode considéré mais que cette factorisation est la seule étape de calcul réellement coûteuse et qu'elle permet d'accéder à n'importe quel ordre de dérivation des valeurs propres du système. On peut noter que cette méthode peut-être adaptée pour conserver les symétries des matrices si les paramètres sont réels.

3 Etude des limitations des méthodes de perturbation

On s'intéresse dans cette partie à la caractérisation quantitative des limitations des méthodes de perturbation pour l'approximation de la réponse vibratoire des systèmes en présence de paramètres incertains. On ne considère ici qu'un seul paramètre aléatoire mais les résultats obtenus pourront être étendus aux systèmes multiparamétriques.

3.1 Système à 3 degrés de liberté

On s'intéresse ici à un système masse-ressort non amorti à trois ddl. Cet exemple, tiré de la littérature [18, 10], est présenté Figure 1. La configuration des masses est symétrique et il est possible de facilement configurer les valeurs propres du système par la modification d'un seul des paramètres du problème. Cette propriété sera exploitée afin de caractériser la qualité de l'approximation obtenue par la méthode de perturbation suivant la configuration relative des valeurs propres aléatoires.

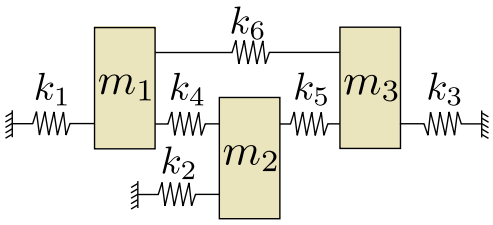


FIGURE 1 – Définition du système masse-ressort non amorti à 3 ddl.

Les matrices de masse **M** et de raideur **K** de ce système à trois ddl s'écrivent

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1+k_4+k_6 & -k_4 & -k_6 \\ -k_4 & k_2+k_4+k_5 & -k_5 \\ -k_6 & -k_5 & k_3+k_5+k_6 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

On se limite dans le cadre de ce travail au cas d'un seul paramètre aléatoire, ici la raideur du ressort $k_6(\theta)$. On suppose que les autres raideurs sont déterministes et prises égales à $k_1 = 1\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, $k_2 = 2\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, $k_3 = 3\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, $k_4 = 1\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, $k_5 = 1\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. En se basant sur le principe du maximum d'entropie, la raideur aléatoire $k_6(\theta)$ peut être modélisée comme une variable aléatoire suivant une distribution Gamma [1]. Son espérance est prise égale à $\mathrm{E}[k_6] = 1\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ et son coefficient de variation égal à $\delta[k_6] = 0.2$. Les masses sont déterministes et prises égales à $m_i = 1\,\mathrm{kg}$.

Une étude paramétrique du lieu des valeurs propres du système à 3 ddl lorsque k_6 varie est présentée Figure 2. Les résultats de la simulation de Monte Carlo du système en considérant k_6 comme une raideur aléatoire sont également présentés en vis-à-vis du lieu des valeurs propres. La densité de probabilité de $k_6(\theta)$ ainsi que les densités marginales des trois valeurs propres aléatoires du système ont été obtenues pour 10000 tirages indépendants de k_6.

La Figure 2 illustre le fait que le lieu des valeurs propre peut être vu comme un méta-modèle permettant de générer les tirages des variables aléatoires de sortie à partir du tirage du (ou des) paramètre(s) d'entrée du problème. En présence de veering, la transformation est fortement non linéaire. Les densités de probabilités marginales des valeurs propres aléatoires sont donc très distordues par rapport à la pdf du paramètre entrée. De manière pragmatique, on cherche donc à évaluer la qualité de l'approximation de la série de Taylor des différentes valeurs propres en fonction de l'ordre du développement et de leur interaction (veering).

Les dérivées successives du problème aux valeurs propres (1), permettent d'obtenir une expression pour le second membre $\mathbf{F}_n$

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}_i^{(n)} - \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_i^{(0)}\lambda_i^{(n)} = \mathbf{F}_n = -\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\mathbf{K}^{(k)}\boldsymbol{\Phi}_i^{(n-k)} + \mathbf{M}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\lambda_i^{(k)}\boldsymbol{\Phi}_i^{(n-k)}. \tag{8}$$

Comme la dépendance au paramètre k_6 est linéaire, on peut noter que la récurrence sur **K** après le premier terme.

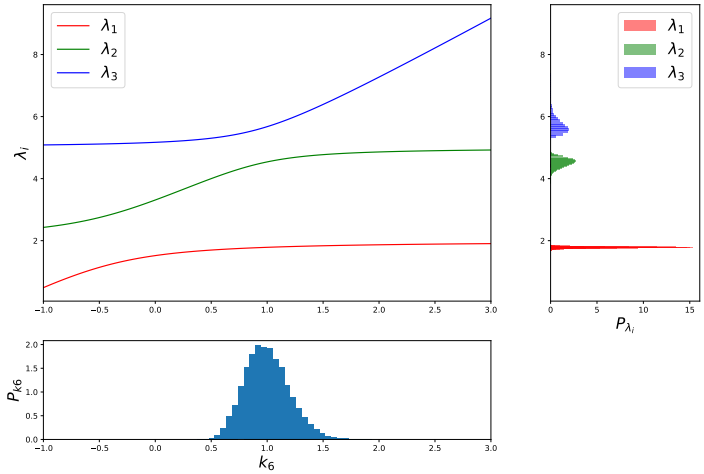


FIGURE 2 – Lieu des valeurs propres et densités marginales des valeurs propres aléatoires du système à 3 ddl.

3.2 Convergence de l'approximation de Taylor

On s'intéresse ici à la plage de validité du développement de Taylor suivant l'ordre d'approximation utilisé. On considère le système à 3 ddl présenté section 3.1, les différentes raideurs sont prises égales à leur valeur déterministe et la raideur k_6 est considérée comme variable. Le développement de Taylor des trois valeurs propres du système est calculé à l'ordre n au voisinage de $k_6 = k_6^0 = 1\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Le calcul des dérivées d'ordre élevé des valeurs propres nécessaire à la construction du développement de Taylor est basé sur l'algorithme présenté section 2.2. On peut noter une excellente stabilité numérique. Les dérivées ont été calculées ici jusqu'à l'ordre 20.

La Figure 3 présente les résultats de l'approximation de Taylor avec $n \in [\![1, 20]\!]$ pour les trois valeurs propres du problème. En dehors d'une zone de veering, par exemple pour la première valeur propre λ_1 ou pour les autres valeurs propres lorsque $k_6^0 \gg 1\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, la série converge et peu de terme sont requis pour reconstruire précisément la fonction sur une large plage de raideur. On peut noter qu'un seul calcul { valeur propre, système linéaire} est requis pour reconstruire toute la figure. Pour les deuxième et troisième valeurs propres λ_2 et λ_3 pour lesquelles on observe un veering modéré, on constate graphiquement que la série de Taylor converge parfaitement dans un voisinage de k_6^0 mais pas au delà quelque soit l'ordre d'approximation. En faisant varier la valeur du paramètre k_3, il est possible de passer d'un veering faible Figure 4(a), modéré 4(b) ou fort 4(c). On observe que plus le veering est prononcé, plus le rayon de convergence des séries de Taylor pour la paire de valeurs propres impliquée est réduit. Ce problème de convergence traduit en général la présence d'une singularité dans le plan complexe du paramètre, ici k_6, dans le voisinage du point de calcul, ici k_6^0.

Il a été montré pour les problèmes hermitiens [15, 19, 20] que le veering est une conséquence d'une dégénérescence du problème aux valeurs pour une valeur complexe du paramètre. En effet, quand celui est prolongé dans le plan complexe, les matrices **K** et **M** ne sont plus hermitiennes et il est possible qu'au moins deux valeurs propres et deux vecteurs propres coalescent. Le point de l'espace paramétrique ou se produit la coalescence est appelé point exceptionnel (EP) [21]. En mécanique, les EP sont aussi liés à la présence d'instabilité[22] ou de forte atténuation par exemple en acoustique [23, 24].

Une analyse des perturbations autour d'un EP montre que la valeur propre double se sépare en deux valeurs propres simples. La dissociation est très sensible car elle dépend de la racine carré de la perturbation, dont l'EP constitue un point de branchement. Ce comportement est illustré sur la Figure 5, où la partie réelle des valeurs propres λ_2 et λ_3 est tracée dans le plan complexe du paramètre k_6. On peut voir qu'au niveau de l'EP ($k_6 = k_6^*$), les deux valeurs propres sont identiques. Le cas précédent où $k_6 \in \mathbb{R}$ correspond à une coupe des surfaces de Riemann des valeurs propres. La distance entre le point de calcul k_6^0 et le point singulier de l'EP permet de définir le rayon de convergence ρ de la série de Taylor en k_6^0. Sur cet exemple, on trouve $\rho \approx 0.6\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, ce qui est en accord avec les résultats observés sur la Figure 3.

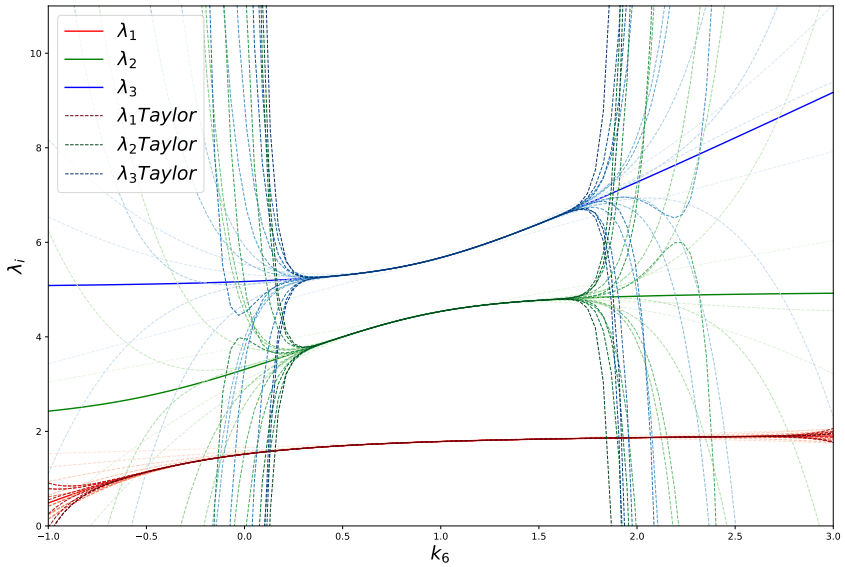


FIGURE 3 – Influence de l'ordre du développement de Taylor ($n \in [\![1, 20]\!]$) sur la reconstruction des deuxièmes et troisièmes valeurs propres du problème.

On comprend alors que plus l'EP est proche de l'axe réel, plus le veering sera prononcé et plus le rayon de convergence de la série de Taylor sera limité.

4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons mis en œuvre une méthode pour calculer les dérivées d'ordre élevé des valeurs propres. Ce type de problème a de nombreuses applications allant de l'étude des conditions de stabilité d'un système à l'optimisation de ses performances vibratoires. Cette méthode a été appliquée ici à une méthode de perturbation pour la prise en compte de paramètres incertains en vibration des structures.

Numériquement robuste, le calcul des dérivées d'ordre élevé des valeurs propres ouvre des perspectives intéressantes pour la reconstruction des lieux des valeurs propres en dehors des zones de veering. Pour un problème mono-paramétrique, nous avons ainsi mis en évidence que le rayon de convergence de la série de Taylor est limité par la présence de singularités dans le plan complexe du paramètre [19, 25, 15]. Ceci justifie quantitativement une des limites des méthodes de perturbation. Ces singularités, liées à des points de branchement et connues sous le nom de *point exceptionnel* [21], sont typiques des problèmes aux valeurs propres non-Hermitiens.

L'extension à des problèmes à grand nombre de ddl ne présente, *a priori*, pas de verrous scientifiques. On notera que, d'un point de vue algorithmique, la méthode proposée est efficace si l'on se limite aux premières valeurs propres du problème.

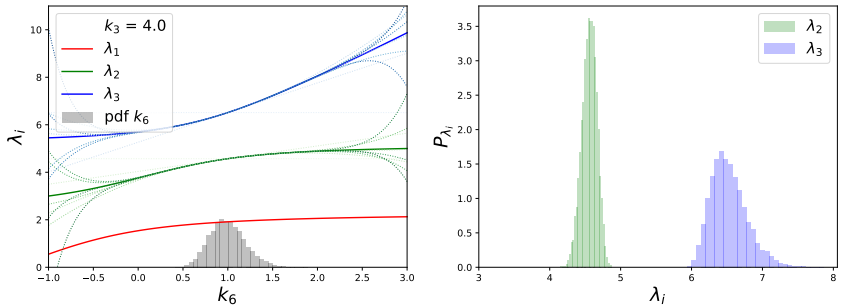
Des travaux sont actuellement en cours pour localiser les points exceptionnels (EP) d'un système afin de proposer de nouvelles méthodes d'approximation plus adaptées à l'estimation des valeurs propres au voisinage d'un EP. Ce type d'approche, similaire aux travaux de Luongo [26], permettrait d'étendre l'utilisation des méthodes de perturbation à des variabilités plus grandes ou sur des structures présentant de nombreuses (quasi)symétries ou périodicités où les effets de veering peuvent être importants.

Références

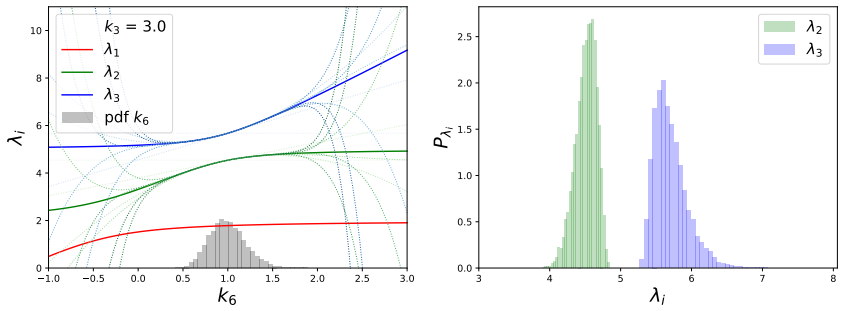
[1] C. Soize. Stochastic modeling of uncertainties in computational structural dynamics - recent theoretical advances. *Journal of Sound and Vibration*, 332(10) :2379–2395, May 2013.

[2] C. Blanzé and L. Champaney. A computational strategy for the random response of assemblies of structures. *International Journal of Solids and Structures*, 41(22-23) :6383 – 6405, 2004.

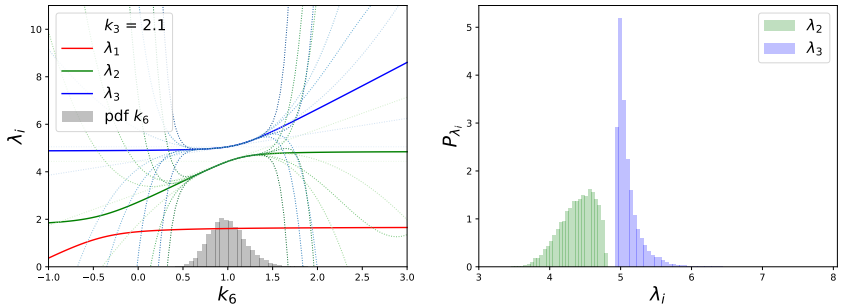
[3] L.A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 100(1) :9 – 34, 1999.



(a) $k_3 = 4$, veering faible



(b) $k_3 = 3$, veering modéré



(c) $k_3 = 2$, veering fort

FIGURE 4 – Influence du phénomène de veering sur l'approximation de la méthode de perturbation ($n \in [\![1, 20]\!]$) ainsi que sur les densités marginales des deuxièmes et troisièmes fréquences propres du système.

[4] P. Ladevèze, G. Puel, and T. Romeuf. Lack of knowledge in structural model validation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(37) :4697 – 4710, 2006.

[5] M. Shinozuka and C. J. Astill. Random eigenvalue problems in structural analysis. *AIAA Journal*, 10(4) :456–462, April 1972.

[6] C. A. Schenk and G. I. Schüller. Uncertainty assessment of large finite element systems. In *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, volume 24, chapter 9, pages 59–61. Springer Berlin Heidelberg, 2005.

[7] R. Ghanem and P. D. Spanos. Polynomial chaos in stochastic finite elements. *Journal of Applied Mechanics*, 57(1) :197–202, March 1990.

[8] R. Ghanem and D. Ghosh. Efficient characterization of the random eigenvalue problem in a polynomial chaos decomposition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72(4) :486–504, 2007.

[9] J. D. Collins and W. T. Thomson. The eigenvalue problem for structural systems with statistical properties. *AIAA Journal*, 7(4) :642–648, April 1969.

[10] S. Adhikari and M.I. Friswell. Random matrix eigenvalue problems in structural dynamics. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 69(3) :562–591, 2007.

[11] N. Wiener. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4) :897–936, October 1938.

[12] G. Blatman and B. Sudret. Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression. *Journal of Computational Physics*, 230(6) :2345 – 2367, 2011.

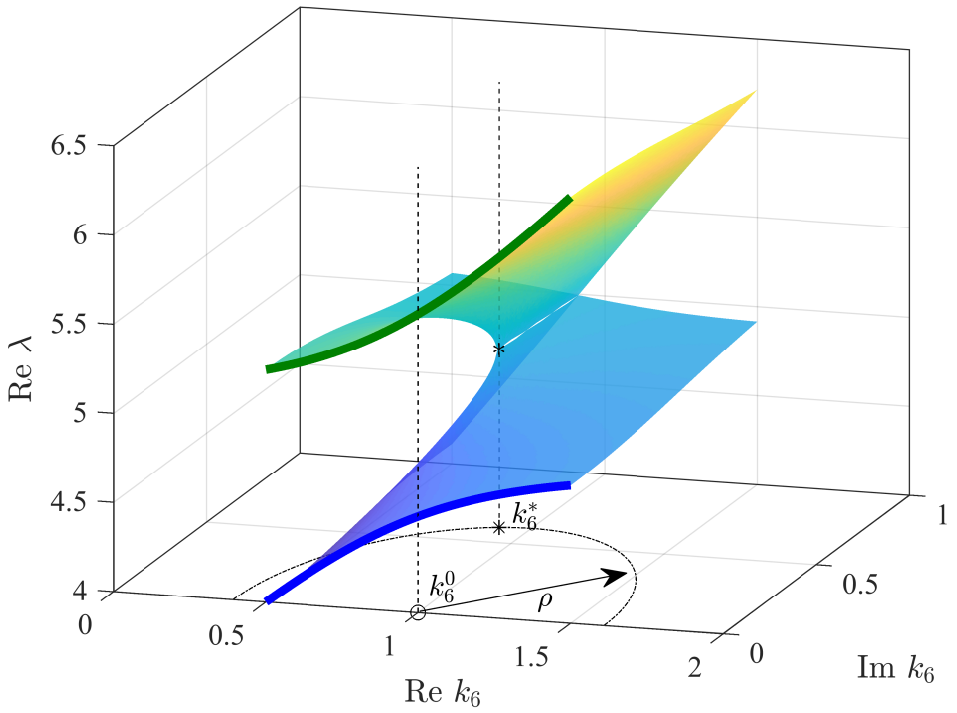


FIGURE 5 – Illustration de la présence d'une singularité du lieu des valeurs propres complexes (surface de Riemman) et de son influence sur le rayon de convergence de la série de Taylor ρ.

[13] B. Sudret and A. Der Kiureghian. Stochastic finite element methods and reliability : A state-of-the-art report. Technical report, 2000.

[14] C. Pierre. Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. *Journal of Sound and Vibration*, 126(3) :485–502, 1988.

[15] L. Dieci, A. Papini, A. Pugliese, and A. Spadoni. *Continuous Decompositions and Coalescing Eigenvalues for Matrices Depending on Parameters*, volume 2082 of *In : Current Challenges in Stability Issues for Numerical Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics*, pages 173–264. Springer, 07 2014.

[16] M. Ghienne, C. Blanzé, and L. Laurent. Stochastic model reduction for robust dynamical characterization of structures with random parameters. *Comptes Rendus Mécanique*, 345(12) :844 – 867, 2017.

[17] A. L. Andrew, K.-W. E. Chu, and P. Lancaster. Derivatives of eigenvalues and eigenvectors of matrix functions. *SIAM journal on matrix analysis and applications*, 14(4) :903–926, 1993.

[18] M.I. Friswell. The derivatives of repeated eigenvalues and their associated eigenvectors. *Journal of vibration and acoustics*, 118(3) :390–397, 1996.

[19] M.S. Triantafyllou and G.S. Triantafyllou. Frequency coalescence and mode localization phenomena : A geometric theory. *J. Sound Vib.*, 150(3) :485 – 500, 1991.

[20] A. A. Mailybaev. Computation of multiple eigenvalues and generalized eigenvectors for matrices dependent on parameters. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 13(5) :419–436, 2006.

[21] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators, 2nd edition*, page 623pp. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1980.

[22] A.P. Seyranian and A.A. Mailybaev. *Multiparameter stability theory with mechanical applications*, volume 13. World Scientific, 2003.

[23] B. J. Tester. The optimization of modal sound attenuation in duct, in the absence of mean flow. *J. Sound Vib.*, 27 :477–513, January 1973.

[24] L. Xiong, B. Nennig, Y. Aurégan, and W. Bi. Sound attenuation optimization using metaporous materials tuned on exceptional points. *J. Acoust. Soc. Am.*, 142(4) :2288 – 2297, 2017.

[25] A.P. Seyranian, O.N. Kirillov, and A.A. Mailybaev. Coupling of eigenvalues of complex matrices at diabolic and exceptional points. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 38(8) :1723, 2005.

[26] A. Luongo. Eigensolutions of perturbed nearly defective matrices. *J. Sound Vib.*, 185(3) :377–395, 1995.