



HAL
open science

Transfert et transformation de certains outils de l'analyse mathématique entre la France et la Grande-Bretagne

Marie-José Durand-Richard

► **To cite this version:**

Marie-José Durand-Richard. Transfert et transformation de certains outils de l'analyse mathématique entre la France et la Grande-Bretagne. *La Lettre de la Maison Française d'Oxford*, 1998, 9, pp.117-148. hal-02557177

HAL Id: hal-02557177

<https://hal.science/hal-02557177>

Submitted on 28 Apr 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Transfert et transformation de certains outils de l'analyse mathématique entre la France et la Grande-Bretagne

I. Présentation

Lubos Novy¹ nomme "Ecole Algébrique Anglaise" le groupe de mathématiciens formé par Charles Babbage (1791-1871), George Peacock (1791-1858), Augustus de Morgan (1806-71), et Duncan F. Gregory (1813-44), auquel il rattache également George Boole (1815-44) et William Rowan Hamilton (1805-65), ainsi que Authur Cayley (1821-95) et James Joseph Sylvester (1814-97) dont les travaux, bien que plus tardifs, n'en sont pas moins fortement marqués par les orientations de leurs prédécesseurs. Deux événements majeurs marquent sa naissance : l'introduction, en 1820, de la notation différentielle, en lieu et place de la notation fluxionnaire, dans les épreuves d'examen de l'Université de Cambridge, grâce à la publication préalable, en 1816, du *Traité élémentaire de Calcul Différentiel et Intégral* de S.F. Lacroix (1765-1843), traduit par Babbage, John F.W. Herschel (1792-1871) et Peacock; et la restructuration complète des acquis de l'algèbre, sous la forme d'une algèbre symbolique, telle que la présente Peacock à Cambridge en 1833 dans son *Report on the progress and actual state of certain branches of analysis*, lors du troisième congrès de la *British Association for the Advancement of Science*.

Il est indéniable que ces deux événements renouvellent une tradition de recherche quelque peu sclérosée à Cambridge au début du 19ème siècle, puisque les mathématiques, si elles sont considérées comme "la gloire et l'honneur de l'Université", sont enseignées dans une double fidélité aux méthodes de la géométrie euclidienne et aux *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle* d'Isaac Newton (1642-1727).

$$\begin{aligned}(\cos(\theta + 2\pi r) + \sqrt{-1} \sin(\theta + 2\pi r))^n &= 1^n (\cos n\theta + \sqrt{-1} \sin n\theta) \\ &= \cos n(\theta + 2\pi r) + \sqrt{-1} \sin n(\theta + 2\pi r)\end{aligned}$$

¹ Novy', L., 1968, "L'Ecole Algébrique Anglaise", *Revue de synthèse*, III° S., n°49-52, janv. déc. 1968, 211-222.

Mais qualifier Peacock, comme le fait A. Boyer², d'«Euclide de l'algèbre» incline à une lecture par trop moderniste de son travail. Car s'il conçoit l'algèbre symbolique comme "un système de combinaisons de symboles arbitraires"³, comme "langage du raisonnement symbolique", il n'en donne pas une présentation axiomatique. Une telle conception récurrente de l'histoire des mathématiques bute d'ailleurs sur plusieurs contradictions, comme par exemple, le fait que Peacock affirme l'unicité, la généralité et l'universalité de l'Algèbre Symbolique, tout en la fondant sur les quatre opérations de l'arithmétique, ou le fait qu'il fonde le Calcul Différentiel sur l'existence d'un développement formel en série pour toute fonction, refusant le point de vue qu'impose quasiment A.L. Cauchy (1789-1856) au même moment sur le Continent, qui distingue entre l'étude des séries convergentes et celle des séries divergentes⁴. Outre le fait qu'une telle présentation ne permet pas de clarifier ces contradictions, elle omet de situer ce groupe de mathématiciens dans la lignée des mathématiciens britanniques, tant sur le plan épistémologique que sociologique. Elle ne lit cette attention nouvelle portée au langage des symboles que comme l'amorce des recherches sur l'algèbre abstraite, et tend à ne la considérer que dans le cadre d'une tendance naturelle de l'esprit à dégager l'abstraction d'un matériau existant.

De fait, la démarche de ces nouveaux algébristes anglais ne correspond pas à une pure et simple "conversion" aux travaux continentaux, mais à leur réinterprétation effectuée à partir d'un objectif précis, conduisant à des choix non moins clairs : celui de conférer aux procédures algébriques le statut d'une science certaine, d'une science des vérités nécessaires, qui soumette et légitime l'existence de vérités contingentes. De ce fait, ne seront d'abord pris en considération par cette Ecole que les travaux continentaux qui s'inscrivent dans cette perspective, les autres en étant explicitement écartés. Et c'est l'articulation entre cet objectif et les choix qu'il induit que je présente ici, en examinant d'abord la problématique de cette Ecole, puis les contenus que doit recouvrir l'algèbre pour la mettre en œuvre.

² Boyer, C.B., 1969, *A History of Mathematics*, New-York, p. 622.

³ Peacock, G., 1834, "A Report on the recent progress and actual state of certain branches of analysis", *Proceedings of third meeting of the British Association for the Advancement of Science*, London, 185-351, p. 194.

⁴ Cauchy, A.L., 1823, *Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal*, Paris, t. 1. *Oeuvres* (II, 4) 1-261. Peacock, 1833, op. cit., 247-48.

II. Pourquoi chercher un nouveau statut pour l'algèbre?

La querelle de priorité entre Newton et G.W. Leibniz (1646-1716) à propos de l'invention du calcul infinitésimal ne saurait suffire à expliquer plus un siècle de blocage des échanges relatifs au champ physico-mathématique entre Cambridge et le Continent. De fait, si Cambridge a progressivement adopté les mathématiques, au cours du 18^{ème} siècle, en lieu et place de la philosophie scolastique comme "principes de la philosophie naturelle", elle l'a fait dans un cadre institutionnel qui fonde la permanence de toute connaissance sur des valeurs qui la rattachent au passé : la culture classique, le savoir des Anciens, et la conviction que toute connaissance participe de la religion naturelle. Cambridge est avec Oxford une des deux seules universités anglicanes d'Angleterre, chargées de la formation du clergé anglican, et au-delà, des ceux qui ont à mettre en place et à représenter les fonctions symboliques du pouvoir⁵. Certitude et vérité participent des fondements de cet enseignement des valeurs de la permanence, destinées à garantir la préservation, l'ordre et la prospérité de la communauté. Mais les statuts de ces universités anglaises, demeurés inchangés depuis 1570, confinent à la sclérose. Confrontées aux transformations socio-culturelles issues de la Révolution Industrielle, elles vont devoir évoluer du rôle de "seminaries of sound learning and religious education" à celui de "national seminaries".

Les initiatives qui conduisent à l'identification d'une Ecole Algébrique Anglaise ont ceci de remarquable qu'elles sont d'abord le fait d'un groupe d'étudiants, investis d'une audace nouvelle vis-à-vis du savoir traditionnel. Issus de milieux sociaux intermédiaires entre ceux qu'ils s'agit de réconcilier du côté du pouvoir, ils vont développer un réseau d'institutions nouvelles chargées de renforcer la représentativité des institutions scientifiques d'importance nationale, et de développer la recherche et la diffusion dans le domaine de la philosophie naturelle, afin de faire face à la vague de création des sociétés savantes provinciales, massive au tournant du siècle. En particulier, ils sont partie prenante de la création de *The Cambridge Philosophical Society* en 1819, de la *Royal Astronomical Society* en 1820, et après l'échec de la candidature de Herschel à la présidence de la *Royal Society* en 1830, de la *British Association of the Advancement of Science* en 1831. C'est autour de ces représentants de la

⁵ Hommes de loi, hommes d'affaires, hommes d'Etat, comme l'écrit Whewell en 1835. Whewell, W., 1835, *Thoughts on the Study of Mathematics as Part of a Liberal Education*, Cambridge, p. 40.

nouvelle bourgeoisie montante que se constitue le "network de Cambridge"⁶, à la recherche d'une conception unifiée du savoir, qui passe par une redéfinition des rôles respectifs des sciences inductives et déductives. Babbage, le principal initiateur de l'entreprise, est fils de banquier, et restera toute sa vie un libéral très proche des radicaux⁷. Bien que le père de Herschel, en dépit de ses origines modestes, soit devenu Sir William, astronome de renommée internationale, John maintiendra toute sa vie un regard fort distancié envers les institutions établies. Quant à Peacock, fils d'un vicaire anglican de la petite paroisse de Gainford, successivement *fellow* et tuteur de *Trinity College* de 1817 à 1836, *Lowndean Professor* jusqu'en 1839, date à laquelle il est nommé doyen de la cathédrale d'Ely par Melbourne, il peut être qualifié de mathématicien whig anglican de l'Université de Cambridge. S'il s'éloigne assez vite, après son entrée à Cambridge, des idées radicales qu'il partageait alors avec son frère William⁸, il manifesterà une volonté constamment réaffirmée d'œuvrer dans le sens d'une Réforme de l'Université, jusqu'à sa participation à la Commission Royale d'Enquête⁹ (1852) et à la Commission Exécutive (1855-58) destinées à la préparer, puis à la mettre en œuvre. Il inscrit délibérément son action institutionnelle et sa pensée mathématique dans l'histoire de la professionnalisation de l'Université et de la laïcisation de ses statuts.

De fait, la traduction du traité de Lacroix n'est que le premier acte reconnu d'une volonté politique de réformes, qui dépasse de très loin les quelques tentatives qui ont déjà eu lieu à Cambridge au tournant du siècle pour renforcer la qualité de l'enseignement, et sur lesquelles d'aucuns s'appuient pour arguer d'une continuité du processus. Elle a été précédé par la création, autour de Babbage en 1812, de l'éphémère *Analytical Society*, dont l'unique volume de *Memoirs*, publié en 1813, a pour but explicite de confronter les mathématiciens de Cambridge aux plus récents

⁶ Cannon, W.F., 1964, "Scientists and Broadchurchmen : An Early Intellectual Network", *Journal of British Studies*, IV, n° 1, 65-88.

⁷ Hyman, A., 1982, *Charles Babbage, Pioneer of the Computer*, Princeton Un. Press, N. Jersey, p. 38-39, 82-84, 186.

⁸ Peacock Mss, Trinity College Cambridge, P 3⁷, P 3⁸, P 3¹⁰, lettres de George Peacock à son frère William des 21 août 1810, 30 septembre 1810, 2 mars 1811. Peacock y critique notamment W. Cobbett, J. Horne Tooke, J. Cartwright et F. Burdett, dont le manque de modération ruine à ses yeux les tentatives de réforme.

⁹ La Commission Royale d'Enquête est composée de Peacock, Herschel, Sedgwick, Romilly, et Lord Graham. Tillyard, A., 1913, *A History of University Reform from 1800 to the Present Time, with suggestions towards a complete scheme for the University of Cambridge*, Camb. Un. Press, Cambridge, p. 105.

développements de l'analyse algébrique. La préface qu'en donne Babbage insiste sur l'origine anglaise de bon nombre de ces idées, et sur la nécessité d'en réimporter les acquis :

*But, as if the soil of this country were unfavorable to its cultivation, it soon drooped and almost faded into neglect, and we have now to re-import the exotic, with nearly a century of foreign improvement, and to render it once more indigenous among us.*¹⁰

Il y expose un véritable programme de recherche d'intérêt national : celui d'introduire et de développer en Angleterre une conception des mathématiques fondée sur l'analyse, et qui permette d'unifier les méthodes du calcul des fonctions génératrices de Laplace, le travail de séparation des symboles d'opération de ceux des quantités d'Arbogast¹¹, ainsi que les méthodes de résolution des équations différentielles, des équations aux différences finies, des équations aux différences mixtes, et des équations fonctionnelles¹².

L'entreprise se trouve complétée en 1820 par la parution simultanée de trois volumes d'exemples, destinés à illustrer l'utilisation de la théorie du Calcul Différentiel et Intégral par une multitude d'exercices et de résultats : les *Examples of the Functional Equations* de Babbage, les *Examples on the Calculus of the Finite Differences* de Herschel, et surtout les *Examples on the Calculus of the Applications of the Differential and Integral Calculus* de Peacock, afin que les tuteurs privés, comme ceux des Collèges, puissent y puiser directement le travail à proposer aux étudiants. Il est parallèlement flagrant que c'est grâce aux efforts réitérés de Peacock, entre 1817 et 1821, que la notation différentielle est définitivement adoptée pour le "Mathematical Tripos". Le tout s'inscrit dans un programme plus général de réformes et de publications¹³, qui s'effilochera quelque peu avec

¹⁰ Babbage, 1989, *The Works of Ch. Babbage*, Ed. Campbell-Kelly, London, Pickering, 11 vols. Cette préface, et l'article de Babbage, "On Continued Products", se trouvent dans le vol. 1, 37-92, p. 42.

¹¹ Arbogast, L.F.A., *Du Calcul des Dérivations*, Strasbourg, 1800.

¹² Royal Society, *Herschel Papers*, Hs 2.64, lettre de Herschel à Babbage du 14.07.1816.

¹³ Whewell s'associe un court moment à leur entreprise. Il publie en 1819 un traité de Mécanique faisant un usage exclusif de la notation différentielle. Mais, plus conservateur que ce groupe de réformateurs, il reviendra assez vite vers la conception d'une science mathématique fondée, tant intuitivement que déductivement, sur la géométrie. Cf. Trinity College, Cambridge, Whewell Papers, O.15.46¹⁷, lettre de Herschel à Whewell du 4 février 1817.

la dispersion du trio Babbage-Herschel-Peacock après l'obtention de leur examen :

We are proposing College Reforms, which will introduce the true faith¹⁴ in Trinity.... In the meantime, the hall of Saint John's resounds with daily altercations at the deitrs and the dotts, it is wrong symptoms, these of approaching change : for who would have discussed the point five years since.... Trust me : the golden age of the university is approaching : our business is to accelerate the desirable period. You mentionned the want there is a good Algebra : will you undertake it immediately?... But after all, there is as much as want of good treatises upon mechanics, hydrostatics, and optiks, as of other books and all reform will be imperfect which does not attend to these points as well as the others.¹⁵

I assure you, my dear Herschel, that I shall never cease to exert myself to the utmost in the cause of reform, and that I will never decline any office which may increase my power to effect it. I am nearly certain of being nominated to the office of Moderator in the year 1818-19, and as I am an examiner in virtue of my office, for the next year, I shall pursue even more decided than hitherto, since I shall feel men have been prepared for the change, and will then be enabled to have acquired a better system by the publication of improved elementary books. I have considerable influence as a lecturer, and I will not neglect it. It is by silent perseverance only that we can hope to reduce the many-headed monster of prejudice, and make the University answer her character as the loving mother of good learning and science.¹⁶

Si le travail de Peacock aboutit finalement à une rupture épistémologique en algèbre, ce n'est pas tant en raison d'une volonté initiale de produire une algèbre abstraite, qu'en raison du compromis d'ordre conceptuel qu'il essaie de réaliser entre le souci d'intégrer tous les acquis de l'analyse algébrique obtenus sur le Continent, et celui d'échapper aux critiques relatives au

¹⁴ Il s'agit de la notation différentielle, ainsi qualifiée parce qu'ils comparent analogiquement la diffusion du traité de Lacroix avec celle de la Bible, à cause d'un débat alors mené à Cambridge par les Siméonites pour savoir si la vraie foi devait être diffusée avec ou sans commentaire. Ashworth, W.J., (à paraître), "Evangelicals of the Analytical Church : Charles Babbage, John Herschel and the Foundations of intelligence".

¹⁵ Royal Society, *Herschel Papers*, Hs.13.247, lettre de Peacock à Herschel du 03.12.1816.

¹⁶ Royal Society Library : *Herschel Papers*, Hs.13.249, lettre de Peacock à Herschel du 17.03.1817.

caractère instrumental de l'algèbre. Pour ce faire, il cherche à conférer à l'algèbre la légitimité accordée aux vérités nécessaires, en la séparant de toute référence aux vérités contingentes. Au-delà de cette volonté de voir Cambridge renoncer à son attachement aux méthodes géométriques grâce auxquelles Newton avait fondé les *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*, Peacock poursuit le programme de recherche formulé par Babbage en 1813, où celui-ci insistait déjà sur le fait que le célèbre Calculus de Newton n'était pas fondé sur la géométrie, mais sur le théorème de Taylor. Il s'inscrit dans cette recherche d'une théorie de l'invention que Babbage, dès 1813, appelait de ses vœux :

Attentively to observe the operations of the mind in the discovery of new truths, and to retain at the same time those fleeting links, which furnish a momentary connection with distant ideas, the knowledge of whose existence we derive from reason rather than from perception, are the objects in whose pursuit nothing but the most patient assiduity can expect success. Powerful indeed, must be the mind, which can simultaneously carry on two processes, each of which requires the most concentrated attention. Yet these obstacles must be surmounted, before we can hope for the discovery of a philosophical theory of invention; a science which Lord Bacon reported to be wholly deficient two centuries ago, and which has made since that time but slight advances.¹⁷

Loin de rejeter les acquis d'une analyse mathématique issus d'une pratique, qui ne permet pas de les considérer comme parfaitement fondés en raison, comme ceux qui utilisent les quantités impossibles ou l'opérateur différentiel, Peacock affirme qu'ils sont légitimés par une structure opératoire unique, logiquement antérieure à toute interprétation, et dont les formes sont suggérées par cette pratique. En ce sens, son algèbre symbolique n'est pas élaborée dans le seul but de rendre rigoureux le discours de ce qu'on appellerait aujourd'hui les mathématiques pures, mais avec l'idée qu'elle permette de "découvrir", à partir de cette pratique, les principes fondamentaux d'une philosophie naturelle qui s'étend alors à d'autres domaines que la seule théorie du mouvement. L'examen des rubriques du *Cambridge Mathematical Journal*, fondé par Gregory en 1837 comme revue de mathématiques ouverte aux jeunes chercheurs, tout comme l'examen du contenu des articles, témoignent à l'envi du fait que les successeurs de Peacock, de Gregory à d'autres auteurs plus ou moins bien connus comme S.S. Greatheed, George Boole (1815-64), Brice Bronwin, William Donkin

¹⁷ Babbage, *Works*, I, 59.

(1814-69), prennent également en compte les différents domaines de recherche où interviennent les mathématiques, comme la lumière, le son, la chaleur, le magnétisme et l'électricité.

III. La structuration de l'exposé de Peacock

L'Algèbre Symbolique telle que l'envisage Peacock n'est donc pas présentée a priori. Elle intervient comme troisième et dernière étape d'un processus d'abstraction dont l'arithmétique constitue la première et l'algèbre arithmétique la seconde, et qui toutes deux s'enracinent dans l'expérience. Directement inspirée par la philosophie empiriste développée par Locke dans son *Essay on Human Understanding*, enseignée à Cambridge, cette conception de l'algèbre a déjà fait l'objet d'un premier exposé en 1830, dans son *Treatise of Algebra*, qu'il rééditera entre 1842 et 1845, en séparant soigneusement algèbre arithmétique et algèbre symbolique en deux volumes.

1) **L'Arithmétique Commune** demeure science du quantitatif, une "science du calcul comprenant toutes les sciences qui sont réductibles à la mesure et au nombre"¹⁸. Peacock en a fait, en 1826, une présentation exhaustive d'une remarquable érudition¹⁹, où est déjà manifeste sa conception historico-génétique de l'élaboration des notations algébrico-arithmétiques. L'Arithmétique y est envisagée comme le résultat d'une abstraction qui s'est construite au long des siècles, et au cours de laquelle la perception des méthodes de numération a conduit à l'élaboration des systèmes de numération, et a débouché sur la formation d'un langage numérique :

*Abstraction is the creature of language, and without the aid of language, (the child) will never separate the idea of any number from the qualities of the objects with which it is associated.*²⁰

Peacock fonde les analogies structurelles - les seules qu'il considère comme significatives - observées entre les différents systèmes de numération, sur la structure décimale de ce langage numérique, qu'il articule sur des opérations mentales sous-jacentes, et qu'il présente comme une loi de la nature. Il insiste sur le caractère algorithmique des opérations. L'algorithme y est défini comme "toute espèce de notation destinée à exprimer des relations

¹⁸ Peacock, 1833, p. 200.

¹⁹ Peacock, G., 1845, "Arithmetic", *Encyclopaedia Metropolitana*, London, I, 369-523.

²⁰ Peacock, 1845, p. 369-370.

fixées entre nombres et quantités", et ces notations mathématiques interviennent "quand la complexité des relations qu'on cherche à exprimer dans un problème est telle qu'elle surpasse les pouvoirs du langage"²¹.

Peacock insiste sur l'arbitraire relatif des dénominations, et sur leur subordination aux méthodes de numération. L'idée, le mot lui-même, sont des intermédiaires obligés entre l'expérience et une symbolisation dont il met en avant la puissance de représentation. Sa réflexion s'inscrit dans une recherche historique des origines de la connaissance mathématique, considérée comme fondée sur le numérique et sur un processus d'abstraction issu de la perception du corps humain. Le langage est partie prenante de ce processus, entre l'étape de perception des opérations mentales et celle de l'élaboration d'un symbolisme approprié.

2) **L'Algèbre Arithmétique** est conçue comme une "littéralisation" de l'Arithmétique, en ce sens que les nombres y sont remplacés par des symboles, "absolument généraux dans leur forme", mais "spécifiques dans leur valeur"²². En conséquence, ces symboles doivent respecter les limitations de sens ou de valeur qui sont celles de l'Arithmétique. Ainsi, l'écriture $a-b$ n'a-t-elle de sens que si $a > b$. Dans le cas contraire, le résultat est impossible. Y sont également impossibles parce qu'inconcevables numériquement des résultats comme \sqrt{a} pour un nombre a négatif, ainsi que toutes les opérations à résultat multiple. Sa première fonction est donc d'assurer le passage progressif d'une représentation numérique à une représentation littérale des quantités, sans quitter trop vite le champ de la pratique, notamment en exigeant l'explicitation systématique des conditions d'existence nécessaire des résultats, désormais exprimés littéralement.

L'Algèbre Arithmétique correspond à l'état d'une science algébrique dont la cohérence repose sur celle du langage naturel, c'est-à-dire sur le respect des définitions ou des pratiques arithmétiques. Un tel mode de cohérence, comme l'avait analysé W. Frend (1757-1841) dans ses *Principles of Algebra* de 1796 et dans *The True Theory of Equations established on Mathematical Demonstration* de 1799, impose la nécessaire exclusion des entités alors les plus novatrices de l'Algèbre, à commencer par les quantités négatives et impossibles. Définitions et pratiques arithmétiques supposent en effet à tout moment le recours à des entités

²¹ Peacock, 1845, p. 438.

²² Peacock, 1833, p. 200.

réelles, concrètes, susceptibles d'être perçues, et auxquelles les nombres soient référés. Et Peacock, conformément à sa volonté d'intégrer les nouveaux acquis aux conceptions traditionnelles, fait ici allégeance certaine au point de vue de Frend, dont il respecte à la fois l'exigence de rigueur logique des raisonnements démonstratifs, et une pédagogie qui s'appuie sur l'idée d'une abstraction progressive issue de la pratique arithmétique.

Peacock explicite, comme il l'avait fait en Arithmétique, la fonction algorithmique de cette algèbre arithmétique, qui lui permet d'identifier calculs finis et infinis comme résultats d'un même processus. Ainsi, polynômes finis ou infinis sont-ils susceptibles d'une même définition opératoire, comme dans le cas de la division.

*Interminable quotients present themselves in Arithmetic, and also in Arithmetical and Symbolical Algebra, as necessary consequences of the Rule for division (art. 88) which is equally applicable in all those sciences, whether the dividend is or is not divisible by the proposed divisor : in the first case, we get a terminable quotient, which multiplied into the divisor, reproduces the dividend : but in the second, there is no terminable quotient which multiplied into the divisor, will reproduce the dividend, however nearly it may approximate to it.*²³

Du même coup, si la nature des nombres, comme celle des expressions algébriques, reste attachée à la perception d'objets, elle est désormais subordonnée à une nouvelle forme de classification issue de leurs possibilités opératoires, où les opérations, conçues comme des algorithmes, n'établissent pas de distinction préalable entre calculs finis et calculs infinis.

3) **L'Algèbre Symbolique** marque un renversement radical de point de vue. Peacock pose a priori l'universalité et l'indépendance absolue qui lui permettront de soumettre à cette science toutes les branches de la philosophie naturelle. Elle est destinée à faire sauter les verrous d'ordre conceptuel qui limitaient les possibilités de l'Algèbre Arithmétique. Sa nécessité logique impose l'abandon du sens des symboles et une attention exclusive portée aux opérations. C'est pourquoi l'Algèbre Symbolique est définie comme un système de combinaisons de symboles, généraux cette fois "dans leur forme comme dans leur valeur"²⁴. Ainsi, $a-b$ a un sens symbolique quels que soient ce que représentent a et b . Il en est de même

²³ Peacock, 1842-45, II, p. 26.

²⁴ Peacock, 1833, p. 194, 208.

pour $a^{\frac{1}{2}}$, dont la seule condition d'existence, symbolique, est que : $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$.

Ce que Peacock appelle "the business of algebra" consiste précisément à dégager la forme générale des expressions algébriques, forme libérée de toutes les limitations dont l'écriture traditionnelle pourrait rester porteuse. C'est ainsi qu'il substitue à l'écriture "discrète" des coefficients de différentiation $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$, une écriture symbolique où n et r peuvent désigner des "symboles généraux par leur forme et par leur valeur", et où intervient la fonction eulérienne de seconde espèce²⁵ :

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{\int_0^1 dx (\log \frac{1}{x})^n}{\int_0^1 dx (\log \frac{1}{x})^{n-r}} = \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n-r)}$$

Du même coup, Peacock se doit de séparer radicalement égalité arithmétique et équivalence symbolique. Le plus souvent, ces deux types d'égalité coïncident, comme dans $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, qui signifie à la fois que les deux membres donnent le même résultat et que le deuxième membre est le résultat de l'opération $(a+b)(a+b)$. Mais, dans le cas du développement d'une fonction en série infinie par exemple, pour des valeurs de la variable qui rendent cette série divergente, ces deux significations se trouvent dissociées. Ainsi, le quotient $\frac{a}{1-x}$ et la série

$a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots$ sont qualifiés d'algébriquement équivalents puisque la série est le résultat opératoire de la division indiquée par le quotient. Mais les deux expressions ne sont arithmétiquement égales que si x est une fraction propre, ou une quantité inférieure à l'unité²⁶.

C'est en ce sens que l'Algèbre Arithmétique et l'Algèbre Symbolique sont donc deux sciences indépendantes, l'une, science des quantités, l'autre, science des opérations, se différenciant tant du point de vue de leur objet que de leurs méthodes. Peacock refuse de considérer la seconde comme une généralisation de la première, ainsi que de légitimer les résultats des

²⁵ Peacock, 1833, p. 204-05, 211-212.

²⁶ Peacock, 1830, p. 98-100.

opérations symboliques par un quelconque recours à une analogie avec des calculs numériques.

The operations and resulting forms in Arithmetic and Geometry, expressed in symbols, bear a strict analogy to operations bearing the same names, and to the forms resulting similarly from them in Algebra, where the symbols are perfectly general : but it is by the law of the permanence of equivalent forms, and not by analogy, that we are enabled to pass from one to the other : it is only so far, therefore, as Analogy may be considered as a modified expression of this law, that we are legitimately enabled to generalized conclusions deduced by means of it.²⁷

Ce qui est devenu signifiant pour l'algèbre de Peacock, ce ne sont plus les objets, mais les opérations elles-mêmes. Peacock affirme ainsi non seulement l'indépendance de la rationalité de ces opérations vis-à-vis des objets sur lesquels elle s'exerce, mais la primauté ontologique des opérations sur les objets.

4) Le Principe de Permanence des Formes Equivalentes

Peacock conçoit tout à fait clairement la nécessité non seulement logique, mais épistémologique, de justifier le saut conceptuel qui sépare alors la pratique arithmétique d'une théorie générale de l'algèbre. Mais, dans la mesure où il refuse tout autant de s'appuyer sur une procédure constructive que sur une approche axiomatique, seul un présupposé ontologique implicite permet de légitimer le double énoncé du principe de permanence des formes équivalentes, par lequel il s'autorise à transférer à l'algèbre symbolique, toutes les formes générales obtenues en algèbre arithmétique, ce qui lui permet du même coup de faire l'économie d'un long travail de déduction. C'est bien ce double énoncé qui pose problème, puisque Peacock, en même temps qu'il propose une conception génétique de l'Algèbre Symbolique, pose l'existence de cette même science comme justification des résultats de l'activité mathématique, sans jamais imaginer la possibilité d'une évolution dialectique entre les structures qu'elle désigne :

(A) : Whatever form is algebraically equivalent to another when expressed in general symbols, must continue to be equivalent, whatever those symbols denote."

²⁷ Peacock, 1830, p. 108.

"(B) : *Converse Proposition* : *Whatever equivalent form is discoverable in arithmetical algebra considered as the science of suggestion, when the symbols are general in their form, though specific in their value, will continue to be an equivalent form when the symbols are general in their nature as well as their form.*²⁸

L' énoncé (B) exprime le fait que la validité de la connaissance acquise réside dans la généralité des formes obtenues : les symboles sont généraux aussi bien dans leur forme que dans leur valeur. Auparavant, l'énoncé (A) suppose de fait la préexistence logique de l'Algèbre Symbolique : c'est parce que ces possibilités opératoires sont préexistantes qu'elles pourront être découvertes dans une pratique qui est ici celle de l'algèbre arithmétique. La finalité de ce double principe, qui réside dans une volonté de voir l'Algèbre Symbolique légitimer toutes les analogies inventives sur lesquelles travaillent alors l'analyse algébrique, sous-tend de fait l'idée d'une finalité préétablie, toute idée neuve étant alors le signe, c'est-à-dire l'indice, d'une structure préexistante. J'ai déjà souligné en quoi l'importance accordée au langage dans cette nouvelle forme de conceptualisation de l'algèbre, ainsi que ce mode de présentation de l'Algèbre Symbolique, relèvent d'une épistémologie historico-génétique qui se donne à voir dans la gradation arithmétique-algèbre arithmétique-algèbre symbolique. Cette épistémologie est très marquée par la conception du langage et de l'abstraction présente dans la philosophie de J. Locke relative à l'élaboration du langage, dont *l'Essay on Human understanding* est en effet partie prenante du fonds culturel de l'Université de Cambridge²⁹. Comme chez Locke lorsqu'il est question de savoir quelle est la place de ce langage apparemment dépourvu de toute référence ontologique³⁰, ce principe de permanence fait apparaître l'idée d'une finalité d'un monde conçu comme création achevée une fois pour toutes, finalité qui sert à Peacock de légitimation implicite lui permettant d'éviter la rupture épistémologique qui lui permettrait d'assumer la liberté du mathématicien comme créateur potentiel d'un langage formel.

²⁸ Peacock, 1833, p. 194.

²⁹ Durand, M.J., 1990, "Genèse de l'Algèbre Symbolique en Angleterre : une Influence Possible de John Locke", *Revue d'Histoire des Sciences*, 43, n°2-3, 129-80.

³⁰ Locke, J., 1755, *Essay on Human Understanding*, London, 2d éd., 1694, trad. fr. M. Coste, Paris, IV-4-2 p. 465, IV-4-4 p. 466, IV-6-14, p. 487. Duchesneau, F., 1973, *L'empirisme de Locke*, La Haye, M. Nijhoff, p. 119, 200-02.

IV. Permanence du symbolique plutôt que continuité du réel.

Avec le travail de Peacock, l'objet de la connaissance mathématique change donc de nature. Si l'Algèbre Symbolique ne saurait être considérée comme une algèbre des séries formelles, elle est bel et bien algèbre des procédures algorithmiques opératoires, ne réalisant qu'à l'infini l'ensemble de ses potentialités. Ce point de vue résulte directement de l'élaboration d'un compromis conceptuel face aux exigences contradictoires auxquelles se trouve confronté ce mathématicien whig anglican qu'est Peacock. Il vise à constituer l'algèbre, non plus comme un outil ou une technique, mais comme un savoir fondamental : intégrer à l'algèbre l'ensemble des résultats obtenus par ses pratiques inventives, maintenir la possibilité d'en intégrer de nouveaux à l'avenir, et affirmer le caractère essentiel de ces mécanismes opératoires en dégagant les critères qui en font un ensemble de vérités nécessaires. La nouveauté du travail de Peacock réside précisément dans cette primauté accordée à l'aspect structurel des opérations sur toute autre considération contingente relative aux objets de la connaissance mathématique. Elle passe par l'explicitation des propriétés de ces procédures opératoires.

1. Caractérisation des œuvres privilégiées par Peacock

Cette spécificité du travail de Peacock permet de comprendre pourquoi les travaux continentaux qui retiennent son attention sont ceux qui, de L. Euler (1707-83) à J. Liouville (1809-82), en passant par P. S. Laplace (1749-1827), J. Fourier (1768-1830) et S.D. Poisson (1781-1840), font une large place aux processus d'interpolation, et aux développements qui traitent d'une part le calcul aux différences finies et le calcul différentiel, d'autre part le calcul sur les séries et le calcul intégral, selon les mêmes méthodes. Ce sont eux qui ouvrent la voie de ce qu'il appelle "the business of algebra", à savoir la détermination systématique de formes équivalentes générales, dont l'écriture soit débarrassée de toute référence à des quantités discrètes, et dont l'opérativité soit rendue explicite. Le but explicite de Peacock est d'une part de lever les ambiguïtés issues de pratiques algébriques trop conduites par l'analogie, et d'autre part, de continuer à fournir des principes à une philosophie naturelle qui, depuis Newton, s'est étendue à bien d'autres domaines que la seule théorie du mouvement, puisqu'elle concerne notamment la *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace, et la *Théorie Analytique de la Chaleur* de Fourier.

Son admiration pour leurs travaux s'articule aussi sur celle qu'il éprouve, en tant que réformateur, à l'égard des mathématiciens qui ont

contribué au renouvellement des structures d'enseignement en France, à la suite de la Révolution. La comparaison avec la France est d'ailleurs tout à fait essentielle pour relativiser la sévérité des critiques qu'adressent alors les membres du "network" à l'Université de Cambridge. Parmi les enjeux de leur volonté de réforme se trouve l'ambition d'entrer en compétition avec des institutions telles que l'Ecole Normale et l'Ecole Polytechnique :

The great number of illustrious men who took part in the lectures at the Normal and Polytechnic Schools at the time of their first institution, and the enlarged views which were consequently taken of the principles of elementary instruction and of their adaptation to the highest developement of the several sciences to which they lead, combined with the powerful stimulus given to the human mind, in all ranks of life, in consequence of the stirring events which were taking place around them, at once placed the scientific education of France immensely in advance of that of the rest of Europe.³¹

Algèbre des procédures algorithmiques considérées formellement, l'algèbre symbolique de Peacock ne saurait s'harmoniser avec le point de vue de Cauchy qui adopte au contraire, dès les années 1820, un point de vue plus local, distinguant soigneusement l'étude des séries convergentes de celle des séries divergentes. Peacock s'opposera de même à Abel, Poisson et Liouville lorsqu'ils s'inscriront dans la même perspective³². Pour Peacock, une telle distinction représente un retour à la multiplicité des cas, donc un recul, une régression des idées vis-à-vis de la recherche systématique de la généralité de l'algèbre, qui est pour lui un des caractères essentiels du progrès de la science. Pourtant, Peacock ne néglige pas, loin de là, les travaux de Cauchy relatifs aux tests de convergence³³. Mais ce registre n'appartient pas au domaine de son algèbre, où la permanence du symbolique est plus essentielle que tout ce qui concerne la continuité ou la discontinuité du réel.

M. Cauchy, in his Leçons sur le Calcul Infinitésimal (published in 1823), has attempted to conciliate the direct consideration of infinitesimals with the purely algebraical views of the principles of

³¹ Peacock, 1833, p. 286.

³² A. de Morgan adopte le même point de vue que Peacock dans De Morgan, 1844-49, "On Divergent Series, and various Points of Analysis connected with them", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8, pp. 182-203.

³³ Peacock, 1833, p. 273.

this calculus, which Lagrange first securely established; and it may be very easily conceded that no attempt of this able analyst, however much at variance with ordinary notions or ordinary practice, would fail from want of a sufficient command over all the resources of analysis. He considers all infinite series as fallacious which are not convergent, and that, consequently, the series of Taylor, when it takes the form of an indefinite series, is not generally true. It is for this reason that he has transferred it from the differential to the integral calculus, and exhibits it as a series with a finite number of terms completed by a definite integral. It is very true that M. Cauchy has perfectly succeeded in dispensing with the consideration of infinite series in the establishment of most of the great principles of the differential and integral calculus; but I should by no means feel disposed to consider his success in overcoming difficulties which such a course presents as a decisive proof of the expediency of following in his footsteps. The fact is, that if the operations of algebra be general, we must necessarily obtain indefinite series, and if the symbols we employ are general likewise, it will be impossible to determine, in most cases, the convergency or divergency of the series which result. It is only, therefore, when we come to specific values that a question will arise generally respecting the character of the series: and it is only when we are compelled to deduce the function which generates the series from the application of the theory of limits to the aggregate of a finite number of its terms, that its convergency or divergency becomes important as affecting the practicability of the enquiry: in short, it must be an erroneous view of the principles of algebra which makes the result of any general operation dependant upon the fundamental laws of algebra to be fallacious. The deficiency should in all such cases be charged upon our power of interpretation of such results, and not upon the results themselves, or upon the certainty and generality of the operations which produce them: in short, this rejection of diverging series from analysis, or of such series as may become divergent, is altogether inconsistent with the spirit and principles of symbolical algebra, and would necessarily bring us back again to that tedious multiplication of cases which characterized the infancy of the science.³⁴

³⁴ Peacock, 1833, note p. 247-48. Malgré la place qu'occupe cette distinction entre séries convergentes et séries divergentes dans l'enseignement, il n'y a pas lieu de privilégier spécialement le point de vue de Cauchy, puisque des mathématiciens aussi prestigieux que G.F.B. Riemann (1826-66), E. Borel (1871-1956), et G.H. Hardy (1877-1947) revendiqueront et théoriseront l'usage des séries divergentes.

Posée comme lieu d'énonciation des vérités nécessaires, donc universelles, c'est-à-dire à la permanence du caractère algorithmique des opérations, l'algèbre symbolique s'accorde bien davantage avec la problématique des travaux de Laplace, qui influencent considérablement, et à plus d'un titre, le projet de l'École Algébrique Anglaise. Sa *Mécanique Céleste*, en confirmant par les méthodes analytiques l'existence des irrégularités planétaires, réconcilie théorie newtonienne et méthode leibnizienne. L'écriture différentielle du calcul infinitésimal peut désormais être considérée comme l'expression appropriée des lois régissant la permanence de l'Univers, qui s'affirment comme universellement nécessaires en raison même de la généralité du symbolisme qui en permet l'expression. John Playfair (1748-1819) ne s'y trompe pas³⁵, et favorise ainsi grandement la réception alors difficile de l'œuvre laplacienne en Grande-Bretagne. Dans son compte-rendu de la *Mécanique Céleste* pour *The Edinburgh Review* de 1808, qui inaugure en même temps une sévère critique des méthodes d'enseignement dans les Universités anglicanes d'Oxford et de Cambridge, Playfair prend soin de lever le soupçon d'athéisme qui pèse alors sur l'œuvre laplacienne : il réinterprète l'exigence de conditions initiales spécifiques garantissant la stabilité du système solaire dans le sens de la théologie naturelle, comme manifestation de l'existence d'un Dessein initial, celui du Créateur, ainsi que de la doctrine des causes finales d'Aristote. Si le déterminisme fondamental qu'expose Laplace dans l'*Essai philosophique* qui introduit sa *Théorie Analytique des Probabilités*, s'accorde parfaitement à la conception théologique du monde des mathématiciens anglais, sa présentation du "Calcul des fonctions génératrices" correspond tout à fait à la méthodologie qui structure aussi bien le projet³⁶ de Babbage dès 1813 que la conception du processus d'explicitation de l'algèbre symbolique. Dans la présentation historique conséquente qu'il donne de ce calcul, Laplace le conçoit comme le prolongement des travaux de Viète, Descartes, Wallis, Newton, Leibniz, Lagrange, qui n'ont cessé, dit-il, de faire appel à l'induction et à l'analogie pour passer d'abord des exposants entiers aux exposants fractionnaires, et plus généralement, pour élaborer des méthodes d'interpolation. Le problème essentiel posé par ces méthodes n'est autre que le passage du discret au continu en ce qui concerne le travail sur les nombres, le passage des différences finies aux différentielles, et des séries infinies aux intégrales en ce qui concerne le travail sur les fonctions. Et Laplace, qui fonde explicitement sa *Théorie Analytique des Probabilités*

³⁵ Playfair, J., 1808, "Review of Laplace's *Traité de Mécanique Céleste*", *Ed. Review*, 11, 249-84.

³⁶ Cf. II.

sur le calcul des fonctions génératrices, en conclut la présentation par ces mots :

La théorie des fonctions génératrices étend à des caractéristiques [fonctions] quelconques, la notation cartésienne : elle montre en même temps, avec évidence, l'analogie des puissances et des opérations indiquées par ces caractéristiques; et nous allons voir que tout ce qui concerne les séries, et l'intégration des équations linéaires aux différences finies, en découle avec une extrême facilité.
37

L'algèbre symbolique de Peacock apparaît alors comme un projet visant à constituer un calcul universel, valant aussi bien pour les fonctions que pour les nombres, et qui régissent en les unifiant, toutes les méthodes de calcul antérieurement élaborées. L'œuvre de Laplace l'autorise à renouer avec une tradition algorithmique à laquelle appartiennent John Wallis (1616-1703), James Stirling (1692-1770) et Newton, et dont le caractère symbolique lui permettrait d'affirmer l'universalité. Sur le plan des méthodes de travail, et en dépit du fait qu'ils auront dû renoncer à l'unicité d'un tel calcul, c'est bien dans cette même veine que travailleront tous les mathématiciens britanniques qui se préoccupèrent d'explicitier les principes du calcul des opérations, tant du côté de la logique que du côté de la recherche de procédures effectives³⁸. Quant aux références qu'utilise Peacock, elles témoignent toutes de la spécificité de sa démarche : découvrir des lois opératoires, symboliques et universelles, à partir de l'examen attentif d'une réalité physique dont la vérité ne peut souvent être appréhendée qu'à partir de procédures discrètes ou de méthodes d'approximation.

2. Entre nécessité et contingence, l'intervention de signes particuliers

Si Buée, dès le début du siècle, envisageait l'algèbre comme une langue, il travaillait à en dégager la syntaxe opératoire tout en lui conservant sa polysémie³⁹. Peacock va plus loin en ce sens qu'il veut fonder l'universalité de l'algèbre symbolique sur sa non-ambiguïté : si les symboles sont parfaitement généraux dans leur forme comme dans leur valeur, ils sont en revanche parfaitement univoques. L'équivalence des

³⁷ Laplace, P.S., 1814 (2ème éd.), *Théorie Analytique des Probabilités*, Paris, p. 3-9.

³⁸ Koppelman, E.H., 1969, *Calculus of Operations : French Influence on the British Mathematics in the first half on the nineteenth century*, Ph. D. Diss., John Hopkins University.

³⁹ Buée, A.Q., 1806, "Mémoire sur les Quantités Imaginaires", *Philosophical Transactions*, 96, 23-88.

formes porte sur des expressions où les ambiguïtés ou les indéterminations se trouvent localisées dans des signes particuliers, des signes porteurs de tout ce qui concerne la polysémie ou l'absence de référent, c'est-à-dire les cas où les fonctions manipulées sont multiformes, discontinues, ou non définies. Ces signes, s'ils sont définis par leurs propriétés opératoires, restent soutenus par un vocabulaire d'origine scolastique, celui des qualités. Peacock distingue ainsi :

- Les *signes de transition*, à savoir 0 et ∞ , qui ne représentent pas une valeur numérique, mais qui indiquent un "changement dans la nature ou dans la forme d'une fonction, quand elle est considérée dans le cours complet de son passage par ses différents états d'existence"⁴⁰. Par exemple, dans l'équivalence :

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} + \&c$$

lorsque $a < b$, le premier membre a une valeur négative et finie, et le second est une série infinie, traditionnellement nommée *plus quam infinitum*, dont les termes vont en augmentant. Pour Peacock,

*Les valeurs infinies ... de la série équivalente indiquent l'impossibilité d'exhiber la valeur de $\frac{1}{a-b}$ dans une série de cette forme.*⁴¹

- Les *signes d'affectation* ne sont autres que les racines de l'unité, conçues pour un indice n absolument quelconque. Peacock les écrit :

$$1^n \text{ et } \cos(2rn\pi) + \sqrt{-1} \sin(2rn\pi)$$

$$(-1)^n \text{ et } \cos(2r+1)n\pi + \sqrt{-1} \sin(2r+1)n\pi.$$

Ils lui permettent notamment de soumettre le champ de la trigonométrie - et par voie de conséquence, de la géométrie et de la mécanique - aux lois de l'écriture algébrique, tout en levant de nombreux paradoxes de l'analyse algébrique. La formule de Moivre, le logarithme des nombres négatifs et l'expression du développement en série de $2^m \cdot (\cos x)^m$ trouvent ainsi une expression plus complète⁴², Peacock utilise ces signes pour lever les

⁴⁰ Peacock, 1833, p. 232.

⁴¹ Peacock, 1833, p. 240.

paradoxes jusqu'alors attachés à ces questions, et issus du fait que le passage du champ des nombres ordinaires à celui des quantités impossibles introduit des fonctions multiformes qui faut parvenir à exprimer de part et d'autre du signe d'équivalence.

• Les *signes de discontinuité* sont chargés d'assurer l'universalité requise lorsque l'une des deux formes de l'équivalence algébrique n'est valide que dans un intervalle donné. Peacock les conçoit à partir des travaux de Fourier sur le développement des fonctions en séries trigonométriques⁴³. Peacock utilise surtout les signes qui font intervenir des séries et des intégrale définies, comme par exemple :

42

$$(\cos(\theta + 2\pi r) + \sqrt{-1} \sin(\theta + 2\pi r))^n = 1^n (\cos n\theta + \sqrt{-1} \sin n\theta)$$

$$= \cos n(\theta + 2\pi r) + \sqrt{-1} \sin n(\theta + 2\pi r)$$

$$\log a^m = 2rm(-1) + m \cdot \log a \quad \log a^m = 2rm(-1) + m \cdot \log a$$

$$\log(-a)^m = (2r + 1)m\sqrt{-1} + \sqrt{-1} + m \cdot \log a$$

$$2^m (\cos x)^m = \cos mx + m \cos(m - 2)x + \frac{m(m - 1)}{1.2} \cos(m - 4)x + \&c$$

$$+\sqrt{-1}(\sin mx + m \sin(m - 2)x + \frac{m(m - 1)}{1.2} \sin(m - 4)x + \&c)$$

ou, mieux encore, si r est la valeur arithmétique de $2^m (\cos x)^m$, autrement dit son module, $\rho(1)^m$ ou $\rho(-1)^m$

$$= \cos m(x + 2y\pi) + m \cos(m - 2)(x + 2y\pi) + \frac{m(m - 1)}{1.2} \cos(m - 4)(x + 2\pi y) + \&c$$

$$\sqrt{-1}(\sin m(x + 2y\pi) + m \sin(m - 2)(x + 2y\pi) + \frac{m(m - 1)}{1.2} \sin(m - 4)(x + 2\pi y) + \&c)$$

selon que $\cos x$ est positif ou négatif.

⁴³ Fourier, 1888-1890, (1811), *Théorie Analytique de la Chaleur*, *Œuvres*, Paris, Gauthier-Villars, vol. 1. Peacock se réfère également à Euler, *Institutione Calcul Integral*, t. IV; Fruloni, *Memorie della Società Italiana*, t. XX, p. 448; et Libri, 1829, *Mémoires de Mathématiques et de Physique*, Florence, p. 40-44; Lagrange, J.L., "Théorie du son, Mémoires de Turin, 3ème vol.; Poisson, "Mémoire sur les séries périodiques", *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 19ème cahier. Peacock, 1833, 251.

• $\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dr}{r} \sin(x-a)r + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dr}{r} \sin(b-x)r$, qui fait intervenir

"l'intégrale de Dirichlet", est considéré comme un signe de discontinuité explicite. Il est égal à 1 si x est entre a et b , à $\frac{1}{2}$ si $x=a$ ou si $x=b$, à 0 dans les autres cas.

• $\frac{x}{2} + r\pi = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots$, qui n'est autre

qu'une "série de Fourier", est considéré comme signe de discontinuité implicite, en ce sens que le second membre représente une fonction discontinue. L'introduction de $r\pi$ permet de rétablir la permanence des

formes équivalentes entre la somme de la série et la valeur de $\frac{x}{2} + r\pi$,

pour des valeurs appropriées de r telles que $-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} + r\pi < +\frac{\pi}{2}$. Peacock

peut alors pratiquer à loisir toute substitution sur x pour obtenir d'autres séries de Fourier. De ses sources continentales, Peacock retient essentiellement :

- d'une part, cet effacement du problème de la continuité des fonctions devant celui de la permanence des formes :

It would appear, therefore, that the conversion of one member of the equation of a line into a series of sines and cosines would change the character of that equation from being continuous to discontinuous, the coincidence of the two equations only existing throughout the extent of one complete period of circulation of the trigonometrical series It would thus appear that it is always possible to determine a series of sines of n termes with finite and determinate coefficients, which shall be the equation of a curve which shall have n points in common with the curve whose equation is $y=jx$, within the limits corresponding to values of x between 0 and π ; and it is obvious the greater the number of those points, the more intimate would be the contact of these two curves throughout the finite space corresponding to those limits. If we should further suppose the number of those points to become infinitely great, then the number of terms of the trigonometrical series would be infinite likewise, and the coincidence of the curve which it expresses with the curve whose equation is $y=jx$ would be complete within those

*limits only, producing a species of contact to which the term of finite osculation has been applied by Fourier. Beyond these limits, the curves would have no necessary relation to each other. It would follow, also, from the preceding view of the theory of finite osculations, that the curve expressed by $y=jx$ might be perfectly arbitrary, continuous or discontinuous.*⁴⁴

- d'autre part, et surtout, l'échec qu'il constate chez Fourier, à expliciter les propriétés opératoires de ces séries dans le cadre d'une algèbre symbolique. Peacock cite alors les travaux de Robert Murphy (1806-43), ex-étudiant de Cambridge, qui commence alors la publication d'une succession d'articles dans les *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, "On the Inverse Method of the Definite Integrals". Cette étude des transformations intégrales est publiée en même temps que son ouvrage⁴⁵ *Elementary Principles of Electricity, Heat, and Molecular Actions*. Elle constitue une recherche systématique d'écritures générales permettant de représenter des fonctions ayant un nombre fini de discontinuités, d'exprimer leurs propriétés opératoires, et de les appliquer aux problèmes de physique déjà proposés par Fourier, Poisson et Libri, pour la résolution d'équations différentielles. Murphy cherche notamment quelle est la forme générale des fonctions qu'il appelle "réciproques", et qu'on nomme aujourd'hui "orthogonales" : comme les fonctions trigonométriques, qui interviennent dans la théorie de la chaleur, ou comme les fonctions de Laplace, qui interviennent dans les problèmes de distribution de l'électricité, elles sont telles que, pour deux indices m et n servant à distinguer deux fonctions quelconques de cette

forme, $\int_0^1 T_m \cdot T_n$ égale 0 si $m \neq n$, et égale 1 si $m = n$.

Univocité, donc universalité du symbole, ambiguïtés du signe, tracent ainsi la ligne de partage entre de ce qui relève des propriétés syntaxiques et sémantiques de ce langage du raisonnement symbolique. Là où les propriétés syntaxiques sont exprimées sans aucune latitude possible, les ambiguïtés interviennent dès que se pose la question de l'interprétation des équivalences, qui est soigneusement distinguée des problèmes attachés à l'expression symbolique des propriétés opératoires. Qui plus est, ces propriétés syntaxiques ont un rôle de régularisation, puisqu'elles permettent

⁴⁴ Peacock, 1833, 252-56.

⁴⁵ Murphy, R., 1833, *Elementary Principles of Electricity, Heat, and Molecular Actions*. Part I : On Electricity, Cambridge, 1833. Murphy, R., 1833-35, "On the Inverse Method of Definite Integrals, with Physical Applications", *Trans. of the Camb. Phil. Soc.*, Part I, 4, pp. 353-408; Part II, 5, pp. 113-48; Part III, 5, pp. 315-93.

d'exhiber une forme définie, y compris lorsque les calculs conduisent à des indéterminations ou des discontinuités.

3. Un processus d'interpolation symbolique généralisée

Dans la mesure où Peacock est à la recherche de formes générales sur lesquelles on doit pouvoir opérer indépendamment des interprétations qui seront ultérieurement données aux symboles, ces formes doivent pouvoir représenter des opérations qui porteront, au moment de leur interprétation, aussi bien sur des quantités discrètes que sur des quantités continues, aussi bien sur des quantités réelles que sur des quantités impossibles. Ces formes sont alors susceptibles de "dégénérer"⁴⁶, comme l'écrit Peacock, en certaines formes particulières, pour des valeurs particulières des symboles qu'elles font intervenir. Mais la difficulté de ce qu'il appelle "the business of algebra", c'est que le mathématicien ne connaît le plus souvent que ces formes dégénérées, obtenues à partir de l'algèbre arithmétique, grâce à l'analyse desquelles il doit trouver les formes générales. L'objet même du travail de Peacock, c'est justement cette analyse qui doit permettre d'assurer le passage de l'algèbre arithmétique à l'algèbre symbolique, d'incorporer toutes les méthodes algorithmiques d'approximation dans une structure qui rende manifeste ce statut, plus ontologique qu'instrumental, qu'il veut donner à l'algèbre. Le problème général est de trouver la forme d'une fonction, connaissant certaines de ses valeurs particulières, et certaines relations qu'elle doit vérifier, dans un intervalle donné. Et l'analyse proposée conduit, selon les cas, tantôt à une expression analytique exacte, tantôt à une forme approchée.

Sa démarche s'inscrit donc dans le prolongement direct des méthodes d'interpolation, comme en témoigne la structure du Rapport de 1833 et les ouvrages auxquels il se réfère. Dans le domaine pratique, l'interpolation a été un des premiers problèmes de la fabrication des tables, qui demeure une préoccupation essentielle pour les membres fondateurs de la *Royal Astronomical Society*, constituant dès 1819 une des premières motivations de Babbage lorsqu'il entreprend la fabrication de sa machine aux différences⁴⁷. Dans le domaine théorique, ce sont des problèmes d'interpolation qui ont conduit Newton aux principaux développements en série de puissances. Et si Peacock reconnaît à Euler le mérite d'avoir fait de ce problème un champ de recherche spécifique, il ne manque pas de rappeler l'importance trop méconnue des travaux de Stirling en ce domaine.

⁴⁶ Peacock, 1833, 210.

⁴⁷ Babbage, Ch., 1989, *Works*, vol. 11, p. 30-33, "Passages from the life of a philosopher", 1864, p. 41-45.

Euler, in his Institutiones Calculi Differentialis, has given the name of inexplicable functions to those functions which are apparently restricted by their form to integral and positive values of one or more of the general symbols which they involve : of this kind are the functions:

$$\begin{array}{c} 1.2.3... .x \\ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x} \\ \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots + \frac{1}{x^n} \end{array}$$

*and innumerable others which present themselves in the theory of series.*⁴⁸

C'est le problème de l'interpolation des termes de la série $1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 + \text{etc.}$ qui a conduit Euler à l'étude de la fonction G , dont A.M.Legendre (1752-1833) vient de fournir une étude détaillée, aussi bien théorique que numérique⁴⁹, précisant à ce propos toute la généralité du calcul symbolique et du problème de l'interpolation des fonctions :

Il est bon d'observer que la question d'interpoler une suite donnée est susceptible d'une infinité de solutions, quand on l'envisage analytiquement et sans application à un objet déterminé. En effet, soit N le terme général de la suite donnée, terme dont la valeur est connue lorsque n est un entier, et soit $f(n)$ la fonction continue égale à N , dans laquelle on peut mettre pour n un nombre quelconque entier ou fractionnaire; si au lieu de N on prend

$$f \frac{N \cdot \sin(2n\pi + a)}{\sin a}$$

soit pas zéro, il est visible que la suite résultant de ce terme général ne différera pas de la suite donnée. On pourrait donc, au lieu de

$$f(n), \text{ prendre } f(n) \frac{N \cdot \sin(2n\pi + a)}{\sin a}$$

valeur qui différerait de $f(n)$ lorsque n n'est pas entier. On pourrait même prendre plus généralement, au lieu de $f(n)$, l'expression

⁴⁸ Peacock, 1833, 210.

⁴⁹ Legendre, A.M., 1825, *Traité des Fonctions Elliptiques et des intégrales eulériennes, avec des tables pour en faciliter le calcul numérique*, Paris, 3 vol.

$$f(n) \frac{A + B\sin(2n\pi + a) + C\sin(2n\pi + b) + \dots}{A + B\sin a + C\sin b + \dots}$$

et une infinité d'autres qui se réduisent à $f(n)$ lorsque n est entier; ce qui donnerait une infinité de solutions différentes de celle qui est donnée par la fonction continue $f(n)$.

On pourrait appeler fonctions ondulées les fonctions ainsi affectées d'un facteur qui se réduit à l'unité pour toute valeur entière de n . Ces fonctions serviraient à expliquer quelques paradoxes qui peuvent se rencontrer dans les applications de l'analyse.⁵⁰

Aussi bien les problèmes d'interpolation que ceux du développement en séries de puissances ont été intimement liés à l'élaboration des méthodes du calcul infinitésimal, considéré comme "the Calculus" par excellence. Le calcul des valeurs d'une fonction à partir de leurs différences est utilisé de bonne heure comme processus d'intégration, et même comme méthode d'intégration des équations différentielles. Les mathématiciens de l'Ecole Algébrique Anglaise ont ainsi l'ambition, clairement lisible dans le projet de Babbage de 1813 et dans le rapport de Peacock de 1833, de fonder un calcul plus général encore que le calcul infinitésimal, qui ne soit pas méthodologiquement coupé des processus d'invention, et qui soit susceptible de rendre compte aussi bien des méthodes de calcul direct sur les polynômes, les séries infinies, les fonctions, ou le calcul intégral, que des méthodes de calcul inverse, comme les méthodes de résolution d'équations ordinaires, d'équations aux différences finies, ou d'équations différentielles, qu'elles soient ordinaires ou partielles, voire d'équations fonctionnelles. En témoigne notamment la grande place que Peacock accorde, dans son Rapport de 1833, aux procédures d'approximation des racines des équations numériques⁵¹. Projet démesuré, certes, qui devra passer par l'épreuve des faits, mais qui rend compte aussi bien du programme de travail envisagé par Babbage, du contenu détaillé du rapport de Peacock, que des travaux plus spécifiques de leurs successeurs⁵².

⁵⁰ Legendre, 1825, t. 2, 475-76. Cité par Peacock, 1833, p. 209, 211, 216, 222.

⁵¹ Peacock, 1833, p. 322-52. Là encore, Peacock se livre à un véritable inventaire de toutes ces méthodes, de Descartes à Fourier.

⁵² Durand-Richard, M.J., 1996 (à paraître 1997), "L'impact des travaux de l'Ecole Algébrique Anglaise dans les journaux scientifiques autour de 1830", *Rivista di Storia della Scienza*.

• Recherche des formes équivalentes pour des exposants quelconques

Elle se concentre sur la recherche de l'expression la plus générale de la formule du binôme de Newton. Héritier des méthodes d'Euler, qui appuyait sa recherche d'une démonstration générale pour un exposant quelconque sur le présupposé d'une permanence de la forme, c'est à juste titre que Peacock considère cette formule comme le théorème le plus important de l'analyse. Étudiée pendant tout le 18^{ème} siècle, elle permet non seulement l'approximation des racines, pour n fractionnaire, mais l'accès aux développements en série pour l'exponentielle et les fonctions trigonométriques, ceci sans passer par le calcul infinitésimal⁵³. Elle est au calcul des différences ce qu'est la formule de Taylor pour le calcul différentiel, et elle intervient dans le calcul des sommes et des différences de fonctions, donc dans les problèmes d'interpolation. Dès le *Treatise of Algebra* de 1830, la formule du binôme est au centre de cette quête de méthode algorithmique et généralisante : la loi binômiale exprime une loi fondamentale du calcul des probabilités, qui intervient alors comme approximation de la connaissance certaine; elle prend forme finie ou infinie selon que n est ou non un entier; et elle occupe une fonction modélisatrice pour l'écriture du théorème de Taylor, dont la permanence de forme avec le développement de l'exponentielle permet de fonder le théorème de Lagrange, qui établit une relation entre calcul différentiel et calcul aux différences finies, puisque l'identification formelle⁵⁴ entre :

$$u(x + \xi) = u(x) + \frac{du}{dx} \xi + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{\xi^2}{2!} + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{\xi^3}{3!} + \&c$$

et
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \&c$$

conduit à écrire : $u(z+x) - u(z) = \Delta u = e^{\frac{du}{dx} \xi} - 1$, soit, en posant $\frac{d}{dx} = d$,

$$\Delta u = (e^{x\delta} - 1) u \quad \text{et finalement} \quad \Delta^n u = (e^{x\delta} - 1)^n u$$

Mais la démonstration générale de la formule du binôme reste problématique. Pour Peacock, elle a bien une existence nécessaire lorsque n est un entier ou fractionnaire positif ou négatif, au sens où la nature des

⁵³ Pensivy, M., 1987-88, (1986), "Jalons historiques pour une épistémologie de la série infinie du binôme", Thèse de 3^{ème} cycle, *Sciences et techniques en perspective*, 14.

⁵⁴ Lagrange, J.L., 1772, "Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables", *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres*, Berlin, 185-221. in 1867-92, *Oeuvres*, Paris, 3, 441-476. Arbogast, 1800.

opérations à faire sur $(1+x)$ peut être définie, et le développement établi. Mais pour toutes les autres valeurs de n , ce ne sont plus les définitions des opérations qui déterminent les règles de calcul, ce sont les propriétés des opérations qui déterminent leur sens, et qui assurent l'universalité de leurs applications⁵⁵. Peacock écrit la série du binôme sous la forme :

$$(1+x)^n = 1^n \cdot (1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \dots \\ + \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1.2\dots r} x^r + \&c)$$

où le signe d'affectation 1^n absorbe la multiplicité possible des valeurs de $(1+x)^n$ lorsque n n'est pas un entier. Ainsi formulé, ce théorème constitue, selon Peacock, une parfaite illustration du principe de permanence, puisque pour n quelconque, il n'est légitimé que par l'équivalence des opérations. Et la coïncidence entre les résultats numériques obtenus par l'algèbre arithmétique, et les résultats conventionnels établis par l'algèbre symbolique, est une preuve de l'exactitude de l'interprétation qui en a été faite⁵⁶.

• Indices quelconques de différentiation.

Tout comme il envisage les opérations portant sur des exposants quelconques, Peacock considère presque simultanément la possibilité d'avoir recours à des indices de différentiation quelconques, avec l'intention explicite de pouvoir appliquer les mêmes procédures aux fonctions transcendantes et aux fonctions algébriques, et de traiter le calcul différentiel et le calcul intégral comme une même branche de l'analyse⁵⁷. Fidèle à sa démarche, il reprend l'historique des travaux qui ont permis de développer cette idée, depuis la correspondance entre Leibniz et Jean Bernoulli, jusqu'à ses plus récents développements par Euler, Laplace, Fourier, et surtout Liouville⁵⁸.

⁵⁵ Peacock, 1833, 200.

⁵⁶ Peacock, 1833, 204-05.

⁵⁷ Peacock, 1833, 209.

⁵⁸ Peacock, 1833, 217-218. Il cite ainsi la correspondance de Leibniz avec Jean Bernoulli, dans le *Commercium Epistolicum*; le 5ème vol. des *Petersburg Commentaries* (1731) d'Euler; la *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace; et surtout la *Théorie Analytique de la*

Le problème de la différentiation d'indice quelconque revient ici à trouver la forme générale des coefficients de différentiation, problème dont Peacock trouve des éléments d'analyse dans :

- l'étude de la fonction G, que Legendre a appelé intégrale eulérienne de seconde espèce, et qui fait alors l'objet de nombreuses recherches menées dans le cadre des travaux sur les fonctions elliptiques. Elle-même généralisation de la fonction factorielle, elle permet d'écrire formellement les coefficients généraux de différentiation⁵⁹ pour des fonctions algébriques, puisque :

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{\int_0^1 dx (\log \frac{1}{x})^n}{\int_0^1 dx (\log \frac{1}{x})^{n-r}} = \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n-r)}$$

- le travail de Fourier, qui transforme l'écriture du coefficient différentiel général des fonctions algébriques⁶⁰, en ayant recours aux fonctions transcendentes. L'expression de la fonction

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos p(x-\alpha) dp$$

donne en effet,

$$\begin{aligned} \frac{d^i f(x)}{dx^i} &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^i}{dx^i} \cos p(x-\alpha) dp = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^i}{dx^i} \cos(px - p\alpha + i\frac{\pi}{2}) p^i dp \end{aligned}$$

coefficient qui est envisagé aussi bien pour i positif que pour i négatif, c'est-à-dire pour une intégration d'indice quelconque.

- et surtout la tentative de Liouville, qui pose la théorie complète des indices non entiers comme un "nouveau calcul", dont la raison d'être réside

Propagation de la Chaleur de Fourier; ainsi que les trois mémoires de Liouville, parus dans le 13ème volume du *Journal de l'Ecole Polytechnique* de 1832.

⁵⁹ Peacock, 1833, 204-205, 211-212.

⁶⁰ Fourier, 1888-1890, 508, cité par Peacock, 1833, 218. S'il cite son nom, Peacock ne fait aucun commentaire spécifique du travail de Laplace sur ce thème, développé dans sa *Théorie Analytique des Probabilités*, in 1843-47, *Œuvres*, Paris, 7, p. 85-86.

justement dans ses vastes possibilités d'application⁶¹. Il définit le coefficient différentiel d'ordre m de la fonction exponentielle e^{mx} par $m^\mu e^{mx}$ et par conséquent le m -ième coefficient différentiel d'une série de telles fonctions, notée $\sum A_m e^{mx}$ par $\sum A_m m^\mu e^{mx}$, et où \sum désigne indifféremment une somme finie, une série ou une intégrale. Reprenant les travaux de Poisson, Liouville montre alors, en posant $e^x = z$, que toute fonction $F(x)$ peut être écrite sous une telle forme⁶². Outre qu'elle offre une "forme", certes contestée, à l'indétermination des fonctions complémentaires qui interviennent dans la différentiation d'indice quelconque de 0, cette définition autorise la résolution de certaines équations différentielles. En Angleterre, cette recherche d'une forme pour les coefficients de différentiation d'indice quelconque sera notamment l'objet de nouvelles recherches chez Greatheed et Ph. Kelland (1808-79), avant d'être reprise par Riemann (1826-66).

• Des fonctions elliptiques à une formalisation plus générale de la trigonométrie

La théorie des fonctions elliptiques est une confirmation exemplaire de la conviction de Robert Woodhouse (1773-1827), qui s'exclamait le premier en 1802 :

*That the science of geometry was first invented is properly an
accidental circumstance.*⁶³

⁶¹ Liouville, J., 1832a, "Mémoire sur quelques questions de Géométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces Questions", *J. de l'Ec. Polytechn.*, t. XIII, n° 21, 1-69; 1832b, "Mémoire sur le Calcul des Différentielles à indice quelconque", *J. de l'Ec. Polytechn.*, t. XIII, n° 21, 71-162; 1832c, "Mémoire sur l'intégration de l'équation

$$(mx^2 + nx + p) \frac{d^2 y}{dx^2} + (qx + r) \frac{dy}{dx} + sy = 0 \text{ à l'aide des différentielles d'indices}$$

quelconques", *J. de l'Ec. Polytechn.*, t. XIII, n° 21, 163-86.

⁶² Peacock, à la recherche de formes générales indépendantes de la valeur des symboles, ne se soucie pas du fait que $F(x) = F(\log z)$ n'a pas toujours un développement de Maclaurin et que $\log z$ a une singularité en 0.

⁶³ Woodhouse, R., 1802, "On the Independance of the Analytical and Geometrical Methods of Investigation, and on the Advantages to be Derived from their Separation", *Philosophical Transactions*, 92, 85-125, p. 89. Woodhouse fait lui-même un abondant usage des intégrales elliptiques, et de leurs développements en série, dans son article de 1804, "On the integration of certain differential equations with which problems in physical Astronomy are connected", *Philosophical Transactions*, 94, 219-79.

En effet, comme le rappelle Legendre dans l'introduction de son traité sur les intégrales elliptiques, c'est grâce à l'introduction des notations adéquates que les problèmes de rectification de cônes ont conduit à l'étude des propriétés opératoires de ces intégrales spécifiques qu'il a lui-même classifié⁶⁴. Peacock souligne à son tour le caractère algorithmique que les notations eulériennes en "sinus" et "cosinus" confèrent à la trigonométrie :

*The introduction of this new algorithm speedily changed the whole form and character of symbolical language, and greatly extended and simplified its application of analysis to every branch of natural philosophy.*⁶⁵

Et c'est notamment grâce à une trigonométrie utilisant pleinement les "quantités impossibles" que Peacock se propose de soumettre la Mécanique à la domination de ce langage symbolique⁶⁶. C'est pourquoi il ne manque pas de souligner que ces fonctions trigonométriques peuvent être définies à partir des équations fonctionnelles :

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= 1 \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \sin(-\theta) &= -\sin \theta\end{aligned}$$

qui conduisent à leur expression en fonction de l'exponentielle et à leurs propriétés opératoires. Peacock s'inspire alors des récents travaux d'Abel sur

les fonctions elliptiques⁶⁷ pour préférer les définir à partir $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \theta$

et $\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-y^2}} = \theta'$, avec $x = \sin \theta$ et $y = \sin \theta'$. Non seulement ces formules

évitent tout recours à la mesure des angles, non seulement l'équation

$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$ fournit immédiatement la formule donnant

$\sin(\theta + \theta')$, mais ce type de définition débouche sur la possibilité d'autres systèmes trigonométriques. L'équation différentielle

⁶⁴ Legendre, 1825, vij.

⁶⁵ Peacock, 1833, 290.

⁶⁶ Peacock, 1830, *A Treatise of Algebra*, Cambridge,

⁶⁷ Abel, N.H., 1827, "Recherches sur les fonctions elliptiques", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 2, 101-25.

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

conduit ainsi à une trigonométrie hyperbolique, introduite par Lambert, et les intégrales elliptiques, à une trigonométrie que Peacock qualifie d'elliptique. Si on note q l'intégrale elliptique de première espèce

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \psi}} \text{ ou, en remplaçant } \sin y \text{ par } x, \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)(1-c^2 x^2)},$$

ou plus généralement encore $\int_0^x \frac{dx}{(1+e^2 x^2)(1-c^2 x^2)}$, on obtient les

formules d'addition de trigonométrie elliptique en posant : $x = \operatorname{sn} \theta$

(sinus elliptique de q), $\sqrt{1+e^2 x^2} = \operatorname{cn} \theta$ (cosinus elliptique de q),

$\sqrt{1+e^2 x^2} = \operatorname{sn} \theta$ (sursinus elliptique de q). Et Peacock précise que cette nouvelle trigonométrie dégénère en la trigonométrie ordinaire pour $e=0$ et $c=1$.

C'est ainsi en se laissant conduire par la recherche des formes équivalentes et par l'étude systématique de leurs propriétés opératoires que le mathématicien peut espérer atteindre toute l'universalité dont Peacock a investi l'algèbre symbolique.

V. Conclusion

Peacock applique l'analyse du langage telle qu'elle est approfondie chez Locke aux travaux des mathématiciens continentaux qui, examinant les extensions considérables de l'Analyse mathématique au-delà du champ de la Mécanique, l'envisageaient déjà comme le langage de la philosophie naturelle, mais sans approfondir plus avant les conséquences d'un tel point de vue. Ce faisant, l'ambition de l'Ecole Algébrique Anglaise participe d'une révolution symbolique essentielle, de dimension à la fois conceptuelle et idéologique, où l'opérateur prend le pas sur la structuration de l'espace et du mouvement comme fondement des mathématiques et comme représentation de l'action. En une période où le temps se charge de valeurs perçues comme négatives, tant sur le plan politique, avec la double menace de la Révolution Française et de la Révolution Industrielle, que sur le plan scientifique, avec la querelle entre uniformitaristes et catastrophistes au sujet

de l'évolution de la Terre, il est remarquable de voir Peacock expliciter les éléments d'une permanence formelle située hors du temps.

Si l'essentiel du matériau ainsi traité vient du Continent, la véritable originalité du travail de Peacock réside dans la primauté qu'il accorde aux opérations. Le fondement de la connaissance mathématique change ainsi de nature : les objets à connaître ne sont plus les quantités, mais les propriétés d'opérations agissant sur des symboles arbitraires. L'Algèbre Symbolique se construit dans une tension entre la nécessité logique d'un langage formel universel supportant le caractère opératoire de toutes les mathématiques, et l'origine quasi expérimentale qui lui est attribuée. Le mathématicien whig anglican qu'est Peacock n'est pas homme de rupture, mais un réformateur soucieux de garantir la fonction symbolique de la loi : il s'appuie sur une problématique algorithmique qui lui permet d'intégrer les travaux continentaux en analyse algébrique et de se référer aux mathématiciens anglais ayant œuvré aussi bien au développement des méthodes d'approximation qu'à celui d'une Arithmétique Universelle, tout en s'inscrivant dans un dépassement quasi naturel, puisque légitimé par l'histoire, de l'œuvre newtonienne. C'est cette même tension qui se retrouve, sous une forme plus éclatée, chez les successeurs de Peacock, notamment chez Gregory, Boole et De Morgan, dans le fait qu'ils mènent de front des recherches sur la logique formelle et sur des méthodes symboliques de calcul qui déboucheront sur le calcul opérationnel. Les débats qui se prolongeront entre eux resteront marqués par la question du statut à accorder aux possibilités de formalisation de telles méthodes.

Marie José Durand-Richard
M.C. Epistémologie Paris 8-REHSEIS