



HAL
open science

Rapports entre équilibre et dynamique au tournant des 17e et 18e siècles

Christophe Schmit

► **To cite this version:**

Christophe Schmit. Rapports entre équilibre et dynamique au tournant des 17e et 18e siècles. *Early Science and Medicine*, 2014, 19 (6), pp.505-548. <10.1163/15733823-00196p01>. <hal-02556905>

HAL Id: hal-02556905

<https://hal.science/hal-02556905v1>

Submitted on 22 Jul 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Rapports entre équilibre et dynamique au tournant des 17^e et 18^e siècles

Christophe Schmit

Abstract

This article investigates the reception of Galileo and Descartes' principles of statics in the works of some French scientists in the second half of seventeenth century, tracing their importance for the genesis of a concept of force. Through an examination of the link between statics and dynamics – especially concerning the phenomena of collision and the motion of falling bodies – it will be shown, first, that these principles of statics actually contributed to the genesis of dynamics; secondly, that the authors examined in this article managed to unify the various fields of mechanics by building a common axiomatic basis, and, thirdly, that there exists a conceptual identity between actions in engines and actions in dynamic phenomena. The evidence brought fourth in this article challenges the view according to which statics, and more particularly the law of the lever, was an obstacle for the development of dynamics, and particularly for the conceptualization of force.

Keywords

Principle of virtual work, Equilibrium, Force, Galileo, Descartes, Mariotte, Dechales, Wallis, Varignon.

1. Introduction

Soulignant que la loi du levier constitue une « ressource clef » pour l'élaboration des règles du choc de Descartes, P. Damerow et al notent plus généralement qu'au 17^e s. la « statics [...] provided the prototype of a rigorous theory of forces »¹. En effet, d'après cette loi, un équilibre requiert des poids en proportion inverse des longueurs des bras du levier : sous l'action d'une « force infime », les distances verticales simultanément franchies par ces poids, et donc leurs vitesses, s'avèrent proportionnelles à ces longueurs et, par conséquent, dans le rapport inverse des poids. Un poids associé à sa vitesse ou à l'espace parcouru permet ainsi de quantifier une force.² R. S. Westfall déplore l'usage de la loi du levier au 17^e s., l'historien dressant le tableau d'un processus conduisant à l'élaboration du concept de force pour laquelle la statique constitue à ses yeux un « obstacle ».³ Il remarque, notamment, que son application au choc conduit à le penser en termes de rapport de « forces » identiques à des quantités de mouvement : ce qui vaut sur la machine, et qui implique des mouvements virtuels, se voit directement transposé aux collisions pour des grandeurs finies dénommées

¹) Les auteurs relèvent deux « systèmes conceptuels » structurant le discours cartésien sur les règles du choc : l'opposition entre des modes contraires (repos, mouvement et déterminations) et celle entre forces que la statique exemplifie, Peter Damerow, Gideon Freudenthal, Peter McLaughlin, Jürgen Renn, *Exploring the Limits of Preclassical Mechanics* (New York, 2004), 92-108, citation p. 101. Sur ce rôle de la statique chez Descartes, voir Stephen. Gaukroger, « The Foundational Role of Hydrostatics and Statics in Descartes' Natural Philosophy », dans S. Gaukroger, John Schuster, John Sutton (éds), *Descartes's Natural Philosophy* (London, New York, 2000), 60-80.

²) *Ibid.*, 100-101 : « This concept of force [...] was [...] the point of departure for almost every scientific attempt to deal with the forces of motion in the 17th century ». Commentaires absents de la 1^{ère} édition de 1992 du livre.

³) Richard S. Westfall, *Force in Newton's physics. The Science of Dynamics in the Seventeenth Century* (Londres, New York, 1971), ix : « I have tried to understand the obstacles that cluttered the path leading toward modern dynamics, or to employ a different figure, the conceptual knots that had to be loosed » ; la statique constitue un de ces « nœuds conceptuels ». La critique du rôle accordé à la loi du levier constitue le fil rouge du chapitre dévolu essentiellement aux collisions, *ibid.*, 194-282.

« les forces des corps en mouvement ». ⁴ Tout en adhérant à ce constat, il n'épuise pas à lui seul le rôle de la statique dans l'élaboration du concept de force, pas plus que la « force du mouvement » ne résume le sens attaché au mot force au 17^e s. En adoptant le processus décrit ci-dessus par P. Damerow (et al), cet article entend montrer le rôle du principe des vitesses virtuelles dans la pensée d'un « effort » dynamique et dans la conceptualisation de la force. ⁵

Les auteurs ici étudiés – E. Mariotte, C.-F. Milliet Dechales, P. Varignon et des disciples – développent des travaux de statique, sur la chute libre, ou sur les règles du choc, diversité de thèmes à même d'informer sur l'articulation statique-dynamique pour chaque savant. Le choix de ce panel se justifie notamment par les analyses consacrées aux deux premiers par R. S. Westfall : elles ne nous semblent qu'insuffisamment mettre en pleine lumière le détail des relations entretenues entre les « efforts » dans le choc, la chute, et sur la machine, aspects d'autant plus cruciaux que ces textes dévoilent l'existence d'un « effort » dynamique et combien il est redevable aux principes statiques ; l'œuvre de Varignon – et de ses élèves – ne fait pas partie du *corpus* examiné par R. S. Westfall. ⁶ La lecture de Mariotte, Dechales et Varignon offre une étude de cas donnant un aperçu sur l'origine d'une conceptualisation chez des savants français au moment où Newton élabore sa dynamique. Leurs textes révèlent une assimilation des principes statiques de Galilée et Descartes – ces savants formant ainsi le point de départ de notre analyse – et témoignent alors d'une unité quant aux prémisses conduisant à cette conceptualisation.

Nous soutiendrons que pour les auteurs ici examinés les principes galiléen et cartésien permettent de penser la force lors du choc et de la chute libre, qu'ils unifient différents champs de la mécanique en leur conférant une même assise axiomatique, et qu'il existe une identité conceptuelle entre l'« effort » sur les machines et celui dans les phénomènes dynamiques. Par ailleurs, dans des travaux antérieurs à sa lecture de Newton et à sa formulation analytique des forces centrales, Varignon confère à sa force une assise statique identique à celle rencontrée chez Mariotte et Dechales, et il assimile cette force à celle qu'il tire des *Principia* de Newton. ⁷ Suggérant par cette identification une continuité conceptuelle et développant une œuvre dynamique d'importance, Varignon constitue le *terminus ad quem*

⁴ *Ibid.*, 75 : « the product of size times velocity, derived from the law of the lever, bedevilled mechanical discussions throughout the century as scientists attempted to apply to real motions a quantity valid for virtual velocities ». Sur ces savants et la « force of a body's motion » dérivant de la statique, *ibid.*, 198-199, 201, 205, 223-224, 241-243, 249. Sur le choc basé sur « the functional conception of force as a dynamical contestant », voir Alan Gabbey, « Force and Inertia in Seventeenth-Century Dynamics », *Studies in History and Philosophy of Science*, 2 (1971), 18-19.

⁵ Ceci ne faisant pas l'objet de l'étude de P. Damerow (et al), le processus ainsi décrit ne se voit pas illustré par l'analyse d'un *corpus* de la seconde moitié du 17^e s.

⁶ Comme le remarque R. S. Westfall, la statique conduit Dechales à penser le choc comme confrontation de forces-mouvements. Selon nous, elle ne se résume pas à ceci, mais introduit aussi une loi d'équilibre conduisant pour la chute libre et la collision élastique à associer une force à une variation de mouvement ; ce constat vaut aussi pour Mariotte. R. S. Westfall souligne l'importance d'une telle loi dans l'œuvre de ces savants, sans, par des analyses détaillées, montrer comment elle permet de penser une force qui intervient dans différents champs de la mécanique. A cet égard, est révélatrice sa lecture de Dechales. L'historien n'examine que son *Cursus seu Mundus Mathematicus*, 3 vols, (Lugduni : 1674) qui n'aborde pas les collisions, contrairement à la seconde édition de 1690 et à son autre livre *Traité du mouvement local* : il n'examine donc pas les règles du choc de Dechales, et pas davantage son étude des mouvements sur les plans inclinés. De la même manière, un raisonnement tiré du *Traité du mouvement des eaux* de Mariotte, figurant dans le présent article et absent de l'ouvrage de R. S. Westfall, rend compte du passage d'une force statique à une autre productrice de mouvement et montre comment s'élabore une pensée identique de la force pour les phénomènes de choc et de chute. Enfin, pour ces deux auteurs, R. S. Westfall ne relie pas une telle force aux principes galiléen et cartésien. Voir R. S. Westfall, *Force*, 200-203 et 243-254.

⁷ Pour cette formulation analytique, Voir Michel Blay, *La naissance de la mécanique analytique. La science du mouvement au tournant des XVII^e et XVIII^e siècles* (Paris, 1992). L'auteur s'attachant à ce développement analytique, son *corpus* ne comprend pas les textes de Varignon des années 1690 analysés dans le présent article.

de cette étude et l'ensemble du *corpus* examiné semble alors illustrer qu'il convient de ne pas considérer la statique, à l'instar de R. S. Westfall, sous le seul angle de l'« obstacle » épistémologique.⁸ Dans un premier temps, l'étude livre quelques éléments terminologiques et un résumé des principes statiques de Galilée et Descartes. Il s'agit ensuite d'examiner les relations entre ces principes et les forces chez Mariotte et Deschales. Enfin, la dernière partie s'ouvre brièvement sur la mécanique de J. Wallis afin de mieux introduire les travaux de Varignon et de ses élèves qui en constituent l'objet principal.

2. Principes de l'équilibre et aspects terminologiques

Dans sa *Mécanique analytique*, Lagrange évoque « trois principes généraux » de la statique, à savoir celui du « levier », de « la composition du mouvement » et des « vitesses virtuelles ».⁹ Ce dernier « consiste en ce que les puissances sont en équilibre quand elles sont en raison inverse de leurs vitesses virtuelles, estimées suivant les directions de ces puissances », une « vitesse virtuelle » correspondant à « celle qu'un corps en équilibre est disposé à recevoir, en cas que l'équilibre vienne à être rompu ».¹⁰ Lagrange en attribue la découverte à Galilée, précisant que celui-ci définit le « moment » d'une puissance par le produit de son intensité et de sa vitesse virtuelle, ajoute que Wallis adopte « le principe de l'égalité de momens pour fondement de la Statique », que Descartes énonce « un Principe [...], qui revient pour le fond à celui de Galilée » et, enfin, que Jean I Bernoulli « est le premier [...], qui ait aperçu cette grande généralité [de ce] Principe ».¹¹ Le « moment » galiléen et le principe statique cartésien apparaissant chez les auteurs examinés dans cette étude, les éléments suivant en résumé succinctement la teneur.¹²

De la pluralité de sens du *momento* chez Galilée, deux acceptions sont ici conservées.¹³

(i) Tout d'abord, la combinaison d'un poids par sa vitesse virtuelle, telle qu'elle apparaît dans le *Dialogo* par le biais d'un principe de compensation poids-vitesse sur une balance.¹⁴ Ce dernier figure déjà dans *Le Mécanique*, Galilée évoquant l'adjonction d'un poids « imperceptible » (« minimo momento di gravità ») sur un bras de levier afin d'établir la

⁸ Ce qui ne signifie pas pour autant que la statique ne puisse pas constituer un « obstacle » : ainsi de ces recherches au 17^e s. visant à « mesurer » la force d'un choc par un poids statique. Dans une toute autre perspective méthodologique, en s'attachant davantage aux « objets » (levier, plan incliné etc.), D. Bertoloni Meli invite à repenser l'importance de la statique dans le développement de la mécanique du 17^e s. : sur le levier et sa loi dans l'analyse des chocs et de la chute libre, voir Domenico Bertoloni Meli, *Thinking with Objects. The Transformation of Mechanics in the Seventeenth Century* (Baltimore, 2006), 53-54, 92-94, 118-119, 149-150, 234-235, 311-312.

⁹ Joseph-Louis Lagrange, *Mécanique analytique* (Paris, 1788), 2.

¹⁰ *Ibid.*, 8.

¹¹ *Ibid.*, 8 et p. 9 et 11 pour les autres citations. Pour cette définition, Lagrange se réfère au livre *Le Mécanique* rédigée avant 1600 et publié en 1649 sous le titre *Della scienza mecanica e delle utilità che si traggono da gl'Instrumenti di quella. Opera cavata da' manoscritti dell'Eccellentissimo Matematico Galileo Galilei* (Ravenne, 1649) ; ouvrage traduit/adapté par M. Mersenne, *Les Mécaniques de Galilée* (Paris, 1634). Il évoque par ailleurs les *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno à due nuove scienze attenenti alla Mecanica & i Movimenti Locali* (Leyde, 1638) et plus précisément une « scholie », celle l'édition de 1656 de cette œuvre, sur laquelle cet article revient.

¹² Cet article utilise l'expression de Lagrange « principe des vitesses virtuelles » pour dénommer de manière indifférenciée les principes de Galilée et Descartes.

¹³ Pluralité détaillée dans Paolo Galuzzi, *Momento. Studi galileiani* (Rome, 1979), 153-408.

¹⁴ Voir *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, dans *Le Opere de Galileo Galilei* (Edizione Nazionale), éd. A. Favaro, 20 vols (Florence, 1890-1909), VII, 241. Concernant la raison pour laquelle un poids peut en soulever un plus lourd sur une balance, Salviati énonce que « la velocità del mobile meno grave compensa la gravità del mobile più grave e meno veloce » ; Sagredo demande si « il momento e la forza di un mobile, v. g., di quattro libbre di peso, quanto quella di un di cento, qualunque volta quello avesse cento gradi di velocità e questio quattro graddi solamente ? » Varignon et des disciples liront ce passage comme l'énoncé du principe statique de Galilée, voir *infra* 4.2, notes 133 et 136.

condition d'équilibre sur la machine.¹⁵ Il souligne que l'équilibre requiert le rapport inverse des vitesses des corps à celui de leurs poids, remarque que la vitesse du plus petit « compense » la résistance du plus grand, et conclut en affirmant que son propos montre de quelle manière « la velocità del moto sia potente ad accrescere momento nel mobile ».¹⁶

(ii) Le second sens intervient avec le mouvement de chute libre sur un plan incliné. Une Scholie publiée dans les *Opere di Galileo Galilei* (Bologne, 1656) stipule que « les moments » où « les vitesses » d'un mobile varient selon les différentes inclinaisons d'un plan et ainsi « l'impeto, la puissance, l'énergie ou [...] le moment de descente sont diminués dans le mobile par le plan sur lequel il prend appui et descend ».¹⁷ Galilée cherche comment évolue cet « impeto ».

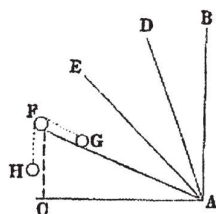


FIGURE 1 *Discorsi (Le Opere, VIII, 215)*

Ce « moment de descente » égale la « résistance ou plus petite force » nécessaire pour arrêter le mobile, le contrepoids H retient la tendance de G dénommée « moment de descente partiel » (voir Fig. 1).¹⁸ G se mouvant de A vers F offre une résistance uniquement parce qu'il franchit une distance verticale CF, tandis que H descend d'une longueur FA ; proportion valide pour des mouvements « grands » ou « petits ».¹⁹ Galilée écrit alors que

s'il doit y avoir équilibre, c'est-à-dire repos des mobiles, leurs moments, leurs vitesses ou leurs propensions au mouvement, c'est-à-dire les espaces qu'ils passeraient dans un même temps, doivent être en raison inverse de leur gravité, conformément à ce que l'on démontre pour tous les mouvements mécaniques.²⁰

Bien que « momenti » soient ici synonymes de « velocità », se retrouve un usage du principe énoncé précédemment (i) : l'évocation des longueurs franchies, la prise en compte d'un même « temps », les « propensions » et le recours à un conditionnel (« passeraient ») suggèrent des vitesses virtuelles. Il s'ensuit qu'un équilibre requiert la proportion $\frac{H}{G} = \frac{FC}{FA}$ et, dans ce cas, « H et G auront des moments de descente égaux ». Puisque un « moment » ou

¹⁵ Pour ce poids ajouté, Galilée écrit : « non tenendo noi conto di questo insensibile, non faremo differenza dal potere un peso sostenere un altro al poterlo muovere ». Voir *Le Meccaniche*, dans *Le Opere*, II, 164. Mersenne transcrit « si l'on adjoute quelque chose à l'un » des poids. Voir *Les Mécaniques*, 18.

¹⁶ *Le Meccaniche*, 164. Voir Mersenne, *Les Mécaniques*, 19, évoquant « la grande force qu'apporte la vitesse du mouvement pour accroître la puissance du mobile ». Ce principe de compensation poids-vitesse permet à Galilée de « confirmer » que l'équilibre sur un levier requiert une égalité de moments statiques. Voir *Le Meccaniche*, 163-164, *Les Mécaniques*, 17-19. Sur cette démonstration, P. Galluzzi, *Momento*, 207-212 et Maurice Clavelin, *La philosophie naturelle de Galilée* (Paris, 1968), 162-167. Pour le « moment » dans *Le Meccaniche*, voir aussi François De Gandt, *Force and Geometry in Newton's Physics* (Princeton, 1995), 92-95.

¹⁷ Voir Galilée, *Discours concernant deux sciences nouvelles*, trad. Maurice Clavelin, (Paris 1995), 146. Voir *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze*, dans *Le Opere*, VIII, 215.

¹⁸ Pour le « momento parziale », *Discorsi*, 217.

¹⁹ *Ibid.*, 217.

²⁰ Galilée, *Discours*, 147. Voir *Discorsi*, 217.

« impeto » égale la « force » pour arrêter le mouvement, le « moment de descente » de H selon FC mesure le « moment de descente partiel » de G sur le plan ; ainsi, $\frac{\text{Impeto ou moment de descente partiel (G)}}{\text{Impeto ou moment de descente total (G)}} = \frac{H}{G} = \frac{FC}{FA}$.²¹ S'attachant aux mouvements sans contrepoids, ce « lemme » sert à établir l'égalité des « degrés de vitesse » acquis au terme d'une chute sur des plans de même hauteur et diversement inclinés.²² Intervient lors de cette démonstration cette maxime : « tels auront été les *impeto* dans les débuts du mouvement, tels seront proportionnellement les degrés de vitesse acquis pendant le même temps, puisque les uns et les autres croissent en même temps avec la même proportion ». ²³ Manifestement, Galilée s'en tient ici à une mise en parallèle entre d'un côté le rapport des moments et, de l'autre, celui des vitesses, sans établir de lien causal, contrairement à son disciple E. Torricelli.²⁴

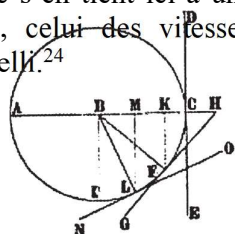


FIGURE 2 *Le Meccaniche* (*Le Opere*, II, 181)

Le Meccaniche contient aussi une application du principe (i) pour un plan incliné, et une analyse de la proportion selon laquelle le « moment de descente » se voit modifié sur des plans diversement inclinés.²⁵ ABC représentant un levier droit de centre B équilibré par deux poids égaux A et C (voir Fig. 2), Galilée proportionne la diminution du moment statique de C aux positions successives F et L avec le « momento ed impeto d'andare a basso » ou « momento di descendere » de C en chacun de ces points sur le cercle CFLI ou plus précisément sur leurs tangentes CFH et NLO (« contingente linea » ou « piano contingente »). Ainsi pour un même poids C, le rapport des moments statiques (M_s) en C et F donne $\frac{M_s(C)}{M_s(F)} = \frac{BC}{BK}$, et conduit avec les moments de descentes (M_d) à $\frac{M_d(C)}{M_d(F)} = \frac{M_s(C)}{M_s(F)}$. Puisque $\frac{BC}{BK} (= \frac{BF}{BK}) = \frac{FH}{FK}$ (BFC et KFC semblables), il vient $\frac{M_s(C)}{M_s(F)} = \frac{FH}{FK}$. Dès lors, « le moment total et absolu du mobile selon la perpendiculaire à l'horizon, est à celui qu'il a sur le plan incliné HF, comme le rapport de la ligne HF à la ligne FK, c'est-à-dire la longueur du plan incliné à la perpendiculaire ». ²⁶ Galilée passe ainsi du levier au mouvement de chute libre sur un plan incliné.

²¹ *Ibid.*

²² *Ibid.*, 218-219. Pour cette démonstration, M. Clavelin, *La philosophie*, 354-359, P. Galluzzi, *Momento*, note 5, 312-313.

²³ Galilée, *Discorsi*, 148 ; *Discorsi*, 218.

²⁴ Sur cet absence de lien causal, voir P. Galluzzi, *Momento*, 403, 405 ; F. De Gandt, *Force*, 105-107. Sur cette relation chez Torricelli, voir ses *Lezioni Accademiche* de 1642 publiées seulement en 1715. Pour ces conférences, R. S. Westfall, *Force*, 125-138 ; F. De Gandt, *Force*, 102-105 ; F. De Gandt, « L'analyse de la percussion chez Galilée et Torricelli », dans F. De Gandt, éd., *L'œuvre de Torricelli : science galiléenne et nouvelle géométrie* (Nice, 1987), 57-77.

²⁵ *Le Meccaniche*, 185-186 et *Les Mécaniques*, 57-58. Voir les commentaires de P. Galluzzi, *Momento*, 221-222 et M. Clavelin, *La philosophie*, 167-169. Les *Discorsi* de 1656 évoquent une analyse liant inclinaisons et moments dans « un traité ancien de mécanique » rédigé à Padoue, à savoir *Le Meccaniche*. Voir *Discorsi*, 216.

²⁶ *Le Meccaniche*, 181-183, notre traduction. Mersenne évoque « l'inclination à aller vers le bas » ou à « descendre », « le moment total & absolu du mobile » et le « moment qu'il a sur le plan incliné », *Les Mécaniques*, 51-53. Voir les analyses de P. Galluzzi, *Momento*, 215-227 et M. Clavelin, *La philosophie*, 169-178.

Le principe statique de Descartes apparaît dans des « Mécaniques » ou un « petit escrit de Mécaniques » joint à une lettre adressée à Constantin Huygens²⁷ :

l'invention de tous ces engins [les machines simples] n'est fondée que sur un seul principe, qui est que la mesme force qui peut lever un poids, par exemple de cent livres a la hauteur de deux pieds, en peut aussy lever un de 200 livres, a la hauteur d'un pied, ou un de 400 a la hauteur d'un demi pied, & ainsy des autres, si tant est qu'elle luy soit appliquée.²⁸

Réduisant la statique à un unique principe, en insistant sur son évidence et son caractère *apriorique*, Descartes entend axiomatiser cette science.²⁹ Il repose sur cette maxime que « l'effet doit estre toujours proportionné a l'action qui est necessaire pour le produire ». ³⁰ Cette explication causale relie donc un effet, « l'élévation d'un certain poids à une certaine hauteur », à « l'action nécessaire pour produire ce déplacement ». L'effet mesure une « action », « force » ou « effort » dont l'application à d'autres poids produit une même quantité d'effet.³¹ Une telle force possède « *tousiours deux dimensions* », contrairement à « celle qui sert en chasque point pour le soutenir [le poids], laquelle n'en a jamais qu'une dimension ». ³² Par ailleurs, Descartes écrit qu'

il suit evidemment de cecy [du principe] que la pesanteur relative de chaque cors, ou ce qui est le mesme la force qu'il faut employer pour le soutenir & empescher qu'il ne descende, lors qu'il est en certaine position, se doit mesurer par le commencement du mouvement que devoit faire la puissance qui le soustient, tant pour le baisser que pour le suivre s'il s'abaissoit. En sorte que la proportion qui est entre la ligne droite que descriroit ce mouvement, & celle qui marqueroit de combien ce cors s'approcheroit cependant du centre de la terre, est la mesme qui est entre sa pesanteur absolue & la relative.³³

Descartes insiste sur ce « commencement » de mouvement ; aussi remplace-t-il la surface plate d'un plan incliné par « une spherique, ou courbée en quelque autre façon ». ³⁴ Contrairement à Galilée, ce principe ne renferme ni temps, ni vitesse.³⁵ Descartes « explique » alors la proportion énoncée ci-dessus entre pesanteurs relative et absolue qu'il obtient par son principe appliqué à la poulie, au levier et au plan incliné. Pour ce dernier, il retrouve la

²⁷) Ces expressions figurent dans les lettres à Huygens du 5 octobre 1637 et à Pollot du 12 février 1638, *Œuvres de Descartes*, éd. C. Adam et P. Tannery, 11 vols (Paris, 1996), I, 434 et 518. Cet écrit porte pour titre *Explication des engins par l'ayde desquels on peut avec une petite force lever un fardeau fort pesant*.

²⁸) Lettre à Huygens du 5 octobre 1637, *Œuvres*, I, 435-436. Énoncé présent dans les lettres à Mersenne de 1638 (13 juillet, 12 septembre, 15 novembre), *Œuvres*, II, 228, 353, 432. Sur ce principe, voir Jean-Pierre Sérís, *Machines et communication* (Paris, 1987), 211-234.

²⁹) Sur ces aspects, et l'usage du principe à la question géostatique, voir Sophie Roux, « Cartesian Mechanics », dans Carla Rita Palmerino et J. M. M. Hans Thijssen, éd., *The Reception of the Galilean Science of Motion in Seventeenth-Century Europe* (Dordrecht, 2004), 42-52.

³⁰) Lettre à Huygens du 5 octobre 1637, *Œuvres*, I, 438 et à Mersenne du 13 juillet 1638, *Œuvres*, II, 222.

³¹) Lettre à Mersenne du 13 juillet 1638, *Œuvres*, II, 228-229 : « s'il est nécessaire d'employer l'action par laquelle on peut lever un poids de 100 livres a la hauteur de deux pieds, pour en lever un a la hauteur d'un pied seulement, cetuy cy doit peser 200 livres. Car c'est le mesme de lever 100 livres a la hauteur d'un pied, & derechef encore cent a la hauteur d'un pied, que d'en lever deux cent a la hauteur d'un pied ». La « quantité de cet effet » - soit de combien un poids peut être élevé - mesure « la quantité de l'action qui cause cet effet » ; il note aussi « autant d'action ou autant d'effort ». Lettre à Mersenne du 15 novembre 1638, *Œuvres*, II, 432-433.

³²) Lettres à Mersenne 12 septembre et 15 novembre 1638, *Œuvres*, II, 352-353 et 432-433.

³³) Lettre à Mersenne du 13 juillet 1638, *Œuvres*, II, 228.

³⁴) *Ibid.*, 233-234. Ce « commencement » assure une application du principe pour tous les types de surfaces ou avec des forces constantes ou non. Voir S. Roux, « Cartesian Mechanics », 48.

³⁵) Sur l'exclusion de ces grandeurs, S. Roux, « Cartesian Mechanics », 54-64 ; A. Gabbey, « Descartes' Physics and Descartes' Mechanics : Chicken and Egg ? », dans Stephen Voss, ed., *Essays on the philosophy and science of René Descartes* (Oxford, 1993), 319-321 ; Daniel Garber, « A Different Descartes : Descartes and the Program of Mathematical Physics in the Correspondance », dans S. Gaukroger, *Descartes' Natural Philosophy*, 113-130.

proportion classique reliant poids et dimensions du plan.³⁶ Pour le levier, le raisonnement s'avère proche de celui figurant dans *Le Mechanice*. Une force soutient ou meut un poids placé à l'extrémité opposé du levier, et « il faut penser qu'elle y agist tout de même que si elle traisnoit le poids sur un plan circulairement incliné, & l'inclination de chascun des poins de ce plan circulaire, ou spherique, se doit mesurer par celle de la ligne droite qui touche le cercle en ce point la ».³⁷ Il substitue les parcours des bras de la machine par des cercles (voir Fig. 3), trace la « tangente » en G (ou en I), et montre que le rapport entre les pesanteurs relative (=à la force soutenant le poids) et absolue égale celui de GR à GM (ou IN à IP).³⁸

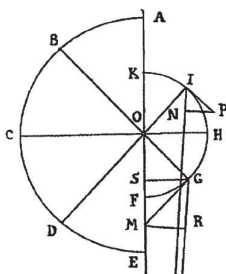


FIGURE 3 Descartes à Mersenne, 13 juillet 1638 (*Œuvres*, I, 236)

3. Principes de l'équilibre, chocs et chute : E. Mariotte et C. F. Milliet Deschales

Ce qui suit examine l'articulation entre les principes évoqués ci-dessus et l'analyse du choc et de la chute libre en remarquant comment se perçoit l'action dans ces phénomènes par le prisme de celle utilisée dans les machines, et en soulignant leur identité.

3.1. Edme Mariotte

Dans la Règle II de son *Traité du mouvement des eaux*, Mariotte énonce que si deux corps « sans ressort de même matiere » se choquent « horisontalement & directement » avec « leurs vitesses [...] réciproques à leurs grosseurs, au moment du choc ils feront équilibre »³⁹, ou bien encore, dans le *Traité de la percussion*, que pour une telle configuration de collision les mobiles « s'arrêteront l'un l'autre, & demeureront sans mouvement ».⁴⁰ Il écrit que

ce principe d'experience ou regle de la nature, & cette consequence sont presque la mesme chose que ces principes de Mechanique ; les corps dont les poids & les distances sont reciproques en une balance, font équilibre ; & s'ils font équilibre, leurs poids & leurs distances sont reciproques ; mesme ces derniers principes suivent en ordre de nature les deux autres, & en

³⁶) Lettre à Mersenne du 13 juillet 1638, *Œuvres*, II, 232. Pour un plan de longueur AB et de hauteur AC, le rapport de la pesanteur relative à l'absolue suit celui de AB à AC. Pour établir cette proportion, Descartes n'emploie pas des « commencements de mouvement » mais des déplacements finis ; même chose dans la lettre à C. Huygens du 5 octobre 1637, *Œuvres*, I, 438.

³⁷) Lettre à Mersenne du 13 juillet 1638, *Œuvres*, II, 236.

³⁸) *Ibid.*, 237. S. Roux analyse ce texte dans « Cartesian Mechanics », 48-50. L'auteur fait le rapprochement avec *Le Mecaniche*, notant ce passage du levier au cercle, et l'usage de la proportion entre les pesanteurs établie par le plan incliné. Elle souligne cependant que Galilée traite des variations des « moments de descente », intérêt ne figurant pas dans ce passage cité de Descartes. IN, GR, AE (voir Fig. 3) concourent au centre de la Terre et cette lettre porte sur la question géostatique.

³⁹) Mariotte, *Traité du mouvement des eaux & des autres corps fluides* (Paris, 1686), Règle II, 76. Cette « grosseur » s'identifie à une quantité de matière et aussi un poids qui sont proportionnels. La quantité de mouvement d'un corps correspond au « produit de son poids par sa vitesse », Mariotte, *Traité de la percussion ou chocq des corps. Dans lequel les principales Regle du mouvement, contraires à celles que M^r DESCARTES, ou quelques autres Modernes ont voulu establir, sont démontrées par leur veritables Causes* (Paris, 1673), Prop. IV, 33-34.

⁴⁰) Mariotte, *Traité de la percussion*, Prop. VI, 38.

dépendent : car la cause naturelle de l'équilibre de deux corps qui ont leurs poids & leurs distances reciproques, procede de ce qu'ils sont disposez à se mouvoir avec des vistes reciproques à leurs poids ; celui dont la distance est sous-double, ne pouvant descendre que l'autre qui est supposé peser la moitié moins, ne s'esleve avec une vistence deux fois plus grande.⁴¹

Mariotte conclut que « le principe de Mechanique, que les poids égaux en des distances inégales pesent inégalement » procède « de ce qu'ils sont disposez à se mouvoir avec des vistes differentes ».⁴² En amont d'un équilibre fondé sur une égalité de moments statiques figure un principe de compensation poids-vistes. Dans le *Traité du mouvement des eaux*, il écrit tirer des Règles I, II, III, « une Regle generale pour toutes les forces mouvantes » qualifié de « principe universel de la mécanique »⁴³ :

lorsque deux poids ou deux autres puissances sont disposées en sorte que l'une ne puisse se mouvoir qu'elle ne fasse mouvoir l'autre, si l'espace que doit parcourir un des poids selon sa direction propre & naturelle, est à l'espace que doit parcourir l'autre en même temps selon sa direction propre & naturelle, reciproquement comme ce dernier poids est au premier ; il se fera équilibre entre les deux poids ; mais si l'un des poids est en plus grande raison à l'autre, il le forcera.⁴⁴

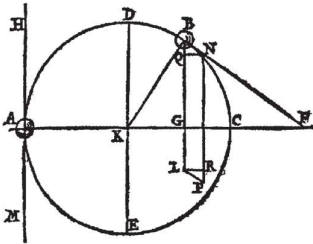


FIGURE 4 Mariotte, *Traité du mouvement des eaux*, 82

Mariotte utilise ces Règles avec indifféremment des vistes ou des espaces pour traiter de l'équilibre sur une balance, sur des plans inclinés, ou sur une roue ; il substitue alors l'équilibre sur une machine par des poids en mouvement qui se percutent.⁴⁵ Dans le cas de la roue, il considère les bras KA, KB portant des poids A et B, et BK élevée de 60° sur l'horizon : l'équilibre nécessite $B=2A$ (voir Fig. 4). En effet, il trace la tangente BF en B, rencontrant en F l'horizontale AK prolongée ; « le plan BF sera élevé de 30 degrez, & la

⁴¹) *Ibid.*, « Avertissement », 40-41.

⁴²) *Ibid.*, « Avertissement », 43-44.

⁴³) La Règle I stipule qu'« un Corps ne resiste à être élevé de bas en haut, que selon qu'on l'éloigne du centre de la terre, & on peut mouvoir un corps tres-pesant avec une tres petite force, si on ne luy fait point changer de distance à l'égard de ce mesme centre » ; la Règle III que « lorsque deux poids n'ont pas la mesme direction vers le centre de la terre, & qu'ils sont disposez en sorte que l'un ne puisse se mouvoir, qu'il ne fasse mouvoir l'autre aussi viste, il ne faut pas estimer la force de chacun par sa simple quantité de mouvement, mais par une quantité de mouvement respective qui se trouve en multipliant chaque poids par sa vitesse à l'égard de son approche ou de son recul du centre de la terre ». Mariotte, *Traité du mouvement*, 74 et 79. Pour cette « tres petite force », Mariotte donne l'exemple d'un mobile soutenu sur un plan incliné, et son propos fait écho à la « minima forza » de Galilée, capable de mouvoir un corps sur un plan horizontal. Voir *Le Mecanique*, 179-180, *Les Mechaniques*, 48-49. Sur cette question, voir S. Roux et Edigio Festa, « La moindre petite force suffit à mouvoir un corps sur un plan horizontal. L'émergence d'un principe mécanique et son devenir cosmologique », *Galilaiana*, 3 (2006), 123-147.

⁴⁴) Mariotte, *Traité du mouvement*, 85.

⁴⁵) Concernant la balance, Mariotte entend prouver « facilement le principe de mechanic, qui a été mal prouvé par Archimede, par Galilée, & par plusieurs Auteurs » à savoir la loi du levier. Il suppose une balance équilibrée BAC, de point d'appui A, avec $AC=4AB$ et les poids $B=4C$: si B « l'emporte », il décrit un arc et fait mouvoir C quatre fois plus vite. Or, sous ces hypothèses, « les quantitez de mouvement de ces deux corps seroient égales, & une quantité de mouvement auroit forcé une qui luy seroit égale ; ce qui est impossible, puis qu'elles doivent faire équilibre par cette seconde regle ». *Ibid.*, 77-78. Pour le plan incliné, *ibid.*, 79-31.

perpendiculaire BG ne sera plus que la moitié de BF ». B se meut « au commencement selon la tangente BF », mais n'avance vers le centre de la terre que de la verticale BG. De son côté, A s'en éloigne selon MAH et « sera disposé à aller deux fois plus vite » que B. Puisque $\frac{BF}{BG} = \frac{KB}{KG} = \frac{KA}{KG}$ (1), « le poids B fera le mesme effet à l'égard du poids A, que s'il étoit en G ». ⁴⁶ Mariotte conclut alors que « si AK est la mesure de la vitesse du poids A, KG sera la mesure de la vitesse du poids B, mais AK est double de KG, comme FB est de BG ; donc le poids A sera reciproquement au poids B comme KG, à KA, & par la 2 & 3 Regle, ces poids ainsi disposez feront équilibre ». ⁴⁷

A la place des poids, Mariotte suppose ensuite des « puissances » en L et M tirant selon BL et AM : la première fait que « B va selon la tangente BF au commencement du mouvement », et simultanément l'autre « va [...] selon la tangente HAM ». Il suppose « BN indefiniment petite dans la tangente BF » et considère BQ=RP, QN=LR, LP=BN : B venant en N sous l'action de la « puissance », L vient en P ; la « puissance attachée au point M se sera avancée selon la direction d'effort AM d'une ligne égale à BN ou LP, & la puissance en L ne se sera avancée en même temps selon la direction d'effort BL ou NP, que de la ligne RP » ; puisque $\frac{BQ}{BN} = \frac{BG}{BF}$ (2), que BF=2BG (par constr.) et BQ=RP, il vient BN=2RP : l'équilibre implique une puissance double en L qu'en M, « de même qu'il faut que le poids B soit double du poids en A afin qu'ils se fassent équilibre ». ⁴⁸

L'équilibre requiert ainsi la proportion de B=2A en vertu de la Règle II, puisque la vitesse de B à celle de A suit le rapport inverse des poids. La Règle II repose sur un choc inélastique avec des mouvements égaux : Mariotte justifie une égalité de moments statiques par une collision. En quoi ce raisonnement précise la relation entre les « efforts » sur la machine et dans le choc ? Le deuxième exemple montre que l'établissement de (1) et du rapport entre les vitesses KA, KG repose sur (2). Or, cette proportion, jointe à l'évocation d'un « commencement du mouvement » et l'assimilation de BN à une longueur « indéfiniment petite », correspond à celle des « moments de descentes » galiléens établie dans *Le Mécanique* (ii), BFG s'identifiant à un plan incliné. A cet égard, il faut souligner la ressemblance des Fig. 2 et 4⁴⁹, et la proximité avec le raisonnement de Galilée conduisant aux moments sur un plan à partir d'un levier ; la critique de Mariotte de la démonstration de loi du levier par Galilée (note 45) peut suggérer aussi une lecture des *Mécaniques*.⁵⁰ Mariotte passe du levier coudé AKB au droit ABG et substitue les bras par des vitesses. (1) et (2) montrent que $\frac{KA}{KG} = \frac{BN}{BQ}$; ainsi, KA et KG représentent ce que Lagrange nomme les vitesses virtuelles, et les « efforts » impliqués lors du choc ne diffèrent ainsi pas des « moments de descentes » de Galilée. La Figure 4 n'est pas aussi sans rappeler la Figure 3 de Descartes. Pour le plan incliné avec des poids équilibrés et agissants, Mariotte nomme « force des poids » ou « quantitez respectives de mouvement » le produit des poids par leurs hauteurs verticale d'élévation ou descente, quantités que Descartes nomme « forces » dans son principe ; le choc de la Règle II semble s'appuyer sur l'« action » ou « le moment » des principes cartésiens et galiléens qui correspondent au « Principe universel ». ⁵¹

⁴⁶) Autrement dit, les moments statiques par rapport à K de B placé en B ou en G sont identiques.

⁴⁷) Mariotte, *Traité du mouvement*, 82-83.

⁴⁸) *Ibid.*, 83-85.

⁴⁹) Il suffit de faire pivoter celle de Mariotte autour de l'axe AF pour retrouver celle de Galilée.

⁵⁰) Démonstration dans *Le Mécanique*, 161-163, *Les Mécaniques*, 12-17, les *Discorsi*, 152-154 et l'adaptation française Mersenne, *Nouvelles pensées de Galilée* (Paris, 1639), 113-116. Cette preuve ne recourt pas au principe des vitesses virtuelles, voir son analyse dans Paolo Palmieri, « Mental Models in Galileo's Early Mathematization of Nature », *Studies in History and Philosophy of Science*, 34 (2003), 229-264. Mariotte, *Traité du mouvement* contient des références aux travaux sur la résistance des matériaux ou la chute libre des *Discorsi*.

⁵¹) Pour cette terminologie concernant le plan incliné chez Mariotte, voir *Traité du mouvement*, 79-81.

Ce principe, à la base de cette Règle II, fonde aussi bien la science des machines ou des collisions, les concepts s'avèrent identiques, le poids du corps et sa vitesse assimilable à une tendance. Ainsi, les quantités impliquées se nomment « poids » ou « volume, avec une certaine solidité ou condensation des parties de [...] matière » du corps, dont la combinaison avec une vitesse donne une « quantité de mouvement », ou une « puissance de mouvement »⁵² ; lors d'un choc, ces dernières entraînent des « poussées » des corps l'un sur l'autre⁵³ ou une « puissance » ou « force de leur choc pour faire impression l'un sur l'autre » dont les aplatissements de boules de glaise rendent compte de l'intensité.⁵⁴ Comme les efforts « respectif » de poids l'un sur l'autre sur les machines équilibrées, ces percussions requièrent des vitesses assimilées à des « commencements de mouvement », « indéfiniment petites » ; les applications ci-dessus de la Règle II aux machines suggèrent une communauté conceptuelle.

De telles « forces » apparaissent aussi lors de chocs élastiques. Le choc de poids en proportion inverse de leurs vitesses conduit pour chaque corps à une restitution « de sa première vitesse ». Sans « ressort », le mouvement se perd, et les mobiles se rencontrant avec « la même force », « leur choc fera le même effet que si chacun d'eux avoit rencontré un corps inflexible & inébranlable » ; or, si un corps dur percute « un corps inébranlable à ressort », ce dernier lui restitue la vitesse incidente.⁵⁵ Cette proportion inverse des poids aux vitesses définit la position du centre de gravité du système, et ce choc revient à deux autres simultanés sur une surface rigide et verticale placée en ce point. Mariotte énonce deux « conséquences ». D'abord, cette proportion entre vitesses de rebonds et poids se généralise à tous les corps.⁵⁶ Puis « deux corps à ressort [...] partagent par le mouvement de ressort la vitesse respective de leur choc, selon la raison réciproque de leurs poids » quelles que soient leurs vitesses initiales.⁵⁷ S'ensuit une méthode pour trouver l'issue du choc : 1. considérer les corps « sans ressort » et trouver leur vitesse commune – qui correspond à celle du centre de gravité⁵⁸ ; 2. Lui ajouter ou soustraire les vitesses des rebonds obtenues par le partage de la vitesse respective en proportion inverse des poids, ce qui revient à faire agir le « ressort » de chaque mobile qui restitue d'égales quantités de mouvement, circonstance pour laquelle il se fait « une espèce d'équilibre ».⁵⁹ Se retrouve cette compensation poids-vitesses au cœur du « Principe universel ». Si Mariotte évoque le « choc » des mobiles, il écrit aussi qu'ils se rencontrent avec « la même force », et considérerait alors *des* percussions d'égale intensité au centre de gravité. Concernant celles-ci, les corps allant ensemble, il note qu'ils « ne se séparent que par la force de leurs ressorts », mentionne « la vitesse produite par la force des ressorts » qui « repoussent » mutuellement les corps en donnant « une égale quantité de mouvement », que « l'aplatissement » de ballons à « ressorts » ou celui de « boules

⁵² Mariotte, *Traité de la percussion*, Prop. IV, 31 et 33.

⁵³ *Ibid.*, Prop. II, 23.

⁵⁴ *Ibid.*, Prop. III, 25-29.

⁵⁵ *Ibid.*, Prop. XIV, 73.

⁵⁶ *Ibid.*, Prop. XV, 94-95. Lorsque la pression cessera, les boules « se repousseront l'une l'autre par leurs ressorts » et, si elles sont « égales », elles doivent « résister & se repousser de même force », sinon « la plus grosse doit plus résister au mouvement que la moindre [...] & il est très-vraysemblable que ce doit être selon la proportion des poids », ce que suggère « l'expérience ».

⁵⁷ La « force du choc » est la même pour une même vitesse respective (Prop. III, 25-29), laquelle demeure identique que les mobiles se rencontrent en un point quelconque ou au centre de gravité. Ainsi « l'impression du ressort qu'elles [les boules] se feront l'une sur l'autre sera la même » et « elles prendront une force de ressort aussi prompte & aussi ferme », voir Prop. XV, 95-96.

⁵⁸ Pour cette règle de collisions inélastiques, Prop. XIII, 68-71.

⁵⁹ Voir Prop. XIX, 115-119. Sur cette méthode, voir Pierre Costabel, « Mariotte et les règles du mouvement », dans P. Costabel, éd., *Mariotte savant et philosophe* (Paris, 1986), 75-90. Pour la formule « espèce d'équilibre » absente de l'édition de 1673, *Traité de la percussion ou choc des corps, Œuvres de M. Mariotte*, 2 vols (Paris, 1740), I, Prop. XV, 29

molles » se fait de la même façon, « la force de leurs ressorts [celle des ballons] les restitues en leur première figure par les mêmes degrez que l'applatissement s'est fait », seule différence avec les boules.⁶⁰ Cette compression élastique s'identifie donc au choc de la Règle II (impliquant aussi des corps inélastiques) et, alors, au « moment » de Galilée ou la « force » de Descartes.

3.2. Claude François Milliet Dechales

C. F. Milliet Dechales fait jouer au principe statique cartésien dans l'établissement de ses règles des collisions des corps dits « à ressort » un double rôle : il permet de définir une « force de percussion » ; l'identité de « percussions » justifie l'équilibre. Dechales énonce tout d'abord que « la force de ce ressort [d'un corps fléchi, ou mis en ressort] n'est pas plus grande que celle qu'on a employé à le fléchir », ou encore que « si on a été obligé d'employer la force d'un poids d'une livre qui descend de deux pieds, il n'aura pas plus de force qu'il en faut pour porter le poids d'une livre à la hauteur de deux pieds ». ⁶¹ Il définit ensuite la « quantité de mouvement d'un corps » en « le [ce corps, à savoir son poids] multipliant ou par l'espace qu'il parcourt, ou par sa vitesse », et énonce :

je suppose en second lieu, un Axiome de mecanique, qu'il faut plus de force pour produire une plus grande quantité de mouvement, & que c'est la mesme chose de mouvoir le poids d'une livre deux pieds, ou de mouvoir un pied, le poids de deux livres. C'est pourquoy si vous proposez une puissance laquelle puisse produire une certaine quantité de mouvement, laquelle soit employée pour mettre un corps en ressort, je dis que la force de ce ressort, ne pourra produire une plus grande quantité de mouvement.⁶²

Cet « Axiome », proche de l'énoncé cartésien, lui permet de définir une « force du ressort », là où Descartes évoque une force à « deux dimensions ». ⁶³ En effet, Dechales écrit que si une « puissance » susceptible de produire une quantité de mouvement met un corps « en ressort », celui-ci restitue ce mouvement lequel mesure alors sa force. ⁶⁴ Par ailleurs, le corps mis en ressort repousse un plus « grand » avec une vitesse moindre qu'un autre plus « petit », avec cependant une même quantité de mouvement pour chacun. ⁶⁵ Cette « force du ressort » requiert indifféremment déplacement ou vitesse. Cette compensation poids-vitesse se fonde sur l'impossibilité d'un mouvement perpétuel et sur un principe plus général de conservation d'un corps dans son « état naturel » ; Dechales évoque aussi à l'instar de Descartes une proportionnalité entre cause et effet. ⁶⁶

⁶⁰) Mariotte, *Traité de la percussion*, Prop. XXI, 127-128, Prop. XV, 94-95 et Prop. XVI, 103-104.

⁶¹) Claude François Milliet Dechales, *Traité du mouvement local, & du ressort. Dans lequel, leur Nature, & leurs Causes, sont curieusement recherchées, & où les Loix qu'ils observent dans l'accélération & les pendules, & encore dans la percussion & la reflexion des corps, sont solidement établies* (Lyon, 1682), Prop. 1, 74-75. Les règles du choc de cet ouvrage figurent aussi dans Dechales, *Cursus* (1690), II, 197-232.

⁶²) Dechales, *Traité*, Prop. 2, 76-77.

⁶³) Descartes écrit que « l'effort » intervenant dans son principe vaut quel que soit l'agent, que « cette action vienne d'un homme, ou d'un ressort, ou d'un autre poids, &c. ». Voir lettre à Mersenne du 15 novembre 1638, *Œuvres*, II, 433. Dechales se réfère de nombreuses fois aux *Principes de la philosophie* de Descartes, pour critiquer ses règles du choc, son explication du « ressort », sa définition du mouvement et la justification de sa persistance, *Traité* 131, 136, 145, 148 ; 67-69 ; 116-117.

⁶⁴) Dechales, *Traité*, Prop. 2, 77 : « la quantité de mouvement qu'on employe à mettre un corps en ressort, est la mesure de la puissance qui le produit, & le mouvement que le ressort produit est aussi la mesure de sa force ».

⁶⁵) *Ibid.*, 77-78.

⁶⁶) Ainsi, le « ressort » ne restitue pas plus que ce qui l'a comprimé car, dans le cas contraire, il en découlerait un mouvement perpétuel, ce que l'observation contredit. Par ailleurs, « la force par laquelle le ressort se remet dans son état naturel est égale, où plutôt est la même par laquelle il résiste à celle qui le tire hors de son état naturel » ; or cette résistance est moindre ou égale à la force qui comprime. Voir Prop. I, 74-75. Concernant la proportion cause-effet, Dechales écrit que « les quantitez de mouvement qui sont produites dedans les boules

Dechales en vient alors à la collision de corps à ressort sur un « corps ferme » (inamovible et dur) : si leurs poids sont en raison inverse de leurs vitesses « les chocs seront égaux », donc les compressions identiques et, par conséquent, « les chocs ont mesme raison que les moments, ou les forces des corps ont mesme raison que les quantitez de mouvement ». ⁶⁷ Le « moment », dénommé aussi « puissance », correspond à une quantité de mouvement sans pour autant que l'auteur se coupe de l'idée de sa production, car il s'agit ici de déterminer « quel mouvement du corps choquant doit servir de mesure à la force du ressort » qui correspond ici à la compression du mobile. ⁶⁸

Dechales examine ensuite le choc de deux boules « molles » ou « inflexibles » l'une contre l'autre avec des poids en raison inverse des vitesses : les « quantitez [de mouvement] seront par consequent égales, & les momens des deux corps seront aussi égaux, il y aura donc Equilibre, & aucun des mouvemens n'emportera l'autre ». ⁶⁹ Il écrit aussi que si « les corps & les vitesses sont reciproques, les percussions seront égales : donc il n'y aura point de raison que l'une l'emporte sur l'autre ». ⁷⁰ Il existe ainsi *des* percussions, non une seule, et l'auteur compare deux « forces » dont les intensités, qui correspondent aux « moments » des corps, s'évaluent par le choc sur un obstacle fixe.

Pour des corps dits « à ressort », Dechales préconise « pour mesure du ressort, le cas auquel les vitesses estoient reciproques aux corps, parce que pour lors l'on a l'Equilibre » ⁷¹ ; systématiquement, par le biais d'un changement de référentiel, il se ramène à cette situation. ⁷² La particularité du raisonnement tient à ce que ce ne sont pas les vitesses des rebonds qui suivent les proportions inverses des « résistances » ou poids des corps, mais leurs quantités de mouvement : $\frac{\text{Résistance de A}}{\text{Résistance de B}} = \frac{A}{B} = \frac{BV'_B}{AV'_A}$ (1), avec $V'_{A,B}$ les vitesses de rebonds, A et B les poids. ⁷³ Cette relation, pour des chocs de mobiles de même pesanteur allant en sens contraires, conduit à des vitesses de rebonds égales, et Dechales montrent que celles-ci

[entre lesquelles il y a un ressort] sont en mesme raison, que l'effort du ressort contre chacune puisque cét effort est la cause de ce mouvement, & l'effet, qui doit estre proportionné à son principe », Dechales, *Traité*, Prop. 7, 90-91.

⁶⁷⁾ *Ibid.*, Prop. 10, 100-101. Dechales traite aussi du choc sur une surface dure par deux mobiles de même vitesse mais de poids différents, et inversement : les « chocs » ou « percussions » sont comme les « puissances », « moments », « efforts », « forces » ou « quantités de mouvement » des mobiles, soit comme les poids dans le premier cas et comme les vitesses dans le second. Voir Prop. 8 et 9, 96-99.

⁶⁸⁾ *Ibid.*, 96. Pour l'identification moment-puissance, voir Prop. 8, 97 : « le premier principe de Mécanique [soit la première partie de l'énoncé de l'« Axiome de mécanique » de la citation ci-dessus] porte que la puissance ou le moment, est égal à la quantité de mouvement ».

⁶⁹⁾ *Ibid.*, Prop. 18, 139. Dechales établit la plupart de ses règles de chocs inélastiques par un changement de référentiel (un navire sur lequel s'opère le choc qu'observe un personnage sur la berge) avec pour collision référence celle d'un mobile allant contre un corps au repos, et non cette situation d'« équilibre » : l'issue d'un tel choc repose sur une conservation de la quantité de mouvement du système (Prop. 16, 129-133). Il propose, par ailleurs, pour certaines règles, une application directe de ce principe de conservation, Prop. 17 à 20, 134-162.

⁷⁰⁾ *Ibid.*, Prop. 18, 139.

⁷¹⁾ *Ibid.*, Prop. 19, 437. Voir aussi Prop. 15, 424.

⁷²⁾ Sur cette réduction au choc de mêmes quantités de mouvement, Prop. 7 à 12, 398-412 (avec des poids égaux) et Prop. 13 à 18, 413-432 (pour des poids différents).

⁷³⁾ *Ibid.*, Prop. 6, 88-89. Dechales écrit que selon certains auteurs un ressort comprimé placé entre deux corps de poids différents « fera autant d'impression sur l'un que sur l'autre, & qu'il partagera également son action, produisant une égale quantité de mouvemens, & dans l'un & dans l'autre », Prop. 5, 84-85. Il réfute cette opinion, estimant qu'un « ressort » agit « d'autant plus d'un côté qu'on luy résistoit de l'autre : autrement quand un corps est porté contre un autre inébranlable, il faudroit que la moitié de la force du ressort fut employée inutilement contre ce corps, & ainsi il n'en resteroit plus que la moitié pour repousser celui qui choque, lequel reprend sa vitesse toute entière », Prop. 19, 438. Un ressort entre deux poids A et B « employe une plus grande partie de son action vers B à mesure que la resistance est plus grande vers A », autrement dit, « il agit plus du costé qui luy resiste moins », à savoir en direction du corps moins pesant. Voir Prop. 4 et 6, 82 et 89.

correspondent aussi aux vitesses incidentes⁷⁴ ; une telle collision revient à celle simultanée de deux boules de part et d'autre d'un pan de mur. Lorsque des poids différents qui suivent la proportion inverse des vitesses incidentes V_A et V_B se percutent ($\frac{A}{B} = \frac{V_B}{V_A}$ (2)), (1) et (2) donnent $\frac{V'_B}{V'_A} = \frac{A^2}{B^2} = \frac{V_B^2}{V_A^2}$ ⁷⁵ ; autrement dit, cette fois-ci, les vitesses finales et initiales diffèrent, et puisque par changement de référentiel Dechales ramène toutes les collisions à ce choc, ses règles s'avèrent erronées.⁷⁶

Dechales montre qu'une même vitesse respective donne une même « percussion », rendant ainsi légitime de se ramener à cette situation d'« Equilibre ».⁷⁷ Le recours à cette configuration de choc tient manifestement à ce qu'elle implique égalité de « résistances » assimilées à des forces de compression. En effet, à travers des exemples numériques, il montre que la « résistance » qu'oppose un mobile correspond au mouvement incident qu'il aurait si les chocs de poids différents s'effectuaient avec des quantités de mouvement égales.⁷⁸ La « mesure du ressort » qui correspond à sa « force » ou à « l'effort du choc, ou de la percussion » égale alors « l'agregé du mouvement », à savoir la somme des quantités des mouvements incidents.⁷⁹

Au-delà de cette idée erronée concernant les vitesses de rebonds, ce recours à l'équilibre suggère de se ramener à une égalité de forces-résistances mesurées par un mouvement incident égalant la « percussion » d'un corps sur une surface dure.⁸⁰ Le cadre général de ce genre d'analyse demeure une confrontation de forces et leur égalité, d'après la mesure que donne le principe cartésien, permet de conclure, en vertu de ce même principe, qu'il y aura équilibre. Descartes ne semble pas l'unique auteur auquel Dechales soit redevable.

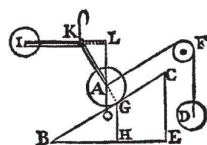


FIGURE 5 Milliet Dechales, *Traité du mouvement local*, 336

La lecture de Galilée semble manifeste, notamment lorsque Dechales introduit le « moment » à l'aide de corps s'équilibrant sur un plan incliné.⁸¹ Ainsi, (voir Fig. 5) en

⁷⁴ *Ibid.*, Prop. 7, 398-399.

⁷⁵ *Ibid.*, Prop. 13, 413-417.

⁷⁶ Sur ces vitesses finales et initiales différentes, *Ibid.*, Prop. 19, 435. Outre des règles fausses, selon Dechales la vitesse respective dans un choc élastique ne se conserve pas (Prop. 19, 433), de même que le mouvement du centre de gravité G d'un système de deux corps se percutant avec des vitesses en proportion inverse des poids (Prop. 28, 464-465). Sur ce point D. Bertoloni Meli, *Thinking*, 239-240.

⁷⁷ Dechales, *Traité*, Prop. 10, 433-434.

⁷⁸ Si A de poids 1 et B de poids 2 se rencontrent avec des vitesses 8 et 4, « parce qu'il y a d'un côté & d'autre une égale quantité de mouvement, il est tout employé à mettre le corps en ressort, sans qu'aucune partie soit inutile, puisque chacune trouve une résistance qui luy correspond, & parce que de chaque côté la quantité [de mouvement] est de 8, le ressort qui en résultera pourra produire 16. parties de mouvement ». Pour des mouvements en même sens, avec A=1 et B=2 avec des vitesses 18 et 6, « sans ressort » ils auraient « le mouvement de 30 » avec « la vitesse » commune 10. En effet, $A.18+B.6=(A+B).V$, soit $V=10$ et A perdrait « le mouvement de 8 » car $A.18-A.10=8$. Inversement, B gagne un tel mouvement et « le mobile B, a produit le même effet dans A, que s'ils s'étoient rencontrés par des vitesses [lire mouvements] de 8. ainsi la résistance qu'à fait le corps B, au mouvement A, a été égale à celle qu'auroit fait le même mobile B, si estant poussé contre A, il eut eu le mouvement de 8 ». Voir Prop. 19, 440-444.

⁷⁹ *Ibid.*, Prop. 15, 423. Sur cette mesure par l'« agrégé », voir notamment Prop. 7 et 16, 398 et 427.

⁸⁰ La paroi implique une résistance égale au mouvement, de même que pour deux mobiles de même quantité de mouvement chacun « trouve une résistance qui luy correspond », *ibid.*, Prop. 19, 441.

⁸¹ *Ibid.*, Prop. 21, 336 : « Le moment d'un corps, qui est posé sur un plan incliné, au moment du même corps, qui descend perpendiculairement, à même raison que la perpendiculaire au plan incliné ».

attachant D tel que $\frac{A}{D} = \frac{BC}{CE}$ (1), D équilibre A. En effet, « il y a Equilibre entre deux poids, lors que la reciprocation, entre leur grandeur, & leur mouvement perpendiculaire se rencontre » : en supposant $BG=CE$, il suit $\frac{BC}{BG} = \frac{CE}{GH}$, qui combinée avec (1) donne la relation d'équilibre, $\frac{A}{D} = \frac{CE}{GH}$.⁸² Dechales écrit alors que le « moment du corps A, sur le plan incliné » égale « celui du poids D, qui se meut perpendiculairement ». Mais, « si le poids A, tomboit aussi perpendiculairement, son moment auroit mesme raison à celui de D, que le poids A au poids D », soit que BC à CE : le rapport des moments de A selon la verticale à celui de A sur le plan (équivalant à celui de D) suit le rapport de BC à CE.⁸³

Dechales établit ainsi comme Galilée (ii) le rapport du « moment partiel » au « moment total », passant du rapport de poids équilibrés à celui de leurs moments. Il en vient ensuite, comme Galilée, à la proportion entre les vitesses le long du plan et de la verticale :

les vitesses du même corps doivent avoir la même raison que ses momens : car le mobile qui a des forces doubles, doit se mouvoir avec une double vitesse, puisque je considere les vitesses dans le même estat, c'est-à-dire, celles que le corps produit au commencement de son mouvement : & faisant abstraction de toute autre force estrangere, je ne puis avoir autre mesure de son mouvement, que ses forces pour se mouvoir, c'est à dire son moment : donc les mouvemens qu'il produit quand il tombe perpendiculairement, & quand il descend sur un plan incliné, sont en même raison que les momens.⁸⁴

Les mouvements, donc les vitesses, suivent alors la même proportion que les « moments » sur le plan incliné. Ce passage fait écho à la Scholie de 1656 (ii), lorsque les *Discorsi* mentionnent que les vitesses suivent le rapport des premiers « impeti » entre eux (« gl'impeti nella prima mossa ») ; Dechales évoque ici « les forces » et « vitesses [...] que le corps produit au commencement de son mouvement » et son ouvrage contient de nombreuses propositions des *Discorsi*.⁸⁵ Si « Forces » ou « moments » peuvent dans cette citation être assimilés à « mouvements », Dechales met aussi en relation forces et vitesses « produites » ; il écrit que sur un plan incliné, un corps « possède un moment déterminé [...] ; & dans un premier temps ce moment produira un mouvement ».⁸⁶ Or, remarquons que ces raisonnements figurent dans le Livre IV intitulé « De la Percussion », et que le « ressort de l'air » rend compte du mouvement accéléré des graves⁸⁷ : le « moment » (producteur du mouvement dans la chute libre) et la force de compression dans le choc s'identifient alors l'une à l'autre.⁸⁸

⁸² *Ibid.*, Prop. 21, 337 : « il y a même raison du poids A, au poids D, que de la ligne perpendiculaire CE, qui mesure le mouvement perpendiculaire du poids D, à la ligne GH, mesure du mouvement perpendiculaire du poids A ». Voir Fig. 5.

⁸³ *Ibid.*, Prop. 21, 337-338. Une variante consiste à recourir au levier coudé IKL (voir Fig. 5) et développer ainsi une méthode proche du contenu de *Le Mekaniche*, *ibid.*, 338-339.

⁸⁴ *Ibid.*, Prop. 22, 340.

⁸⁵ En particulier, de la troisième journée des *Discorsi* : ainsi les Th. I, II et son Cor. I, Th. III et son Cor., Th. VI (voir resp. Dechales, *Traité*, Prop. 12, 204-208 ; Prop. 14, 212-215 ; Prop. 13, 209-212 ; Prop. 26 et son Cor., 348-350 ; Prop. 25, 345-348). Pour ces propositions galiléennes, voir aussi Dechales, *Cursus* (1674), II, 497-507.

⁸⁶ Dechales, *Traité*, Prop. 23, 341.

⁸⁷ Dechales attribue la continuation d'un mouvement au « ressort » de l'air : un mobile « condense les parties antérieures [de l'air], & rarefie celles qui suivent » de telle sorte que « l'air [...] peut faire quelque impression par derriere sur le corps qui l'a mis en ressort ». Puisque « toute sorte de ressort fait principalement son effort du côté qui luy resiste le moins », le milieu compressé devant le mobile se dilate, et ses parties « poussent les parties qui sont proches » lesquelles finissent par faire « effort » derrière le corps, lieu de moindre résistance puisque « dilaté » ; cette circulation de la matière se fait avec une restitution intégrale de la quantité de mouvement du mobile pressant, assurant ainsi la conservation du même mouvement, Prop.12 et 13, 105 et 111-114. L'usage du « ressort de l'air » dans la détermination des règles du choc revient à recourir au principe de conservation de la quantité de mouvement : si deux corps durs vont l'un contre l'autre avec un même mouvement, ils produisent dans l'air « des ressorts égaux » et « contraires », lesquels poussent également les mobiles conduisant à un « équilibre », Prop. 17 et 18, 138 et 139-140. Concernant l'action du « ressort de l'air » dans la chute libre, la pesanteur produit dans un premier temps « un mouvement déterminé, par lequel l'air ayant esté condensé & mis

Le « moment » de Galilée ou la « force » de Descartes interviennent dans la pensée de l'effort survenant lors du choc ou de la chute libre. Ceci ne signifie pas que Mariotte ou Dechales développent une égalité entre action et réaction. Le « choc » correspond à une quantité globale somme de mouvements initiaux perdus lors « des percussions ». ⁸⁹ Le modèle sous-jacent demeure une confrontation de forces mais dont le principe des vitesses virtuelles permet d'évaluer les intensités. Ainsi, la grandeur poids-vitesse s'avère pourvoyeuse de concept et élément permettant d'intégrer la collision dans le giron de l'équilibre.

4. Organiser la science du mouvement à l'aide d'un principe de l'équilibre

Wallis et Varignon livrent un exposé de la mécanique unifiant ses différents champs autour d'une axiomatique reposant sur des principes statiques ; ceux-ci leur permettent aussi, à l'instar de Mariotte ou Dechales, d'élaborer une action dynamique. ⁹⁰

4.1 John Wallis

Wallis définit la mécanique comme une partie de la géométrie qui traite du mouvement et entend en établir l'axiomatique à l'aide d'une théorie des proportions algébrisées. ⁹¹ Le livre contient un chapitre intitulé « *De Motu Generalia* » renfermant trente propositions, les neuf premières consacrées à des grandeurs en général, appliquées ensuite dans les vingt-et-une autres aux forces, poids, longueurs, moments, résistances, vitesses et temps. ⁹² Celles-ci serviront à leur tour à établir les différentes propositions de cinématique, statique et dynamique de l'ouvrage. ⁹³ Un souci de généralité qui transparait notamment par cette mention que la gravité n'est qu'une force particulière appartenant à une plus grande famille dénommée « force motrice ». ⁹⁴ Or, Wallis définit celles-ci à partir d'un principe statique.

La combinaison entre un poids ou une force avec une distance est la grandeur susceptible de fonder une science de l'équilibre. Wallis nomme *Ascensus* et *Descensus* les élévations et

en ressort, peut continuer le mesme mouvement, produisant sans un second temps un mouvement égal, mais la pesanteur estant presente, pourra produire autant de mouvement dans ce second temps » ; ressort et pesanteur génèrent alors dans ce second temps « un mouvement double du premier » et donc « un double ressort » et ainsi de suite au cours du temps ; les vitesses augmentent « uniformement, & également [...] en mesme raison que les tems », Prop.10, 193-194 et 197. Sur un plan incliné, un corps possède « un moment déterminé » qui tout d'abord produit « un mouvement » lequel met « en ressort » l'air : ce « ressort a la force de continuer le même mouvement » et dans un second temps son effet se combine au « moment », Prop. 23, 341-343.

⁸⁸) Si Mariotte recourt à des « commencements » de mouvement ou à des quantités « indéfiniment petites », toutefois un corps « commence à tomber avec une vitesse déterminée, & qui n'est pas infiniment petite », mais finie. Mariotte, *Traité de la percussion*, 239. Même idée chez Dechales, *Traité*, 249-264.

⁸⁹) Cette conception se retrouve chez A. Borrelli et J. Wallis, voir R. S. Westfall, *Force*, 225 et 241-243.

⁹⁰) Nous ne détaillons pas ici le concept de force chez Wallis (voir R. S. Westfall, *Force*, 231-243) et ne nous attachons qu'au rôle du principe des vitesses virtuelle dans l'axiomatisation de sa mécanique.

⁹¹) Pour cette définition, J. Wallis, *Mechanica : Sive, De Motu, Tractatus Geometricus* (Londres, 1670-1671), 1-2. Concernant le fondement mathématique de la *Mechanica*, Luigi Maierù, « Mécanique et géométrie dans les écrits de mécanique de John Wallis. Le calcul du centre de gravité », *Revue d'histoire des mathématiques*, 1 (2004), 107-134.

⁹²) Ce chapitre contient aussi des définitions sur la « force motrice », le « moment » ou « l'empêchement » etc. sur lesquelles l'article revient.

⁹³) Le livre se compose de trois parties : La première, publiée en 1670, comprend le « *De Motu Generalia* » (chap. I), traite de l'équilibre des corps sur un plan incliné (chap. II) et du levier (chap. III) ; la deuxième des centres de gravités (chap. IV et V) ; la troisième de 1671 des machines simples (chap. VI à IX, et XII), des mouvements composés et accélérés (chap. X), des chocs (chap. XI et XIII), de l'hydrostatique (chap. XIV) et de questions variées (chap. XV).

⁹⁴) Pour la force motrice, Wallis note : « Vim motricem, vel etiam Vim simpliciter, appello Potentiam efficiendi motum » ; concernant la gravité : « Gravitas, est vis motrix, deorsum ; sive, ad Centrum Terræ ». Wallis, *Mechanica*, 3. Les propositions impliquant des corps sur des plans inclinés évoquent la gravité aussi bien que l'action de forces motrices. *Ibid.*, 33-66.

descentes verticales des poids, *Progressus* et *Regressus* la quantité dont la force motrice se meut selon sa direction.⁹⁵ S'ensuit alors cet énoncé :

si le *Descensus* prédomine, il s'ensuit un mouvement vers le bas : si l'*Ascensus* prédomine, s'ensuit un mouvement ascendant [...] S'ils sont équipollent, ils conduisent à un mouvement nul. Si plusieurs *Ascensus* et *Descensus* sont réunies : elles valent ensemble comme leur somme. Tout cela s'applique, *mutatis mutandis*, à toute force motrice.⁹⁶

Wallis nomme « principe universel à partir duquel les forces des machines se mesurent » cette comparaison entre les forces et leurs déplacements associés, qui peut conduire à un équilibre.⁹⁷ Cet énoncé, l'exposition d'une axiomatique reposant sur « la proportionnalité des effets à leurs causes », la connaissance des lettres de Descartes, peut suggérer une lecture cartésienne.⁹⁸ D'autre part, Wallis définit le « moment » d'une force appliquée pendant un certain temps comme la « raison composée » de la grandeur de cette force par la durée de son application, et introduit l'« empêchement » au mouvement (« *impedimenta* ») par la « raison composée » d'un poids et d'une hauteur d'élévation.⁹⁹ Les moments se voient proportionnés aux empêchements ce qui permet de quantifier le « degré de force » comme composé d'un poids et d'une vitesse (voir Fig. 6).¹⁰⁰ Dans la *Correspondence*, pour des exemples de collisions, la proportion cause-effet conduit directement à une mesure de la « Vis motrix ».¹⁰¹

P R O P. XXVII.

**In comparatis motibus, Virium gradus (cæteris paribus)
sunt in ratione quæ ex Ponderum & Celeritatum ratio-
nibus componitur.**

$$VT.v\tau::PL.\pi\lambda.$$

$$V . v :: \frac{PL}{T} \cdot \frac{\pi\lambda}{r} :: PL\tau.\pi\lambda T::PC.\kappa\kappa,$$

FIGURE 6 Wallis, *Mechanica*, Prop. XXVII, 29. (*V, v* les forces motrices ; *P, π* les poids ; *L, λ* les distances, *T, τ* les durées, *C, κ* les vitesses.)

⁹⁵) Wallis, *Mechanica*, Prop. III, IV, V, 34-38.

⁹⁶) *Ibid.*, Prop. VI, 38, notre traduction. Proposition généralisée pour des mouvements le long de courbes en prenant des directions définies par les tangentes, *ibid.*, Prop. XV, 47. Pour un résumé de ce principe, voir Danilo Capecchi, *History of Virtual Work Laws : A History of Mechanics Prospective* (Milan, 2012), 190-192.

⁹⁷) Wallis, *Mechanica*, Prop. I, 611.

⁹⁸) *Ibid.*, Prop. VII, 15 : « Effectus sunt, causis suis adæquatis, proportionales ». Dans sa correspondance, Wallis se réfère aux *Renati Descartes Epistolæ* (Amsterdam, 1668), voir lettre à Collins du 29 mars/8 avril 1673, *Correspondence of John Wallis*, Philip Beeley, Christoph J. Scriba (eds) (Oxford : 2014), vol. IV, 170 : « Descartes in his Epistles, part. 2 Epist. 43 ». *Renati*, Pars I, 24 contient la lettre à Mersenne du 13 juillet 1638 (cf. *supra* notes 30, 31, 33) et donc l'énoncé du principe cartésien et sa justification par la proportionnalité causes-effets ; il figure aussi dans Pars II, 106-107. Wallis mentionne Mersenne, *Tractatus Mechanicus Theoricus et Praticus* (Paris, 1644) qui reproduit (p. 12-13) de cette lettre du 13 juillet la démonstration de Descartes par son principe de la loi du levier. Wallis à Gassendi et Brouncker, 31 août/10 sept. 1655 et 16/26 oct. 1656, *Correspondence*, vol. I (2003), 162 et 212. Sans justifier, D. Capecchi, *History*, 190, note « the influence of Descartes is evident ».

⁹⁹) Wallis, *Mechanica*, 3. Voir aussi Prop. XIII à XVI, 20-23 et Prop. XVIII à XXI, 24-26.

¹⁰⁰) Pour cette proportionnalité, voir Prop. XVII, 23-24 : « Quæ respectivis Impedimentis æquipollent Momenta, sunt Impedimentis proportionalia [...] Eaque Momenta, si augeantur ; vel minuantur Impedimenta ; movebunt ». Voir aussi Prop. XXII, 26. Dans les deux cas, Wallis évoque la Prop. VII de proportionnalité effets-causes. Sur la mesure du « degré de force », voir Prop. XXVII, 29.

¹⁰¹) De part cette proportionnalité (dénommée « generall notion »), une force appliquée à un corps produit dans une même durée une vitesse deux fois moindre sur un corps double, ce qu'accorde les sens et la « raison ». Lettre à Oldenburg 17/27 mai 1669, Wallis, *Correspondence* (2012), vol. III, 184. Voir aussi 238, 242.

La relation obtenue se décline en différents problèmes permettant, notamment, de trouver la vitesse avec laquelle la même force V meut nP si elle déplace P avec C .¹⁰² Pour ceux-ci, Wallis se réfère aux machines simples rappelant qu'elles permettent de compenser le poids par la lenteur du mouvement ou la faiblesse de la force par la durée.¹⁰³ Cette combinaison force-temps renvoie à la maxime galiléenne d'une durée récompensant la petitesse de la force à la base du principe statique énoncé dans *Le Mekaniche*, ouvrage évoqué par Wallis¹⁰⁴ ; la mention d'une proportionnalité effets-causes et les « élévations » de corps pour traiter de l'équilibre suggérant pour leur part le principe cartésien. La section « *De Motu Generalia* » se voit alors intégralement fondée sur ces principes.

Le « degré de force » (voir Fig. 6) peut aussi correspondre à la simple quantité de mouvement d'un mobile ; la Prop. XXVII et les afférentes (XXVIII à XXX) s'appliquent aussi bien à la statique qu'au mouvement uniforme de corps, la « *De Motu Generalia* » se voyant utilisée de manière indifférenciée aux machines et à la cinématique.¹⁰⁵ Cette force joue aussi un rôle dans la genèse d'un mouvement uniformément accéléré. Un mobile acquiert une nouvelle « force » ou un nouvel « impetus » accélérant son mouvement, quantité mesurée par un appel à la Prop. XXVII.¹⁰⁶ Si une force s'oppose à ce mouvement, survient un ralentissement : Wallis reprend ici les termes « Momento » et « Impedimentum » et se réfère au « *De Motu Generalia* » définissant ces comparaisons moment/résistance par les machines.¹⁰⁷ Wallis ne prend plus ici pour mesure de cette « résistance » la quantité poids-longueur, mais la combinaison poids-vitesse.¹⁰⁸ Par ailleurs, il n'évoque pas en premier lieu la chute des corps, mais plus généralement l'action continue d'une « force motrice » ou « cause motrice » qui en un temps donné « imprime » un « degré de vitesse » ; le renouvellement de ce processus en des « moments [égaux] de temps », joint à la conservation du mouvement acquis à l'instant précédent, et en vertu de la Prop. VII de proportionnalité de cause-effet, conduit au mouvement uniformément accéléré.¹⁰⁹ L'action de la force motrice dans le temps, ce que Wallis définit comme étant le « momentum » (« *ad Momentum refero, Vim motricem, & Tempus* »), produit une quantité de mouvement. Or, Wallis identifie aussi le « moment » à l'élévation du poids (voir *supra*). Dans ce dernier cas, seule la « force motrice » (non combinée au temps) produit une quantité de mouvement : ambiguïté qui se retrouve chez P. Varignon.

Ce « moment » ou « force » intervient dans la collision identifié à une quantité de mouvement.¹¹⁰ Wallis se réfère aussi au « Momentum seu Vis impellens »¹¹¹ qui génère un

¹⁰²) Wallis, *Mechanica*, Prop. XXVIII, XIX, XX, 30-31.

¹⁰³) *Ibid.*, Prop. XXVIII, 30.

¹⁰⁴) Sur ces quatre grandeurs (la force, le temps, la distance d'élévation et la vitesse) pour la bonne intelligence du fonctionnement des machines et le fait que « la longueur du temps recompense le peu de force », voir Mersenne, *Les Mécaniques*, 2-4 ; *Le Mekaniche*, 155-157. Wallis se réfère à une version manuscrite de *Le Mekaniche* présent à la Bodleian Library en évoquant l'utilité des machines « that they do exchange Strength for Time ». Wallis à Collins, 7/17 août 1666, *Correspondence*, vol. II, 279-280.

¹⁰⁵) Le Chap. XI (« *De Percussione* ») évoque le mouvement d'un corps parfaitement dur de poids P en notant « Adeoque Vis seu Impetus quo movetur $V=PC$: per prop. 27. Cap. I », Wallis, *Mechanica*, Prop. I, 660.

¹⁰⁶) *Ibid.*, Prop. I, 645.

¹⁰⁷) *Ibid.*, Prop. I, 645-646.

¹⁰⁸) *Ibid.* Ainsi, l'expression de la force contraire (nommée nV) est $nV=nPC$, avec n un entier.

¹⁰⁹) *Ibid.*, Prop. II, 646-648. Pour l'accélération sur les plans inclinés, voir Prop. IV, 651-652. Voir les analyses de R. S. Westfall, *Force*, 232-233 et 237-239.

¹¹⁰) Wallis, *Mechanica*, Prop. I, 660 : « Momento (quod ex Pondere & Celeritate componitur) » et « Momentum

moment/mouvement par le biais de la grandeur du choc.¹¹² Lors d'une collision d'un corps élastique sur une surface dure, la « force élastique » égale la force qui comprime, soit le mouvement initial, et elle produit, sur un même poids, la même vitesse : Wallis se réfère à nouveau à la Prop. 27 qui ne concerne donc pas seulement la cinématique.¹¹³

4.2 Pierre Varignon

Dans sa *Nouvelle Mécanique* publiée en 1725, Varignon énonce comme premier « Axiome » que les effets sont proportionnels à leurs causes et donne alors un « Avertissement » dans lequel il introduit un concept de force.¹¹⁴ Cette maxime se retrouve de manière implicite dans son *Projet* de 1687, livre qui constitue la première mouture de l'ouvrage de 1725.¹¹⁵ En 1687, l'axiome introductif stipule que « les espaces que parcourt un même corps, ou des corps égaux dans des tems égaux, sont entr'eux comme les forces qui les meuvent », et réciproquement.¹¹⁶ La proportionnalité cause-effet sous-tend cet énoncé, en ayant à l'esprit qu'elle apparaît chez Descartes et Wallis, auteurs cités dans la « Préface » de 1687, celui-là associant une « action » au déplacement du poids, le second égalant l'application de la « force motrice » pendant un certain temps à l'élévation d'une charge.¹¹⁷ D'autre part, des thèses arbitrées par Varignon en 1699 et 1704 au Collège Mazarin introduisent cet axiome en se référant à Descartes, tout en développant une étude de l'équilibre sur des machines simples s'appuyant sur la méthode de Varignon.¹¹⁸ Il figure aussi dans un autre traité publié en 1725

seu Vis mrPC ».

¹¹¹⁾ *Ibid.*, Prop. II, 662-663.

¹¹²⁾ Lors d'un choc de deux corps « parfaitement durs », le « grave » possédant le plus fort « moment » (le produit poids-vitesse) en perd une partie qu'il cède à l'autre : « l'effet » du choc correspond à ces « moments » gagnés et perdus dont la somme définit « la grandeur du choc »/« ictus magnitudo ». Prop.V, 666-667.

¹¹³⁾ Lors d'une collision élastique, l'« ictus magnitudo » s'identifie à la « force de compression » égale à la « force élastique ». Si un corps de mouvement mrPC (m et r entiers) heurte un mur, l'un et/ou l'autre possédant un « ressort », la force transmise à ce dernier égale la « force élastique », à savoir celle qui supporte la totalité du choc, et la compression dure jusqu'à ce que le « ressort » égale la « force qui comprime ». Or, le ressort subit une déformation due à la fois au mobile mais aussi à la résistance du mur laquelle vaut aussi la quantité mrPC : si le corps et le mur étaient indéformables, la résistance égalerait le mouvement incident et la « grandeur du choc » vaudrait 2mrPC. La « force de compression » correspond alors à cette quantité et le ressort se détend en restituant un mouvement égal au mur et au mobile, faisant rejillir ce dernier avec sa vitesse incidente, Prop. I, 687-692, et Prop. III, 695-696 pour des corps se heurtant avec des vitesses en raison inverse des poids.

¹¹⁴⁾ Pierre Varignon, *Nouvelle Mécanique ou Statique, dont le Projet fut donné en M.DC.LXXXVII*, 2 vols (Paris, 1725), I, 4 : « Axiome I. Les effets sont toujours proportionnels à leurs causes ou forces productrices, puisqu'elles n'en sont les causes qu'autant qu'ils en sont les effets, & seulement en raison de ce qu'elles y causent ». Cette proportionnalité de la « force productrice » à son effet trouve une illustration à travers le choc de corps durs où la « force ou puissance motrice » de « l'Agent » (différente de la quantité de mouvement de ce même « Agent ») s'identifie au mouvement « imprimé », « communiqué » ou « reçu » à/par un autre corps. « Avertissement I », 9-10.

¹¹⁵⁾ Varignon, *Projet d'une Nouvelle Mécanique avec un Examen de l'opinion de M. Borelli, sur les propriétés des Poids suspendus par des Cordes* (Paris, 1687).

¹¹⁶⁾ Varignon, *Projet*, 1-2.

¹¹⁷⁾ Par ailleurs, à la suite l'axiome VI de 1725 s'avère quasiment identique au premier axiome de 1687. Voir Varignon, *Nouvelle Mécanique*, 5 : « les vitesses d'un même corps, ou de corps de masses égales, sont comme les forces motrices qui y sont employées, c'est-à-dire qui y causent ces vitesses ; réciproquement ».

¹¹⁸⁾ Celle-ci consiste à recourir à la composition de forces et à considérer qu'un équilibre s'obtient par une action contraire et égale à leur résultante. Voir Varignon, *Nouvelle Mécanique*, 6-8. Concernant les thèses, voir *Theses Mathematicæ de Viribus Machinarum. Propugnabuntur à Carolo Frederico Du Four, Parisano [...] Arbitr erit Petrus Varignon*, (Paris, 1699), 19 : « Tandem neque major, neque minor vis requiritur ad grave corpus, aliquam ad altitudinem elevandum, quàm ad elevandum alterum minis grave ad altitudinem tantò majorem, quantò hoc grave minus est, vel ad elevandum aliud gravius ad altitudinem tantò minorem. Quod Cartesio Epist. 73. Tom. 1. primum est Mechanicæ principium, sed remotius quàm ut intimam æqualibrii rationem attingere possit : nec, inquam, hanc id magis attingit quàm universalissimum, ex quo fluit, principium (*Effectus sunt causis proportionales*) attingat effecta Naturæ ». Développement identique dans *Theses Mathematicæ de Viribus*

composé à partir de manuscrits de Varignon.¹¹⁹ Le couple axiome-force devient la clef de voûte du projet de Varignon. A en croire sa « Préface », un souci de généralité et une insatisfaction motivent la rédaction de 1687. Selon Varignon, les études classiques des machines simples reposent sur la loi du levier, « parce que leurs [aux mécaniciens] principes n'avoient pas assez d'étenduë pour en pouvoir démontrer les propriétés indépendamment les unes des autres ». ¹²⁰ S'il évoque alors la généralité des principes de Descartes et Wallis¹²¹, ils n'« éclairent » pas plus que ceux de leurs aînés car « ces Auteurs se sont tous plus attachés à prouver la nécessité de l'équilibre qu'à montrer la manière dont il se fait ». ¹²² Varignon cherche « l'équilibre lui-même dans sa source, ou pour mieux dire ; dans sa génération » ¹²³ et propose une explication en termes de causes, celles « générant » l'équilibre qui résulte de l'opposition de forces.

Les premiers textes académiques des années 1692-1693 témoignent d'une recherche d'unité et généralité dans l'énoncé de la mécanique, réglées par l'axiome de proportionnalité autour duquel graviteraient tout à la fois la cinématique, la statique et la dynamique.

Le « principe » de 1692-1693

Dans un mémoire du 31 décembre 1692, figure cette mention que malgré les « progrès dans la science du mouvement » durant le siècle, « il semble que l'on a pas assez examiné le mouvement en général » ; si Wallis écrit un *De Motu Generalia* dans sa *Mechanica*, il ne donne que « peu de Regles ». Aussi, Varignon « ayant eu l'occasion d'examiner cette matiere, a trouvé une route qui l'a conduit [...] à un fort grand nombre de Régles », incluant toutes celles du début de l'ouvrage de Wallis ou la section « *de motu æquabili* » de Galilée dans ses *Discours*. ¹²⁴ Le « principe » ou « Regle fondamentale de tous les mouvemens imaginables » de ces premières années duquel procède ces « Régles » s'énonce ainsi :

*Dans toutes sortes de mouvemens, soit qu'ils se fassent en roulant ou en glissant, soit en ligne droite ou en ligne courbe, soit que ces mouvemens soient uniformes, ou accelerez ou retardez, dans toutes les proportions & dans toutes les variations imaginables ; la somme des forces qui font le mouvement dans tous les instans de sa durée, est toujours proportionnelle à la somme des chemins ou des lignes que parcourent tous les points du corps mû.*¹²⁵

Cette « Regle » figure aussi dans le *Traité du mouvement des eaux* de 1725 sous le titre « Principe général de tous les Mouvemens possibles », démontrée à l'aide de l'axiome de proportionnalité des effets à leurs causes.¹²⁶ Elle apparaît chez Nicolas Guisnée, académicien

Machinorum, Propugnabuntur à Barth. Anton. Francisco Ferret du Tymeur, Rhedonensi [...] Arbiter erit Petrus Varignon (Paris, 1704), 21. « Quod Cartesio Epist. 73. Tom. 1. » renvoie à la Lettre LXXIII de Descartes à Mersenne dans l'édition de C. Clerselier, *Lettres de Mr Descartes*, vol I, (Paris, 1657). S'y trouve (page 410) sous le titre « Principe general » le principe de Descartes ; la missive correspond à celle du 13 juillet 1638 déjà évoquée. Rappelons que Varignon enseignait au Collège Mazarin.

¹¹⁹ Varignon, *Traité du Mouvement & de la Mesure des Eaux Coulantes & Jaillissantes. Avec un Traité Preliminaire du Mouvement en general. Tiré des Ouvrages Manuscrits de feu Monsieur Varignon par M. l'Abbé Pujol* (Paris, 1725), 2. Le contenu de ces manuscrits est proche des mémoires de 1692-1693.

¹²⁰ Varignon, *Projet*, « Préface » (non paginée).

¹²¹ *Ibid.*.

¹²² *Ibid.*

¹²³ *Ibid.* « Il faut entrer dans la génération de l'équilibre pour y voir en soi, & pour y reconnoître les propriétés que tous les autres principes ne prouvent, tout au plus, que par nécessité de conséquence ».

¹²⁴ Varignon, *Regles du mouvement en général*, dans *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, depuis 1666. jusqu'en 1699*, Tome X (Paris, 1730), 225-226. Il s'agit de la partie de la 3^{ème} journée des *Discorsi* dévolue aux mouvements uniformes.

¹²⁵ *Ibid.*, 226.

¹²⁶ Varignon, *Traité du Mouvement*, 11-12.

des sciences, disciple de Varignon, dans un manuscrit non daté, ou bien encore dans une thèse arbitrée par P. Varignon au Collège Mazarin en 1692.¹²⁷

La suite de l'article revient sur ce qu'il faut entendre par cette « somme des forces ». Varignon ne se préoccupe que du « glissement » et des « lignes » ne conserve que celle du centre de gravité du mobile : le « principe » revient alors à prendre en compte « la masse du corps mû » et « le chemin que son centre de gravité aura parcouru ».¹²⁸ Par ailleurs, il n'aborde dans ce premier mémoire que le mouvement uniforme et la « règle » devient : « le produit de la durée de ce mouvement par la force qui l'a commencé, est toujours proportionnel au produit de la masse du corps mû, par la longueur du chemin qu'il aura parcouru, c'est-à-dire, par le chemin de son centre de gravité ».¹²⁹ En posant différentes grandeurs (voir Fig. 7), ce « Principe » permet d'obtenir quatre « Regles » sans faire intervenir les vitesses, puis d'autres avec celles-ci.¹³⁰

Corps.	Massé.	Espace.	Temps.	Force.	Vitesse.
M.	e.	f.	c.	a.	x.
N.	g.	h.	d.	b.	z.

V. Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} a. b :: e f d. g h c. \\ c. d :: e f b. g h a. \\ e. g :: a c h. b d f. \\ f. h :: a c g. b d e. \end{array} \right.$$

XIX. Donc en général encore

$$\left\{ \begin{array}{l} c. d :: z f. b x. \\ f. h :: x c. z d. \\ a. b :: e x. g z. \\ e. g :: a z. b x. \\ x. z :: a g. b e. \end{array} \right.$$

FIGURE 7 Varignon, *Regles du mouvement en général*, 227 et 230.

S'ensuit différentes hypothèses sur les grandeurs ($a=b$; $c=d$; $a.b :: c.d$ etc.) afin de déterminer les rapports des autres entre elles (ainsi, respectivement, $c.d :: e f. g h$; $a.b :: e f. g h$; $e.g :: a a h. b b f :: c c h. d d f$ etc.) ; de tels calculs font l'objet de tout le mémoire.¹³¹ Il convient ici de rapprocher une expression du type $a = \frac{ef}{c}$ de la relation associant « momentum » (combinaison force-temps) et « impedimentum » (espace-distance) de Wallis, dérivant d'une proportionnalité cause-effet, ou du principe statique de Galilée, de même que les différents calculs de Varignon avec les Prop. XXVII à XXX de Wallis ; les *Regles du mouvement en général* font écho au *De Motu Generalia*.

Origine statique et application du « principe » à la cinématique

De tels rapprochements suggèrent une origine statique à cette « Règle ». D'autre part, son application sous l'hypothèse d'une « force uniforme » (entendre un mouvement uniforme), permet à Varignon de retrouver le principe cartésien. Ainsi, « lorsque les forces a & b, demeurant toujours les mêmes, c'est-à-dire uniformes, font glisser les corps M & N, dont les masses sont e & g, par les espaces f & h, pendant les temps c & d, il est toujours vrai que $ac.db :: ef.gh$ » ; ceci donne, avec $a=b$, $c.d :: ef.gh$, qui « est là le fondement général de toute

¹²⁷ Le manuscrit de Guisnée comprend deux documents reliés séparément *Traité du mouvement local* (p. 1-15) et *Des mouvemens accelérés* (p. 25-44). Ils figurent dans le Dossier Biographique de Guisnée, Archives de l'Académie des Sciences. Le « Principe » de Varignon figure page 15. Pour la thèse, *Theses Mathematicae de Motu. Propugnabuntur à Jacobo Boucher, Parisino [...] Arbitr erit PETRUS VARIGNON* (Paris, 1692), 22-23.

¹²⁸ P. Varignon, *Regles du mouvement en général*, 226.

¹²⁹ *Ibid.*, 227-228. Voir Varignon, *Traité du Mouvement*, 13.

¹³⁰ Varignon, *Regles du mouvement en général*, 227 et 230.

¹³¹ Ces règles et les proportions entre grandeurs établies à partir de celles-ci figurent aussi dans Varignon, *Traité du Mouvement*, 13-23 et dans *Theses Mathematicae de Motu*, 23-39. Pour passer des règles des articles V à XIX (Fig. 7), Varignon pose les vitesses $x = \frac{f}{c}$ et $z = \frac{h}{d}$.

la Statique de Descartes » ; ou encore, pour des temps égaux, $a.b :: ef.gh$, « qui peut encore servir de principe pour démontrer les machines à la manière de Descartes ». ¹³²

Descartes mentionne des poids auxquels Varignon substitue des « masses » : il définit ainsi la proportion entre une force et quantité de mouvement produite. D'autre part, comme chez Mariotte, Deschales ou Wallis, il introduit la durée et ne respecte donc plus la formulation cartésienne, mais tend davantage vers le principe galiléen. La différence entre ces deux énoncés semble d'ailleurs formelle. Ainsi, il écrit qu'en prenant les vitesses $x.z :: fd.hc$, l'égalité des forces $a=b$ donne $g.e :: x.z$, et « l'équilibre se trouve donc encore toujours dans une machine où l'on fait $g.e :: x.z$. Et c'est là ce que Galilée (*Syst. Cosm. Dialog. 2. pag. 298. &c. edit. Lond. 1663.*) a pris pour le premier principe de Statique ». ¹³³ Par cette « Règle fondamentale », Varignon unifie ainsi deux principes en prenant pour la mesure des forces les élévations de masses en des temps égaux ou les vitesses de ces masses.

Ce type d'analyse se retrouve chez Boucher, élève de Varignon. Boucher énonce la « Règle fondamentale » précédente, substitue le terme « moles » au poids et, enfin, recourt à des lois d'équilibre mobilisant indifféremment espace ou vitesse. Evoquant les seuls mouvements uniformes, il énonce que « les forces sont toujours [...] comme les produits des masses et des espaces divisés par les temps ». ¹³⁴ Leur égalité conduit aux proportions suivantes : « Tempora motûs sunt, 1°. ut producta ex molibus per spatia, hoc est, ut quantitates motûs » ; « Moles sunt inter se, 1°. ut producta ex temporibus directè, & ex spatiis reciprocè » ; « Spatia sunt inter se, 1°. ut producta ex temporibus directè per moles reciprocè ». L'auteur en conclut « Atque hinc Cartesianâ (*Mech. & Epist. 73. Tom. 1. & Epist. 24. Tom. 2.*) ratio Machinarum, quam interroganti cuique deducemus ». ¹³⁵ Cette « masse » intervient aussi dans le principe galiléen, Boucher donnant la même référence que Varignon aux *Dialogues* de Galilée. ¹³⁶ Outre Mariotte ou Dechales remplaçant le déplacement requis par le principe de Descartes par des vitesses, le procédé semble assez répandu, de même que le recours aux masses. ¹³⁷ Par ailleurs, le terme masses/moles, non défini dans ces textes, apparaît au moins dès 1644 chez Torricelli. ¹³⁸

¹³² Varignon, *Regles du mouvement*, 226-227. Voir aussi Varignon, *Traité du Mouvement*, 17.

¹³³ Varignon, *Regles du mouvement*, 231. Varignon se réfère ici à la traduction latine des *Dialogues*, *Dialogus de Systemate Mundi. Autore Galilæo Galilæi Lynceo* (Londres, 1663), 298 : « velocitatem mobilis minùs gravis compensare gravitatem mobilis gravioris, & minùs velocis ». Voir aussi Varignon, *Traité du Mouvement*, 21.

¹³⁴ *Theses Mathematicæ de Motu*, 23.

¹³⁵ *Ibid.*, 24-25. Voir aussi p. 25 pour l'égalité des durées avec les proportions qui s'ensuivent entre forces, espaces et masses, avec le commentaire « hinc iterum Machinarum Cartesii more demonstrandarum » ; p. 27-28 lorsque les forces sont en proportion des temps (« hinc rursùs principium, quod Cartesius pro demonstrandis Machinarum affectionibus assumpit »). « Mech. » renvoi probablement à Nicolas Poisson, *Traité de la Mécanique composé par Monsieur Descartes* (Paris, 1668) où figure l'« Explication des engins » jointe à la lettre adressée à C. Huygens du 5 octobre 1637 ; « *Epist. 24. Tom. 2.* » correspond à C. Clerselier, *Lettres* (1659), II, 160-165, où Descartes établit la loi du levier à l'aide de son principe et récuse l'usage des vitesses. Voir lettre de Descartes [à Boswell, 1646 ?], *Œuvres*, IV, 694-701.

¹³⁶ *Theses Mathematicæ de Motu*, 32-33. Boucher introduit la vitesse (« Ratio spatii emensi ad tempus in illo emetiendo absumptum, vel potiùs Roatio quantitatum homogeneaturum spatium istud & tempus hoc experimentium, vulgò dicitur *Velocitas* ») avant l'énoncé du principe statique (« Velocitates esse reciprocè ut moles, cùm vires sunt æquales ») et la remarque finale : « Hinc quoque Galileana (*Sist. Cosm. Dialog. 2. pag. 298. &c. Edit. Lond. 1663.*) ratio Machinarum, quam etiam sciscitanti cuique aperiemus ». Voir aussi p. 35 dans l'hypothèse de forces proportionnées aux durées des mouvements (« hinc rursùs venit primum galilei principium pro demonstrandis Machinarum affectionibus »).

¹³⁷ Voir *Theses Mathematicæ* [...] *Carolo Frederico Du Four*, 19 et *Theses Mathematicæ* [...] *Ferret du Tymeur*, 21. Ces auteurs énoncent le principe cartésien, tout en notant comme première conséquence de la proportion des effets aux causes « spatia paribus temporibus ab eodem corpore peragrata, sunt inter se ut vires hujusce corporis motrices ». Voir aussi B. Le Bovier de Fontenelle, *Sur la Résistance des Solides*, dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année M.DCC.II.* (Paris, 1743), 109-110 pour ce procédé.

¹³⁸ Voir E. Torricelli, *De Motu Graviorum Naturaliter descendentium, et Proietorum, Libri duo*, dans *Opera Geometrica Evangelista Torricelli* (Florence, 1644), 104 : « *Supponimus hic cim ipso Galileo, velocitates in*

Le « Principe », tirant son origine de la science des machines, dépasse donc un cadre traditionnellement dévolu à la statique, Varignon l'appliquant à la cinématique.¹³⁹ Varignon cherche à unifier la science du mouvement avec toutes ses composantes (statique, cinématique) autour d'une « Règle fondamentale ». Si cette dernière stipule l'action d'une force au cours du temps et que ceci s'entend concernant l'exercice continue d'une « force mouvante » déplaçant un fardeau sur une machine, comment concevoir cette permanence pour un mouvement uniforme ? Varignon interprète ce dernier comme une succession d'états, chacun requérant à chaque instant une « force » égale à celle ayant mis le mobile en mouvement, comme si cet état se renouvelait sans cesse ; conception se retrouvant chez Guisnée et Boucher.¹⁴⁰ La « force mouvante » s'applique alors toujours indépendamment du type de mouvement (les « forces qui font le mouvement dans tous les instans de sa durée » stipule la « Règle fondamentale ») : puisque la force des machines produit une quantité de mouvement, la cinématique conserve la même appellation de « force mouvante » pour un simple mouvement.¹⁴¹ Comme l'écrit Guisnée, « dans les mouvemens uniformes la somme des forces capables de faire parcourir à un corps un certain espace, pendant un certain tems peut être exprimée par un rectangle dont un cote exprime le tems pendant lequel le cors parcourt cet espace, et l'autre cote exprime la premiere force [...] qui est appliquée au premier instant du mouvement ».¹⁴² Conception appliquée à la chute libre.

Chute libre et force en général

Le « Principe » s'applique à l'étude de la chute, où l'inspiration galiléenne de Varignon est manifeste. Pour des mouvements de deux poids a et b le long de plans inclinés de longueurs f et h , et de hauteurs k et l ,

il est démontré dans toutes les statiques que les premiers efforts (*momenta*) des poids M & N suivant la direction des plans f & h , sur lesquels on les suppose, sont $\frac{ak}{f}$ & $\frac{lb}{h}$, & que c'est tout ce qui leur reste de leur pesanteur, la résistance de ces plans soutenant le surplus. On peut donc regarder ici ces corps comme sans pesanteur, & comme poussez seulement le long de ces plans par des forces.¹⁴³

A l'aide de ces « premiers efforts » et de son « principe », Varignon donne le 31 mai 1693 des « règles générales » du mouvement accéléré qui reconduisent les acquis des *Discorsi* en leur conférant une teinte dynamique. Il suppose que « les vîtesses [...] croissent comme les puissances p des temps ou des espaces, ou plus généralement, comme les puissances p des abscisses des grandeurs v & y qui représentent tout ce qu'on voudra. Que les premieres forces avec lesquelles les corps commencent à se mouvoir, (on n'entend parler ici que des forces que

diversis planorum inclinationibus, ita esse ut sunt momenta quando eadem fuerit moles ». R. S. Westfall souligne que Torricelli utilise « moles » pour « corps » et ne distingue pas la masse du poids, voir *Force*, 129.

¹³⁹⁾ Voir du 31 mai 1693 Varignon, *Regles des mouvemens accelerez suivant toutes les proportions imaginables d'accélérations ordonnées*, dans *Mémoires de l'Académie*, X, 339 précisant que le texte du 31 décembre 1692 concerne « les mouvemens uniformes » avec un « principe » appliqué au « *De motu æquabili* de Galilée ».

¹⁴⁰⁾ Varignon, *Traité du Mouvement*, 4 : « Axiome VI [...] la force motrice qui a mis le corps en mouvement dans le premier instant, ou quelqu'autre force que ce soit, agissant toujours sur le même corps dans le 2^e. 3^e. instant, &c. de la même maniere que dans le premier, fournit continuellement au corps mû de nouveaux mouvemens, pour remplacer les précédens qui s'évanouissent ». Même propos dans le Théorème I stipulant qu'« il ne peut y avoir du mouvement en aucun tems sans une application actuelle de quelque force motrice au corps mû », *ibid.*, 5-6. Même idée chez Guisnée, *Traité du mouvement local*, 4-5 et Boucher, *Theses Mathematicae de Motu*, 23.

¹⁴¹⁾ Varignon évoque une « force motrice totale » requise pour « le mouvement total » égale à « la somme des forces partielles correspondantes à chaque instant de ce mouvement ». Voir Varignon, *Traité du Mouvement*, 7.

¹⁴²⁾ Guisnée, *Traité du mouvement local*, 9.

¹⁴³⁾ Varignon, *Application de la regle generale des mouvemens accelerez à toutes les hypothèses possibles d'accélérations ordonnées dans la chute des corps*, 30 juin 1693, dans *Mémoires de l'Académie*, X, 355-356.

ces corps employent à parcourir les espaces en question, & nous (sic) de celles qui pourroient les faire pirouëtter ou tourner autour de quelqu'un de leurs points) soient r & F ; & que leurs dernières vitesses, c'est-à-dire celles qu'ils ont à la fin de ces mouvemens, soient x & z ». Varignon règle ensuite « ces premières forces » qui correspondent aux « moments » initiaux de Galilée dans le Scholie de 1656 (ii) et la vitesse acquise par une relation de proportionnalité cause-effet : « puisque dans chaque corps les forces sont à chaque instant comme les vitesses qu'elles causent, & que (*hyp.*) les vitesses suivent ici la raison des puissances p . des abscisses des grandeurs v & y ; si l'on fait $l^p.v^p=r.rv^p$. & $l^p.y^p=F.Fy^p$. l'on aura rv^p & Fy^p , pour les plus grandes forces des corps M & N à la fin de leurs mouvemens ou des espaces parcourus f & h ». ¹⁴⁴

Varignon « somme » alors toutes les forces instantanées puis, à l'aide de son « principe », proportionne ce résultat aux déplacements des masses. Ainsi, $ef.gh :: \frac{rv^{p+1}}{p+1} \cdot \frac{Fy^{p+1}}{p+1} :: rv^{p+1}.Fy^{p+1}$, soit $efFy^{p+1} = ghrv^{p+1}$ pour une « règle des mouvemens accélerez suivant toutes les proportions imaginables d'accélération ordonnées ». ¹⁴⁵ En supposant alors que « l'accélération » suive une puissance p des temps c et d , il suffit de remplacer y^p et v^p par d^p et c^p ; il suit $efFd^{p+1} = ghr c^{p+1}$. A titre d'exemple, avec $p=1$ et $g.e :: F.r$ (les masses sont comme les « premières forces »), il vient $f.h :: c^2.d^2$, soit la loi galiléenne de chute libre. ¹⁴⁶ Le 30 juin 1693, Varignon applique ces formules en substituant F et r de droites d'actions verticales par leurs valeurs sur des plans inclinés, ce qui lui permet de retrouver différentes propositions des *Discorsi* de Galilée. ¹⁴⁷ Cette « règle des mouvemens accélerez », appliquée au seul cas de la chute libre, et l'obtention de théorèmes de Galilée apparaissent de la même manière dans le *Traité du Mouvement* de 1725. ¹⁴⁸

La démarche de Varignon repose sur deux moments. Dans un premier temps, il formule une loi d'évolution des vitesses en rapport avec les « moments ». L'« effort » devient l'action d'une « force » exercée sur une « masse » et entraîne l'acquisition d'une vitesse dans l'instant. ¹⁴⁹ Cette relation est manifeste en 1695, lorsque Varignon établit la loi d'écoulement des fluides de Torricelli : l'axiome de proportionnalité causes-effets permet d'énoncer que « les quantitez de mouvement sont toujours proportionnelles aux forces mouvantes », les « forces » étant ici des « les colonnes d'eau » ; « les quantitez de mouvement causées par leur pression sont comme les produits des quantitez d'eau qu'elles font sortir en tems égaux,

¹⁴⁴) Varignon, *Regles des mouvemens accelerez suivant toutes les proportions imaginables d'accélération ordonnées*, dans *Mémoires de l'Académie*, X, 340.

¹⁴⁵) *Ibid.*, 340-341. Varignon ne détaille pas son calcul de « sommation » qui correspond à la quadrature d'une fonction de type $f(y) = y^p$.

¹⁴⁶) Varignon, *Application de la regle generale des mouvemens accelerez*, 357. Dans ce mémoire, les forces F et r sont les poids des corps et ainsi, les « premières forces » (les poids) suivent bien la proportion des masses.

¹⁴⁷) Pour les mouvements de poids a et b sur les plans inclinés évoqués plus haut, Varignon pose $F = \frac{ak}{f}$ et $r = \frac{lb}{h}$

dans sa « règle des mouvemens accélerez », il obtient $ebf^2y^{p+1} = gakh^2v^{p+1}$, e et g les masses des corps, qui devient $ebf^2d^{p+1} = gakh^2c^{p+1}$ si les vitesses croissent comme une puissance p des temps c et d . Ainsi, avec $e.g :: a.b$ (les masses e et g en proportions des poids a et b) et en supposant $k=l$ (les plans de même hauteur), avec $p=1$, il vient $f.h :: c.d$, soit des temps de parcours en proportions des longueurs des plans, soit le corollaire de la troisième proposition des *Discorsi* relative aux mouvemens uniformément accélérés. Voir *Discorsi*, 219 ; Varignon, *Application de la regle generale des mouvemens accelerez*, 358.

¹⁴⁸) Varignon, *Traité du Mouvement*, 39-48.

¹⁴⁹) Pour justifier l'acquisition « en des tems égaux des degrez de vitesse égaux » lors d'une chute libre, l'auteur fait appel à l'axiome II de proportionnalité causes-effets : « le corps tombant est continuellement poussé par une action toujours égale de la pesanteur. Il faut donc (ax. 2 [...]) que cette pesanteur lui fournisse à chaque instant des degrez de vitesses égaux [...] » ; « les forces motrices seront toujours comme les vitesses ; ce qui est clair encore par l'axiome 2. puisque les vitesses dans un même corps sont les effets des forces », Varignon, *Traité du Mouvement*, 19-20 et 33. Boucher aussi lie le « moment » de la gravité sur le plan et l'acquisition de vitesses dans le temps, *Theses Mathematicae de Motu*, 42-43.

multipliées chacune par sa vitesse, c'est-à-dire en raison composée de celles des masses et de leurs vitesses ». ¹⁵⁰ Le second moment consiste en une sommation des « forces instantanées » et en une application du « principe » général. Comment entendre une telle sommation ? Lors d'un mouvement uniforme, la force dite « uniforme » se reproduit à chaque moment ; lors de la chute libre, malgré la pesanteur constante, les « forces partielles », celles de chaque instant, diffèrent et renaissent selon le même modèle. Chacune correspond au cumul au cours du temps du « premier effort » agissant au premier instant. ¹⁵¹ Ainsi, AC mesurant les temps, BE correspond à une « force partielle » à l'instant B (voir Fig. 8) ; il s'agit de l'action, hypothétique, qui produirait la même vitesse instantanée que celle résultant de la gravité au bout de la durée AB. Varignon entend par « instant [...] la plus petite portion de temps possible » qu'il considère « comme un point indivisible d'une durée quelconque ». ¹⁵² Or, « quelques variées que soient entr'elles les vitesses partielles d'un [...] corps, elles seront uniformes chacune en elle-même si on les considère comme instantanées » et substituables chacune par sa force partielle puisque les effets sont proportionnels aux causes. ¹⁵³ En supposant lors de la chute la loi d'évolution des vitesses $v \propto t$, il vient $F_{partielle} \propto t$; Varignon écrit alors que « la somme de toutes ces forces [partielles] est exprimée par la somme de ces parallèles ou par l'aire triangulaire » ABE. Avec $AF=1$, $AB=t$, la « force motrice initiale $FG=f$ », il vient $1.t :: f.BE$ soit $ft=BE$ pour « la plus grande des forces partielles » et $\frac{AB \times BE}{2} = \frac{ftt}{2}$ pour « la somme de toutes ces forces ». ¹⁵⁴ Par le « principe general » cette quantité égale le produit de la masse (m) du corps par l'espace qu'il parcourt (e), conduisant à $ftt \propto me$ qui correspond à une expression simplifiée de la « règle des mouvements accélérés » de 1693. ¹⁵⁵

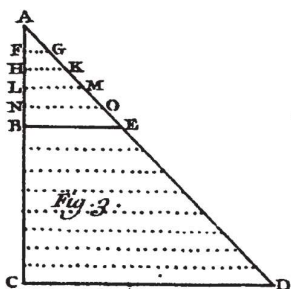


FIGURE 8 Varignon, *Traité du Mouvement*, Fig. 3.

Varignon propose en 1725 pour variante à cette démonstration une sommation de vitesses : à chaque point-instant correspond une ligne-vitesse dont la somme des successions définit

¹⁵⁰ Voir l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Depuis 1686. jusqu'à son Renouveau en 1699*. Tome II, Année 1695, (Paris, 1733), 261-262. Cette loi énonce la proportionnalité entre la vitesse d'écoulement d'un liquide au fond d'un réservoir et la racine carrée de la hauteur séparant ce trou de la surface du liquide. Elle figure dans le *De Motu Aquarum* inséré dans les *Opera geometrica* de Torricelli de 1644.

¹⁵¹ Guisnée illustre bien ceci. Pour un mouvement uniforme la même « force mouvante doit être appliquée [...] à tous les instants de la durée du mouvement », mais « dans les mouvements accélérés la première force, ou la force appliquée au premier instant est moindre que celle qui est appliquée au 2^e. celle qui est appliquée au 2^e moindre que celle qui est appliquée au troisième » etc. Alors, « si sa pesanteur [au mobile] agit [...] de la même manière à tous les instants comme le suppose Galilée ; il est clair que la force appliquée au 2^e instant sera le double de celle du premier, et celle du troisième triple de celle du premier et ainsi de suite ; puisque à la fin du premier instant il se meut par le premier effort de sa pesanteur et au commencement du second il reçoit un second coup par sa pesanteur qui est égal au premier : la force du commencement du 2^e instant est donc double de celle du premier : et [...] ainsi de suite de sorte qu'en ce cas les forces qui font tomber un corps sont à chaque instant comme les temps employés en commençant à compter par le premier ». Guisnée, *Traité du mouvement local*, 9-12.

¹⁵² Varignon, *Traité du Mouvement*, 3.

¹⁵³ *Ibid.*, 33.

¹⁵⁴ *Ibid.*

¹⁵⁵ *Ibid.*, 34. Démonstration similaire chez Guisnée, *Traité du mouvement local*, 26-28.

l'aire d'un triangle identifiée à l'espace franchi, méthode figurant aussi dans un manuscrit de 1692.¹⁵⁶ Si, dans ses *Discorsi*, Galilée représente aussi les vitesses et leurs « moments » associés par des segments, à l'instar des « forces partielles » de Varignon, il n'additionne pas ceux-ci, ni ne rend explicite l'identification de la hauteur de chute à la surface d'un triangle.¹⁵⁷ Le raisonnement de Varignon mérite probablement un rapprochement avec les *Lectiones geometricae* de Barrow. Celui-ci, en effet, établit la loi de Galilée en tenant compte d'un cumul de « forces » ou « degrés de vitesses », grandeurs pouvant comprendre un nombre « infini ou indéfini » de parties, et représentées par des segments ou « longueurs d'espace » à chaque « instant ».¹⁵⁸ Barrow considère chaque vitesse uniforme et les « instants » égaux : le rapport d'un « degré » au précédent correspond à celui entre une « longueur d'espace » à celle immédiatement antérieure.¹⁵⁹ L'« agrégat » des vitesses revient ainsi à celui des lignes dont l'ensemble définit une longueur totale parcourue.¹⁶⁰ Varignon s'inspire de cet ouvrage dans des mémoires mathématiques des années 1690 où, pour des quadratures, il remplace les rectangles infinitésimaux auxquels Barrow recourt par de simples lignes.¹⁶¹ N'en demeure pas moins, dans cette démonstration de Varignon, une originalité quant à la mise en relation entre les forces et l'espace parcouru : il n'identifie pas ici une distance à l'aire d'un triangle, mais introduit l'espace par le biais de sa « Règle fondamentale » comme l'effet d'une somme de « forces partielles ».

L'usage de cette « Règle » apparaît encore après 1698-1700, qu'il s'agisse d'études sur des forces centrales ou sur des écoulements de fluides, soit à une période où Varignon possède les expressions analytiques de la vitesse instantanée et de la force accélératrice et où il a lu les *Principia* de Newton.¹⁶² Ainsi, en 1700, Varignon livre des « Regles générales pour des mouvemens en lignes droites » soumis à des forces centrales. Si dx est un espace parcouru d'une vitesse uniforme v pendant dt , durant ce même temps « l'accroissement de vitesse » dv sous l'action d'une force fait parcourir un espace ddx :

A ce compte, la vitesse ne consistant que dans un rapport d'espace parcouru d'un mouvement uniforme, au tems employé à le parcourir ; l'on aura déjà $v = \frac{dx}{dt}$ pour une première Règle, laquelle donnera $dv = \frac{ddx}{dt}$, en faisant dt constante. De plus, les espaces parcourus par un Corps

¹⁵⁶) Varignon, *Traité du Mouvement*, 27-28. Pour ce manuscrit, voir Varignon, *Démonstration de l'opinion de Galilée touchant les espaces que parcourent les corps qui tombent*, Séance du 19 janvier 1692, Procès-Verbaux de l'Académie, t. 13, f° 76r.-77v.

¹⁵⁷) *Discorsi*, 208-209. Sur ce point, voir les analyses de F. De Gandt, *Force*, 107-109.

¹⁵⁸) Barrow écrit « temporis instanti » ou « indefinitè parvæ temporis particulæ » et souligne qu'il n'importe pas ici de considérer le temps comme constitué d'une collection de « points » ou de « petite ligne indéfinies »/« indefinitè parvis lineos ». Isaac Barrow, *Lectiones geometricae* (Londres, 1670), 8.

¹⁵⁹) *Ibid.*, 8-9.

¹⁶⁰) *Ibid.*, 9. Pour une analyse complète de ce raisonnement, voir de F. De Gandt, *Force*, 109-113.

¹⁶¹) Jeanne Peiffer, « La conception de l'infiniment petit chez Pierre Varignon, lecteur de Leibniz et Newton », dans I. Marchlewitz (éd.), *Leibniz : Tradition und Aktualität*, Internationaler Leibniz-Kongress (Hanovre, 1988), 710-713 et « Pierre Varignon, lecteur de Leibniz et de Newton », dans Ingrid Marchlechwitz et Albert Heinekamp (éd.), *Leibniz' auseinandersetzung mit vorgängern und zeitgenossen*, *Studia Leibnitiana* XXVII (Stuttgart, 1990), 249-253 établit l'influence exercée par Barrow sur Varignon, dans ses premiers Mémoires mathématiques. Varignon détermine la sous-tangente et effectue la quadrature des paraboles et hyperboles de la forme $y^p = d^n \cdot x^{p-n}$ à l'aide de méthodes des *Lectiones geometricae*, à ceci près que Barrow identifie l'aire comprise sous une courbe à la somme de rectangles infinitésimaux circonscrits, Varignon assimilant la figure à « toutes » ses ordonnées. Les *Lectiones* constituent une source d'inspiration des travaux mathématiques du « groupe malebranchiste », voir Nicolas Malebranche, *Œuvres complètes*, XVII-2 *Mathematica* (Paris, 1979), 43-54.

¹⁶²) Sur ces expressions analytiques, voir M. Blay, *La naissance*, 153-221. La première mention d'une lecture des *Principia* semble remonter à 1695. Voir Procès-Verbaux de l'Académie Royale des Sciences, t. XIV, Samedi 19 nov. 1695, f° 194 : « Monsieur Varignon a démontré une manière generale d'avoir toutes les forces centrales pour la description de toutes sortes de courbes telles que Monsieur Hugens a appelé centrifuges, et Monsieur Neuton centripetes. Ce qui sert de fondement à toute la philosophie naturelle de Monsieur Neuton ».

mû d'une force constante & continuellement appliquée, telle qu'on conçoit d'ordinaire la pesanteur, étant en raison composée de cette force & des quarrés des tems employés à les parcourir ; l'on aura aussi $ddx = ydt^2$, ou $y = \frac{ddx}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$.¹⁶³

Tout d'abord, Varignon considère le mouvement uniforme pendant dt de telle sorte que $v = \frac{dx}{dt}$; en réalité, la vitesse varie d'une quantité dv , mais dans un premier temps négligeable par rapport à v en vertu du calcul sur les infiniment petits ($v+dv=dv$).¹⁶⁴ La prise en compte de dv conduit à l'expression de la « force » y , à partir de $ddx = ydt^2$ qui semble provenir directement du Lemme X des *Principia* de Newton ; mais Varignon la rattache aussi à ses écrits de 1693.¹⁶⁵ Ainsi, en 1700, il recourt aux règles analytiques ci-dessus pour déterminer des expressions de forces centrales sous différentes hypothèses (notamment une trajectoire elliptique, le centre de force se confondant avec l'un des foyers) puis donne pour variante à ses calculs l'utilisation d'une formule du type $m\lambda\pi\theta^2 = \mu\lambda p t^2$ démontrée « dans les Mémoires de l'Académie de 1693 », où π et p représentent les pesanteurs de deux masses m et μ franchissant les espaces l et λ pendant θ et t .¹⁶⁶ Cette relation devient, en considérant des « hauteurs [de chutes] indéfiniment petites », en supposant les forces constantes dans ces instants bien que variables sur des durées finies, $md\lambda\pi d\theta^2 = \mu d\lambda p dt^2$; outre qu'elle permet à Varignon de comparer l'action de forces centrales sur deux corps mus sur des courbes, elle définit aussi une relation du type $f \propto \frac{PL}{dt^2}$, f une force centrale (substituée à p) et PL (à la place de dl) une déviation entre tangente et courbe (voir Fig. 9).¹⁶⁷ Un appel semblable aux travaux de 1693 apparaît en 1706 et 1707, dans des mémoires où il s'agit à nouveau de comparer des forces entre elles.¹⁶⁸ Autrement dit, la « Règle fondamentale » de 1693 permet de retrouver l'expression de la force tirée directement de la transcription analytique des *Principia*. Concernant l'écoulement de fluides, Varignon reproduit en 1703 le contenu d'un mémoire de 1695 où il recourt à la « Règle générale » des mouvements uniformes du 31 décembre 1692. Il considère alors un tuyau vertical AF rempli d'eau jusqu'en AB puis en CD , laquelle s'écoule une petite G (Fig. 10) ; il suppose qu'il n'existe ni d'accélération du liquide en son sein, ni de diminution du niveau supérieur du liquide. Les « efforts des colonnes d'eau AF , CF [...]

¹⁶³ Varignon, *Manière generale de determiner les Forces, les Vitesses, les Espaces, & les Tems, une seule de ces quatre choses étant données dans toutes les sortes de mouvemens rectilignes variés à discrétion*, dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année M. DCC* (Paris, 1761), 23. Règles analysées dans M. Blay, *La naissance*, 180-188.

¹⁶⁴ Sur la construction de la « vitesse dans chaque instant », M. Blay, *La naissance*, 156-158 et 184-185.

¹⁶⁵ Isaac Newton, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle, par feue Madame la Marquise du Chastellet*, 2 vols (Paris, 1759), I, 42-43 : « Les espaces qu'une force finie fait parcourir au corps qu'elle presse, soit que cette force soit déterminée & immuable, soit qu'elle augmente ou diminue continuellement, sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des tems ». Sur cette question, voir M. Blay, *La naissance*, 185-186.

¹⁶⁶ Varignon, *Des forces centrales ou des pesanteurs nécessaires aux Planetes pour leur faire décrire les orbés qu'on leur a supposés jusqu'ici*, dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année M. DCC*, 241.

¹⁶⁷ *Ibid.*, 241-242. Dans $md\lambda\pi d\theta^2 = \mu d\lambda p dt^2$, dl et $d\lambda$ devraient être des infiniment petits du deuxième ordre.

¹⁶⁸ Varignon, *Comparaison des Forces centrales avec les Pesanteurs absolües des corps mûs de vitesses variées à discrétion le long de Courbes qu'on voudra*, dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année M. DCC.VI* (Paris, 1731), 182-183 ; Varignon, *Des Mouvemens Variés à volonté, comparés entr'eux & avec des uniformes*, dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année M. DCC.VII* (Paris, 1730), 266-267. Dans cette dernière étude, avec f une force accélératrice, les Mémoires de 1700 permettent d'énoncer $f \propto \frac{dv}{dt}$. Pour la comparaison des effets de deux forces de cette nature, f , ϕ agissant sur deux masses différentes m , μ et faisant parcourir les espaces e , ε pendant dt et $d\theta$, Varignon recourt à la « règle générale » de 1693. Ainsi, $e.\varepsilon :: \mu f dt^2.m\phi d\theta^2$. Puisque les forces produisent respectivement les vitesses du et dv pendant dt et il suit $dudt.dvd\theta :: \mu ddt^2.m\phi d\theta^2$, ce qui conduit à $f.\phi :: \frac{mdu}{dt}.\frac{\mu dv}{d\theta}$.

seront ici comme [leurs] pesanteurs absolues ; & par conséquent aussi comme leurs hauteurs AE, CE ». ¹⁶⁹ Avec f et φ pour ces « efforts », $f. \varphi :: AE. CE$. Par ailleurs, « ce qu'il sort d'eau en tems égaux par le trou G, étant comme sa vitesse en sortant, si l'on prend encore m, μ pour ces quantités ou masses d'eau ; & u, v , pour leurs vitesses en sortant ; l'on aura aussi $m. \mu :: u. v$ ». Or, d'après la « Regle générale » appliqué aux mouvements uniformes donnée en 1692, $f. \varphi :: mu. \mu v$ soit $f. \varphi :: uu. vv$, ou encore $AE. CE :: uu. vv$, soit la loi de Torricelli. ¹⁷⁰

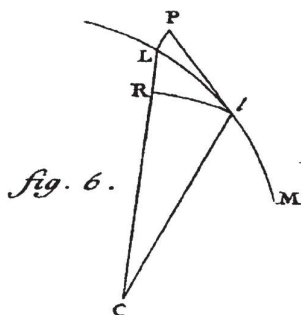


fig. 6.

FIGURE 9 Varignon, *Des forces centrales*, 236, Fig. 6.

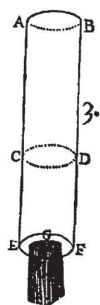


FIGURE 10 Varignon, *Du mouvement des eaux*, 247, Fig. 3.

Ainsi, l'axiome de proportionnalité causes-effets fonde une « Regle fondamentale » du type $f \times t \propto m \times l$ (1) conduisant à une relation $f \propto m \times v$ pour les mouvements uniformes ; cette dernière, fournit une quantité $m \times v$ produite au cours d'une durée par une action f identifiée au « premier effort (*momento*) » et intervient alors dans la détermination d'une expression du type $ftt \propto me$. Tout comme Wallis, Varignon nomme « *moment* » le produit d'une force par une durée. ¹⁷¹ Il demeure ainsi la même ambiguïté : ce produit, et donc l'effort au cours du temps, génère une quantité de mouvement, comme pour les fluides ou lors de la chute libre, ou bien un déplacement ? Si, dans (1), t reste associé à une action continue (soulever un fardeau), il peut aussi correspondre à la durée d'un mouvement uniforme, la force instantanée s'exerçant au tout début de cette durée. De la même manière, dans la loi de chute, Varignon ne lie pas gravité et vitesse acquise au cours du temps, mais gravité et vitesse acquise en l'instant. Pour Guisnée, à l'instant initial, la « première force » du mobile

¹⁶⁹ Varignon, *Du mouvement des eaux, ou d'autres liqueurs quelconques de pesanteurs spécifiques à discrétion ; de leurs vitesses, de leurs dépenses par telles ouvertures ou sections qu'on voudra ; de leurs hauteurs au-dessus de ces ouvertures, des durées de leurs écoulemens, &c.*, dans *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année M. DCC.III* (Paris, 1720), 247. La section du tuyau étant constante, son volume, proportionnel à la masse du liquide et elle-même à la pesanteur, est proportionnel à la longueur du tube.

¹⁷⁰ *Ibid.* Pour la démonstration identique de 1695, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Depuis 1686. jusqu'à son Renouveaulement en 1699*, II, 261. Sur l'hydrodynamique de Varignon, M. Blay, *Naissance*, 331-368.

¹⁷¹ Varignon, *Traité du Mouvement*, 7.

s'identifie à la gravité et à un premier « coup » (voir note 151). Puisqu'une « force » à un instant quelconque est un cumul d'impulsions, elle peut s'obtenir par un seul choc dont l'intensité égale le cumul en question. Bien que supposant une pesanteur uniforme, la « force » varie, et Varignon ou Guisnée attribuent indifféremment ce nom à ce qui produit un premier « degré » de vitesse au premier instant ou à ce qui s'identifie à un cumul pour un instant quelconque. L'axiome de proportionnalité de l'effet à sa cause définit cette relation entre force et vitesse et plus qu'une grandeur intervenant dans la quantification de celle-là, le temps semble régler ici la fréquence d'actions instantanées, voire des collisions.¹⁷²

Des mémoires de 1700, 1703, 1706 et 1707 montrent que Varignon ne renie pas ces premières recherches de 1692-1693. Il semble exister une unité conceptuelle entre ces différents textes concernant la force. En effet, la pratique des infiniment petits autorise à la fois le recours à des vitesses constantes à chaque instant, de même qu'un mode d'action discontinu de la force puisque Varignon énonce une règle du type $y = \frac{ddx}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ en supposant $dt = \text{constante}$: deux aspects au cœur des travaux de 1692-1693, et même de 1725 (cf. notes 152, 153). Bien que d'origine statique, Varignon semble trouver une continuité entre la force des années 1690 et celle de travaux plus tardifs influencés par la dynamique newtonienne.

5. Conclusion

L'héritage des principes statiques de Galilée et Descartes se voit ici abordé de deux manières : en relevant des renvois explicites aux œuvres où figurent ces principes – chez Varignon et ses élèves – suggérant une influence directe ; en rapprochant des problèmes de ceux traités par les maîtres – ceux des Fig. 4 et 5 chez Mariotte et Deschales –, en notant l'usage de leurs principes, en relevant les similitudes concernant leurs fondements (proportionnalité cause-effet chez Dechales et Wallis, Varignon), en notant des références à leurs œuvres liées ou non à ces principes. Ceux-ci se diffusent et leur usage dépasse le cadre de la statique : ils fondent une axiomatique et une mesure de la force qui intervient aussi dans les phénomènes dynamiques – choc, chute. Les études de dynamique – celle de R. S. Westfall – ne nous semblent qu'insuffisamment analyser le détail de tels phénomènes – comment penser la pression lors du choc et la variation de vitesse lors de la chute ? Quels liens entretiennent-elles ? – dans leurs relations avec le principe des vitesses virtuelles, où plus précisément comment ce dernier donne naissance à une force associée à une variation de mouvement opérant dans différents champs de la mécanique. L'écueil serait de prêter aux travaux de Mariotte, Dechales ou Wallis ce qu'ils ne contiennent pas : la loi du levier constitue un modèle pour penser le choc compris comme une confrontation de forces-mouvements, mais non une égalité entre action-réaction conçues comme des impulsions. Un tel modèle ne saurait cependant définir à lui seul la force intervenant dans la collision, pas plus qu'épuiser l'apport de la statique dans la dynamique et le rôle joué par le principe des vitesses virtuelles.¹⁷³ La question ne se résume pas à une transposition de grandeurs virtuelles – les vitesses sur les machines équilibrées – à des grandeurs finies quantifiant la force – des quantités de mouvement ; si ce processus existe bel et bien, ce principe introduit aussi une « tendance », un

¹⁷²⁾ En 1690, Varignon interprète la pesanteur comme « une poussée » qu'une matière (« les parties environnantes de notre air, soit les plus grosses, soit les plus subtiles, soit ces deux espèces ensembles ») exerce sur un corps, voir *Nouvelles conjectures sur la pesanteur* (Paris, 1690), 14. La « matière subtile » (« l'air délié ») sert de base à l'explication, le corps recevant des « impressions », des « chocs » des « parties »/« particules » de ce fluide (*ibid.*, 13). Varignon ne précise pas la nature des corpuscules et laisse une ambiguïté sur le caractère continu ou non de la pesanteur.

¹⁷³⁾ Et ce contrairement à l'affirmation de Pierre Duhem, *Les origines de la statique*, 2 vols (Paris, 1905-1906), II, 224 et 243 qui déplorant la présumée absence de ce principe dans des traités de statique de savants français écrit que vers 1680 « la Science de l'équilibre » se trouvait dans un « état de décadence ».

« commencement » susceptibles de penser l'effort lors du choc et de la chute chez Mariotte et Dechales ; de la même manière, Varignon évoque une force à chaque instant, pour tous types de mouvements, tout en fondant une dynamique d'inspiration newtonienne. Ce principe permet aussi, du fait d'une égalité de « percussions », de traiter la collision comme un équilibre. Cette conception se retrouve au 18^e s. Jean Bernoulli fonde l'équilibre du choc sur son principe des vitesses virtuelles en écrivant « l'appliquer » aux collisions : aux forces se voient substituées des masses et aux déplacements élémentaires qu'implique le principe afin d'étudier les conditions d'équilibre, les vitesses résultants de l'action-réaction lors de la collision.¹⁷⁴ D'Alembert recourt à cette loi de l'équilibre dont « tous les Geomètres conviennent »¹⁷⁵, fondée sur l'égalité des quantités de mouvement des mobiles avec des « vitesses *de tendance* », dites « virtuelles ».¹⁷⁶ La double substitution opérée par Bernoulli résume les pratiques développées par les savants étudiés ci-dessus et pourrait faire figure de précis d'une histoire de la genèse de la force, tout comme la loi de D'Alembert ne diffère en rien de celle qu'ils énoncent.¹⁷⁷ Ces remarques permettent de tisser un lien entre des travaux du 18^e s. et des pratiques développées au 17^e s. basées sur la statique, tout notant qu'un tel lien n'entrave en rien chez Bernoulli et D'Alembert la conceptualisation d'une force productrice d'une accélération.

¹⁷⁴) Jean Bernoulli, *Discours sur les loix de la communication du mouvement, qui a mérité les Eloges de l'Académie Royale des Sciences aux années 1724. & 1726*, dans *Recueil des pieces qui ont remporté les prix de l'Académie Royale des Sciences. Tome I. Qui contient les Pieces depuis 1720 jusqu'en 1727* (Paris, 1732), 19-20.

¹⁷⁵) D'Alembert, *Traité*, xiv. Voir aussi p. xix et 42.

¹⁷⁶) Pour cette terminologie, voir D'Alembert, « Equilibre », *Encyclopédie*, t. V, 873a et « Force », *Encyclopédie*, t. VII, 112b-113a.

¹⁷⁷) Sur ces questions de l'équilibre dans les chocs en lien avec le principe des vitesses virtuelles chez Bernoulli et D'Alembert, voir C. Schmit, « Sur l'origine du Principe Général de Jeans Le Rond D'Alembert », *Annals of Science*, vol. 70, Issue 4, 2013, 493-530.