



HAL
open science

Modélisation de la dynamique de la locomotion.

Frédéric Boyer, Johan Mauny, Mathieu Porez

► **To cite this version:**

Frédéric Boyer, Johan Mauny, Mathieu Porez. Modélisation de la dynamique de la locomotion.. Les Techniques de l'Ingenieur, 2019, 10.51257/a-v1-s7757 . hal-02552647

HAL Id: hal-02552647

<https://hal.science/hal-02552647v1>

Submitted on 23 Apr 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation de la dynamique de la locomotion. Modelling the dynamics of the locomotion.

Par Frédéric BOYER,
Professeur,
IMT Atlantique, Nantes, France.

Par Johan MAUNY,
Postdoctorant,
IMT Atlantique, Nantes, France.

Par Mathieu Porez,
Expert en robotique chez PA.COTTE,
PA.COTTE, Nantes, France.

Résumé

Cet article présente un ensemble d'outils génériques en dynamique des systèmes multicorps consacrés à l'étude de la locomotion bio-inspirée. Partant d'exemples empruntés à la nature et la robotique, nous poserons un problème général de locomotion dont la résolution nous permettra d'installer progressivement un cadre géométrique unifié dédié à ce problème. Pour cela, nous partirons du modèle des systèmes multicorps mobiles discrets, que nous étendrons progressivement au cas des systèmes continus puis mous. Nous aborderons également le problème pratique de l'implémentation efficace de ces modèles en proposant une approche basée sur la méthode de Newton-Euler, illustrée par quelques exemples liés à la reptation, la natation et le vol.

Mots-clés : Robots bio-inspirés, Systèmes multicorps, Dynamique lagrangienne de la locomotion, Mécanique géométrique

Abstract

This article presents a set of generic tools of Multibody Systems dynamics devoted to the study of bioinspired locomotion in robotics. Starting from examples borrowed from nature and robotics, we will pose a general problem of locomotion whose resolution will allow us to progressively install a unified geometric framework dedicated to this problem. For that purpose, we start from the model of discrete mobile multibody systems, that we will progressively extend to the case of continuous and finally soft systems. Beyond these theoretical aspects, we address the practical problem of the efficient computation of these models by proposing an efficient locomotion dynamics Newton-Euler based approach with a few illustration on creeping, swimming and flying.

Keywords: Biologically-Inspired Robots, Multibody Systems, Lagrangian Locomotion Dynamics, Geometric Mechanics

Table des matières

1	Définitions	3
1.1	Définition d'un système mobile multicorps	3
1.2	Espace des configurations d'un système mobile multicorps	4
2	Problème général abordé dans cet article	7

3	Dynamique de la locomotion directe : le cas cinématique	8
3.1	Cas 1 : Connexion mécanique	12
3.2	Cas 2 : Connexion cinématique	12
4	Dynamique de la locomotion directe : le cas général	14
4.1	Cas 1 : Lorsque les efforts extérieurs dérivent d'un Lagrangien (invariant gauche)	16
4.2	Cas 2 : Lorsque les forces externes sont des multiplicateurs de Lagrange d'un ensemble de contraintes cinématiques	18
5	La dynamique inverse en couple	22
6	Implémentation pratique	23
7	Des systèmes discrets aux systèmes continus	25
8	Vers les systèmes compliant	26
9	Conclusion	29

Introduction

Malgré les progrès de la robotique, les capacités locomotrices des animaux, dont nous faisons partie, laissent rêveur [1]. Pour ne citer que quelques exemples, il est remarquable qu'en dépit d'une géométrie extrêmement simple, les serpents soient non seulement capables de se déplacer dans tout type d'environnement solide grâce à plusieurs modes de reptation, mais qu'ils puissent aussi nager et même planer dans les airs. Les poissons jouissent d'une manœuvrabilité et d'une efficacité inégalée dans l'eau. Ils peuvent faire demi-tour sans même décélérer et nager dans des écoulements turbulents sans effort. Certains insectes sont capables de manœuvres aériennes rapides et précises et ont développé des stratégies subtiles pour récupérer l'énergie de leur environnement. Ces exemples expliquent à eux seuls, pourquoi les roboticiens cherchent à concevoir des robots locomoteurs inspirés des animaux tel l'ACM-III [2], un robot pionnier capable de reproduire l'ondulation latérale des serpents. Long de 2 m, l'ACM-III est un système multicorps composé de 21 segments interconnectés par 20 articulations motorisées, ses roues passives reproduisent l'anisotropie des forces de friction qui chez l'animal, est réalisée par ses écailles ventrales [3, 4]. Depuis lors, plusieurs robots serpents dédiés à la locomotion plane ou tridimensionnelle dans des milieux accidentés ont été développés [5, 6, 7]. En robotique sous-marine, lorsque l'on cherche à concilier manœuvrabilité et efficacité énergétique, les poissons s'imposent comme une source naturelle d'inspiration. En quête de nouvelles solutions pour réduire la traînée des véhicules sous-marins, le MIT a ouvert la voie d'une robotique sous-marine bio-inspirée en réalisant le RoboTuna [8] puis le RoboPike, dont les motivations respectives étaient d'égaliser les vitesses de pointe du thon rouge et les accélérations du brochet. Inspirés par les poissons anguilliformes tels que l'anguille et la lamproie, d'autres robots, dont l'Amphibot [9], l'ACM-R5 [10] ou le robot anguille du projet français RAAMO [11], ont utilisé l'ondulation du corps dans son ensemble pour se propulser dans l'eau [12]. La recherche sur les robots aériens bio-inspirés a elle aussi connu une forte expansion ces dernières années. Parmi ces robots, communément appelés MAV pour "Micro Aerial Vehicles", notons ceux du groupe de R. J. Wood [13], à l'origine d'un premier prototype qui pesait 60 mg et utilisait des actionneurs piézoélectriques pour mouvoir des ailes inspirées de l'insecte. Commandé par radio, l'ornithoptère DelFly de l'Université technique de Delft [14], possède des gouvernes de direction et de profondeur semblables à celles des avions. Le groupe d'Hao Liu de l'Université de Chiba [15] a quant à lui, mis au point un MAV à ailes battantes inspirées des papillons sphinx. Avec ses quatre ailes réalisées par impression

3D, le robot insecte du Cornell Creative Machines Lab [16], pèse 3.89 g et a pu effectuer un vol stationnaire de 85 s passivement stable, sans aucune attache. Inspirés par les hydrostats, qui produisent la rigidité nécessaire à l'efficacité des contacts en contractant des tissus iso-volume, certains chercheurs conçoivent aujourd'hui des robots aux corps mous inspirés des poulpes [17], des trompes d'éléphant [18] ou autres chenilles [19]. Bien que l'actionnement de ces systèmes mettent à mal nos technologies actuelles, l'exploitation des déformations passives pourrait améliorer la locomotion d'une nouvelle génération de robots plus légers et plus versatiles. À mesure de ses progrès, la robotique bio-inspirée produit des robots locomoteurs aux modèles mathématiques de plus en plus complexes. À cet égard, la modélisation dynamique présente un intérêt particulier pour les roboticiens. Aussi, l'un des objectifs de l'article ici présenté est d'unifier le maximum de cas de locomotion existants en une image générale structurée, et de l'étendre aux préoccupations plus récentes dédiées aux systèmes continus hyperredondants et aux robots possédant des compliances. Remarquablement, les outils de mécanique géométrique introduits par Poincaré [20], Arnold [21] et Marsden [22] nous révéleront les structures géométriques communes que partagent des modes de locomotion apparemment très différents, et de les classer selon les propriétés de leur modèle dynamique. Afin de présenter ces outils, nous avons tenté de privilégier l'intuition géométrique sans pour autant renoncer à la technicité requise par leur application pratique. En particulier, l'article aborde également la question de la simulation de ces systèmes via la formulation de Newton-Euler des systèmes multicorps, telle que développée pour la locomotion bio-inspirée par les auteurs [23, 24, 25, 26, 27, 28]. Au-delà de ces avantages numériques, cette formulation sera ici utilisée pour étendre nos investigations des systèmes discrets aux systèmes continus et finalement aux systèmes mous.

1 Définitions

Par essence, la locomotion est basée sur le principe suivant. Tout animal se déplaçant dans l'espace modifie sa forme afin d'exercer des forces sur son environnement. Puis, en vertu du principe d'action-réaction de Newton, l'environnement exerce en retour des forces externes sur le corps de l'animal, dont la résultante et le moment lui permettent de se propulser et de manœuvrer son corps dans l'espace. Dans ce qui suit, nous adoptons le modèle des systèmes multicorps pour en déduire un cadre général unifié consacré à la modélisation de la locomotion - et en particulier de la locomotion bio-inspirée - en robotique.

1.1 Définition d'un système mobile multicorps

Un système multicorps est un système matériel composé d'un ensemble de corps solides liés les uns aux autres par des liaisons internes, et au reste du monde par des liaisons ou des contacts externes (modélisés par des densités de surface et/ou de volume de forces et couples externes). Sur la base de ce modèle, nous examinerons en premier lieu le cas des systèmes multicorps constitués d'un ensemble fini de corps rigides, puis, dans les sections 7 et 8, nous verrons comment il est possible d'étendre ce modèle au cas rigide mais continu et enfin aux systèmes locomoteurs comprenant des organes déformables. Le modèle conventionnel des systèmes multicorps rigides est largement développé dans le contexte de la manipulation, mais beaucoup moins dans celui de la locomotion. Contrairement aux systèmes multicorps classiques, tout corps inclus dans un système locomoteur se déplace généralement non seulement par rapport aux autres corps, mais effectue également des mouvements rigides d'ensemble, c'est-à-dire des "déplacements nets" dans l'espace ambiant. De plus, pour un locomoteur, ces mouvements d'ensemble ne sont généralement pas imposés par des lois temporelles explicites, comme ce pourrait être le cas pour un manipulateur monté sur une plate-forme roulante, mais sont produits à tout

moment par les forces de contact appliquées sur le système dans sa globalité. Le modèle gouvernant ces mouvements nets est ici défini comme "la dynamique de locomotion du système". Par extension de la terminologie actuelle, dans cet article, nous qualifierons un tel système de SMM ou "Système Multicorps Mobile", afin de le distinguer d'un Système Multicorps classique, ou SM, tel qu'un manipulateur industriel. Malgré cette distinction sémantique, un SM est un cas particulier de SMM dont les mouvements rigides d'ensemble sont régis par des lois temporelles, et le cadre méthodologique que nous allons développer pour les SMM sera également applicable aux SM. Ainsi, en se référant aux usages standards de la robotique, les SMM tels qu'envisagés ici, comprendront de nombreux systèmes robotiques allant des systèmes entièrement contraints (comme une plate-forme sur roues) aux systèmes entièrement libres (comme les navettes spatiales et les satellites) en passant par les manipulateurs industriels classiques et les systèmes non-holonomes sous-contraints (comme le snakeboard et le trikke).

1.2 Espace des configurations d'un système mobile multicorps

En accord avec la mécanique classique, nous entendons par Lagrangienne une théorie qui cherche à dériver entièrement la dynamique d'un système mécanique à partir de la connaissance d'une unique fonction de son état, fonction nommée le Lagrangien du système. Mathématiquement, une telle théorie jouit d'une base géométrique solide qui trouve sa source dans la géométrie des variétés Riemanniennes. En mécanique, la définition clé de ce modèle est le concept de variété des configurations ou, plus simplement, d'espace des configurations. L'espace de configuration \mathcal{C} d'un système matériel est l'espace géométrique dont les points ont pour coordonnées les paramètres cinématiques (également appelés coordonnées généralisées) du système matériel. Lorsque le système est holonome, \mathcal{C} peut être considéré comme un espace abstrait dont la dimension est égale au nombre de degrés de liberté (ddl) du système.

Nota: Par "abstrait", nous entendons que cet espace n'est pas l'espace physique (ambient) dans lequel les points matériels du système se déplacent. Un système est dit holonome quand les contraintes introduites par les liaisons internes et/ou externes s'expriment en fonction de ses paramètres cinématiques uniquement (et non de ses vitesses).

Les coordonnées généralisées du système matériel définissent pour \mathcal{C} un système de coordonnées locales, ou "cartes", qui donne à \mathcal{C} une structure de variété.

Nota: Une n-variété est un espace topologique (un ensemble de points) identifiable localement à \mathbb{R}^n grâce à un ensemble de cartes, un atlas, le recouvrant (prenons à titre d'exemple la terre, qui est un 2-variété nommée S^2 , avec son atlas de cartes locales, les cartes géographiques, chacune étant un morceau de \mathbb{R}^2) [29].

Tout point de cet espace abstrait correspond à une (et une seule) configuration de l'ensemble du système dans l'espace ambient \mathbb{R}^3 .

Nota: En mécanique, une configuration est définie par l'ensemble des positions de tous les points matériels du système dans un repère fixé à l'espace tridimensionnel ambient (en résumé, c'est un instantané du système dans le laboratoire).

Pour un SM classique, tel qu'un manipulateur avec p liaisons pivots paramétrées par le vecteur des angles articulaires $r = (r_1, r_2, \dots, r_p)^T$, chaque r_i est la coordonnée sur le cercle S^1 , et l'espace des configurations est un hyper-tore de dimension p défini par $\mathcal{C} = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 = (S^1)^p$.

Nota: Les liaisons pivots sont utilisées à titre d'illustration, mais des liaisons prismatiques peuvent bien sûr également être prises en compte.

Ainsi, tout point de \mathcal{C} correspond à une configuration, ou « forme », du SM dans l'espace ambiant tridimensionnel. Dans le cas des SMM, le paramétrage du système nécessite de décrire non seulement l'évolution de sa forme dans un espace que nous appelons dans ce contexte "espace de forme" et désignons par \mathcal{S} , mais aussi celle de ses position et orientation absolues dans l'espace ambiant. Ainsi, un SMM est-il doté de ddl internes qui définissent sa forme, et de ddl externes qui correspondent à sa position et à son orientation rigides d'ensemble par rapport à un repère externe (inertiel) fixé à l'espace ambiant. Dans la théorie Lagrangienne de la mécanique géométrique, les ddl externes sont paramétrés par une transformation g permettant de passer du repère fixe attaché à l'espace ambiant à celui, mobile, lié au SMM. Ce repère mobile définit la référence du mouvement rigide d'ensemble du système dans l'espace ambiant, et est de fait appelé repère de référence. Il est généralement attaché à un corps du SMM arbitrairement distingué, appelé corps de référence du SMM. Pour les systèmes bio-inspirés, il est souvent pratique d'attacher le repère de référence au corps où se trouvent les capteurs extéroceptifs figurant la tête de l'animal modèle. Alternativement, il est parfois utile de définir un tel repère comme une base de trois vecteurs indépendants attachés à l'un des corps (typiquement le corps de référence), mais dont l'origine est un point géométrique (non matériel) tel que le centre de gravité de l'ensemble du SMM. Dans ce dernier cas, le repère de référence flotte dans l'espace, et nous le qualifions de repère flottant [30]. Géométriquement, les transformations g , appelées transformations rigides, sont les éléments d'un groupe de Lie G , c'est-à-dire un groupe de transformations doté d'une structure de variété [31].

Nota: Les transformations g de G , qui peuvent être composées avec la loi de composition interne de G , sont aussi des points qui peuvent être localisés dans un carte de G . Par exemple, les angles d'Euler peuvent être utilisés pour définir un atlas de cartes du groupe de Lie $SO(3)$ des rotations tridimensionnelles.

Il existe plusieurs possibilités pour définir un tel groupe en fonction du cas d'étude. Par exemple, lorsque le référentiel subit des translations unidimensionnelles, $G = \mathbb{R}$. Pour les translations dans le plan, $G = \mathbb{R}^2$. Dans le cas de translations et de rotations dans le plan, G est dit groupe des déplacements euclidiens de \mathbb{R}^2 et est dénoté $G = SE(2)$. Pour les translations dans l'espace tridimensionnel, $G = \mathbb{R}^3$; et pour les rotations dans l'espace tridimensionnel, G est le groupe spécial orthogonal $G = SO(3)$. Tous ces groupes, ainsi que d'autres, sont inclus dans le groupe le plus général $G = SE(3)$, qui définit l'espace des configurations d'un corps rigide se déplaçant librement dans l'espace tridimensionnel. Les éléments, ou transformations g de ce groupe, peuvent être représentés par les matrices homogènes (4×4) :

$$g = \begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1$$

où R et p représentent respectivement les composantes de rotation et de translation de la transformation. Dans son groupe de configurations, le mouvement d'un corps rigide est défini par une courbe paramétrée par le temps $t \mapsto g(t)$ dont les vecteurs tangents \dot{g} définissent la vitesse de transformation. La composition hg de deux transformations h et g agissant sur \mathbb{R}^3 correspond, dans le groupe, à la translation de g par h sur la gauche, ou de h par g sur la droite. De telles translations définissent des applications non linéaires de point en point dans G , aussi nous pouvons calculer leurs applications tangentes linéaires (leurs Jacobiennes) et les utiliser pour translater les vecteurs tangents au groupe (les vitesses de transformation). Par exemple, en utilisant l'application tangente de la transformation gauche susmentionnée, il est possible de déplacer \dot{g} de son point d'application initial g vers n'importe quel point hg de G pour obtenir $h\dot{g}$. En particulier, la translation gauche de \dot{g} par $h = g^{-1}$ déplace les points d'application de \dot{g} de g vers l'élément neutre de G (c'est-à-dire l'identité), et définit ainsi le torseur cinématique du corps rigide exprimé dans son repère mobile, ou "twist matériel" η , qui, pour $G = SE(3)$ s'écrit :

Nota: Le twist matériel est parfois appelé twist rapporté au corps ou plus simplement vitesse par rapport au corps.

$$g^{-1}\dot{g} = \begin{pmatrix} \Omega & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \eta, \quad 2$$

où Ω et V représentent respectivement les vitesses angulaires et linéaires du corps, exprimées dans son repère mobile .

Nota: Ici, comme dans la suite, nous ne distinguons pas la matrice antisymétrique des vitesses angulaires de son vecteur 3×1 , pas plus que nous ne distinguons, dans le cas de $SE(3)$, la matrice 4×4 η du vecteur 6×1 $(V^T, \Omega^T)^T$.

L'ensemble des twists génère l'espace tangent à G en $g = 1$, noté T_1G . Une fois doté d'un commutateur tel que, pour tout $\eta_1, \eta_2 \in T_1G$, $[\eta_1, \eta_2] = \eta_1\eta_2 - \eta_2\eta_1$, cet espace définit aussi l'algèbre de Lie \mathfrak{g} du groupe G , dénoté $se(3)$ dans le cas de $SE(3)$. Maintenant que nous avons défini la structure géométrique permettant de définir la forme d'un SMM (un point r dans la variété \mathcal{S}) et sa position et son orientation d'ensemble (un point g dans le groupe de Lie des déplacements du corps de référence G), nous pouvons introduire la définition de l'espace des configurations d'un SMM subissant à la fois une modification de sa forme et un mouvement d'ensemble rigide. Ainsi, dans le cas du SMM présenté en figure 1, chaque configuration du système correspond à une paire (g, r) , c'est-à-dire à un point dans l'espace des configurations :

$$\mathcal{C} = G \times \mathcal{S}. \quad 3$$

Un tel espace (représenté dans la figure 1) est connu, en géométrie différentielle, sous le nom de fibré. Dans cette théorie, un fibré est une variété définie (au moins localement) par le produit direct d'une variété appelée variété de base et d'un espace nommé fibre doté d'une structure algébrique [29]. Par exemple, si la fibre est un espace vectoriel, alors le fibré sera un fibré vectoriel (et de manière plus générale, un fibré tensoriel). Si, comme c'est le cas ici, la fibre est un groupe de Lie, alors le fibré est appelé fibré principal. Un riche corpus de résultats existe en physique géométrique sur ces espaces, où la structure de fibré principal joue un rôle crucial en théorie de jauge et en relativité générale [32]. Aussi, l'une des forces de l'approche Lagrangienne en mécanique géométrique, dont certains résultats clefs seront examinés ici, est d'avoir exploité cette richesse au bénéfice de la locomotion en robotique. Dans le modèle géométrique de la physique, un objet géométrique est intimement lié au concept de fibré, et joue un rôle même plus important que ce dernier, celui de connexion. Cependant, avant d'introduire ce concept et son utilité dans la locomotion, nous allons tout d'abord établir le problème général que nous traiterons dans cet article.

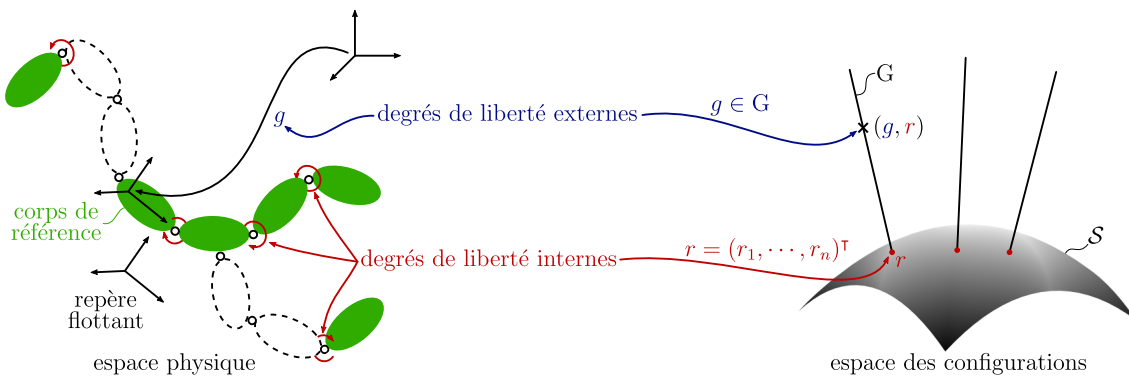


FIGURE 1 – Espace des configurations d'un système locomoteur : fibré principal.

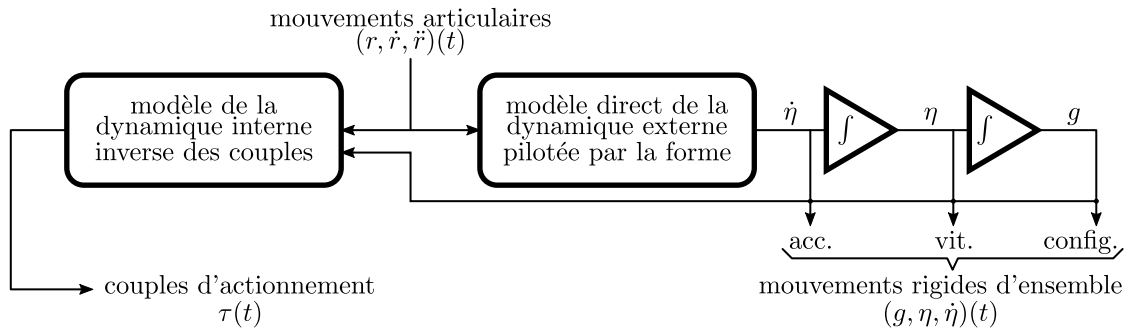


FIGURE 2 – Le problème général : synoptique de simulation.

2 Problème général abordé dans cet article

Le problème de la locomotion peut être envisagé sous différents angles. Dans cet article, nous l'aborderons comme suit. Connaissant l'évolution temporelle des liaisons internes $t \mapsto r(t)$, nous chercherons à établir un modèle capable de retourner (voir figure 2) :

1. Les mouvements externes d'ensemble, ce qui correspond à résoudre le modèle direct de la dynamique externe pilotée par la forme.
2. Les couples articulaires, ce qui correspond à calculer la dynamique interne inverse des couples.

La dérivation de ces deux modèles est l'objet des développements qui suivent, mais avant d'entrer dans le sujet, nous allons faire quelques remarques relatives à ce problème.

Remarque 1 :

Le premier modèle dynamique (c'est-à-dire le modèle dynamique externe direct) est dans ce qui suit, qualifié de modèle de la locomotion car il permet de prédire le mouvement des ddl externes connaissant celui des ddl internes, problème qui est au fondement de la locomotion. Le second (c'est-à-dire le modèle dynamique interne inverse), est classiquement utilisé pour les SM tels que les manipulateurs industriels où il trouve son application dans l'algorithme du couple calculé, ou "computed torque" en anglais.

Remarque 2 :

De l'énoncé précédent, une question émerge naturellement : pourquoi opter pour les mouvements internes comme entrées, et non pour les couples d'actionnement ? Il y a deux raisons à cela. Premièrement, il est aisé de spécifier les mouvements d'un robot locomoteur en termes de ses mouvements internes, alors qu'il est clairement contre-intuitif d'inférer les couples à appliquer sur les liaisons actionnées afin d'obtenir le mouvement externe désiré. Deuxièmement, ce problème (et sa solution) peut être couplé à des expériences basées sur des films de locomotion d'animaux ou de robots. Dans ce contexte, après que les mouvements internes aient été extraits de tels films, ils peuvent être imposés comme entrées de l'algorithme qui renverra les mouvements externes (modélisés). Ceux-ci pourront alors être comparés aux mouvements externes extraits des films. La comparaison des mouvements mesurés (sur les films) et de ceux calculés (par le modèle dynamique) est un outil précieux pour l'étude du modèle de contact, qui constitue de loin la difficulté majeure dans la modélisation de la dynamique de la locomotion. En prime, le second problème, c'est-à-dire la dynamique inverse (en couple) permet quant à elle, d'évaluer en parallèle la faisabilité des mouvements internes imposés par rapport aux ressources des actionneurs, d'évaluer des couts énergétiques...

Nota: Cette approche requière que les positions, les vitesses et les accélérations externes (d'ensemble) et internes (de forme) soient d'abord mesurées et/ou estimées. Puis, connaissant les inerties du système, on peut insérer ces variables cinématiques dans les équations de la dynamique pour estimer les valeurs des forces de contact s'appliquant sur le système (toutes les autres contributions étant des forces inertielles connues). Cette approche est par exemple illustrée dans [33, 34].

Remarque 3 :

Un autre problème lié à la locomotion est d'inverser le modèle de la locomotion susmentionné afin de trouver quels mouvements internes (de forme) produiront le mouvement externe (d'ensemble) désiré. La solution de ce problème relève du contrôle en boucle ouverte et peut être utilisée pour la planification de mouvements ou la recherche d'allures. Ce problème ne sera pas traité avec plus de détails dans cet article. On notera cependant que l'algorithme de locomotion inverse, qui en résulte, peut être contourné en traitant le contrôle en boucle ouverte comme un problème d'optimisation basé sur l'utilisation du modèle de locomotion direct ci-dessus énoncé. Dans ce cas, l'idée repose sur la minimisation de l'erreur entre les valeurs actuelles et désirées du mouvement externe, en jouant sur les mouvements internes (de forme) inconnus [35].

Finalement, si la solution algorithmique au problème général que nous venons d'évoquer est un outil utile pour la conception d'allures et de manœuvres transitoires, la résolution de la dynamique directe (c'est-à-dire avec les couples comme entrées et les mouvements internes et externes comme sorties) présente elle aussi son intérêt lorsque l'on cherchera à modéliser les déformations internes passives des corps constituant le système dans les cas de locomotion compliant comme ce sera abordé dans la section 8.

3 Dynamique de la locomotion directe : le cas cinématique

Sur la base des concepts de géométrie précédemment introduits, l'évolution temporelle de la forme d'un SMM définit un mouvement sur la variété \mathcal{S} , tandis que celle du corps de référence définit un mouvement dans le groupe de Lie G . Par conséquent, pour résoudre la dynamique directe de la locomotion pilotée par la forme, nous devons développer une relation entre ces deux types de mouvements sur le fibré principal $G \times \mathcal{S}$. En général, de telles relations sont données par un modèle dynamique liant forces et accélérations. Dans ce cas, la dynamique des contacts entre le système et son environnement doit être résolue, comme nous l'évoquerons dans la prochaine section. Cependant, il existe un cas particulièrement élégant où la locomotion est entièrement réglée par la cinématique, c'est-à-dire par des relations entre les vitesses de forme et les vitesses d'ensemble. Dans ce cas, le modèle de contact est encodé dans ce que nous nommerons une connexion sur le fibré principal des configurations [36]. Intuitivement, de telles connexions existent quand :

1. Il existe une relation linéaire entre un petit déplacement dr de \mathcal{S} (de forme) et un petit déplacement dg de G .
2. Le twist matériel $g^{-1}dg$ produit par dr est indépendant de g (invariance gauche).

En remplaçant les petits déplacements par les vitesses dans cette définition, une connexion lie directement les vitesses d'ensembles η aux vitesses internes (de forme) \dot{r} via un modèle cinématique de la forme :

Nota: Rappelons que η est défini dans la section 1.2 comme la vitesse du corps de référence, c'est-à-dire, dans le cas de SE(3) comme (2), avec g la configuration du corps de référence.

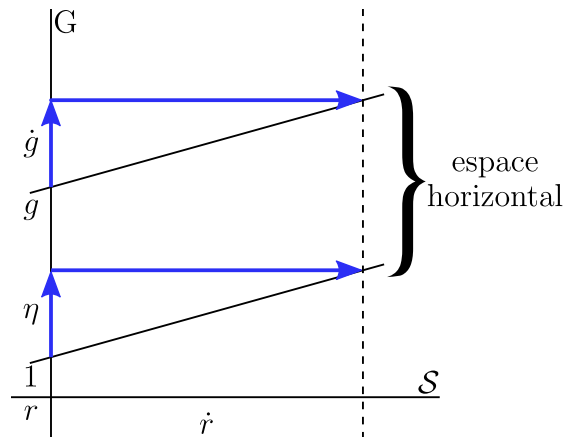


FIGURE 3 – Connexion entre les vitesses (\dot{r}) de \mathcal{S} et les vitesses (η) de G .

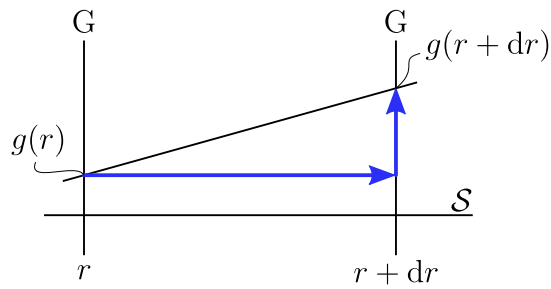


FIGURE 4 – Connexion sur le fibré principal $G \times \mathcal{S}$.

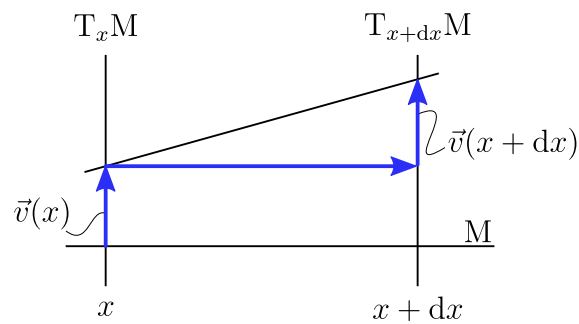


FIGURE 5 – Connexion sur le fibré tangent TM de la variété M .

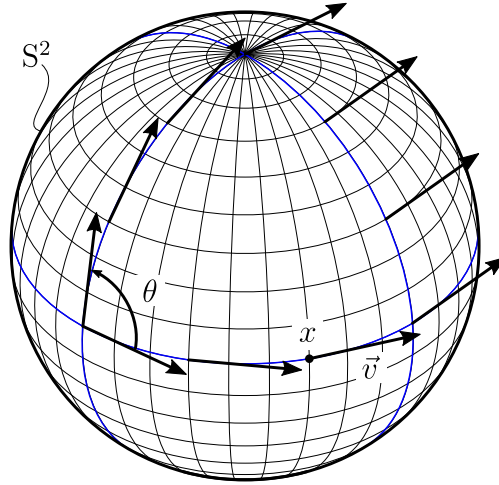


FIGURE 6 – Théorème de Gauss-Bonnet illustré sur la sphère S^2 .

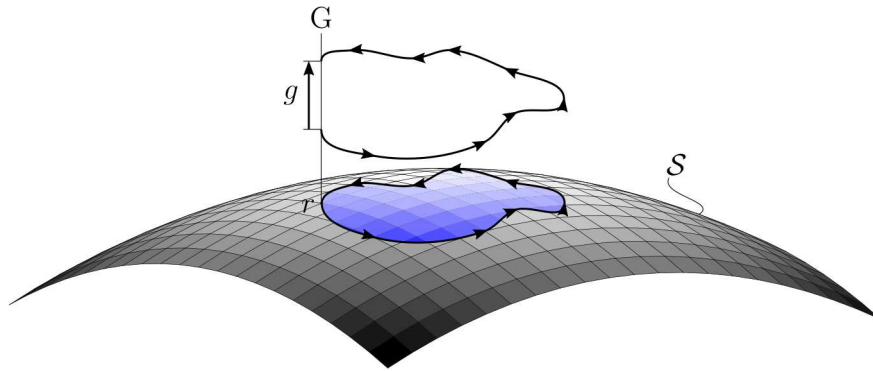


FIGURE 7 – Un changement cyclique de forme provoque un déplacement rigide d'ensemble dans G .

$$\eta + \mathcal{A}(r)\dot{r} = 0 . \quad 4$$

Sur le fibré principal des configurations, une telle relation opère en tout point (g, r) via la relation $\text{Ad}_g(\eta + \mathcal{A}(r)\dot{r}) = 0$, qui définit l'espace des mouvements admissibles du système ou, dans le langage de la géométrie différentielle, une distribution particulière sur $\mathcal{C} = G \times \mathcal{S}$ appelée espace horizontal, tel qu'illustré en figure 3.

Nota: Ad_g est un opérateur appelé adjoint de G . Il transporte un twist d'un repère à un autre, avec g la transformation qui applique le premier repère sur le second.

Dans la littérature en mécanique géométrique, $\mathcal{A}(r)$ est connue comme la 1-forme locale de la connexion ou plus simplement la forme locale de la connexion. C'est une fonction des variables de forme r seulement, et ce en vertu de la condition 2. De façon générale, une connexion associe de manière univoque un élément de la fibre au-dessus d'un point de la variété de base avec un autre élément de la fibre au-dessus d'un point de la variété de base infiniment proche du premier [37]. Cet appariement est illustré par la figure 4 pour un fibré principal, et par la figure 5 pour le fibré vectoriel réalisé par l'union de tous les espaces tangents à une variété M , un tel fibré définissant ce que l'on nomme le fibré tangent à M , noté TM . Ce dernier contexte est bien connu en géométrie Riemannienne, où toute métrique est naturellement associée à une connexion ω connue sous le nom de connexion de Levi-Civita, qui permet de transporter parallèlement à lui-même un vecteur tangent à la variété le long des géodésiques de la métrique [38]. Pour illustrer une telle connexion, dite Riemannienne, nous allons considérer le cas de la 2-sphère S^2 dotée de la métrique Euclidienne induite par \mathbb{R}^3 . Le long de tout segment d'un grand cercle (les

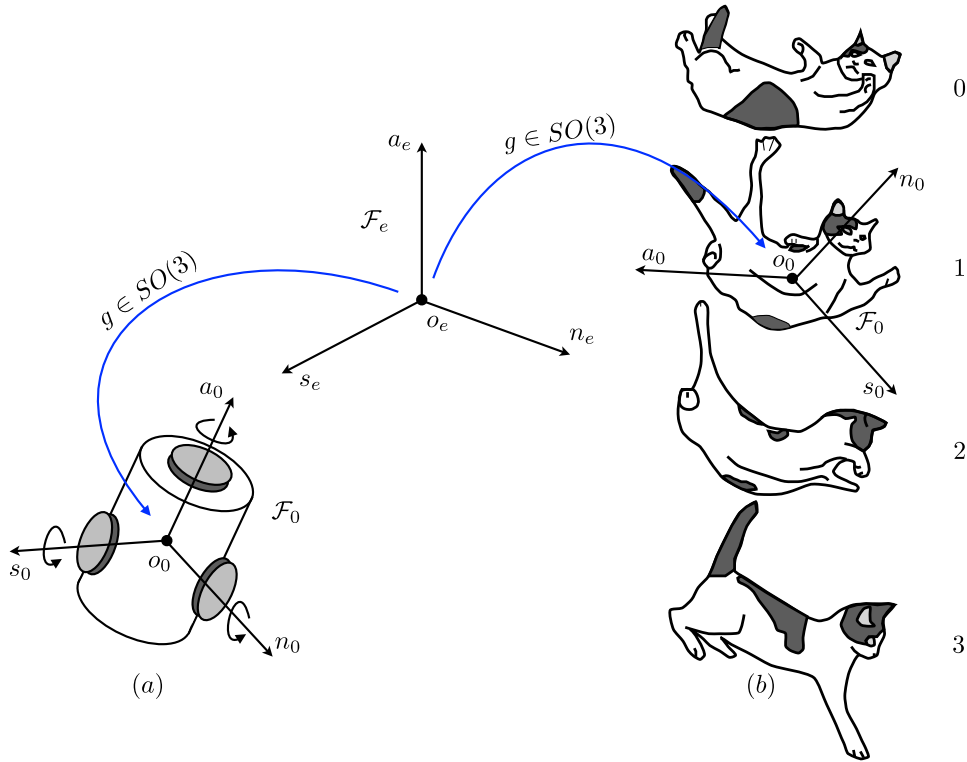


FIGURE 8 – Connexion mécanique : cas du chat tombant et du satellite en orbite avec rotors.

grands cercles sont les géodésiques de S^2), un vecteur tangent à la sphère peut être transporté parallèlement d'un point à un autre [21]. En considérant toute courbe de S^2 comme un ensemble infini de morceaux de géodésiques infinitésimales, le transport parallèle peut alors être défini pour toute courbe de S^2 , en particulier pour les courbes closes commençant et finissant au même point de S^2 . Quand un vecteur est ainsi transporté parallèlement le long d'un chemin clos, après avoir été transporté sur la totalité du chemin, le vecteur se trouve tourné d'un angle θ par rapport à son orientation initiale. En vertu du théorème de Gauss-Bonnet [29], cette différence d'orientation est proportionnelle à l'aire de la surface circonscrite par le chemin ainsi que la courbure de la sphère (voir figure 6). Autrement dit, ce changement d'orientation est une manifestation de la courbure de la variété et nous avons :

$$\theta = \int_{\text{Chemin}} \omega = \int_{\text{Aire}} d\omega ,$$

qui est un cas particulier du théorème de Stokes où $d\omega$ est la 2-forme dite de courbure de la variété Riemannienne de départ. Remarquablement, cette image géométrique s'applique également dans le cas du fibré principal d'un SMM lorsque la fibre est commutative (voir la figure 7). Dans ce cas, on peut associer à l'équation (4) une 2-forme de courbure notée $d\mathcal{A}$ qui lie des chemins clos infiniment petits dans l'espace des formes aux déplacements rigides infinitésimaux d'ensemble correspondant dans la fibre [39]. Cette image géométrique est un outil précieux pour la synthèse d'allure en robotique [39, 40] car elle donne une relation directe entre les mouvements cycliques de forme d'une allure et les déplacements d'ensemble qu'ils produisent dans l'espace ambiant. Nous allons maintenant passer en revue les deux cas en robotique où la dynamique directe de la locomotion pilotée par la forme, peut être modélisée par une connexion, c'est-à-dire de manière purement cinématique.

3.1 Cas 1 : Connexion mécanique

Nous allons ici prendre le cas du chat tombant ou du système de réorientation d'un satellite comme présenté en figure 8. Il est bien connu qu'un chat, initialement maintenu les pattes en haut, peut, en effectuant des mouvements internes de forme durant sa chute, se réorienter afin d'atterrir sur ses pattes. Le chat résout donc un problème de locomotion sans aucun contact, l'air n'ayant pas d'influence sur son mouvement. À la manière d'un satellite en orbite équipé de volants d'inertie, le chat réalise un transfert de moment cinétique entre ses ddl internes et externes afin de se réorienter. Du point de vue géométrique, l'espace de configuration de ces systèmes (le chat et le satellite) est un fibré principal $G \times \mathcal{S}$ avec \mathcal{S} l'espace de forme du squelette du chat, ou un tore tri-dimensionnel dans le cas du satellite complètement actionné, et avec $G = \text{SO}(3)$ dans les deux cas. En accord avec ce qui précède, choisissons un repère flottant comme repère de référence. Un tel repère a ses vecteurs de base attachés au corps de référence (la tête du chat, la caisse du satellite) tandis que son origine est centrée sur le centre de gravité du système. Dans ces conditions, l'orientation de ce repère par rapport à un repère fixé à l'espace est notée $R \in \text{SO}(3)$. Appliquons à présent la loi de conservation du moment cinétique sur le fibré $\text{SO}(3) \times \mathcal{S}$. Puisqu'aucune force externe ne s'applique sur le système, celui-ci reste nul pendant tout le mouvement et la locomotion est entièrement régie par la relation suivante :

$$\sigma = \sigma_{\text{rigide}} + \sigma_{\text{forme}} = 0 ,$$

où σ_{rigide} est le moment cinétique induit par les mouvements du repère flottant (c'est-à-dire les mouvements rigides d'ensemble du repère de référence du SMM), et σ_{forme} est la contribution au moment cinétique apportée par les mouvements internes de forme. Les théorèmes classiques de la mécanique des corps rigides donnent le moment cinétique comme suit :

$$R^T \sigma = I_{\text{lock}}(r)\Omega + I_r(r)\dot{r} = 0 ,$$

où Ω est le vecteur des vitesses angulaires du repère de référence dans sa base mobile, I_{lock} est la matrice d'inertie du système rigidifié dans sa forme actuelle r , nommée aussi "locked inertia matrix" [39], et I_r est la matrice d'inertie de couplage entre les accélérations internes et externes. La relation précédente étant invariante gauche (puisque I_{lock} et I_r ne dépendent pas de R) et linéaire par rapport aux vitesses, elle définit la connexion de forme locale suivante :

$$\mathcal{A}(r) = I_{\text{lock}}^{-1}(r)I_r(r) .$$

En mécanique géométrique, une telle connexion est connue sous le nom de connexion mécanique [41]. Elle encode toutes les informations concernant les échanges cinétiques entre les ddl internes et externes. En référence à nos considérations introductives sur la locomotion animale, le mécanisme de locomotion utilisé par le chat s'appuie encore sur le principe d'action-réaction, pour lequel les forces d'inertie (Coriolis et centrifuges) tiennent lieu de forces externes dans le contexte général. Pour clore cet exemple, notons qu'en appliquant les mêmes considérations aux translations du repère flottant, nous obtiendrions en utilisant le théorème du centre de masse $\mathcal{A}(r) = 0$, puisqu'aucune force externe ne s'applique sur le système. Ainsi, dans ce second cas, les mouvements internes de forme ne peuvent pas agir sur les mouvements linéaires du repère flottant, ce qui signifie qu'il n'y a intuitivement aucune connexion entre ces mouvements.

3.2 Cas 2 : Connexion cinématique

Nous considérons à présent les exemples d'un robot serpent se déplaçant par ondulations latérales, et d'une plate-forme non-holonome à roues de type unicycle, tels qu'illustrés en figure 9.

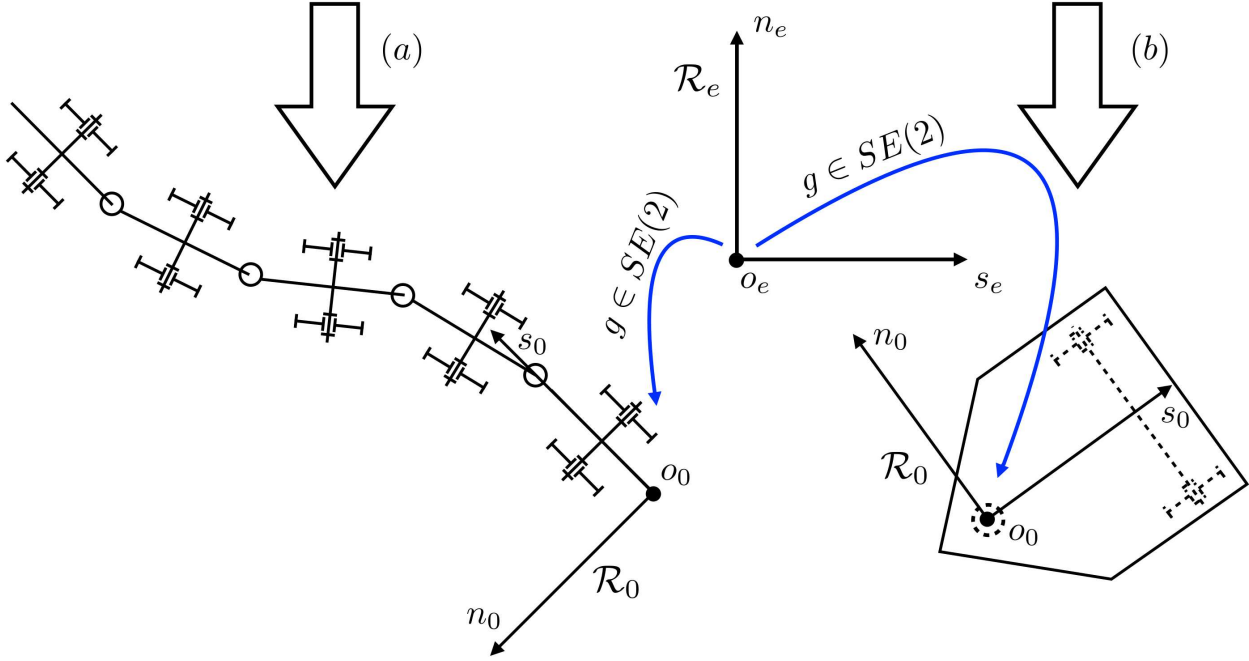
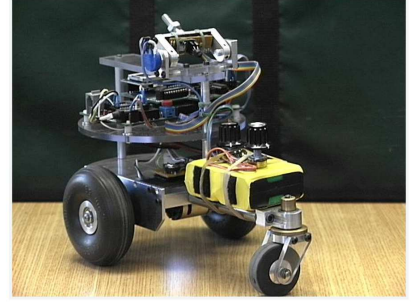
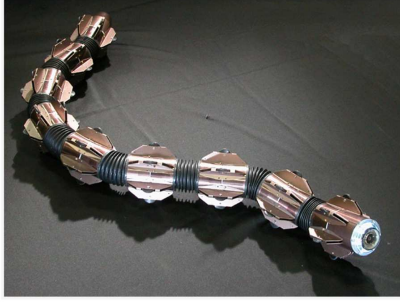


FIGURE 9 – Connexions cinématiques : (a) le robot serpent ACM-R5 de Hirose-Fukushima Robotics Lab. (b) la plate-forme mobile nBot du Geological Science’s Center of Southern Methodist University.

Le repère de référence est attaché à la tête du serpent dans un cas, et à la plate-forme dans l’autre. Comme ces deux systèmes évoluent dans le plan, le fibré principal de leurs configurations est $SE(2) \times \mathcal{S}$, où \mathcal{S} définit dans le premier cas l’espace articulaire du robot serpent, et un tore de dimension deux dans le second. Cette fois encore, il existe une connexion entre les mouvements de forme, internes, et les mouvements rigides d’ensemble, externes, de ces deux systèmes [42, 43, 44]. Cette connexion est ici déduite en supposant que les contacts entre le sol et les roues de la plate-forme, sont modélisés par des liaisons idéales de non-dérapiage et de roulement sans glissement .

Nota: Dans le cas d’un vrai serpent, la forte anisotropie du frottement de sa peau le long des directions axiale et latérale justifie de telles hypothèses.

Pour obtenir l’expression de cette connexion, il suffit d’introduire dans les deux cas, le mouvement du repère de référence dans les conditions de non-dérapiage et de roulement sans glissement, qui stipulent que les vitesses roue/sol aux points de contact sont nulles. Ensuite de quoi, un jeu de trois contraintes non-holonomes indépendantes (une pour chaque dimension de $G = SE(2)$) peut être défini sur le fibré principal. Ces trois contraintes définissent le modèle cinématique de la plate-forme mobile sous la forme (4), bien connue de la robotique mobile, où, une fois encore, la matrice $\mathcal{A}(r)$, étant indépendante de g , elle représente la forme locale

d'une connexion, nommée connexion cinématique principale [39]. Notons que, dans le cas d'un robot serpent tel que l'ACM-R5, cette connexion s'écrit à partir des contraintes latérales de non-dérapiage (les roues étant passives) d'un jeu de trois essieux non parallèles entre eux, tandis que dans le cas de l'uni-cycle, elle s'écrit en utilisant également les contraintes de roulement sans glissement des deux roues indépendantes. Ces contraintes non-holonomes seront évoquées avec plus de détails dans la prochaine section (section 4.2), consacrée à la dynamique des systèmes contraints.

4 Dynamique de la locomotion directe : le cas général

Comme mentionné plus tôt, un modèle dynamique est en général requis pour résoudre le modèle direct de la locomotion pilotée par la forme. En raison de la structure de fibré principal, la dérivation de ce modèle mérite une attention particulière. La structure de groupe de Lie permet de remplacer le calcul variationnel standard (duquel dérivent les équations de Lagrange) appliqué aux cartes de n'importe quelle variété, par un calcul intrinsèque appliqué directement sur le groupe. Un tel calcul a l'avantage de fournir une formulation de la dynamique présentant un minimum de non-linéarités géométriques. En effet, dans une telle approche, toutes les non-linéarités introduites par les mouvements rigides sont dues à la courbure du groupe (qui peut être intuitivement considérée comme la manifestation géométrique de la non-commutativité du côté algébrique) et non au paramétrage. Euler a exploité ces vertus lors de son étude de la toupie avant que ne soient découverts les groupes de Lie [45]. Cependant, un long moment s'écoula avant que la vision géométrique de l'approche Eulérienne de la dynamique soit complètement élucidée par Poincaré suivi de Chetaev [46], Rumyantsev [47] et Arnold [45] du côté Russe, et par l'école américaine de mécanique géométrique à la suite de Marsden [48]. L'idée de Poincaré fut d'appliquer le principe variationnel de Hamilton à l'action d'un système directement défini en fonction de ses transformations, et non en fonction de leurs paramètres, tel que préconisé dans l'approche de Lagrange [49].

Nota: Nous supposons ici que le lecteur a des connaissances de base sur la dérivation des équations de Lagrange en coordonnées généralisées. Les lecteurs qui ne sont pas intéressés par ces aspects peuvent directement passer à l'équation (9).

Suivant ce point de vue, l'action d'un SMM est définie ici comme :

$$\int_{t_1}^{t_2} L(g, r, \dot{g}, \dot{r}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (T(g, r, \dot{g}, \dot{r}) - U(g, r)) dt , \quad 5$$

où L , T et U désignent le lagrangien, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système, respectivement, dans son fibré principal des configurations. Postulant le principe d'Hamilton, la trajectoire du système entre deux instants t_1 et t_2 doit satisfaire à la condition de stationnarité, c'est-à-dire $\forall \delta g$ tel que $\delta g(t_1) = \delta g(t_2) = 0$:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(g, r, \dot{g}, \dot{r}) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{\text{ext}} dt ,$$

où δW_{ext} représente le travail virtuel d'éventuelles forces extérieures non-conservatives exercées par les contacts externes. En remplaçant les déplacements (virtuels) et vitesse (réelles) de transformation, par leurs twists associés $\delta \zeta = g^{-1} \delta g$ et $\eta = g^{-1} \dot{g}$, et en dénotant $L(g, r, g\eta, \dot{r}) = l(g, r, \eta, \dot{r})$, nous pouvons réécrire la condition précédente sous la forme équivalente dite réduite, c'est-à-dire, que pour $\forall \delta \zeta$ tels que $\delta \zeta(t_1) = \delta \zeta(t_2) = 0$, le principe impose :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} l(g, r, \eta, \dot{r}) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{\text{ext}} dt , \quad 6$$

où $\delta W_{\text{ext}} = \delta \zeta^\top f_c$ et $l(g, r, \eta, \dot{r})$ est le lagrangien réduit à gauche du système, qui prend la forme générale suivante :

$$l(g, r, \eta, \dot{r}) = \frac{1}{2} (\eta^\top, \dot{r}^\top) \begin{pmatrix} \mathcal{M} & M^\top \\ M & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix} - U(g, r) , \quad 7$$

où \mathcal{M} , M et m sont des matrices d'inertie indépendantes de g . Enfin, quand l'énergie potentielle U est indépendante de g , le lagrangien est dit invariant gauche puisque dans un tel cas nous avons :

$$L(g, r, \dot{g}, \dot{r}) = L(hg, r, h\dot{g}, \dot{r}) , \quad \forall h \in G ,$$

et en particulier pour $h = g^{-1}$, $L(1, r, g^{-1}\dot{g}, \dot{r}) = l(r, \eta, \dot{r})$. De la même manière, toute force de contact f_c qui, exprimée dans le repère de référence, ne dépend pas explicitement de g est dite invariante à gauche. Cette propriété est en fait une propriété de symétrie fréquemment vérifiée par les forces externes exercées sur un SMM. Ceci établi, pour finaliser le calcul de (6), nous devons exploiter deux propriétés supplémentaires, toutes deux résultantes du fait que la variation δ est appliquée alors que le temps n'évolue pas. Premièrement, r et \dot{r} étant considérés comme des entrées dont l'évolution temporelle est connue, nous avons $\delta r = \delta \dot{r} = 0$. Deuxièmement, nous avons nécessairement $\delta(dg/dt) = d(\delta g)/dt$, ce qui conduit à :

$$\delta \eta = \frac{d\delta \zeta}{dt} + [\eta, \delta \zeta] .$$

Découverte par Poincaré, cette relation, qui gouverne la commutation entre variation et dérivation, joue un rôle clef dans le calcul variationnel sur les groupes de Lie. En effet, elle rend possible la poursuite du calcul (5) par une classique intégration par partie comme pour le calcul des variations standard de Lagrange [50]. Enfin, sur la base de ces propriétés, il est possible de montrer que toute solution du principe variationnel précédent est aussi solution des équations dites de Poincaré :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial l}{\partial \eta} \right) - \text{ad}_{\eta}^\top \left(\frac{\partial l}{\partial \eta} \right) = X_g(U) + f_c , \quad 8$$

où $\text{ad}_{(\cdot)}^\top(\cdot) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \mapsto \mathfrak{g}^*$ est l'application co-adjointe de G , c'est-à-dire le dual de l'application adjointe de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g} noté $\text{ad}_{(\cdot)}(\cdot)$ et défini par $\text{ad}_{\eta_1}(\eta_2) = [\eta_1, \eta_2]$; $X_g(U)$ modélise les forces externes conservatrices, et $f_{\text{ext}} = f_c + X_g(U)$.

Nota: \mathfrak{g}^* dénote l'espace dual de l'algèbre de Lie des twists. C'est l'espace des torseurs des actions (forces et couples) mécaniques matérielles f , ou "wrench" en anglais. Dans le cas général où $G = \text{SE}(3)$, chaque f est un vecteur 6×1 regroupant la résultante et le moment des forces exercées sur le corps rigide et exprimé dans son propre repère mobile tandis que ad_η est une matrice 6×6 dont l'expression détaillée est donnée dans [31].

Notons que $X_g(U)$ représente les éventuels défauts de symétrie du Lagrangien (qui ne peuvent provenir que de U) dont l'expression est détaillée dans [49], dans sa forme intrinsèque. Enfin, appliquer (8) au Lagrangien réduit précédemment défini, donne la dynamique directe de la locomotion :

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{F} \\ g\eta \end{pmatrix} , \quad 9$$

où \mathcal{M} est le tenseur d'inertie verrouillé (la généralisation de I_{lock} de l'exemple du chat tombant) puisqu'il correspond au tenseur d'inertie du SMM vu comme un corps rigide figé dans sa configuration (forme) actuelle, tandis que, de la même manière, $\mathcal{F} = f_{\text{ext}} + f_{\text{inertielle}}$ dénote le torseur des actions mécaniques des forces externes et inertielles verrouillées (incluant celles induites par les accélérations internes). La seconde ligne de l'équation précédente (9) est un modèle cinématique dite "équation de reconstruction" puisqu'elle permet de reconstruire, par

intégration numérique en temps, la trajectoire du corps de référence $t \mapsto g(t)$ à partir de l'évolution temporelle de ses vitesses η , elle-même obtenue par intégration de la première ligne de (9). Pour aller plus en avant dans la dynamique Lagrangienne, le point dur réside désormais au niveau du modèle des forces externes, dont le calcul requiert de résoudre la dynamique des contacts physiques existants entre le système et son environnement. Comme déjà évoqué, ce point peut être particulièrement difficile, car ces forces sont typiquement régies par les propriétés :

- du sol (dynamique non régulière, tribologie, etc).
- du fluide (gouverné par les équations de Navier-Stokes).
- d'environnements plus exotiques, tels que les matériaux granulaires (rhéologie).

Par exemple, dans le cas de la nage, le calcul de f_{ext} réclamerait de résoudre les équations de Navier-Stokes du fluide à chaque pas de temps de la boucle d'intégration. Évidemment, un tel calcul est incompatible avec les contraintes de simplicité (calcul temps-réel, commande, *etc*) imposées par les applications robotiques. Aussi, l'art de la modélisation physique consiste à résoudre ce problème au cas par cas. En particulier, il existe deux sous-cas pour lesquels la résolution de ce modèle de la locomotion ne réclame que la géométrie, ou plus précisément, pour lesquels toute la physique du contact peut être encodée dans la géométrie précédemment introduite. Ces cas géométriques apparaissent quand f_{ext} est invariant gauche et Lagrangien [51], ou quand f_{ext} est généré par un ensemble de multiplicateurs de Lagrange forçant des contraintes imposées, c'est-à-dire quand les contacts peuvent être modélisés par des contraintes cinématiques idéales. Nous allons maintenant développer brièvement ces deux sous-cas et voir comment ils sont liés à la locomotion cinématique précédemment introduite, mais dans un sens plus large que celui abordé dans la section 3.

4.1 Cas 1 : Lorsque les efforts extérieurs dérivent d'un Lagrangien (invariant gauche)

Ce cas a été introduit par Birkhoff dans [51] et traduit le fait qu'il existe une fonction Lagrangienne telle que :

$$F_{\text{ext}} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial l_{\text{ext}}}{\partial \eta} \right) + \text{ad}_{\eta}^{\top} \left(\frac{\partial l_{\text{ext}}}{\partial \eta} \right) ,$$

de sorte que le modèle dynamique de la locomotion puisse être réécrit sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(l + l_{\text{ext}})}{\partial \eta} \right) - \text{ad}_{\eta}^{\top} \left(\frac{\partial(l + l_{\text{ext}})}{\partial \eta} \right) = 0 .$$

De plus, si initialement, le système est au repos, c'est-à-dire, si nous sommes dans la situation telle qu'à $t = 0$: $\partial(l + l_{\text{ext}})/\partial \eta = 0$, alors :

$$\frac{\partial(l + l_{\text{ext}})}{\partial \eta} = 0 , \forall t > 0 . \tag{10}$$

Par exemple, dans le cas de la nage 3D à hauts nombres de Reynolds, si un SMM est immergé dans un fluide idéal (c'est-à-dire un fluide incompressible et non visqueux) animé d'un écoulement irrotationnel, initialement au repos, les forces hydrodynamiques exercées sur le système dérivent d'un Lagrangien qui s'identifie à l'énergie cinétique ajoutée de l'écoulement potentiel correspondant [52] :

Nota: Le terme "ajoutée" signifie que l'énergie cinétique apportée par le fluide va générer des forces d'inertie résultantes de son accélération par le corps, de sorte que la contribution à l'énergie cinétique totale ("solide+fluide") apportée par le fluide peut être simplement ajoutée à celle du corps.

$$l_{\text{ext}}(g, r, \eta, \dot{r}) = \frac{1}{2} (\eta^\top, \dot{r}^\top) \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\text{add}} & M_{\text{add}}^\top \\ M_{\text{add}} & m_{\text{add}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix} .$$

Finalement, en utilisant (10) avec l ayant la forme de (7) et avec $U = 0$, la dynamique se réduit à la conservation du torseur des quantités cinétiques qui s'écrit :

$$\widetilde{\mathcal{M}}\eta + \widetilde{M}\dot{r} = 0 , \tag{11}$$

où $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} + \mathcal{M}_{\text{add}}$ et $\widetilde{M} = M + M_{\text{add}}$. Nous retrouvons alors une structure similaire à celle du chat tombant (section 3.1), c'est-à-dire un modèle cinématique de la forme (4), avec $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{M}}^{-1}\widetilde{M}$. Cette connexion est parfois nommée connexion hydrodynamique car elle encode les échanges des quantités cinétiques entre le corps et le fluide qui l'environne [53, 54, 55, 56].

Remarque 4 :

Puisque dans (11) $\eta \in \mathfrak{se}(3)$, et que les matrices d'inertie généralisées ne sont pas creuses, la connexion hydrodynamique, contrairement à la connexion mécanique du chat tombant, ou du satellite en orbite, peut changer à la fois la position et l'orientation du système. En conséquence, ce modèle simple peut expliquer comment, à hauts nombres de Reynolds, un SMM peut nager dans un fluide initialement au repos en actionnant ses ddl de forme.

Remarque 5 :

La nage à faible nombre de Reynolds peut elle aussi être modélisée en utilisant une connexion appelée connexion de Stokes [57]. Ce contexte a même été la première application de la théorie de jauge et de la structure de fibré principal à un cas de locomotion animale par Shapere et Wilczek [58]. L'intuition suggère que dans ce cas, les forces d'inertie exercées sur le corps par le fluide sont négligeables comparées aux forces visqueuses. Ainsi, la résultante des forces visqueuses, qui sont essentiellement proportionnelles au champ de vitesse le long du corps, est nulle. Lorsqu'exprimées dans le fibré principal des configurations, ces vitesses sont linéaires par rapport à \dot{r} et η , et la nullité des forces visqueuses conduit ainsi à la connexion de Stokes.

Remarque 6 :

Le théorème de la coquille Saint-Jacques stipule que tout animal n'ayant qu'un seul ddl interne ne peut pas se déplacer dans un fluide idéal initialement au repos [59]. En ouvrant sa coquille, l'animal perd le déplacement rigide d'ensemble qu'il gagne en se refermant, ce qui entraîne un mouvement rigide d'ensemble nul après un cycle complet. La modélisation de ce mode de locomotion à l'aide de la connexion hydrodynamique permet une interprétation géométrique directe de ce résultat. En se remémorant le théorème de Gauss-Bonnet exposé en section 3, on s'aperçoit en effet qu'un chemin fermé sur une variété \mathcal{S} de dimension 1 enferme une surface d'aire nulle, et ne peut produire aucun déplacement rigide d'ensemble en fin de cycle.

Remarque 7 :

Dans un fluide visqueux réel, les détachements tourbillonnaires en aval du bord de fuite de la coquille génèrent des variations de quantité cinétique dans le fluide. En effet, la loi de conservation du moment cinétique appliquée à l'ensemble (corps + fluide) doit dans ce cas être étendue au cas des écoulements rotationnels en ajoutant à l'équilibre des quantités cinétiques (11) la contribution apportée par la vorticité [60]. Dans ce cas, l'équilibre des quantités cinétiques appliquées au système (corps + fluide) prend la forme de la somme des torseurs cinétiques

(quantités de mouvement et moments cinétiques regroupés dans un vecteur noté $w \in \mathbb{R}^6$) :

$$\begin{pmatrix} p_{\text{forme}} \\ \sigma_{\text{forme}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{\text{rigide}} \\ \sigma_{\text{rigide}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_v \\ \sigma_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 12$$

où les deux premiers termes sont ceux impliqués dans le contexte d'un écoulement potentiel mais ici exprimés dans le repère fixe, c'est-à-dire $\text{Ad}_g^T(\widetilde{\mathcal{M}}\eta + \widetilde{M}\dot{r}) = w_{\text{rigide}} + w_{\text{forme}}$, alors que le troisième terme définit la contribution de la vorticité à l'équation d'équilibre des quantités cinétiques :

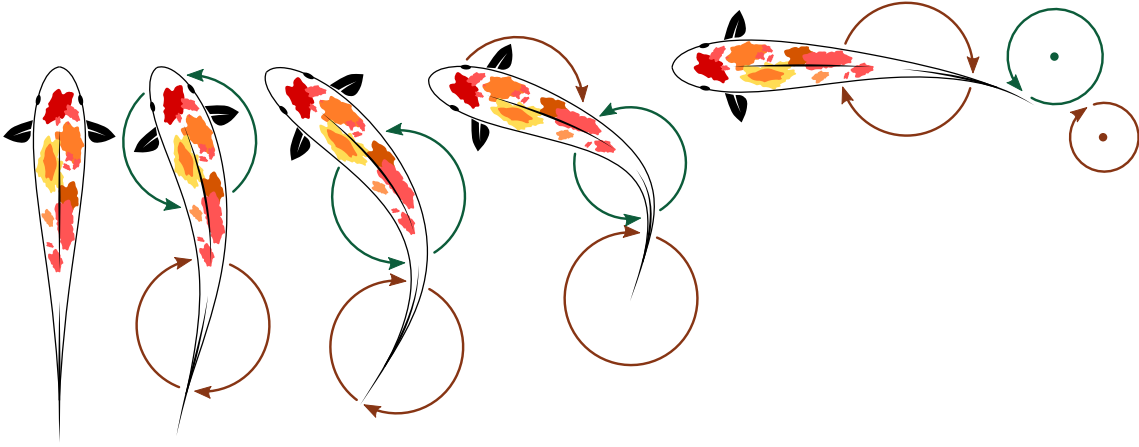
$$\begin{pmatrix} p_v \\ \sigma_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\partial B} x \times (n \times u_\omega) da + \frac{1}{2} \int_F x \times \omega dv \\ -\frac{1}{2} \int_{\partial B} x^2 (n \times u_\omega) da - \frac{1}{2} \int_F x^2 \omega dv \end{pmatrix},$$

avec \times le produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 , ω le champ de vorticité, u_ω la vitesse du fluide induite (par une relation de type Helmholtz) par le champ de vorticité, et x le vecteur position dans le repère fixe. Dans la nature, la plupart des animaux volants ou nageants ne font pas que produire de la vorticité, ils la contrôlent afin de modifier leur direction d'avance, lors d'un virage par exemple. Mathématiquement, ils utilisent le premier terme de (12) pour générer et contrôler le troisième terme de (12) et ainsi contrôler leurs mouvements rigides d'ensemble au travers du second terme. Pour illustrer ce principe, considérons le poisson présenté en figure 10. Lorsqu'il tourne, le poisson plie tout d'abord son corps, modifiant ainsi $w_{\text{forme}} = (p_{\text{forme}}^\top, \sigma_{\text{forme}}^\top)^\top$. Ceci crée une structure rotationnelle autour de lui, nommé proto vortex [61, 62]. En se déplaçant, le proto vortex glisse le long du corps du poisson avant d'atteindre le bord de fuite de sa nageoire caudale, où, se refermant, il devient un véritable tourbillon lâ  ch   dans le sillage (modélisé par $w_v = (p_v^\top, \sigma_v^\top)^\top$). Après qu'un tel tourbillon soit lâ  ch  , l'apparition d'un terme tourbillonnaire supplémentaire dans la loi de conservation modifie la composante $w_{\text{rigide}} = (p_{\text{rigide}}^\top, \sigma_{\text{rigide}}^\top)^\top$ et provoque ainsi la rotation d'ensemble du poisson nécessaire à son virage. Plus généralement, les animaux nageant et volant produisent et contrôlent la vorticité dans leur environnement afin de générer la poussée s'opposant à la force de traînée, ou la portance nécessaire à leur sustentation dans la gravité. Pour se convaincre de la relation entre vorticité et portance, il suffit de se remémorer l'image classique en aérodynamique dite de Kutta, où un tourbillon de départ lâ  ch   derrière une aile d'avion rigide, génère une circulation autour de celle-ci, et finalement une portance proportionnelle à cette dernière. Plus récemment, les biologistes et les hydrodynamiciens ont découvert que les animaux peuvent interagir avec la vorticité environnante pour préserver l'énergie utile à leur locomotion. C'est le cas d'un poisson qui interagit avec son propre sillage afin d'en extraire l'énergie qui serait gaspillée autrement [63], ou d'un papillon sphinx en vol stationnaire qui récupère un vortex à chaque inversion de la course de son aile [64]. Plus remarquablement, un poisson mort placé dans une allée de vortex de Von Karman peut nager à contre-courant sans consommer la moindre énergie, c'est-à-dire de manière purement passive, en extrayant l'énergie des tourbillons qui l'environnent [65] comme illustré en figure 10.

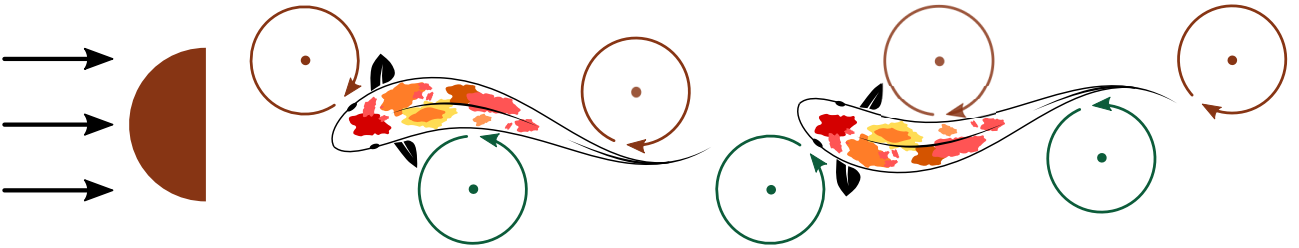
Nota: Il convient de noter ici que si (12) peut modéliser les transferts de quantités cinétiques entre le corps et la vorticité du fluide environnant, elle ne peut expliquer la génération de la vorticité en elle-même, cette dernière nécessitant un modèle de la couche limite où la vorticité est produite.

4.2 Cas 2 : Lorsque les forces externes sont des multiplicateurs de Lagrange d'un ensemble de contraintes cinématiques

Nous considérons ici le cas où les contacts entre le système et son environnement (typiquement le sol) peuvent être modélisés par des contraintes cinématiques idéales. En pratique, ces contraintes sont déduites en forçant à zéro la vitesse des points matériels du système en contact avec son



(a) Un poisson tourne en contrôlant la vorticité.



(b) Un poisson nageant passivement en aval d'un obstacle en forme de demi-cercle.

FIGURE 10 – Illustration de la nage du poisson. Les tourbillons sont dessinés sous forme de points entourés de cercles orientés.

substrat. En accord avec la mécanique Lagrangienne, ces contraintes sont imposées par des multiplicateurs de Lagrange qui sont les vecteurs duaux des vitesses forcées à zéro [50]. Dans notre contexte, ces multiplicateurs de Lagrange représentent physiquement les forces de réaction externes transmises au système au travers des points de contact .

Nota: Ceci s'applique également aux vitesses angulaires pour lesquelles les multiplicateurs de Lagrange sont des couples de réaction externes.

Cette sous-classe de modèle joue un rôle primordial dans la locomotion terrestre des robots marcheurs ou serpents. En effet, dans ces cas, les contraintes cinématiques imposées par les contacts peuvent être exprimées sur le fibré principal des configurations sous la forme générale [25] :

$$0_m = A(r)\eta + B(r)\dot{r} , \quad 13$$

où, si on note $n = \dim(G)$, et m le nombre de contraintes indépendantes imposées par les contacts, A et B sont respectivement des matrices $m \times n$ et $m \times p$, et 0_m un vecteur de $m \times 1$ zéros. Une fois un tel système de contraintes établi, nous rencontrons deux cas qui dépendent des valeurs relatives du rang de A noté $\text{rang}(A)$, et n . Dans le premier cas, $\text{rang}(A) = n$ et (13) peut être partitionnée en blocs de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 0_{(m-n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} \\ \tilde{A} \end{pmatrix} \eta + \begin{pmatrix} \bar{B} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} \dot{r} , \quad 14$$

avec \bar{A} une matrice inversible carrée $n \times n$. Dans ce cas, la matrice \bar{A} étant inversible, η est complètement défini par l'évolution temporelle $t \mapsto r(t)$ grâce au modèle cinématique explicite $\eta = -\mathcal{A}(r)\dot{r}$, où $\mathcal{A} = \bar{A}^{-1}\bar{B}$ définit la forme locale d'une connexion (cinématique) sur le fibré

principal des configurations. De plus, si $m = n$, alors le système mobile multicorps peut toujours bouger ; tandis que si $m > n$, les $m - n$ équations résiduelles de (14) peuvent être utilisées pour trouver les vitesses articulaires \dot{r} qui préservent la mobilité du système global, c'est-à-dire vérifiant l'équation de compatibilité suivante : $(\tilde{B} - \tilde{A}\mathcal{A})(r)\dot{r} = 0$, qui n'admet des solutions non triviales ($\dot{r} \neq 0$) que si le mouvement est possible. En somme, dans ce premier cas, il existe suffisamment de contraintes indépendantes pour permettre de résoudre le problème de la dynamique par un modèle cinématique. Dans le second cas, en revanche, nous avons $\text{rang}(A) < n$, et les contacts du système avec son substrat sont tels que les contraintes sont en nombre insuffisant pour pouvoir définir les mouvements rigides d'ensemble uniquement en utilisant la cinématique. Dans ce cas, une analyse plus poussée est donc nécessaire. À cet égard, l'application de l'inversion généralisée à (13) permet d'énoncer :

$$\eta = H(r)\eta_r + J(r)\dot{r} , \quad 15$$

où $A^{(-1)}$ est une inverse généralisée de A , $J = -A^{(-1)}B$, alors que $H(r)$ est une matrice $n \times (n-m)$ dont les colonnes génèrent le noyau de A , c'est-à-dire le noyau des contraintes verrouillées. Dans cette même relation, η_r définit le vecteur $(6 + n - m) \times 1$ nommé torseur cinématique réduit, ou dans une terminologie plus mécanicienne, le vecteur des vitesses compatibles avec les contraintes. Maintenant, en projetant la dynamique non contrainte (9) sur le noyau des contraintes verrouillées, nous obtenons la dynamique réduite du système :

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \dot{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_r^{-1} \mathcal{F}_r \\ g(H\eta_r + J\dot{r}) \end{pmatrix} , \quad 16$$

qui gouverne l'évolution temporelle de η_r , où $\mathcal{M}_r = H^\top \mathcal{M} H$ et $\mathcal{F}_r = H^\top (\mathcal{F} - \mathcal{M}(\dot{H}\eta_r + \dot{J}\dot{r} + J\ddot{r}))$.

Remarque 8 :

Quand $J = 0$ et $H = 1$, nous retrouvons le cas non-contraint (cas décrit en section 3.1), tandis que quand $H = 0$, le modèle cinématique général (15) dégénère en un modèle cinématique (cas décrit en section 3.2) avec pour connexion cinématique $J = \mathcal{A}$. De ce point de vue, les cas cinématiques (section 3.2) et dynamique (section 3.1) sont les deux cas extrêmes d'un même contexte, où le nombre des contraintes induites par les contacts sur la fibre est respectivement maximum et minimum. En effet, dans le premier cas, le nombre de contraintes indépendantes est égal à la dimension de la fibre, tandis que dans le second, le nombre de contraintes indépendantes est nul car les contacts n'introduisent aucune contrainte .

Nota: Remarquons que ceci ne signifie pas pour autant que le SMM ne subit aucun contact. Ceux-ci, s'ils existent, sont en réalité modélisés par des efforts gouvernés par la physique du contact tels que des forces de Coulomb.

Remarque 9 :

Il est, à présent, aisé d'imaginer des SMM qui appartiennent à un cas intermédiaire où le système est contraint par un nombre de contraintes n'excédant pas la dimension de la fibre. Un cas particulier de tels systèmes, pertinent pour la robotique ainsi que pour la biomécanique du sport, est celui où le système locomoteur est gouverné en partie par des échanges cinétiques entre ddl internes et externes mais également par la cinématique des contacts. Le cas de SMM gouvernés par de telles équations comprend tous les systèmes dont le principe de locomotion repose sur le transfert de moment cinétique des ddl internes vers ceux externes via les contraintes non-holonomes, tel que le snakeboard, le trikke (voir la figure 11), un skieur glissant le long d'une pente raide, ou un patineur effectuant une chorégraphie. Dans ce dernier cas, le patineur utilise une connexion mécanique quand il saute et une version contrainte de celle-ci lorsqu'il

est en contact avec la glace. Ces derniers exemples montrent pourquoi dans la théorie de la locomotion Lagrangienne promue par Marsden et ses co-auteurs, le torseur cinématique réduit η_r est remplacé par un moment cinétique réduit $p_r = \frac{\partial l}{\partial \eta_r}$, avec l le Lagrangien réduit (7), tandis que l'équation de reconstruction est, quant à elle, remplacée par une équation de connexion [66].

Remarque 10 :

Les robots serpents à roues tels que le robot ACM-R5 font partie de la classe des systèmes sur-contraints. Dans leurs cas, la locomotion est entièrement gouvernée par une connexion cinématique $\mathcal{A} = \bar{A}^{-1}\bar{B}$. De plus, construire \bar{A} à partir des trois premières contraintes des trois premiers corps définit le mouvement rigide d'ensemble à partir du mouvement des trois premières liaisons. Pour les autres liaisons, l'intégration des équations de compatibilité résiduelle permet d'obtenir le mouvement de "leader/suiveur" observé dans le mouvement d'ondulation latérale des serpents, où chaque section du corps suit le chemin tracé par la tête du serpent [66].

Remarque 11 :

Un unique système peut présenter plusieurs cas différents lorsque sa configuration change. Par exemple, dans certaines configurations singulières, $\text{rang}(A)$ peut soudainement diminuer, entraînant une transition brutale, d'un cas où les mouvements rigides d'ensemble sont entièrement définis par la cinématique, à un autre, où la dynamique est requise. Ce cas se présente en particulier, pour le robot serpent ACM-R5 lorsque son corps est affectée d'une courbure constante le long de son axe vertébral. Les robots marcheurs, quant à eux, présentent tous les cas et sous-cas mentionnés, y compris le cas non contraint (phase de vol), le cas entièrement contraint (phase de support unique), le cas sur-contraint (phase de double support) et même le cas sous-contraint (dans les cas plus exotiques comme la danse sur les pointes, ou lorsque l'on recourt à des modèles dégénérés du pied) [67].

Remarque 12 :

Dans [28], le contexte précédent a été étendu aux systèmes ayant des ddl internes passifs, tels que ceux introduits par des roues passives, ou des organes compliants dont les déformations sont décrites dans l'approche dite du repère flottant de la dynamique des systèmes multicorps flexibles [30]. Dans de tels cas, les vitesses internes passives sont regroupées avec les externes dans (15) et (16), tandis que le noyau des vitesses admissibles contient alors des mouvements internes (de forme) dont l'évolution nécessite un modèle dynamique.

Remarque 13 :

Revenant à notre problème dynamique de départ, il est important de noter que le calcul des mouvements rigides d'ensemble à partir des mouvements internes de forme ne signifie pas que ces mouvements soient réalisables. En fait, les actionneurs doivent être capables de fournir les couples internes désirés pour assurer la faisabilité de ces mouvements. De même, dans le cas de contraintes unilatérales, telles que rencontrées dans la locomotion à pattes, ou dans l'ondulation latérale des serpents arboricoles, les contraintes bilatérales de (13) doivent être activées ou désactivées selon le signe des forces de réaction qu'elles transmettent. Ce dernier point sera évoqué en section 5.

Remarque 14 :

Un contact est sans impact lorsque la contrainte cinématique qu'il introduit est satisfaite juste avant que le contact ne se produise (c'est le cas d'un serpent changeant doucement ses appuis lors de ses ondulations latérales). Dans ce cas, le contexte précédent, qui relève du domaine de la dynamique régulière, reste valide. Cependant, lorsque la contrainte n'est pas satisfaite avant que le contact ne se produise, comme dans le cas de la marche, elle génère un impact qui peut



(a) Le trikke.



(b) Le snakeboard.

FIGURE 11 – Systèmes non-holonomes sous-contraints.

être modélisé en changeant l'équilibre dynamique des forces du système (9) en un équilibre des moments cinétiques basé sur les concepts d'impulse et de coefficients de restitution, ou encore en utilisant un modèle régularisé des forces de contact, fonction des déformations entre les surfaces d'appui des pieds et le sol [68].

5 La dynamique inverse en couple

Nous discuterons ici du second modèle, c'est-à-dire du modèle dynamique inverse en couple de la section 2, qui calcule les couples internes du système locomoteur. Comme $(g, \eta, \dot{\eta})$ peuvent être calculés à chaque instant à partir de la résolution de la dynamique directe de la locomotion, nous sommes à présent capables de reconstruire les couples internes requis à chaque instant du mouvement. Pour ce faire, nous reconsidérons le lagrangien (7) auquel nous appliquons les équations de Poincaré sur le groupe de Lie $G \times \mathbb{R}^n$, où \mathbb{R}^n est un système de coordonnées sur \mathcal{S} . Ceci nous donne la dynamique suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M} & M^\top \\ M & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ Q + \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{\text{ext}} \\ Q_{\text{ext}} \end{pmatrix}, \quad 17$$

où nous reconnaissons, sur la ligne supérieure, la dynamique externe avec r maintenant gouverné par la ligne inférieure de (17) (c'est-à-dire, la dynamique interne de forme), de laquelle nous pouvons extraire l'expression des couples moteurs :

$$\tau = M(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}) + m\ddot{r} - Q - Q_{\text{ext}}, \quad 18$$

où nous avons utilisé l'expression des accélérations rigides d'ensemble donnée par (9). En particulier, dans le cas contraint où les forces externes sont produites par des multiplicateurs de Lagrange, on a $f_{\text{ext}} = A^\top \lambda$ et $Q_{\text{ext}} = B^\top \lambda$, avec λ l'ensemble des forces de réaction forçant les contraintes (13). En conséquence, une inversion généralisée de la première ligne de (17) nous donne :

$$\lambda = (A)^{(-1)} h(r, \dot{r}, \ddot{r}) + \lambda_{\text{stat}} = \lambda_{\text{kin}} + \lambda_{\text{stat}}, \quad 19$$

avec $h = \mathcal{M}\dot{\eta} - f + M^\top \ddot{r}$ et $\dot{\eta}$ donné par la différentiation temporelle de (15) et où λ_{kin} et λ_{stat} sont les forces de réaction dues aux effets cinématiques et statiques, respectivement. En réinjectant (19) dans la deuxième ligne de (17), on obtient alors :

$$\tau = M\dot{\eta} + m\ddot{r} - Q - B^\top(\lambda_{\text{kin}} + \lambda_{\text{stat}}) = \tau_{\text{kin}} + \tau_{\text{stat}}, \quad 20$$

où τ_{kin} est la composante cinématique du couple total entièrement explicable par le mouvement, alors que $\tau_{\text{stat}} = -B^\top \lambda_{\text{stat}}$ (avec $\lambda_{\text{stat}} \in \ker(A^\top)$) correspond à des chargements statiques, qui ne produisent aucun mouvement rigide d'ensemble observable. En effet, ces couples génèrent des contraintes internes subies par le robot du fait de l'hyperstatisme des contacts. Ces contraintes internes sont disponibles en tant que ddl de locomotion supplémentaires et peuvent être contrôlées pour améliorer des critères supplémentaires tels que l'adhérence. En référence à la remarque 13 de la section 4.1, ces contraintes internes peuvent être choisies pour rendre le mouvement dynamiquement réalisable. Par exemple, lorsque les contacts sont unilatéraux, comme dans le cas de l'ondulation latérale du serpent arboricole, ce dernier peut jouer avec son λ_{stat} afin de préserver le signe de chaque composante de λ , faute de quoi il doit changer ses supports afin de supprimer les contraintes correspondantes de (13). Finalement, notons que dans [28], les dynamiques internes inverses (20) ont été étendues au cas des systèmes contenant des ddl internes passifs.

6 Implémentation pratique

Jusqu'à présent, le problème dynamique général énoncé dans la section 2 a été traité dans le cadre Lagrangien. Bien que l'approche lagrangienne soient adaptée à l'analyse et à la classification, le formalisme de Newton-Euler est préféré dès que l'on s'intéresse à résoudre les problèmes de la simulation rapide et du contrôle de la dynamique de la locomotion. Bien entendu, un tel modèle a le même contenu physique que le modèle Lagrangien. Cependant, il dérive d'une autre définition de l'espace de configuration du SMM, qui n'est plus celle de son fibré principal des configurations (3), mais plutôt $\mathcal{C} = G \times \cdots \times G$, où chaque copie de $G = \text{SE}(3)$ représente le groupe de configuration de chacun de ses corps constitutifs, considéré comme isolé dans la chaîne. Pour établir ce modèle, on peut appliquer les équations de Poincaré au Lagrangien réduit de chacun des corps ou plus simplement, on peut leur appliquer la loi de Newton et le théorème d'Euler du moment cinétique. Puisque les corps sont isolés, ils doivent être mathématiquement réassemblés par le modèle cinématique des articulations et le modèle prend la forme de l'ensemble suivant d'équations algèbro-différentielles avec $j = 0, 1, \dots, n_b$ et $n_b + 1$ le nombre de corps constituant le système :

$$\mathcal{M}_j \dot{\eta}_j = \text{ad}_{\eta_j}^\top (\mathcal{M}_j \eta_j) + f_{\text{ext},j} + f_j - \sum_{i/j=a(i)} \text{Ad}_{g_{i,j}}^\top f_i, \quad 21$$

$$g_j = g_i g_{i,j}, \quad 22$$

$$\eta_j = \text{Ad}_{g_{i,j}} \eta_i + A_j \dot{r}_j, \quad 23$$

$$\dot{\eta}_j = \text{Ad}_{g_{i,j}} \dot{\eta}_i + \zeta_j(\dot{r}_j, \ddot{r}_j), \quad 24$$

où $a(j)$ est l'indice du corps précédent le corps \mathcal{B}_j dans la chaîne arborescente du SMM, lorsqu'on la parcourt du corps de référence vers les extrémités de ses branches (en l'occurrence, a signifie "antécédent"). En raison de la topologie arborescente, la numérotation des corps dans un ordre croissant depuis le corps de référence \mathcal{B}_0 jusqu'aux extrémités des branches donne à cet ensemble d'équations une nature récursive par rapport à l'index des corps. Pour s'en convaincre, remarquons que connaissant l'évolution temporelle des positions, des vitesses et des accélérations articulaires $t \mapsto (r, \dot{r}, \ddot{r})(t)$ et externes $t \mapsto (g, \eta, \dot{\eta})(t) = (g_0, \eta_0, \dot{\eta}_0)(t)$, (22-24) peuvent être utilisés comme récurrences descendantes pour calculer $(g_j, \eta_j, \dot{\eta}_j)$, $j = 1, \dots, n_b$ à chaque étape d'une boucle temporelle, tandis que (21) peut être utilisé comme une récurrence ascendante sur les forces inter-segment pour calculer $(f_{n_b}, f_{n_b-1} \dots f_1)$, et au bout du compte, la force externe f_0 appliquée à \mathcal{B}_0 . Finalement, la projection des f_1, \dots, f_{n_b} sur l'axe de leurs articulations, donne les couples articulaires attendus. En définitive, ce simple algorithme résout, à la fois, les dynamiques inverses externe et interne. Lorsque l'on aborde le problème des

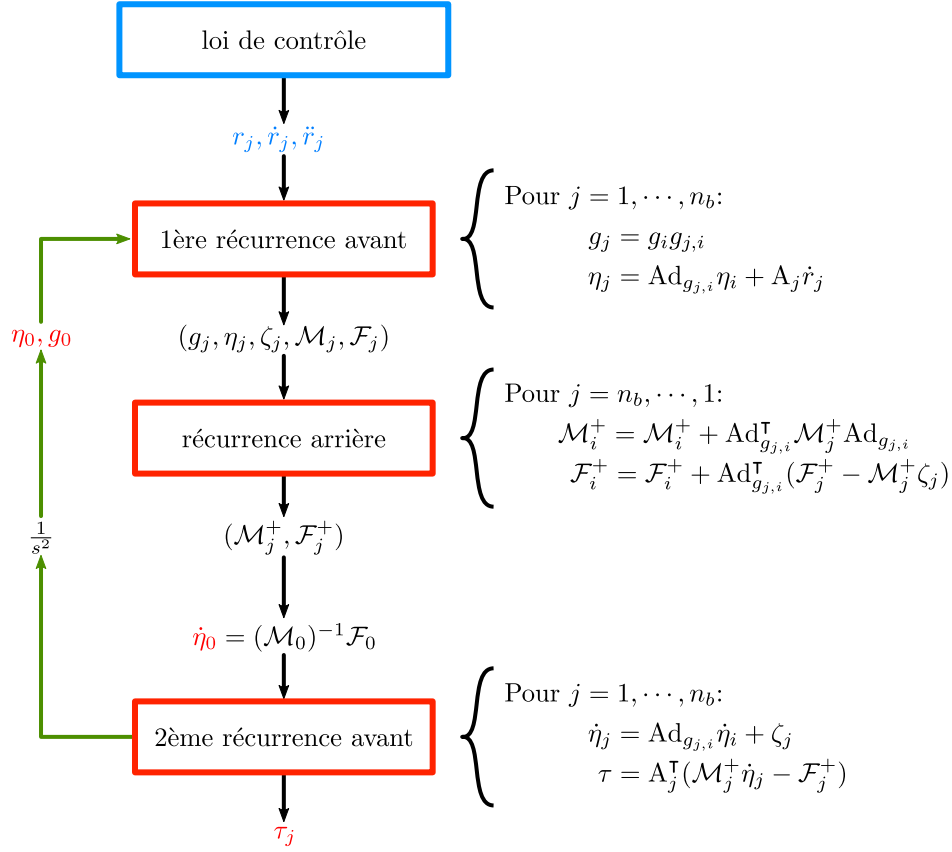


FIGURE 12 – Organigramme de l’algorithme basé sur la dynamique inverse de Newton-Euler pour un SMM arborescent (les entrées sont en bleu, les sorties sont de couleur rouge). \mathcal{M}_j^+ et \mathcal{F}_j^+ représentent les matrices d’inertie et les forces appliquées sur un corps rigide composé de tous les corps après le $j^{\text{ième}}$ corps, lorsque les articulations sont verrouillées dans leur configuration courante[69].

dynamiques interne inverse, et externe directe de la section 2, l’évolution temporelle de l’accélération d’ensemble $\dot{\eta}$ n’est plus connue mais doit être calculée par l’algorithme. La figure 12 présente l’organigramme de l’algorithme récursif qui résout ce problème pour tout SMM rigide non contraint, à structure arborescente, tel qu’étudié dans [24] pour les systèmes en chaîne ouverte. Dans ce second algorithme, les couples articulaires sont calculés avec une récurrence descendante tandis qu’une récurrence supplémentaire (appelée première récurrence ascendante) calcule itérativement les matrices \mathcal{M} et \mathcal{F} (ici noté \mathcal{M}_0^+ et \mathcal{F}_0^+) des dynamiques externes (9) à partir desquelles, l’accélération d’ensemble actuelle $\dot{\eta}$ (noté $\dot{\eta}_0$ dans l’algorithme) est elle-même calculée. Cet algorithme a été adapté au cas des systèmes contraints comme celui des serpents non-holonomes dans [25], et plus récemment aux systèmes contraints avec des ddl internes passifs [28]. Utilisée pour les calculs numériques, la formulation de Newton-Euler présente de nombreux avantages par rapport aux modèles de Lagrange. Premièrement, les équations (21-24) peuvent être écrites à la main sur une seule page alors que leurs homologues lagrangiennes (9) et (18) nécessitent de lourds calculs symboliques. Deuxièmement, elle peut être facilement implémentée sur un ordinateur grâce à de simples boucles sur les index des corps. Les algorithmes résultants sont rapides, et ont une complexité $o(n_b)$ (où n_b est le nombre total de corps), une caractéristique précieuse dans le cas des systèmes bio-inspirés, complexes par nature. Enfin, les modèles de Newton-Euler peuvent naturellement être généralisés au cas des SMM continus, comme nous allons le voir dans la section suivante.

7 Des systèmes discrets aux systèmes continus

Par souci de simplicité et jusqu'à nouvel ordre, nous limitons notre attention au cas des systèmes arborescents mono branches (à chaîne ouverte). Dans ce contexte, si l'on augmente le nombre de corps alors que la longueur (le long de la branche unique) de chacun d'entre eux diminue, le modèle des SMM discrets de la section 1 se change asymptotiquement en celui des SMM continus. La correspondance entre les systèmes discrets et continus est donnée dans le tableau 1. En accord avec notre problème de dynamique de départ, les ddl internes paramétrés par le champ de déformation ξ le long de l'axe vertébral X , sont ici régis par les fonctions temporelles $t \mapsto \xi(t)$, qui modélisent les déformations locales imposées par le contrôle ainsi que les contraintes internes imposées par la conception. Le modèle qui en résulte est celui des systèmes élancés continus rigides. Il est bien adapté à la modélisation des vertébrés hyper-redondants tels les serpents, ou les poissons, ou tout corps d'un animal ayant une forme continue contrôlée le long d'un axe dominant (l'axe vertébrale d'un poisson, le bord de fuite d'une aile d'insecte...). Qui plus est, moyennant de légères adaptations, ce modèle peut être utilisé pour modéliser des hydrostats allongés et mous, comme les vers ou les chenilles [26]. L'application du processus asymptotique du tableau 1 permet d'établir le modèle de Newton-Euler d'un SMM continu à chaîne ouverte sous la forme du système d'équations différentielles aux dérivées partielles (PDE) :

$$\mathcal{M}\dot{\eta} = \text{ad}_\eta^T(\mathcal{M}\eta) + f_{\text{ext}} + f' - \text{ad}_\xi^T(f) , \quad 25$$

$$g' = g\xi , \quad 26$$

$$\eta' = -\text{ad}_\xi(\eta) + \dot{\xi} , \quad 27$$

$$\dot{\eta}' = -\text{ad}_\xi(\eta) - \text{ad}_\xi(\dot{\eta}) + \ddot{\xi} . \quad 28$$

Comme dans le cas discret, ces équations (25) peuvent être déduites d'une extension des équations de Poincaré aux systèmes continus, appelées équations de Poincaré-Cosserat [12], ou en appliquant les théorèmes de Newton et d'Euler à chacune des sections isolées. Dans tous les cas, elles représentent la dynamique de la poutre Cosserat sur un espace de configuration défini comme un ensemble de courbes paramétrées par X dans le groupe G des configurations de ses sections rigides. Par exemple, dans le cas d'une poutre tridimensionnelle de longueur unitaire, \mathcal{C} est l'espace fonctionnel $\{g(\cdot) : X \in [0, 1] \mapsto g(X) \in \text{SE}(3)\}$. Les trois autres ensembles d'équations (26-28) sont des contraintes qui représentent le modèle des transformations, vitesses et accélérations le long du corps, en fonction du champ de déformation imposé ξ et de ses dérivés temporels ($\dot{\xi}, \ddot{\xi}$). De fait, nous pourrions ajouter à la table de correspondance 1, dans la colonne de gauche les équations (21-24), et dans celle de droite, les équations (25-28). La

SMM discret	SMM continu = poutre de Cosserat
corps rigide	section transversale
colonne vertébrale	fibre neutre
indice j d'un corps discret	label X d'une section de la poutre
coordonnée articulaire r_j	champ de déformation ξ
forces inter-corps f_j	champ de contrainte f

TABLE 1 – Correspondance asymptotique entre SMM discret et SMM continu.

généralisation de l'algorithme de la figure 12, des systèmes discrets aux systèmes continus (à chaîne ouverte) a reçu une solution dans [23] et a été utilisée pour étudier la nage des poissons [12, 70], la locomotion terrestre d'animaux allongés comme les serpents et les vers [26] et le vol stationnaire inspiré des insectes [71]. À titre d'illustration, certains de ces résultats sont présentés dans la figure 14. Cet algorithme, dont l'organigramme est affiché dans la figure 13, est

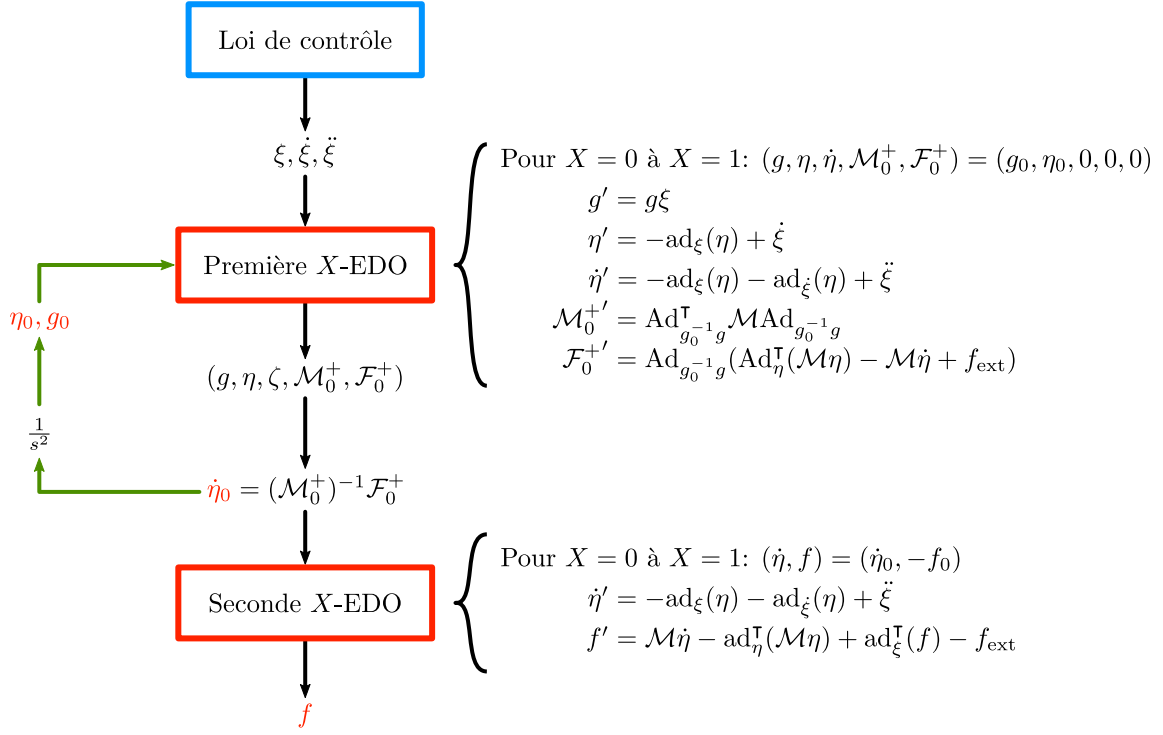


FIGURE 13 – Organigramme de l’algorithme de dynamique continue résolvant le problème dynamique décrit dans la section 2 pour un robot hyperredondant. Contrairement au cas discret, les deux premiers calculs récurrents de la figure 12 sont regroupés ici dans une équation différentielle ordinaire (EDO) unique : intégrée suivant X de $X = 0$ à $X = 1$. f_0 dénote la force externe appliquée sur la section $X = 0$

le pendant continu de celui de la figure 12, où les récurrences sur les indices des corps discrets sont remplacées par des équations différentielles ordinaires sur X , et où l’ensemble des forces entre chacun des corps (qui contiennent les couples de sortie τ), est remplacé par un champ de contraintes internes f , forçant (comme un ensemble de multiplicateurs de Lagrange le ferait), les évolutions temporelles imposées : $t \mapsto (\xi(t), \dot{\xi}(t), \ddot{\xi}(t))$, le long de l’axe des X . Enfin, en combinant les modèles discret et continu (21-24) et (25-28), nous pouvons élaborer le modèle de Newton-Euler d’une structure arborescente à branches continues, un modèle qui peut être appliqué aux robots mous inspirés d’hydrostats de topologie plus complexe tels les pieuvres et autres céphalopodes. Dans le même ordre d’idée, un tel modèle peut être utilisé pour décrire la dynamique des systèmes contenant des appendices compliants, comme nous allons le voir dans la section suivante.

8 Vers les systèmes compliants

Nous considérons ici le cas des systèmes contenant des organes compliants. Si la déformation est appliquée le long d’un axe privilégié d’un tel organe, on peut lui appliquer le modèle précédent des robots continus. Cependant, dans ce cas ξ n’est plus une fonction du temps forcée par le champ des multiplicateurs de Lagrange f , mais se trouve régie par une loi constitutive de la forme :

$$f = \mathcal{R}(X, \xi, \dot{\xi}) . \quad 29$$

Avec ces lois rhéologiques supplémentaires, le modèle (25-28) devient celui d’une poutre géométriquement exacte (Cosserat) [72].

Nota: Le terme "géométriquement exact" signifie ici que les déplacements de la fibre neutre de la poutre et les

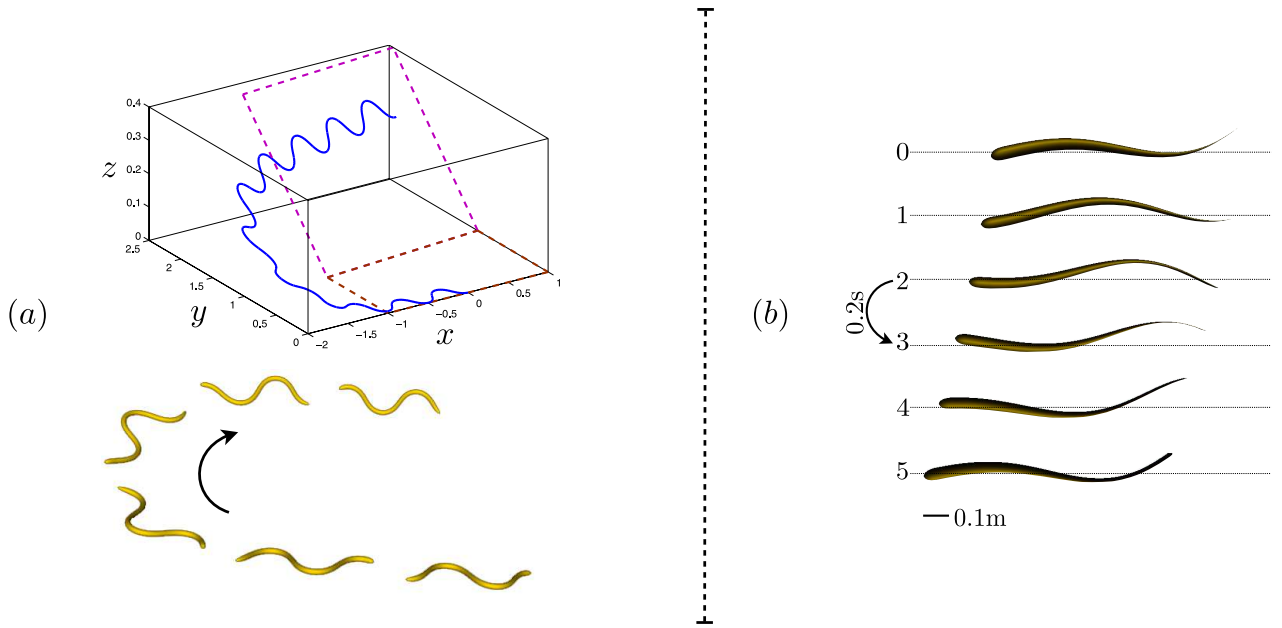


FIGURE 14 – (a) Manœuvre de virage d’un serpent continu en ondulation latérale 3D : trajectoire de la tête (a, haut) et instantanés (a, bas). (b) Nage grâce à sa nageoire caudale d’un poisson autopropulsé dans la théorie du corps allongé de grande amplitude de Lighthill [70]. Le serpent et le poisson sont modélisés par une poutre Cosserat à commande interne [26, 70] et simulés avec l’algorithme de la figure 13.

rotations de ses sections transversales sont modélisées de manière exacte, contrairement aux théories linéaires utilisées en résistance des matériaux.

En particulier, dans le cas d’un matériau hyper-élastique régi par la loi de Hook, il suffit d’adopter en lieu et place de (29), la forme simple suivante :

$$f = H(\xi - \xi_o) ,$$

qui transforme l’équation aux dérivées partielles (25) en un jeu d’équations non-linéaires, dites équations des poutres de Reissner [73]. Dans (25), H est un tenseur de dimension 6×6 modélisant la loi de Hook réduite de la poutre et $\xi_o = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^\top$ est la valeur de ξ quand la poutre est au repos, configuration où la poutre est supposée parfaitement droite. Dans le cas des poutres de section circulaire, ces équations prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \rho A \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \Omega \times V \right) = \frac{\partial N}{\partial X} + K \times N + N_{\text{ext}} , \\ \rho J \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega \times \rho J \Omega = \frac{\partial M}{\partial X} + K \times M + \Gamma \times N + M_{\text{ext}} . \end{cases}$$

À partir de ce modèle général, certaines des composantes scalaires de $f = (N^\top, M^\top)^\top$ peuvent s’apparentées à des multiplicateurs de Lagrange forçant des contraintes internes rigides comme celles qui transforment une poutre de Reissner en une poutre de Kirchhoff, ou en une poutre de Kirchhoff non extensible.

Nota: Les termes généraux de (25) prennent la forme particulière : $\mathcal{M} = \text{diag}(\rho A 1_{3 \times 3}, \rho J) = \text{diag}(\rho A, \rho A, \rho A, \rho I_\rho, \rho I, \rho I)$, $f_{\text{ext}} = (N_{\text{ext}}^\top, M_{\text{ext}}^\top)^\top$, $\xi = (\Gamma^\top, K^\top)^\top$, $\Gamma = R^\top(\partial p / \partial X)$, $K = R^\top(\partial R / \partial X)$ ($R(X)$ et $p(X)$ sont définis par (1) pour chaque section transversale de poutre X), et $H = \text{diag}(EA, GA, GA, GI_\rho, EI, EI)$ avec E et G les modules de Young et de Coulomb du matériau de la poutre, ρ sa densité, et A , I et I_ρ l’aire, le moment axial et polaire de la section de poutre.

À présent que le champ de contraintes régi par (29) est fonction de l’état courant, une fois

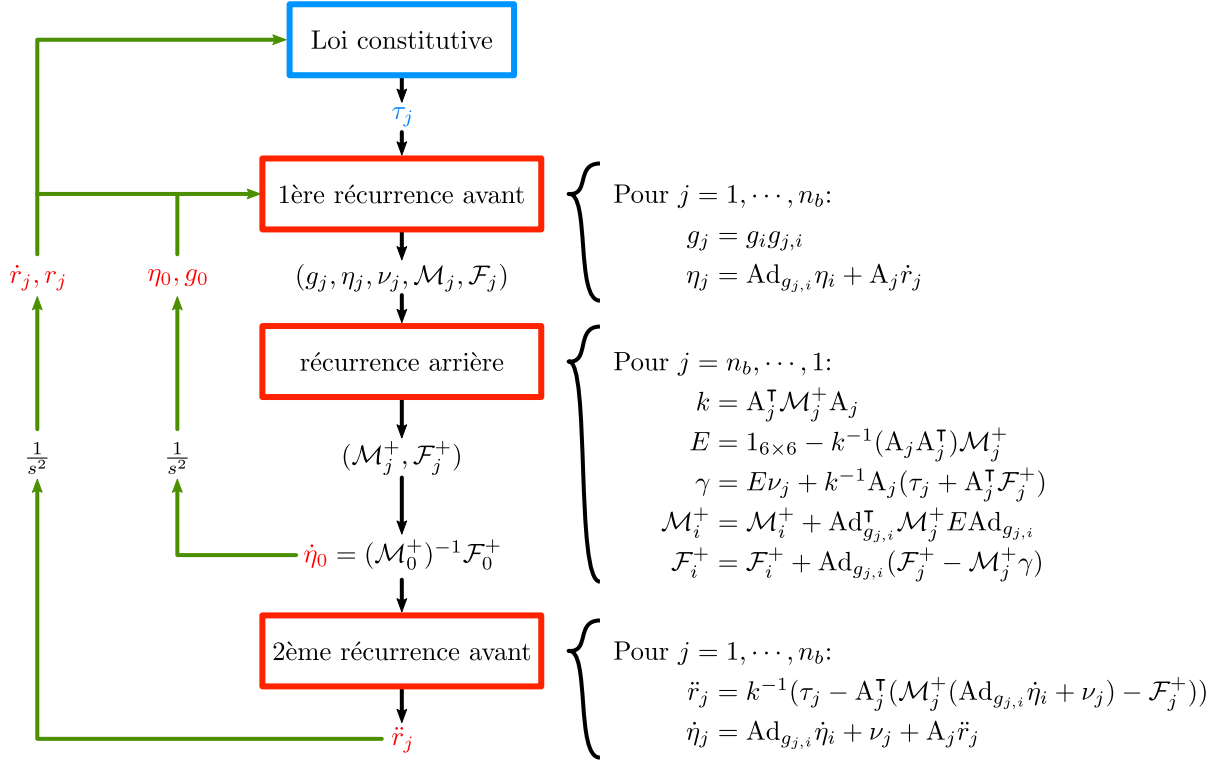


FIGURE 15 – Organigramme de l’algorithme basé sur la dynamique de Newton-Euler pour un SMM arborescent. On note $\zeta_j(\dot{r}_j, 0) = \nu_j$, tandis que les relations déformation-contrainte de (29) sont modélisées par des couples ressort-amortisseur qui sont imposés aux liaisons à chaque étape de la boucle de simulation [69].

introduit dans une boucle d’intégration temporelle, il définit des variables connues prenant la signification des entrées en couple dans un algorithme de dynamique directe. Idéalement, nous aimerions résoudre cette dynamique continue directe avec une version directe de l’algorithme des systèmes continus de la figure 13. Malheureusement, un tel algorithme n’a pu être obtenu jusqu’à présent. Dans [74], nous avons proposé une solution alternative basée sur la discrétisation préliminaire de la poutre en un ensemble de corps rigides auxquels est appliqué l’algorithme de la dynamique directe des SMM. Cet algorithme dont l’organigramme est schématisé sur la figure 15, a été illustré dans le cas du vol stationnaire [69], la nage passive d’un poisson mort [75] et plus récemment sur le robot Amphibot inspiré de l’anguille [27]. Quelques uns de ces résultats sont présentés sur la figure 16. Enfin, notons que du point de vue de la mécanique des milieux continus, dans l’approche Cosserat, la déformation des corps est mesurée par rapport à une configuration galiléenne fixe. En conséquence, pour gérer les transformations globales rigides finies, les mesures de la déformation sont non linéaires (et invariantes à gauche) et dans ce cas, en accord avec l’approche géométriquement exacte [76], les non-linéarités géométriques apparaissent via l’énergie de déformation. Alternativement, on peut adopter des configurations de référence mobiles suivant les corps constitutifs de la chaîne dans leur mouvement. C’est le choix adopté par l’approche dite du repère flottant dans laquelle les déformations de chaque corps sont mesurées par rapport à certains corps flottants rigides (et fictifs), qui suivent les corps réellement déformés [30]. Dans cette approche, les mesures de déformation sont généralement linéarisées et les champs de déplacement appliquant les corps flottants sur les corps déformés peuvent être approximés sur une base tronquée de modes dits supposés [77]. L’algorithmique de Newton-Euler peut être étendue dans cette approche, au cas des systèmes locomoteurs subissant de petites déformations [28, 74]. Tous ces algorithmes sont basés sur l’extension suivante du modèle de Newton-Euler des systèmes rigides discrets, établie dans [78] pour les

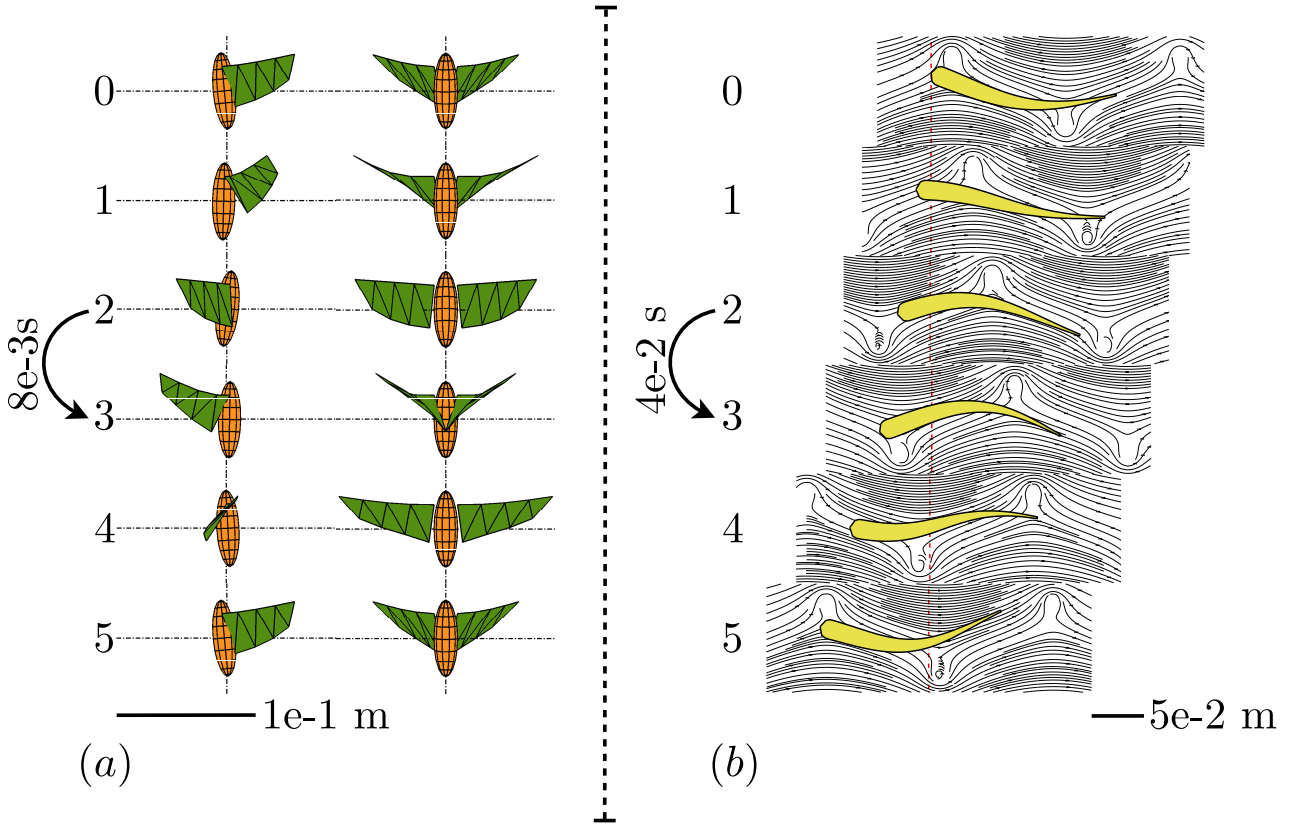


FIGURE 16 – Soft locomotion : Vol stationnaire (a), nage passive d’un poisson dans une allée de tourbillons de Von Karman (b). Les ailes du papillon et le corps du poisson sont modélisés comme des poutres Cosserat passives [69, 74] et simulés au moyen de l’algorithme présenté en figure 15.

liaisons ponctuelles :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_j & M_j^\top \\ M_j & m_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\eta}_j \\ \ddot{r}_{ej} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ad}_{\eta_j}^\top (\mathcal{M}_j \eta_j) + f_{\text{ext}} \\ Q_j + Q_{\text{ext}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_j - \sum_{i/j=a(i)} \text{Ad}_{g_{i,j}}^\top f_i \\ - \sum_{i/j=a(i)} \Phi_j^\top R_{g_{j,i}} f_i \end{pmatrix},$$

$$g_j = g_i g_{ei} g_{aj},$$

$$\eta_j = \text{Ad}_{g_{j,i}} \eta_i + R_{g_{j,i}} \Phi_i \dot{r}_{ei} + A_j \dot{r}_j,$$

$$\dot{\eta}_j = \text{Ad}_{g_{j,i}} \dot{\eta}_i + R_{g_{j,i}} \Phi_i \ddot{r}_{ei} + \zeta_j.$$

Sans entrer dans les détails de ce modèle, mentionnons qu’il a pour espace de configuration $\mathcal{C} = (\text{SE}(3) \times \mathbb{R}^{N_0}) \times \dots \times (\text{SE}(3) \times \mathbb{R}^{N_{n_b}})$ où N_k est le nombre de coordonnées modales utilisées pour décrire la déformation du $k^{\text{ième}}$ corps et n_b est le nombre total de liaisons. Notons également que le modèle ci-dessus a la même forme que sa version rigide (21-24), où tous les termes supplémentaires sont introduits par les coordonnées modales des corps souples réunis dans les vecteurs de coordonnées élastiques r_{ej} . Ce modèle a récemment été utilisé pour modéliser la dynamique des SMM possédants des appendices souples [28].

9 Conclusion

Dans cet article, nous avons rapidement passé en revue plusieurs aspects de la dynamique de la locomotion en bio-robotique. En partant des animaux et de leurs artefacts robotiques, nous avons montré qu’il est nécessaire de développer des outils méthodologiques pour concevoir, modéliser, contrôler et planifier le mouvement d’une nouvelle génération de robots possédant un

grand nombre de ddl (externes et/ou internes). Dans cette perspective, nous avons donné ici un aperçu de la modélisation Lagrangienne utilisant le point de vue de la mécanique géométrique. Une attention particulière a été accordée au problème de la classification des systèmes. Ce point de vue nous a permis de mettre en lumière qu'en dépit de leur apparente diversité, de nombreux modes de locomotion partagent des structures géométriques communes. Bien que qualitative, cette connaissance est utile pour résoudre les problèmes de locomotion puisqu'elle permet de produire des solutions générales et constitue un outil précieux pour guider l'intuition et concevoir des lois de commande. Cet effort de classification a été structuré par la résolution du problème dynamique consistant à calculer les mouvements nets (solution de la dynamique externe) d'un SMM ainsi que les couples internes associés (solution de la dynamique inverse interne) en ne connaissant uniquement que l'évolution des articulations internes. Bien que l'approche lagrangienne offre un point de vue synthétique général sur une large classe de systèmes multicorps, elle reste insuffisante en pratique. En particulier, lorsque le nombre de ddl internes augmente, les modèles lagrangiens et leurs algorithmes associés deviennent de plus en plus lourds et complexes à mettre en œuvre numériquement. Pour toutes ces raisons, nous avons présenté des résultats récents en locomotion bio-inspirée traités numériquement par la formulation de Newton-Euler de la robotique. Outre ses avantages numériques, cette alternative à la formulation lagrangienne nous a permis d'étendre notre discussion au cas des systèmes continus, puis mous. Dans ce dernier cas, l'approche de Newton-Euler continue se couple naturellement à la théorie géométriquement exacte des poutres Cosserat. Au bout du compte, cette formulation conduit à des algorithmes facilement programmables et rapides, capables de résoudre à la fois les dynamiques externes et inverses internes des systèmes discrets, continus et souples.

Pour en savoir plus

Le lecteur intéressé par la dynamique des poutres Cosserat pour la locomotion bio-inspirée peut se référer à [79] pour une vue d'ensemble sur le sujet. L'approche a été étendue aux coques [80] et appliquée à la propulsion des céphalopodes dans [81]. Pour ce qui est des systèmes contraints, l'approche précédente a été récemment appliquées aux systèmes non-holonomes dynamiques et illustrée sur le cas de la bicyclette 3D [82, 83]. Enfin, le lecteur intéressé par les aspects algorithmes de type Newton-Euler peut se référer à [84] où un unique algorithme est proposé pour résoudre la dynamique des système rigides et déformables dans l'approche du repère flottant. Notons que, ces travaux se sont déployés dans le contexte des thèses [85, 86, 87, 88].

Glossaire

ddl : degré de liberté.

SM : système multicorps.

SMM : système multicorps mobile.

Sigles, notations et symboles

Symbole	Description
t	temps
\mathcal{C}	espace des configurations
G	groupe de Lie de transformations rigides
\mathcal{S}	variétés des formes internes
SE(3)	groupe des transformations rigides dans l'espace tridimensionnel

$SO(3)$	groupe des rotations dans l'espace tridimensionnel
$g = (R, p)$	transformation homogène avec p le vecteur position et R la matrice rotation
$\eta = (V^\top, \Omega^\top)^\top$	torseur cinématique avec V et Ω les vitesses linéaire et angulaire dans le repère mobile
m, \mathcal{M}, M	matrices d'inerties des ddls internes, externes et de leur couplages
$\tilde{\mathcal{M}}$	matrice des masses virtuelles (celles du solide et du fluide)
$f_c, f_{\text{ext}}, f_{\text{inertielle}}$	torseur des forces de contraintes, extérieures et inertielles
\mathcal{F}	torseur des forces externes et inertielles appliqué au SMM vu dans son repère de référence
τ	vecteur des couples internes
A, B	matrice des contraintes cinématiques
\mathcal{A}	matrice de la forme locale d'une connexion
H	matrice dont les colonnes engendrent le noyau des contraintes cinématiques
λ	vecteur des forces de réactions (multiplicateurs de Lagrange)
X	coordonnées spatiale (abscisse vertébrale) d'une poutre Cosserat
ξ	torseur cinématique des taux de transformation spatiaux le long d'un poutre Cosserat

Références

- [1] M. H. Dickinson, C. T. Farley, R. J. Full, M. A. Koehl, R. Kram, and S. Lehman. How animals move : An integrative view. *Science*, 288(5463) :100–106, 2000.
- [2] S. Hirose. *Biologically inspired robots : Snake-like locomotors and manipulators*. Oxford Univ. Press, Oxford, 1993.
- [3] J. Gray and H. W. Lissmann. The kinetics of locomotion of the grass-snake. *Journal of Experimental Biology*, 26(4) :354–367, 1950.
- [4] D. L. Hu, J. Nirody, T. Scott, and M. J. Shelley. The mechanics of slithering locomotion. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2009.
- [5] C. Wright, A. Johnson, A. Peck, Z. McCord, A. Naaktgeboren, P. Gianfortoni, M. Gonzalez-Rivero, R. Hatton, and H. Choset. Design of a modular snake robot. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2609–2614, 2007.
- [6] P. Liljebäck, K. Y. Pettersen, O. Stavdahl, and J. T. Gravdahl. Experimental investigation of obstacle-aided locomotion with a snake robot. *IEEE Transactions on Robotics*, 27(4) :792–800, 2011.
- [7] R. L. Hatton and H. Choset. Generating gaits for snake robots by annealed chain fitting and keyframe wave extraction. In *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robots syst.*, IROS'09, pages 840–845, 2009.
- [8] M. S. Triantafyllou and G. S. Triantafyllou. An efficient swimming machine. *Scientific American*, 272(3) :64–70, 1995.
- [9] A. Crespi and A. J. Ijspeert. Amphibot II : An amphibious snake robot that crawls and swims using a central pattern generator. In *Proceedings of the 9th International Conference on Climbing and Walking Robots*, 2006.

- [10] H. Yamada, S. Chigisaki, M. Mori, K. Takita, K. Ogami, and S. Hirose. Development of amphibious snake-like robot ACM-R5. In *Proc. 36th Int. Symposium on Robotics*, 2005.
- [11] <https://www.youtube.com/watch?v=HfHRHoCBZCc>.
- [12] F. Boyer, M. Porez, and A. Leroyer. Poincaré-Cosserat equations for the Lighthill three-dimensional large amplitude elongated body theory : Application to robotics. *Journal of Nonlinear Science*, 20 :47–79, 2010.
- [13] R. J. Wood. Design, fabrication, and analysis of a 3DOF, 3cm flapping-wing MAV. *International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2007. IROS 2007. IEEE/RSJ*, pages 1576 – 1581, 2007.
- [14] G. De Croon, K. De Clercq, R. Ruijsink, and B. Remes. Design, aerodynamics, and vision-based control of the DelFly. *International Journal of Micro Air Vehicles*, 1(2) :71–98, 2009.
- [15] H. Liu. Integrated modeling of insect flight : From morphology, kinematics to aerodynamics. *Journal of Computational Physics*, 228(2) :439–459, 2009.
- [16] C. Richter and H. Lipson. Untethered hovering flapping flight of a 3D-printed mechanical insect. *Artificial Life*, 17(2) :73–86, 2011.
- [17] M. Cianchetti, A. Arienti, M. Follador, B. Mazzolai, P. Dario, and C. Laschi. Design concept and validation of a robotic arm inspired by the octopus. *Materials Science and Engineering : C*, 31(6) :1230 – 1239, 2011.
- [18] M. W. Hannan and I. D. Walker. Analysis and experiments with an elephant’s trunk robot. *Advanced Robotics*, pages 847–858, 2001.
- [19] F. Saunders, B. A. Trimmer, and J. Rife. Modeling locomotion of a soft-bodied arthropod using inverse dynamics. *Bioinspiration biomimetics*, 6(1) :016001, 2011.
- [20] H. Poincaré. *Œuvres. Tome VII. Masse fluides en rotation – Principes de mécanique analytique – Problème des trois corps*. Editions Jacques Gabay, 1996.
- [21] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2 edition, 1989.
- [22] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Westview Press, 2nd edition, 1994.
- [23] F. Boyer, M. Porez, and W. Khalil. Macro-continuous computed torque algorithm for a three-dimensional eel-like robot. *Robotics, IEEE Transactions on*, 22(4) :763–775, Aug. 2006.
- [24] W. Khalil, G. Gallot, and F. Boyer. Dynamic modeling and simulation of a 3-d serial eel like robot. *IEEE Trans on Sys, Man, and Cybernetics, Part C : Applications and Reviews*, 37(6) :1259–1268, 2007.
- [25] F. Boyer and S. Ali. Recursive inverse dynamics of mobile multibody systems with joints and wheels. *IEEE Transactions on Robotics*, 27(2) :215–228, April 2011.
- [26] F. Boyer, S. Ali, and M. Porez. Macro-continuous dynamics for hyper-redundant robots : application to kinematic locomotion bio-inspired by elongated body animals. *IEEE Transactions on Robotics*, 28(2) :303–317, 2012.

- [27] M. Porez, F. Boyer, and A. J. Ijspeert. Improved lighthill fish swimming model for bio-inspired robots - modelling, computational aspects and experimental comparisons. *International Journal of Robotics Research*, pages 1–34, 2014.
- [28] F. Boyer and A. Belkhiri. Reduced locomotion dynamics with passive internal dofs : Application to nonholonomic and soft robotics. *IEEE Transactions on Robotics*, 30(3) :578–592, 2014.
- [29] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Publish or Perish, Inc, Houston, Tex, 3rd ed edition, 1999.
- [30] J. R. Canavin and P. W. Likins. Floating Reference Frames for Flexible Spacecraft. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 14(12) :724–732, 1977.
- [31] R. M. Murray, Z. Li, and S. Sastry. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC Press, Boca Raton, 1994.
- [32] T. Frankel. *The Geometry of Physics. An Introduction*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1998.
- [33] G. Bimbard, D. Kolomenskiy, O. Bouteleux, J. Casas, and R. Godoy-Diana. Force balance in the take-off of a pierid butterfly : relative importance and timing of leg impulsion and aerodynamic forces. *Journal of Experimental Biology*, 216(18) :3551–3563, 2013.
- [34] J. T. Horstmann, P. Henningsson, A. L. Thomas, and R. J. Bomphrey. Wake development behind paired wings with tip and root trailing vortices : Consequences for animal flight force estimates. *PloS one*, 9(3) :e91040, 2014.
- [35] C. Chevallereau and Y. Aoustin. Optimal reference trajectories for walking and running of a biped robot. *Robotica*, 19 :557–569, 2001.
- [36] C. Ehresmann. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. *Colloque de Topologie, Bruxelles*, pages 29–55, 1950.
- [37] R. Coquereaux. *Espaces Fibrés et Connexions*. Centre de Physique Théorique de Luminy, Marseille, 3rd edition, 2002.
- [38] E. Cartan. *Lecons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Gauthier-Villars, Paris, 2nd edition, 1946.
- [39] A. M. Bloch, J. Baillieul, P. E. Crouch, J. E. Marsden, and D. Zenkov. *Nonholonomic Mechanics and Control*, volume 24 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, New York, 2015.
- [40] R. L. Hatton and H. Choset. Geometric motion planning : The local connection, Stokes’ theorem, and the importance of coordinate choice. *The International Journal of Robotics Research*, 30(8) :988–1014, 2011.
- [41] R. Montgomery. Gauge theory of the falling cat in dynamics and control of mechanical systems. *American Mathematical Society*, 1, 1993.
- [42] S. D. Kelly and R. M. Murray. Geometric phases and robotic locomotion. *J. Robotic Systems*, 12(6) :417–431, 1995.
- [43] J. P. Ostrowski and J. W. Burdick. The geometric mechanics of undulatory robotics locomotion. *Int. J. Rob. Res.*, 17(7) :683–701, 1998.

- [44] E. Shamma, H. Choset, and A. Rizzi. Natural gait generation techniques for principally kinematic mechanical systems. In *Proceedings of Robotics : Science and Systems*, Cambridge, USA, June 2005.
- [45] V. I. Arnold. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l’hydrodynamique des fluides parfaits. *Annales de l’Institut Fourier*, 16(1) :319–361, 1966.
- [46] N. G. Chetayev. Sur les équations de Poincaré. *Comptes rendus de l’Académie des Sciences de Paris*, 1927.
- [47] V. V. Rumyantsev. On the Poincaré and Chetayev equations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 62(4) :495–502, 1998.
- [48] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*, 2nd ed. Springer New York, 1999.
- [49] F. Boyer and D. Primault. The Poincaré-Chetayev equations and flexible multibody systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 69(6) :925 – 942, 2005.
- [50] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 3rd edition, 2001.
- [51] G. Birkhoff. *Hydrodynamics a Study in Logic, Fact, and Similitude*. Dover Publications, 1950.
- [52] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1932.
- [53] S. D. Kelly and R. M. Murray. The geometry and control of dissipative systems. In *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 981–986, 1996.
- [54] J. E. Marsden. *Lectures on Mechanics (London Mathematical Society Lecture Note Series)*, volume 174. Cambridge University Press, 1992.
- [55] E. Kanso, J. E. Marsden, C. W. Rowley, and J. B. Melli-Huber. Locomotion of articulated bodies in a perfect fluid. *Journal of Nonlinear Science*, 15(4) :255–289, August 2005.
- [56] J. B. Melli, C. W. Rowley, and D. S. Rufat. Motion planning for an articulated body in a perfect planar fluid. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 5(4) :650–669, 2006.
- [57] R. L. Hatton, L. J. Burton, A. E. Hosoi, and H. Choset. Geometric maneuverability with applications to low Reynolds number swimming. In *International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 3893 –3898, sept. 2011.
- [58] A. Shapere and F. Wilczek. Efficiencies of self-propulsion at low Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 198 :587–599, 1989.
- [59] E. M. Purcell. Life at low reynolds number. *American Journal of Physics*, 45(1) :3–11, 1977.
- [60] E. Kanso. Swimming due to transverse shape deformations. *Journal of Fluid Mechanics*, 631 :127–148, 2009.
- [61] U. K. Müller, B. L. E. van den Heuvel, E. J. Stamhuis, and J. J. Videler. Fish foot prints : morphology and energetics of the wake behind a continuously swimming mullet (*chelon labrosus risso*). *Journal of Experimental Biology*, 200(22) :2893–2906, November 1997.

- [62] U. K. Müller, J. Smit, E. J. Stamhuis, and J. J. Videler. How the body contributes to the wake in undulatory fish swimming. *Journal of Experimental Biology*, 204(16) :2751–2762, August 2001.
- [63] M. S. Triantafyllou, G. S. Triantafyllou, and D. K. P. Yue. Hydrodynamics of fishlike swimming. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 32(1) :33–53, 2000.
- [64] M. H. Dickinson, F. O. Lehmann, and S. P. Sane. Wing rotation and the aerodynamic basis of insect flight. *Science*, 284(5422) :1954–1960, 1999.
- [65] D. N. Beal, F. S. Hover, M. S. Triantafyllou, J. C. Liao, and G. V. Lauder. Passive propulsion in vortex wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, 549 :385–402, February 2006.
- [66] J. P. Ostrowski. Computing reduced equations for robotic systems with constraints and symmetries. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15(1) :111–123, Feb 1999.
- [67] J. W. Grizzle, C. Chevallereau, A. D. Ames, and R. W. Sinnet. 3d bipedal robotic walking : Models, feedback control, and open problems. *IFAC Proceedings Volumes*, 43(14) :505–532, 2010. 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems.
- [68] C. Chevallereau, G. Bessonnet, G. Abba, and Y. Aoustin. *Bipedal Robots : Modeling, Design and Walking Synthesis*. Wiley-ISTE, 2009.
- [69] M. Porez, F. Boyer, and A. Belkhiri. A hybrid dynamic model for bio-inspired robots with soft appendages - application to a bio-inspired flexible flapping-wing micro air vehicle. In *Submitted to IEEE International Conference on Robotics and Automation, (ICRA'2014)*, pages 1–8, September 2013.
- [70] F. Candelier, F. Boyer, and A. Leroyer. Three-dimensional extension of Lighthill’s large-amplitude elongated-body theory of fish locomotion. *Journal of Fluid Mechanics*, 674 :196–226, 2011.
- [71] A. Belkhiri, M. Porez, and F. Boyer. A hybrid dynamic model of an insect-like mav with soft wings. In *proceeding of IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, (ROBIO'2012)*, pages 108–115, December 2012.
- [72] J. C. Simo. A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I : Formulation and optimal parametrization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 72 :267–304, 1989.
- [73] E. Reissner. On a one-dimensional large displacement finite-strain theory. *Stud. in Applied Mathematics*, L11(2) :87–95, 1973.
- [74] F. Boyer, M. Porez, A. Belkhiri, and A. Hunt. Locomotion dynamics for bio-inspired robots with soft appendages : application to hovering flight and passive swimming. *Submitted to IEEE Transactions on Robotics*, September 2013.
- [75] F. Candelier, M. Porez, and F. Boyer. Note on the swimming of an elongated body in a non-uniform flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 716 :616–637, 2013.
- [76] J. C. Simo and L. Vu-Quoc. On the dynamics in space of rods undergoing large motions – a geometrically exact approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66(2) :125 – 161, 1988.
- [77] L. Meirovitch. *Methods of Analytical Dynamics*. McGraw-Hill, New York, 1970.

- [78] F. Boyer and P. Coiffet. Generalization of Newton-Euler model for flexible manipulators. *Journal of Robotic Systems*, 1(13) :11–24, 1996.
- [79] F. Boyer, M. Porez, F. Morsli, and Y. Morel. Locomotion dynamics for bio-inspired robots with soft appendages : Application to flapping flight and passive swimming. *Journal of Nonlinear Science*, 27(4) :1121–1154, Aug 2017.
- [80] F. Boyer and F. Renda. Poincaré’s equations for cosserat media : Application to shells. *Journal of Nonlinear Science*, 27(1) :1–44, Feb 2017.
- [81] F. Renda, M. Cianchetti, H. Abidi, J. Dias, and L. Seneviratne. Screw-based modeling of soft manipulators with tendon and fluidic actuation. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 9(4) :041012–041012–8, May 2017.
- [82] J. Mauny, M. Porez, and F Boyer. Symbolic dynamic modelling of locomotion systems with persistent contacts - application to the 3d bicycle. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1) :7598 – 7605, 2017. 20th IFAC World Congress.
- [83] F. Boyer, M. Porez, and J. Mauny. Reduced dynamics of the non-holonomic whipple bicycle. *Journal of Nonlinear Science*, 28(3) :943–983, Jun 2018.
- [84] W. Khalil, F. Boyer, and F. Morsli. General dynamic algorithm for floating base tree structure robots with flexible joints and links. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 9(3) :031003–031003–13, March 2017.
- [85] M. Porez. *Modèle dynamique analytique de la nage tridimensionnelle anguilliforme pour la robotique*. Thèse, Université de Nantes, September 2007.
- [86] S. Ali. *Newton-Euler approach for bio-robotics locomotion dynamics : from discrete to continuous systems*. Thèse, Ecole des Mines de Nantes, December 2011.
- [87] A. Belkhiri. *Dynamics modeling of compliant locomotion : Application to flapping flight bio-inspired by insects*. Thèse, Ecole des Mines de Nantes, October 2013.
- [88] J. Mauny. *Modélisation dynamique des systèmes non-holonomes intermittents - Application à la bicyclette*. Thèse, École Nationale Supérieure Mines-Telecom Atlantique Bretagne Pays de la Loire, 2018.