



HAL
open science

Un nouveau symbole mathématique : la termirielle

Claude-Alexandre Simonetti

► **To cite this version:**

Claude-Alexandre Simonetti. Un nouveau symbole mathématique : la termirielle. 2020. hal-02550460v3

HAL Id: hal-02550460

<https://hal.science/hal-02550460v3>

Preprint submitted on 16 May 2020 (v3), last revised 3 Jun 2020 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un nouveau symbole mathématique : la termirielle

Claude-Alexandre Simonetti^{1,2,3}

¹LPC Caen

²EAMEA Cherbourg

³ENSICAEN

(Dated: 16 mai 2020)

L'appréhension du dénombrement et des probabilités nécessite un état d'esprit particulier que j'ai pu difficilement acquérir, et que n'ont pas tous les scientifiques. Issu de l'étude des coefficients binomiaux, le nouveau symbole mathématique qu'est la termirielle vise donc à présenter le dénombrement de manière plus pédagogique, pour les étudiantes et étudiants scientifiques qui auraient du mal à appréhender cette discipline. De plus, la termirielle pourrait voir des applications dans d'autres disciplines telles que l'informatique à titre d'exemple.

I. DE L'ÉTUDE DES COEFFICIENTS BINOMIAUX

A. Rappel sur les coefficients binomiaux

Dans un ensemble de n éléments, le nombre de combinaisons de parties de p éléments s'exprime de la manière suivante :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n-p)!} \quad (1)$$

Avec $\binom{n}{p}$ le coefficient binomial, $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et $p \leq n$. Quant au point d'exclamation issu de l'équation (1), il s'agit de la factorielle, qui se définit ainsi, pour mémoire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ n! &= \prod_{i=1}^n i \end{aligned} \quad (2)$$

Pour $n = 0$, on a, par définition : $0! = 1$.

B. De la factorielle à la termirielle

La termirielle, quant à elle, se définit comme suit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} n_+! &= n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 \\ n_+! &= \sum_{i=1}^n i \end{aligned} \quad (3)$$

Le symbole de la termirielle ressemble à celui de la factorielle, à la différence près que le point (\cdot) du point d'interrogation, pouvant évoquer une multiplication, est remplacé par un signe "plus" ($+$). En effet, au lieu d'y multiplier des facteurs – factorielle – on y additionne des termes – d'où le nom de termirielle. Jusque là, les choses semblent assez triviales. Cependant, comme la

termirielle correspond à la somme des n termes d'une suite arithmétique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de premier terme $U_1 = 1$ et de raison $r = 1$, on y remarque une première chose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n_+! = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{n-1} \quad (4)$$

Nous y reviendrons ultérieurement, lorsque nous introduirons une termirielle "généralisée".

C. Cheminement intellectuel

Initialement, je me questionnais sur l'étude du rayonnement de corps noir de Max Planck. Dans ce contexte, supposons que j'aie n particules que je dois remplir dans 2 niveaux discrets d'énergie qui sont fixés par la mécanique quantique. Supposons que le premier niveau d'énergie m_1 puisse accueillir p particules, et que le second (m_2) puisse accueillir $(n-p)$ particules, le nombre de combinaisons possibles est le suivant, conformément à l'équation (1) :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n-p)!} \quad (5)$$

Commençons par un exemple simple : avec $n = 5$ et $p = 2$. La figure 1 tente de retracer le cheminement intellectuel vers la termirielle. On y voit le niveau d'énergie m_1 contenant $p = 2$ particules, avec toutes les façons de le remplir, pour les particules numérotées de 1 à 5. La façon dont a été organisé le dénombrement permet de reconstruire la termirielle. L'on rappelle que dans notre cas de figure, il s'agit d'un tirage non ordonné sans remise, l'ordre des numéros des particules n'a pas d'importance : ainsi, les tirages $\{1\ 2\}$ et $\{2\ 1\}$ ne sont comptés qu'une fois. Au final, on a : $\binom{5}{2} = 4_+! = 10$.

Complexifions légèrement les choses, avec $n = 5$ et $p = 3$. En termes de coefficients binomiaux, on a bien évidemment l'égalité suivante : $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$, le résultat est le même que pour celui de l'exemple précédent. Mais voyons, à la figure 2, le nouveau schéma arborescent.

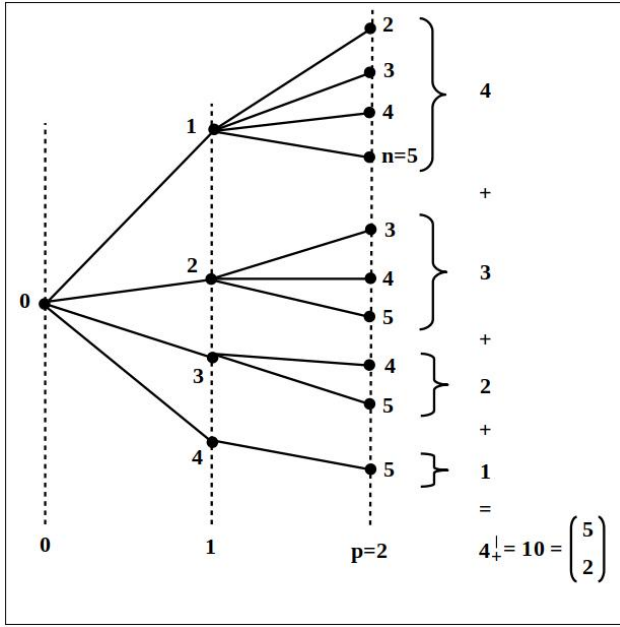


FIGURE 1. Cette figure représente le cheminement intellectuel permettant de passer du coefficient binomial $\binom{5}{2}$ à la termirielle de 4, au moyen d'une arborescence classique. Ici, seul le niveau d'énergie m_1 est représenté, ce qui est suffisant pour notre dénombrement, étant donné que l'on n'a que 2 niveaux d'énergie au total.

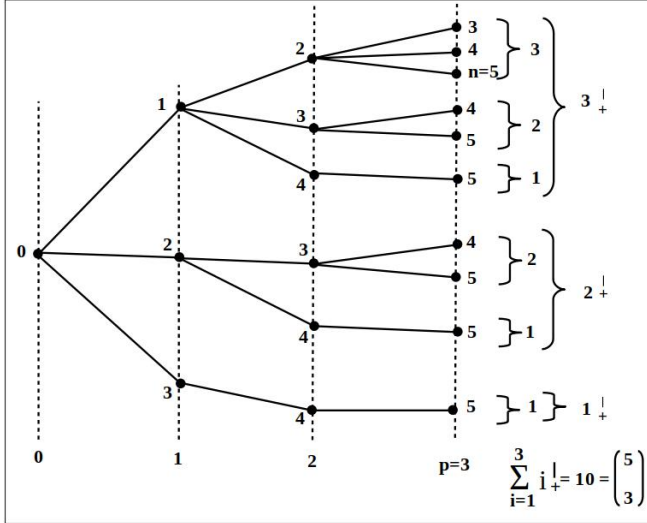


FIGURE 2. Cette figure représente le cheminement intellectuel permettant de passer du coefficient binomial $\binom{5}{3}$ à une somme de termirielles. À partir de cet exemple, une sorte de "termirielle seconde", on va pouvoir généraliser à la "termirielle troisième", "quatrième", etc.

On y remarque une sorte de "termirielle de termirielles", que l'on pourrait écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} n \downarrow_+^{(2)} &= n \downarrow_+ + (n-1) \downarrow_+ + \dots + 3 \downarrow_+ + 2 \downarrow_+ + 1 \downarrow_+ \\ n \downarrow_+^{(2)} &= \sum_{k=1}^n k \downarrow_+ = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k i = \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2!} \end{aligned} \quad (6)$$

$$n \downarrow_+^{(2)} = \binom{n+2}{3} = \binom{n+2}{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \quad (7)$$

Le passage de (6) à (7) se démontre par récurrence. En effet, en admettant que la proposition $P(n)$ suivante est vraie :

$$n \downarrow_+^{(2)} = \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \quad (8)$$

On a, pour $P(1)$:

$$\begin{aligned} 1 \downarrow_+^{(2)} &= \sum_{k=1}^1 \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 \\ \binom{3}{3} &= \frac{1(1+1)(1+2)}{3!} = 1 \end{aligned}$$

Et, pour $P(n+1)$:

$$\begin{aligned} (n+1) \downarrow_+^{(2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + 3 \frac{(n+1)(n+2)}{6} \\ (n+1) \downarrow_+^{(2)} &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} \end{aligned} \quad (9)$$

CQFD.

On va donc pouvoir généraliser à des termirielles "p-èmes".

II. GÉNÉRALISATION DE LA TERMIRIELLE

A. La termirielle p-ième

Naturellement, la termirielle "p-ième" se définira comme suit, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$n \underset{+}{\uparrow}^{(p)} = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^m \dots \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^j i \quad (10)$$

$$n \underset{+}{\uparrow}^{(p)} = \sum_{k=1}^n k \underset{+}{\uparrow}^{(p-1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{p!} \prod_{i=0}^{p-1} (k+i) \quad (11)$$

$$n \underset{+}{\uparrow}^{(p)} = \binom{n+p}{p+1} = \binom{n+p}{n-1} \quad (12)$$

$$n \underset{+}{\uparrow}^{(p)} = \frac{1}{(p+1)!} \prod_{i=0}^p (n+i) \quad (13)$$

Avec, pour l'équation (10), un nombre de symboles *sigma* (\sum) égal à p .

Pour $p = 0$, on peut définir la termirielles "0-ième" comme suit :

$$n \underset{+}{\uparrow}^{(0)} = n = \binom{n}{1}$$

La démonstration du passage de (11) à (12) (ou de (11) à (13)) se fait par récurrence, de la même manière que précédemment. En effet, en admettant que la proposition $P(n)$ suivante est vraie :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{p!} \prod_{i=0}^p (k+i) = \frac{1}{(p+1)!} \prod_{i=0}^p (n+i) \quad (14)$$

On a, pour $P(1)$:

$$\begin{aligned} 1 \underset{+}{\uparrow}^{(p)} &= \frac{1}{p!} \prod_{i=0}^{p-1} (1+i) = \frac{p!}{p!} = 1 \\ \frac{1}{(p+1)!} \prod_{i=0}^p (1+i) &= \frac{(p+1)!}{(p+1)!} = 1 \end{aligned} \quad (15)$$

Et, pour $P(n+1)$:

$$\begin{aligned} (n+1) \underset{+}{\uparrow}^{(p)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{p!} \prod_{i=0}^{p-1} (k+i) + \frac{1}{p!} \prod_{i=0}^{p-1} (n+1+i) \\ &= \frac{1}{(p+1)!} \prod_{i=0}^p (n+i) + \frac{(p+1)}{(p+1)!} \prod_{i=1}^p (n+i) \\ &= \frac{(n+p+1)}{(p+1)!} \prod_{i=1}^p (n+i) \\ (n+1) \underset{+}{\uparrow}^{(p)} &= \frac{1}{(p+1)!} \prod_{i=1}^{p+1} (n+i) = \binom{n+p+1}{p+1} \end{aligned} \quad (16)$$

CQFD.

B. Formule de Pascal

À l'image de la formule de Pascal, que l'on rappelle ci-dessous :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Il est possible de l'adapter aux termirielles, comme suit :

$$(n+1) \underset{+}{\uparrow}^{(p)} + (n) \underset{+}{\uparrow}^{(p+1)} = (n+1) \underset{+}{\uparrow}^{(p+1)}$$

III. APPLICATIONS PRATIQUES

A. Complexité en informatique

En informatique, la termirielles peut être utilisée pour calculer rapidement la complexité de certains programmes informatiques comportant des boucles "for" imbriquées de la manière qui va suivre. En prenant par exemple 4 boucles "for" imbriquées, avec[1] :

- i allant de 1 à n=100;
- j allant de 1 à i;
- k allant de 1 à j;
- l allant de 1 à k.

La complexité sera de :

$$100 \underset{+}{\uparrow}^{(4-1)} = \binom{100+3}{3+1} = \binom{103}{4} = \binom{103}{99} = 4\,421\,275$$

Soit environ 4,4 millions d'opérations.

Plus généralement, pour $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, et en se référant à l'équation (13), la complexité de ce genre de

programmes sera en $n \underset{+}{\uparrow}^{(p-1)} = \Theta(n^p)$.

B. Aspect pseudo-fractal

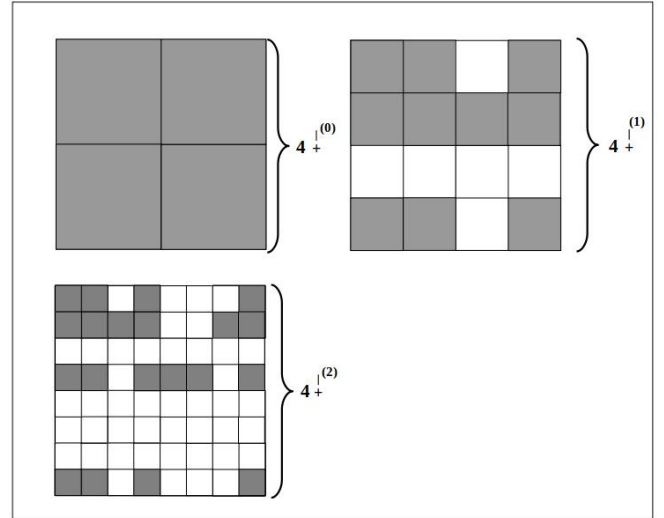


FIGURE 3. Cette figure tente de convertir la termirielles "p-ième" de 4 en figures fractales, pour $p=0$, $p=1$ et $p=2$. Les carrés grisés sont les seuls comptabilisés.

La figure 3 tente de convertir la termirielle “p-ième” de 4 en figures fractales, pour p=0, p=1 et p=2. Les carrés grisés sont les seuls comptabilisés. Par exemple,

(2)
pour $4 \begin{smallmatrix} | \\ + \end{smallmatrix}$, 20 carrés sont grisés, ce qui correspond à

(2)
 $4 \begin{smallmatrix} | \\ + \end{smallmatrix} = 20$. À chaque incrémentation de p, le côté de chaque carré est divisé par 2, et l’on reproduit les mêmes schémas de base :

- $4 \begin{smallmatrix} | \\ + \end{smallmatrix}$ lorsque les 4 carrés précédents sont grisés ;
- $3 \begin{smallmatrix} | \\ + \end{smallmatrix}$ lorsque 3 carrés précédents sont grisés ;
- $2 \begin{smallmatrix} | \\ + \end{smallmatrix}$ lorsque 2 carrés précédents sont grisés ;
- $1 \begin{smallmatrix} | \\ + \end{smallmatrix}$ lorsqu’un seul carré précédent est grisé.

Cependant, en calculant la dimension D de Hausdorff de la présumée fractale, on s’aperçoit que cette dernière est variable, et tend vers 2 lorsque p tend vers l’infini. En effet, soit a le côté de chaque carré correspondant au rang p. La surface totale S_p des carrés grisés sera le nombre de carrés grisés multiplié par la surface a^2 d’un carré :

$$S_p = a^2 \cdot n \begin{smallmatrix} | \\ + \end{smallmatrix}^{(p)} = a^2 \cdot \frac{1}{(p+1)!} \prod_{i=0}^p (n+i)$$

Quant à la surface S_{p-1} des carrés grisés correspondant au rang (p - 1), pour un carré de côté deux fois plus grand :

$$S_{p-1} = 4a^2 \cdot n \begin{smallmatrix} | \\ + \end{smallmatrix}^{(p-1)} = 4a^2 \cdot \frac{1}{(1)!} \prod_{i=0}^{p-1} (n+i)$$

Ce qui donne, pour $p > 0$:

$$\frac{S_{p-1}}{S_p} = 4 \cdot \frac{p+n}{p+1} = 4 \cdot \frac{1+n/p}{1+1/p}$$

Au final, le rapport des surfaces, lorsque p tend vers l’infini, tend vers 4 :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{S_{p-1}}{S_p} = 4$$

Ce qui donne une dimension de D de Hausdorff de 2 lorsque p tend vers l’infini, étant donné que $2^D = 4$. Ainsi au vu du caractère variable de la dimension D, il ne semblerait pas que l’on puisse obtenir, rigoureusement parlant, de fractales en employant les termirielles.

IV. CONCLUSION

La termirielle est un symbole qui peut aider les étudiants en sciences à mieux appréhender les probabilités. Il pourrait également avoir une certaine utilité dans des disciplines qui échappent encore à cette pré-publication.

-
- [1] À l’instar de l’algorithme de tri à bulle qui comporte 2 boucles imbriquées, quant à lui.
[2] B. Pascal, *Traité du triangle arithmétique* (Arvensa Editions, 2019).

- [3] *ISO 80000-2 :2009(E), Quantities and units* (International Organization for Standardization, 2009).