



HAL
open science

Un nouveau symbole mathématique : la termirielle

Claude-Alexandre Simonetti

► **To cite this version:**

Claude-Alexandre Simonetti. Un nouveau symbole mathématique : la termirielle. 2020. hal-02550460v4

HAL Id: hal-02550460

<https://hal.science/hal-02550460v4>

Preprint submitted on 3 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un nouveau symbole mathématique : la termirielle

Claude-Alexandre Simonetti^{1,2,3}

¹*LPC Caen*

²*EAMEA Cherbourg*

³*ENSICAEN*

(Dated: 3 juin 2020)

L'appréhension du dénombrement et des probabilités nécessite un état d'esprit particulier. Issu de l'étude des coefficients binomiaux, le nouveau symbole mathématique qu'est la termirielle, qui se réfère aux nombres r -topiques, vise donc tout d'abord à présenter le dénombrement de manière plus pédagogique, pour les étudiantes et étudiants scientifiques qui auraient du mal à appréhender cette discipline. De plus, il est possible d'obtenir des identités remarquables à partir de ce symbole et de les généraliser pour obtenir une sorte de "binôme de Newton" propre aux termirielles. Enfin, la termirielle pourrait voir des applications dans d'autres disciplines telles que l'informatique à titre d'exemple.

I. DE L'ÉTUDE DES COEFFICIENTS BINOMIAUX

A. Rappel sur les coefficients binomiaux

Dans un ensemble de n éléments, le nombre de combinaisons de parties de p éléments s'exprime de la manière suivante :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n-p)!} \quad (1)$$

Avec $\binom{n}{p}$ le coefficient binomial, $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et $p \leq n$. Quant au point d'exclamation issu de l'équation (1), il s'agit de la factorielle, qui se définit ainsi, pour mémoire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ n! &= \prod_{i=1}^n i \end{aligned} \quad (2)$$

Pour $n = 0$, on a, par définition : $0! = 1$.

B. De la factorielle à la termirielle

La termirielle, quant à elle, se définit comme suit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} n_+! &= n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 \\ n_+! &= \sum_{i=1}^n i \end{aligned} \quad (3)$$

On appelle cela un nombre triangulaire d'ordre n , conformément à la référence [1]. Le symbole de la termirielle ressemble à celui de la factorielle, à la différence près que le point (\cdot) du point d'interrogation, pouvant évoquer une multiplication, est remplacé par un signe "plus" (+). En effet, au lieu d'y multiplier des facteurs – factorielle – on y additionne des termes – d'où le nom de termirielle. Jusque là, les choses semblent assez triviales. Cependant, comme la termirielle correspond à la somme des n termes d'une suite arithmétique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de premier terme $U_1 = 1$ et de raison $r = 1$, on y remarque une première chose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n_+! = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{n-1} \quad (4)$$

Nous y reviendrons ultérieurement, lorsque nous introduirons une termirielle "généralisée".

C. Identité remarquable

Il est possible d'obtenir une sorte d'identité remarquable. En effet, avec $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$:

$$\begin{aligned} (n+m)_+! &= \frac{(n+m) \cdot (n+m+1)}{2} \\ (n+m)_+! &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{2 \cdot n \cdot m}{2} + \frac{m \cdot (m+1)}{2} \\ (n+m)_+! &= n_+! + n \cdot m + m_+! \end{aligned} \quad (5)$$

D. Cheminement intellectuel

Initialement, je me questionnais sur l'étude du rayonnement de corps noir de Max Planck. Dans ce contexte, supposons que j'aie n particules que je dois remplir dans 2 niveaux discrets d'énergie qui sont fixés par la mécanique quantique. Supposons que le premier niveau d'énergie m_1 puisse accueillir p particules, et que le second (m_2) puisse accueillir $(n - p)$ particules, le nombre de combinaisons possibles est le suivant, conformément à l'équation (1) :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n - p)!} \tag{6}$$

Commençons par un exemple simple : avec $n = 5$ et $p = 2$. La figure 1 tente de retracer le cheminement intellectuel vers la termirielle. On y voit le niveau d'énergie m_1 contenant $p = 2$ particules, avec toutes les façons de le remplir, pour les particules numérotées de 1 à 5. La façon dont a été organisé le dénombrement permet de reconstruire la termirielle. L'on rappelle que dans notre cas de figure, il s'agit d'un tirage non ordonné sans remise, l'ordre des numéros des particules n'a pas d'importance : ainsi, les tirages $\{1\ 2\}$ et $\{2\ 1\}$ ne sont comptés qu'une fois. Au final, on a : $\binom{5}{2} = 4^{\downarrow}_+ = 10$.

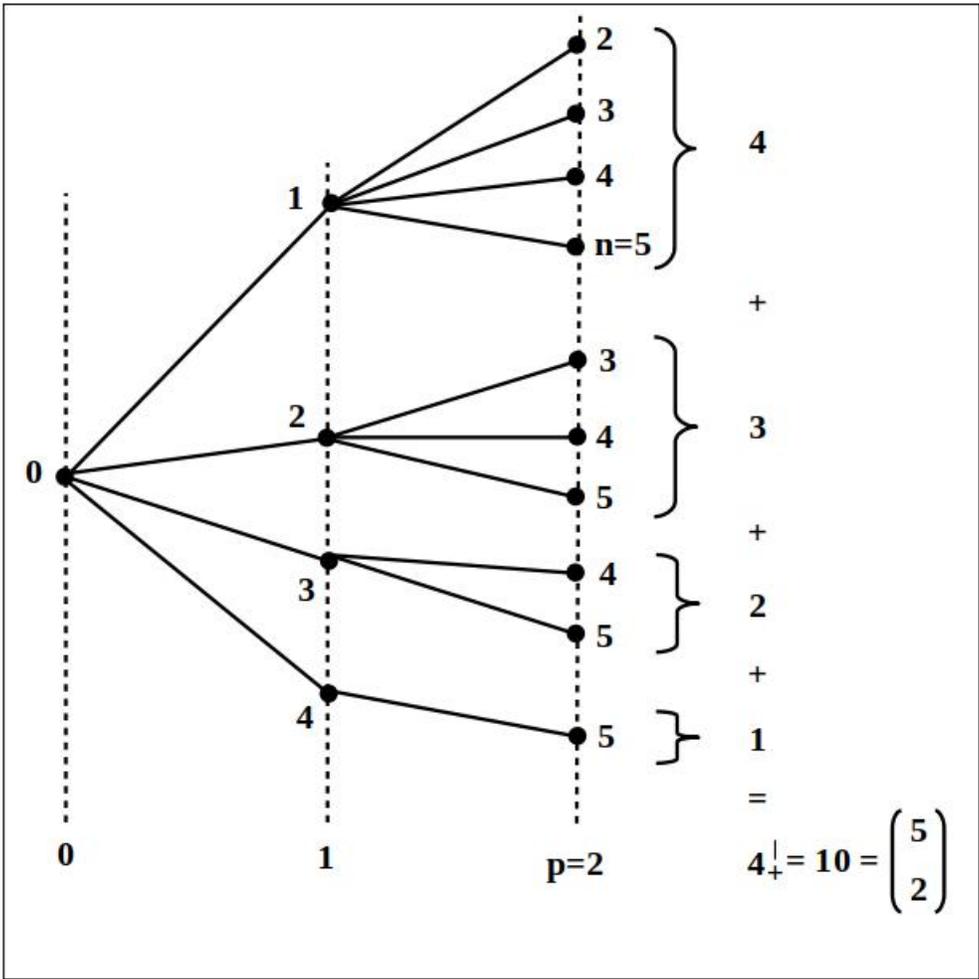


FIGURE 1. Cette figure représente le cheminement intellectuel permettant de passer du coefficient binomial $\binom{5}{2}$ à la termirielle de 4, au moyen d'une arborescence classique. Ici, seul le niveau d'énergie m_1 est représenté, ce qui est suffisant pour notre dénombrement, étant donné que l'on n'a que 2 niveaux d'énergie au total.

Complexifions légèrement les choses, avec $n = 5$ et $p = 3$. En termes de coefficients binomiaux, on a bien évidemment l'égalité suivante : $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$, le résultat est le même que pour celui de l'exemple précédent. Mais voyons, à la figure 2, le nouveau schéma arborescent.

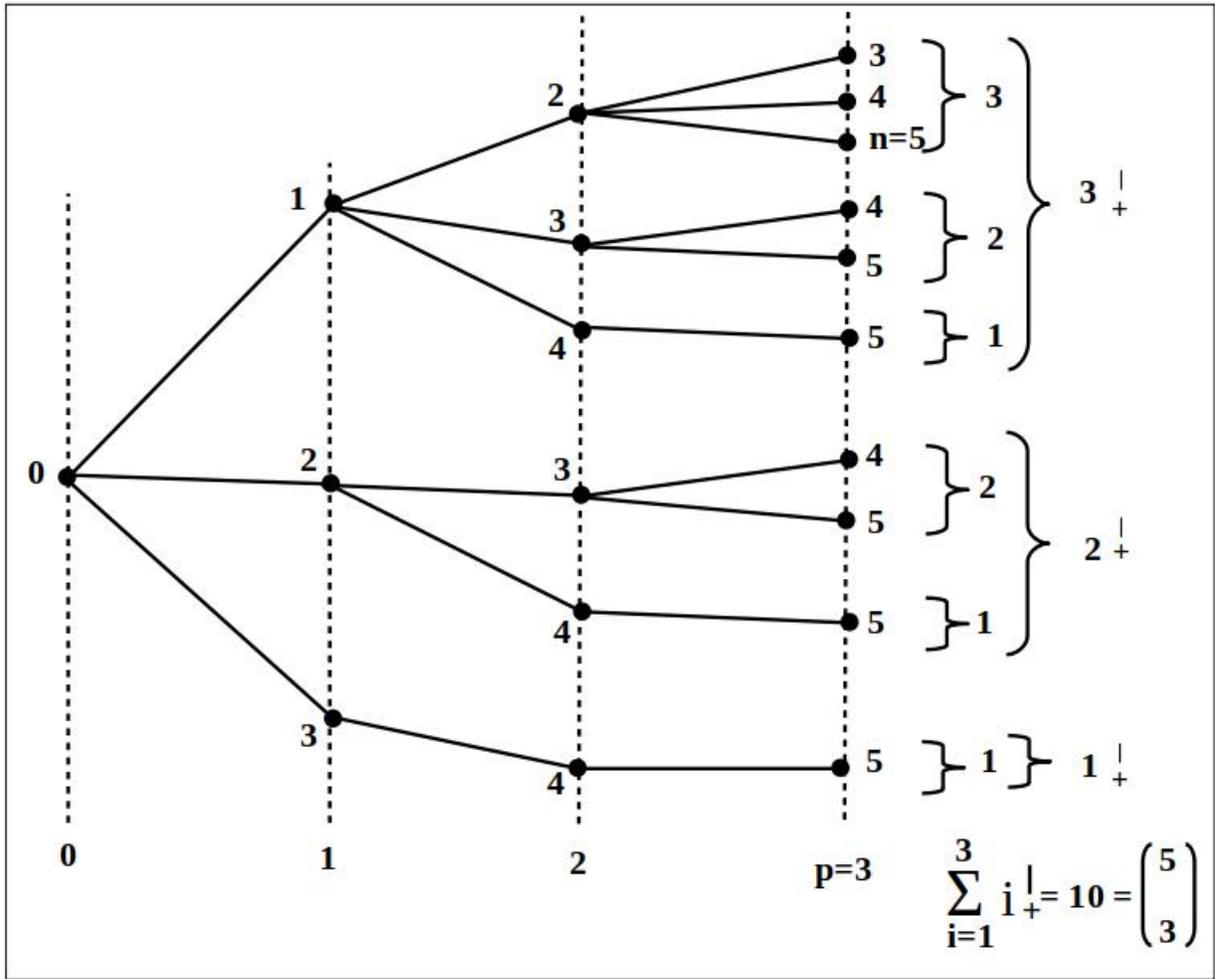


FIGURE 2. Cette figure représente le cheminement intellectuel permettant de passer du coefficient binomial $\binom{5}{3}$ à une somme de termirielles. À partir de cet exemple, une sorte de “termirielle seconde”, on va pouvoir généraliser à la “termirielle troisième”, “quatrième”, etc.

On y remarque une sorte de “termirielle de termirielles”, que l’on appelle nombre tétraédrique d’ordre n , conformément à la référence [1], et que l’on pourrait écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 n+ &= n+ + (n-1)+ + \dots + 3+ + 2+ + 1+ \\
 n+ &= \sum_{k=1}^n k+ = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k i = \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2!}
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$n+ = \binom{n+2}{3} = \binom{n+2}{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \tag{8}$$

Le passage de (7) à (8) se démontre par récurrence. En effet, en admettant que la proposition $P(n)$ suivante est vraie :

$$n+ = \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \tag{9}$$

$$n \underset{+}{\overset{(p)}{|}} = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^m \dots \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^j i \quad (12)$$

$$n \underset{+}{\overset{(p)}{|}} = \sum_{k=1}^n k \underset{+}{\overset{(p-1)}{|}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{p!} \prod_{i=0}^{p-1} (k+i) \quad (13)$$

$$n \underset{+}{\overset{(p)}{|}} = \binom{n+p}{p+1} = \binom{n+p}{n-1} \quad (14)$$

$$n \underset{+}{\overset{(p)}{|}} = \frac{1}{(p+1)!} \prod_{i=0}^p (n+i) \quad (15)$$

Avec, pour l'équation (12), un nombre de symboles *sigma* (\sum) égal à p .
Pour $p = 0$, on peut définir la termirielle "0-ième" comme suit :

$$n \underset{+}{\overset{(0)}{|}} = n = \binom{n}{1}$$

Pour $p = -1$, on peut définir la termirielle "(-1)-ième" comme suit :

$$n \underset{+}{\overset{(-1)}{|}} = 1 = \binom{n-1}{0}$$

La démonstration du passage de (13) à (14) (ou de (13) à (15)) se fait par récurrence, de la même manière que précédemment. En effet, en admettant que la proposition $P(n)$ suivante est vraie :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{p!} \prod_{i=0}^p (k+i) = \frac{1}{(p+1)!} \prod_{i=0}^p (n+i) \quad (16)$$

On a, pour $P(1)$:

$$\begin{aligned} 1 \underset{+}{\overset{(p)}{|}} &= \frac{1}{p!} \prod_{i=0}^{p-1} (1+i) = \frac{p!}{p!} = 1 \\ \frac{1}{(p+1)!} \prod_{i=0}^p (1+i) &= \frac{(p+1)!}{(p+1)!} = 1 \end{aligned} \quad (17)$$

Et, pour $P(n+1)$:

$$\begin{aligned} (n+1) \underset{+}{\overset{(p)}{|}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{p!} \prod_{i=0}^{p-1} (k+i) + \frac{1}{p!} \prod_{i=0}^{p-1} (n+1+i) \\ &= \frac{1}{(p+1)!} \prod_{i=0}^p (n+i) + \frac{(p+1)}{(p+1)!} \prod_{i=1}^p (n+i) \\ &= \frac{(n+p+1)}{(p+1)!} \prod_{i=1}^p (n+i) \\ (n+1) \underset{+}{\overset{(p)}{|}} &= \frac{1}{(p+1)!} \prod_{i=1}^{p+1} (n+i) = \binom{n+p+1}{p+1} \end{aligned} \quad (18)$$

CQFD.

B. Formule de Pascal

À l'image de la formule de Pascal, que l'on rappelle ci-dessous :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Il est possible de l'adapter aux termirielles, comme suit :

$$(n+1)_+^{(p)} + (n)_+^{(p+1)} = (n+1)_+^{(p+1)}$$

C. Binôme de Newton

À l'image du binôme de Newton, que l'on rappelle ci-dessous, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p$$

Il est également possible de l'adapter aux termirielles, comme suit, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$:

$$(n+m)_+^{(p)} = \sum_{i=-1}^p n_+^{(i)} \cdot m_+^{(p-i-1)} \quad (19)$$

La démonstration se fait encore par récurrence. En effet, en admettant que la proposition $P(p)$ suivante est vraie :

$$(n+m)_+^{(p)} = \sum_{i=-1}^p n_+^{(i)} \cdot m_+^{(p-i-1)}$$

Tout d'abord, les équations (5) et (11) vérifient respectivement $P(1)$ et $P(2)$, même si seule $P(1)$ – ou seule $P(2)$ – suffit. En considérant $P(p+1)$:

$$\begin{aligned} (n+m)_+^{(p+1)} &= \frac{n+m+p+1}{p+2} (n+m)_+^{(p)} \\ &= \frac{n+m+p+1}{p+2} \sum_{i=-1}^p n_+^{(i)} \cdot m_+^{(p-i-1)} \\ &= \frac{n+m+p+1}{p+2} \sum_{i=-1}^p n_+^{(i)} \cdot m_+^{(p-i-1)} \\ &= \frac{1}{p+2} \sum_{i=-1}^p \{[n+(i+1)] + [m+p+1-(i+1)]\} \cdot n_+^{(i)} \cdot m_+^{(p-i-1)} \\ &= \frac{1}{p+2} \sum_{i=-1}^p [n+(i+1)] \cdot n_+^{(i)} \cdot m_+^{(p-i-1)} + \frac{1}{p+2} \sum_{i=-1}^p [m+p+1-(i+1)] \cdot n_+^{(i)} \cdot m_+^{(p-i-1)} \\ &= \frac{1}{p+2} \sum_{i=-1}^p (i+2) \cdot n_+^{(i+1)} \cdot m_+^{(p-i-1)} + \frac{1}{p+2} \sum_{i=-1}^p [p+2-(i+1)] \cdot n_+^{(i)} \cdot m_+^{(p+1-i-1)} \\ &= \frac{1}{p+2} \sum_{i=0}^{p+1} (i+1) n_+^{(i)} m_+^{(p+1-i-1)} + \sum_{i=-1}^p n_+^{(i)} m_+^{(p+1-i-1)} - \frac{1}{p+2} \sum_{i=-1}^p (i+1) n_+^{(i)} m_+^{(p+1-i-1)} \\ &= n_+^{(p+1)} \cdot m_+^{(-1)} + \sum_{i=-1}^p n_+^{(i)} m_+^{(p+1-i-1)} \\ (n+m)_+^{(p+1)} &= \sum_{i=-1}^{p+1} n_+^{(i)} m_+^{(p+1-i-1)} \end{aligned}$$

CQFD.

III. APPLICATIONS POTENTIELLES

A. Complexité en informatique

En informatique, la termirielle peut être utilisée pour calculer rapidement la complexité de certains programmes informatiques comportant des boucles “for” imbriquées de la manière qui va suivre. En prenant par exemple 4 boucles “for” imbriquées, avec[2] :

- i allant de 1 à n=100;
- j allant de 1 à i;
- k allant de 1 à j;
- l allant de 1 à k.

La complexité sera de :

$$100 \underset{+}{\uparrow}^{(4-1)} = \binom{100+3}{3+1} = \binom{103}{4} = \binom{103}{99} = 4\,421\,275$$

Soit environ 4,4 millions d’opérations.

Plus généralement, pour $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, et en se référant à l’équation (15), la complexité de ce genre de programmes sera en $n \underset{+}{\uparrow}^{(p-1)} = \Theta(n^p)$.

B. Aspect pseudo-fractal

La figure 3 tente de convertir la termirielle “p-ième” de 4 en figures fractales, pour p=0, p=1 et p=2. Les carrés grisés sont les seuls comptabilisés. Par exemple, pour $4 \underset{+}{\uparrow}^{(2)}$, 20 carrés sont grisés, ce qui correspond à $4 \underset{+}{\uparrow}^{(2)} = 20$. À chaque incrémentation de p, le côté de chaque carré est divisé par 2, et l’on reproduit les mêmes schémas de base :

- $4 \underset{+}{\uparrow}$ lorsque les 4 carrés précédents sont grisés ;
- $3 \underset{+}{\uparrow}$ lorsque 3 carrés précédents sont grisés ;
- $2 \underset{+}{\uparrow}$ lorsque 2 carrés précédents sont grisés ;
- $1 \underset{+}{\uparrow}$ lorsqu’un seul carré précédent est grisé.

Cependant, en calculant la dimension D de Hausdorff de la présumée fractale, on s’aperçoit que cette dernière est variable, et tend vers 2 lorsque p tend vers l’infini. En effet, soit a le côté de chaque carré correspondant au rang p . La surface totale S_p des carrés grisés sera le nombre de carrés grisés multiplié par la surface a^2 d’un carré :

$$S_p = a^2 \cdot n \underset{+}{\uparrow}^{(p)} = a^2 \cdot \frac{1}{(p+1)!} \prod_{i=0}^p (n+i)$$

Quant à la surface S_{p-1} des carrés grisés correspondant au rang $(p-1)$, pour un carré de côté deux fois plus grand :

$$S_{p-1} = 4a^2 \cdot n \underset{+}{\uparrow}^{(p-1)} = 4a^2 \cdot \frac{1}{(1)!} \prod_{i=0}^{p-1} (n+i)$$

Ce qui donne, pour $p > 0$:

$$\frac{S_{p-1}}{S_p} = 4 \cdot \frac{p+n}{p+1} = 4 \cdot \frac{1+n/p}{1+1/p}$$

(20)

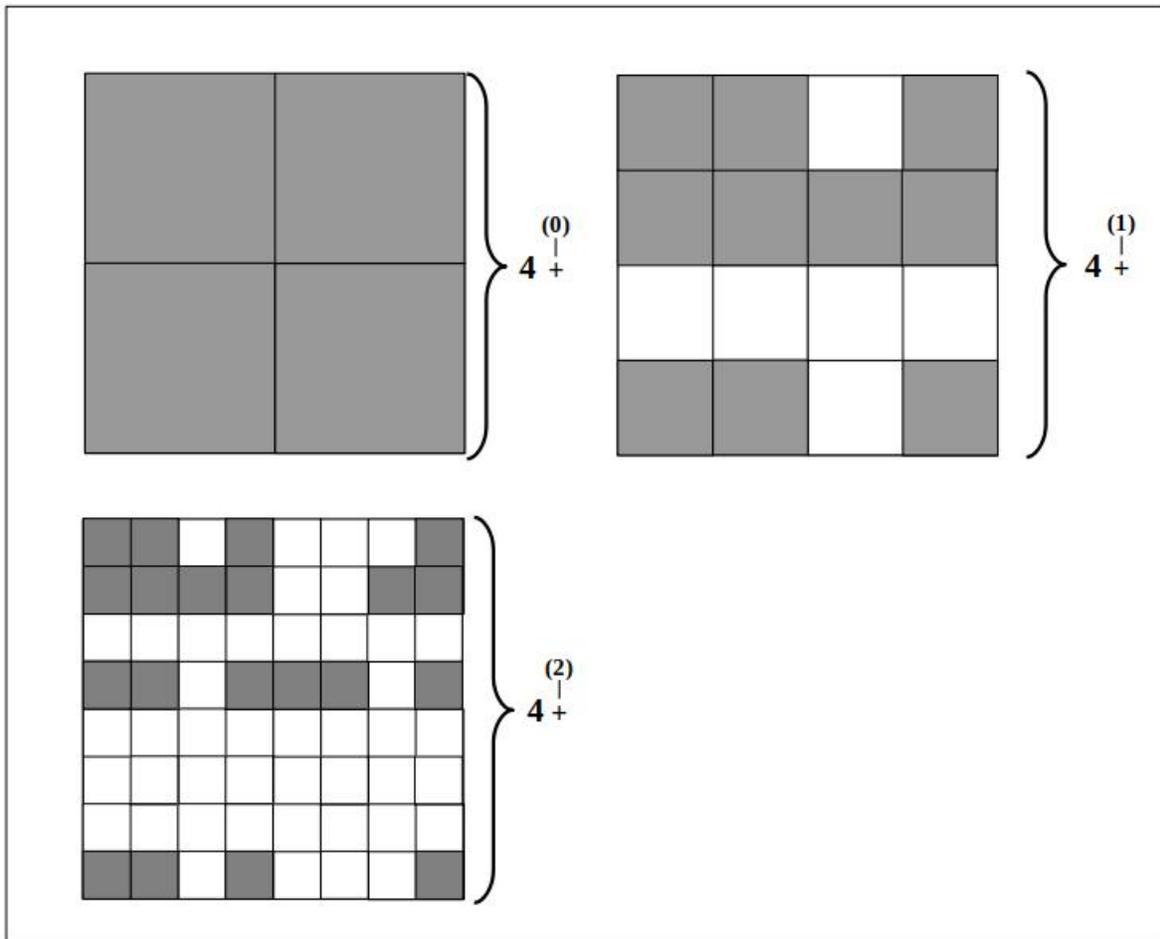


FIGURE 3. Cette figure tente de convertir la termirielle “p-ième” de 4 en figures fractales, pour $p=0$, $p=1$ et $p=2$. Les carrés grisés sont les seuls comptabilisés.

Au final, le rapport des surfaces, lorsque p tend vers l’infini, tend vers 4 :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{S_{p-1}}{S_p} = 4$$

Ce qui donne une dimension de D de Hausdorff de 2 lorsque p tend vers l’infini, étant donné que $2^D = 4$. Ainsi au vu du caractère variable de la dimension D , il ne semblerait pas que l’on puisse obtenir, rigoureusement parlant, de fractales en employant les termirielles.

IV. CONCLUSION

La termirielle est un symbole qui peut aider les étudiants en sciences à mieux appréhender les probabilités. Il pourrait également avoir une certaine utilité dans des disciplines qui échappent encore à cette pré-publication.

-
- [1] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers, Volume 2, Chapter 1* (Carnegie Institution of Washington, 1919).
 [2] À l’instar de l’algorithme de tri à bulle qui comporte 2 boucles imbriquées, quant à lui.
 [3] B. Pascal, *Traité du triangle arithmétique* (Arvensa Editions, 2019).

[4] *ISO 80000-2 :2009(E), Quantities and units* (International Organization for Standardization, 2009).