HAL
open science

Physique Expérimentale – Licence de Physique Semestre 4 – Université de Lille

Quentin Thommen, Manuel Goubet, Adam Rançon, Yvain Carpentier

To cite this version:

Quentin Thommen, Manuel Goubet, Adam Rançon, Yvain Carpentier. Physique Expérimentale – Licence de Physique Semestre 4 – Université de Lille. Licence. France. 2020. hal-02547185

HAL Id: hal-02547185

https://hal.science/hal-02547185v1

Submitted on 20 Jan 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Physique Expérimentale
Licence de Physique
Semestre 4

"Results! Why, man, I have gotten a lot of results. I know several thousand things that won't work."

Thomas A. Edison

Université de Lille

Département de Physique

Quentin Tommen - Manuel Goubet - Adam Rançon - Yvain Carpentier

Contents

Préambule 3

Étude de la résonance: Oscillateur mécanique 5

Étude de la résonance: Oscillateur électrique 9

Étude des ondes stationnaires 12

Phénomène de modulation appliqué à la détermination de la vitesse de la lumière 19

Étude du câble coaxial 23

Solide en rotation 30

Precession et Nutation du gyroscope 36

Écoulement permanents à surface libre 42

Écoulements permanents dans les conduites 48

Préambule

Du bon usage du poly de TP

Les séances de travaux pratiques durent quatre heures, les TP doivent être préparé pour la séance en

- Lisant attentivement et intégralement le texte concernant le TP
- Répondant aux questions identifiées par le sigle

En particulier, les parties introductives concernant les éléments théoriques nécessaires à la compréhension du TP doivent être travaillées.

Pour faciliter le déroulé des séances le présent texte comporte des instructions (parfois très directives) sur les manipulations à effectuer. Les différentes étapes du travail à effectuer sont identifiées par le sigle , tandis que les protocoles détaillés et les mises en garde sont précédés du sigle .

Les questions sont là pour vous guider dans la démarche expérimentale proposée et ne sont pas à prendre comme un découpage point par point de la réflexion à mener. En aucun cas, vous ne devez appliquer machinalement des protocoles sans en comprendre le sens, le contexte ou l'objectif.

Les réponses aux questions préparatoires sont **rédigées** sur papier libre qui sera collé dans le cahier de laboratoire (donc pas de recto–verso).

Du bon usage du cahier de laboratoire

Il vous est demandé de tenir un cahier de laboratoire personnel dans lequel vous notez vos observations, vos analyses et vos conclusions relatives aux TP proposés. Ce cahier remplace le compte–rendu de TP, il n'est pas un cahier de brouillon, il doit permettre une relecture du travail effectué indépendamment du présent texte:

- Chaque TP est un chapitre propre possédant une problématique clairement identifiée.
- La préparation expose les éléments théoriques nécessaires à la compréhension des manipulations et à l'interprétation des résultats.
- Les expériences faites sont replacées dans une problématique,
- Le matériel utilisé est clairement décrit,
- Les éléments théoriques sont succinctement exposés,
- Les résultats de mesure présentés en tableau (avec les unités précisées),
- Les figures sont soigneusement tracées,
- Les analyses et les conclusions clairement explicitées.
- Chaque TP se termine par une synthèse des principaux résultats et conclusions élaborés.

Cependant, le cahier de laboratoire n'est pas non plus un compte rendu, la rédaction peut y être faite en style télégraphique tant que cela ne nuit pas à la compréhension par un tiers. Il est indispensable toutefois de rédiger proprement les conclusions et les bilans de partie.

Le cahier de laboratoire reste dans les salles de TP et est évalué régulièrement par les enseignants. Le cahier pourra être retiré pour la rédaction des comptes rendus.

Compte–rendu

Il vous sera demandé durant ce module la rédaction de trois comptes rendus, sous format numérique (PDF) concernant un des TP abordés dans ce module. L'objectif est de vous familiariser avec la rédaction d'un résultat scientifique et des codes existants. Vous devez faire parvenir votre fichier électronique, nommé de la manière suivante *nom-prénom-TPx.pdf* (par exemple *thommen-quentin-TP3.pdf*), par moodle pour la date qui sera indiquée.

Les comptes rendus présentent votre travail suivant un **format imposé** comportant quatre sections

- Introduction,
- Matériel et méthodes,
- Résultats,
- Discussion,

ce qui correspond au standard de la communauté scientifique. Il existe des livres complets sur la rédaction scientifique; pour vous guider, voici quelques éléments:

L'Introduction situe le problème, l'expose, insiste sur son importance et indique la manière dont il est envisagé. À l'introduction est associée une présentation préliminaire de la manière de traiter la question et du résultat principal.

La section Matériel et Méthodes décrit (comme l'indique son intitulé) le matériel utilisé, les méthodes acquisition et d'analyse des données (si nécessaire). Cette section doit fournir tous les détails qui ont permis la recherche, en faisant éventuellement une subdivision par aspect traité. En fait, l'information devrait être suffisamment complète pour que n'importe quel autre chercheur compétent puisse refaire la procédure. De la possibilité de tester la reproductibilité de la recherche en question dépend la validité de l'article.

Le but de la section Résultats est double:

- *Présenter globalement ce qui a été fait*, sans pour autant répéter avec autant de précision l'aspect "matériel et méthodes"; et
- *Donner les résultats* en décrivant les *faits*, sans les interpréter.

Ces résultats doivent être présentés avec une *clarté absolue* puisqu'ils constituent l'essence même du compte rendu et de

l'idée qu'il véhicule. Si les résultats sont boiteux ou mal présentés, c'est tout le compte rendu qui perd sa valeur. Il est par exemple inutile de publier une liste sans fin de données répétitives; le travail doit être prédigéré pour le lecteur. Vouloir inclure sans exception toutes les données récoltées ne prouve pas que l'on dispose d'informations complètes, mais montre plutôt l'absence de discernement et d'esprit de synthèse dans l'interprétation des données. En cas de grandes listes, relevés, etc., on peut renvoyer à des annexes.

Il s'agit avant tout de mettre en valeur les résultats significatifs ou positifs, éventuellement par un tableau ou un graphe, mais il peut aussi être profitable de signaler les résultats non significatifs ou les aspects négatifs.

Les présentations graphiques sont toujours préférables à des développements verbaux, qu'ils remplacent ou complètent avantageusement. Elles sont plus claires, plus synthétiques et plus rapides à lire et à comprendre. On évitera toutefois de faire figurer la même information à la fois dans une figure et dans un tableau. Ces présentations graphiques ne doivent pas être confondues avec les illustrations qui constituent en général de simples images venant agrémenter un texte qui se suffit à lui-même. Celles-ci devraient être réduites au minimum dans une publication scientifique.

La Discussion est le lieu du commentaire et de l'analyse critique des résultats obtenus en lien avec la problématique détaillée dans l'introduction.

Elle constitue le corps de l'écrit et demande le plus long temps de travail et l'effort de réflexion le plus intense avant d'aboutir à la conclusion.

Le rédacteur doit trier les faits et les résultats (les nombreux matériaux de base) pour montrer leur signification. Par une analyse rigoureuse des données et leur mise en relation, il pourra faire ressortir les grandes idées. Pour cela, le plan de rédaction, la structure, doit impérativement être défini avant de se lancer dans l'écriture, sinon le lecteur aura du mal à suivre les méandres de la pensée de l'auteur.

Le passage d'une multitude de cas particuliers à un cas général se nomme l'induction. Le rédacteur induit une idée générale à partir des observations qu'il a effectuées. Ce faisant, il conservera toujours à l'esprit le but de l'écrit. Il est bien souvent avantageux de se reposer les questions de temps à autre, p. ex. en retournant au texte de l'introduction, pour s'assurer qu'on cherche toujours les bonnes réponses.

Le rédacteur doit aussi vérifier que toutes les données importantes dont il disposait ont bien pris place dans les idées et que celles-ci ne trahissent pas les résultats: la déduction (opération inverse de l'induction) des faits observés doit aussi être possible ou compatible avec les idées retenues. Vouloir dire davantage que ne le permettent les données risque de discréditer l'ensemble du travail. Le cas échéant, le rédacteur doit indiquer les points obscurs ou l'absence de conformité aux hypothèses. L'éthique exige que n'importe quel résultat soit interprété, même s'il ne correspond pas à ce que l'on attendait.

Une part importante de l'évaluation sera consacrée à "la forme" de votre compte rendu: respect du format, qualité des représentations graphiques et des tableaux de mesure.

TP 1
Étude de la résonance: Oscillateur mécanique

Le but de cette séance de travaux pratiques est de vous faire étudier des oscillations libres, plus ou moins amorties et forcées à l'aide d'un ressort vertical.

⋆ ⋆
⋆

Rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (10 – 15 lignes) présentant l'objet ou le phénomène d'étude ainsi que son contexte (utilité pratique et/ou fondamentale)

Partie A Éléments de théorie

A Formulation générale

A-1 Oscillateur harmonique non amorti

Un système décrit par une variable physique x dont l'évolution temporelle est régie par une équation différentielle de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2\, x(t) = 0 \tag{1}$$

est un oscillateur harmonique.

L'évolution temporelle de la grandeur x est de la forme

$$x(t) = A_0\, \cos\left(\omega_0\, t + \varphi\right).$$

L'amplitude A_0 et la phase à l'origine φ sont déterminées par les conditions initiales. La pulsation propre ω_0 est définie par les paramètres du système physique, indépendamment des conditions initiales. La période propre de l'oscillateur est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

A-2 Oscillateur harmonique amorti

En présence d'un mécanisme de dissipation de l'énergie, il y a amortissement de l'oscillation.

Dans un grand nombre de cas, l'amortissement est proportionnel à la vitesse de variation de la grandeur x (on parle de frottements visqueux), il en résulte l'équation différentielle suivante

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2\, x(t) = 0 \tag{2}$$

Le paramètre γ est le taux d'amortissement. On appelle $\tau = \frac{2}{\gamma}$ le temps d'amortissement.

À partir de ω_0 et γ, on définit un nombre sans dimension $Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$ nommé facteur de qualité de l'oscillateur.

En régime oscillatoire ($Q > \frac{1}{2}$), la solution est de la forme

$$x(t) = A_0\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, \cos\left(\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\, t + \varphi\right). \tag{3}$$

On appelle pseudo-période de l'oscillateur la quantité

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

A-3 Oscillateur harmonique forcé

En présence d'un forçage harmonique, l'équation d'évolution peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, x(t) = \omega_0^2\, X_0\, \cos\left(\omega\, t\right), \tag{4}$$

où X_0 a la même dimension que la variable x.

En régime permanent (lorsque le terme transitoire devient négligeable) la solution est

$$x(t) = \frac{\omega_0^2\, X_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}}\, \cos\left(\omega\, t + \varphi\left(\omega\right)\right). \tag{5}$$

Le facteur de qualité de l'oscillateur est lié aux fréquences de coupure $Q = \frac{\nu_0}{\Delta\nu}$.

La pulsation de résonance est donnée par

$$\omega_R = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

B Application à un oscillateur mécanique

On considère un ressort à spires non jointives, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0, suspendu verticalement à un point d'attache mobile A. Une masse m de volume V est accrochée à l'extrémité inférieure. La masse m est immergée dans un fluide de masse volumique ρ (voir figure 3).

Les positions du centre de gravité G de la masse m et du point d'attache A sont repérées le long d'un axe vertical $(0, \vec{e}_z)$ fixe par rapport à un référentiel galiléen et orienté vers le haut.

On note

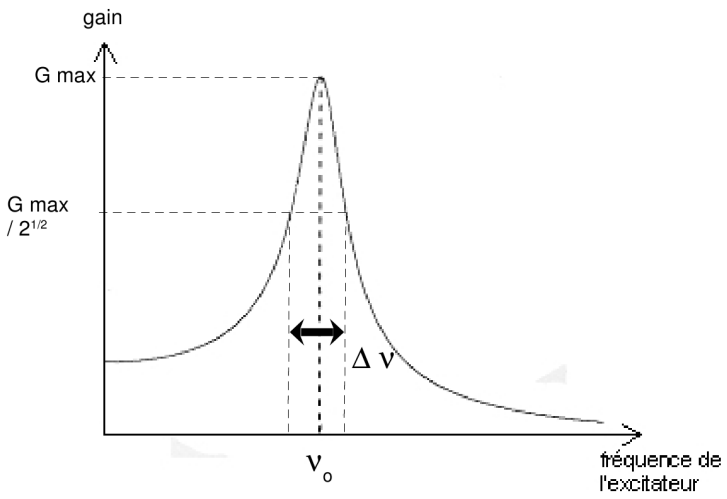


Figure 1: Représentation schématique de la variation du gain d'un oscillateur forcé et amorti en fonction de la fréquence d'excitation.

- z la position du point d'attache M de la masse au ressort sur l'axe $(O, \vec{e}_z)$
- z_A la position du point A sur l'axe $(O, \vec{e}_z)$

Le bloc de masse m est soumis à l'ensemble des forces suivantes:

- **Poids:** $\vec{P} = m\vec{g}$
- **Force de rappel du ressort (loi de Hooke) :** $\vec{F}_R = -k(\overrightarrow{AM} + l_0\vec{e}_z)$
- **Poussée d'Archimède:** $\vec{F}_A = -\rho V \vec{g}$
- **Frottement visqueux:** $\vec{f} = -\Gamma \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$

Faire un schéma du système mécanique en plaçant les forces.

En vertu du principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse m dans le référentiel galiléen, l'équation de la dynamique, une fois projetée sur l'axe $(O, \vec{e}_z)$, s'écrit

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\Gamma\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} - k\,(z(t) - z_A(t) + l_0) - (m - \rho V)\,g \quad (6)$$

Si le point d'attache A est immobile ($z_A(t) = z_A^* = \mathrm{C^{te}}$), on obtient la position d'équilibre

$$z^* = z_A^* - l_0 - \frac{m - \rho V}{k}\,g$$

De manière générale, les écarts aux positions d'équilibre sont des variables pertinentes pour la description de la dynamique. On introduit donc les grandeurs

$$x(t) = z(t) - z^* \quad \text{et} \quad x_A(t) = z_A(t) - z_A^*,$$

La variable $x(t)$ est la variable pertinente pour la dynamique du ressort; tous calculs effectués, son évolution est régie par l'équation différentielle suivante

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x(t) = \omega_0^2\,x_A(t) \quad (7)$$

- Faire les calculs intermédiaires du changement de variable pour passer de l'équation (6) à l'équation générique (7)
- En déduire l'expression des paramètres γ et ω_0 en fonction des paramètres initiaux.
- Si $x_A(t) = a\,\cos(\omega t)$, retrouver les relations suivantes:

$$x(t) = \frac{a\,\omega_0^2\,\cos(\omega\,t + \varphi(\omega))}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\,\omega^2}}; \quad \tan(\varphi(\omega)) = \frac{\gamma\,\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

- Démontrer, de manière générale, l'égalité suivante

$$A\cos(\omega\,t + \varphi) - a\,\cos(\omega t) = L\,\cos(\omega t + \theta)$$

et donner les expressions de L et θ en fonction de A, a, et φ.

- En déduire que la longeur $l(t)$ du ressort à la date t peut se mettre sous la forme

$$l(t) = l_0 + L_\mathrm{m}(\omega)\,\cos\left(\omega\,t + \theta\,(\omega)\right).$$

$L_\mathrm{m}(\omega)$ est une grandeur positive représentant l'amplitude de vibration du ressort et θ une phase.

- Montrer que l'expression mathématique de $L_\mathrm{m}(\omega)$ se met sous la forme suivante:

$$L_\mathrm{m}(\omega) = a\,\sqrt{\frac{\omega^2\,(\omega^2 + \gamma^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\,\omega^2}}$$

où a est l'amplitude des oscillations du point d'attache. On rappelle pour cela la relation trigonométrique $\cos\varphi = 1/\sqrt{1 + \tan^2\varphi}$. La figure 2 représente l'allure de $L_\mathrm{m}(\omega)$ pour différentes valeurs de facteur de qualité Q.

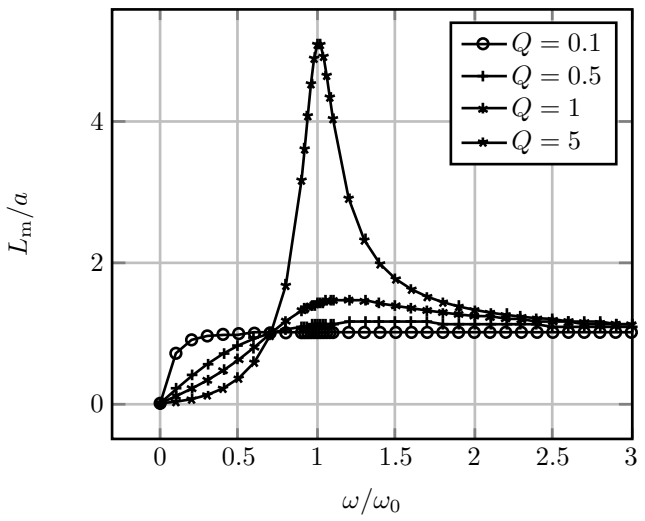


Figure 2: Amplitude d'oscillation de la longeur du ressort

Partie B Étude expérimentale

On étudie dans cette partie les oscillations libres et forcées d'un système mécanique simple.

Le dispositif expérimental est schématiquement représenté sur la figure 3.

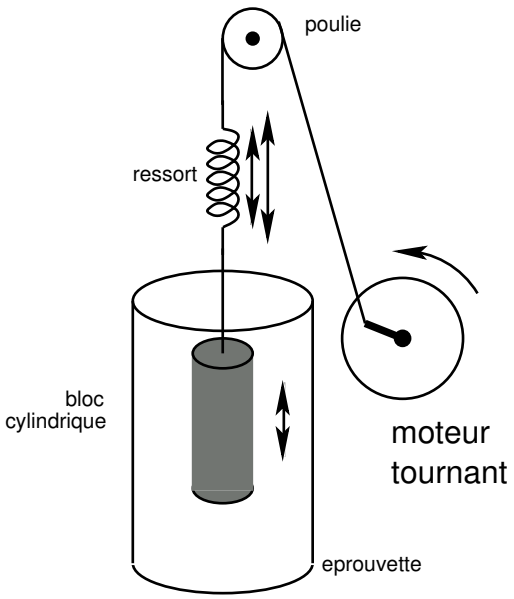


Figure 3: Oscillateur mécanique forcé.

Un bloc cylindrique de **masse** $m = 117$ **g** est suspendu à l'extrémité d'un ressort relié à un fil. Ce fil passe par une poulie tournant autour d'un roulement à billes. Le fil est finalement attaché en un point excentré par rapport à l'axe de rotation d'un moteur tournant à une vitesse angulaire que vous pouvez régler à l'aide d'un potentiomètre. La vitesse de rotation de la poulie solidaire du moteur est mesurée à l'aide d'un capteur optique qui compte le nombre de tours effectués par la poulie pendant un temps determiné.

La vitesse minimum de rotation est d'environ 20 tours en 60 secondes, la vitesse maximum est d'environ 200 tours en 60 secondes ce qui permettra d'explorer une **plage de fréquences de forçage comprises entre 0,3 et 3 Hz**.

Vous pourrez mesurer l'amplitude des oscillations grâce à deux dispositifs: une règle graduée placée face au bloc, et une mesure de l'allongement du ressort par impédancemetrie à l'aide d'un osciloscope.

A Principe de l'impédancemétrie

Le ressort se comporte électriquement comme une bobine variable: lorsque le ressort est étiré; ses spires sont plus écartées et son impédance L électrique diminue. Si le ressort est parcouru par un courant sinusoïdal de pulsation ω, il se comporte comme une inductance complexe de valeur $\mathrm{i}\,L\omega$. La mesure de l'inductance L du ressort est effectuée par un diviseur de tension, la tension obtenue après redressement et lissage par un filtre passe bas du signal est proportionnelle à l'impédance L et donc à la longueur du ressort (fig. 4). Au cours de l'oscillation du ressort, la longueur de celui-ci varie ce qui implique la variation de la tension à la sortie du filtre passe-bas. La visualisation de cette tension sur un oscilloscope permet d'effectuer des mesures d'amplitude, de fréquence et d'amortissement.

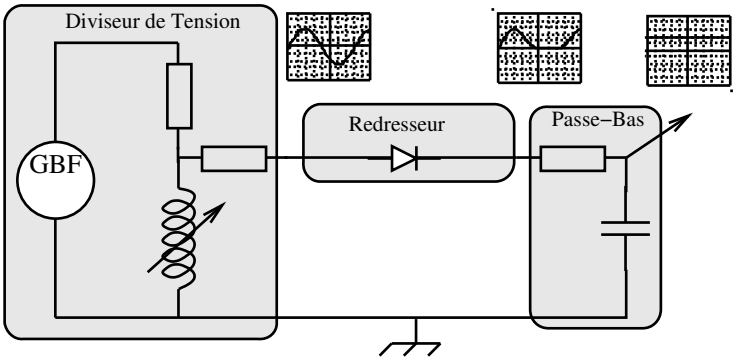


Figure 4: Schéma de fonctionnement de l'impédancemétrie.

B Préambule

Après avoir lu l'ensemble de cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (5 – 10 lignes) présentant

- ⋆ les principaux objectifs scientifiques de cette partie,
- ⋆ les moyens mis en œuvre pour les atteindre.

C Mesure préliminaire

Afin d'éviter les problèmes liés aux frottements fluides dans l'air, la pulsation propre de l'oscillateur sera déterminée de façon statique en déterminant la constante de raideur du ressort.

- Suspendre la masse $m = 117$ g à l'extrémité du ressort (dans l'air) et mesurer précisément l'allongement Δl de celui-ci.
- En déduire la raideur k du ressort, sa pulsation propre ω_0 ainsi que sa période propre T_0.

D Oscillations libres

On étudie dans un premier temps les oscillations libres du bloc de masse m.

D-1 Mesures dans l'air

Protocole : *Afin de déterminer le taux d'amortissement γ des oscillations dans l'air, écarter le bloc de sa position d'équilibre d'une distance A_0 (suffisamment grande mais en veillant à ce que le ressort reste en tension lorsque la masse est à son altitude maximale). Lâcher le bloc sans vitesse initiale et déclencher simultanément le chronomètre.*

- Mesurer la pseudo-période comparer à la période propre T_0.
- Mesurer le temps d'amortissement τ défini comme le temps nécessaire pour que l'amplitude des oscillations passe de A_0 à $A_0 e^{-1}$.
- En déduire le taux d'amortissement γ.
- Que vaut le facteur de qualité Q de l'oscillateur?
- Sans faire de mesure, observer rapidement la réponse de l'oscillateur au forçage imposé par le moteur en recherchant notamment la résonance.

D-2 Mesures dans l'eau

On s'intéresse maintenant aux oscillations du bloc immergé dans une éprouvette remplie d'eau.

Protocole : *L'amortissement est à présent trop important pour utiliser la procédure suivie dans l'air. Écarter le bloc de la position d'équilibre en tirant brutalement sur le ressort.*

- Déterminer la pseudo-période des oscillations amorties du bloc dans l'eau. Faire au moins deux fois cette mesure afin d'avoir une bonne estimation de la pseudo-période.
- Comparer la pseudo-période à la période propre, en déduire le facteur de qualité de l'oscillateur puis le taux d'amortissement.

E Oscillations forcées (régime permanent sinusoïdal)

On soumet maintenant l'oscillateur constitué du bloc immergé dans l'eau à un forçage sinusoïdal.

E-1 Questions préliminaires

- Quel est l'ordre de grandeur du temps nécessaire à l'apparition du régime permanent sinusoïdal lorsque le bloc est immergé dans l'eau ?
- Comparer-le à celui que vous auriez eu si le bloc oscillait dans l'air.

E-2 Manipulations

- Mesurer avec l'oscilloscope l'amplitude et la fréquence des oscillations du ressort pour une quinzaine de fréquences de forçage s'étalant sur toute la plage disponible (une précision de l'ordre de quelques millimètres sur la mesure de l'amplitude est suffisante).
- Reporter vos résultats dans un tableau de la forme du Tab. 2 et tracer sur papier millimétré la courbe de résonance.
- Modifier le système en fixant un disque à l'extrémité inférieure du cylindre (on supposera le disque de masse négligeable) et reprendre les questions précédentes en tracant les courbes de résonance sur le même graphique.
- Quelle est la différence marquante entre cet oscillateur et celui précédemment étudié? Proposer une explication.
- Discuter les résultats obtenus.

Fréquence du forçage (Hz)				...
Amplitude des oscillations (mV)				...

Table 2: tableau de mesures

Partie C Synthèse Générale

- Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant ce TP, utiliser les 20 dernières minutes de la séance pour **rédiger** sur votre cahier de laboratoire un bilan de la séance (10-15 lignes) contenant
  - ⋆ une synthèse de vos principaux résultats,
  - ⋆ une conclusion générale liant les résultats entre eux,
  - ⋆ une synthèse de vos apprentissages.

TP 2
Étude de la résonance: Oscillateur électrique

Le but de cette séance de travaux pratiques est de vous faire étudier des oscillations libres, plus ou moins amorties et forcées à l'aide d'un circuit électrique simple.

⋆ ⋆
⋆

Rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (10 – 15 lignes) présentant l'objet ou le phénomène d'étude ainsi que son contexte (utilité pratique et/ou fondamentale)

Partie A Éléments de théorie

A Formulation générale

A-1 Oscillateur harmonique non amorti

Un système décrit par une variable physique x dont l'évolution temporelle est régie par une équation différentielle de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2\, x(t) = 0 \tag{1}$$

est un oscillateur harmonique.

L'évolution temporelle de la grandeur x est de la forme

$$x(t) = A_0\, \cos\left(\omega_0\, t + \varphi\right).$$

L'amplitude A_0 et la phase à l'origine φ sont déterminées par les conditions initiales. La pulsation propre ω_0 est définie par les paramètres du système physique, indépendamment des conditions initiales. La période propre de l'oscillateur est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

A-2 Oscillateur harmonique amorti

En présence d'un mécanisme de dissipation de l'énergie, il y a amortissement de l'oscillation.

Dans un grand nombre de cas, l'amortissement est proportionnel à la vitesse de variation de la grandeur x (on parle de frottements visqueux), il en résulte l'équation différentielle suivante

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2\, x(t) = 0 \tag{2}$$

Le paramètre γ est le taux d'amortissement. On appelle $\tau = \frac{2}{\gamma}$ le temps d'amortissement.

À partir de ω_0 et γ, on définit un nombre sans dimension $Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$ nommé facteur de qualité de l'oscillateur.

En régime oscillatoire ($Q > \frac{1}{2}$), la solution est de la forme

$$x(t) = A_0\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, \cos\left(\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\, t + \varphi\right). \tag{3}$$

On appelle pseudo-période de l'oscillateur la quantité

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

A-3 Oscillateur harmonique forcé

En présence d'un forçage harmonique, l'équation d'évolution peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, x(t) = \omega_0^2\, X_0\, \cos\left(\omega\, t\right), \tag{4}$$

où X_0 a la même dimension que la variable x.

En régime permanent (lorsque le terme transitoire devient négligeable) la solution est

$$x(t) = \frac{\omega_0^2\, X_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}}\, \cos\left(\omega\, t + \varphi\left(\omega\right)\right). \tag{5}$$

Le facteur de qualité de l'oscillateur est lié aux fréquences de coupure $Q = \frac{\nu_0}{\Delta\nu_0}$.

La pulsation de résonance est donnée par

$$\omega_R = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

B Applications à un oscillateur électrique

On considère un circuit RLC–série composé d'une résistance R, d'une inductance L et d'une capacité C branchées en série avec un générateur idéal de fem variable $U(t)$.

En utilisant les notations précisées sur la figure 2, on a les relations suivantes entre les tensions et l'intensité $i(t)$:

- **Résistance:** $U_R(t) = R\, i(t)$

  Inductance: $U_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$

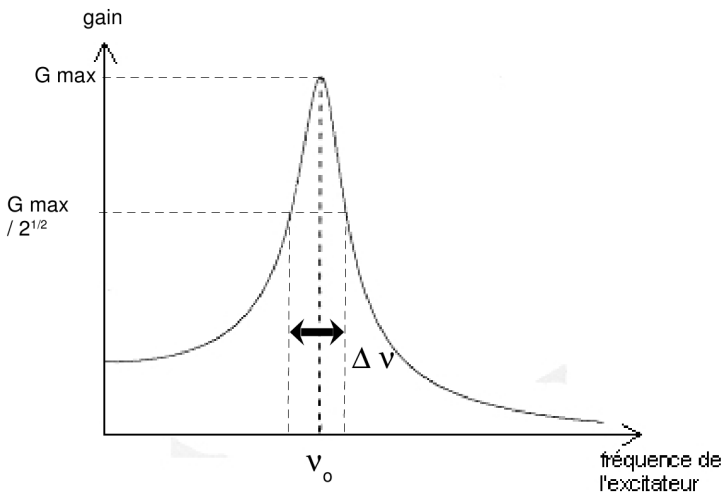


Figure 1: Représentation schématique de la variation du gain d'un oscillateur forcé et amorti en fonction de la fréquence d'excitation.

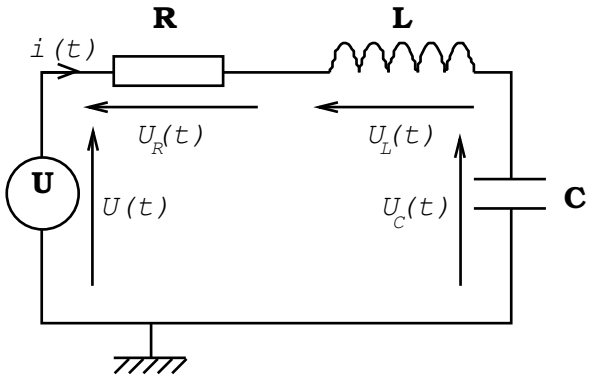


Figure 2: Circuit RLC–Série

- **Capacité:** $i(t) = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$

En appliquant la loi des mailles, on trouve la relation suivante entre les tensions :

$$U(t) = U_R(t) + U_L(t) + U_C(t).$$

En utilisant la charge $q(t)$ ($i = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$) comme variable dynamique du circuit, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{L}U(t) = \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2q(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}q(t)$$

- Identifier la pulsation propre et le taux d'amortissement.
- Justifier par une analyse dimensionelle le changement de variable $U(t) = \frac{Q(t)}{C}$.
- Déterminer, en fonction de L et C, l'expression R_c de la résistance induisant un facteur de qualité $Q = \frac{1}{2}$. Justifier la dénomination "*résistance critique*"donnée à R_C.

Partie B Étude expérimentale

On rappelle que, dans un circuit RLC–série, l'étude de la charge d'un condensateur est identique à celle de la position d'un oscillateur mécanique. En pratique on observera à l'oscilloscope la tension aux bornes du condensateur qui est proportionnelle à la charge portée par celui-ci: $U_c(t) = \frac{q(t)}{C}$.

Manipulations

Vous disposez de plaquettes comprenant un condensateur en série avec une inductance.

- Grâce aux valeurs de capacité et d'inductance indiquées sur votre plaquette, calculer les valeurs théoriques de la résistance critique R_c et de la fréquence propre ν_0 du circuit.

Montage : *Réaliser le montage du circuit RLC série permettant d'observer en voie 1 la tension d'alimentation et en voie 2 la tension aux bornes du condensateur (Fig. 3). Durant tout le TP, la résistance variable ne devra jamais être inférieure à 5 Ω*

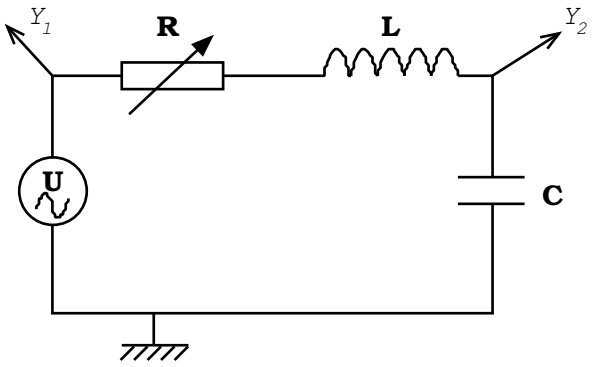


Figure 3: Circuit RLC–série.

A Préambule

- Après avoir lu l'ensemble de cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (5 – 10 lignes) présentant
  - ⋆ les principaux objectifs scientifiques de cette partie,
  - ⋆ les moyens mis en œuvre pour les atteindre.

B Étude du régime transitoire

On étudie dans cette partie la façon dont le circuit réagit suite à un changement brutal de la tension d'alimentation. Alimenter le circuit avec une tension créneau $U_o = 0,5\ V_{pp}$ de fréquence égale à 50 Hz.

B-1 Observations des différents régimes transitoires

- Faire varier la résistance du circuit ($R \geq 5\Omega$) afin d'observer les différents régimes correspondant à des amortissements plus ou moins importants: régimes apériodique, critique et pseudo-périodique.
- Faire un schéma des tensions observées lors des trois régimes en indiquant les valeurs de résistance utilisées ainsi que les zones correspondant au régime transitoire et au régime permanent.
- Comparer votre valeur expérimentale de la résistance critique à la valeur théorique.

B-2 Etude du régime pseudo-périodique

- Régler la résistance variable à 5 Ω. Mesurer précisément le temps d'amortissement τ, défini comme le temps mis par les oscillations pour passer de l'amplitude U_0 à $U_0\, e^{-1}$. En déduire le taux d'amortissement du circuit γ ainsi que le facteur de qualité Q.
- La fréquence de résonance du circuit sera-t-elle en théorie très différente de sa fréquence propre ?

C Étude du régime permanent sinusoïdal (oscillations forcées).

On étudie dans cette partie la réponse du circuit au forçage imposé par la tension d'alimentation.

Protocole : *Conserver la valeur de la résistance variable égale à 5Ω et alimenter le circuit avec une tension sinusoïdale $U_0 = 0,5V_{pp}$.*

- Déterminer rapidement la valeur du gain (rapport de l'amplitude de la tension de sortie sur l'amplitude de la tension d'entrée) à basse puis à très haute fréquence.
- Rechercher la fréquence permettant d'obtenir le gain maximal. Déterminer les fréquences de coupure et en déduire le facteur de qualité Q du circuit. Comparer à la valeur déterminée précédemment.
- Tracer les courbes du gain et du déphasage en fonction de la fréquence d'excitation sur une plage de fréquences allant de 50 kHz à 10 kHz
- Régler la résistance variable à 505 Ω, tracer sur la même figure qu'auparavant les nouvelles courbes du gain et du déphasage.

Partie C Synthèse Générale

- Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant ce TP, utiliser les 20 dernières minutes de la séance pour **rédiger** sur votre cahier de laboratoire un bilan de la séance (10-15 lignes) contenant
  - ⋆ une synthèse de vos principaux résultats,
  - ⋆ une conclusion générale liant les résultats entre eux,
  - ⋆ une synthèse de vos apprentissages.

TP 3
Étude des ondes stationnaires

Partie A Éléments de modélisation

A Ondes Progressives et Ondes Stationnaires: Généralités

A-1 L'équation d'onde

En 1747, le physicien français Jean le Rond d'Alembert obtient une équation différentielle, l'équation d'onde (ou équation de d'Alembert) dont la solution est une fonction d'onde (onde voyageant dans un milieu à vitesse v).

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi(x,t)}{\mathrm{d}t^2} = v^2\,\frac{\mathrm{d}^2\Psi(x,t)}{\mathrm{d}x^2} \tag{1}$$

avec

- Ψ : Perturbation d'une grandeur physique par rapport à l'état d'équilibre
- x : coordonnée selon l'axe $(O, \vec{e}_x)$ d'un milieu (m)
- t : Temps (s)
- v : Vitesse de propagation de l'onde selon l'axe x (m/s)

A-2 La fonction d'onde

La fonction d'onde est la solution à l'équation d'onde (1). Lorsque le milieu est infini, la base de l'espace des solutions est composée d'ondes progressives sinusoïdales:

$$\Psi_\pm(x,t) = A\,\sin\left(\omega\left(t \mp \frac{x}{v}\right) + \varphi\right) = A\,\sin\left(\omega\,t \mp k\,x + \varphi\right)$$

avec

- A : Amplitude de l'onde (même unité que y)
- ω : Pulsation du mouvement harmonique (rad/s)
- φ : Phase à l'origine ($x = 0$ et $t = 0$)
- $k = \frac{\omega}{v}$: Nombre d'onde (rad/m)
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$: Période de vibration (s)
- $\lambda = v\,T = \frac{2\pi}{k}$: Longueur d'onde (m)

Par convention on choisit ω et k positifs.

La solution Ψ_+ se propage dans la direction des x croissants tandis que la solution Ψ_- se propage dans la direction des x décroissants.

- Vérifier que les formes Ψ_+ et Ψ_- sont solutions de l'équation d'onde (1) pour toutes les valeurs de ω et k telles que $\frac{\omega}{k} = v$.

A-3 Corde Vibrante

On considère une corde de masse linéique μ, tendue horizontale au repos par une force de norme T. On néglige les pertes d'énergie de l'onde dans le milieu et le système est supposé homogène, isotrope et non dispersif (la vitesse de l'onde sera donc indépendante de la longueur d'onde).

En isolant une petite tranche de corde et appliquant les loi de la mécanique classique, on montre que la déformation transversale de la corde suit une équation de d'Alembert dans la limite de la reponse linéaire (faible déformation). La vitesse de propagation de l'onde dépend des paramètres physiques de la manière suivante:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \tag{2}$$

A-4 Tube de Kundt

Un certain nombre d'hypothèses simplificatrices sont à considérer lors de l'étude de la propagation d'une onde acoustique :

1. L'état d'un fluide est entièrement défini par trois grandeurs (si l'on néglige les phénomènes de viscosité) : sa pression, son volume (ou sa masse) spécifique et sa température. La matière est considérée comme un milieu continu.
2. Les parois du tube sont supposées rigides et non conductrices de la chaleur. L'existence de parois élastiques ou conductrices apporte un facteur d'atténuation supplémentaire par transfert à la paroi de l'énergie de vibration et provoque une distorsion du front d'onde.
3. Les effets de friction interne au sein du gaz (air) qui emplit le tuyau sont négligés. Les frottements (faibles) sont considérés comme restant localisés sur les parois.

Le tube de Kundt est un tube très long avec de faibles dimensions transverses. Comme la pression y est constante en amplitude et en phase dans le plan transverse $x = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$, on est ramené à étudier un problème à une dimension. La source sonore (haut-parleur) est un piston mobile, provoquant compressions et dilatations du fluide. La perturbation créée par le piston va s'éloigner en se propageant de proche en proche par action des couches d'air sur leurs voisines, de sorte que toutes les parties du fluide subiront un déplacement.

Le déplacement U d'une tranche d'air (front d'onde) à la position x et à la date t suit une équation de d'Alembert dans la limite de la reponse linéaire (faible déplacement). Dans l'équation de d'Alembert, v caractérise la vitesse de propagation des ondes sonores dans le fluide (et non celle du fluide $u = \frac{\partial U}{\partial t}$ qui reste au repos en moyenne). Elle est indépendante de la fréquence de l'onde. La vitesse v dépend de deux paramètres caractéristiques de l'inertie (ρ : masse volumique) et de l'élasticité (χ : coefficient de compressibilité adiabatique) du milieu :

$$v = \sqrt{\frac{1}{\chi\rho}} \quad \text{avec} \quad \chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_Q . \tag{3}$$

L'expérience montre en effet qu'un ébranlement acoustique se propage de manière adiabatique et non pas isotherme, les échanges de chaleur aboutissant à l'équilibre de température n'ayant pas le temps de s'opérer aux échelles de temps qui caractérisent les successions de compressions et de détentes de l'ébranlement.

Si on assimile l'air à un gaz parfait, la relation (3) conduit à

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{C_P}{C_v}. \tag{4}$$

Dans l'air, à 0°C, $\gamma = 1{,}402$, $\rho = 1{,}293$ kg.m^{-3}, la vitesse du son est égale à 331,6 m.s^{-1} (et 340 m.s^{-1} à 20°C).

B Réflexion des ondes

B-1 Superposition linéaire

Lorsque plusieurs ondes voyagent à un même endroit dans un milieu, le milieu réagit simultanément à la présence des ondes en additionnant leur comportement. L'action d'additionner et de soustraire des ondes porte le nom de superposition.

Il est important de réaliser qu'il n'y a pas de transfert d'énergie entre les ondes lors d'un contact. Les ondes continuent leur trajectoire et le milieu réagit à toutes les perturbations venant de chaque onde. Cette règle s'applique seulement si le milieu est élastique et peut localiser toute l'énergie des ondes à l'endroit où se produit la superposition (par ex. : corde élastique).

B-2 Changement de milieu de propagation

Lorsqu'une onde voyageant dans un milieu rencontre un milieu différent, il se produit deux situations à l'interface :

1. **Transmission :** l'onde continue son déplacement dans le nouveau milieu.
2. **Réflexion :** l'onde change de direction et continue son déplacement dans son milieu d'origine.

Voici quelques caractéristiques des ondes réfléchies et transmises :

- Une onde réfléchie et transmise conserve sa fréquence f (ou période T) d'origine, car la fréquence est une caractéristique de l'oscillateur ayant produit l'onde et non du milieu où celle-ci se propage.
- Une onde réfléchie conserve sa longueur d'onde λ et une onde transmise possède une longueur d'onde λ différente causée par le changement de milieu

Consulter l'applet suivant pour vous familiariser avec les notions de réflexion dure et molle: http://tfleisch.profweb.ca/types-de-reacuteflexion.html

B-3 Réflexion dure

Une réflexion dure se produit lorsqu'une onde voyageant dans un milieu rencontre un nouveau milieu dans lequel la vitesse de propagation est inférieure.

Lors d'une réflexion dure, le point à l'interface des deux milieux est contraint à demeurer fixe à $y = 0$ en tout temps. Par le principe de superposition linéaire, la conséquence de la réflexion est de créer une nouvelle onde voyageant dans le sens contraire avec une inversion par rapport à l'axe de transmission. Le milieu épousera la forme de l'addition des deux ondes à tout instant.

Mathématiquement, on peut exprimer une onde réfléchie avec inversion à l'aide de l'équation de l'onde incidente. Il suffit d'ajouter un déphasage de π à l'onde incidente et d'inverser le signe de ω, ce qui nous donne l'équation de l'onde réfléchie. Par exemple si l'onde incidente s'écrit $\Psi_\mathrm{i} = A\sin(\omega t - kx + \phi)$, l'onde réfléchie prend la forme $\Psi_\mathrm{r} = A\sin(-\omega t - kx + \phi + \pi)$

B-4 Réflexion molle

Une réflexion molle se produit lorsqu'une onde voyageant dans un milieu rencontre un nouveau milieu dans lequel la vitesse de propagation est supérieure.

La conséquence de la réflexion molle est de créer une nouvelle onde voyageant dans le sens contraire sans inversion par rapport à l'axe de transmission.

Mathématiquement, on peut exprimer une onde réfléchie sans inversion à l'aide de l'équation de l'onde incidente. Il suffit d'inverser le signe de ω, ce qui nous donne l'équation de l'onde réfléchie. Par exemple si l'onde incidente s'écrit $\Psi_\mathrm{i} = A\sin(\omega t - kx + \phi)$, l'onde réfléchie prend la forme $\Psi_\mathrm{r} = A\sin(-\omega t - kx + \phi)$

C Ondes stationnaires

C-1 Définition

Une onde stationnaire est le nom que porte l'addition de deux ondes de fréquence identique se propageant dans un milieu dans des directions différentes. Le résultat de l'addition produit une onde immobile (onde qui ne se propage pas vers la gauche ni vers la droite) dans le milieu (Fig. 1). Le milieu vibre alors de façon stationnaire, d'où le nom *onde stationnaire*.

C-2 Caractéristiques d'une onde stationnaire

Une onde stationnaire se caractérise par les éléments suivants, schématiquement représentés sur la figure 1:

- **Ventre** : Endroit où l'amplitude de l'oscillation du milieu est maximale.
- **Nœud** : Endroit où l'amplitude de l'oscillation du milieu est nulle.
- **Vitesse dans le milieu** (v) : Vitesse des ondes progressives produisant l'onde stationnaire.
- **Période** (T) : Temps pour effectuer un cycle complet.
- **Demi–longueur d'onde** ($\lambda_{1/2} = \frac{\lambda}{2}$) : Distance entre deux nœuds ou deux ventres consécutifs.

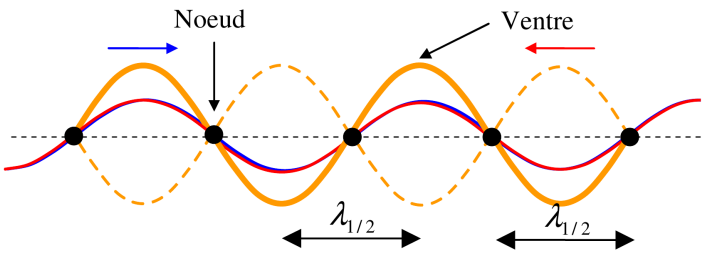


Figure 1: Caractéristiques d'une onde stationnaire.

C-3 Onde stationnaire par réflexion

Corde vibrante

À l'aide d'un oscillateur, il est possible de créer une onde stationnaire sur une corde tendue. On attache une extrémité de la corde à l'oscillateur et l'autre extrémité à une interface (mur ou anneau). L'onde se propageant vers la droite sera l'onde produite par l'oscillateur et l'onde se propageant vers la gauche sera l'onde réfléchie par l'interface.

Lorsqu'une corde stimulée par un oscillateur est attachée à un mur, il se produit beaucoup de superpositions d'ondes stationnaires, car les ondes ayant subi une réflexion dure sur le mur subissent à nouveau une réflexion dure sur l'oscillateur (on suppose que l'amplitude de l'oscillateur est faible). Le décalage entre toutes ces ondes stationnaires dépend de la longueur de la corde.

Lorsque la corde possède une longueur qui est un multiple de $\frac{\lambda}{2}$, la corde vibre dans un mode stationnaire unique et l'amplitude peut augmenter beaucoup plus que l'amplitude de l'oscillateur, car il y a de la superposition constructive entre toutes les ondes stationnaires. L'amplitude maximale de la vibration de la corde dépend de l'élasticité de la corde et du rythme de perte d'énergie par frottement dans la corde.

Nous pouvons établir la relation suivante entre la longueur de la corde L, le nombre de ventres N et la fréquence de l'oscillateur f_N. Le mode d'oscillation N de la corde est déterminé par le nombre de ventres observés dans l'onde stationnaire :

$$L = N\frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad f_N = N\frac{v}{2L}$$

Lorsque la corde possède une longueur quelconque, les ondes stationnaires sont décalées entre elles, ce qui produit de la superposition destructive partielle. La corde aura donc une amplitude comparable à l'amplitude de l'oscillateur.

Tuyau

Il est possible de produire des ondes stationnaires dans un tuyau grâce aux molécules d'air qui transportent les ondes sonores longitudinales. Lorsqu'une onde atteint une des extrémités du tuyau, elle peut entrer en contact avec une surface fermée ou une section ouverte. La réflexion de l'onde due à un changement d'interface respecte les règles suivantes :

1. Section fermée ⇒ Réflexion dure (avec inversion)
2. Section ouverte ⇒ Réflexion molle (sans inversion)

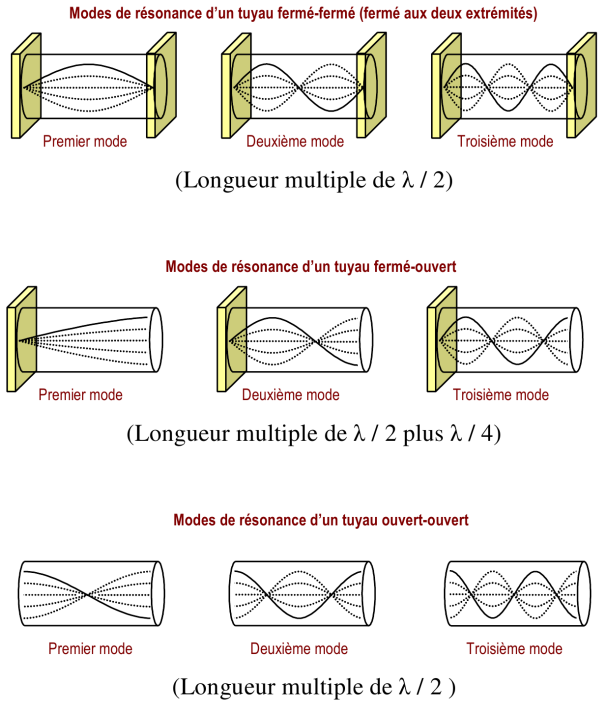
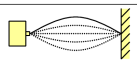
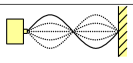
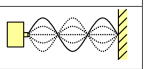
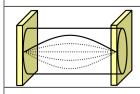
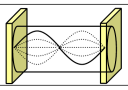
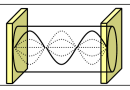
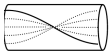
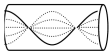
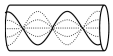


Figure 2: Onde stationnaire dans un tuyau. La figure représente schématiquement les ondes de déplacement.

Pour décrire une onde sonore, on peut utiliser deux variables: la pression ou le déplacement. Le déplacement $U(x,t)$ et la pression acoustique p sont déphasés d'un quart de longueur d'onde.

Longueur multiple de λ / 2				
Situation	**Équation**	**Mode 1**	**Mode 2**	**Mode 3**
Corde fixée à un mur	$L = N\dfrac{\lambda}{2}$			
Tuyau fermé-fermé	$f_N = N\dfrac{v}{2L}$			
Tuyau ouvert-ouvert	$N \in \mathbb{N}$, ($N^{\text{ième}}$ mode d'oscillation)			

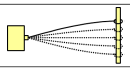
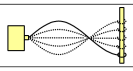
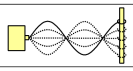
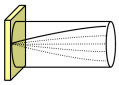
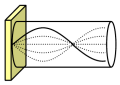
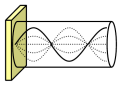
Longueur multiple de λ / 2 plus λ / 4				
Situation	**Équation**	**Mode 1**	**Mode 2**	**Mode 3**
Corde fixée à un anneau	$L = (N-1)\dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\lambda}{4}$			
Tuyau fermé-ouvert	$f_N = \left(N - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{v}{2L}$ $N \in \mathbb{N}$, ($N^{\text{ième}}$ mode d'oscillation)			

Figure 3: Condition de résonance.

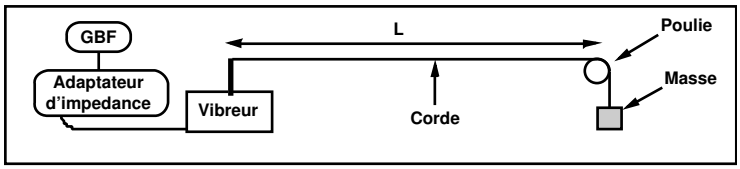


Figure 4: Schéma du dispositif expérimental utilisé

Cela signifie qu'en tout point et à tout instant où le déplacement est maximal, la pression acoustique est nulle, et inversement.

On appelle ventres de pression les points pour lesquels la pression acoustique est maximale et nœuds de pression ceux pour lesquels elle est nulle. Lors de l'étude d'une onde sonore stationnaire dans un milieu, les nœuds de pression coïncident toujours avec les ventres de déplacement et vice-versa.

C-4 Résonance

La résonance est l'excitation d'un système avec une fréquence égale à la fréquence naturelle d'oscillation du système. Lorsqu'un système possède plusieurs fréquences naturelles (ex. : corde, tuyau), on identifie à chaque fréquence naturelle (valeur propre) un mode d'oscillation (mode propre). Lorsqu'un système entre en résonance, l'amplitude associée au mouvement du milieu est amplifiée. L'amplitude atteindra une valeur maximale lorsque le rythme – auquel l'apport en énergie est donné au milieu – est égal au rythme auquel le milieu dissipe son énergie (ex : frottement, dégagement de chaleur).

C-5 Stroboscopie

C'est l'observation à intervalles de temps réguliers T_e et pendant un temps τ court $\tau \ll T_e$ d'un phénomène périodique rapide.

Si on observe un disque noir avec un secteur blanc monté sur l'axe principal d'un moteur de période T :

1. Quand $T_e = T$, on observe un seul secteur blanc immobile.
2. Quand $T_e = nT$, (n entier >1) on observe aussi un seul secteur blanc immobile, mais on n'observe en fait le mouvement que toutes les n périodes.
3. Quand $kT_e = T$ (k entier >1), on observe k secteurs blancs immobiles.
4. Quand $T_e \simeq T$ on observe un secteur blanc tournant doucement (à la fréquence $\left|\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T}\right|$ dans le même sens que le disque si $T_e > T$ et dans le sens contraire si $T_e < T$.

⋆ ⋆
⋆

Rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (10 – 15 lignes) présentant l'objet ou le phénomène d'étude ainsi que son contexte (utilité pratique et/ou fondamentale)

Partie B Corde de Melde

Consulter la vidéo sur le lien suivant: `https://www.youtube.com/watch?v=4BoeATJk7dg`? ou sur Moodle.

On s'intéresse dans cette partie à l'étude de la vibration d'une corde. La mise en vibration d'une corde peut s'effectuer de multiples manières : par pincement (harpe), par percussion (piano), par frottement (violon), par vibreur électrique... D'autre part, les vibrations peuvent être transversales, longitudinales ou de torsion.

Nous allons limiter notre étude à un système appelé *corde de Melde* (Fig. 4) qui est constitué d'une corde tendue dont une extrémité est fixe tandis que la seconde est fixée à un vibreur électriquement entretenu qui communique en ce point de la corde un mouvement sinusoïdal, transverse, de fréquence F. On se propose d'étudier les ondes transversales générées par un tel dispositif.

Mise en place :

1. *Réalisez le montage de la figure 4 avec une longueur de corde L de 1 m tendue par une masse de 75 g.*
2. *Le GBF éteint, sélectionnez le mode sinusoïdal, enfoncez le bouton associé à la gamme 10 des fréquences ainsi qu'un des 2 boutons d'atténuations du signal.*
3. *Enfin, assurez-vous que l'amplitude du GBF est réglée au minimum.*
4. *Allumez l'adaptateur d'impédance puis le GBF. Réglez ensuite l'amplitude du GBF de façon à obtenir une tension efficace de 1V sur la sortie de contrôle de l'adaptateur d'impédance.*

A Préambule

Après avoir lu l'ensemble de cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (5 – 10 lignes) présentant

- ⋆ les principaux objectifs scientifiques de cette partie,
- ⋆ les moyens mis en œuvre pour les atteindre.

B Premières observations expérimentales

B-1 Observation du phénomène de résonance

- Faire varier la fréquence F du GBF entre 1 et 65 Hz (sans modifier son amplitude !) et décrire vos observations.
- Expliquer ce phénomène en termes d'ondes progressives, d'ondes stationnaires, de fréquences propres de l'oscillateur[1].

B-2 Étude stroboscopique de la vibration de la corde

On prendra tout d'abord soin de se placer dans des conditions qui permettent *d'observer une résonance du système avec 2 fuseaux.*

- Régler la fréquence du stroboscope (affichée en coups par minute) pour observer une immobilité apparente de la corde. Que peut-on en déduire sur la fréquence de vibration de chaque point de la corde ?
- Régler ensuite le stroboscope pour observer le mouvement de la corde vibrante au ralenti. Représenter schématiquement vos observations[2].
- Indiquer quelles sont les relations de phase entre les différents points de la corde. Quelle est la relation entre la longueur d'onde de l'oscillation de la corde et la longueur d'un fuseau ?
- Comparer l'amplitude de vibration du vibreur par rapport à l'amplitude des ventres. Comment expliquez-vous votre observation?

C Étude quantitative

C-1 Mesure de la longueur d'onde

On utilise une longueur de corde fixée (L =1 m).

- Ajuster la fréquence du vibreur pour obtenir un unique fuseau bien net[3].
- En déduire la longueur d'onde et la vitesse de propagation de l'onde sur la corde.

C-2 Détermination de la vitesse de propagation des ondes sur la corde.

- Recommencer l'expérience précédente pour obtenir successivement 2, 3 et 4 fuseaux bien nets.
- Représenter graphiquement l'évolution de la longueur d'onde en fonction de l'inverse de la fréquence à l'aide des 4 mesures précédentes.
- Comment pouvez-vous déduire de cette courbe la vitesse de propagation ? Cette vitesse semble-t-elle dépendre de la longueur d'onde ?
- Comparer la valeur expérimentale de la vitesse avec celle que l'on peut calculer d'après la théorie. On donne la masse linéique de la corde non tendue : 1,25g/m.

C-3 Influence de la longueur de la corde.

- Sans modifier la fréquence du vibreur fixée précédemment, repérer les longueurs de corde qui permettent d'observer 3 puis 2 fuseaux. Commenter les résultats.

D Synthèse Partielle

Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une synthèse (5 – 10 lignes) détaillant

- ⋆ les principales conclusions scientifiques obtenues
- ⋆ les points éventuels qui resterait à clarifier.

Partie C Tube de Kundt

Ce TP porte sur l'étude de phénomènes (propagation d'ondes sonores, résonance) se produisant dans un tuyau rectiligne de dimensions finies et de section constante (tube de Kundt). De tels tubes entrent dans la composition de nombreux systèmes de conduction du son (instruments de musique par exemple). Les lois qui y régissent la propagation du son sont donc essentielles pour la résolution de nombreux problèmes pratiques en acoustique.

Consulter la vidéo sur le lien suivant : `https://www.youtube.com/watch?v=qUiB_zd9M0k`?

1. On pourra, pour simplifier, considérer que les deux extrémités de la corde sont fixes (malgré la présence du vibreur).
2. on pourra tracer sur une même représentation la corde à un instant donné ainsi que les positions extrêmes atteintes par chaque point de la corde vibrante.
3. L'utilisation du stroboscope n'est pas nécessaire

A Dispositif expérimental

Vous disposez :

- d'un tube de Kundt (tube cylindrique en plastique de longueur 1 m muni d'une échelle graduée)
- d'un piston mobile
- d'un haut-parleur
- d'un générateur basses fréquences (GBF)
- d'un adaptateur d'impédance
- d'un microphone fixé dans un tube PVC pouvant être translaté à l'intérieur du tube
- d'un oscilloscope

Conseils d'utilisation du GBF :

- ***avant toute action sur la molette***, *vérifier systématiquement quelle fonction est activée (fréquence ou amplitude)*
- *le microphone est très sensible aux variations de pression à l'intérieur du tube.* ***Ne jamais dépasser une amplitude crête à crête de 100 mV***. *Le microphone risquerait d'en souffrir !*

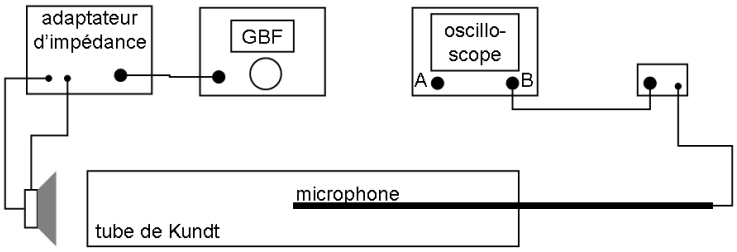


Figure 5: Schéma du montage expérimental

Mise en place :

Réaliser ou vérifier le montage de la figure 5 ***après s'être assuré que tous les appareils sont éteints***. *Puis, mettre en marche le dispositif en respectant la procédure suivante:*

1. *allumer l'adaptateur d'impédance du haut-parleur*
2. *allumer le GBF*
3. *régler la fréquence à une valeur inférieure à 50 Hz*
4. *régler l'amplitude à 10 mV_{pp}*
5. *allumer le boîtier d'alimentation du microphone*
6. *allumer l'oscilloscope*

Éteindre le GBF lorsque vous ne prenez pas de mesure. À la fin de votre TP, appliquer la procédure inverse pour arrêter le dispositif.

B Préambule

Après avoir lu l'ensemble de cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (5 – 10 lignes) présentant

- ⋆ les principaux objectifs scientifiques de cette partie,
- ⋆ les moyens mis en œuvre pour les atteindre.

C Fréquences de résonance et ondes stationnaires dans un tube ouvert

Dans ce montage, le signal détecté par le microphone est observé sur la voie B de l'oscilloscope. Le GBF délivre une tension sinusoïdale d'amplitude crête à crête égale à 10 mV et de fréquence initiale f d'environ 50 Hz.

C-1 Fréquences de résonance

Placer le microphone au centre du tube. Augmenter progressivement la fréquence. Déterminer la fréquence f_1 la plus basse pour laquelle vous observez une variation notable de l'intensité détectée par le microphone (peut aussi être perçue à l'oreille). Ceci indique que le son émis par le haut-parleur a été amplifié par le tube. Cette fréquence est la première fréquence (ou fondamentale) de résonance du tube.

En augmentant la fréquence progressivement, déterminer les fréquences des harmoniques suivantes f_n:

- n = 2, avec le microphone au quart du tube
- n = 3, avec le microphone au milieu du tube
- n = 4, avec le microphone au huitième du tube
- n = 5, avec le microphone au milieu du tube
- n = 6, avec le microphone au douzième du tube

Reporter les résultats dans un tableau où apparaîtront les différentes fréquences et le rapport f_n/f_1. Que constatez–vous ?

C-2 Ondes stationnaires

Ajuster la fréquence afin d'observer la résonance fondamentale du tube f_1,

En déplaçant le microphone à l'intérieur du tube, noter les positions pour lesquelles l'amplitude du signal observé à l'oscilloscope est maximale ($x_{\max}$) ou minimale ($x_{\min}$).

Décrire le comportement de l'onde sonore au voisinage des extrémités du tube.

Recommencer la même expérience pour les 3 premières harmoniques.

À l'aide de ces mesures, représenter graphiquement le comportement de l'onde pour chaque fréquence. Préciser notamment la position des nœuds et des ventres de pression.

Interpréter ces résultats en vous aidant de la partie théorique. Conclure.

D Tube à une extrémité fermée

- Insérer le piston à l'intérieur du tube (*demander à l'enseignant de vous aider*) et placer le à la position repérée sur la règle graduée par l'abscisse $x = 80$ cm. Le tube est ainsi fermé à une de ses extrémités.
- En partant d'une fréquence de l'ordre de 50 Hz, recommencer l'expérience de recherche des fréquences de résonnance pour
  - $n = 1$ et 2, avec une amplitude du GBF égale à 30 mV_{pp}
  - $n = 3$, 4 et 5, avec une amplitude du GBF égale à 10 mV_{pp}
- Reporter les résultats f'_1, f'_n, $\frac{f'n}{f'1}$ dans un tableau. Que constatez–vous ?
- Interpréter ces résultats en vous aidant de la partie théorique.

E Modes de résonance et longueur du tube

E-1 Résonance.

- Placer le piston à l'extrémité du tube opposée au haut-parleur. Régler le GBF pour qu'il délivre une tension sinusoïdale d'amplitude crête à crête égale à 10 mV et de fréquence f égale à 1000 Hz.
- Déplacer lentement le piston vers le haut-parleur jusqu'à observer la première résonance du tube. Noter la position du piston. Déplacer le piston jusqu'à observer une nouvelle résonance. Répéter les mêmes opérations jusqu'à ce que le piston soit à l'autre extrémité du tube.
- Noter les différentes longueurs du tube ΔL pour lesquelles une résonance est observée. Reporter les résultats dans un tableau. Que dire de l'écart ΔL entre 2 longueurs de résonnance successives (voir partie B-II-3) ?

E-2 Vitesse du son

- Refaire l'expérience précédente pour 3 autres fréquences (par exemple, 800, 600, et 400 Hz).
- Calculer, à partir de ces résultats, la valeur de la longueur d'onde du son pour chaque fréquence. En déduire une valeur expérimentale de la vitesse de propagation du son dans l'air.
- Cette vitesse dépend-elle de la fréquence ?
- Comparer cette valeur à la valeur théorique donnée par l'équation (4).

F Synthèse Partielle

- Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une synthèse (5 – 10 lignes) détaillant
  - ⋆ les principales conclusions scientifiques obtenues
  - ⋆ les points éventuels qui resterait à clarifier.

Partie D Synthèse Générale

- Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant ce TP, utiliser les 20 dernières minutes de la séance pour **rédiger** sur votre cahier de laboratoire un bilan de la séance (10-15 lignes) contenant
  - ⋆ une synthèse de vos principaux résultats,
  - ⋆ une conclusion générale liant les résultats entre eux,
  - ⋆ une synthèse de vos apprentissages.

TP 4
Phénomène de modulation appliqué à la détermination de la vitesse de la lumière

La vitesse de la lumière dans le vide c, est une constante fondamentale qui a fait l'objet de nombreuses mesures depuis celle de Galilée.

Tous les rayonnements électromagnétiques se propagent dans le vide à la même vitesse c quelle que soit la fréquence du rayonnement. Aucun signal ne peut être transmis par quelque moyen que ce soit à une vitesse supérieure à c. La vitesse de la lumière c est une grandeur constante, un invariant, dans tous les systèmes de référence animés de mouvements relatifs uniformes. Cette hypothèse n'a jamais été mise en défaut jusqu'à présent et a servi de principe de base à l'élaboration de la théorie de la relativité.

A Introduction

Dans l'antiquité, la conception de la lumière comme entité instantanée et intemporelle faisait force de loi. Au début du 17e siècle, Galilée fut le premier à se demander à quelle vitesse voyage la lumière. Il tenta alors de mesurer cette vitesse entre deux collines de Toscane à l'aide de lanternes à volet, mais il n'y parvint pas, car ses instruments étaient trop rudimentaires. À la fin du même siècle, l'observation des éclipses de Jupiter par Ole Römer, non conformes aux prévisions, a convaincu les chercheurs que la lumière possède une vitesse finie.

Deux siècles plus tard, Fizeau effectue la première mesure terrestre en utilisant une roue dentée. En 1850, Foucault utilise un miroir tournant. Grâce à ces dispositifs, la théorie d'Huygens, proposant que la vitesse de propagation de la lumière est plus faible dans des milieux matériels, est vérifiée. Sans l'utilisation de ces montages difficiles à mettre en œuvre, la détermination de la vitesse c est basée sur la mesure du temps t mis par la lumière pour parcourir une distance L. Étant donné la valeur très élevée de c, sa mesure précise nécessite des distances L très grandes (>kilomètre) ou des appareils de mesure de grande sensibilité (<nanoseconde) pour la détermination de très courts intervalles de temps de propagation.

Ce TP propose d'utiliser une méthode de modulation de l'intensité de la lumière qui permet la réalisation d'une mesure de la vitesse de la lumière à un niveau de précision correct avec des appareils de mesure du temps de sensibilité courante (0,1 s) et une propagation sur une distance d'un mètre environ.

L'étude expérimentale se décompose en deux parties : dans un premier temps, l'étude du phénomène de modulation grâce à des montages électroniques et dans un second temps, l'utilisation de ce phénomène dans un montage optoélectronique de mesure de la vitesse de la lumière.

⋆ ⋆ ⋆

Rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (10 – 15 lignes) présentant l'objet ou le phénomène d'étude ainsi que son contexte (utilité pratique et/ou fondamentale)

Partie A Phénomène de modulation et mesure de vitesse

A Modulation résultant de la multiplication de deux signaux sinusoïdaux

Afin de comprendre le fonctionnement du dispositif de mesure qui sera utilisé dans la partie , on propose d'étudier le produit, filtré ou non, des deux signaux $x_1(t) = A\cos(\omega_1 t)$ et $x_2(t) = A\cos(\omega_2 t)$.

Démontrer que le signal $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$ s'écrit :

$$y(t) = \frac{A^2}{2}\left[\cos\left((\omega_1+\omega_2)\ t\right) + \cos\left((\omega_1-\omega_2)\ t\right)\right]$$

Vous disposez:

- d'un multiplicateur analogique fonctionnant grâce à une alimentation +15V/-15V.
- d'un filtre passe-bas, puis un filtre passe-haut dont les fréquences de coupure sont toutes deux voisines de 10 kHz.

Réaliser, à l'aide de ce dispositif, la multiplication de deux signaux sinusoïdaux $x_1(t) = A\cos(\omega_1 t)$ et $x_2(t) = A\cos(\omega_2 t)$. délivrés par les deux générateurs[4].

Observer le résultat de la multiplication des deux signaux à l'oscilloscope et reporter un schéma du signal observé, en prenant soin de bien préciser les fréquences des deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ utilisés ainsi que la base de temps de l'oscilloscope utilisée pour l'observation.

Quel est le résultat du filtrage du signal $y(t)$ par le filtre passe-bas ? Mesurer en particulier précisément la fréquence du signal filtré. Commenter le résultat.

Mêmes questions pour le filtre passe-haut.

4. On prendra par exemple $A = 2$ V; les fréquences des deux signaux devront être relativement proches, par exemple $f_1 = 100$ kHz et $f_2 = 98$ kHz.

B Fonctionnement du dispositif.

Pour mesurer la vitesse de la lumière, on module sinusoïdalement l'intensité d'une source lumineuse rouge à la fréquence f (modulation de période T). L'intensité du rayonnement lumineux s'écrit $I(t) = I_0 \cos(2\pi f t)$ et un récepteur placé à proximité immédiate de la source lumineuse convertira ces variations d'intensité en une tension sinusoïdale: $U = a \cos(2\pi f t)$.

Si le récepteur est placé à une distance Δd de l'émetteur de lumière, la propagation induit un retard

$$\Delta t_{\text{réel}} = \frac{\Delta d}{c} \tag{1}$$

qui se traduit par un déphasage du signal reçu:

$$\Delta\varphi = 2\pi f \Delta t_{\text{réel}} = 2\pi \frac{\Delta t_{\text{réel}}}{T}. \tag{2}$$

Le récepteur mesure, hormis d'éventuelles pertes d'intensité, le signal déphasé (Fig. 1) :

$$u = A \cos(2\pi f t - \Delta\varphi).$$

Connaissant Δd, la mesure de $\Delta\varphi$ permet la détermination de la vitesse de la lumière par la relation :

$$c = 2\pi f \frac{\Delta d}{\Delta\varphi}.$$

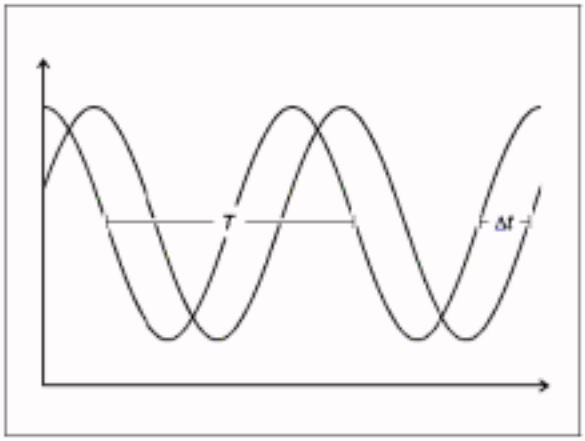


Figure 1: représentation du déphasage d'un signal périodique

En choisissant une très grande fréquence de modulation, on obtient des déphasages significatifs pour des distances de propagation courtes.

- Déterminer la distance de propagation Δd donnant une déphasage de 2π pour une fréquence de 60 MHz.
- Sachant que La bande passante des oscilloscopes dont vous disposez est de 20 MHz (ce qui implique que la plus petite mesure de décalage temporel accéssible est de 50 ns), conclure que la détermination directement par déphasage de la vitesse de la lumière est difficilement réalisable en TP.

On utilise la modulation pour observer, dans une gamme de fréquences de l'ordre de la centaine de kHz, des déphasages significatifs entre le signal émis par la source et le signal recueilli par le récepteur. Le signal sinusoïdal appliqué à la source lumineuse est multiplié électroniquement par un signal sinusoïdal de fréquence $f_2 = 59,9$ MHz.

Le signal électrique résultant de cette multiplication peut être représenté comme étant la somme d'un signal de fréquence $f_s = f_1 + f_2$ et d'un signal de fréquence $f_d = f_1 - f_2$. Au niveau de l'émetteur, la tension électrique s'écrit donc :

$$U_e = \frac{a}{2}\left[\cos(2\pi f_s t) + \cos(2\pi f_d t)\right].$$

Le signal au niveau du récepteur est déphasé de $\Delta\varphi$ par rapport au signal émis et s'écrit :

$$U_r = \frac{a}{2}\left[\cos(2\pi f_s t - \Delta\varphi) + \cos(2\pi f_d t - \Delta\varphi)\right].$$

Si la composante haute fréquence est supprimée par un filtre passe-bas, il ne reste que deux signaux de basse fréquence $f_d = f_1 - f_2$ déphasés l'un par rapport à l'autre d'une quantité $\Delta\varphi$. La fréquence f_d étant seulement de 100 kHz, ces deux signaux peuvent être observés grâce à un oscilloscope standard. Le déphasage $\Delta\varphi$ n'a pas changé suite au mixage et au filtrage, mais il correspond maintenant à un retard :

$$\Delta t_{\text{mes}} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi f_d} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi (f_1 - f_2)} \tag{3}$$

Pour obtenir le *temps de propagation réel* $\Delta t_{\text{réel}}$ du signal lumineux sur la section de mesure Δd, on utilise les relations (2) et (3). Avec la relation (1), il vient la relation entre Δt_{mes} et la vitesse de lumière c :

$$\Delta t_{\text{réel}} = \frac{\Delta d}{c} = \frac{f_1 - f_2}{f_1}\Delta t_{\text{mes}} \tag{4}$$

Le retard associé à la propagation $\Delta t_{\text{réel}}$ étant extrêmement court (environ 3 ns sur une distance de 1 mètre), l'utilisation précédemment faite du phénomène de modulation permet de le multiplier par quantité égale à $\frac{f_1}{f_1 - f_2}$, soit par facteur 600 dans l'expérience réalisée.

Finalement, il est à noter que les signaux électriques se propagent également dans les câbles coaxiaux reliant les différents appareils du dispositif. Les retards associés à cette propagation sont tout à fait comparables au retard associé à la propagation de la lumière dans l'air et ne sont donc pas du tout négligeables. Il est possible dans l'expérience que vous allez réaliser d'introduire un déphasage purement électronique entre les deux signaux observés et ainsi de s'affranchir des effets de déphasage indésirables associés à la propagation dans les câbles.

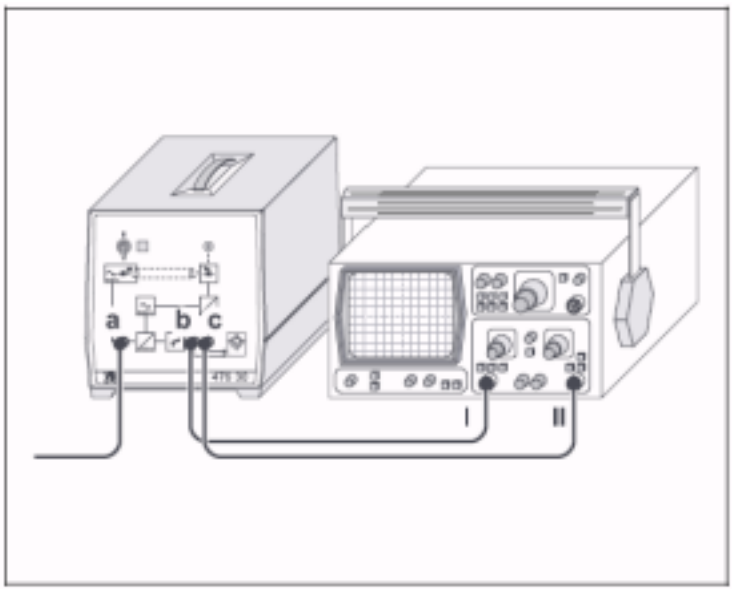


Figure 2: Schéma du branchement du montage expérimental

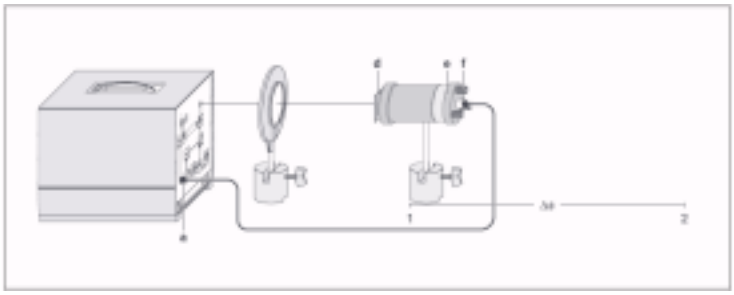


Figure 3: Schéma de principe du montage optique

Partie B Mesure de la vitesse de la lumière

Vous disposez :

1. d'un émetteur – récepteur de lumière
2. d'un banc optique
3. d'une lentille de distance focale 15 cm
4. d'un oscilloscope à 2 canaux
5. d'un tube rempli d'eau de longueur 1 m
6. d'un cylindre de plexiglas de longueur 20 cm

Mise en place :

1. *Vérifier le montage de la figure 2* ***après s'être assuré que tous les appareils sont éteints.***
   - *(**a**) doit être relié à l'émetteur de lumière*
   - *(**b**) doit être relié à la voie 1 de l'oscilloscope*
   - *(**c**) doit être relié à la voie 2 de l'oscilloscope*
2. *Allumer l'émetteur – récepteur pour procéder au réglage optique (voir figure 3) :*
   - *Effectuer les réglages optiques de base : s'assurer que tous les éléments du montage sont alignés et que le faisceau est bien dans l'axe du banc. Si nécessaire, vérifier sur chaque élément la position du faisceau avec une feuille blanche. On pourra se servir du système de réglage 3 points (**f**).*
   - *Positionner l'émetteur à au moins 1 m du récepteur et s'assurer que le spot lumineux au niveau du récepteur est le plus uniforme possible. Si nécessaire, ajuster la taille du spot à l'aide du socle (**e**) et du condenseur (**d**).*
   - *Positionner la lentille le long de l'axe du faisceau de manière à obtenir une amplitude maximale du signal à l'oscilloscope (plusieurs V_{PP}).*
   - *Approcher l'émetteur du récepteur en le faisant glisser le long du banc. L'amplitude du signal doit augmenter ou rester stable. Si non, reprendre le réglage optique.*

A Mesure de la vitesse de la lumière dans l'air.

Placer l'émetteur à une vingtaine de centimètres du récepteur. Pour cette position de référence x_1 de l'émetteur, mettre les deux signaux en phase à l'aide du bouton de réglage de la phase se trouvant sur le boîtier du récepteur. *Utiliser éventuellement la fonction XY de l'oscilloscope pour une meilleure précision*

- Déplacer lentement l'émetteur sur le banc. Que constatez-vous sur l'oscilloscope ? Expliquer.
- Déplacer l'émetteur jusqu'à une position x_2 à partir de la position de référence choisie. Mesurer sur l'oscilloscope le décalage en temps Δt_{mes} du signal récepteur par rapport au signal émetteur pour une section de mesure $\Delta d = x_2 - x_1$ (par exemple 1 m). Déduire la valeur de $\Delta t_{\text{réel}}$ puis celle de c.
- Exprimer l'incertitude relative $\frac{\Delta c}{c}$ en fonction des incertitudes relatives sur Δd et Δt_{mes} (on négligera les incertitudes sur les fréquences). Calculer la précision de la mesure et écrire le résultat sous la forme $c \pm \Delta c$.
- Comparer ce résultat avec la valeur théorique $c_{\text{th}} = 2,99792458\,10^8$ m.s^{-1}. Si cette valeur ne rentre pas dans l'intervalle d'incertitude, proposer une méthode permettant de minimiser l'incertitude et refaire la mesure.

B Détermination de la vitesse de la lumière dans un milieu matériel

La vitesse v_i de propagation des ondes lumineuses, dans un milieu i autre que le vide, est toujours inférieure à c. L'indice de réfraction n_i d'un milieu transparent, homogène et isotrope est défini comme le rapport des vitesses de la lumière dans le vide c et dans le milieu v_i : $n_i = \frac{c}{v_i}$. Dans cette partie, nous allons déterminer la vitesse de propagation de la lumière dans l'eau, puis dans un plexiglas.

Méthode de mesure.

Le milieu matériel à étudier a une longueur Δd_i et un indice n_i. Dans la méthode de mesure proposée, on commence par mettre les signaux émetteur et récepteur en phase pour une distance Δd entre l'émetteur et le récepteur dans l'air. Le signal parcourt alors cette distance en un temps que l'on notera t_1.

On déplace ensuite l'émetteur d'une longueur Δd_i correspondant à celle du milieu, puis on intercale le milieu entre l'émetteur et le récepteur. Le signal parcourt maintenant la distance $\Delta d + \Delta d_i$ en un temps que l'on notera t_2. On observe alors un décalage temporel Δt_{mes}, que l'on corrige pour obtenir $\Delta t_{\text{réel}}$ correspondant au temps mis par la lumière pour parcourir le milieu de longueur Δd_i à la vitesse v_i: $\Delta t_{\text{réel}} = \frac{\Delta d_i}{v_i}$.

- Exprimer $\Delta t_{\text{réel}}$ en fonction de t_1 et t_2, puis en fonction de Δd, c, Δd_i et v_i. Retrouver ainsi l'expression ci-dessus.

B-1 Vitesse de la lumière dans l'eau.

- En utilisant le tube de longueur 1 m contenant de l'eau, déterminer la vitesse de la lumière v_{eau} dans l'eau. En déduire l'indice de réfraction n_{eau} de l'eau.
- Déterminer les incertitudes sur v_{eau} et n_{eau}.
- la valeur de l'indice obtenue par cette méthode est-elle en accord avec la valeur couramment admise (1,33)?

B-2 Vitesse de la lumière dans le plexiglas.

- En utilisant le bloc de plexiglas de longueur 20 cm, déterminer la vitesse de la lumière v_{plexi} dans le plexiglas. En déduire l'indice de réfraction n_{plexi} du plexiglas.
- Déterminer les incertitudes sur v_{plexi} et n_{plexi}.
- En conclusion, commenter la précision de cette méthode de mesure de la vitesse de la lumière.

C Synthèse Partielle

- Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une synthèse (5 – 10 lignes) détaillant

⋆ les principales conclusions scientifiques obtenues

⋆ les points éventuels qui resterait à clarifier.

Partie C Étude du phénomène de battement par addition de signaux

Ce phénomène de battement se produit lorsque l'on superpose deux vibrations sinusoïdales de pulsations ω_1 et ω_2 distinctes, cette fois-ci sans utiliser un multiplieur. Dans le cas où les deux vibrations sont d'amplitudes identiques et égales à A, la vibration $x(t)$ résultant de cette superposition s'écrit : $x(t) = A\cos(\omega_1 t) + A\cos(\omega_2 t)$.

On se propose de réaliser expérimentalement l'opération de superposition de deux signaux sinusoïdaux $x_1(t) = A\cos(\omega_1 t)$ et $x_2(t) = A\cos(\omega_2 t)$, délivrés par deux générateurs distincts 1 et 2. Les deux signaux seront d'amplitude identique et de fréquences légèrement différentes. On prendra par exemple : $A = 2$ V, $f_1 = 100$ kHz et $f_2 = 90$ kHz.

- Observer d'abord simultanément les deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sur chacune des voies de l'oscilloscope. Expliquer pourquoi le signal observé sur la voie 2 « défile » lorsque l'oscilloscope est déclenché sur la voie 1. Dans l'expérience, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ s'écrivent-ils mathématiquement de la même façon que ci-dessus ?
- Pour réaliser la superposition des deux signaux, il suffit de brancher les deux générateurs en parallèle aux bornes d'une résistance de 50 Ω. Observer le résultat de la superposition des deux signaux à l'oscilloscope et reporter sur votre compte-rendu un schéma du signal observé. Vous prendrez soin de bien préciser les fréquences des deux signaux utilisés ainsi que la base de temps de l'oscilloscope utilisée pour l'observation.
- On se propose ensuite de filtrer le signal $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ par un filtre passe-bas puis un filtre passe-haut dont les fréquences de coupure sont toutes deux voisines de 10 kHz. Quel est le résultat du filtrage du signal $x(t)$ par le filtre passe-bas ? Même question pour le filtrage par le filtre passe-haut. Expliquer le phénomène observé.

Partie D Synthèse Générale

- Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant ce TP, utiliser les 20 dernières minutes de la séance pour **rédiger** sur votre cahier de laboratoire un bilan de la séance (10-15 lignes) contenant

⋆ une synthèse de vos principaux résultats,

⋆ une conclusion générale liant les résultats entre eux,

⋆ une synthèse de vos apprentissages.

TP 5
Étude du câble coaxial

Les câbles coaxiaux sont utilisés dans toutes sortes de connexions en réseaux. Le but du TP est de se familiariser avec les principales caractéristiques du câble coaxial et de comprendre son comportement de guide d'onde. L'étude de la propagation des ondes de tension et de courant dans un câble coaxial fera l'objet d'un séance de TD. Quelques éléments de théorie sont reportés en annexe de ce TP.

Un câble coaxial, qui permet de relier entre eux deux appareils, remplace à lui seul deux fils ordinaires. Il comporte en effet deux conducteurs : le conducteur extérieur, cylindrique et creux, et le conducteur central. Ces deux conducteurs sont séparés par un isolant et l'ensemble est protégé par une gaine plastifiée (Fig. 1).

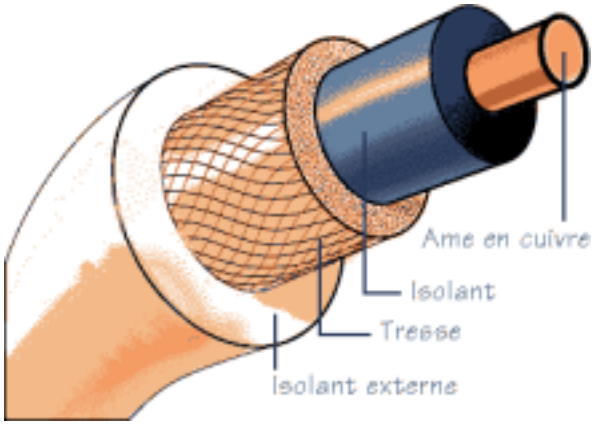


Figure 1: Schéma d'un câble coaxial

Le câble coaxial possède l'avantage, par rapport aux cordons ordinaires, d'offrir une meilleure protection contre les signaux parasites (on parle de blindage).

Pour des raisons de sécurité, le conducteur extérieur, que l'utilisateur peut-être amené à toucher plus facilement que l'âme centrale, est connecté à la carcasse de l'appareil, elle-même reliée à la Terre par le cordon d'alimentation du secteur. Le conducteur central, dont le potentiel n'est en général pas nul, est parfois appelé "point chaud"et ne doit jamais être en contact avec l'utilisateur.

⋆ ⋆
⋆

Rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (10 – 15 lignes) présentant l'objet ou le phénomène d'étude ainsi que son contexte (utilité pratique et/ou fondamentale)

Partie A Caractéristiques linéiques

L'étude porte sur le câble dit **KX 15** (de référence RG58C/U) dont la fiche technique est reproduite dans l'annexe .

A Préambule

Après avoir lu l'ensemble de cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (5 – 10 lignes) présentant

- ⋆ les principaux objectifs scientifiques de cette partie,
- ⋆ les moyens mis en œuvre pour les atteindre.

B Étude théorique

Capacité linéique

Un câble coaxial constitue un **condensateur** puisqu'il est formé de deux conducteurs en influence totale séparés par un isolant. Si on applique une différence de potentiel entre ces deux conducteurs, des charges de signes opposés s'accumulent sur leurs surfaces en regard, et un champ électrique $\overrightarrow{E}$ règne alors dans le matériau diélectrique constituant l'isolant.

Le câble coaxial possède donc une capacité par unité de longueur, ou capacité linéique, notée γ, d'expression :

$$\gamma = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

où C est la capacité du câble, l sa longueur, R_1 et R_2 les rayons des conducteurs intérieur et extérieur, et ε_r la permittivité diélectrique relative de l'isolant.

- Vérifier l'homogénéité de la relation ci-dessus.
- Calculer la valeur théorique de γ pour le câble KX 15 avec l'aide des données suivantes : $D_2 = 2R_2 = 2,95$ mm, $D_1 = 2R_1 = 0,78$ mm (équivalent aux 19 brins de fil de diamètre 0,18 mm) et $\varepsilon_r = 2,25$ (polyéthylène).
- Comparer γ à la valeur donnée par le constructeur.

Inductance linéique

Le câble coaxial possède également une self inductance par unité de longueur, tout comme une bobine : en effet, lorsqu'un courant électrique circule dans le conducteur intérieur, il revient par le conducteur extérieur et crée dans la zone intermédiaire, c'est–à–dire l'isolant, un champ magnétique $\vec{B}$. Si le flux de $\vec{B}$ varie, il se produit un phénomène d'auto-induction dans le câble.

Le câble coaxial possède une inductance linéique, notée λ, telle que :

$$\lambda = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

où L est l'inductance du câble et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

- Sachant que la constante $\frac{\mu_0}{4\pi}$ est égale à 10^{-7} H.m^{-1}, calculer la valeur de l'inductance linéique λ du câble KX 15.
- Trouver la relation qui existe entre γ, λ et ε_r, sachant que $\varepsilon_0\, \mu_0\, c^2 = 1$.

C Caractérisation des paramètres electromagnétiques du câble

Préparation

Un câble coaxial est un quadripôle, de bornes A B C D

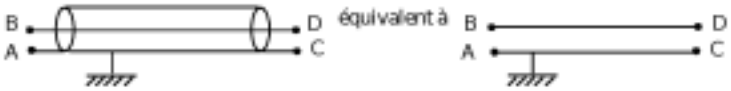


Figure 2: Shéma équivalent du câble

Vu entre les bornes A et B, il constitue un dipôle, dont on cherche à mesurer la capacité et l'inductance.

Pour la mesure de capacité, l'extrémité CD du câble est ouverte (ou fermée sur une résistance infinie). Par contre, pour la mesure d'inductance, on doit relier entre elles les bornes C et D en fermant l'extrémité CD sur une résistance nulle.

- Justifier ces deux conditions.

Les mesures de capacité et d'inductanc seront réaliser à l'aide d'un LC-mètre dont la notice est disponible en salle de TP. Son usage est très simple puisque, placé en mesure de L ou de C et sur la position adéquate du sélecteur, il donne directement l'inductance ou la capacité du dipôle AB relié à ses bornes.

Lors de la séance de TP, vous disposerez de câbles KX 15 de différentes longueur (1, 2 ,5 ,10 et 100 m).

- Rédiger un protocole pour la détermination de la capacité linéique et de l'inductance linéique du câble KX 15.

Mesures

- Déterminer la capacité linéique et de l'inductance linéique du câble KX 15 en utilisant votre protocole.
- La notion de capacité et d'inductance "linéique" est-elle justifiée ?
- Comparer vos résultats aux valeurs attendues.
- Déduire des mesures de γ et λ une valeur expérimentale de la permittivité diélectrique relative ε_r du polyéthylène et la comparer à valeur à celle donnée au début du chapitre.

D Synthèse Partielle

- Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une synthèse (5 – 10 lignes) détaillant
  - ⋆ les principales conclusions scientifiques obtenues
  - ⋆ les points éventuels qui resterait à clarifier.

Partie B Propagation d'impulsions

Lors d'une utilisation courante en TP, les câbles coaxiaux ont des longueurs de l'ordre du mètre. La tension délivrée par le GBF est transmise quasi instantanément à l'oscilloscope. Il n'en est pas de même pour des câbles de plusieurs dizaines ou plusieurs centaines de mètres.

A Préambule

- Après avoir lu l'ensemble de cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (5 – 10 lignes) présentant
  - ⋆ les principaux objectifs scientifiques de cette partie,
  - ⋆ les moyens mis en œuvre pour les atteindre.

A-1 Préliminaire théoriques

On montre que le câble coaxial est un **guide d'onde**: l'onde électromagnétique créée en un point du câble (dans l'espace entre les deux conducteurs) se propage le long du câble (dans le diélectrique). La vitesse v de l'onde dépend de la permittivité ε_r du diélectrique, selon l'expression :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\gamma\lambda}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

- Calculer, par l'une des formules ci-dessus, la valeur de la vitesse de propagation v de l'onde dans votre câble KX 15 en utilisant vos mesures pour γ, λ et ε_r.
- Commenter l'ordre de grandeur du résultat.

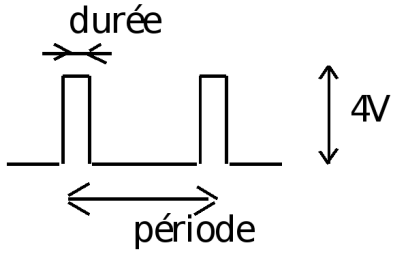
B Étude de la propagation

Dans cette partie du TP, on observe la propagation, le long du câble, d'une impulsion de tension créée à l'une de ses extrémités. Le câble n'étant pas infini, il faudra tenir compte de la réflexion des ondes aux extrémités du guide d'onde.

L'impulsion est fournie par un générateur d'impulsions dont la notice est disponible en salle de TP.

Montage (Fig. 3) :

1. *Observer le signal du générateur d'impulsions en voie 1 de l'oscilloscope.*
2. *Choisir la sortie positive du générateur d'impulsions qui donne une impulsion orientée "vers le haut" et une amplitude maximale de 5V.*



3. *Régler la fréquence des impulsions à une valeur inférieure à 300 kHz et le rapport cyclique à une valeur autour de 10 % . Pour l'amplitude, on prendra 4 V.*
4. *De l'autre côté du T, connecter le câble coaxial KX 15 de 100 m et, à l'aide d'un second T placé à l'autre extrémité du câble, observer en voie 2 de l'oscilloscope le signal recueilli au bout du câble.*

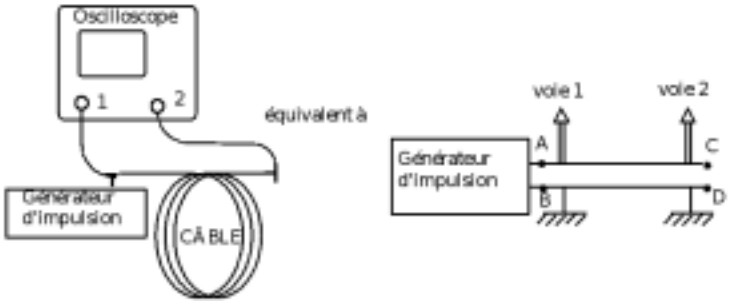


Figure 3: Schéma du montage pour l'étude de la propagation

Remarque : Les deux voies de l'oscilloscope doivent être en DC et la synchronisation en automatique. Si le signal n'est pas visible, jouer sur le bouton level. Penser éventuellement à synchroniser l'oscilloscope sur un signal extérieur pris à la sortie TRIG OUT TTL du générateur d'impulsions (6). Décaler verticalement les deux voies de l'oscilloscope.

Observation et interprétation

- Représenter soigneusement l'oscillogramme bi-courbe obtenu, en relevant la position des impulsions sur l'axe des temps, leur amplitude et leur forme. Indiquer également la valeur des sensibilités de l'oscilloscope.
- Pour mieux comprendre le phénomène, on pourra faire varier doucement la fréquence du générateur d'impulsions. À quoi correspond chacune des trois impulsions observées ?
- Interpréter les décalages dans le temps entre les impulsions ainsi que leurs amplitudes.

Mesure de la vitesse de propagation v

- Déterminer la vitesse de propagation v de l'impulsion le long du câble en expliquant la méthode employée.
- Comparer v à la valeur obtenue par la formule théorique. Conclure.

C Impédance caractéristique R_C

Observations et interprétation

Jusqu'à présent, l'extrémité du câble était "ouverte". Autrement dit, les extrémités C et D des conducteurs interne et externe étaient fermées sur une résistance infinie ou très grande, comme celle de l'oscilloscope ($\simeq 1$ MΩ).

- Connecter maintenant cette extrémité à une terminaison $R \simeq 0\ \Omega$.
- Représenter le nouvel oscillogramme bicourbe obtenu. Qu'y a-t-il de changé par rapport à l'oscillogramme obtenu à la section ?
- Déduire des changements observés en voie 1 l'influence de la valeur de la résistance R placée à l'extrémité du câble.
- À l'aide des conclusions précédentes, interpréter la forme du signal maintenant observable en voie 2 (on devra éventuellement augmenter fortement la sensibilité sur cette voie).

Mesure de R_c

- Connecter maintenant à l'extrémité du câble une boîte de résistances à décades (Fig. 4).
- Montrer expérimentalement qu'il existe une valeur particulière de la résistance R placée au bout du câble pour laquelle aucune onde n'est réfléchie.
- On l'appelle la résistance caractéristique du câble et on la note R_c.
- Comparer R_c mesurée à la valeur du constructeur. Remplacer la boîte de résistances par la terminaison standard dite "bouchon 50 Ω". Qu'observe-t-on ?

Expression théorique de R_c

L'étude théorique donne : $R_c = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$.

- Vérifier que cette expression a bien la dimension d'une impédance.

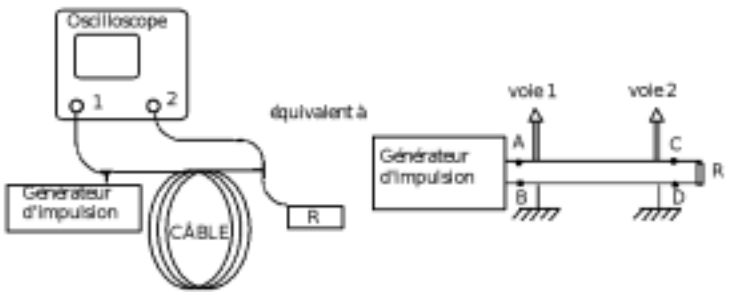


Figure 4: Schéma de montage

- Calculer par cette formule la valeur de R_c pour votre câble et la comparer à la valeur mesurée. Conclure.

Adaptation d'impédance

L'onde, après s'être réfléchie à l'extrémité du câble, par exemple pour R infinie ou nulle, repart en direction du générateur d'impulsion.

- Subit-elle de nouveau une réflexion au niveau du générateur ? Quelle est l'impédance de sortie du générateur d'impulsion ? Expliquer.
- On dit qu'il y a *adaptation d'impédance* entre le générateur et le câble. Expliquer.

D Synthèse Partielle

- Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une synthèse (5 – 10 lignes) détaillant

  ⋆ les principales conclusions scientifiques obtenues

  ⋆ les points éventuels qui resterait à clarifier.

Partie C Étude en fréquence

Pour cette étude, on utilise un "analyseur de spectre", modèle HM 5006, dont la notice est disponible en salle de TP.

Le but de cette partie est de savoir comment le câble coaxial se comporte vis à vis des différentes fréquences. Pour cela, on applique à l'extrémité du câble un signal sinusoïdal dont l'atténuation est fixe tandis que sa fréquence est balayée sur un large domaine. C'est la borne OUTPUT (23) du HM 5006 qui joue ce rôle. On analyse ensuite le signal qui parvient à l'autre extrémité du câble en reliant celle-ci à la borne INPUT (13) du HM 5006 qui est l'analyseur de spectre proprement dit.

L'analyseur de spectre affiche une courbe dont l'abscisse est la fréquence du signal selon une échelle linéaire et où l'ordonnée est l'intensité du signal en décibels. On rappelle que le coefficient d'atténuation en décibels (dB) est égal à

$$20 \log \frac{U_s}{U_e},$$

où U_s et U_e sont respectivement les tensions de sortie et d'entrée.

- Quelles sont les impédances d'entrée et de sortie de l'analyseur de spectre ? Commenter.

A Préambule

- Après avoir lu l'ensemble de cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (5 – 10 lignes) présentant

  ⋆ les principaux objectifs scientifiques de cette partie,

  ⋆ les moyens mis en œuvre pour les atteindre.

B Étude de l'atténuation du signal en fonction de la fréquence

Montage : *Réaliser le montage avec le câble KX 15 de 100 m. Choisir la sensibilité horizontale de 50 MHz par division de manière à observer la réponse du câble pour toutes les fréquences comprises entre 0 et 500 MHz.*

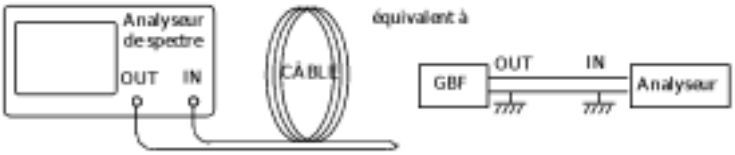
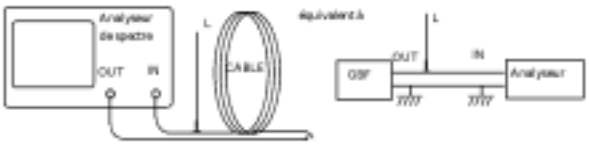


Figure 5: Étude en fréquence

- Représenter sur un schéma l'allure de la courbe qui s'affiche à l'écran de l'analyseur de spectre. Le câble laisse-t-il passer de la même manière les basses et les hautes fréquences ? Comment peut-on le caractériser ?
- Mesurer le coefficient d'atténuation en dB du câble KX 15 de 100 m pour un intervalle de fréquence de 100 MHz.
- Faire la même mesure pour le câble KX 15 de 10 m et la comparer aux indications du constructeur. Comment la longueur du câble joue-t-elle sur l'atténuation ?

C Étude d'un câble comportant une ramification

Montage : *Reprendre le câble KX 15 de 100 m et lui ajouter une ramification de 1 m de long dont l'extrémité libre est "ouverte" ($R \to \infty$).*



- Représenter sur un schéma la nouvelle courbe affichée par l'analyseur de spectre. Quelles modifications notables apporte la ramification ?
- Noter les fréquences dites d'*antirésonance*. Mesurer leur intervalle $\Delta\nu$.
- Donner ensuite à la longueur L_r de la ramification les valeurs de 2 m puis 4 m et mesurer à chaque fois l'intervalle $\Delta\nu$ entre deux fréquences successives d'antirésonance.
- Comment varie l'écart $\Delta\nu$ en fonction de la longueur L_r de la ramification ?
- Qu'y a-t-il de changé si l'extrémité de la ramification est fermée sur une résistance nulle ?
- Interpréter, y compris quantitativement, ces antirésonances et donner la relation entre $\Delta\nu$ et L_r en considérant d'une part l'onde qui se propage dans le câble sans être passée par la ramification et d'autre part celle qui a fait un aller-retour dans cette ramification.

D Synthèse Partielle

Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une synthèse (5 – 10 lignes) détaillant

- ⋆ les principales conclusions scientifiques obtenues
- ⋆ les points éventuels qui resterait à clarifier.

Partie D Synthèse Générale

Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant ce TP, utiliser les 20 dernières minutes de la séance pour **rédiger** sur votre cahier de laboratoire un bilan de la séance (10-15 lignes) contenant

- ⋆ une synthèse de vos principaux résultats,
- ⋆ une conclusion générale liant les résultats entre eux,
- ⋆ une synthèse de vos apprentissages.

Partie E Annexes

-1 Théorie sur le câble coaxial comme "guide d'onde"

Le schéma de la figure 6 représente l'équivalent d'une longueur infiniment petite dx de câble coaxial, de capacité $\gamma\,\mathrm{d}x$ et d'inductance $\lambda\,\mathrm{d}x$. Il est cohérent avec l'existence pour le câble d'une inductance linéique et d'une capacité linéique puisque la bobine de la tranche dx est placée en série, et sa capacité en parallèle avec celles de la tranche suivante. Or on sait que des inductances en série et des capacités en parallèle s'ajoutent.

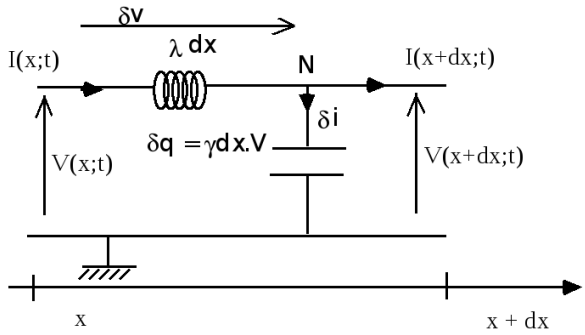


Figure 6: Schéma équivalent

Par contre, ce schéma ne considère aucune résistance : ni résistance interne des bobines, ni résistance de fuite des condensateurs. En cela, c'est un modèle simplifié du câble qui ne peut pas rendre compte des phénomènes dissipatifs qui s'y produisent à savoir l'atténuation du signal.

Appliquons la loi des nœuds en N :

$$I(x,t) = I(x+\mathrm{d}x,t) + \delta i,$$

d'où

$$\frac{\partial I}{\partial x}\mathrm{d}x = -\delta i.$$

or $\delta i = \frac{\partial\,\delta q}{\partial t}$ avec $\delta q = \gamma\,\mathrm{d}x\,V$ c'est-à-dire :

$$\delta i = \gamma\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial V}{\partial t}.$$

D'où il vient :

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\gamma\,\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{1}$$

D'autre part, la loi des mailles donne :

$$V(x+\mathrm{d}x,t) = V(x,t) + \delta v$$

où δv est la tension aux bornes de la bobine $\lambda\,\mathrm{d}x$, en convention générateur. Donc $\delta v = -\lambda\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial I}{\partial t}$ d'où il vient :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\lambda\,\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{2}$$

Si on dérive l'équation (1) par rapport à x il vient :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -\gamma\,\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t} = \gamma\lambda\,\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \tag{3}$$

en utilisant l'égalité des dérivées partielles croisées (indépendance du temps et de l'espace).

L'équation (3) est de la forme d'une équation de propagation en I:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2},$$

avec une vitesse de propagation

$$v = \frac{1}{\sqrt{\gamma\lambda}}.$$

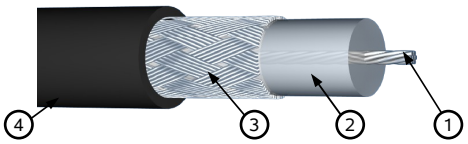
On obtient de la même manière l'équation de propagation pour la tension V à l'aide de l'équation (2) dérivée et de l'équation (1).

-2 Fiche technique du câble

110120-00

KX 15 / RG 58CU

elbaC Cable
Chemin du Virolet – Rowenta
F-27200 VERNON
Tel : +33 (0)2 32 21 64 78
Fax : +33 (0)2 76 01 31 80
www.elbac.fr / info@elbac.fr



Construction	
Inner conductor	(1)
Material	Tinned Copper
Diameter	19 x Ø 0.19 ± 0.005 mm
Dielectric	(2)
Material	Solid PE
Color	Natural
Diameter	Ø 2.95 mm
Outer conductor	
1st Layer	(3)
Material	Tinned Copper
Braiding	16 x (7 x Ø 0.12 ± 0.003 mm)
Coverage	92.8%
Sheath	(4)
Material	PVC
Color	Black RAL 9005
Diameter	Ø 4.95 ± 0.15 mm
Mass	39 kg/km
Marking on sheath	
Printing with XXX quantity in meter still available per reel	« KX15 / RG 58CU – MIL C17 – 50 OHMS - elbaC – XXX m »
Color / Process	White / Ink jet
Step	1 m
Stripping force / 50 mm	
Dielectric	15 N ≤ F ≤ 35 N

Electrical characteristics	
Impedance	50 ± 2 Ω
Capacitance	< 101 pF/m
Max DC resistance	
Inner conductor	35.4 Ω/Km
Outer conductor	15 Ω/Km
Propagation velocity ratio	66%
Max operating voltage RMS	1900 V
Insulation resitance 20°C	>1000 MΩ/km

Longitudinal attenuation

Frequency MHz	Max attenuation dB/100m
1	1.3
10	4.6
50	10.8
100	16.1
200	24.0
400	37.7
700	55.8
900	65.6
1000	70.5

Thermal characteristics	
Rated Temperature	80°C

Packaging

500 m / wooden drum

Meet Standards

MIL C17
RoHS European directive

Notes

© copyright 2007 – elbaC Cable ® is a registered trademark 110120-00.pdf 14/09/2007 10:04:09

TP 6
Solide en rotation

La notion de moment d'inertie est primordiale lorsqu'on étudie la dynamique d'un solide indéformable en rotation : l'application du théorème du moment cinétique fait immédiatement apparaître cette quantité.

L'inertie de rotation utilisée dès les premières machines et un moyen prometteur pour le stockage de l'énergie[5]

A Synthèse Partielle

Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une synthèse (5 – 10 lignes) détaillant

- ⋆ les principales conclusions scientifiques obtenues
- ⋆ les points éventuels qui resterait à clarifier.

Partie A Éléments théoriques

A Mouvements d'un solide en rotation autour d'un axe

Le mouvement d'un solide en rotation est décrit dans un référentiel galiléen par le théorème du moment cinétique dont on rappelle l'expression évaluée en un point G:

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_G}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{M}_G\left(\overrightarrow{F}_{\text{ext}}\right) \tag{1}$$

Le moment cinétique d'un solide $\mathcal{S}$ est la somme des moments cinétiques des éléments de masse $\mathrm{d}m$ qui le compose. Soit, en notant $\overrightarrow{v}_M$ la vitesse d'un point courant M du solide $\mathcal{S}$:

$$\overrightarrow{L_G} = \int_{\mathcal{V}} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{v}_M \,\mathrm{d}m. \tag{2}$$

Lorsque le solide est en rotation autour d'un axe Δ_G avec la vitesse angulaire ω, le champ de vitesse $\overrightarrow{v}_M$ est orthoradial à l'axe Δ_G, il est utile d'introduire la distance d_M entre le point courant M et l'axe Δ_G. La distance d_M se confond avec le paramètre ρ des coordonnées cylindrique (ρ, θ, z) si la direction $\overrightarrow{e}_z$ est alignée avec l'axe Δ_G. La vitesse du point courant s'exprime sous la forme :

$$\overrightarrow{v}_M = \rho_M\,\omega\,\overrightarrow{e}_\theta.$$

L'expression du moment cinétique s'écrit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L}_G &= \int_{\mathcal{V}} (\rho_M\,\overrightarrow{e}_\rho + z_M\,\overrightarrow{e}_z) \wedge \rho_M\,\omega\,\overrightarrow{e}_\theta\,\mathrm{d}m. &(3)\\ &= \int_{\mathcal{V}} \rho_M^2\omega\,\overrightarrow{e}_z\,\mathrm{d}m - \int_{\mathcal{V}} z_M\rho_M\,\omega\,\overrightarrow{e}_\rho\,\mathrm{d}m. &(4)\end{aligned}$$

La première intégrale représente la composante du moment cinétique dans la direction de l'axe de rotation, la seconde les composantes dans les directions transverses. Seule la composante du moment cinétique dans la direction de l'axe de rotation intervient dans la description du mouvement, notons $\overrightarrow{L}_\Delta$ cette composante

$$\overrightarrow{L}_\Delta = \left(\int_{\mathcal{V}} \rho_M^2\,\mathrm{d}m\right)\cdot\omega\,\overrightarrow{e}_z. \tag{5}$$

En notant $\overrightarrow{\omega} = \omega\,\overrightarrow{e}_z$ le vecteur rotation du solide et

$$I_\Delta = \int_{\mathcal{V}} \rho_M^2\,\mathrm{d}m = \int_{\mathcal{V}} d_M^2\,\mathrm{d}m \tag{6}$$

le moment d'inertie du solide autour de l'axe de rotation; le moment cinétique prend la forme compact

$$\overrightarrow{L}_\Delta = I_\Delta\cdot\overrightarrow{\omega}. \tag{7}$$

A-1 Oscillation d'un solide en rotation

On considère un solide quelconque, solidaire d'un axe vertical Δ_G passant par son centre de gravité G. L'axe Δ_G peut pivoter autour de son axe de révolution en étant fixé à un ressort spiral de constante de torsion C. On néglige les frottements du solide autour de l'axe Δ_G.

Par définition, la constante de torsion C du ressort spiral est telle que

Le ressort spirale comprimé grâce à une rotation d'un angle θ développe un moment de rappel de norme Γ:

$$\Gamma = -C\theta; \tag{8}$$

qui tend à le ramener dans sa position d'équilibre. La constante de torsion du ressort C se mesure en N.m/rad.

À partir de la relation qui décrit le mouvement d'un solide en rotation autour de l'axe $(O, \overrightarrow{e}_z)$, et de la définition (8), montrer que le solide effectue un mouvement de rotation sinusoïdale autour de Δ_G avec la période

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_G}{C}}.$$

5. voir par exemple `http://pulse.edf.com/fr/voss-stocker-lenergie-solaire-cest-facile`

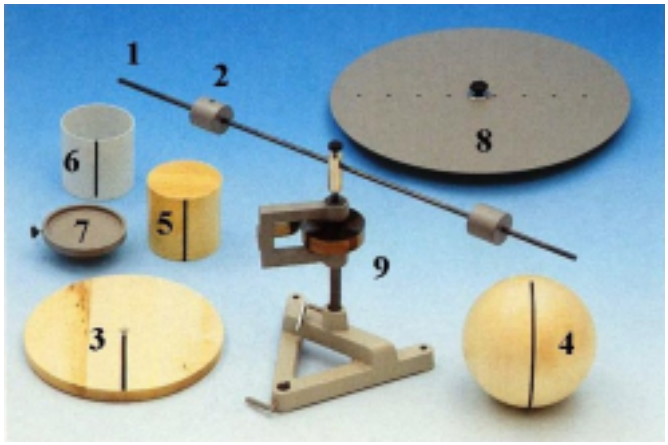


Figure 2: Matériel disponible

A-2 Addition des moments d'inertie

- À partir de l'expression du moment d'inertie I_Δ, montrer que deux solides quelconques tournants autour du même axe Δ ont un moment d'inertie d'ensemble

$$I_\Delta = I_{\Delta 1} + I_{\Delta 2},$$

si $I_{\Delta 1}$ et $I_{\Delta 2}$ représentent les moments d'inertie de chacun des solides.

B Roulement sur un plan horizontal

On considère un cylindre qui roule sans glisser sur un plan horizontal, après avoir été poussé.

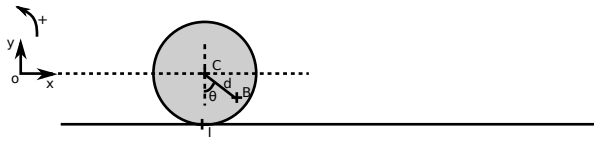


Figure 1: Schéma à un instant t d'un cylindre roulant sur un plan horizontal. C: le centre de masse. B: un point sur le cylindre à une distance d du centre, et formant un angle θ entre CB et CI. I est le point de contact entre le cylindre et le sol.

- Reproduire sur votre copie le schéma ci-dessous, y indiquer les forces auquelles est soumis le cylindre, et placer la vitesse du centre de masse $\overrightarrow{V_c}$ et le sens de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du cylindre
- appliquer le *théorème du centre de masse* et en déduire l'expression de la vitesse du centre de masse $\overrightarrow{V_c}$, ainsi que l'expression de la position du centre de masse $\overrightarrow{OC}$ en fonction du temps.
- Appliquer le *théorème du moment cinétique* et en déduire l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, ainsi que l'expression de l'angle θ au cours du temps
- Donner la relation liant la vitesse de deux points d'un solide et l'appliquer entre le centre de masse et le point de contact avec le sol. Donner la définition d'un frottement sans glissement, et en déduire que $\dot{x_c} = -R\dot{\theta}$ (avec x_c la coordonnée selon x du centre de masse).

Partie B Mesure de moments d'inertie

On se limitera ici à des rotations autour d'un axe fixe, passant ou non par le centre de gravité G du solide. Le but de cette partie est la détermination de moments d'inertie de quelques solides homogènes présentant une symétrie de révolution, par rapport à cet axe de symétrie; ainsi que la validation expérimentale du théorème de Huygens.

A Préambule

Après avoir lu l'ensemble de cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (5 – 10 lignes) présentant

- ⋆ les principaux objectifs scientifiques de cette partie,
- ⋆ les moyens mis en œuvre pour les atteindre.

B Matériel disponible :

La figure 2 présente une photographie du matériel disponible:

- Une tige (1) de longueur L = 60 cm, crantée tous les 5 cm, et pouvant recevoir deux masses coulissantes (2), identiques et considérées comme ponctuelles ;
- Un cylindre plat en bois (3) ;
- Une sphère pleine en bois (4) ;
- Deux cylindres de mêmes dimensions, l'un (5) en bois plein, l'autre (6) en métal et creux ;
- Un support (7) pour les deux cylindres (5) et (6) ;
- Un grand plateau métallique (8) de rayon R = 20 cm et percé de trous tous les 4 cm ;
- Un ressort spiral (9) possédant une constante de torsion C qu'il faudra préalablement déterminer.
- Une potence équipée d'un axe horizontal pour y accrocher le disque (8) ou le ressort spiral (9);
- Un chronomètre et une balance.

Les caractéristiques des éléments (1) à (8) (masses et dimensions) seront données en salle de TP.

C Détermination de la constante de torsion C (20 min max)

Procéder avec soin, car de la détermination correcte de C dépendent tous les autres résultats de cette partie.

- Rédiger un protocole expérimental permettant de déterminer la constante de torsion C à l'aide de la tige (1) et des deux masses (2) considérée comme ponctuelle. Justifier la méthode choisie.

Remarques: Le moment d'inertie d'une tige homogène de longueur l autour d'un axe lui étant perpendiculaire et passant par son centre de gravité vaut $I_{\text{tige}} = m\,\frac{l^2}{12}$.

- Appliquer votre protocole pour déterminer la constante de torsion C du ressort.
- Par la suite, les moments d'inertie I seront déduits de la période d'oscillation T par la relation

$$I = k.T^2;$$

donner la valeur numérique de k ainsi que son incertitude.

D Moment d'inertie de quelques solides

Attention, important : *Pour mesurer la période d'oscillation d'un solide, celui-ci doit être lancé en le tournant* ***d'un angle de 180°*** *et de manière à* ***comprimer le ressort et jamais l'inverse !***

D-1 Tige et masse

- Placer la tige (1) munie des deux masses (2) sur le ressort ; mesurer la période d'oscillation pour différentes positions symétriques des masses et en déduire dans chaque cas le moment d'inertie.
- Estimer la précision obtenue sur ces déterminations, puis comparer avec la relation théorique.

D-2 Cylindre et sphère

- Placer le cylindre plat (3) sur le ressort ; mesurer sa période d'oscillation et en déduire son moment d'inertie.
- Estimer la précision obtenue sur cette détermination, puis comparer avec la relation théorique.
- Mêmes questions pour la sphère (4).

D-3 Cylindre plein ou creux

- Placer le support de cylindre (7) sur le ressort et déterminer son moment d'inertie I_{support}.
- Placer alors sur le support (7) le cylindre plein (5), puis le cylindre creux (6). Déterminer leurs moments d'inertie respectifs I_{P} et I_{C}, après soustraction de I_{support}.
- Les deux cylindres ont mêmes dimensions et même masse : montrer que l'on doit alors avoir

$$\frac{I_{\text{C}}}{I_{\text{P}}} = 2,$$

et vérifier cette propriété avec les déterminations de I_{P} et I_{C}.

E Théorème de Huygens

- Placer le disque (8) sur le ressort pour mesurer son moment d'inertie I_G par rapport à l'axe normal à sa surface et passant par son centre C (confondu avec G). Comparer la valeur obtenue avec celle prévue par la théorie.

En plus du trou central, le disque est percé de 8 trous espacés du centre de 2 cm en 2 cm, jusqu'à 16 cm. Ces trous permettent de suspendre le disque à l'axe horizontal de la potence. On appelle $d = OG$ la distance séparant l'un de ces trous O avec le centre G du disque.

- Pour les 8 distances d = 2 cm, 4 cm, ... jusque 16 cm, mesurer la période d'oscillation du disque[6]. En déduire les moments d'inertie I_O correspondants.
- Tracez la courbe $I_O = f(d^2)$. Quelle est son ordonnée à l'origine ? Que vaut sa pente ?
- Vos résultats sont-ils en accord avec le théorème de Huygens?

F Synthèse Partielle

- Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une synthèse (5 – 10 lignes) détaillant
  - ⋆ les principales conclusions scientifiques obtenues
  - ⋆ les points éventuels qui resterait à clarifier.

Partie C Roulement Sans Glissement

6. On prendra soin pour cela de donner un angle de départ assez petit (inférieur à 30°).

A Introduction

Vous allez étudier de manière analytique et expérimentale le mouvement d'un cylindre qui roule, soit sur un plan horizontal ou soit sur un plan incliné. En particulier, vous allez analyser si le cylindre roule avec glissement ou sans glissement.

Expérimentalement, vous devrez simplement faire rouler le cylindre et enregistrer son mouvement grâce à une caméra. Sur le cylindre, deux LEDs sont placées. Après un traitement numérique, vous aurez accès à leurs coordonnées et elles vous permettront de caractériser complétement le mouvement du solide. Théoriquement, on peut aussi décrire complétement le mouvement du cylindre, et vous devrez comparer les résultats expérimentaux et théoriques.

B Préambule

Après avoir lu l'ensemble de cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (5 – 10 lignes) présentant

- ⋆ les principaux objectifs scientifiques de cette partie,
- ⋆ les moyens mis en œuvre pour les atteindre.

B-1 Commandes gnuplot

Pour afficher les courbes, vous utiliserez le logiciel *gnuplot* qui est basé sur des lignes de commande. L'encadré ci-dessous donne les commandes dont vous aurez besoin. Sur votre compte rendu, vous noterez les commandes que vous avez tapées pour afficher les courbes.

Commandes gnuplot:

- ✓ **afficher la colonne j en fonction de la colonne i**: p "nom_fichier" u i:j w lp ("p" pour "plot", "u" pour "using", "w" pour "with", "lp" pour "line plot").
  Exemple: p "1.txt" u 1:2 w lp
- ✓ **afficher 2 courbes:** mettre une virgule entre les deux parties
  (ex: p "nom_fichier" u 1:2 w lp, "nom_fichier" u 1:3 w lp)
- ✓ **effectuer une opération sur une colonne** (addition, multiplication, ...): utiliser la lettre $ pour indiquer la colonne et des parenthèses (ex: p "nom_fichier" u ($2*10) :($3+2))
- ✓ **Utiliser une fonction sur une colonne** (cos, sin, tan, acos, asin, atan, ...): idem qu'avant. Exemple: p "nom_fichier" u 1:(cos($1))

Vous pouvez rappeler une commande déjà effectée (et la modifier) avec les flèches haut et bas.

B-2 Matrice de rotation

Vous aurez besoin aussi d'effectuer une rotation de coordonées.

La matrice de rotation d'un angle θ est : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

La valeur de θ est positive lorsque la rotation est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

C Roulement sur un plan horizontal (20 min)

Dans un premier temps, vous allez vous intéresser au cylindre qui roule sans glisser sur un plan horizontal, après avoir été poussé. Les suestion théorique ont déjà été traité en travail préparatoire dans la première partie.

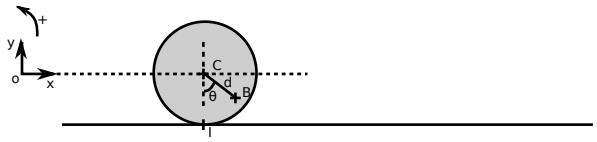


Figure 3: Schéma à un instant t d'un cylindre roulant sur un plan horizontal. C: le centre de masse. B: un point sur le cylindre à une distance d du centre, et formant un angle θ entre CB et CI. I est le point de contact entre le cylindre et le sol.

Expérience à réaliser :

1. **Allumez les leds sur le cylindre**.
2. **Lancer le logiciel principal**: *ouvrir un terminal (icône représentant un écran noir dans le menu à gauche), aller dans le répertoire "tp_roulement" (taper "cd tp_roulement"), et lancer le programme "run.sh" (taper "bash run.sh").*
3. **Enregistrer une vidéo:** *sélectionner "enregistrer une vidéo" et valider pour lancer le logiciel XIMEA. Sur ce logciel:*
   - *cliquez sur l'icone "play" (triangle) - la vidéo en direct apparait sur l'écran,*

     vérifier les valeurs du gain et du nombre d'images par seconde (fps en anglais: frames per second). Il faut que: gain=0 et fps=100 μs + **temps integration**,
   - *pour ne garder que la zone intéréssante, choisir la ROI (region of interest). Pour cela, cliquez sur le bouton "ROI" et entrez les valeurs notées sur la table dans la fenêtre venant d'apparaître.*
   - *enregister: cliquez sur l'icône "clapet de cinéma", choisir un nom de fichier, démarrer l'acquisition, pousser le cylindre pour qu'il roule jusqu'au bout de la planche et arrêter l'acquisition (icône avec un carré). Note: arrêter rapidement l'enregistrement pour que le traitement numérique ne soit pas trop long.*
   - *quitter le logiciel.*
4. **Éteindre les leds sur le cylindre**.
5. **Choisir la vidéo à traiter** *(sélectionner "choisir vidéo") et vérifier que la vidéo semble correcte (sélectionner "regarder la vidéo")*

6. **lancer le traitement numérique** *(sélectionner "lancer le traitement numérique"), pour lancer le programme qui va récupérer les coordonnées des 2 Leds sur chaque image de la vidéo. Il vous sera demandé l'angle d'inclinaison de la planche (ici 0 radian).*

C-1 Analyse des données

Le logiciel écrit les coordonnées des LEDs dans un fichier qui comporte 10 colonnes:

col n^o	variable	description	unité
1	t	date	s
2	$x_r(t)$	abcisse led rouge à la date t	cm
3	$y_r(t)$	ordonnée led rouge à la date t	cm
4	$x_b(t)$	abcisse led bleue à la date t	cm
5	$y_b(t)$	ordonnée led bleue à la date t	cm
6	$x_r(t-\Delta t)$	abcisse led rouge à la date $t-\Delta t$	cm
7	$y_r(t-\Delta t)$	ordonnée led rouge à la date $t-\Delta t$	cm
8	$x_b(t-\Delta t)$	abcisse led bleue à la date $t-\Delta t$	cm
9	$y_b(t-\Delta t)$	ordonnée led bleue à la date $t-\Delta t$	cm
10	$\dot{\theta}$	vitesse angulaire	rad.s^{-1}

Avec les neuf premières colonnes vous allez pouvoir caractériser entièrement le mouvement du cylindre (position d'un point, valeur de l'angle, vitesse d'un point, vitesse angulaire, accélération d'un point). Δt est la durée entre 2 points successifs (ici $\Delta t = 10$ ms car fps=100).

Néanmoins, pour les mesures d'angles, il faut utiliser la fonction $\tan^{-1}$, qui donne une valeur entre $-\pi$ et $+\pi$, avec des discontinuités (la valeur juste après π est $-\pi$). Cela rend les résultats difficiles à lire, en particulier pour la vitesse angulaire (la dérivée au niveau de la discontinuité donne une valeur très grande). En 10ème colonne, on vous donne donc la vitesse angulaire, sans discontinuité, et dont la méthode utilisée pour la calculer est donnée en annexe.

Lancer le logiciel gnuplot : *Pour tracer des courbes à partir de ce fichier de résultats, utilisez le logiciel gnuplot: ouvrez un nouveau terminal, allez dans le répertoire* `"tp\_roulement"` *(*`cd`*tp_roulement), puis dans le répertoire* `"resultats"` *(*`cd`*resultats) et tapez* `"gnuplot"` *(les lignes de commandes sont données en première page). Le nom du fichier résultat est le même que celui de votre vidéo, avec l'extension* `".data"` *à la place de l'extension* `".avi"` *(ex: 1.avi → 1.data)*

Étude de la trajectoire du cylindre

- afficher sur un même graphique *la trajectoire* (y en fonction de x) de la LED rouge et bleue dans le référentiel du laboratoire. Reproduire qualitativement ces courbes sur votre copie. N'oubliez pas d'écrire à chaque fois sur votre copie les commandes gnuplot utilisées.

Étude de la position et de la vitesse du centre de masse

- Afficher la *position* selon x du centre de masse en fonction du temps dans le référentiel du laboratoire. Reproduire qualitativement cette courbe sur votre copie.
- En déduire la valeur de la vitesse.

C-2 Vitesse du cylindre au point de contact

- Vérifier si le critère de *roulement sans glissement* est vérifié. Pour cela, afficher 2 courbes, qui utiliseront la vitesse du centre de masse $\dot{x}(t)$ et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. En déduire la vitesse du cylindre au point de contact.

D Roulement sur un plan légèrement incliné (sans glissement) (20 min)

Le système étudié dans cette partie est un cylindre qui roule sur un plan incliné d'un angle α, après avoir été laché sans vitesse initiale (cf. figure). Le moment d'inertie selon laxe z et passant par le point C est $I = \frac{1}{2}mR^2$ (avec R le rayon du cylindre et m sa masse).

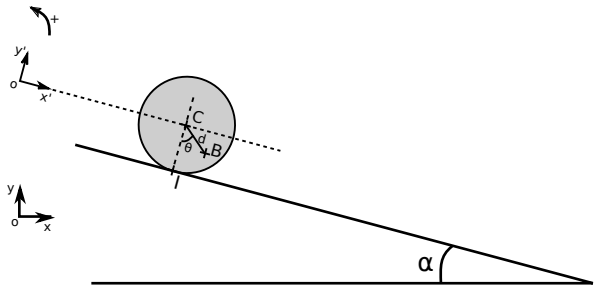


Figure 4: Schéma à un instant t d'un cylindre roulant sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale. C: le centre de masse. B: un point sur le cylindre à une distance d du centre, et formant un angle θ entre CB et CI. I est le point de contact entre le cylindre et le sol.

D-1 Théorie

- Appliquer le théorême du centre de masse au cylindre, puis le théorême du moment cinétique et utiliser la condition de roulement sans glissement pour en déduire que l'accélération du centre de masse selon la direction x' est $a = \frac{2}{3}g\sin(\alpha)$, avec g l'accélération de pesanteur.

Expérience : *Comme dans la partie précédente:*

1. *lancer le logiciel XIMEA*
2. *enregistrer une vidéo (avec un nom différent) avec le cylindre roulant sur la planche inclinée (lâcher le cylindre sans vitesse initiale)*

3. *quitter le logiciel, choissisez cette vidéo dans le menu "choisir la vidéo à traiter"*
4. *éteindre les LEDs*
5. *lancer le traitement numérique. Il vous sera demandé l'angle en radian de l'inclinaison de la planche (valeur notée sur la table - attention au signe de l'angle).*

D-2 Analyse des résultats

Trajectoire du cylindre

- afficher *la trajectoire* dans le repère Oxy (non incliné) de la LED rouge et bleue. Reproduire qualitativement ces courbes sur votre copie.
- l'étude analytique étant beaucoup plus simple dans le repère incliné, vous allez afficher les données dans le repère incliné $O'x'y'$. Pour cela, donner l'expression de $x(t)$ et $y(t)$ dans le repère incliné. Afficher ensuite *la trajectoire* dans le repère incliné de la LED rouge et bleue dans le référentiel du laboratoire. Reproduire qualitativement cette courbe sur votre copie.

  Fichier de résultats dans le repère incliné: pour vous faciliter l'écriture des lignes de commandes gnuplot, il y a aussi dans le dossier "résultats" un fichier avec les coordonnées des LEDs dans le repère incliné. Ce fichier a le même nom qu'avant, avec l'extension "_incl" en plus (ex: "1_incl.data").

Accélération du centre de masse

- Afficher sur un même graphique la position au cours du temps du centre de masse ($x(t)$, $y(t)$) dans le repère incliné et vérifier que $y(t) \simeq$constante.
- Afficher la vitesse selon x du centre de masse et en déduire son accélération.
- Comparer avec la valeur théorique.

Roulement sans glissement?

Vérifier que le cylindre roule sans glisser. Reproduire sur votre copie les courbes que vous avez utilisées.

E Roulement sur un plan fortement incliné (20 min)

On reprend le même système qu'à la section précédente, en augmentant l'inclinaison de la planche.

- **Manipulation:** installer la planche sur le support le plus haut, puis enregistrer une nouvelle vidéo et la traiter.
- **Analyse des résultats:**
  - afficher la trajectoire des 2 LEDs dans le repère non incliné, et reproduire la figure sur votre copie,
  - comme précédemment, observer si le cylindre roule en glissant ou pas. Reproduire sur votre copie les courbes que vous avez utilisées.
  - question supplémentaire - comparaison avec la théorie. Appliquer le théorème du centre de masse pour trouver que $a = g\cos(\alpha)\left[\tan(\alpha) - \mu_c\right]$ puis appliquer le théorème du moment cinétique pour trouver que $\dot{\dot{\theta}} = \frac{2\mu_c g\cos(\alpha)}{Rm}$, avec R le rayon du cylindre, m sa masse et μ_c le coefficient de frottement cinématique entre le cylindre et la planche. Comparer avec les résultats expérimentaux (a et $\dot{\theta}$). Interprêter.

F Synthèse Partielle

Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une synthèse (5 – 10 lignes) détaillant

- ⋆ les principales conclusions scientifiques obtenues
- ⋆ les points éventuels qui resterait à clarifier.

G Annexe: calcul de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ sans discontinuité

$$
\begin{aligned}
OM &= |OM|e^{i\theta} && (9)\\
\dot{OM} &= |OM|\ i\ \dot{\theta}\ e^{i\theta} = i\ \dot{\theta}\ OM && (10)\\
\Rightarrow \dot{\theta} &= -i\ \frac{\dot{OM}}{OM} && (11)\\
&= i\ \frac{\dot{x} + i\dot{y}}{x + iy} && (12)\\
\dot{\theta} &= Re\left[i\ \frac{\dot{x} + i\dot{y}}{x + iy}\right] = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} && (13)\\
& && (14)
\end{aligned}
$$

On écrit d'abord OM comme un nombre complexe en coordonnées polaires, on en déduit la vitesse du point M et on obtient la vitesse angulaire en fonction de OM et $\dot{OM}$. Enfin on décompose ces deux nombres en coordonnées cartésiennes, dont on a les valeurs sans discontinuités. Au final, on obtient la vitesse angulaire sans discontinuité. On ne garde que la partie réelle, puisque $\dot{\theta}$ est un nombre réel.

Partie D Synthèse Générale

Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant ce TP, utiliser les 20 dernières minutes de la séance pour **rédiger** sur votre cahier de laboratoire un bilan de la séance (10-15 lignes) contenant

- ⋆ une synthèse de vos principaux résultats,
- ⋆ une conclusion générale liant les résultats entre eux,
- ⋆ une synthèse de vos apprentissages.

TP 7
Precession et Nutation du gyroscope

Le phénomène gyroscopique est utilisé depuis des siècles par différents jouets (toupies, cerceaux, etc...) La toupie devient gyroscope en 1852 quand Léon Foucault voulut mettre en évidence certains effets de la rotation de la Terre (ce qu'il avait déjà fait avec le célèbre pendule).

Un gyroscope est un appareil comprenant un rotor tournant a priori à grande vitesse autour d'un axe. Les gyroscopes ont été utilisés à la fin du XIXe siècle pour stabiliser des navires ; cette utilisation est maintenant abandonnée, mais l'effet stabilisateur des gyroscopes est exploité dans les satellites par exemple. Le principe du gyroscope est aussi utilisé dans les compas gyroscopiques, l'horizon artificiel des navires et surtout des avions.

⋆ ⋆
⋆

Rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (10 – 15 lignes) présentant l'objet ou le phénomène d'étude ainsi que son contexte (utilité pratique et/ou fondamentale)

Partie A Éléments théoriques

A Mouvement de précession

Pour bien comprendre le mouvement du gyroscope, il est important d'étudier au préalable un mouvement particulier: la précession.

La précession est le nom donné au mouvement conique de l'axe de rotation d'un solide autour d'une direction fixe. Lors de la précession, l'angle que fait l'axe de rotation ou le vecteur avec une direction donnée reste fixé. L'axe de rotation décrit ainsi au cours du temps un cône dont l'axe est la direction fixée. Ce cône est parcouru à une vitesse angulaire constante qui est déterminée par les données du problème.

Mathématiquement, un vecteur $\overrightarrow{X}(t)$ suit un mouvement de précession lorsque

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{X}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{X}. \tag{1}$$

La direction du vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ correspond à la direction de l'axe du cône de précession, le sens du vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ indique le sens de rotation du mouvement de précession, la norme du vecteur vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ est la vitesse angulaire de précession.

- En multipliant scalairement l'équation (1) par $\overrightarrow{\Omega}$, prouver que la composante du vecteur $\overrightarrow{X}$ dans la direction $\overrightarrow{\Omega}$ est constante.
- En multipliant scalairement l'équation (1) par $\overrightarrow{X}$, prouver que la norme du vecteur $\overrightarrow{X}$ est constante.
- En déduire que le vecteur $\overrightarrow{X}$ se déplace sur un cône d'axe $\overrightarrow{\Omega}$ (faire un schéma).
- Montrer que la vitesse de rotation du vecteur $\overrightarrow{X}$ correspond à la norme de $\overrightarrow{\Omega}$.

B Dynamique d'un gyroscope

Un solide mobile autour d'un point fixe (O) possède a priori 3 degrés de liberté. Pour mettre en équation son mouvement, on peut utiliser le principe fondamental de la dynamique

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_G}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{R} + m\overrightarrow{g} \tag{2}$$

ou le théorème du moment cinétique appliqué au point O

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{N}. \tag{3}$$

avec

- $\overrightarrow{R}$: force de réaction du support en O,
- G: centre de gravité du mobile,
- $\overrightarrow{L}$: moment cinétique par rapport au point O et
- $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{g}$: moment du poids par rapport à O.

La démarche habituelle consiste à utiliser l'équation (3) pour résoudre les équations du mouvement, plutôt que l'équation (2). Cependant l'équation (2) doit être utilisée si l'on recherche les conditions de stabilité du mouvement du gyroscope.

La méthode générale pour résoudre l'équation (3) consiste à introduire un repère lié aux directions principales d'inertie du solide ; en effet dans ce repère le moment d'inertie a une forme simple. Hélas, ce repère ne coïncide pas avec le référentiel galiléen fixe $(O, \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$ par rapport auquel l'observateur étudie le mouvement. Pour contourner des calculs fastidieux, on peut utiliser une méthode de résolution approchée en utilisant l"approximation gyroscopique.

Cependant il est facile de démontrer à partir de l'équation (3) le résultat générale suivant:

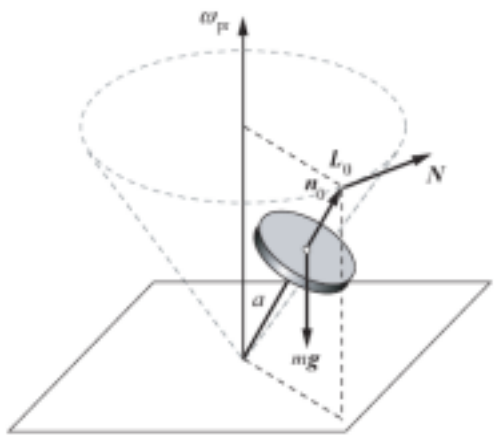


Figure 1: Précession régulière du gyroscope sous l'action de la gravité.

- Démontrer que la composante verticale du moment cinétique (noté $L_z = \vec{L} \cdot \vec{e}_z$ lorsque $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$) est une constante du mouvement

C Approximation gyroscopique

Le mouvement du gyroscope peut être décrit simplement si l'on fait les hypothèses suivantes:

1. Le gyroscope a un axe de symétrie $\vec{n}_0$, les deux moments d'inertie dans une une direction perpendiculaire à $\vec{n}_0$ sont donc égaux ;
2. La rotation propre Ω_0 autour de $\vec{n}_0$ est très rapide, le vecteur vitesse de rotation peut s'écrire en première approximation $\vec{\Omega} \simeq \Omega_0\,\vec{n}_0$. Le moment cinétique prend alors la forme
$$\vec{L} \simeq \vec{L_0} = I_0\,\Omega_0\,\vec{e}_Z; \tag{4}$$

La relation approchée de $\vec{L}$ (4) s'appelle **approximation gyroscopique**.

Sur la figure 1 $\vec{n}_0$ est le vecteur unitaire décrivant l'axe de rotation du gyroscope; ω_{pr} est la vitesse angulaire de précession; $\vec{N}$ est le moment du poids.

- Montrer qu'en notant m la masse du gyroscope, d la distance OG telle que : $\vec{OG} = d\ \vec{n}_0$ et en utilisant l'approximation gyroscopique, montrer que le moment du poids peut d'écrire sous la forme suivante:
$$\vec{N} = \vec{OG} \wedge m\,\vec{g} = \vec{\omega}_{pr} \wedge \vec{L},$$
avec $\vec{\omega}_{pr} = -\frac{md}{I_0\,\Omega_0}\,\vec{g}$;
- En déduire que le moment cinétique du gyroscope suit un mouvement de précession autour de $\vec{\omega}_{pr}$, et donc que l'axe du gyroscope tourne autour de la verticale.
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}_P \wedge \vec{L},$$

Il en résulte que, sous l'effet de la pesanteur, le gyroscope décrit un cône de sommet O, d'axe $(O, \vec{e}_z)$ et d'angle constant. L'axe de rotation $(O, \vec{n}_0)$ est donc en mouvement de précession autour de la direction du champ de pesanteur.

La pulsation de précession $\Omega_{pr} = \frac{m\,g\,d}{I_0\,\Omega_0}$ induit une fréquence de précession
$$\nu_{pr} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{mgd}{I_0\,\Omega_0} \tag{5}$$

D Généralisation

Le mouvement décrit correspond à une précession régulière de l'axe du gyroscope. C'est une précession induite par un moment de force, ici le moment de la force de gravité. Voici maintenant un autre exemple de mouvement de precession:

Considérer une description classique d'un électron orbitant autour d'un proton sur une trajectoire circulaire. À une date considéré commme origine des temps, l'électron est soumis en plus à un champ magnétique uniforme

- Déterminer le moment cinétique de l'électron avant l'appliction du champ magnétique,
- Utiliser la force de Lorentz pour calculer le moment de force (par raapport au centre de l'orbite) soubis par l'électron.
- En déduire que l'axe de l'orbite de l'électron effectue un mouvement de précession.

Bien sûr, il n'est pas correct d'utiliser la mécanique classique pour une telle description, il faut utiliser la mécanique quantique, et la notion de trajectoire n'a plus de sens. Par contre, dans le cadre de la mécanique quantique, le moment cinétique garde une signification, le mouvement décrit concerne donc la précession du moment cinétique de l'électron autour de l'axe du champ magnétique dont les conséquences sont expérimentalement prouvées, cette dynamique est nommée *"précession de Larmor"*.

De manière plus générale, une force d'intensité f appliquée sur l'axe du gyroscope, dans une direction $\vec{u}$, en un point M distant de l du pont fixe O, induit un mouvement de précession de vitesse angulaire
$$\vec{\omega} = -\frac{f\,l}{I_0\,\Omega_0}\,\vec{u}.$$

Inversement, un mouvement de rotation de l'axe du gyroscope induit un couple sur l'axe de rotation dans la direction de rotation de l'axe. Cet effet est mis à profit dans les indicateurs de virage en aéronautique. Voir

`https://www.youtube.com/watch?v=0sRrSkSJc7w`

pour le détail de fonctionnement sur des indicateurs de virage et pour une maquette simplifiée:

`https://www.youtube.com/watch?v=NQSYERWASE4`

Partie B Étude théorique de la Precession et de la Nutation

La dynamique du gyroscope est étudiée numériquement à l'aide d'un applet Java écrit par Eugene Butikov de l'université de St Pertersbourg . L'applet resoud numériquement les lois du mouvement.

L'applet s'exécute en tapant la commande suivante `java-jar` Gyroscope.jar dans un terminal et en choissisant le programe Gyroscope (ou GyroscopeR si vous parlez courament le russe). L'applet se présente sous une forme similaire à celle de la figure 2, le panel de gauche est assez intuitif et permet de modifier quelques paramètre comme la vitesse de rotation, l'inclinaison, le taux de friction. A droite, la perspective utilisée pour la représentation du gyroscope est schématisée par le cube extérieur, elle est modifiable par un "clique gauche – glisser" de la souris sur la fenètre de visualisation.

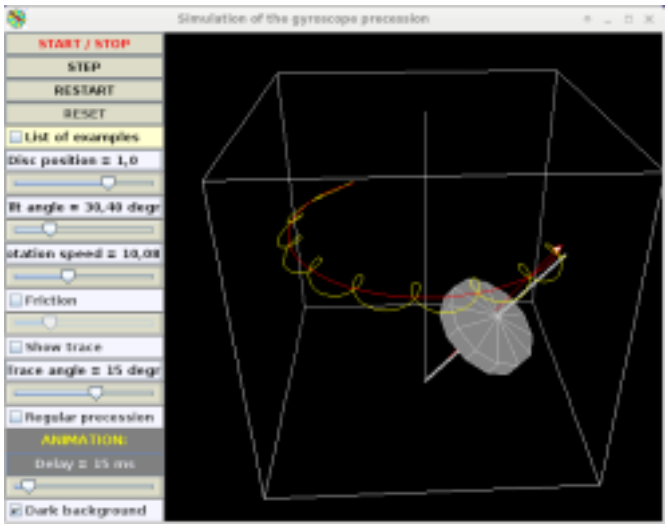


Figure 2: Applet de visualitation de la dynamique dud gyroscope

- Visualiser la dynamique générale du gyroscope en sélectionnant dans les examples *regular precession*. La courbe jaune représente la trajectoire de l'extrémité mobile de l'axe du gyroscope. La flèche rouge représente le moment cinétique du gyroscope.
- Quels paramètres faut–il varier (et dans quel sens) pour augmenter la fréquence de précession?

A Théorie exacte du gyroscope

L'étude de la précession du gyroscope a été établit dans le cadre une théorie approchée dont la principale caractéristique est de supposer le moment cinétique constament aligné avec l'axe de rotation du gyroscope. Or la conclusion de l'étude (présence d'une rotation autour de la verticale) contredit cette approximation.

En fait, une des caractéristique remarquable du mouvement de précessioin régulier est que ce mouvement est réellemnt une solution possible des équation dynamiques exactes.

Pour construire une théorie exacte il faut tenir compte du moment cinétique total du gyroscope $\vec{L}$. Au dela du moment cinétique de rotation autour de l'axe $\vec{L}_0 = I_0\omega_0\vec{n}_0$, qui constitu la partie parincipale de $\vec{L}$, il faut tenir compte du moment cinétique induit par la précession $\vec{L}_{pr}$ (fig. 4), tel que

$$\vec{L} = \vec{L}_0 + \vec{L}_{pr}.$$

Il est évident que $\vec{L}_{pr}$ est proportionnel à $\vec{\omega}_{pr}$.

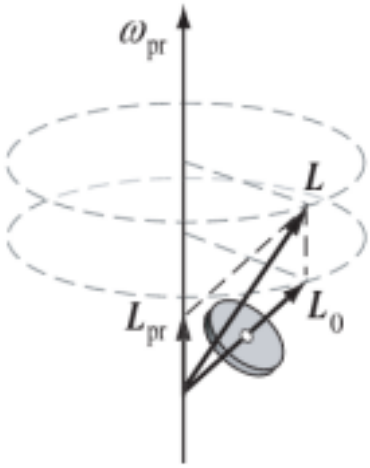


Figure 3: Décomposition du moment cinétique

Par conséquent $\vec{L}$ et $\vec{L}_0$ ont les mêmes composantes horizontales et se meuvent de manière synchrone.

- En déduire que:
  - $\vec{L}$ et $\vec{L}_0$ ont les mêmes vitesses *i.e.*
  $$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t}.$$
  - $\vec{\omega}_{pr} \wedge \vec{L} = \vec{\omega}_{pr} \wedge \vec{L}_0$.
  - Et que donc $\vec{L}$ et $\vec{L}_0$ vérifient des équations similaires
  $$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}_{pr} \wedge \vec{L}_0, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}_{pr} \wedge \vec{L}.$$

La dernière égalité prouve que le mouvement régulier de précession est une solution possible de l'équation exacte. Cependant, cette solution n'est pas l'unique solution possible, elle apparait pour des contitions initiales spécifique

- Déterminer les conditions initiales premettant d'observer une précession régulière.

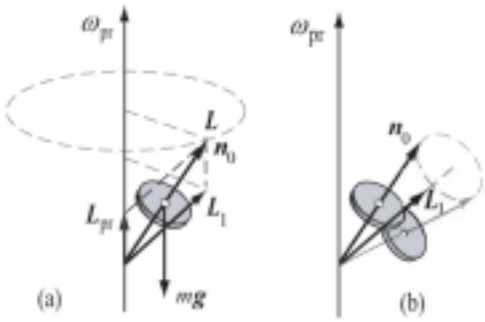


Figure 5: Applet de visualitation de la dynamique dud gyroscope

B Nutation du gyroscope

Dans le cas générale, les conditions initiales ne coincident pas avec la précession réguliè, on assiste alors à une dynamique de nutation caractérisée par une rotation rapide de l'axe du gyroscope autour d'une position moyenne en précession (fig. 4).

Figure 4: Nutation du gyroscope.

- Visualiser la dynamique générale du gyroscope en sélectionnant dans les examples *precession with nutation*. La courbe jaune représente la trajectoire de l'extrémité mobile de l'axe du gyroscope. La flèche rouge représente le moment cinétique du gyroscope.
- Modifier les paramètres physiques pour observer les trajectoires possibles.
- Quels paramètres faut–il varier (et dans quel sens) pour amplifier le phénomène de nutation?

L'étude de dynamique de nutation permet de résoudre un paradoxe apparent dans la théorie du gyroscope. Voici le paradoxe:

- Supposons un gyroscope effectuant une précession régulière.
- En accord avec le théorème du moment cinétique, le moment cinétique $\overrightarrow{L}$ évolue dans le temps uniquement sous l'action du moment $\overrightarrow{N}$.
- Si la force extérieur responsable du moment $\overrightarrow{N}$ est supprimée à partir d'une date t_0, alors le moment cinétique $\overrightarrow{L}$ s'immobilise instantanément.
- Le centre de masse du gyroscope, qui durant la precession éffectuait un mouvement circulaire uniforme, s'immobilise aussi instatanément à partir de t_0 aussi.
- Ce dernier point est contraire à la loi de l'inertie

Ce paradoxe provient de la confussion entre le moment cinétique $\overrightarrow{L}$ et l'axe de rotation $\overrightarrow{n}_0$ du gyroscope. Si le moment cinétique $\overrightarrow{L}$ s'immobilise effectivement, rien n'indique que cela concerne aussi l'axe $\overrightarrow{n}_0$.

Durant la precession, l'axe $\overrightarrow{n}_0$ diffère de la direction du moment cinétique $\overrightarrow{L}$. Lorsque le moment générateur de la précession disparait, le vecteur moment cinétique s'immobilise tandis que l'axe du gyroscope parcours un cône autour du moment cinétique, mouvement nommé nutation.

- En notant $\overrightarrow{L}_n$ le moment cinétique lié à la nutation et $\overrightarrow{L}_0$ le moment cinétique lié à la rotation propre du gyroscope, étudier le phénomène de nutation libre en considérant la conservation du moment cinetique

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{L}_0 + \overrightarrow{L}_n.$$

- Quel sont les paramètres qui influence la vitesse de rotation de l'axe du gyroscope (nutation)?

C Angles d'Euler

Soit un repère $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e}_X, \overrightarrow{e}_Y, \overrightarrow{e}_Z)$ lié au solide et en mouvement par rapport au repère fixe $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$. Trois rotations sont nécessaires pour décrire le passage de $\mathcal{R}'$ vers $\mathcal{R}$; ces trois rotations sont caractérisées par les angles d'Euler (*c.f.* Fig 6).

Les angles d'Euler sont :

- α : angle de précession mesuré autour de $(O, \overrightarrow{e}_z)$;
- β : angle de nutation mesuré autour de $(O, \overrightarrow{e}_N)$;
- γ: angle de rotation propre mesuré autour de $(O, \overrightarrow{e}_Z)$.

Le vecteur vitesse de rotation instantané $\overrightarrow{\Omega}$ du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ s'écrit à l'aide des angle d'Euler (α, β, γ) sous la forme:

$$\overrightarrow{\Omega} = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{e}_z + \dot{\beta}\,\overrightarrow{e}_N + \dot{\gamma}\,\overrightarrow{e}_Z.$$

- Déterminer l'expression de $\overrightarrow{\Omega}$ dans le repère fixe $(O, \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$ et dans le repère mobile $(O, \overrightarrow{e}_X, \overrightarrow{e}_Y, \overrightarrow{e}_Z)$.

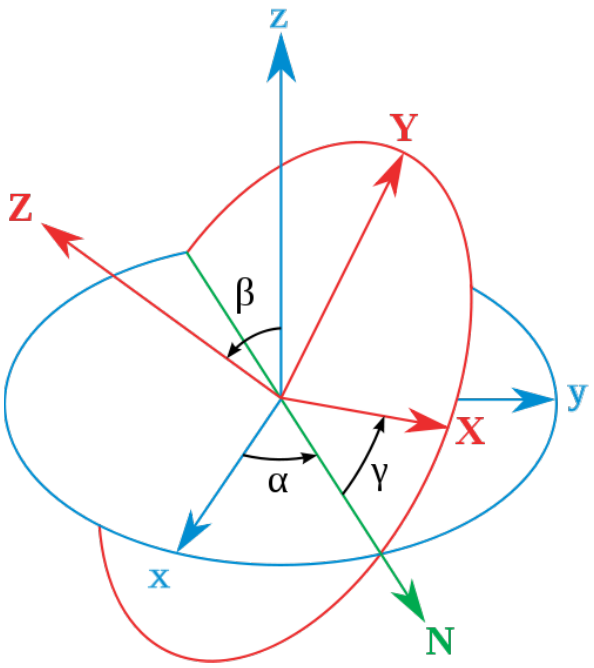


Figure 6: Définition des angles d'Euler

- Décrire le mouvement du gyroscope observé numériquement à l'aide des angle d'Euler et justifier les noms choisis pour les différents angles.

Partie C Étude expérimentale

A Préambule

- Après avoir lu l'ensemble de cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (5 – 10 lignes) présentant

  ⋆ les principaux objectifs scientifiques de cette partie,

  ⋆ les moyens mis en œuvre pour les atteindre.

L'objectif de cette partie expérimentale est

- Une approche qualitative des conséquence dynamique du théorème de moment d'inertie
- la validation expérimentale de l'approximation gyroscopique par la validation de l'expression théorique de la fréquence de précession

$$\nu_p = \frac{1}{2\pi}\,\frac{m\,g\,d}{I_Z\,\Omega_Z} \tag{6}$$

obtenue dans le cadred de cette pproximation.

B Étude préliminaire

B-1 Approche qualitative

Lancer le gyroscope en rotation avec un axe vertical puis

- Identifier le sens de son moment d'inertie,
- Prédire la direction de rotation de l'axe en fonction de la direction de la force appliquée sur l'axe et faites l'expérience. Noter vos observations à l'aide d'un schéma.
- Une fois l'axe incliné, observer le mouvement de précession et noter le sens de rotation; est–il en accord avec la prédiction théorique?
- Inverser le sens de rotation du gyroscope et refaites exactement les même essais, observer l'inversion du sens de précession et des sens de rotation de l'axe sous l'action d'une force de manière générale.

C Étude de la fréquence de précession

Il s'agit de mesurer, pour différentes valeurs de la distance d, la fréquence de précession en fonction de la vitesse de rotation propre ω.

Pour réaliser ces mesures un PC est un détecteur d'impulsions sont à votre disposition (Fig 7).

Préparation :

1. *Allumer le PC et le compteur d'impulsions (1).*
2. *Lancer le logiciel d'acquisition (« compteur numérique sur le bureau du PC).*
3. *Dans ce logiciel, utiliser les réglages (touche F5), et dans la fenêtre formule entrez en tant que grandeur : "vitesse de rotation", en tant que symbole : "w", en tant qu'unité : "rad s^{-1}".*
4. *Dans la cellule formule entrez la formule* $2*3.1416*N/t/18$. *Entrer une valeur égale à zéro pour Min et 100 pour Max.*

Explication : N représente le nombre d'impulsions comptées, t est le temps de mesure, 18 est le nombre de rayons du gyroscope. Cette formule permet ainsi de calculer directement la vitesse de rotation en radians par seconde.

Mode opératoire :

1. *Placer le détecteur (2) pour que le gyroscope (3) soit à peu près au milieu de celui-ci lorsque l'axe du gyroscope est vertical.*
2. *Mettre le gyroscope en rotation en maintenant son axe légèrement incliné, et en s'assurant que le gyroscope n'entre pas en contact avec le détecteur.*

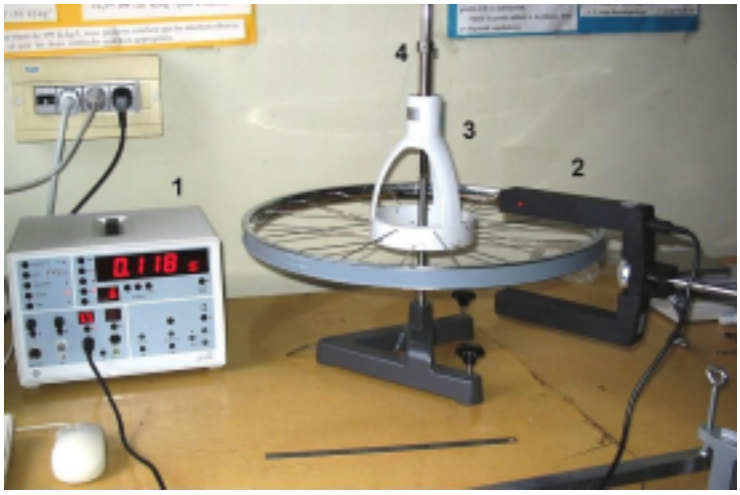


Figure 7: Montage expérimental

3. *Mesurer une période de précession tout en mesurant la vitesse de rotation (touche F9, ou icône chronomètre) ; après une période de précession, arrêter la mesure de rotation (touche F9).*

4. *Les forces de frottement ralentissent naturellement la vitesse de rotation propre, permettant ainsi d'acquérir de nombreuses données : attendre quelques instants puis recommencer la mesure d'une période de précession.*

5. *Réitérer toute la procédure en modifiant la valeur de d. La distance d se règle à l'aide d'un réglet, en desserrant la bague (4). Enlever le gyroscope de son support pour réaliser cette opération. Lorsque le repère placé sur la tige coïncide avec la bague (4), le point de rotation O est confondu avec le centre de gravité G du gyroscope ($d = 0$). Pour des raisons de sécurité, on placera toujours O au-dessus de G (repère au-dessus de la bague).*

Au cours des expériences on constate que le mouvement est plus complexe que celui prévu par l'approximation gyroscopique.

- Décrire qualitativement les différences entre le mouvement réel du gyroscope et le mouvement de précéssion.

D Résultats

- Tracer la courbe ν_P en fonction de $\frac{1}{\Omega}$. L'approximation gyroscopique permet-elle de décrire les mesures ?
- Les résultats expérimentaux peuvent être synthétisés en un seul graphe en représentant $\frac{\nu_p}{d}$ en fonction de $\frac{1}{\Omega}$. À partir du graphe ainsi obtenu, déterminer le moment d'inertie I_Z du gyroscope.
- Commenter la validité de l'approximation gyroscopique en discutant les résultats de cette expérience.

E Synthèse Partielle

- Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une synthèse (5 – 10 lignes) détaillant
  - ⋆ les principales conclusions scientifiques obtenues
  - ⋆ les points éventuels qui resterait à clarifier.

Partie D Synthèse Générale

- Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant ce TP, utiliser les 20 dernières minutes de la séance pour **rédiger** sur votre cahier de laboratoire un bilan de la séance (10-15 lignes) contenant
  - ⋆ une synthèse de vos principaux résultats,
  - ⋆ une conclusion générale liant les résultats entre eux,
  - ⋆ une synthèse de vos apprentissages.

TP 8
Écoulement permanents à surface libre

⋆ ⋆
⋆

Rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (10 – 15 lignes) présentant l'objet ou le phénomène d'étude ainsi que son contexte (utilité pratique et/ou fondamentale)

Partie A Éléments théoriques

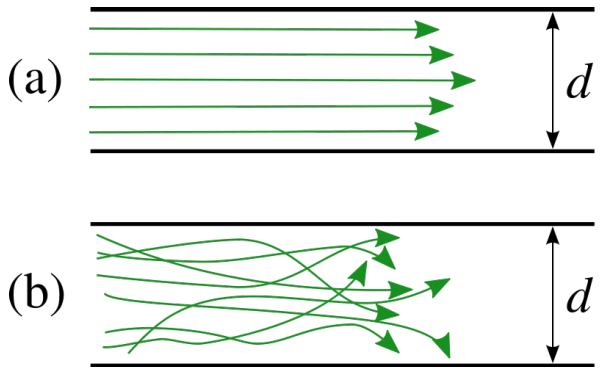


Figure 1: Écoulement lanimaire et turbulent

A Fluide parfait – Fluide visqueux

Les fluides qui circulent dans les tuyaux ne sont pas parfaits. Cela signifie que le module de la vitesse des différents volumes du fluide n'est pas toujours uniforme.

Fluide parfait Fluide n'ayant aucune interaction avec les parois du guide d'écoulement (le tuyau). Les volumes du fluide se déplacent tous à la même vitesse. Il n'y a pas de résistance à l'écoulement du fluide.

Fluide visqueux Fluide ayant une interaction avec les parois du guide d'écoulement (le tuyau). La vitesse des volumes du fluide près du guide est inférieure à la vitesse des volumes du fluide au centre du guide. La viscosité représente une résistance à l'écoulement du fluide.

B Régime d'écoulement

Les fluides ne s'écoulent pas toujours avec un régime stable (écoulement régulier). Cela signifie que la trajectoire des volumes du fluide n'est pas toujours rectiligne.

Écoulement laminaire (Fig. 1-a) Fluide se déplaçant uniquement dans le sens du guide d'écoulement (même sens que le tuyau). Il y a glissement entre les différentes couches de volume du fluide sans croisement. Ce mode d'écoulement se fait habituellement à débit faible.

Écoulement turbulent (Fig. 1-b) Fluide se déplaçant dans le sens du guide d'écoulement, mais avec des trajectoires non rectilignes. Il y aura croisement de trajectoire pour l'ensemble des couches de volume de fluide en mouvement ce qui occasionne des interactions entre les volumes de fluide et des collisions sur les parois du guide d'écoulement. Ces collisions peuvent occasionner du bruit. Ce type d'écoulement est très dur à analyser.

C Densité d'énergie d'un fluide

Densité d'énergie cinétique d'un fluide

La densité d'énergie cinétique ϵ_K d'un fluide correspond à l'énergie cinétique transportée par une densité de masse ρ de fluide en mouvement à vitesse v occupant un volume dV et ayant une masse totale dm :

$$\epsilon_K = \frac{1}{2}\rho\, v^2 \tag{1}$$

Effet Venturi

Lorsqu'un fluide parfait incompressible s'écoule le long d'une canalisation, la densité énergétique totale du fluide est constante. Puisque celui-ci doit circuler à plus haute vitesse lorsque la canalisation rétrécie ($Q = S\,v$) afin de maintenir le débit constant ($Q = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$), le fluide doit nécessairement augmenter sa densité d'énergie cinétique.

La pression P du fluide correspond à une densité d'énergie potentielle qui peut être transformée temporairement en densité d'énergie cinétique pour maintenir le débit constant. Cette découverte est historiquement associée au physicien italien Giovanni Battista Venturi.

L'Équation qui en découle s'écrit:

$$P + \frac{1}{2}\rho\, v^2 = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \tag{2}$$

Densité énergétique gravitationnelle d'un fluide

La densité énergétique ϵ d'un fluide parfait incompressible est constante pour l'ensemble du fluide même s'il y a des variations de hauteur dans le fluide. Ceci s'explique par le fait que la diminution de la densité énergétique gravitationnelle du fluide se fait au rythme de l'augmentation de la pression causée par la gravité elle-même :

$$P + \rho\, g\, z = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \tag{3}$$

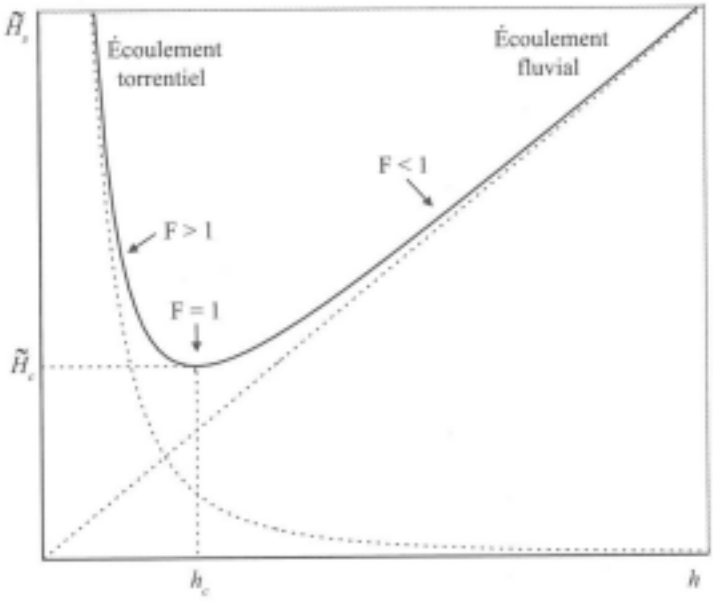


Figure 2: Variation de la charge spécifique en fonction de la hauteur d'eau. Le tracé correspond à un canal de section transversale rectangulaire

Équation de Bernoulli

Le long d'une canalisation, un fluide incompressible parfait en écoulement non turbulent et laminaire obéit au théorème de Bernoulli. Cette loi correspond à une conservation d'énergie par unité de volume (J/m^3) :

$$P + \frac{1}{2}\rho\, v^2 + \rho\, g\, z = \mathrm{C^{te}}. \tag{4}$$

Charge d'un fluide À partir de l'équation de Bernoulli, on définit alors la charge H d'un fluide, mesurée en mètre, comme étant la grandeur

$$H = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g} + z + \frac{P}{\rho\, g} \tag{5}$$

avec ici v la vitesse moyenne du fluide le long d'une section de l'écoulement conduite, z l'altitude de la section considérée et P la pression.

D Charge Spécifique

Dans le cas d'un écoulement incompressible réel, on introduit la notion de **charge spécifique** H_s comme étant l'énergie volumique mesurée en hauteur d'eau, et relative à la cote du fond pour une position donnée le long de l'écoulement:

$$H_\mathrm{S} = \frac{v^2}{2\, g} + h \tag{6}$$

Le long d'un écoulement, la charge spécifique peut variée même si la charge reste constante (énergie constante), il convient donc de bien distinguer les deux notions.

Dans une section donnée, cette charge spécifique est une fonction seulement de la hauteur d'eau h, puisque le débit volumique Q est constant et que, à une abscisse x donnée, la surface $A = L\, h$ de la section transverse est une fonction croissante de la hauteur d'eau h

$$H_\mathrm{S} = \frac{Q^2}{2\, g\, A^2} + h \tag{7}$$

L'allure de la variation de charge Spécifique en fonction de la hauteur d'eau est représenté figure 2.

Variation de la charge spécifique

La variation de H_S avec la hauteur d'eau h peut-être décrite en dérivant la relation 7

$$\frac{\mathrm{d}H_\mathrm{S}}{\mathrm{d}h} = 1 - F^2 \tag{8}$$

si $F = \frac{v}{\sqrt{g\, h_\mathrm{m}}}$ avec $h_\mathrm{m} = A/L$ la hauteur moyenne. Dans le cas d'un canal rectangulaire de largeur constante $h_\mathrm{m} = h$. Le nombre F est appelé le *nombre de Froude* local.

Nombre de Froude

Le nombre de Froude est un nombre adimensionnel important pour les écoulement à la surface libre. Le nombre de Froude est le rapport entre la vitesse d'écoulement du fluide v et la célérité des ondes de gravité à la surface $c = \sqrt{g\, h}$.

On appelle

- *écoulement fluvial* (sous critique) un écoulement caractérisé par $F < 1$;
- *écoulement torrentiel* (sur-critique) un écoulement pour lequel $F > 1$;
- *écoulement critique* un écoulement pour lequel $F = 1$; on appelle h_c la hauteur d'eau correspondant au régime critique.

L'équation 8 montre:

- que la charge spécifique est minimale lorsque le nombre de Froude est égal à l'unité (régime critique);
- que, pour écouler un débit Q, il est nécessaire de disposer au moins de la charge spécifique $H_\mathrm{C} = H_\mathrm{S}(h_\mathrm{c})$ correspondant au régime critique;
- qu'à condition que la charge spécifique soit supérieure à cette valeur minimale, il existe deux façons d'écouler un débit Q donné, l'une en écoulement fluvial ($F < 1$), l'autre en écoulement torrentiel ($F > 1$).

Cas particulier d'une section tranversale rectangulaire

Dans le cas particulier d'une section transversale rectangulaire ($A = L\, h$), le nombre de Froude local s'écrit: $F = \frac{v}{\sqrt{g\, h}}$ et l'expression 7 de la charge spécifique prend une forme particulièrement simple $H_\mathrm{S} = \frac{Q^2}{2\, g\, L^2\, h^2} + h$. Le régime critique ($F = 1$) correspond de son coté à une charge spécifique H_C et à une hauteur d'eau critique h_c définies par

$$h_\mathrm{c} = \left(\frac{Q^2}{g\, L^2}\right)^{1/3}; \qquad H_\mathrm{C} = \frac{3}{2}\, h_\mathrm{c} \tag{9}$$

E Théorème d'Euler ou de la quantité de mouvement

Lorsqu'un jet fluide vient frapper une surface solide, il exerce sur celle-ci une force qui est fonction de la vitesse du jet et de la forme géométrique du solide.

Les applications des jets sont très nombreuses : turbine Pelton, propulsion fusée par réaction, propulsion par hélices, propulsion par coussin d'air... L'approximation du fluide parfait permet, par l'application des théorèmes de Bernoulli et de la quantité de mouvement, de prévoir la valeur théorique de la force exercée.

Les hypothèses sont les suivantes :

1. Les filets fluides sont suffisamment étroits pour que la pression p, et la vitesse V restent constantes dans une section droite ;
2. Le mouvement est permanent (indépendant du temps) ;
3. Le fluide est incompressible.

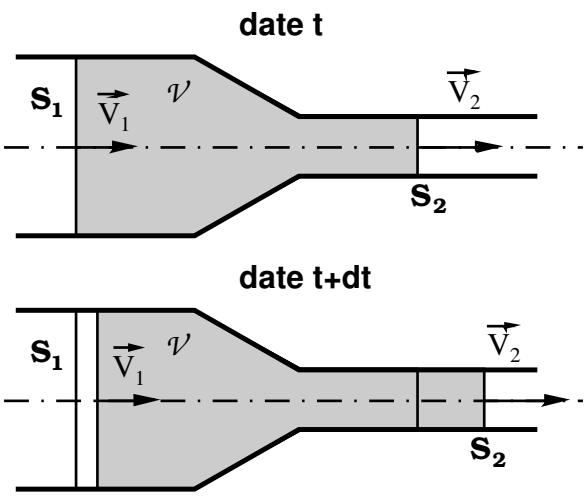


Figure 3: Bilan de quantité de mouvement sur une particule de fluide entre les dates t et $t + \mathrm{d}t$.

Soit $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ les vitesses supposées constantes des sections entrante S_1 et sortante S_2 d'un volume de fluide de référence $\mathcal{V}$ (Fig 3).

Durant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$, la quantité de mouvement de la particule de fluide à variée de

$$\mathrm{d}\vec{p} = \mathrm{d}m_2\,\vec{V}_2 - \mathrm{d}m_1\,\vec{V}_1$$

où les éléments de masse $\mathrm{d}m_1 = \rho\, S_1\, V_1 \mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}m_2 = \rho\, S_2\, V_2 \mathrm{d}t$ sont égaux en vertu de la conservation de la matière: $\mathrm{d}m_1 = \mathrm{d}m_2 = Q_m\, dt$ (Q_m est le débit massique). On en déduit, la variation de quantité de mouvement par unité de temps

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = Q_m \left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right); \tag{10}$$

cette variation est égale à la somme des forces extérieures appliquées sur la particule de fluide $\mathcal{V}$ (2e loi de Newton)

$$Q_m \left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}. \tag{11}$$

La liste des forces extérieures inclut:

- les forces de pression de la paroi de la conduite sur le fluide;
- les forces de pression du fluide en amont et en aval;
- les forces volumiques.

Partie B Passage d'un écoulement sur un seuil

On considère ici un écoulement à surface libre dans un canal de section tranversale rectangulaire à fond plat comportant un obstacle d'extension spatiale limité (fig. 4). Pour passer au dessus d'un seuil de hauteur Z_1, un écoulement doit disposer en amont d'une charge spécifique au moins égale à $H_C + Z_1$.

A Préambule

Après avoir lu l'ensemble de cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (5 – 10 lignes) présentant

- ⋆ les principaux objectifs scientifiques de cette partie,
- ⋆ les moyens mis en œuvre pour les atteindre.

B Éléments théoriques

Transition d'un écoulement fluvial vers un écoulement torrentiel

Un seuil de hauteur Z_1 suffisament grande pour que le niveau d'eau en amont se soit ajusté au niveau au niveau correspondant tout juste à la charge spécifique minimale pour passer le seuil ($H_C + Z_1$) correspond à une situation de *contrôle critique*: l'écoulement est

- fluvial en amont du seuil ($F < 1$),
- critique au sommet du seuil ($h = h_c$, $F = 1$),
- torrentiel en aval du seuil

la figure 4 illustre une telle situation de contrôle critique.

Transition d'un écoulement torrentiel vers un écoulement fluvial

Dans l'autre sens, la transition d'un écoulement torrentiel vers un écoulement fluvial ne peut se faire que par un choc, c'est à dire à une valeur de $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$ qui deviendrait infinie. Ce choc, appelé *ressaut hydraulique*, assure une transition brutale.

Travail préparatoire

On notera x l'abcisse dans la direction de l'écoulement, $v(x)$ le module de la vitesse du fluide supposé homogène dans une section transverse, et $z(x)$ l'altitude de la ligne d'eau. On notera de plus $z(x) = h(x) + e(x)$ avec $h(x)$ la hauteur d'eau et $e(x)$ altitude de l'obstacle.

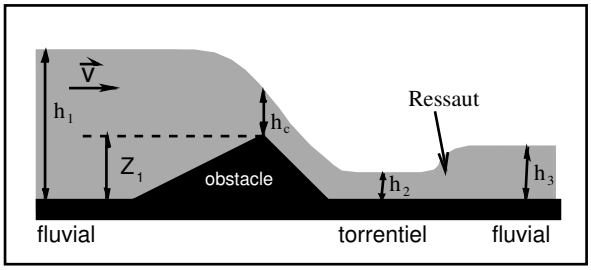


Figure 4: Écoulement à surface libre au dessus d'un obstacle

- Faire un schéma précisant les notations.
- Exprimer la conservation de la charge de part et d'autre de l'obstacle (mais en aval du ressaut) le long d'une igne de courant à l'interface air–eau.
- Utiliser la conservation du débit pour exprimer la charge en fonction de la hauteur d'eau, et dériver cette expression pour obtenir la relation

$$\frac{\mathrm{d}\,h(x)}{\mathrm{d}x}\left(1-\frac{Q^2}{g\,L^2}\frac{1}{h^3(x)}\right)+\frac{\mathrm{d}\,e(x)}{\mathrm{d}x}=0 \qquad (12)$$

- En déduire que si $h^3(x) < \frac{Q^2}{g\,L^2}$ $\forall x$, alors h a le même sens de variation que e et que si $h^3(x) > \frac{Q^2}{g\,L^2}$ $\forall x$, alors h a le sens de variation opposé de e. Faire une représentation schématique dans ces deux cas de figure.
- En déduire que $h^3(x) = \frac{Q^2}{g\,L^2}$ quand x correspond au sommet de l'obstacle et que cela correspond au régime critique $F = 1$.

C Dispositif expérimental

C-1 Description des appareils et Mode opératoire

Un canal hydraulique à fond plat de section rectangulaire est alimenté en amont par une pompe à débit controlé et variable. Un obstacle de forme triangulaire disposé au fond du canal permet de réaliser un contrôle critique.

Avant d'alimenter la pompe, verifier de la guillotine en aval du canal est largement ouverte et que la cuve de réception se situe bien à l'aplomb de la sortie du canal.

Le réglage du débit s'effectue sur la cuve, l'afficheur indique la valeur du débit qui peut varier continuement jusqu'à la valeur de 40 L/min. Une fois le débit fixé, il convient d'attendre un temps suffisant pour l'établissement du régime stationnaire avant de prendre les mesures de charge spécifique.

C-2 Mesures et analyse des résulats

- Mesurer précisément la largeur L du canal et la hauteur Z_1 de l'obstacle
- Fixer la valeur du débit autour de 40 L/min et reporter sur une figure à l'échelle la hauteur d'eau et de fond de canal en prenant des mesures de hauteur d'eau en une quinzaine de points. Vous devez adapter le positionnement des points de mesure en fonction du phénomène à décrire.
- Calculer la charge à l'interface air–eau et la charge spécifique en chaque point. Reporter ces valeurs sur la figure précédente en utilisant un code couleur.
- Commenter le résultat obtenu. Que represente la varation de la charge?
- Tracer la charge spécifique en fonction de la hauteur d'eau, utiliser un code couleur pour identifier les points en amont, au sommet, en aval et après de ressaut.
- Commenter la variation de la charge spécifique. Que se passe-t-il autour du ressaut?
- Calculer le nombre de Froude local pour chacun des points de mesure et représenter sur une même figure à l'échelle la variation de F et la variation d'altitude du fond le long du canal. Utiliser deux échelles différentes pour les ordonnées avec un code couleur. Identifier les transitions de régime.
- Pourquoi peut-on dire que l'obstacle "contrôle l'écoulement" ? Rédiger un texte en vous appuyant sur vos résultats et sur ceux de la partie théorique.

- Pour une dizaine de valeur de débit (commencer par la plus importante) mesurer la hauteur d'eau en quatre points
  - en amont de l'obstacle;
  - au sommet de l'obstacle;
  - en aval de l'obstacle (juste après);
  - à proximité de l'extrémité aval du canal.
- Calculer la charge spécifique H_S en chaque point et pour chaque valeur du débit.
- Utiliser vos résultats pour valider ou infirmer les relations $h_c = \left(\frac{Q^2}{g\,L^2}\right)^{1/3}$ et $H_C = \frac{3}{2}\,h_c$.

D Synthèse Partielle

Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une synthèse (5 – 10 lignes) détaillant

- ⋆ les principales conclusions scientifiques obtenues
- ⋆ les points éventuels qui resterait à clarifier.

Partie C Impact d'un jet sur un obstacle

L'objectif de ce travail est l'étude de l'impact d'un jet d'eau sur un obstacle et la validation du modèle du fluide parfait. La comparaison des résultats obtenus sur deux obstacles différents : un hémisphère creux et une plaque plane permettra de déterminer la forme la plus efficace selon que l'on souhaite maximiser ou minimiser la contrainte liée à l'impact du jet.

A Préambule

Après avoir lu l'ensemble de cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (5 – 10 lignes) présentant

- ⋆ les principaux objectifs scientifiques de cette partie,
- ⋆ les moyens mis en œuvre pour les atteindre.

B Éléments théoriques

B-1 Jet frappant un obstacle

Soit un jet d'eau frappant un obstacle (Fig 5), si l'on néglige les frottements et les pertes de charge, la seule force extérieure est la force $F_{\mathrm{o/j}}$ qu'exerce l'obstacle sur le jet d'eau. En projetant l'expression du théorème d'Euler dans la direction verticale et en introduisant l'angle α entre les vitesses $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$: $\alpha = \left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)$ on obtient

$$F_{\mathrm{o/j}} = Q_m\,(V_2 \cos\alpha - V_1).$$

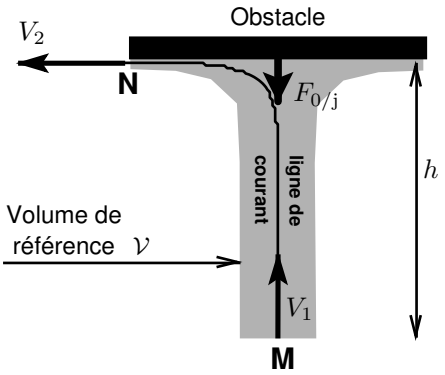


Figure 5: Impact d'un jet sur une plaque

Appliquons le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant MN (Fig. 5):

$$p_{\mathrm{M}} + \rho g\, h_{\mathrm{M}} + \frac{1}{2}\rho\, V_1^2 = p_{\mathrm{N}} + \rho g\, h_{\mathrm{N}} + \frac{1}{2}\rho\, V_2^2.$$

En supposant la vitesse constante dans une section droite de l'écoulement $p_{\mathrm{M}} = p_{\mathrm{atm}} = p_{\mathrm{N}}$ et négligeant l'effet de la variation d'altitude entre M et N, on obtient: $V_1 = V_2$.

L'expression de la force de réaction de l'obstacle sur le jet est donc $F_{\mathrm{o/j}} = Q_{\mathrm{m}} V_1\,(\cos\alpha - 1)$. La force F' exercée par le jet sur l'obstacle est égale et opposée à $F_{\mathrm{o/j}}$

$$F' = Q_m V_1\,(1 - \cos\alpha) \tag{13}$$

La relation (13) correspond à la force théorique établit dans le cadre du modèle du fluide parfait.

Si le jet effectue un ascension d'une altitude h_0 an amont du point M, partant d'une vitesse V_0, alors une correction de la relation (13) est établie par la mesure du débit massique minimale Q_0 permettant le contact entre le fluide et l'objet.

- Démontrer que $V_1 = \sqrt{V_0^2 - 2\,g\,h_0}$;
- En déduire la relation $Q_0 = \rho\,S\,\sqrt{2\,g\,h_0}$, où S représente la surface du jet au point M.
- En déduire l'expression corrigée de la force F exercée par le jet sur l'obstacle:

$$F = \frac{1}{\rho\,S} Q_m^2 \sqrt{1 - \frac{Q_0^2}{Q_m^2}}\,(1 - \cos\alpha) \tag{14}$$

Dans la suite, on utilisera la variable $u = Q_m^2 \sqrt{1 - \frac{Q_0^2}{Q_m^2}}$

B-2 Fluide réel

Le fluide n'est pas parfait et il se produit dans l'écoulement une perte d'énergie due aux frottements. Par suite la vitesse V_2 n'est pas égale à V_1 et la force mesurée F_R dans ce cas est légèrement inférieure à F. On tient compte des frottements en introduisant de manière empirique dans l'équation (13) un coefficient C appelé souvent rendement tel que:

$$C = \frac{F_R}{F} \tag{15}$$

C Dispositif expérimental

C-1 Description des appareils

Un tuyau vertical alimenté par le banc hydraulique est terminé par une tuyère qui produit un jet d'eau. Ce jet se réfléchit sur un obstacle (hémisphère ou plaque plane). La tuyère et l'obstacle sont enfermés dans un cylindre transparent, dont la base possède un trou pour l'évacuation de l'eau.

Le constructeur indique que la tuyère à un diamètre de sortie $d = 10 \pm 0.1$ mm.

Mesure de la force F_{mes} de réaction du jet sur l'obstacle

L'obstacle (plaque ou hémisphère) est soutenu par un fléau. Le poids de l'obstacle est équilibré par la tension du ressort de compensation (*cf* figure ci-contre). Le contrepoids permettant de ramener le fléau à l'horizontale mesure la force de réaction du jet sur l'obstacle F_{mes}.

Mesure du débit massique

La mesure du débit massique s'effectue à l'aide d'un récipient d'un chronomètre et d'une balance. Pour obtenir des mesures précises, il faut bien synchroniser le déclenchement et l'arrêt du chronomètre avec la mise et le retrait du récipient sous le jet. Les opérations doivent être effectuées simultanément par

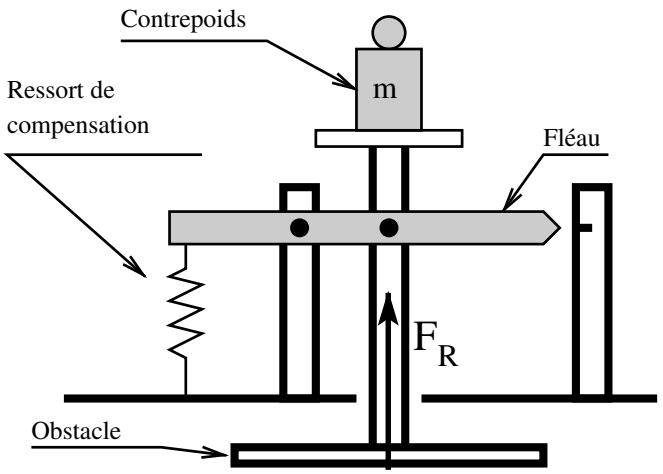


Figure 6: Balance à fléau

le même opérateur. Il est bon de s'entraîner un peu avant de prendre les mesures. Enfin, pour éviter les biais systématiques liés à l'opérateur, vous changerez régulièrement d'opérateur de mesure.

C-2 Mode opératoire

Plutôt que de chercher à équilibrer le fléau avec des contrepoids en présence d'un jet, on préfère fixer la valeur de la force de réaction du jet F_R (en fixant le contrepoids) et déterminer le débit permettant de ramener le fléau à l'horizontale. Ainsi la force de réaction du jet sur l'obstacle est connue d'avance et l'on mesure le débit volumique correspondant.

Protocole : *Le mode opératoire est le suivant:*

1. *En l'absence de jet et de contrepoids, s'assurer par la vis de réglage de la tension du ressort de rappel, de l'horizontalité du fléau.*
2. *Charger le fléau avec le contrepoids voulu.*
3. *Ouvrir* ***lentement*** *la vanne d'alimentation jusqu'au rétablissement de l'horizontalité du fléau. Pour minimiser l'impact des frottements du fléau, faire osciller le fléau autour de l'horizontale avant de le stabiliser.*
4. *Mesurer le débit sans modifier le réglage de la vanne d'alimentation.*
5. *Fermer la vanne d'alimentation.*

D Résultats

Vous disposez de deux obstacles différents: une plaque horizontale et un hémisphère creux[7].

D-1 Mesures

Pour chacun des deux solides:

- Mesurer le débit massique Q_0 en réglant le jet pour qu'il atteigne tout juste l'objet, sans entrer en contact avec lui.
- Mesurer le débit massique correspondant aux forces de réaction F_{mes} suivantes: $0,3$ N; $0,5$ N; 1 N; 2 N; 3 N; 5 N et 7 N. Chaque mesure est répétée au moins trois fois pour établir les incertitudes, augmenter le nombre de répétitions si nécessaire.
- Noter l'aspect qualitatif de l'écoulement (laminaire ou turbulent).
- Dans un tableau, présenter les résultats en colonnes:

$$F_{\text{mes}}; \quad \overline{Q_m}; \quad \Delta Q_m; \quad \overline{u}; \quad \Delta u.$$

Préciser la méthode utilisée pour le calcul de l'incertitude ΔX.

D-2 Analyse des résultats

- Représenter sur une même figure $\overline{u}$ en fonction de F_{mes}, en traçant les ensembles d'incertitude.
- En se basant sur la théorie développée ici, comment s'attend–on à voir les point expérimentaux se positionner sur la figure? Est-ce le cas?
- Le cas échéant, faites une régression linéaire et comparer la valeur du coefficient directeur à la valeur théorique attendue.
- Lequel des deux obstacles permet de récupérer la plus grande énergie du fluide ?

E Synthèse Partielle

Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une synthèse (5 – 10 lignes) détaillant

- ⋆ les principales conclusions scientifiques obtenues
- ⋆ les points éventuels qui resterait à clarifier.

Partie D Synthèse Générale

Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant ce TP, utiliser les 20 dernières minutes de la séance pour **rédiger** sur votre cahier de laboratoire un bilan de la séance (10-15 lignes) contenant

- ⋆ une synthèse de vos principaux résultats,
- ⋆ une conclusion générale liant les résultats entre eux,
- ⋆ une synthèse de vos apprentissages.

7. La mise en place d'un obstacle doit être effectuée par un enseignant

TP 9
Écoulements permanents dans les conduites

⋆ ⋆
⋆

Rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (10 – 15 lignes) présentant l'objet ou le phénomène d'étude ainsi que son contexte (utilité pratique et/ou fondamentale)

Partie A Élements théoriques

A Quelques Définitions

A-1 Fluide visqueux

Un fluide est un ensemble de particules matérielles de petites dimensions, déformables, plus ou moins libres de se déplacer les unes par rapport aux autres (liquide ou gaz). On le supposera isotrope et incompressible dans le cas des liquides.

Dans le cas des fluides parfaits en mouvement, les forces de contact entre deux particules voisines sont perpendiculaires à leur surface de séparation.

Dans le cas des fluides réels ou visqueux, il existe des forces de frottements tangentielles aux surfaces : ce sont les forces de viscosité qui produisent une dissipation d'énergie mécanique sous forme de chaleur.

A-2 Mise en évidence de la viscosité- Description macroscopique

Soient deux lames planes (P et P'), parallèles, séparées par une couche de fluide de faible épaisseur devant la surface des lames. La plaque inférieure (P') reste fixe, l'autre se déplace à une vitesse $\overrightarrow{v}$ sous l'action d'une force $\overrightarrow{F}$ constante (Fig. 1.a).

Sous l'effet des forces d'interaction entre les molécules de fluide et celles de la paroi, la couche de fluide en contact avec la plaque mobile est entraînée à la même vitesse $\overrightarrow{v}$ tandis que le fluide en contact avec la plaque fixe (P') reste immobile. Par ailleurs, on peut observer que toutes les particules élément d'un même plan parallèle aux plaques se déplacent à la même vitesse $\overrightarrow{V}(y)$ comprise entre $\overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v}$.

Aussi, deux couches voisines planes parallèles aux parois, de surface S, séparées d'une distance dy se déplacent à des vitesses différentes : il s'établit un **gradient de vitesses** entre les différentes couches de fluides. Les couches vont alors glisser les unes sur les autres : des forces de frottement parallèle aux couches vont alors prendre naissance : les couches supérieures plus rapides sont freinées progressivement par les couches inférieures plus lentes, et réciproquement (figure 1-b).

A-3 Écoulement laminaire, écoulement turbulent

Dans un écoulement permanent en régime laminaire, les particules de fluides glissent les unes sur les autres sans qu'il y ait passage de particules d'une couche à l'autre. Une faible perturbation de l'écoulement disparaît plus ou moins rapidement en aval du point où elle a été produite : c'est un écoulement stable.

Un filet de colorant introduit au centre d'une canalisation de diamètre d dans laquelle s'écoule un fluide reste rectiligne au cours de l'écoulement.

Dans un écoulement turbulent, toute perturbation, au lieu de s'amortir, s'amplifie à partir de petits tourbillons qui s'enroulent et grossissent en progressant vers l'aval : c'est un écoulement instable.

Dans l'expérience précédente, le filet coloré se disperse dans le fluide en écoulement dès son introduction dans la canalisation.

Pour caractériser le régime d'écoulement (laminaire ou turbulent), on utilise le nombre sans dimension Re, appelé *nombre de Reynolds* qui représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses.

A-4 Fluide newtonien

Un fluide visqueux en écoulement laminaire est dit newtonien lorsque la force de résistance à l'écoulement est proportionnelle au gradient de vitesse entre les couches de fluides :

$$F = \eta\, S\, \frac{u}{y}.$$

Avec η la viscosité dynamique du fluide en Pa.s ou Poiseuille (Pl), et S la surface de la paroi.

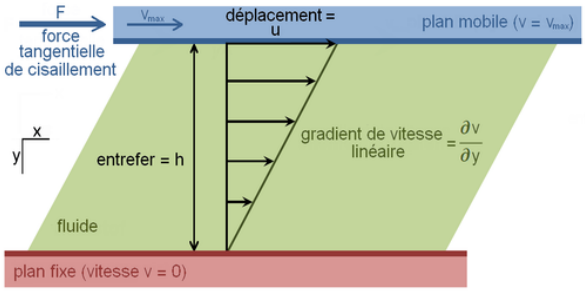


Figure 1: Description d'un écoulement en cisaillement

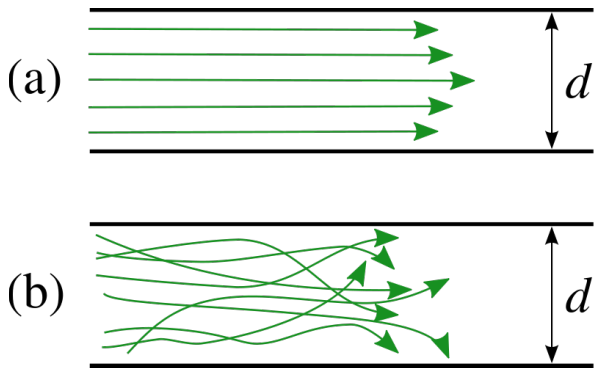


Figure 2: Écoulement lanimaire et turbulent

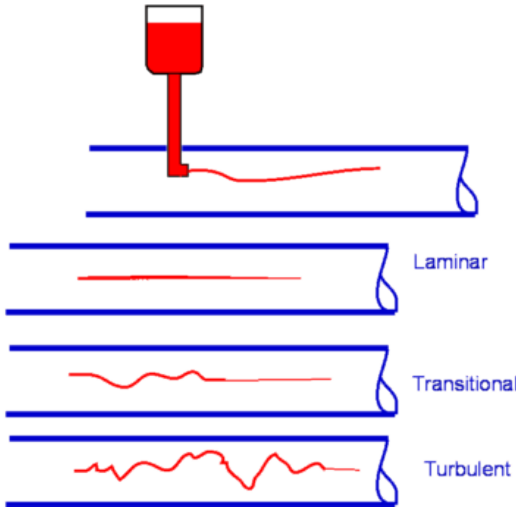


Figure 3: Écoulement lanimaire et turbulent

Le ratio $\frac{u}{y}$ est le *taux de cisaillement*. En introduisant la quantité $\tau = \frac{F}{S}$ homogène à une pression, on aboutit à une expression différentiel locale:

$$\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$$

Le coefficient η, appelé viscosité dynamique, dépend de la nature du fluide et des conditions physiques (T, P) dans lesquels il se trouve.

viscosité cinématique On appelle viscosité cinématique ν le rapport

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \qquad (\text{en m}^2.\text{s}^{-1})$$

Une unité parfois utilisée pour cette grandeur est le stokes (St) avec 1 St= 10^{-4} m^2.s^{-1}.

B Écoulement dans une conduite cylindrique

B-1 Définition de la perte de charge

L'écoulement d'un fluide n'est pas de la somme du mouvement isolé des particules élémentaires qui le composent, mais résulte du mouvement collectif de celles-ci qui interagissent entre elles (et avec les parois) sans que leurs trajectoires soient nécessairement parallèles. L'ensemble de ces interactions entraînent alors une perte d'énergie mécanique du fluide lors de son écoulement.

Si l'on considère un volume élémentaire de fluide newtonien dans une conduite, son écoulement n'est possible que si son énergie mécanique volumique X n'est pas nulle.

$$X = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + P$$

Cette énergie est la somme de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\rho v^2$, des énergies potentielles dues au champ de pression P et au champ de gravitation $\rho g z$; où P est la pression, V la vitesse de l'élément de volume, ρ la masse volumique du fluide supposé incompressible, et z la coordonnée verticale du fluide.

Charge d'un fluide Dans une conduite on définit alors la charge H d'un fluide, mesurée en mètre, comme étant la grandeur

$$H = \frac{X}{\rho g} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g} + z + \frac{P}{\rho g}$$

avec ici V la vitesse moyenne du fluide le long d'une section de la conduite, z l'altitude de la section considérée et P la pression.

Perte de charge Dans le cas d'un fluide réel, la charge H est une quantité qui diminue dans le sens de l'écoulement. Dans le cas d'un fluide parfait, la charge H reste constante.

Les pertes de charge sont qualifiées de régulières si elles sont réparties tout le long de la canalisation. Elles sont proportionnelles à la longueur de la canalisation et dépendent en particulier de la nature de l'écoulement. Les pertes de charge sont dites singulières lorsqu'elles résultent d'un accident dans la conduite (coude, obstacle...).

Perte de charge unitaire Dans le cas d'un écoulement en régime permanent dans une canalisation horizontale de section constante, les termes $\frac{1}{2}\rho v^2$ et $\rho g z$ sont constants, le débit étant le même tout le long de la conduite.

La perte de charge par unité de longueur de canalisation peut alors être exprimée directement en termes de différence de hauteur de colonne de liquide dans deux tubes piézométriques en deux points A et B de la canalisation distante de l. On peut montrer qu'il en serait de même pour une conduite non horizontale.

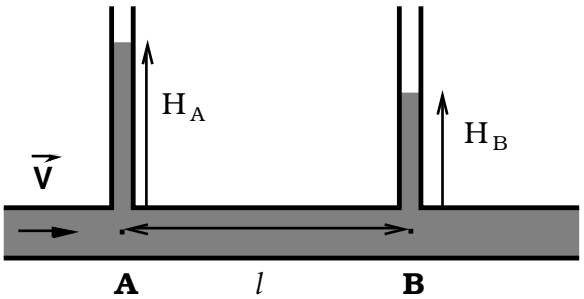


Figure 4: Perte de charge

On choisira de définir la perte de charge unitaire par la quantité

$$j = \frac{X_A - X_B}{\rho\, g\, l} = \frac{H_A - H_B}{l}.$$

De cette manière, j est une quantité positive sans dimension facilement déterminée.

B-2 Aspect prédictible de la perte de charge dans le cas général

Dans le cas d'une conduite en régime permanent, s'il est facile de mesurer la perte de charge, il n'est pas toujours possible de la prévoir avec exactitude. En effet, pour cela, il faudrait pouvoir déterminer dans l'écoulement l'ensemble des forces de frottement.

Au XIXème siècle, les scientifiques Darcy et Weisbach ont fait une analyse de cette perte de charge en considérant l'énergie perdue par frottement d'un élément de volume du fluide et ont établi une équation générale liant la perte de charge linéaire avec la vitesse moyenne du fluide dans la conduite :

$$j = \frac{\Delta H}{l} = \Lambda\, \frac{1}{D}\, \frac{V^2}{2\, g}$$

où D est le diamètre de la conduite, g le champ de gravitation, V la vitesse moyenne du fluide dans la conduite et Λ un coefficient de frottement qui dépend de la rugosité interne de la conduite et du régime plus ou moins turbulent. Ce coefficient peut être obtenu grâce à l'abaque de la figure 5

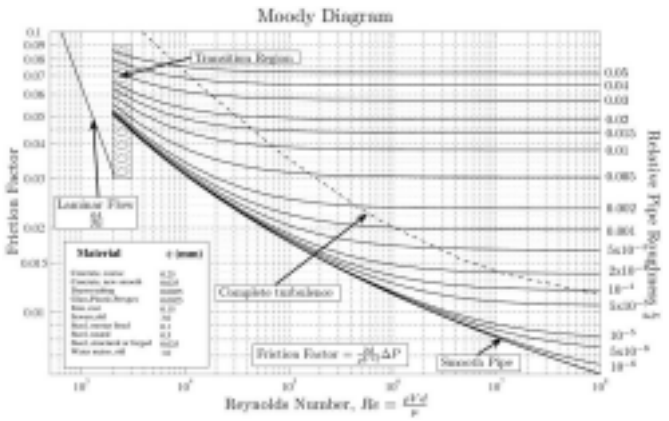


Figure 5: Diagram de Moody

Coefficient de frottement dans le cas d'un régime laminaire Dans le cas d'un écoulement de Poiseuille, l'approximation conventionnelle du coefficient de frottement4 est définie par :

$$\Lambda = \frac{64}{\mathrm{R_e}}$$

Cette relation est applicable pour des nombres de Reynolds allant de zéro à 2 300.

Coefficient de frottement dans le cas d'un régime turbulent De façon générale, le coefficient de frottement peut être déterminé à l'aide de la loi universelle de Prandtl. Celle-ci se présente sous la forme d'une équation implicite et est valable pour un écoulement turbulent dans un conduit lisse (Prandtl-Von Karman, 1934) :

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = 2 \cdot \log(\mathrm{R_e}\sqrt{\Lambda}) - 0,8$$

Pour des nombres de Reynolds allant de 4 000 à 100 000 on peut utiliser la corrélation de Blasius (1911):

$$\Lambda = 0,3164 \cdot \mathrm{Re}^{-0,25}$$

Pour les nombres de Reynolds allant de 2 300 à 4 000, il convient de prendre une valeur moyenne entre celles fournies par les deux formules ou d'utiliser un abaque

B-3 Cas particulier d'un écoulement laminaire, loi de Poiseuille

Dans le cas d'un écoulement laminaire, toutes les particules élémentaires possèdent une vitesse colinéaire aux autres. Les particules en contact avec les parois de la conduite restent immobiles et forment ce qu'on appelle la couche limite. La rugosité de la conduite n'influe alors pas sur la perte de charge. Pour des raisons de symétrie, les autres particules élémentaires du fluide ont une vitesse qui ne dépend que de r la distance de la particule avec le centre de la conduite.

L'écoulement est alors composé de tubes de courant d'épaisseur dr dans lesquels la vitesse des particules est identique. Les frottements responsables de la perte de charge résultent donc du frottement des tubes de courant les uns par rapport aux autres.

La mince couche cylindrique adjacente à cette couche limite a une vitesse d'écoulement faible du fait des forces de viscosité. Les couches de fluides successives auront une vitesse de plus en plus importante à mesure que l'on se rapproche du centre de la conduite.

On peut montrer que la répartition de la vitesse des différentes couches cylindriques de fluide est parabolique le long d'un diamètre. La vitesse d'écoulement d'un tube de courant de rayon r est donnée par la relation

$$v(r) = \frac{R^2}{4\,\eta}\, \frac{|P_b - P_a|}{l} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

avec

- P_a et P_b la pression aux deux extrémités du cylindre;
- l la longueur de la conduite;
- η la viscosité du fluide; et
- R le rayon de la conduite.

- Calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^R \left(R^2 - r^2\right) \frac{|P_b - P_a|}{4\eta\, l}\, 2\pi\, r\mathrm{d}r$$

- En déduire la loi de Poiseuille :

$$Q = \frac{|P_b - P_a|}{8\eta\, l} \pi\, R^4$$

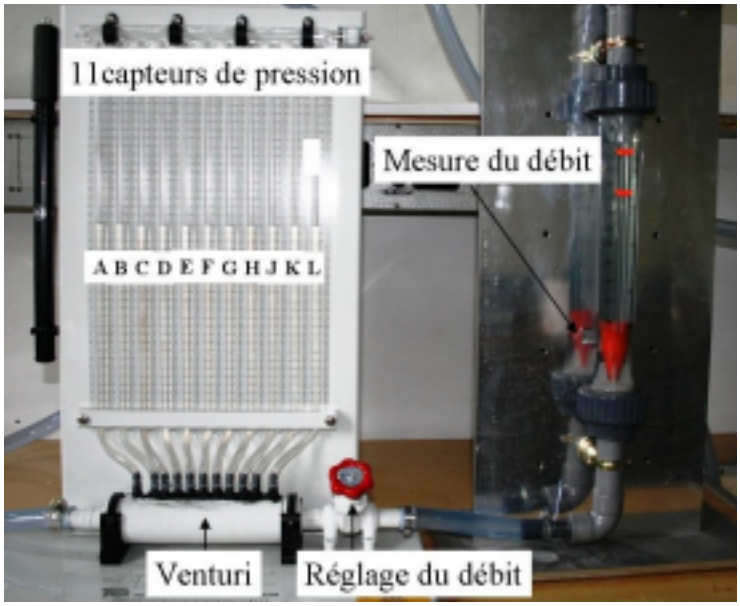


Figure 7: Tube de Venturi

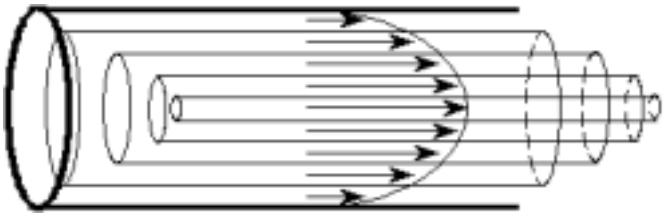


Figure 6: Écoulement de Poiseuille

- Exprimer alors la perte de charge unitaire en fonction de la vitesse moyenne du fluide dans la conduite.

Partie B Écoulement dans un tube de Venturi

A Préambule

Après avoir lu l'ensemble de cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (5 – 10 lignes) présentant

- ⋆ les principaux objectifs scientifiques de cette partie,
- ⋆ les moyens mis en œuvre pour les atteindre.

B Principe

Le tube de Venturi est un appareil utilisé pour mesurer des débits. Il est constitué d'une conduite circulaire comportant un convergent suivi d'un divergent. Il utilise, comme principe de mesure, la diminution de pression statique résultant de l'augmentation de vitesse du fluide associée au rétrécissement.

C Description de l'appareil

Le tube de venturi (Fig 7) possède 11 prises de pressions : une à chaque extrémité (A et L), une dans sa partie la plus étroite D, deux dans la partie convergente (B et C) et six dans la partie divergente (E à K). Les diamètres en chaque prise sont reportés dans le tableau (2) :

Le principe du dispositif expérimental est résumé sur la figure 8. Les hauteurs d'eau dans les tubes verticaux permettent de déterminer la variation de pression entre deux points du tube (sur le schéma de principe, entre les points A et D qui correspondent à l'entrée et au col respectivement. Les tubes verticaux sont aussi appelés piézomètres.

- Utiliser la loi de l'hydrostatique entre le point A et la surface du liquide dans le piézomètre pour établir une relation entre P_A, V_A,h_A et P_u pression dans le piézomètre de la forme
$$P_\mathrm{A} = P_u + \rho\, g\, h_\mathrm{A}.$$
Faire de même au point B.
- En déduire que la variation de hauteur dans les piézomètres en A et en B est proportionnelle à la variation de pression entre les points A et B. En particulier, si $h_\mathrm{A} > h_\mathrm{D}$, que peut–on dire de P_A par rapport à P_D?
- Utiliser l'équation de Bernoulli entre les points A et B le long de l'axe du tube pour déterminer une relation entre P_A, V_A,P_D et V_D de la forme
$$P_\mathrm{A} + \frac{1}{2}\rho\, V_\mathrm{A}^2 = P_\mathrm{D} + \frac{1}{2}\rho\, V_\mathrm{D}^2$$
- Dans l'approximation du fluide incompressible[8], utiliser la conservation du débit volumique Q_v pour réécrire l'expression précédente en fonction des section en A et en D. En déduire la relation d'ordre entre P_A et P_D dans le cas du schéma 8. La figure est-elle correcte?
- En notant S_A et S_D les sections du tube en A et B montrer que la variation de hauteur dans les piézomètres s'écrit
$$h_\mathrm{A} - h_\mathrm{D} = \frac{Q_\mathrm{V}^2}{2\, g\, S_\mathrm{A}^2}\left(\frac{S_\mathrm{A}^2}{S_\mathrm{D}^2} - 1\right)$$

D Manipulation

D-1 Effet Venturi

- Utiliser le dispositif expérimental pour valider qualitativement vos conclusions théoriques établies dans votre préparation du TP.
- Pour une valeur de débit intermédiaire, tracer sur une même figure les variations de hauteur dans les piézomètres mesurées expérimentalement et prédites par la théorie développée ici en utilisant la valeur mesurée pour le débit volumique.

8. L'approximation du fluide incompressible est valable si la vitesse du fluide est négligeable devant la célérité des ondes sonores dans le fluide

Prise :	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L
Diamètre (mm) :	26	23,2	18,4	16	16,8	18,5	20,2	21,8	23,5	25,2	26

Table 2: Diamètre du tube en chaque prise

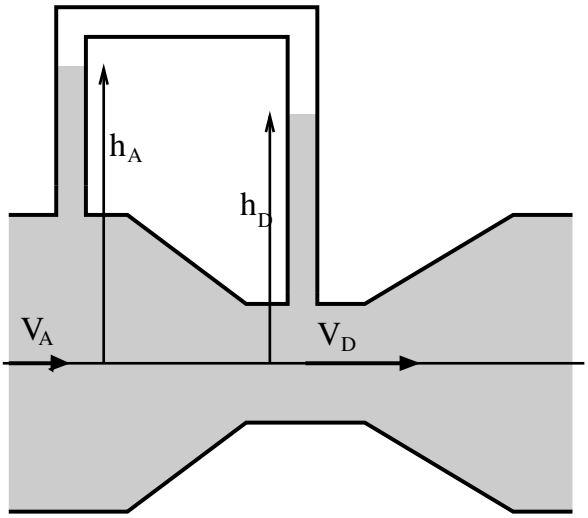


Figure 8: Schéma du tube de Venturi

D-2 Utilisation en débitmètre

On souhaite maintenant utiliser le Venturi comme appareil de mesure des débits.

- Établir la relation qui permet de déterminer le débit volumique théorique Q_{th} à partir des mesures de la pression au niveau des sections minimale et maximale.
- Pour dix valeurs différentes du débit réel $Q_{réel}$, mesurer la différence de hauteur piézométrique ΔH entre l'entrée et le col du Venturi.
- Déduire de vos mesures les dix valeurs du débit théorique correspondant aux débits réels choisis.
- Tracer la courbe

$$Q_{\text{th.}} = f\left(Q_{\text{réel}}\right).$$

- Quelle est l'allure de cette courbe ?

On souhaite établir une relation d'usage permettant de déterminer le débit réel à partir de la mesure de ΔH

- Monter que le débit réel peut s'exprimer comme

$$Q = k\sqrt{\Delta H}$$

- Donner l'expression littérale puis la valeur numérique de k.

E Synthèse Partielle

- Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une synthèse (5 – 10 lignes) détaillant

⋆ les principales conclusions scientifiques obtenues

⋆ les points éventuels qui resterait à clarifier.

Partie C Perte de charge dans une conduite cylindrique Loi de Poiseuille (1835)

A Préambule

- Après avoir lu l'ensemble de cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une introduction (5 – 10 lignes) présentant

⋆ les principaux objectifs scientifiques de cette partie,

⋆ les moyens mis en œuvre pour les atteindre.

B Expérimentation

Le montage fonctionne en circuit ouvert, l'eau circule dans une conduite en cuivre cylindrique de diamètre intérieur 4 mm et de longueur 1m. Trois tubes piézométriques permettent de mesurer la variation de pression le long du tube.

Attention avant de mettre la pompe en fonctionnement, vérifiez qu'il n'y a pas d'air dans les tuyaux.

Prise de mesure :

1. *Après avoir allumé la pompe, ouvrir doucement le robinet, ajuster le débit de sorte que le niveau dans le tube piézométrique « 2 » soit de 1cm,*
2. *Estimer alors le débit en déterminant le volume d'eau qui s'est écoulé durant un temps donné.*
3. *Faire le relevé des hauteurs d'eau dans chaque tube piézométrique.*
4. *Faire une série de mesures en ajustant le débit de sorte que le niveau dans le tube piézométrique « 2 » augmente de 1 cm à chaque fois.*

- Pourquoi le niveau d'eau dans le tube piézométrique est–il nul dans le tube piézométrique « 3 » ?

- Quelle est la signature du passage du régime laminaire au régime turbulent ?
- Tracer la courbe expérimentale de la perte de charge j en fonction de la vitesse moyenne V de l'écoulement.
- Tracer également $\ln(J)$ en fonction de $\ln(V)$. Déterminer les coefficients de frottement.
- Pour quelle valeur de V l'écoulement devient turbulent ? Quelle est alors la valeur du nombre de Reynolds ?

C Synthèse Partielle

Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant cette partie, rédiger sur votre cahier de laboratoire une synthèse (5 – 10 lignes) détaillant

- ⋆ les principales conclusions scientifiques obtenues
- ⋆ les points éventuels qui resterait à clarifier.

Partie D Synthèse Générale

Après avoir relu les pages de votre cahier de laboratoire concernant ce TP, utiliser les 20 dernières minutes de la séance pour **rédiger** sur votre cahier de laboratoire un bilan de la séance (10-15 lignes) contenant

- ⋆ une synthèse de vos principaux résultats,
- ⋆ une conclusion générale liant les résultats entre eux,
- ⋆ une synthèse de vos apprentissages.