



HAL
open science

Outils mathématiques pour la physique – S5 Licence de physique Parcours Physique Fondamentale – Univ Lille

Saliya Coulibaly, Stephane Randoux, Quentin Thommen, Véronique Zehnlé

► To cite this version:

Saliya Coulibaly, Stephane Randoux, Quentin Thommen, Véronique Zehnlé. Outils mathématiques pour la physique – S5 Licence de physique Parcours Physique Fondamentale – Univ Lille. Licence. France. 2019. hal-02547152

HAL Id: hal-02547152

<https://hal.science/hal-02547152>

Submitted on 23 Apr 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Outils mathématiques pour la physique

S5 Licence de physique
Parcours Physique Fondamentale

Version 1.0

7 novembre 2019

Plan du cours

- Chap. 1 : Calcul Matriciel (12h)
- Chap. 2 : Série de Fourier & EDP (8h)
- Chap. 3 : Transformée de Fourier (12h)
- Chap. 4 : Polynômes orthogonaux et fonctions spéciales (18h)

Quelques références

- Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et ingénieurs – E. Belorizki – EDP Sciences
- Elements de mathematiques pour la physique et la chimie. exercices et problemes – M. Kilber– Editions des archives contemporaines
- Elements of Advanced Engineering Mathematics – E. Kreyszig – John Wiley & Sons
- Mathematical Methods for Physics and Engineering : A Comprehensive Guide – K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence, Cambridge University Press
- Mathematical Methods in the Physical Sciences – M.L. Boas – John Wiley & Sons
- Mathematical Methods for Physicists : A Comprehensive Guide – G. B. Arfken , H. J. Weber, *et al.* – Academic Press
- Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables – M. Abramowitz, I. A. Stegun (Sous la direction de) – Dover Publications Inc.

Ch 1 : Calcul Matriciel

MATRICES À COEFFICIENTS RÉELS

Définitions

Une matrice est un tableau de nombres. Une matrice à n lignes et m colonnes est appelée matrice $n \times m$. n et m sont les dimensions de la matrice. On note a_{ij} l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j (la ligne est toujours nommée en premier). Si $m = n$ la matrice est dite carrée.

Exemple : la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad (1)$$

est une matrice 3×2 . A est une matrice à coefficients réels si $a_{i,j} \in \mathbb{R} \forall i, j$

Les coefficients $a_{i,j}$ sont appelés les *éléments de matrices*. Par usage, on note les matrices avec des lettres capitales et les éléments avec la même lettre en minuscule.

Notations

On note $[a_{ij}]$ la matrice d'éléments a_{ij} ; on a donc $A = [a_{ij}]$.

On note aussi $(A)_{ij}$ l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j de la matrice A ; on a donc $(A)_{ij} = a_{ij}$.

La matrice identité est notée $\mathbb{1}$

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a $(\mathbb{1})_{ij} = \delta_{ij}$ (δ est le symbole de Kronecker)

Opérations élémentaires

Transposée

La matrice transposée d'une matrice A $n \times m$ est la matrice $m \times n$ notée A^T telle que $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$. Par exemple, si A est donnée par (1) :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Produit Matriciel

Si A est une matrice $n \times p$ et B une matrice $p \times m$, le produit matriciel de A par B est la matrice $C = A.B$ $n \times m$ telle que

$$(C)_{ij} = \sum_{k=1}^p (A)_{ik} (B)_{kj}$$

On utilise aussi la notation $(C)_{ij} = (A)_{ik} (B)_{kj}$, la sommation sur l'indice répété (k ici) est alors implicite.

Remarque : le produit matriciel est associatif *i.e.* $(A.B).C = A.(B.C)$

Cas particulier des matrices carrées :

1. le produit matriciel n'est généralement pas commutatif $A.B \neq B.A$
2. $A\mathbb{1} = A$.

Transposée d'un Produit Matriciel

$$C = A.B \Leftrightarrow C^T = (A.B)^T = B^T.A^T$$

Inversion de Matrice

Si A est une matrice carrée non singulière ($\det(A) \neq 0$) alors la matrice A^{-1} telle que $A^{-1}.A = \mathbb{1}$ existe.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

C^T est la transposée de la matrice des cofacteurs : $(C)_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Le mineur M_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la i ème ligne et la j ème colonne de A

Matrice Orthogonale

Une matrice orthogonale est une matrice carrée telle que

$$A^T = A^{-1}$$

Une matrice orthogonale est formée de lignes (ou colonnes) constituant une famille de vecteurs deux à deux orthogonaux

Si A est une matrice orthogonale alors $|\det(A)| = 1$

Exemple : $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

Cas particulier des vecteurs

Un vecteur \vec{x} d'un espace à n dimension munie d'une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de composantes (x_1, \dots, x_n) telles que $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ peut être représenté par une matrice avec $m = 1$ (1 colonne). Les éléments de la matrice étant les composantes du vecteur, la matrice est aussi appelée vecteur (plus précisément vecteur-colonne) ; par exemple si $n = 3$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{aussi noté} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

le second indice est omis.

On a alors

- $x^T = (x_1 \ x_2 \ x_3)$ un vecteur ligne
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = u^T.v$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{u^T.u}$

Remarque : si Q est une matrice orthogonale alors $u^T \cdot v = (Q \cdot u)^T \cdot (Q \cdot v)$

———— Valeurs & Vecteurs propres ————

La recherche de valeurs propres et de vecteurs propres d'une matrice carrée A $n \times n$ est la recherche des solutions du problème suivant

Connaissant A , trouver un nombre λ et un vecteur \vec{x} tels que $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$

Théorème de Cramer :

- Si $\det(A - \lambda \mathbb{I}) \neq 0$ alors le problème $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$ n'admet que des solutions triviales $\vec{x} = 0$.
- Si il existe des valeurs de λ telle que $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$ alors le problème $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$ admet des solutions non triviales ($\vec{x} \neq 0$)

La recherche des solutions non triviales du problème $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$ se conduit en deux temps :

1. Recherche des valeurs possible de λ par la recherche des racines du polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I})$. Ces valeurs sont les valeurs propres (λ_i).
2. Recherche des vecteurs \vec{x} : Pour chaque valeur propre trouvée λ_i , résoudre le problème linéaire $A \cdot \vec{x} = \lambda_i \vec{x}$, la solution est notée \vec{x}_i . L'ensemble des solutions forment les vecteurs propres.

Les solutions du problème $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$ sont les couples (valeur propre , vecteur propre) :

$$(\lambda_1, \vec{x}_1), (\lambda_1, \vec{x}_1), (\lambda_2, \vec{x}_2), \dots$$

Attention : si la valeur propre est dégénérée alors cette valeur propre admet plusieurs vecteurs propres indépendants (par exemple si $\lambda_1 = \lambda_2$, la dégénérescence est double, il y a deux vecteurs propres associés à la même valeur propre).

———— Changement de Base ————

Soit un espace vectoriel E de dimension n muni de deux bases distinctes \mathcal{B} et \mathcal{B}' formées à partir des vecteurs \vec{e}_i et \vec{e}'_i :

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \quad \mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$$

On note S la matrice carrée dont les éléments $(S)_{ij} = s_{ij}$ sont tels que $\vec{e}'_i = \sum_{j=0}^n s_{ij} \vec{e}_j$. Les éléments de la i -ème ligne de S sont les composantes de \vec{e}'_i dans la base \mathcal{B} .

Vecteur

Un vecteur \vec{x} de E peut être décomposé indépendamment dans \mathcal{B} et dans \mathcal{B}'

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n \\ &= x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + \dots + x'_n \vec{e}'_n \end{aligned}$$

on note

- x le vecteur colonne des composantes de \vec{x} dans \mathcal{B}
- x' le vecteur colonne des composantes de \vec{x} dans \mathcal{B}'

Le problème du changement de base consiste à définir la matrice de passage P , $n \times n$ permettant le calcul des composantes (x_i) à partir des composantes (x'_i) par un produit matriciel portant sur le vecteur colonne x' :

$$x = P \cdot x'$$

La matrice de passage P est la transposée de S : $P = S^T$

Application linéaire

Une application linéaire endomorphique \mathcal{A} transforme un vecteur \vec{x} en un vecteur \vec{y} de E , indépendamment de la base choisie (par exemple une translation, une rotation ou encore une dilatation,...) $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$.

Rappel : si \mathcal{A} est une application linéaire alors

$$\mathcal{A}(\lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2) = \lambda_1 \cdot \mathcal{A}(\vec{x}_1) + \lambda_2 \cdot \mathcal{A}(\vec{x}_2)$$

Une application linéaire est entièrement caractérisée par son action sur les vecteurs de base et donc la connaissance des composantes des vecteurs $\mathcal{A}(\vec{e}_i)$ dans la base \mathcal{B} détermine \mathcal{A} .

La matrice A , $n \times n$, d'éléments $(A)_{ij} = a_{ij}$ tels que

$$\mathcal{A}(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} \vec{e}_j$$

est nommée la *représentation* de l'application linéaire \mathcal{A} dans la base \mathcal{B} . On note

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{B}} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

et de même dans \mathcal{B}' :

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{B}'} = A = \begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & a'_{i,j} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Une application linéaire \mathcal{A} peut-être représentée dans plusieurs bases différentes, les éléments de matrice seront alors différents même si l'application est indépendante de la base.

La matrice de passage P permet de calculer la représentation dans la base \mathcal{B}' à partir de la représentation dans la base \mathcal{B} :

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} \cdot [\mathcal{A}]_{\mathcal{B}} \cdot P$$

■ MATRICES À COEFFICIENTS COMPLEXES ■

Les notations sont identiques au cas des matrices à coefficients réels, mais les coefficients sont des nombres complexes : $a_{ij} \in \mathbb{C}$

$$A = (a)_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Les notions de transposée, de multiplication, d'inverse, de valeurs-vecteurs propres sont inchangées.

—— Adjoint – notation ket & bra ——

Adjoint A^\dagger : Si A est une matrice à coefficients complexe, l'adjoint de A (notée A^\dagger) est la transposée conjuguée de A :

$$(A^\dagger)_{ij} \equiv (A)_{ji}^*$$

Si A est un nombre (matrice 1×1) : $A = \lambda$ alors $A^\dagger = \lambda^*$.

Une matrice ayant une seule colonne est appelée **ket** et est noté avec les symbole $| \cdot \rangle$:

$$| y \rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

L'adjoint d'un ket est appelé **bra** et est notée avec les symbole $\langle \cdot |$:

$$| y \rangle^\dagger = \langle y | = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$$

Matrice (opérateur) Hermitique

Une matrice est dite hermitique elle est son propre adjoint (auto-adjoint) $A = A^\dagger$ les éléments de matrice vérifient alors la relation $a_{i,j} = (A^\dagger)_{i,j} = a_{j,i}^*$

Adjoint d'un produit d'opérateurs

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

————— Produit Scalaire —————

Définition

Soit deux kets $| x \rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $| y \rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$; le produit $\langle x | | y \rangle$ définit un produit scalaire, noté $\langle x | y \rangle$,

tel que

$$\langle x | y \rangle = (x_1^*, \dots, x_n^*) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1^* y_1 + \dots + x_n^* y_n = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i.$$

Par construction $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle^*$.

Deux kets $| x \rangle$ et $| y \rangle$ sont dit orthogonaux ssi $\langle x | y \rangle = 0$.

Norme d'un Ket

La norme du ket $| x \rangle$ est le nombre réel positif

$$\sqrt{\langle x | x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n | x_i |^2}.$$

Un ket $| u \rangle$ est dit «normé »lorsque sa norme vaut 1 : $\langle u | u \rangle = 1$.

Représentation d'un opérateur et d'un ket

Dans un espace à n dimensions, munie d'une base $\mathcal{B} = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_n\rangle\}$, un opérateur endomorphique \mathcal{A} est représenté par une matrice à coefficients complexes A dont les éléments sont, par définitions, les nombres

$$(A)_{i,j} = \langle u_i | (\mathcal{A} | u_j \rangle)$$

La notation est contractée sous la forme

$$(A)_{i,j} = \langle u_i | \mathcal{A} | u_j \rangle$$

L'élément de matrice $(A)_{i,j}$ est le produit scalaire des kets $|u_i\rangle$ et $\mathcal{A} | u_j \rangle$

De même, un ket $|x\rangle$ a pour i ème composante dans \mathcal{B} : $x_i = \langle u_i | x \rangle$

———— Projecteur ————

Projection sur un ket normé

Soit $|u\rangle$ un ket normé, $|y\rangle$ un ket quelconque et \mathcal{P} un opérateur définie par

$$\mathcal{P} | y \rangle = (\langle u | y \rangle) | u \rangle,$$

Le ket $\mathcal{P} | y \rangle$ est la projection du ket $|y\rangle$ sur le ket $|u\rangle$. L'opérateur \mathcal{P} peut être écrit indépendamment du ket $|y\rangle$

$$\mathcal{P} = |u\rangle \langle u|$$

Projection sur un ket quelconque non nul

L'opérateur \mathcal{P} de projection sur le ket $|x\rangle$ quelconque non normé s'écrit

$$\mathcal{P} = \frac{|x\rangle \langle x|}{\langle x | x \rangle}.$$

Propriétés du projecteur \mathcal{P}

- Le projecteur \mathcal{P} est idempotent : $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \times \mathcal{P} = \mathcal{P}$;
- \mathcal{P} est un opérateur hermitique,
- Les valeurs propres de \mathcal{P} sont 1 et 0

Relation de fermeture

Soit $\mathcal{B} = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_n\rangle\}$ une base orthonormée de l'espace à n dimensions, la composante d'un ket $|y\rangle$ quelconque selon le ket de base $|u_i\rangle$ est le produit scalaire $\langle u_i | y \rangle$. Par regroupement, on peut donc écrire l'égalité

$$|y\rangle = \{|u_1\rangle \langle u_1| + \dots + |u_n\rangle \langle u_n|\} |y\rangle \quad \forall |y\rangle$$

qui implique la relation dite *relation de fermeture*

$$\sum_{i=1}^n |u_i\rangle \langle u_i| = \mathbb{1}$$

qui dit que la somme des projections sur l'ensemble des ket de base est l'opérateur identité.

———— Matrice (opérateur) unitaire ————

La matrice U est dite unitaire ssi $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}$.

Si U est une matrice unitaire alors les kets formés à partir des colonnes de U sont orthonormés.

Soit U une matrice unitaire et deux kets $|u'\rangle$ et $|v'\rangle$ formés par action de U sur les kets $|u\rangle$ et $|v\rangle$ tels que : $|u'\rangle = U |u\rangle$ et $|v'\rangle = U |v\rangle$ alors on a $\langle u' | v'\rangle = \langle u | v\rangle$. On dit qu'un opérateur unitaire U conserve le produit scalaire et donc la norme.

———— Valeurs propres & kets propres ————

Si \mathcal{A} est un **opérateur hermitique** alors

- Les valeurs propres de \mathcal{A} sont réelles,
- Les kets propres sont orthogonaux deux à deux.

L'ensemble des kets propres d'un opérateur hermitique forme une base orthogonale de l'espace. La matrice de passage est une matrice unitaire.

Commutateur

Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux opérateurs de même dimension, on nomme commutateur de \mathcal{A} et de \mathcal{B} l'opérateur, noté $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$, tel que

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}.$$

On dit que les deux opérateurs commutent ssi $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ est l'opérateur nul, ou encore $[A, B] = AB - BA = 0$, avec A et B les représentations de \mathcal{A} et \mathcal{B} dans une même base.

Ensemble d'opérateurs qui commutent

Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux opérateurs qui commutent $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 0$ alors il existe une famille de ket propre commun aux deux opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B} (mais avec des valeurs propres différentes :

$$\mathcal{A} |u_i\rangle = a_i |u_i\rangle, \quad \mathcal{B} |u_i\rangle = b_i |u_i\rangle$$

Cette propriété se généralise à une liste d'opérateur de taille quelconque si les opérateurs commutent tous deux à deux.

Ensemble complet d'opérateurs qui commutent

Soit une liste d'opérateurs $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots\}$ qui commutent tous deux à deux, soit $\{|u_i\rangle\}$ la liste des kets propres communs à tous les opérateurs. Si pour chaque ket propre $|u_i\rangle$, la liste des valeurs propres $\{a_i, b_i, c_i, \dots\}$ permet d'identifier le ket propre $|u_i\rangle$ de manière univoque, alors

- On dit que les opérateurs de la liste forment un ECOC (Ensemble complet d'opérateurs qui commutent)
- On utilise la liste des valeurs propres pour identifier les kets propres :

$$|a_i, b_i, c_i, \dots\rangle \equiv |u_i\rangle \quad \forall i$$

Remarque : Dans un ECOC, l'ordre des opérateurs doit être maintenu pour une identification correcte les ket propres.

Exercices du Chapitre 1

MATRICES À COEFFICIENTS RÉELS

Exercice 1 : Calculer la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sol : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : Calculer la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ sol : $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 3\mathbb{1} + 2A$, et en déduire A^{-1}

Exercice 4 : Dans une base orthonormée $\mathcal{B}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, l'application linéaire \mathcal{A} a pour représentation $A = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$.

- Vérifier que cette matrice correspond à une rotation (préciser laquelle).
- En déduire – sans calculs!! – la matrice A^{-1} .
- Mêmes questions pour $R = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, représentation de \mathcal{R} dans la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Exercice 5 : Dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, l'application linéaire \mathcal{P} a pour représentation $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Montrer que P est idempotent (c-a-d que $P^2 = P$).
- A quoi correspond cette matrice? Est-elle inversible?
- Quelles sont les valeurs propres de P .

Exercice 6 : Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Calculer : $A \vec{x} \vec{x}^T A^T$, $B A A^T B^T$.

Exercice 7 : On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer lorsque cela est possible les produits suivants :
 $AB, BA, AC, CA, BC.$

Exercice 8 : À tout nombre réel t , on associe la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$.

- Calculer $M(0)$.

- Soient s et t deux réels. Calculer le produit $M(s)M(t)$.
- En déduire que pour tout réel t , la matrice $M(t)$ est inversible et expliciter son inverse.

Exercice 9 : Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (solution : $-1, 1, 2$)
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (solution : $-1, 2$)
3. $\begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}$ (solution : $1 \pm \epsilon$)
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (solution : $-1, 1$)
5. $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ (solution : $-1, -6$)

Dans les deux derniers cas, quels sont les vecteurs propres ? Sont-ils perpendiculaires entre eux ?

Exercice 10 : Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 3 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 3 \end{pmatrix}$ la représentation de \mathcal{A} dans la base $\mathcal{B}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

- Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les vecteurs propres associés.
- Diagonaliser la matrice A .
- Quelle est la transformation notée P qui permet cette diagonalisation ? P est-elle orthogonale ?
- Déterminer la nouvelle base \mathcal{B}' dans laquelle la représentation de \mathcal{A} est diagonale.

Idem avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 11 : Deux matrices A et B sont appelées **similaires** si elles sont reliées par la relation $P^{-1}AP = B$. Montrer que le spectre de valeurs propres de A est identique à celui de B , que A et B ont même trace et même déterminant.

Exercice 12 : Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si

- $A = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$.
- $A = \begin{pmatrix} \cosh(a) & \sinh(a) \\ \sinh(a) & \cosh(a) \end{pmatrix}$.

MATRICES À COEFFICIENTS COMPLEXES

Exercice 1 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où α et β sont deux nombres complexes non nuls.

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A .
- Trouver les conditions sur α et β pour que
 - les valeurs propres soient réelles,
 - les vecteurs propres soient orthogonaux entre eux.
- Montrer que les deux conditions sont simultanément vérifiées si A est hermitique.

Exercice 2 : soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ i & -3 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices A^T , A^\dagger , A^{-1} .

Exercice 3 : Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Exercice 4 : Dans un espace à deux dimensions, on définit l'opérateur $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ relativement à une base orthonormée $\mathcal{B} = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$.

- σ est-il hermitique? Calculer ses valeurs et vecteurs propres.
- Calculer les matrices de projection sur ces vecteurs propres.
- Vérifier que ceux-ci remplissent la condition de fermeture.

Exercice 5 : Montrer que si A et B sont hermitique, leur produit AB n'est hermitique que si A et B commutent : *i.e.* $[A, B] = 0$.

Exercice 6 : On note $|x_1\rangle$ et $|x_2\rangle$ deux kets orthonormés formant une base dans un espace à deux dimensions. Ces kets sont les vecteurs propres d'une matrice notée H :

$$H |x_n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right) |x_n\rangle.$$

On donne de plus le ket normé $|x\rangle = C_1 |x_1\rangle + C_2 |x_2\rangle$ où C_1 et C_2 sont deux constantes complexes.

1. Établir la relation entre les coefficients C_1 et C_2 induite par le caractère normé de $|x\rangle$.
2. Quelle est la représentation de H dans la base $\{|x_1\rangle, |x_2\rangle\}$? Calculer la valeur $\langle x | H | x \rangle$.
3. Dans le cas où $\langle x | H | x \rangle = 2$, calculer $|C_1|^2$ et $|C_2|^2$.
4. On donne la matrice P telle que
 - $P |x_1\rangle = i |x_2\rangle$
 - $P |x_2\rangle = -i |x_1\rangle$ P est-il hermitique?
5. On choisit désormais C_1 réel positif et on pose $C_2 = |C_2| e^{i\theta}$. Calculer $\langle x | P | x \rangle$.
6. Pour quelle valeurs de θ obtient-on $\langle x | P | x \rangle = -1$? Quelle est alors l'expression de $|x\rangle$?

Exercice 7 : Dans une base orthonormée $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, on donne les opérateurs

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec a et b des constantes réelles ; et le ket dépendant du temps (ω est une pulsation supposée constante)

$$|x(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} |1\rangle + \frac{1}{2} e^{i\omega t} |2\rangle + i\frac{1}{2} e^{i\omega t} |3\rangle$$

Calculer les valeurs suivantes : $\langle x | x \rangle$, $\langle x | A | x \rangle$, $\langle x | B | x \rangle$.

Exercice 8 : Dans une base orthonormée $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ on donne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- A et B sont-ils hermitiques ? Commutent-ils ?
- Donner la base de vecteurs propres communs à A et B .

Exercice 9 : Montrer qu'une matrice hermitique reste hermitique après transformation unitaire.

Exercice 10 : On considère les opérateurs H et K dont les représentations dans la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$ sont

$$H = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver une base de ket qui soient des kets propres communs aux deux opérateurs.

Exercice 11 : On considère un système de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Dans cet base les opérateurs H , A et B s'écrivent

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où ω , a , et b sont des constantes réelles.

On donne le ket $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{1}{2} |2\rangle + \frac{1}{2} |3\rangle$

- Calculer $\langle \Psi | H | \Psi \rangle$, $\langle \Psi | A | \Psi \rangle$, et $\langle \Psi | B | \Psi \rangle$.
- Parmi les opérateurs ci-dessus, lesquels constituent un ECOC ?

Ch2 : Série de Fourier & EDP

OPÉRATEUR LAPLACIEN

Systèmes de coordonnées

On rappelle les expressions de l'opérateur Laplacien dans différents systèmes de coordonnées :

- Cartésiennes (x, y, z)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Polaires $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ avec $\begin{cases} r \in [0, \infty[; \\ \theta \in [0, 2\pi]; \end{cases}$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

- Cylindriques $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z \end{cases}$ avec $\begin{cases} r \in [0, \infty[; \\ \theta \in [0, 2\pi]; \\ z \in]-\infty, \infty[\end{cases}$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Sphériques $\begin{cases} x = r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ y = r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = r \cos(\varphi) \end{cases}$ $\begin{cases} r \in [0, \infty[; \\ \theta \in [0, \pi]; \\ \varphi \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

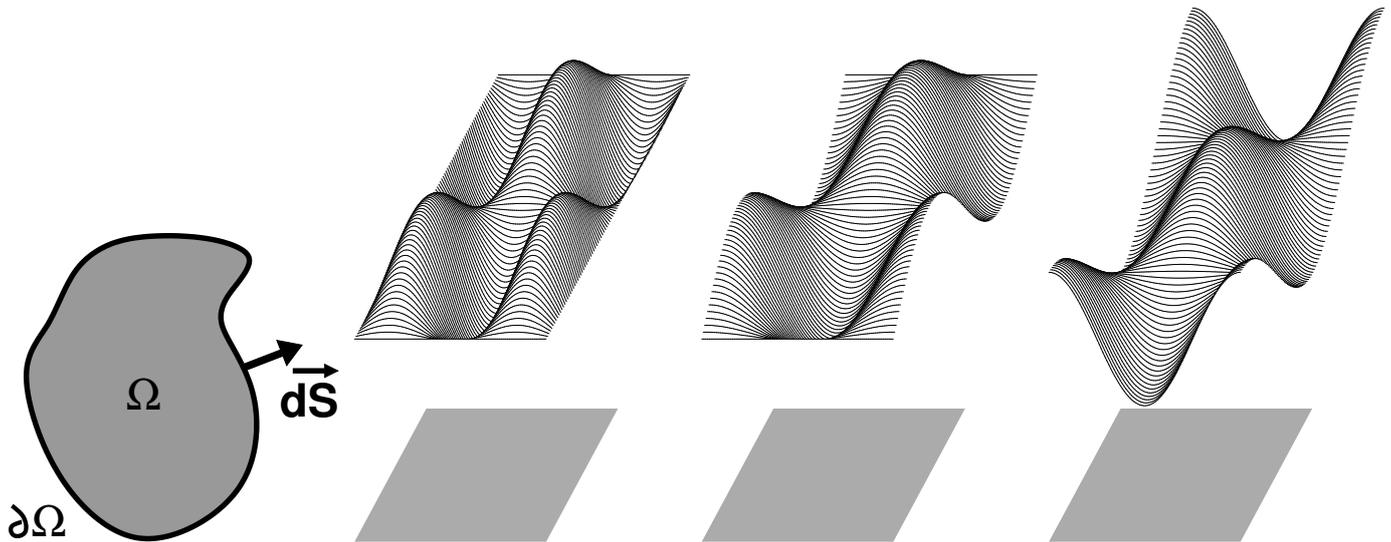
$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Propriétés du Laplacien

Soit Ω un domaine de l'espace de frontière $\partial\Omega$. On note \vec{dS} le vecteur normale à la frontière $\partial\Omega$ orienté vers l'extérieur du domaine Ω .

On note \mathcal{L} l'espace des fonctions $f(\vec{r})$ définies sur Ω et vérifiant l'une des conditions suivantes sur la frontière $\partial\Omega$

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= 0 \quad \vec{r} \in \partial\Omega \\ \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot \vec{dS} &= 0 \quad \vec{r} \in \partial\Omega \end{aligned}$$



La relation vectorielle $\operatorname{div}(f\vec{u}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot \vec{u} + f \operatorname{div} \vec{u}$ permet d'établir le résultat suivant

$$\int_{\Omega} f \Delta g \, dV = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g \, dV \quad (f, g) \in \mathcal{L}^2$$

en prenant $\vec{u} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} g$ et en utilisant le théorème flux-divergence.

On en déduit les résultats suivants

1. Δ est un opérateur défini négatif sur \mathcal{L} i.e. $\int_{\Omega} f \Delta f \, dV \leq 0 \quad \forall f \in \mathcal{L}$
2. Les valeurs propres λ de l'opérateur laplacien sur \mathcal{L}

$$\Delta h(\vec{r}') = \lambda h(\vec{r}') \quad h \in \mathcal{L}$$

sont négative $\lambda < 0$.

3. Δ est un opérateur hermitique sur \mathcal{L}
4. Les fonctions propres de Δ sur \mathcal{L} forment une base orthogonale des fonctions sur \mathcal{L} .

— Exemple : EDO avec conditions aux bords —

On se propose ici de résoudre le problème aux conditions aux bords (CB) suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} y(x) = -\lambda y(x) & \text{EDO} \\ y(0) = y(L) = 0 & \text{CB} \end{cases} \quad (2)$$

dans lequel le paramètre λ fait partie comme la fonction $y(x)$ des inconnues. La fonction recherchée y n'est définie que sur $[0, L]$. y est une fonction réelle.

La recherche des solutions de (2) est la recherche de l'ensemble des couples $(\lambda, y(x))$ solutions de (2)

1. Calculer la solution générale de l'EDO.
2. En déduire que le problème (2) n'a de solutions que pour des valeurs particulières de la constante λ .
3. Déterminer l'ensemble des couples de solutions $(\lambda_n, y_n(x))$ linéairement indépendant appelés *solutions élémentaires*.
4. Montrer que les solutions élémentaires y_n forment une famille de fonctions orthogonales au sens du produit scalaire

$$(f, g) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) g(x) \, dx.$$

5. En déduire la solution générale du problème (2).

6. Vérifier les solutions proposées dans le tableau suivant

Problème	Solutions élémentaires $(\lambda_n, y_n(x))$
$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} y(x) = -\lambda y(x) \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda_n &= n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \\ y_n(x) &= \sin n \pi \frac{x}{L} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*$
$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} y(x) = -\lambda y(x) \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda_n &= n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \\ y_n(x) &= \cos n \pi \frac{x}{L} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$
$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} y(x) = -\lambda y(x) \\ y(0) = y'(L) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{L^2} \\ y_n(x) &= \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \frac{x}{L} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$
$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} y(x) = -\lambda y(x) \\ y'(0) = y(L) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{L^2} \\ y_n(x) &= \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \frac{x}{L} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$

ÉQUATIONS SPATIO-TEMPORELLES

On note \mathcal{L} l'espace des fonctions $f(\vec{r})$ définies sur un domaine Ω et vérifiant l'une des conditions suivantes sur la frontière $\partial\Omega$

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= 0 \quad \vec{r} \in \partial\Omega \\ \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot \vec{dS} &= 0 \quad \vec{r} \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Équation d'onde : résolution formelle

On considère l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{r}, t) = c^2 \Delta u(\vec{r}, t) \quad (3)$$

où \vec{r} désigne un vecteur position (espace) et t le temps. À toutes dates $t = t_1$, la fonction $u(\vec{r}, t_1)$ appartient à l'espace \mathcal{L} . Les conditions aux bords sont imposées par la physique du problème (voir exemple suivant). On note $\varphi_n(\vec{r})$ la $n^{\text{ième}}$ fonction propre de l'opérateur Laplacien Δ et $-\lambda_n^2$ la valeur propre négative associée. Les fonctions propres φ_n sont supposées normées et forment donc une famille orthonormale : $(\varphi_l, \varphi_n) = \delta_{l,n}$. La famille φ_n forment donc une base orthonormale des fonctions de \mathcal{L} . À toute date, la fonction $u(\vec{r}, t)$ peut donc être décomposée dans la base des φ_n , ce que l'on écrit sous la forme suivante

$$u(\vec{r}, t) = \sum_n \alpha_n(t) \varphi_n(\vec{r}). \quad (4)$$

Les composantes α_n sont donc des fonctions du temps.

Utilisant la décomposition Eq. 4, le terme de gauche de l'équation d'onde (Eq. ??) devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{r}, t) = \sum_n \ddot{\alpha}_n(t) \varphi_n(\vec{r})$$

et le terme de droite

$$c^2 \Delta u(\vec{r}, t) = - \sum_n c^2 \alpha_n(t) \lambda_n^2 \varphi_n(\vec{r}).$$

En projetant (avec un produit scalaire) sur la fonction φ_l et en utilisant l'orthonormalité des fonctions φ_l , on obtient l'équation différentielle portant sur la composante $\alpha_l(t)$

$$\ddot{\alpha}_l(t) = -c^2 \lambda_l^2 \alpha_l(t)$$

dont la solution générale est

$$\alpha_l(t) = a_l \cos(c\lambda_l t) + b_l \sin(c\lambda_l t)$$

où a_l et b_l sont deux constantes réelles dépendant de l'indice l . Les pulsations propres du système sont valent $\omega_l = c\lambda_l$ et les fréquences propres $\nu_n = \frac{1}{2\pi}c\lambda_l$

La solution générale de l'équation d'onde Eq. ?? est donc

$$u(\vec{r}, t) = \sum_n (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \varphi_n(\vec{r}). \quad (5)$$

les coefficients a_n et b_n , et donc la solution unique, sont déterminés à partir des conditions initiales.

Les conditions initiales s'écrivent à l'aide de deux fonctions spatiales spécifiées dans le problème :

$$u(\vec{r}, t = 0) = f(\vec{r}) \quad \dot{u}(\vec{r}, t = 0) = g(\vec{r}).$$

En utilisant une nouvelle fois une projection sur φ_l et la propriété d'orthogonalité, on obtient

$$\forall l \quad a_l = (\varphi_l, f) \quad b_l = \frac{1}{\omega_l} (\varphi_l, g)$$

ce qui complète le problème de détermine la solution unique.

———— Équation d'onde : exemple de la corde vibrante ————

Initié par Taylor (1713) et John Bernoulli (1728), le problème de la corde vibrante fut l'un des principaux champs de recherche et de disputes (d'Alembert, Clairaut, Euler, Danièle Bernoulli, Lagrange) au XVIIIe siècle. Il représente la première EDP (équation aux dérivées partielles) de l'histoire. On s'intéresse au problème suivant : trouver la l'évolution temporelle de la déformation d'une corde élastique tendue de longueur L et d'extrémités fixes ; connaissant à l'instant initial la déformation de la corde et la vitesse en chaque point de la corde. En notant $u(x, t)$ la déformation de la corde à la position x et à l'instant t , le problème se modélise de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} && \text{pour } 0 < x < L, t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) && \text{pour } 0 < x < L \text{ (conditions initiales)} \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) &= 0 && \text{pour } t \geq 0 \text{ (conditions aux bords)} \end{aligned}$$

L'opérateur Laplacien est ici la simple dérivée seconde par rapport à x : $\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. L'espace \mathcal{L} est l'ensemble des fonctions définies dans $[0, L]$ à valeurs nulles en $x = 0$ et en $x = L$. Les fonctions propres normées sont $\varphi_n(x) = \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$, les pulsations propres $\omega_n = n\frac{c\pi}{L}$ et le produit scalaire

$$(\alpha, \beta) = \frac{2}{L} \int_0^L \alpha(x) \beta(x) dx.$$

On choisit ici d'introduire un facteur numérique dans le produit scalaire (changer l'échelle) plutôt que dans les fonctions propres pour une écriture plus simple, mais ce choix n'est pas le seul possible.

La solution générale s'écrit donc

$$u(x, t) = \sum_n (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right).$$

et la solution unique s'obtient en déterminant les coefficients a_n et b_n à l'aide des conditions initiales

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right) dx; \quad b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right) dx$$

Exercice : Corde frappée Déterminer la solution de la corde vibrante si $f(x) = 0$ et $g(x) = \alpha$ si $\frac{L}{n} - d \leq x \leq \frac{L}{n} + d$ et $g(x) = 0$ sinon.

Exercice : Corde pincée (clavecin) Déterminer la solution de la corde vibrante si $g(x) = 0$ et $f(x) = 2\alpha \frac{x}{L}$ si $x \leq \frac{L}{2}$ et $f(x) = 2\alpha \frac{L-x}{L}$ si $x \geq \frac{L}{2}$.

———— Équation de la chaleur : Résolution formelle ————

L'équation de la chaleur (diffusion de la température) correspond à l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{r}, t) = D \Delta u(\vec{r}, t) \quad (6)$$

où \vec{r} désigne un vecteur position (espace) et t le temps. D est le coefficient de diffusion en m^2/s . En utilisant la famille φ_n des fonctions propres du Laplacien qui forme donc une base orthonormale des fonctions de \mathcal{L} et la décomposition Eq. 4, on obtient les équations différentielles ordinaires gouvernant l'évolution temporelle des composantes $\alpha_n(t)$

$$\dot{\alpha}_n(t) = -D \lambda_n^2 \alpha_n(t)$$

dont la solution générale est

$$\alpha_n(t) = a_n \exp(-D \lambda_n^2 t)$$

où a_l est une constantes réelles dépendant de l'indice l . Les temps caractéristiques d'amortissement valent $\tau_n = \frac{1}{D \lambda_n^2}$.

La solution générale de l'équation d'onde Eq. 6 est donc

$$u(\vec{r}, t) = \sum_n a_n \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) \varphi_n(\vec{r}). \quad (7)$$

les coefficients a_n , et donc la solution unique, sont déterminés à partir de la condition initiale.

La condition initiale s'écrit à l'aide d'une fonction spatiale spécifiée dans le problème :

$$u(\vec{r}, t = 0) = f(\vec{r}).$$

En utilisant une nouvelle fois une projection sur φ_l et la propriété d'orthogonalité, on obtient

$$\forall l \quad a_l = (\varphi_l, f)$$

ce qui complète le problème de détermine la solution unique.

———— Équation de la chaleur : Exemple de la diffusion dans une tige ————

Voici donc le problème au coeur du livre qui est à l'origine des séries de Fourier, la *Théorie analytique de la Chaleur* de Joseph Fourier. Un premier manuscrit présenté par Fourier à l'Académie en 1807, et un second en 1811, ont rencontré une vive opposition de la part du Comité. Ce livre a finalement été publié en 1822, après la mort de Lagrange en 1813 qui s'était violemment opposé aux idées avant-gardistes de Fourier, .

L'équation : On suppose une tige homogène de longueur L dans laquelle on étudie l'évolution spatio-temporelle de la température $u(x, t)$. Les conditions aux bords peuvent varier d'un problème à l'autre, mais les plus simples à traiter sont celle utilisées ci-après.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} && \text{pour } 0 < x < L, t \geq 0 \\ u(x, 0) &= f(x) && \text{pour } 0 < x < L \text{ (conditions initiales)} \\ u(0, t) = 0, u(L, t) &= 0 && \text{pour } t \geq 0 \text{ (conditions aux bords)} \end{aligned}$$

L'opérateur Laplacien, le domaine de définition $[0, L]$ et les conditions aux bords sont identiques à ceux du problème de la corde vibrante. Les fonctions propres, les valeurs propres du Laplacien et le produit scalaire sont donc eux aussi identiques : $\varphi_n(x) = \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$, $\lambda_n^2 = (n\pi/L)^2$. Les temps caractéristiques d'amortissement sont $\tau_n = \frac{L^2}{n^2\pi^2 D}$ et la solution générale

$$u(x, t) = \sum_n a_n \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right).$$

. les coefficients a_n , et donc la solution unique, sont déterminés à partir de la condition initiale :

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(k\pi\frac{x}{L}\right) dx$$

———— Lien avec les série de Fourier ————

On considère une fonction y continue, définie sur $[0, L]$, et telle que $y(0) = y(L) = 0$.

A partir de y , on construit une nouvelle fonction, appelée fonction prolongée, et notée $y_p(x)$ défini sure \mathbb{R} de la manière suivante

$$\begin{cases} y_p(x) = y(x) & \text{pour } x \in [0, L] \\ y_p(x) = -y(-x) & \text{pour } x \in [-L, 0] \\ y_p(x + 2L) = y_p(x) & : \text{ fonction périodique de période } 2L \end{cases}$$

En utilisant le calcul de la série de Fourier de y_p , montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right) \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{1}{L} \int_0^L y(x) \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right) dx \quad (8)$$

converge uniformément vers $y(x)$ pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $[0, L]$ quelque soit la fonction y continue.

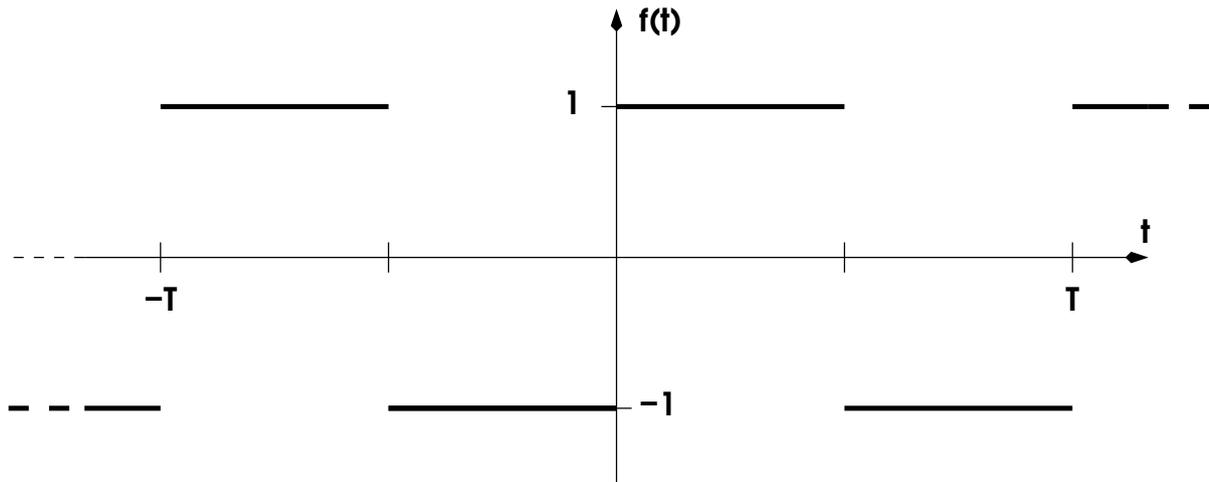
Procéder de manière similaire pour établir les résultats du tableau suivant ou y est une fonction continue de $[0, L]$ dans \mathbb{R}

fonction	fonction prolongée	série convergente
$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \end{cases}$		$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$ $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x) \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right) dx$
$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(L) = 0 \end{cases}$		$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$ $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x) \cos\left(n\pi\frac{x}{L}\right) dx$
$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(L) = 0 \end{cases}$		$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{L}\right)$ $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{L}\right) dx$
$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(L) = 0 \end{cases}$		$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{L}\right)$ $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{L}\right) dx$

Exercices du Ch 2

TUYAU SONORE

Préambule : Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f de période T définie sur $[-T/2, T/2]$ par $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t \leq T/2 \\ -1 & \text{si } -T/2 < t \leq 0 \end{cases}$



On se propose ici de résoudre l'équation d'onde pour décrire la vibration de l'air dans un tuyau sonore (tuyau d'orgue, flûte, clarinette ...). On suppose dans la suite que le problème se ramène à une seule dimension spatiale notée x et obéit à l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t). \quad (9)$$

La fonction $u(x, t)$ décrit les variations de pression (relativement à la pression atmosphérique) à l'instant t et au point x . La vitesse c est la vitesse du son et vaut $c = 340$ m/s dans l'air. Le tuyau est de longueur notée L . On considérera dans la suite les cas où les extrémités du tuyau peuvent être ouvertes ou fermées. Ces cas se traduiront par les conditions limites suivant

- L'extrémité ouverte est associée à un noeud de pression de sorte que $u = 0 \quad \forall t$ au point correspondant,
- L'extrémité fermée est associée à un ventre de pression de sorte que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \forall t$ au point correspondant.

Cas du tuyau ouvert

On considère dans un premier temps un tuyau ouvert à ces deux extrémités.

1. Déterminer la solution générale de l'équation (9) en utilisant les conditions aux bords adéquats.
2. On donne les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} u(x, t = 0) = p & p \text{ constante} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t = 0) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

En déduire la solution de (9).

3. On perce le tuyau en $x = L/2$, imposant ainsi $u(x = L/2, t) = 0 \quad \forall t$. Indépendamment de la condition initiale, montrer cette opération induit une sélection des harmoniques possibles.

Influence des conditions aux bords sur les fréquences

1. Considérons maintenant le cas où le tuyau est fermé à l'extrémité $x = L$ et ouvert à l'extrémité $x = 0$. Quelles sont alors les vecteurs d'onde et les fréquences propres associés à ces nouvelles conditions aux limites ?
2. Comparer le spectre obtenu pour un tuyau ouvert à ses deux extrémités et pour un tuyau fermé à une extrémité et ouvert à l'autre. On prendra $L = 5$ m. Quelle est la fréquence du fondamental dans chacun des cas ? Sont elles audibles¹ ?

■ RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE DIFFUSION ■

L'équation de diffusion des particules dans un espace à 3 dimensions est de la forme :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) = D \Delta n$$

Le laplacien en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Dans la suite, on s'intéresse à l'étude de la densité de particules dans une sphère de rayon a . Dans un souci de simplification, on suppose que cette densité est à symétrie sphérique, c'est à dire qu'elle ne dépend que de r et de t : $n = n(r, t)$.

Dans ces conditions, l'équation de diffusion prend la forme :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) n(r, t)$$

On pose dans un premier temps :

$$n(r, t) = \frac{V(r, t)}{r}$$

1. Montrer que l'équation de diffusion prend alors la forme simple d'une équation de diffusion à une dimension spatiale :

$$\frac{\partial V(r, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 V(r, t)}{\partial r^2} \quad 0 \leq r \leq a$$

2. Donner les nouvelles conditions qu'il faut imposer à la fonction $V(r, t)$
 - que devient la condition initiale ?
 - montrer que $V(r = 0, t) = V(r = a, t) = 0$.
3. En utilisant le méthode de séparation des variables et en posant $V(r, t) = R(r)G(t)$, donner toutes les solutions compatibles avec les conditions aux bords (sans traiter la condition initiale).
4. Quelle est alors la solution générale compatible avec les conditions aux bords ?
5. Construire alors **la** solution compatible avec la condition initiale
6. Lorsque $t \geq \frac{a^2}{\pi^2 D}$, quelle est la forme approximative du profil en densité $n(r, t)$ (à un instant donné). En faire une représentation graphique qualitative.

1. on rappelle que la bande passante de l'oreille couvre approximativement l'intervalle de fréquence [20 Hz ; 20kHz]

VIBRATIONS DANS UNE POUTRE ÉLASTIQUE

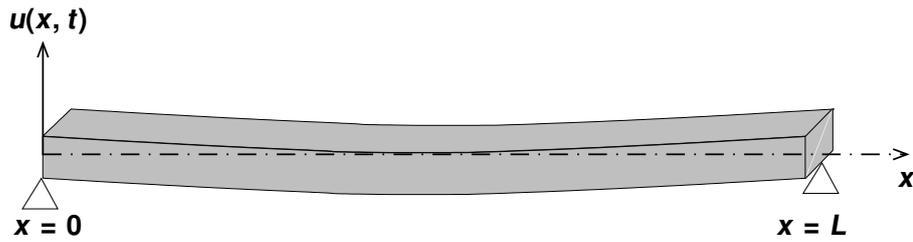


Figure 1

Soit une poutre élastique de section rectangulaire A et de longueur L .

On montre (admis ici) que les petites vibrations verticales de cette dernière peuvent être modélisées par une équation différentielle partielle du quatrième ordre :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4}, \quad (11)$$

où c^2 est une constante fixée par les caractéristiques de la poutre.

En considérant que la poutre repose simplement sur ses extrémités (voir Figure 1), elle est alors assujettie aux conditions de continuité (ou conditions aux bords) suivantes :

$$u(0, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u(x=0, t)}{\partial x^2} = 0; \quad \forall t > 0 \quad (12)$$

$$u(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u(x=L, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \forall t > 0. \quad (13)$$

Dans la suite, on se limitera à l'étude des solutions « temporelles périodiques ».

1. On pose $u(x, t) = X(x) \times T(t)$, déterminer les équations vérifiées par les fonctions X et T en justifiant les étapes de votre démonstration. Montrer que la périodicité temporelle requise des solutions impose une contrainte de signe sur la constante de séparation des variables.
2. Rechercher l'ensemble des solutions périodiques compatibles avec les conditions aux bords (12) et (13). la forme générale de la solution d'une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre présentée dans l'annexe peut être utilisée directement, sans démonstration. Pour vous aider, on vous conseille de considérer dans un premier temps les deux conditions en $x = 0$ (Eq.12) puis dans un second temps seulement les conditions en $x = L$ (Eq.13).
3. En déduire la solution générale du problème (indépendamment des conditions initiales).
4. En vous aidant des résultats établis dans l'exercice B, écrire la solution générale pour la fonction $u(x, t)$ lorsque la poutre est soumise à une déformation initiale donnée par

$$u(x, t = 0) = x(L - x)$$

et est lâchée sans vitesse initiale.

———— Formulaire ————

Intégrales utiles :

$$\begin{aligned}\int x \cos(Kx) dx &= \frac{\cos(Kx)}{K^2} + \frac{x \sin(Kx)}{K} \\ \int x^2 \cos(Kx) dx &= \frac{2x \cos(Kx)}{K^2} - \frac{(2 - K^2 x^2) \sin(Kx)}{K^3} \\ \int x \sin(Kx) dx &= \frac{\sin(Kx)}{K^2} - \frac{x \cos(Kx)}{K} \\ \int x^2 \sin(Kx) dx &= \frac{2x \sin(Kx)}{K^2} + \frac{(2 - K^2 x^2) \cos(Kx)}{K^3}\end{aligned}$$

Équation différentielle du quatrième ordre :

Soit l'équation différentielle du quatrième ordre suivante :

$$\frac{d^4 F(x)}{dx^4} - \beta F(x) = 0,$$

où $F(x)$ est une fonction réelle et β une constante réelle et positive.

Les solutions de cette équation s'écrivent alors comme suit :

$$F(x) = A \cos\left(\sqrt[4]{\beta}x\right) + B \sin\left(\sqrt[4]{\beta}x\right) + C \cosh\left(\sqrt[4]{\beta}x\right) + D \sinh\left(\sqrt[4]{\beta}x\right),$$

où A, B, C et D sont des constantes d'intégration réelles.

Fonctions hyperboliques et leurs dérivées

Soit une constante $K \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}[\cosh(Kx)]' &= K \sinh(Kx) \\ [\sinh(Kx)]' &= K \cosh(Kx)\end{aligned}$$

CORDE VIBRANTE EN PRÉSENCE DE DISPERSION

La dispersion se caractérise par une dépendance non linéaire entre la pulsation et le nombre d'ondes. Dans la propagation des ondes mécaniques le long d'une corde, le phénomène de dispersion provient du terme de dérivée spatiale d'ordre supérieur.

Ce problème considère l'évolution spatio-temporelle de la déformation transverse (notée $u(x, t)$) d'une corde élastique de longueur L tendue le long de l'axe x dans les conditions suivantes :

- On admet que l'évolution spatio-temporelle de la déformation transverse de la corde est régit par l'équation :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \beta^2 \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \right) \quad (14)$$

où β représente le paramètre de dispersion ($\beta < 1$) et c la vitesse de phase sans dispersion ($\beta = 0$).

- Les extrémités de la corde sont fixées, ce qui implique les conditions aux bords suivantes :

$$\forall t \quad u(x = 0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(x = L, t) = 0. \quad (15)$$

- À l'instant initial, la corde est heurtée par un marteau de largeur a autour de la position $x = L/n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Ce choc confère une vitesse initiale aux points de la corde en contact avec le marteau sans induire de déformation initiale. Mathématiquement, les conditions initiales s'écrivent

$$u(x, t = 0) = 0; \quad \frac{du}{dt}(x, t = 0) = v_0 f \left(x - \frac{L}{n} \right) \quad (16)$$

$$\text{où } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq a/2 \\ 0 & \text{si } |x| > a/2 \end{cases} .$$

Dans la suite, seuls les solutions de la corde **vibrante** seront étudiées, c'est à dire les solutions oscillants en temps et en position.

1. Sachant que la variable x représente une distance (en mètre) et la variable t un temps (en seconde), donner les dimensions des paramètres c et β .
2. Détailler les étapes de calcul permettant d'achever la séparation des variables cherchant une solution de la forme $u(x, t) = X(x) T(t)$ et en posant λ la constante de séparation des variables.
3. Établir les deux équations différentielles ordinaires pour les fonctions $X(x)$ et $T(t)$.
4. Dédire des conditions aux bords pour la fonction u , les conditions aux bords éventuelles pour les fonctions $X(x)$ et $T(t)$.
5. Sachant que l'on s'intéresse exclusivement aux solutions de la corde **vibrante**, c'est à dire oscillant en temps et en position, déduire (en justifiant) le signe de la constante de séparation des variables λ .

Si λ doit être positif ($\lambda > 0$), alors poser $\lambda = \mu^2$; sinon poser $\lambda = -\mu^2$. Dans tous les cas μ devient la nouvelle constante de séparation des variables.

6. Réécrire les deux équations différentielles ordinaires pour les fonctions $X(x)$ et $T(t)$ avec la constante μ .

Cas sans dispersion $\beta = 0$

Dans un premier temps, on néglige la dispersion, ce qui revient à poser $\beta = 0$

1. Réécrire les deux équations différentielles ordinaires pour les fonctions $X(x)$ et $T(t)$ dans le cas $\beta = 0$ et donner les solutions de chacune des équations dans le cas général.

2. Utiliser les conditions aux bords pour déterminer les valeurs possibles de la constante de séparation des variables μ .
3. En déduire les fréquences temporelles possibles de la corde vibrante.
4. Préciser la solution générale de l'équation (14) tenant compte des conditions aux bords (15).
5. En tenant compte de la condition initiale (33), donner la solution $u(x, t)$ décrivant la vibration de la corde. *Pour répondre à cette question, vous pouvez utiliser soit vos connaissances sur les séries de Fourier, ou les résultats de l'exercice A.*
6. Quelles fréquences temporelles sont absentes du spectre de Fourier de cette solution ?
7. Faire un schéma représentant la corde le marteau et la corde vibrant à la plus petite fréquence absente; expliquer simplement le résultat obtenu.

———— Cas avec dispersion $\beta \neq 0$ ————

On considère maintenant l'effet de la dispersion $\beta \neq 0$

1. Montrer que les solutions pour $X(x)$ compatibles avec les conditions aux bords, restent inchangées. Déterminer les nouvelles valeurs de la constante de séparation des variables μ
2. Rechercher pour $T(t)$ des solutions de la forme $\cos(\omega t)$ puis $\sin(\omega t)$ ou ω est un paramètre à déterminer.
3. En déduire les fréquences temporelles possibles de la corde vibrante en présence de dispersion.
4. Préciser la solution générale de l'équation (14) tenant compte des conditions aux bords (15).
5. Donner la solution $u(x, t)$ décrivant la vibration de la corde soumise à la condition initiale (33).
6. Décrire en un paragraphe l'effet et les conséquences de la dispersion.

■■■■■ DIFFUSION D'UN AGENT DE CONTAMINATION ■■■■■

On s'intéresse à la diffusion d'un agent de contamination (polluant, bactéries, ...) dans un milieu unidimensionnel de taille L , capable de dégrader le contaminant (dégradation aérobie, anticorps, ...). La concentration de contaminant en un point x du milieu à l'instant t est notée $c(x, t)$, et obéie à l'équation de la diffusion suivante

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x, t) - \gamma c(x, t) + s(x), \quad (17)$$

où D est le coefficient de diffusion, γ est le taux de dégradation du contaminant par le milieu, et $s(x)$ est une fonction indépendante du temps connue, représentant la source du contaminant (localisation d'une fuite pour un polluant par exemple).

Le milieu est clos, et ne laisse pas s'échapper le contaminant par les bords, ce qui se traduit par les conditions au bords,

$$\frac{\partial c}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial c}{\partial x}(L, t) = 0. \quad (18)$$

Enfin, la concentration initiale de l'agent est donnée par la condition initiale

$$c(x, 0) = c_0(x), \quad (19)$$

où $c_0(x)$ est une fonction connue.

Nous allons procéder à la résolution de ce problème en deux étapes. Dans un premier temps, nous chercherons une solution au problème en l'absence de source, que nous noterons $c_h(x, t)$. Dans un deuxième temps, nous trouverons la solution au problème en présence de source, et respectant la condition initiale.

———— Résolution en l'absence de source ————

On cherche une solution $c_h(x, t)$ de l'équation différentielle

$$\frac{\partial c_h}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 c_h}{\partial x^2}(x, t) - \gamma c_h(x, t), \quad (20)$$

qui satisfait les conditions aux bords

$$\frac{\partial c_h}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial c_h}{\partial x}(L, t) = 0. \quad (21)$$

Par application de la méthode de séparation des variables, on écrit $c_h(x, t) = X(x)T(t)$, où X et T sont les nouvelles inconnues du problème.

1. Détailler et justifier les étapes de calcul permettant d'écrire la séparation des variables sous la forme

$$\frac{D}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2}(x) = \lambda = \frac{1}{T(t)} \frac{dT}{dt}(t) + \gamma. \quad (22)$$

Expliquer en particulier comment et pourquoi la constante λ a été introduite.

2. En utilisant les conditions au bords satisfaites par $c_h(x, t)$, Eq. (21), donner celles de $X(x)$. Vérifier que les fonctions

$$X_k(x) = \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right), \quad (23)$$

sont solutions de l'équation de $X(x)$, pour $\lambda = \lambda_k = -Dk^2\pi^2/L^2$, avec $k = 0, 1, \dots$ un entier naturel, et que X_k vérifie bien les conditions aux bords de X .

3. Pour une valeur de k entier naturel quelconque, résoudre l'équation pour $T(t)$, et montrer que les solutions s'écrivent sous la forme

$$T_k(t) = e^{-\left(\frac{D\pi^2 k^2}{L^2} + \gamma\right)t} \quad (24)$$

4. Écrire la solution générale respectant les conditions aux bords $c_h(x, t)$ en fonction des $X_k(t)$ et des $T_k(t)$.

———— Résolution en présence de source ————

Nous allons maintenant chercher la solution $c(x, t)$ à l'Eq. (17) en présence de source, satisfaisant à la fois les conditions aux bords et la condition initiale. Pour cela, on commence par introduire le produit scalaire suivant

$$(f, g) = \int_0^L f(x)g(x)dx. \quad (25)$$

1. Montrer que les fonctions $X_k(x)$ définies en (23) sont orthogonales au sens du produit scalaire (25).

On donne le produit scalaire de X_k avec lui même, $(X_k, X_k) = \frac{L}{2}$ si $k > 0$, et $(X_0, X_0) = L$. On admettra que la famille $\{X_k\}$ forme une base complète des fonctions définies pour $x \in [0, L]$. On peut alors utiliser ce fait pour décomposer $c(x, t)$ et $s(x, t)$ sur cette base,

$$\begin{aligned} c(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k(t) \frac{X_k(x)}{(X_k, X_k)} \\ s(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} S_k \frac{X_k(x)}{(X_k, X_k)} \end{aligned} \quad (26)$$

où $C_k(t) = (X_k, c)$, etc. Notons que $c(x, t)$ satisfait automatiquement les bonnes conditions aux bords.

2. Montrer et justifier alors qu'en utilisant la décomposition (26), l'Eq. (17) se réécrit pour chaque k

$$\frac{dC_k(t)}{dt} = -\left(\frac{D\pi^2 k^2}{L^2} + \gamma\right) C_k(t) + S_k, \quad (27)$$

et vérifier que

$$C_k(t) = A_k T_k(t) + \frac{S_k}{\frac{D\pi^2 k^2}{L^2} + \gamma}, \quad (28)$$

en est la solution générale, avec A_k une constante pour l'instant quelconque.

Pour trouver la solution satisfaisant la condition initiale, on décompose également la condition initiale $c_0(x)$ sur la base des $\{X_k\}$,

$$c_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{0,k} \frac{X_k(x)}{(X_k, X_k)}. \quad (29)$$

3. Montrer que les A_k sont alors complètement déterminés, et donnés par

$$A_k = C_{0,k} - \frac{S_k}{\frac{D\pi^2 k^2}{L^2} + \gamma}. \quad (30)$$

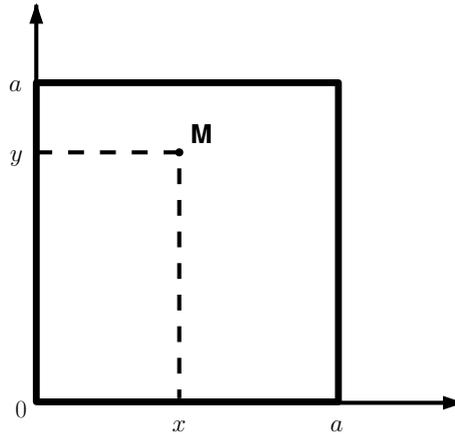
En déduire alors $c(x, t)$.

4. Donner le comportement asymptotique de $C_k(t)$ au temps long (c'est-à-dire grand devant L/\sqrt{D}). Est-ce que la concentration de polluant disparaît au temps long ? Que devient la solution dans la limite $\gamma \rightarrow 0$? Comment peut-on interpréter ce résultat physiquement ?

ÉQUATION DE LA CHALEUR AVEC UN TERME DE SOURCE

—— Position du problème ——

On considère le problème de la diffusion thermique dans une plaque carré de côté a . On note x et y les coordonnées cartésiennes d'un point M de la plaque et t le temps. La température au point M est notée $T(t, x, y)$. Les bords de la plaque sont maintenus à une température nulle 0°C . On suppose enfin que la plaque est munie d'un dispositif de chauffage interne, modélisé par un terme de source constant $S(x, y)$ connue.



L'équation de diffusion de la chaleur en présence du terme de source S s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} T(t, x, y) = \kappa \left(\frac{\partial^2 T(t, x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(t, x, y)}{\partial y^2} \right) + \epsilon S(x, y), \quad (31)$$

où κ et ϵ sont deux constantes physiques positives qui dépendent de la matière de la plaque.

Les conditions au bords de la plaque sont imposées :

$$\begin{cases} T(t, x = 0, y) = 0 & \text{pour } 0 \leq y \leq a; t \geq 0 \\ T(t, x = a, y) = 0 & \text{pour } 0 \leq y \leq a; t \geq 0 \\ T(t, x, y = 0) = 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq a; t \geq 0 \\ T(t, x, y = a) = 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq a; t \geq 0 \end{cases} \quad (32)$$

On suppose qu'à l'instant initial, la température de la plaque est homogène à 0°C . La condition initiale de température est donc

$$T(t = 0, x, y) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq a. \quad (33)$$

Le terme de source S va conduire à une élévation de température dans la plaque. La distribution de température au temps long va converger vers une distribution stationnaire notée $T_\infty(x, y)$. L'équation de diffusion de la chaleur étant linéaire, on peut décomposer la recherche de solution en deux parties en posant

$$T(t, x, y) = T_t(t, x, y) + T_\infty(x, y)$$

ou

- $T_\infty(x, y)$ représente la distribution stationnaire de température
- $T_t(t, x, y)$ représente le transitoire.

La condition initiale (33) impose la condition initiale suivante pour $T_t(t, x, y)$:

$$T_t(t, x, y) = -T_\infty(x, y).$$

On peut ainsi décomposer la recherche de solution en deux problèmes :

• **Problème 1** : solution asymptotique

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_\infty(x, y) + \epsilon S(x, y) = 0 \\ T_\infty(x = 0, y) = 0 \text{ pour } 0 \leq y \leq a; t \geq 0 \\ T_\infty(x = a, y) = 0 \text{ pour } 0 \leq y \leq a; t \geq 0 \\ T_\infty(x, y = 0) = 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq a; t \geq 0 \\ T_\infty(x, y = a) = 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq a; t \geq 0 \end{array} \right. \quad (34)$$

• **Problème 2** : solution transitoire

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} T_t(t, x, y) = \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_t(t, x, y) \\ T_t(t, x = 0, y) = 0 \text{ pour } 0 \leq y \leq a; t \geq 0 \\ T_t(t, x = a, y) = 0 \text{ pour } 0 \leq y \leq a; t \geq 0 \\ T_t(t, x, y = 0) = 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq a; t \geq 0 \\ T_t(t, x, y = a) = 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq a; t \geq 0 \\ T_t(t, x, y) = -T_\infty(x, y). \end{array} \right. \quad (35)$$

L'objectif de ce problème est la résolution de ces deux problèmes pour un terme de source donnée. La résolution de ces deux problèmes passe par la solution du même problème de Helmholtz qui fait l'objet de la première partie.

—— Résolution du problème de Helmholtz associé ——

Soit $U(x, y)$ une fonction inconnue de deux variables et λ un réel inconnu. On propose de résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) U(x, y) + 2\lambda^2 U(x, y) = 0 \\ U(x = 0, y) = 0 \text{ pour } 0 \leq y \leq a; t \geq 0 \\ U(x = a, y) = 0 \text{ pour } 0 \leq y \leq a; t \geq 0 \\ U(x, y = 0) = 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq a; t \geq 0 \\ U(x, y = a) = 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq a; t \geq 0 \end{array} \right. \quad (36)$$

Par application de la méthode de séparation des variables, on cherche U sous la forme $U(x, y) = X(x) Y(y)$ où X et Y sont les nouvelles inconnues du problème.

1. Détailler les étapes de calcul permettant d'achever la séparation des variables sous la forme

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \lambda^2 = -\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} - \lambda^2 = \mu.$$

Expliquer en particulier comment et pourquoi la constante μ a été introduite.

2. Déterminer les conditions aux bords pour les fonctions X et Y .
3. En déduire que les conditions aux bords imposent $-\lambda^2 \leq \mu \leq \lambda^2$.
4. Vérifier que les fonctions

$$U_{n,m}(x, y) = \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(m\pi \frac{y}{a}\right) \quad (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad (37)$$

sont solutions du problème de Helmholtz (36) pour $2\lambda^2 = \lambda_{n,m}^2 = (n^2 + m^2) \frac{\pi^2}{a^2}$.

On introduit le produit scalaire suivant :

$$(f, g) = \int_0^a \int_0^a f(x, y) g(x, y) dx dy. \quad (38)$$

1. Montrer que les solutions $U_{n,m}$ définies par (37) sont orthogonales au sens du produit scalaire (38).
2. Calculer les carrés de normes $h_{n,m} = (U_{n,m}, U_{n,m})$ des solutions $U_{n,m}$ définies par (37)

On admettra pour la suite que la famille des solutions $\{U_{n,m}\}$ forme une base complète de l'espace des fonctions définies pour $(x, y) \in [0, a]^2$.

—— Résolution du problème 1 ——

Le terme de source $S(x, y)$ du problème 1 peut être décomposé dans la base des fonctions solutions de (36) définies par (37). On pose donc

$$S(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} s_{n,m} U_{n,m}(x, y). \quad (39)$$

1. En utilisant l'orthogonalité des solutions $U_{n,m}$ vis à vis du produit scalaire (38), montrer que

$$s_{n,m} = \frac{(U_{n,m}, S)}{h_{n,m}} \quad (40)$$

On cherche la solution du problème (34) sous la forme d'une série de Fourier généralisée basée sur les solutions de (36).

$$T_{\infty}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{n,m} U_{n,m}(x, y). \quad (41)$$

2. En utilisant les décompositions (39) et (41), ainsi que l'orthogonalité des solutions $U_{n,m}$ vis à vis du produit scalaire (38), montrer que les coefficients $\alpha_{n,m}$ sont définis par

$$\alpha_{n,m} = \frac{\epsilon s_{n,m}}{\kappa \lambda_{n,m}^2},$$

ce qui complète le problème 1.

3. Applications

Calculer les coefficients $\alpha_{n,m}$ pour les fonctions de sources suivantes

- (a) Source uniforme

$$S(x, y) = s \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a. \quad (42)$$

- (b) Source centrée

$$\begin{cases} S(x, y) = s & \text{si } \frac{a}{2} - b \leq x \leq \frac{a}{2} + b, \frac{a}{2} - b \leq y \leq \frac{a}{2} + b. \\ S(x, y) = 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (43)$$

avec $0 < b < \frac{a}{2}$.

—— Résolution du problème 2 ——

Pour résoudre le problème 2 il convient de séparer les variables de temps et d'espace. On pose

$$T_t(t, x, y) = \Theta(t) E(x, y).$$

1. Pratiquer la séparation des variables proposées et déterminer le signe de la constante à introduire pour obtenir un comportement temporel exponentiellement décroissant.
2. Noter que la solution de la dépendance spatiale est, à une constante près, la solution trouvée pour le problème (36). En conséquence, poser $E(x, y) = U_{n,m}(x, y)$ et montrer que

$$\Theta(t) = \exp(-\kappa \lambda_{n,m}^2 t)$$

3. En déduire que la solution générale du problème 2 est de la forme

$$T_t(t, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{n,m} U_{n,m}(x, y) \exp(-\kappa \lambda_{n,m}^2 t).$$

4. Utiliser la condition initiale pour montrer que

$$\beta_{n,m} = -\alpha_{n,m}.$$

———— Synthèse ————

L'ensemble des résultats des parties précédentes démontre que la solution du problème est

$$\left\{ \begin{array}{l} (f, g) = \int_0^a \int_0^a f(x, y) g(x, y) dx dy. \\ U_{n,m}(x, y) = \sin\left(n \pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(m \pi \frac{y}{a}\right) \quad (n, m) \in \mathbb{N}^2 \\ \lambda_{n,m}^2 = (n^2 + m^2) \frac{\pi^2}{a^2} \\ h_{n,m} = (U_{n,m}, U_{n,m}) \\ T(t, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{n,m} \left(1 - \exp(-\kappa \lambda_{n,m}^2 t)\right) U_{n,m}(x, y) \\ \alpha_{n,m} = \frac{\epsilon}{\kappa} \frac{(U_{n,m}, S)}{h_{n,m} \lambda_{n,m}^2} \end{array} \right. \quad (44)$$

Ch3 : Le monde merveilleux de la Transformée de Fourier

Rappel : Série de Fourier

Soit $f(x)$ une fonction de période L , on appelle série de Fourier de f la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{L} x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{L} x\right)$$

avec

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(n \frac{2\pi}{L} x\right) dx; \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(n \frac{2\pi}{L} x\right) dx$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

Espace des fonctions sommables : On note $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , continues par morceaux et telles que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| du \text{ existe.}$$

Définition

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de f , la fonction $\text{TF}[f] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\text{TF}[f](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-isu} du.$$

La courbe d'équation $y(s) = |\text{TF}(f)(s)|$ est appelée spectre de f .

La définition de la transformée de Fourier peut différer d'une constante dans certains ouvrages.

Remarque sur les notations en physique :

- On note \tilde{f} la transformée de Fourier de f ;
- Si t désigne le temps, il est usuel d'utiliser ω (pulsation) comme variable de la transformée de Fourier plutôt que s .

$$\text{TF}[f](\omega) = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

- Si la variable t est une variable d'espace, il est usuel d'utiliser k (nombre d'onde) comme variable de la transformée de Fourier plutôt que s .

$$\text{TF}[f](k) = \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

———— Propriétés de la TF ————

Propriétés analytiques

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors \tilde{f} est continue ; \tilde{f} est bornée ; et $\lim_{|s| \rightarrow \infty} |\tilde{f}(s)| = 0$.

Linéarité

La transformée de Fourier est une application linéaire de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ dans l'espace des fonctions. Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et a et b deux nombres complexes

$$\text{TF}[a f + b g] = a \text{TF}[f] + b \text{TF}[g]$$

Parité et réalité

$f(t)$	$\tilde{f}(\omega)$
paire	paire
impaire	impaire
réelle	$\tilde{f}(-\omega) = \tilde{f}^\dagger(\omega)$
imaginaire pure	$\tilde{f}(-\omega) = -\tilde{f}^\dagger(\omega)$

Changement d'échelle et translation

Théorème de changement d'échelle : Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^*$, alors

$$\text{TF}[f(a t)](\omega) = \frac{1}{|a|} \text{TF}[f(t)]\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|} \tilde{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

L'effet d'une dilatation dans l'espace réel est une contraction dans l'espace de Fourier et vice-versa

Théorème de translation : Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^*$, alors

$$\text{TF}[f(t + \tau)](\omega) = e^{i\omega\tau} \text{TF}[f](\omega) = e^{i\omega\tau} \tilde{f}(\omega).$$

L'effet d'une translation dans l'espace réel est un déphasage dans l'espace de Fourier.

Transformée de Fourier et dérivation

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ continue et dérivable presque partout telle que $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors

$$\text{TF}\left[\frac{df}{dx}(x)\right](\omega) = i\omega \text{TF}[f](\omega) = i\omega \tilde{f}(\omega).$$

Théorème : Soit f , m fois dérivable telle que ces m premières dérivées soit continue et appartiennent toutes à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors

$$\text{TF}[f^{(m)}](\omega) = (i\omega)^m \text{TF}[f](\omega) = (i\omega)^m \tilde{f}(\omega).$$

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que la fonction définie par $t \rightarrow t f(t)$ soit sommable. Alors $\text{TF}[t f(t)](\omega)$ est dérivable et on a

$$\text{TF}[t f(t)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \text{TF}[f(t)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \tilde{f}(\omega)$$

Théorème (généralisation) : Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que la fonction définie par : $t \rightarrow t^m f(t)$ soit sommable. Alors $\text{TF}[t^m f(t)](\omega)$ est dérivable et on a

$$\text{TF}[t^m f(t)](\omega) = i^m \frac{d^m}{d\omega^m} \text{TF}[f(t)](\omega) = i^m \frac{d^m}{d\omega^m} \tilde{f}(\omega)$$

———— Inversion de Fourier ————

Théorème d'inversion : Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, et soit \tilde{f} sa transformée de Fourier, Si $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ alors on a presque partout

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{+i\omega t} d\omega.$$

———— Théorèmes généraux ————

Théorème de Plancherel : Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, et soient \tilde{f} et \tilde{g} leurs transformée de Fourier respectives, alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^\dagger(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\tilde{g}^\dagger(k)dk.$$

Théorème de Parseval : Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, et soit \tilde{f} sa transformée de Fourier, alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk.$$

———— PRODUIT DE CONVOLUTION ————

Définition : Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors l'intégrale $\int f(x-x')g(x')dx'$ existe pour presque tout x et définit une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ appelée produit de convolution de f et de g et notée $f * g$

$$f * g(x) = \int f(x-x')g(x')dx'.$$

Le produit de convolution est commutatif $f * g = g * f$.

Le produit de convolution prends une forme bien plus simple dans l'espace de Fourier

Théorème : Soient f et g deux fonctions sommables sur \mathbb{R} , alors

$$\text{TF}[f * g] = \sqrt{2\pi} \text{TF}[f] \text{TF}[g] = \sqrt{2\pi} \tilde{f} \tilde{g}$$

———— DISTRIBUTION DE DIRAC ————

D'une manière abusive, mais représentative, on peut définir la fonction de Dirac $\delta(x)$ par

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

D'une manière plus rigoureuse, on définit la distribution de Dirac par

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

pour toute fonction f défini sur \mathbb{R} . Il en découle directement que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1; \quad \text{TF}[\delta(x)] = \tilde{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

EXERCICES

Principe d'indétermination

Supposons une fonction porte $\Psi(t) = \Delta_{\Delta t}(t)$ de largeur Δt et d'aire unité centrée autour de t_0 .

1. Donner la transformée de Fourier. On précisera le résultat en fonction de Δt et t_0 .
2. Montrer qu'il existe un principe d'indétermination temps–fréquence.
3. Commenter le cas $\Delta t \rightarrow 0$.

Fonction de Dirac

On rappelle que la fonction de Dirac $\delta(x)$ est représentée par :

$$\Delta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } |t| \leq \frac{a}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

dans la limite $a \rightarrow 0$: $\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \Delta_a(x)$. De même, la transformée de Fourier $\tilde{\delta}(k) = \text{TF} \{\delta(x)\}$ est donnée par $\tilde{\delta}(k) = \lim_{a \rightarrow 0} \text{TF} \{\Delta_a(x)\}$.

1. En déduire la transformée de Fourier de $\delta(x)$.
2. Montrer en faisant la transformation inverse que l'on obtient : $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk$.
3. Déduire la transformée de Fourier des fonctions $f(x) = e^{-ik_0x}$, $g(x) = \cos(k_0x)$ et $g(x) = \sin(k_0x)$.

Peigne de Dirac

1. Calculer la série de Fourier de la fonction

$$F(X) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(X - na), \quad a \in \mathbb{R}.$$

2. En déduire que la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na)$ est un peigne de Dirac en k de la forme

$$\tilde{g}(k) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(k - m\frac{2\pi}{a}\right).$$

Produit de convolution

Soit la fonction “porte” $P(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Déterminer le produit de convolution de la fonction “porte” par elle-même : $T(x) = P(x) * P(x)$.
2. En déduire la transformée de Fourier de la fonction triangle.

———— Équation de la chaleur ————

On se propose d'étudier l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

dans une barre à une dimension supposée infinie. $T(x, t)$ est la distribution de température à la date t . On donne la distribution initiale de température $T(x, t = 0) = f(x)$.

1. On appelle $\tilde{T}(k, t)$ la transformée de Fourier du profil de température $T(x, t)$. Que devient l'équation de la chaleur pour $\tilde{T}(k, t)$?

2. En déduire que

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{-Dk^2 t} e^{ikx} \tilde{T}(k, t = 0)$$

3. En déduire la solution formelle

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \iint dk du e^{-Dk^2 t} e^{ik(x-u)} f(u)$$

4. En utilisant la question 2, déterminer l'évolution du profil de température lorsque

- $f(x) = \delta(x)$;
- $f(x) = T_0 e^{-\frac{x^2}{a^2}}$ avec T_0 et a dans \mathbb{R}^{*+} .

Ch 4 : Fonctions spéciales

COMPLÉMENT SUR LES EDO

On ne détaille pas ici les équations différentielles ordinaires classiques vu les années précédentes dont les solutions sont supposées connues.

- les EDO du premier ordre à variable séparable avec second membre ;
- Les EDO linéaires à coefficients constants.

Équations d'Euler

Les équations d'euler sont du type (a, b et c trois constantes)

$$a x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + b x \frac{dy}{dx} + c y(x) = 0.$$

Elles admettent des solutions de la forme $y(x) = x^r$.

On note $P(r) = ar(r+1) + br + c$ le polynôme caractéristique de l'équation et r_1, r_2 ses racines. La solution réelle générale est de la forme

- $y(x) = \alpha x^{r_1} + \beta x^{r_2}$ ssi $r_1 \neq r_2$ ($r_1, r_2 \in \mathbb{R}$);
- $y(x) = \alpha x^r + \beta x^r \log(x)$ ssi $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$;
- $y(x) = \alpha x^\mu \cos(\nu \log(x)) + \beta x^\mu \sin(\nu \log(x))$ ssi $r_1 = \mu + i\nu$; $r_2 = \mu - i\nu$;

Solution en série entière

Théorème (admis) Soit l'équation

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + p(z) \frac{du}{dz} + q(z)u = 0,$$

où p et q sont deux fonctions développables en série entière autour de $z = 0$ sur $] -R, R[$ (avec $R > 0$). Alors

- toutes les solutions formelles de la forme

$$u(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n (z-a)^n, \quad a \in] -R, R[$$

convergent vers une solution de l'équation sur $] -R, R[$;

- toutes les solutions de l'équation sur $] -R, R[$ peuvent être obtenues de cette façon.

Méthode de Frobenius

Principe de la méthode

La méthode de Frobenius s'applique aux équations différentielles linéaires du second ordre de la forme générale :

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + p(z) \frac{du}{dz} + q(z)u = 0,$$

et permet d'obtenir au voisinage d'un point $z = a$ un développement d'au moins une solution en série entière de la forme

$$u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^{n+r}, \quad (a_0 \neq 0), r \in \mathbb{R}.$$

Existence et convergence de la série

Si du fait de la linéarité de l'équation différentielle il est toujours possible, formellement, d'effectuer cette substitution, la question de la convergence de la série, et du rayon associé, se pose. Il est utile de se placer pour cette question dans le plan complexe.

En effet, une fonction u de variable complexe (et uniforme) dérivable au voisinage d'un point $z = a \in \mathbb{C}$ est en fait indéfiniment dérivable dans ce voisinage. Elle est alors dite analytique autour de ce point, et pour tout point contenu dans le domaine autour de a où u est analytique, elle est développable en série entière, avec une convergence uniforme dans tout le domaine considéré.

Points réguliers et singuliers De façon générale, pour un point $z = a \in \mathbb{C}$ une fonction de variable complexe, analytique dans un domaine $r < |z - a| < R$ autour de ce point, est développable en série de Laurent :

$$u(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n (z - a)^n,$$

ce développement étant unique, et la convergence uniforme dans tout le domaine considéré.

- La série $\sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n (z - a)^n$ est la **partie régulière** du développement,
- la série $\sum_{n=-\infty}^{n=-1} u_n (z - a)^n$ étant la **partie principale** de celui-ci.

On dit que

- a est un **point régulier** si tous les coefficients de la partie principale de son développement de Laurent sont nuls. u est alors **analytique** en a ;
- a est un **point singulier** si au moins un coefficient de la partie principale est non nul. on distingue alors deux cas :
 - les **pôles d'ordre** p , pour lesquels la partie principale comprend un nombre fini de termes et est de la forme : $\frac{u_{-p}}{(z-a)^p} + \frac{u_{-p+1}}{(z-a)^{p-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-a)}$.
 - les **points singuliers essentiels**, pour lesquels la partie principale du développement comprend une infinité de termes : dans ce cas, $\lim_{z \rightarrow a} u(z)$ n'existe pas ;

Forme générale des solutions - Théorème de Fuchs Les notions précédentes permettent de préciser les conditions d'existence d'au moins une solution de l'équation différentielle admettant, dans un domaine de rayon non nul autour du point considéré, un développement en série entière de la forme proposée plus haut.

Théorème de Fuchs : Si, dans l'équation différentielle de la forme

$$u'' + p(z)u' + q(z)u = 0,$$

les fonctions p et q sont analytiques dans le domaine $r < |z - a| < R$, $0 < r < R$, il existe alors une solution de l'équation de la forme générale $u(z) = (z - a)^r f(z)$, avec $r \in \mathbb{C}$ constant, et f analytique sur tout le domaine considéré. Le point $z = a$ est dit

- **ordinaire** si $p(z)$ et $q(z)$ sont en plus analytiques sur le domaine $|z - a| < R$ incluant $z = a$.
- **singulier régulier** si $(z - a)p(z)$ et $(z - a)^2 q(z)$ sont analytiques dans tout le domaine $|z - a| < R$.
- **singulier irrégulier** sinon.

Si $z = a$ est un point régulier ou singulier régulier, alors il existera au moins une solution de la forme générale $u(z) = (z - a)^r f(z)$, avec r réel et f analytique dans un voisinage $0 < |z - a| < R$, $R > 0$

Le théorème de Fuchs justifie la forme du développement proposé dans la méthode de Frobenius.

Exposé de la méthode

La méthode de Frobenius comporte les étapes suivantes :

- Soit l'équation différentielle de la forme générale $\frac{d^2 u}{dz^2} + p(z)\frac{du}{dz} + q(z)u = 0$, et un point ordinaire, ou singulier régulier en $z = a$, on pose $P_a(z) = (z - a)p(z)$ et $Q_a(z) = (z - a)^2 q(z)$, lesquelles fonctions sont analytiques au point considéré ;
- On substitue dans l'équation différentielle l'expression de la solution sous la forme de la série entière (dite de Frobenius) : $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^{n+r}$, ($a_0 \neq 0$), avec $r \in \mathbb{R}$, appelé exposant indiciel.
- Il vient alors successivement les expressions suivantes pour les différents termes de l'équation différentielle :
 - $q(z)u = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n Q_a(z) (z - a)^{n+r-2}$,
 - $p(z)\frac{du}{dz} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n + r) P_a(z) (z - a)^{n+r-2}$,
 - $\frac{d^2 u}{dz^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n + r)(n + r - 1) (z - a)^{n+r-2}$.
- Par suite l'équation différentielle se met sous la forme :

$$(z - a)^r \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n [(n + r)(n + r - 1) + P_a(z)(n + r) + Q_a(z)] (z - a)^{n-2} \right) = 0,$$

or par identification cette égalité n'est vérifiée que si chacun des termes de même degré en z de la somme est nul.

- Par convention, on suppose que $a_0 \neq 0$ et l'on considère le terme d'ordre le plus bas, soit celui en z^{r-2} , évalué en $z = a$ où par définition $P_a(z)$ et $Q_a(z)$ sont analytiques, il vient une équation du second degré en r appelée équation indicielle :

$$r^2 + (P_a(0) - 1)r + Q_a(0) = 0,$$

dont les racines sont notées de façon générale r_1 et r_2 avec $r_1 > r_2$.

- La substitution dans les termes suivants d'une des valeurs de r ainsi obtenues permet d'obtenir une expression des coefficients a_n , a_0 restant arbitraire (le plus souvent on prend $a_0 = 1$). Généralement cette expression prend la forme d'une relation de récurrence entre a_n , a_{n-1} et a_{n+2} .

Exemple d'application

Soit l'équation différentielle $z^2 u'' - zu' + (1-z)u = 0$, qui se met aussitôt sous la forme $u'' - \frac{1}{z}u' + \frac{1-z}{z^2}u = 0$. Par suite $p(z) = -\frac{1}{z}$ et $q(z) = \frac{1-z}{z^2}$, ces fonctions admettant bien un point singulier régulier en $z = 0$, et $P_0(z) = -1$, $Q_0(z) = 1 - z$.

D'après ce qui précède, la substitution dans l'équation du développement en série de Frobenius pris autour de $z = 0$ donne : $z^r \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n [(n+r-1)^2 z^{n-2} - z^{n-1}] \right) = 0$, soit encore, après réarrangement des termes de même degré n : $(r-1)^2 a_0 z^{r-2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+r-1)^2 a_n - a_{n-1}) z^{n+r-2} = 0$, l'équation indicielle étant, elle, donnée par $(r-1)^2 = 0$, laquelle admet la racine double $r = 1$. La substitution de cette valeur de l'exposant indiciel dans l'expression précédente donne alors : $\sum_{n=1}^{\infty} ((n^2 a_n - a_{n-1}) z^{n-1} = 0$, ce qui implique la relation de récurrence $a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)^2}$, soit en fonction de a_0 l'expression $a_n = \frac{a_0}{(n!)^2}$.

———— Théorie de Sturm-Liouville ————

La théorie de Sturm-Liouville étudie le cas particulier des équations différentielles linéaires de la forme

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = \lambda w(x)y,$$

dans laquelle le paramètre λ fait partie comme la fonction y des inconnues.

Un problème de Sturm-Liouville (S-L) est dit régulier si $p(x) > 0$, $w(x) > 0$, et $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, et $w(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle fini $[a, b]$, ayant des conditions aux bords de la forme :

$$\begin{cases} y(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} y'(a) = 0 \\ y'(b) = 0 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} y(a) = 0 \\ y'(b) = 0 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} y'(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

Les principaux résultats sont les suivants :

1. Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ sont réelles et ordonnées telles que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots \rightarrow \infty;$$

2. A chaque valeur propre λ_n correspond une unique fonction propre $y_n(x)$ (à une constante de normalisation près).

Les fonctions $y_n(x)$ ont exactement $n - 1$ zéros dans l'intervalle $[a, b]$.

La fonction propre $y_n(x)$ est appelée la n -ième solution du problème de Sturm-Liouville régulier.

3. Les fonctions propres normalisées forment une base orthonormée.

$$\int_a^b y_n(x) y_m(x) w(x) dx = \delta_{mn},$$

dans l'espace de Hilbert.

Par multiplication par un facteur intégrant convenable, toute équation différentielle linéaire d'ordre deux peut être mise sous la forme d'une équation de Sturm-Liouville.

Exemple : L'équation $-\frac{d^2 y}{dx^2} = \lambda y(x)$ avec y et λ inconnus et pour conditions aux bords $y(0) = y(L) = 0$ ($L \neq 0$) admet pour la famille $\{y_n(x) = \sin(n\pi \frac{x}{L})\}$, $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ comme base orthogonale de solutions.

EQUATION DE LEGENDRE

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} y(x) \right) + \lambda y(x) = 0.$$

L'équation de Legendre admet deux points singulier régulier $x = \pm 1$.

Si $\lambda = l(l+1)$ avec l un entier naturel ($l \in \mathbb{N}$) alors l'une des solutions de l'équation de legendre est un polynome de degrès l , nommé « Polynome de Legendre », et noté $P_l(x)$. $P_l(x)$ est une solution régulière sur $[-1, 1]$.

La seconde solution, nommée « fonction de Legendre de deuxième espèce », et noté $Q_l(x)$, possèdent deux points singulier en $x = \pm 1$: $Q_l(x)$ n'est pas définie en $x = \pm 1$.

La solution générale de l'équation de Legendre est donc

$$y(x) = \alpha P_l(x) + \beta Q_l(x).$$

L'équation de Legendre apparaît naturellement lors de la résolution des équations de Laplace ou de Helmholtz en coordonnées sphériques.

Polynômes de Legendre

Notations

$$P_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [-1, 1]$$

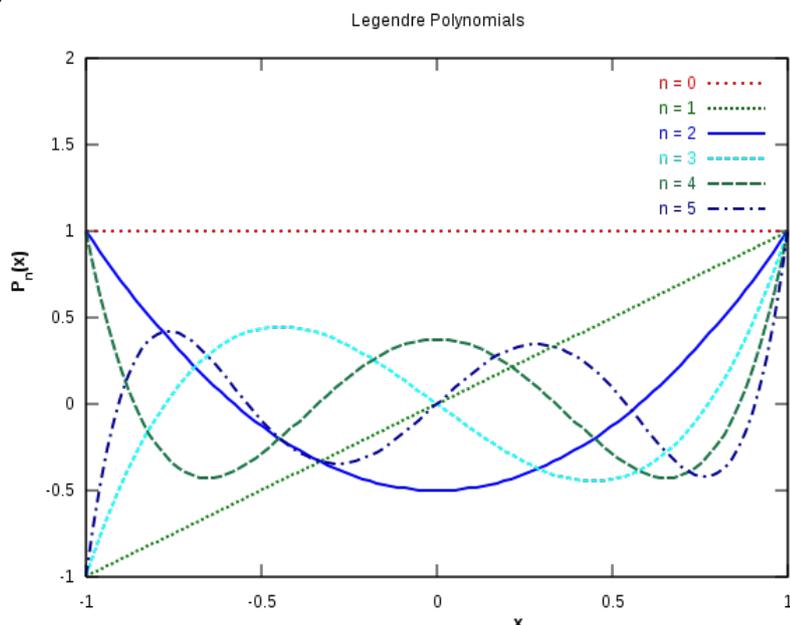
Formule de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

Degrès $\deg(P_n) = n$

Expression des premiers polynômes

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \dots \end{aligned}$$



Équation de Legendre : $\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} P_l(x) \right) + l(l+1)P_l(x) = 0.$

Fonction génératrice :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l, \quad x \in [-1, +1].$$

Relations de récurrences

$$\begin{aligned} (n+1)P_{n+1}(x) &= (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \\ (2n+1)P_n &= P'_{n+1} - P'_{n-1} \end{aligned}$$

Parité $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

Orthogonalité

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

Développement

La famille $(P_n)_{n \leq N}$ est une base de l'espace vectoriel de polynôme de degrés $N \in \mathbb{R}_N[X]$.

$$g(x) \in \mathbb{R}_N[X] \quad g(x) = \sum_{n=0}^{n=N} a_n P_n(x) \quad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 g(x)P_n(x) dx$$

Relations remarquables, $\forall n \in \mathbb{N}$

- $P_n(1) = 1$
- $P_n(-1) = (-1)^n$
- $P_{2n+1}(0) = 0$
- $P_{2n}(0) = (-1)^m \frac{(2n)!}{2^{2n}(m!)^2}$
- $P'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}$
- $P'_n(x) = \frac{1}{2n+1} \frac{d}{dx} (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))$
- $x^n = \sum_{l=n, n-2, \dots} \frac{(2l+1)n!}{2^{\frac{n-l}{2}} (\frac{n-l}{2})! (l+n+1)!} P_l(x)$

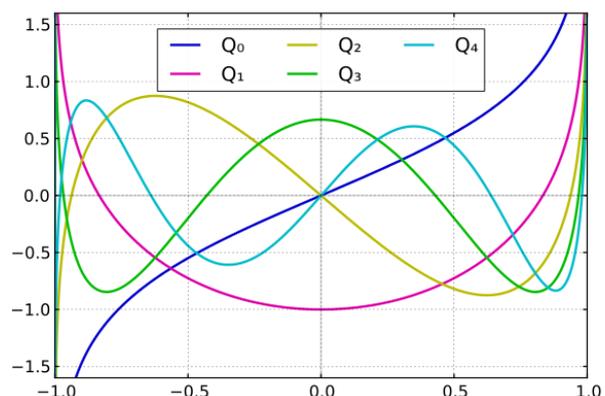
———— Fonction de Legendre deuxième espèce ————

Serie

$$Q_n(x) = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \left(x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-(n+3)} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} x^{-(n+5)} + \dots \right)$$

Expression des premières fonctions

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \\ Q_1(x) &= \frac{x}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - 1 \\ Q_2(x) &= \frac{3x^2-1}{4} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{3x}{2} \\ Q_3(x) &= \frac{5x^3-3x}{4} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{5x^2}{2} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$



EQUATION GÉNÉRALE DE LEGENDRE

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} y(x) \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y(x) = 0.$$

L'équation de Legendre admet deux points singulier régulier $x = \pm 1$.

Si $\lambda = l(l+1)$ avec l un entier naturel ($l \in \mathbb{N}$) alors l'une des solutions de l'équation de Legendre est régulière, nommée « Fonction associée de Legendre », et notée $P_l^m(x)$. $P_l^m(x)$ est une solution régulière sur $[-1, 1]$.

La seconde solution, nommée « fonction associée de Legendre de deuxième espèce », et noté $Q_l^m(x)$, possèdent deux points singulier en $x = \pm 1$: $Q_l^m(x)$ n'est pas définie en $x = \pm 1$.

La solution générale de l'équation de Legendre est donc

$$y(x) = \alpha P_l^m(x) + \beta Q_l^m(x).$$

L'équation de Legendre apparaît naturellement lors de la résolution des équations de Laplace ou de Helmholtz en coordonnées sphériques.

Fonctions associés de Legendre

Notation : $P_l^m(x)$, $(l, m) \in \mathbb{N}^2$; $-l \leq m \leq l$; $x \in [-1, 1]$

Équation différentielle

Les fonctions de Legendre sont les seules solutions régulières sur $[-1, 1]$ de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} y(x) \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y(x) = 0.$$

Expression en fonction des polynômes de Legendre

$$\begin{aligned} P_l^m(x) &= (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} (P_l(x)) \\ P_l^m(\cos(\theta)) &= (-1)^m \sin^m \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} (P_l(\cos(\theta))) \end{aligned}$$

Valeurs négatives de m

L'équation de Legendre étant invariante par changement de signe de m , on définit $P_l^{-m} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m$

Parité $P_l^m(-x) = (-1)^{l+m} P_l^m(x)$

Orthogonalité pour m fixé $\int_{-1}^1 P_k^m P_l^m dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{k,l}$

Orthogonalité pour l fixé

$$\int_{-1}^1 \frac{P_\ell^m P_\ell^n}{1-x^2} dx = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \frac{(\ell+m)!}{m(\ell-m)!} & \text{if } m = n \neq 0 \\ \infty & \text{if } m = n = 0 \end{cases}$$

l	m				
0	1	2	3	4	
0	1				
1	x	$-(1-x^2)^{1/2}$			
2	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$	$-3x(1-x^2)^{1/2}$	$3(1-x^2)$		
3	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$	$-\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}$	$15x(1-x^2)$	$-15(1-x^2)^{3/2}$	
4	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$	$-\frac{5}{2}(7x^3-3x)(1-x^2)^{1/2}$	$\frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2)$	$-105x(1-x^2)^{3/2}$	$105(1-x^2)^2$

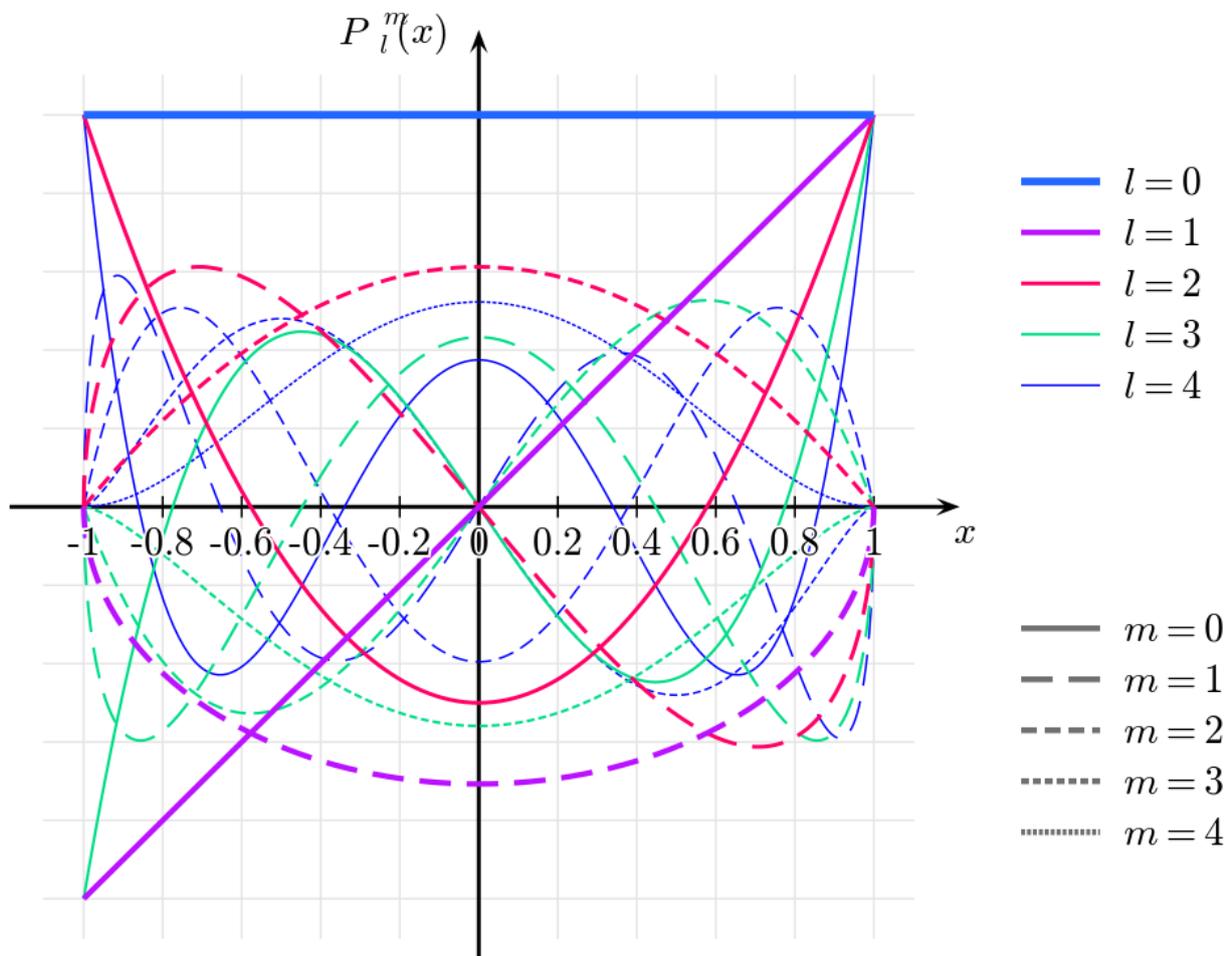
TABLE 1 – Premieres Fonctions associés de Legendre $P_l^m(x)$

l	m			
0	1	2	3	
0	1			
1	$\cos \theta$	$-\sin \theta$		
2	$\frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1)$	$-3\cos \theta \sin \theta$	$3\sin^2 \theta$	
3	$\frac{1}{2}(5\cos^3 \theta - 3\cos \theta)$	$-\frac{3}{2}(5\cos^2 \theta - 1)\sin \theta$	$15\cos \theta \sin^2 \theta$	$-15\sin^3 \theta$

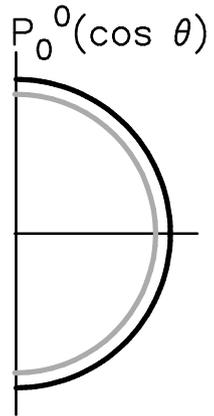
TABLE 2 – Premieres Fonctions associés de Legendre $P_l^m(\cos \theta)$ Premieres Fonctions associés de Legendre $P_l^m(x)$

voir tables 1 et 2

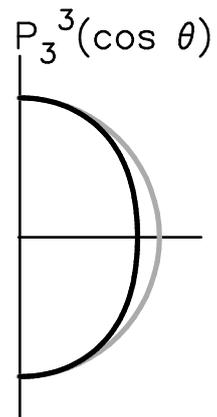
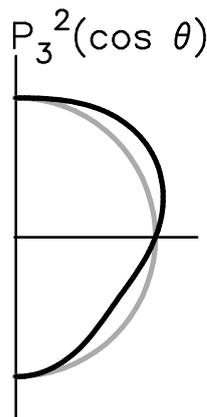
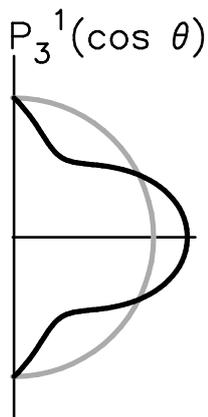
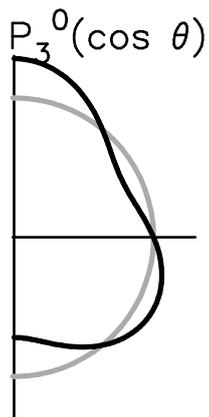
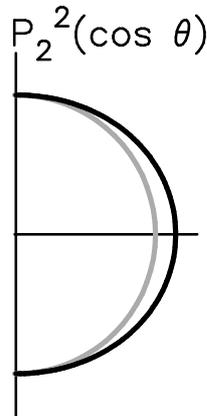
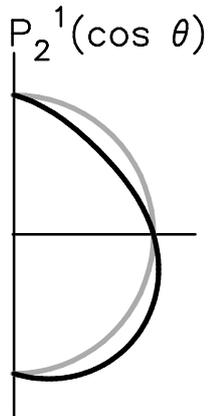
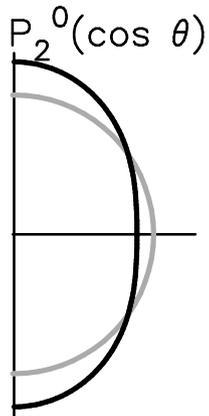
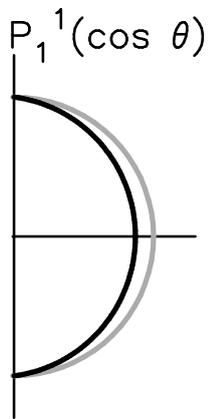
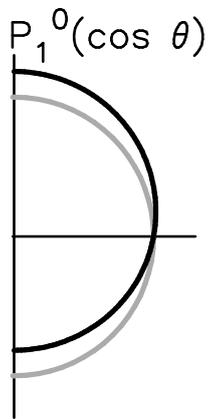
associated legendre functions (normalized)



Représentation graphique en coordonnées polaires



Fonction de Legendre
 $R(\theta) = R_0 + \delta r * P_l^m(\cos \theta)$
 $R(\theta) = R_0$



HARMONIQUES SPHÉRIQUES

Notation

$$Y_l^m(\theta, \varphi) \quad \begin{cases} (l, m) \in \mathbb{N}^2 & ; \\ -l \leq m \leq l & ; \\ \theta \in [0, \pi] & \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Équation différentielle

Les harmoniques sphériques sont les seules solutions définies en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ du problème aux fonctions propres :

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u(\theta, \varphi) = -\lambda u(\theta, \varphi)$$

Les fonctions $Y_l^m(\theta, \varphi)$ sont solutions de ce problème pour $\lambda = l(l+1)$:

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_l^m(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Définition

$$\begin{aligned} m \geq 0 & \quad Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \\ m < 0 & \quad Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^{|m|} \left(Y_l^{|m|}(\theta, \varphi) \right)^* \end{aligned}$$

Orthogonalité

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} Y_l^m(\theta, \varphi) Y_{l'}^{m'*}(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\varphi \, d\theta = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Développement en harmoniques sphériques

$f(\theta, \varphi) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

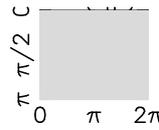
$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_l^m Y_l^m(\theta, \varphi) \quad \text{avec} \quad f_l^m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta f(\theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta, \varphi)$$

Table des premières Harmoniques Sphériques

Représentations graphiques

- $l = 0$

$$Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

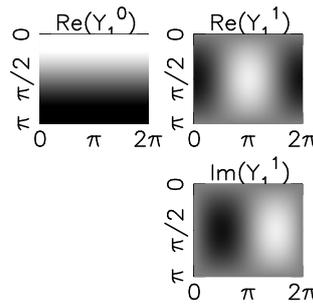


- $l = 1$

$$Y_1^{-1}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}$$

$$Y_1^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta$$

$$Y_1^1(\theta, \varphi) = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}$$



- $l = 2$

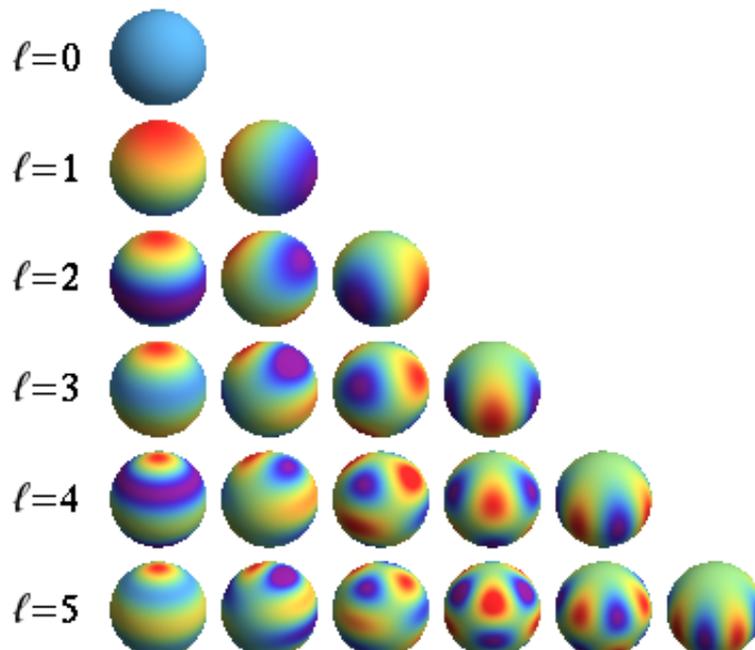
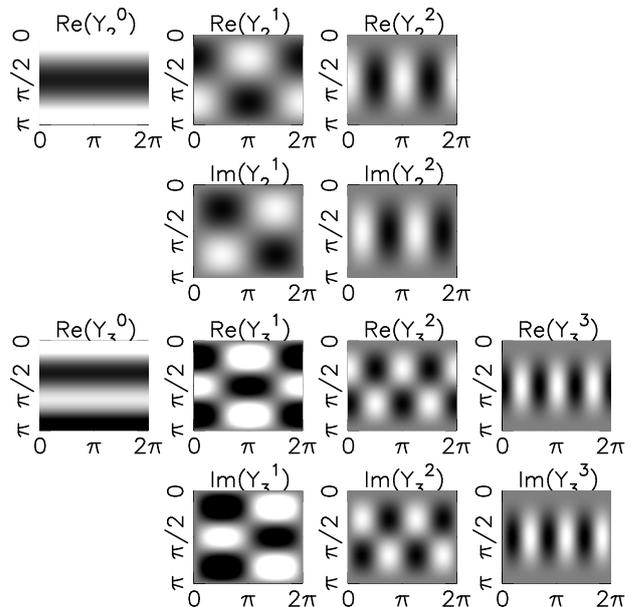
$$Y_2^{-2}(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\varphi}$$

$$Y_2^{-1}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi}$$

$$Y_2^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_2^1(\theta, \varphi) = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}$$

$$Y_2^2(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}$$



FONCTIONS DE BESSEL SPHÉRIQUES

Équation différentielle

L'équation (avec $l \in \mathbb{N}$)

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + [x^2 - l(l+1)]y = 0. \quad (45)$$

admet deux solutions linéairement indépendantes $j_l(x)$ et $n_l(x)$, appelées fonctions de Bessel et de Neumann sphériques :

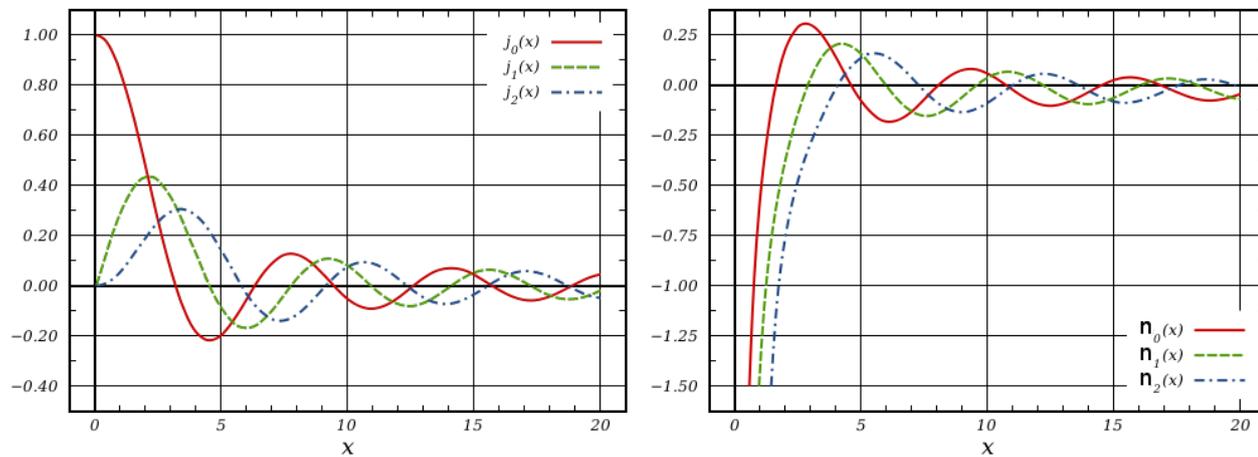
$$\bullet j_l(x) = (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin(x)}{x}, \quad \bullet n_l(x) = -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos(x)}{x}.$$

Expression des premières fonctions

Les premières fonctions de Bessel et de Neumann sphériques

$$\begin{aligned} \bullet j_0(x) &= \frac{\sin(x)}{x} & \bullet n_0(x) &= -\frac{\cos(x)}{x} \\ \bullet j_1(x) &= \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x} & \bullet n_1(x) &= -\frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x} \\ \bullet j_2(x) &= \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \frac{\sin(x)}{x} - \frac{3 \cos(x)}{x^2} & \bullet n_2(x) &= \left(-\frac{3}{x^2} + 1 \right) \frac{\cos(x)}{x} - \frac{3 \sin(x)}{x^2} \\ \bullet j_3(x) &= \left(\frac{15}{x^3} - \frac{6}{x} \right) \frac{\sin(x)}{x} - \left(\frac{15}{x^2} - 1 \right) \frac{\cos(x)}{x} & \bullet n_3(x) &= \left(-\frac{15}{x^3} + \frac{6}{x} \right) \frac{\cos(x)}{x} - \left(\frac{15}{x^2} - 1 \right) \frac{\sin(x)}{x} \end{aligned}$$

Représentation des premières fonctions



Fonction Génératrice

$$\frac{1}{x} \cos(\sqrt{x^2 - 2xt}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} j_{n-1}(x); \quad \frac{1}{x} \sin(\sqrt{x^2 + 2xt}) = \sum_{n=0}^{\infty} (1)^n \frac{t^n}{n!} n_{n-1}(x)$$

Zéros de la fonction $j_l(X_{l,i}) = 0$.

La coordonnée $X_{l,i}$ (supposée connue) est le i ème zéro non nul de la fonction j_l

Zéros des dérivées de fonctions de Bessel sphériques

$j'_n(x)$ s'annule pour les valeurs $x = \lambda_i^n$ (i ème zéro de j'_n)

$j'_n(\lambda_i^n) = 0$	$\lambda_i^{n=0}$	$\lambda_i^{n=1}$	$\lambda_i^{n=2}$...
$i = 1$	0	2,1	0	
$i = 2$	4,5	5,9	3,3	
$i = 3$	7,7	11,0	7,2	

FONCTION DE BESSEL

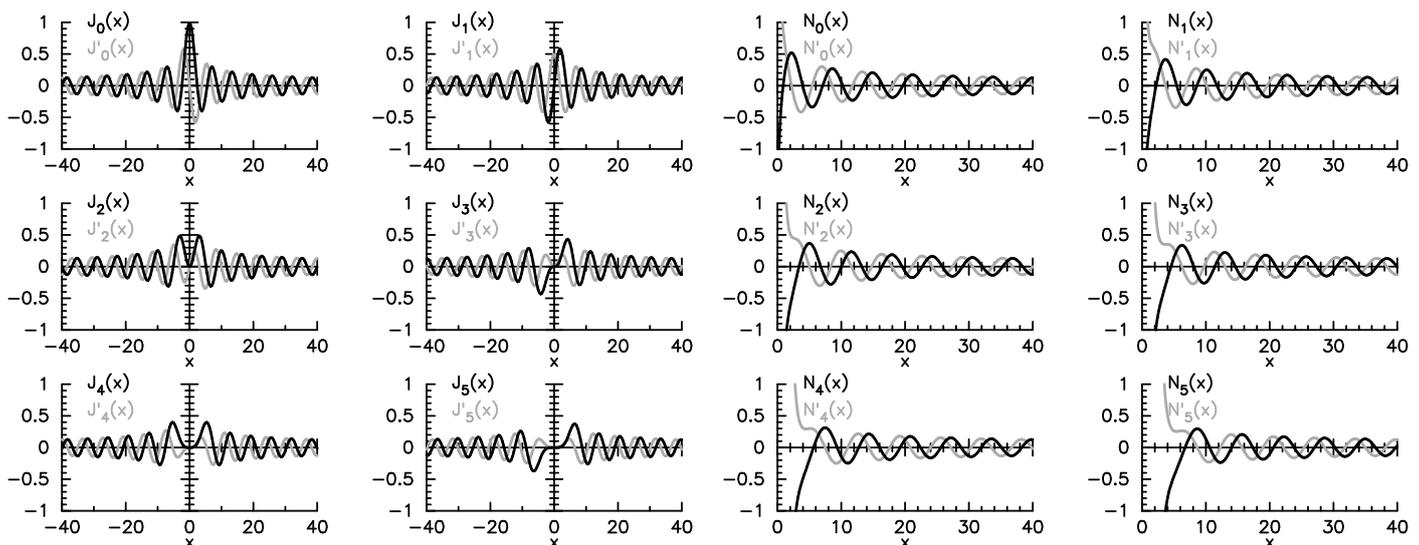
Équation différentielle

L'équation (avec $n \in \mathbb{Z}$)

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dF}{dx} \right) + (x^2 - n^2) F(x) = 0$$

admet deux solutions linéairement indépendantes $J_n(x)$ (régulière pour tout x) et $N_n(x)$ (singulière à l'origine), appelées fonctions de Bessel et de Neumann – voir représentation graphique ci-dessous.

Représentation des premières fonctions



Expression des fonctions de Bessel

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! (n+p)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2p+n}$$

Symétries

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x), \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

Relations de récurrences

- $J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$
- $J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) = -2J'_n(x)$
- $J_{n+1}(x) + J'_n(x) = \frac{n}{x} J_n(x)$

$$\bullet \frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x)$$

Fonction Génératrice

$$e^{\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

on en déduit

$$e^{iz \cos \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\phi}, \quad e^{iz \sin \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\phi}$$

Orthogonalité

$$\int_0^1 x J_n(j_{n,i}x) J_n(j_{n,j}x) dx = 0$$

$j_{n,i}$ et $j_{n,j}$ étant deux zéros distinct de J_n

Zéros des fonctions de Bessel $J_n(j_{n,i}) = 0$.

La coordonnée $j_{n,i}$ (supposée connue) est le i ème zéro non nul de la fonction J_n .

$J_n(j_{n,i}) = 0$	$j_{0,i}$	$j_{1,i}$	$j_{2,i}$	$j_{3,i}$	$j_{4,i}$	$j_{5,i}$
i=1	2,41	3,83	5,14	6,38	7,59	8,77
i=2	5,52	7,02	8,42	9,76	11,06	12,34
i=3	8,65	10,17	11,62	13,02	14,37	15,70
i=4	11,79	13,32	14,80	16,22	17,62	18,98
i=5	14,93	16,47	17,96	19,41	20,83	22,22
i=6	18,07	19,62	21,12	22,58	24,02	25,43
i=7	21,21	22,76	24,27	25,75	27,20	28,63
i=8	24,35	25,90	27,42	28,91	30,37	31,81
i=9	27,49	29,05	30,57	32,07	33,54	34,99

Zéros des dérivées des fonctions de Bessel $J'_n(j'_{n,k}) = 0$.

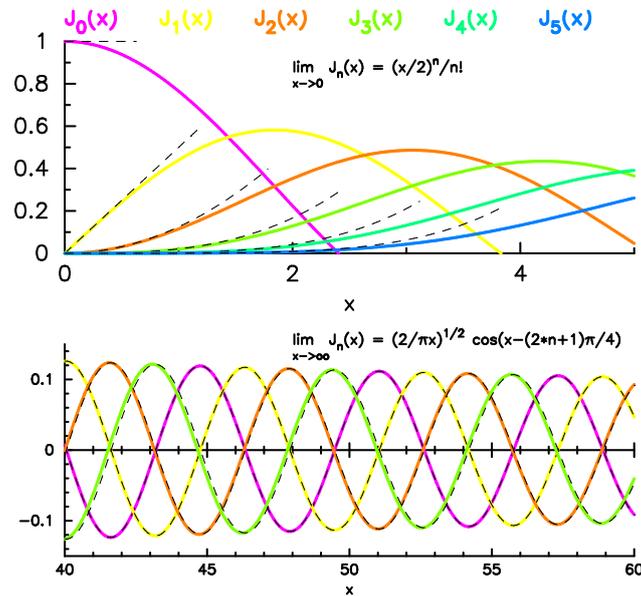
La coordonnée $j'_{n,i}$ (supposée connue) est le i ème zéro non nul de la fonction J'_n .

$J'_n(j'_{n,i}) = 0$	$j'_{0,i}$	$j'_{1,i}$	$j'_{2,i}$	$j'_{3,i}$	$j'_{4,i}$	$j'_{5,i}$
i=1	3,83	1,84	3,05	4,20	5,31	6,42
i=2	7,02	5,33	6,71	4,20	9,28	10,52
i=3	10,17	8,54	9,97	8,02	12,68	13,99
i=4	13,32	11,71	13,17	11,35	15,96	17,31
i=5	16,47	14,86	16,35	14,59	19,19	20,57
i=6	19,62	18,01	19,51	17,79	22,40	23,80
i=7	22,76	21,16	22,67	20,97	25,59	27,01
i=8	25,90	24,31	25,82	24,14	28,77	30,20
i=9	29,05	27,46	28,98	27,31	31,94	33,38

Développements asymptotiques

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \lim_{x \rightarrow \infty} J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} N_{n>1}(x) = -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n \quad \lim_{x \rightarrow \infty} J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right)$$



FONCTIONS DE BESSEL MODIFIÉES

Les fonctions de Bessel modifiées sont solution de l'équation

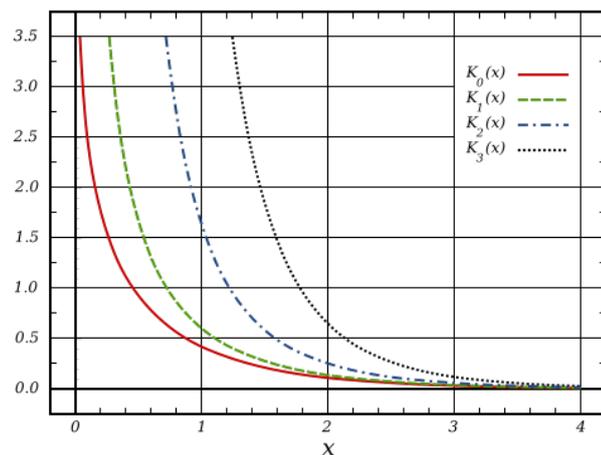
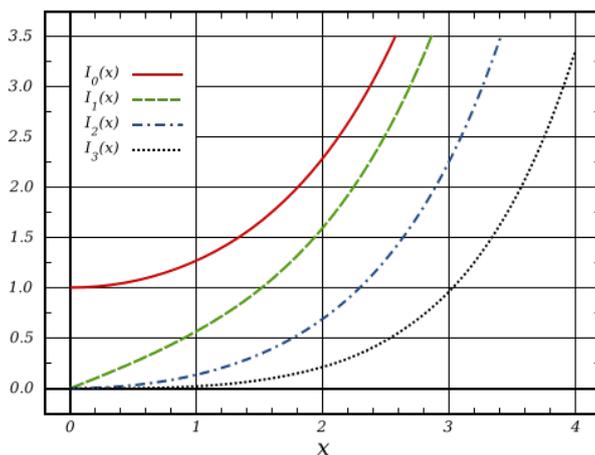
$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dF}{dx} \right) + (x^2 + n^2) F(x) = 0$$

pour n fixé il existe deux solutions : la fonction de Bessel modifiée $I_n(x)$ (régulière pour tout x) et de Neuman modifiée $K_n(x)$ (singulière à l'origine).

Les fonctions de Bessel modifiées sont toutes monotones et

- $I_n(x=0) = 0$ pour $n \neq 0$
- $I_n(x) \rightarrow \infty$ pour $x \rightarrow \infty$
- $K_n(x) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow \infty$

Elles ne s'annulent pas pour $x \in]0, \infty[$ – voir représentation graphique ci-dessous.



Exercices sur les fonctions spéciales

COMPLÉMENTS SUR LES ODE

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles linéaires en cherchant des solutions sous forme d'une série entière autour de $x = 0$: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et préciser le rayon de convergence des séries obtenues

1. $y''(x) + y(x) = 0$
2. $y'(x) = x y(x) + x$
3. $(1 - x^2) y''(x) - 2x y'(x) + 2y(x) = 0$
4. $(1 - x^2) y''(x) - 2x y'(x) = 0$
5. $(1 - x) y'(x) = y(x)$

Exercice 2 : Polynômes d'Hermite Soit $y(x)$ une fonction définie par l'équation différentielle :

$$y''(x) - 2x y'(x) + (\lambda - 1) y(x) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

1. Chercher des solutions pour y en série entière
2. Montrer qu'il existe deux solutions indépendantes (λ fixé) que l'on explicitera en fonction de λ .
3. Déterminer le rayon de convergence des séries établies.
4. Montrer que pour certaines valeurs particulières de λ l'équation admet une solution de nature polynômiale (de degré fini).
5. Donner de manière explicite les premiers polynômes (polynôme d'Hermite) ainsi obtenu.

Exercice 3 : On souhaite trouver les solutions de l'équation différentielle

$$(1 - x^2) y''(x) - 2x y'(x) + \lambda^2 y(x) = 0 \tag{46}$$

où λ est un réel positif.

1. En cherchant des solutions en série entière autour de $x = 0$: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, établir la récurrence entre les coefficients a_n .
2. Justifier que l'on obtient bien deux solutions indépendantes pour chaque valeur de λ ; et déterminer leur rayon de convergence.
3. Montrer que des solutions *polynomiales* de cette équation peuvent être obtenues pour certaines valeurs de λ . Donner alors le degré et la parité du polynôme en fonction des valeurs de λ .
4. On impose la condition suivante $y(1) = 1$, déterminer l'expression des polynômes de degré 1, 2, 3 et 4.
5. Reprendre les mêmes questions pour l'équation

$$(1 - x^2) y''(x) - x y'(x) + \lambda^2 y(x)$$

Exercice 4 : Méthode de Frobenius – Équation de Laguerre

1. Déterminer par la méthode de Frobenius les solutions de l'équation différentielle de Laguerre

$$x y''(x) + (1 - x) y'(x) + p y(x) = 0, \quad p \in \mathbb{N}$$

2. Préciser le domaine de convergence des solutions.

3. Établir que l'équation admet des solutions polynomiales, notées $L_p(x)$ (polynôme de Laguerre)
4. Expliciter les premiers polynômes en prenant comme condition de normalisation $L_p(0) = 1$.

Exercice 5 : Méthode de Frobenius – Équation de Bessel Sphérique

1. Déterminer par la méthode de Frobenius les solutions de l'équation différentielle de Bessel Sphérique

$$x^2 y''(x) + 2x y'(x) + [x^2 - l(l+1)] y(x) = 0, \quad l \in \mathbb{N}$$

2. Préciser le domaine de convergence des solutions.
3. Pour $l = 0$, resommer les séries obtenus pour obtenir les fonctions $j_0(x)$ et $n_0(x)$.

Exercice 6 : Méthode de Frobenius – Équation de Bessel Cylindrique

1. Déterminer par la méthode de Frobenius les solutions de l'équation différentielle de Bessel Cylindrique

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + [x^2 - n^2] y(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

2. Préciser le domaine de convergence des solutions.
3. Établir les développements asymptotiques en $x \rightarrow 0$.

POLYNÔMES DE LEGENDRE

Exercice 1 : Polynômes de Legendre et séries de Fourier généralisées

Soit la fonction

$$F(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ -1 & \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases} \quad (47)$$

définie sur $[0, \pi]$. On pose $x = \cos \theta$ et $f(x) = F(\theta)$.

1. Développer $f(x)$ sur la base des polynômes de Legendre $P_l(x)$.

Aide : utiliser la relation de récurrence pour calculer les intégrales

2. Faire de même pour $g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$ définie sur $[-1, 1]$.

Aide : On pourra faire l'étude d'une fonction paire $h(x) = g(x) + x/2$.

Exercice 2 : Résolution de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ en coordonnées sphériques – Cas de la symétrie azimutale

On cherche les solutions de l'équation de Laplace **indépendante de l'angle** φ (symétrie azimutale) $u = u(r, \theta)$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u(r, \theta) = 0$$

- (a) Utiliser la méthode de séparation des variables en posant $u(r, \theta) = F(\theta) \times G(r)$ et donner les équations différentielles pour F et pour R .
- (b) Montrer que l'équation pour la fonction F est de la forme

$$\left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta \right] F(\theta) = 0$$

où λ est la constante de séparation des variables.

- (c) En posant $x = \cos \theta$ et $P(x) = F(\theta)$ montrer que cette équation se ramène à l'équation de Legendre.
- (d) En considérant que la solution doit être définie en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, justifier que le paramètre λ ne peut prendre que des valeurs particulières $\lambda_l = l(l+1)$ avec $l \in \mathbb{N}$.
- (e) Déterminer les solutions de l'équation radiale (pour $R(r)$).
- (f) Donner la solution générale de l'équation de Laplace

Exercice 3 : Application : Étude d'un potentiel électrostatique

À partir des résultats des deux exercices précédents, on se propose de résoudre l'équation du potentiel électrostatique $\Delta V = 0$ en tenant compte des deux conditions suivantes :

- Le potentiel est supposé connu sur une sphère de rayon d : $V(r = d, \theta) = F(\theta)$
- Le potentiel vérifie $V(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.

La symétrie de la condition en $r = d$ permet de chercher des solutions à symétrie azimutale $V = V(r, \theta)$.

Déterminer le potentiel à l'intérieur et à l'extérieur d'un condensateur formé de deux hémisphères de

rayon d , l'un porté à V_0 (Volts) l'autre à $-V_0$ (Volts), soit $F(\theta) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ -V_0 & \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases}$

HARMONIQUES SPHÉRIQUES

Exercice 1 : Fonctions de Legendre

- Déterminer les fonctions $P_n^m(x)$ pour $\{n = m = 1\}$; $\{n = 2, m = 1\}$; $\{n = 4, m = 1\}$; $\{n = 3, m = 2\}$
- On rappelle que la parité des $P_n(x)$ est $(-1)^n$. Quelle est alors la parité des fonctions $P_n^m(x)$?

Exercice 2 : Fonction propre de $L_{\theta,\varphi}$

On note $L_{\theta,\varphi}$ l'opérateur angulaire

$$L_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

dont on cherche les fonctions propres $u(\theta, \varphi)$ définies sur $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$L_{\theta,\varphi} u(\theta, \varphi) = -\lambda u(\theta, \varphi)$$

- Poser $u(\theta, \varphi) = F(\theta) \times G(\varphi)$. Donner et résoudre l'équation différentielle pour $G(\varphi)$
- Montrer que l'équation pour $F(\theta)$ se ramène par changement de variable à l'équation de Legendre

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} y(x) \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y(x) = 0.$$

- Justifier pourquoi on doit avoir $\lambda = l(l+1)$ ($l \in \mathbb{N}$).
- En déduire l'ensemble des fonctions propres de l'opérateur $L_{\theta,\varphi}$.

Exercice 3 : Résolution de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ en coordonnées sphériques – Cas de la symétrie azimutale

Le laplacien en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) s'écrit

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) L_{\theta,\varphi} \right]$$

1. Rechercher une solution de la forme $u(r, \theta, \varphi) = R(r) \times A(\theta, \varphi)$. Donner l'équation différentielle pour $R(r)$ (sans la résoudre) et l'équation aux dérivées partielles pour A .
2. Résoudre le problème angulaire et déterminer les valeurs possible de la constante de séparation des variables.
3. Reprendre l'équation radiale et la résoudre.
4. Donner les solutions générales satisfaisant à l'équation de Laplace
5. **Application** : Déterminer par identification la distribution stationnaire de température à l'intérieur d'une sphère de rayon a si la surface de la sphère est maintenue à la distribution de température :
 - $T(\theta, \varphi) = \cos \theta - 3 \sin^2 \theta$
 - $T(\theta, \varphi) = 3 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi$

Exercice 4 : Modes de vibration d'une bulle de savon

On considère la déformation radiale d'une bulle de savon sphérique de rayon r_0 . On note $R(\theta, \phi, t)$ l'évolution spatio-temporelle de l'élongation radiale satisfaisant l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} R(\theta, \phi, t) = \frac{c^2}{r_0} L_{\theta,\varphi} R(\theta, \phi, t),$$

où c est la célérité des ondes à la surface de la bulle. En utilisant les propriétés de l'opérateur $L_{\theta,\varphi}$ déterminer les modes propres et les fréquences propres de vibration de la bulle.

FONCTION DE BESSEL SPHÉRIQUE

Exercice 1 : Mode de vibration d'une cavité sphérique

On considère une cavité sphérique de rayon R_0 et on modélise les ondes sonores par l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} P(\vec{r}, t) = c^2 \Delta P(\vec{r}, t)$$

où P est associée à la pression de l'air dans la cavité. Le paramètre c est la vitesse du son dans l'air.

Les conditions aux bords impose en ventre de pression : $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$ en $r = R_0$

1. Déterminer les modes propres et les fréquences propres de vibration de la cavité
2. Étudier en particulier l'évolution de la fréquence du mode fondamental avec le rayon de la cavité R_0 .

Exercice 2 : Distribution de température dans une boule

On considère une boule de rayon R_0 de température initiale homogène T_0 . On note $T(\vec{r}, t)$ la distribution spatio-temporelle de température dans la boule à la date t qui suit l'équation d'évolution

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\vec{r}, t) = D \Delta T(\vec{r}, t)$$

où D est un coefficient positif. La surface de la boule est maintenue à une température constante nulle.

1. Résoudre le problème en identifiant les "modes" de l'équation et les constante de temps associés.
2. Identifier le mode dont la relaxation vers l'équilibre se fait de la façons la plus lente
3. En déduire une estimation du temps de cuisson d'une boulette de viande, initialement à 7°C , de rayon R_0 dans un bain de vapeur à 100°C , sachant que $D = 0,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ et que la cuisson est achevée lorsque la température à cœur atteint 65°C .

Exercice 3 : Particule quantique dans une puit de potentiel

On considère les états propres $\Psi(\vec{r})$ d'une particule quantique de masse m

$$[\Delta + V(\vec{r})] \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{2m E}{\hbar}$$

dans un puits de potentiel à symétrie sphérique défini par

$$V(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} 0 & r < b \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Les conditions aux limites se traduisent par $\Psi(r = b, \theta, \varphi) = 0$.

1. Construire de façons explicite les solutions à symétrie sphérique
2. Déterminer les états propres et montrer que les énergies prennent des valeurs quantifiées
3. Reprendre les questions dans le cas où

$$V(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} 0 & a < r < b \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

FONCTION DE BESSEL CYLINDRIQUE

Exercice 1 : Modes de vibration d'une membrane circulaire

On considère la vibration d'une membrane circulaire élastique de rayon R_0 modélisée par la déformation $u(r, \theta, t)$, l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(r, \theta, t) = c^2 \Delta u(r, \theta, t)$$

et la condition au bord

$$u(r = R_0, \theta, t) = 0$$

1. Déterminer les modes propres et les fréquences propres.
2. Déterminer formellement la solution du problème en fonction des conditions initiales (déformation et vitesse à $t = 0$)

Exercice 2 : Distribution de température dans un cylindre

On considère un cylindre de rayon R_0 et de hauteur H , de température initiale homogène T_0 . On note $T(\vec{r}, t)$ la distribution spatio-temporelle de température dans le cylindre à la date t qui suit l'équation d'évolution

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\vec{r}, t) = D \Delta T(\vec{r}, t)$$

où D est un coefficient positif. La surface du cylindre est maintenue à une température constante nulle.

1. Résoudre le problème en identifiant les "modes" de l'équation et les constante de temps associés.
2. Identifier le mode dont la relaxation vers l'équilibre se fait de la façons la plus lente
3. En déduire une estimation du temps de cuisson d'une carotte, initialement à 7°C , de rayon R_0 dans un liquide en ébullition à 100°C , sachant que $D = 0,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ et que la cuisson est achevée lorsque la température à cœur atteint 65°C .
4. Même question pour une rondelle de carotte.

Exercice 3 : Modes propres du champ électromagnétique dans une cavité cylindrique

On considère une cavité cylindrique de rayon R_0 et de hauteur H . Les équations de Maxwell se ramènent à l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = c^2 \Delta \vec{E}(\vec{r}, t)$$

On utilisera les conditions suivantes

- Le champ est polarisé suivant l'axe $(0, \vec{e}_z)$ du cylindre
- le champ est nul sur la paroi en $r = R_0$
- Les solutions présente des ventres de vibration sur les bases du cylindre (en $z = 0$ et $z = h$)

Déterminer les modes propres et les fréquences propres