



HAL
open science

Une goutte d'eau dans un bol

David Vicente

► **To cite this version:**

| David Vicente. Une goutte d'eau dans un bol. 2020. hal-02541470

HAL Id: hal-02541470

<https://hal.science/hal-02541470>

Preprint submitted on 13 Apr 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une goutte d'eau dans un bol

David Vicente

13 avril 2020

Résumé

Soit $\mathcal{L}(T)$ la longueur du front d'onde au temps T généré par la chute d'une goutte d'eau dans un bol circulaire de rayon 1 à une distance a du centre. Dans cet article, on démontre que $\mathcal{L}(T)$ est équivalente à $2 \arcsin(a)T$ lorsque T tend vers $+\infty$.

1 Exposition du problème

1.1 Motivation expérimentale

Observons une goutte d'eau tombant dans un bol rempli d'eau. À sa surface, l'onde de choc est d'abord circulaire, puis elle se réfléchit sur le bord. Si la chute n'a pas eu lieu en son centre, alors l'onde semble se focaliser au point opposé du bol. Ensuite, l'onde se réfléchit à nouveau sur le bord mais son intensité devient trop faible pour qu'elle soit visuellement perceptible.

Afin de saisir ce mouvement de manière plus précise et sur un temps plus long, on peut en réaliser une modélisation numérique. Pour cela, on suppose que chacun des points constituant l'onde se déplace à l'intérieur du bol à vitesse rectiligne constante égale à 1 et qu'il se réfléchit sur son bord suivant la loi : *l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion*. Afin d'obtenir une bonne approximation de ce mouvement, on considère un grand nombre de points, qu'on note $N \in \mathbb{N}$, et on fixe un petit pas temporel, qu'on note $\delta_t > 0$. On introduit alors deux vecteurs dans $(\mathbb{R}^2)^N$, qu'on note M et V , tels que, pour tout $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$, $M_k \in \mathbb{R}^2$ représente la position et $V_k = (\cos(\theta_k); \sin(\theta_k))$ la vitesse du point initialement doté du vecteur vitesse $(\cos(\frac{2k\pi}{N}); \sin(\frac{2k\pi}{N}))$. On note a un nombre compris entre 0 et 1 qui représente la distance du point de chute au centre du bol (le cas $a = 0$ fournit évidemment un mouvement périodique de cercles concentriques). On considère alors le schéma itératif suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{initialisation :} \\ M \leftarrow ((-a; 0); \dots; (-a; 0)) \in (\mathbb{R}^2)^N, \\ \text{relation de récurrence :} \\ M \leftarrow M + \delta_t V, \\ \text{pour tout } k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \text{ si } M_k \notin \mathcal{D} \text{ alors } V_k \leftarrow V_k - 2 \frac{M_k \cdot V_k}{\|M_k\|^2} M_k. \end{array} \right.$$

où $U \cdot V$ est le produit scalaire usuel de $(U, V) \in (\mathbb{R}^2)^2$ et $\|U\|$ la norme euclidienne de U . Après n itérations de ce schéma, M représente l'ensemble des positions des particules à l'instant $T = n\delta_t$. Grâce à ce modèle, on constate d'abord qu'après la première réflexion sur le bord, l'onde ne se focalise pas au point opposé du bol comme la perception visuelle semblait l'affirmer (voir Figure 1 au temps $T = 2$). On considère ensuite la quantité

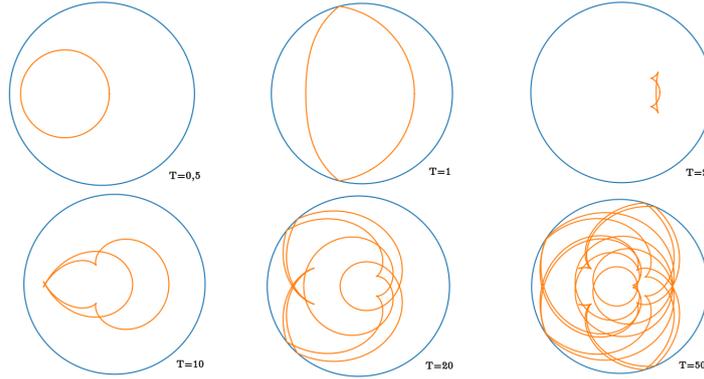


FIGURE 1 – Front d'onde aux temps $T \in \{0.5; 1; 2; 10; 20; 50\}$.

$\mathcal{L}_n = \sum_{k=0}^{N-1} \|M_{k+1} - M_k\|$ comme une approximation numérique de la longueur du front d'onde au temps $n\delta_t$. On observe alors que, lorsque T devient grand, la longueur du front d'onde est équivalente à $C \times T$ et que, d'autre part, C est une constante qui dépend de a de manière croissante (voir Figure 2).

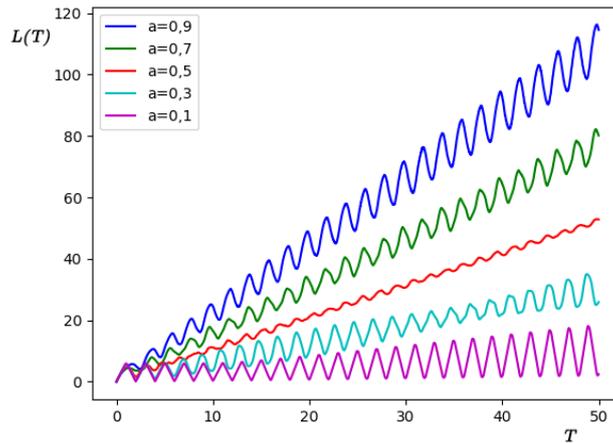


FIGURE 2 – Longueur $\mathcal{L}(T)$ pour différentes valeurs de a

1.2 Énoncé du théorème

Soit \mathcal{D} le disque unité du plan \mathbb{R}^2 et $A \in \mathcal{D}$ un point distinct de $(0, 0)$. Pour tout $\theta \in [0; 2\pi[$, on suppose qu'un point du front d'onde se trouve en A à l'instant $T = 0$ et se déplace avec un vecteur vitesse constant égal à $(\cos(\theta); \sin(\theta))$ jusqu'à ce qu'il se réfléchisse sur $\partial\mathcal{D}$ selon la loi classique : l'angle d'incidence α est égal à l'angle de réflexion. On note $M(\theta, T) \in \mathcal{D}$ la position de ce point à l'instant T . On note $(-a; 0)$, avec $a \in]0; 1[$, les coordonnées du point A . On s'intéresse à la courbe \mathcal{C}_T paramétrée par $\theta \in [0; 2\pi[\mapsto M(\theta, T) \in \mathcal{D}$ et on note $\mathcal{L}(T)$ sa longueur. Le but de cet article est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 1. *On a $\mathcal{L}(T) \sim 2 \arcsin(a)T$ lorsque T tend vers $+\infty$.*

2 Géométrie du problème et ensemble des points de collision

On suppose dans toute la suite que a est un réel fixé dans l'intervalle $]0; 1[$. Par convention, on adoptera la notation C (resp. $C(\delta)$) pour toute constante strictement positive qui ne dépend que des données du problèmes (resp. des données du problème et de la variable δ) et dont la valeur exacte nous est indifférente.

2.1 Géométrie du problème

On commence par extraire de la géométrie du problème (voir Figure 3) les formules qui seront utiles dans la suite de l'analyse.

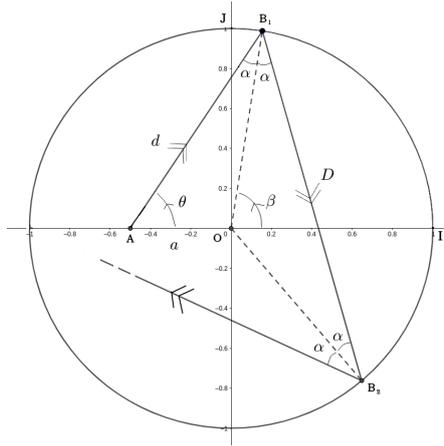


FIGURE 3 – Dynamique d'une particule dans \mathcal{D}

Soit (O, I, J) un repère orthonormé du plan. On remarque que le problème admet une symétrie par rapport à l'axe (O, I) . Il suffira donc de restreindre

notre étude aux particules initialement émises dans la direction du demi-plan supérieur, c'est-à-dire avec un vecteur vitesse égal à $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ avec $\theta \in [0; \pi]$. Pour un point du front d'onde donné, notons $(B_i)_{i \geq 1}$ les points d'impact successifs de ce point avec $\partial\mathcal{D}$. Posons β la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB_1})$ et $d = AB_1$. Comme les triangles OB_iB_{i+1} sont isocèles en O , les angles d'incidences sont tous égaux, notons α une mesure de cet angle en radians dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Les triangles OB_iB_{i+1} sont donc tous isométriques, notons D la longueur commune de leurs bases B_iB_{i+1} . Comme les valeurs de β , d , α et D ne dépendent que du point choisi, on peut les considérer comme des fonctions de θ , avec $\theta \in [0; \pi]$. Déterminons les formules explicites des fonctions α , β , D et d :

i) d'après la formule des sinus dans le triangle AB_1O , on a : $\frac{1}{\sin(\theta)} = \frac{a}{\sin(\alpha(\theta))}$ d'où l'on tire

$$\alpha(\theta) = \arcsin(a \sin(\theta)), \quad (1)$$

ii) dans le triangle OAB_1 , la somme des angles donne :

$$\beta(\theta) = \theta + \alpha(\theta),$$

iii) comme OB_1B_2 est un triangle isocèle en O , on a :

$$D(\theta) = 2 \cos(\alpha(\theta)), \quad (2)$$

iv) d'après la formule des sinus dans le triangle AB_1O , on a : $\frac{d(\theta)}{\sin(\pi - \theta - \alpha(\theta))} = \frac{1}{\sin(\theta)}$ d'où l'on tire

$$d(\theta) = \cos(\alpha(\theta)) + a \cos(\theta).$$

Les fonctions α , β , d et D sont donc toutes des fonctions entières (développables en séries convergentes sur \mathbb{R}). De plus, α , d et D sont π -périodiques et paires, on peut en dresser leurs tableaux de variations (voir Figure 4).

θ	0	$\pi/2$	π
$d(\theta)$	$1 + a$	$\sqrt{1 - a^2}$	$1 - a$
$D(\theta)$	2	$2\sqrt{1 - a^2}$	2

FIGURE 4 – Tableaux de variation de d et D

On pose $I = [0; \pi]$ et, pour tout $\delta > 0$:

$$I_\delta^- = \left] \delta; \frac{\pi}{2} - \delta \right[, \quad I_\delta^+ = \left] \frac{\pi}{2} + \delta; \pi - \delta \right[, \quad I_\delta = I_\delta^- \cup I_\delta^+.$$

Comme D est une fonction entière, D' est continue et d'après le tableau de variation précédent, on a :

$$\begin{cases} \forall \theta \in I_\delta^-, D'(\theta) \leq -C(\delta), \\ \forall \theta \in I_\delta^+, D'(\theta) \geq C(\delta). \end{cases} \quad (3)$$

Pour une particule émise dans la direction $(\cos(\theta); \sin(\theta))$ et un instant $T > 0$ donnés, on introduit une variable entière, qu'on note n qui est égale au nombre de collisions qu'a rencontrées cette particule avec $\partial\mathcal{D}$ depuis son émission, n est donc une fonction de (θ, T) définie sur $I \times \mathbb{R}$ par :

$$n(\theta, T) = \left\lfloor \frac{T - d(\theta)}{D(\theta)} \right\rfloor.$$

Des tableaux de variations précédents, on en déduit, pour tout $(\theta, T) \in I \times \mathbb{R}^+$, l'encadrement suivant : $\left\lfloor \frac{T-1-a}{2} \right\rfloor \leq n(\theta, T) \leq \left\lfloor \frac{T-1+a}{2\sqrt{1-a^2}} \right\rfloor$, c'est-à-dire, avec la convention de notation adoptée ci-dessus :

$$C_1 T \leq n(\theta, T) \leq C_2 T. \quad (4)$$

L'affixe complexe de B_n est donc égale à $e^{i\beta(\theta) - in\pi + 2in\alpha(\theta)}$ et le vecteur vitesse juste après n collisions a pour affixe $e^{i\beta(\theta) - in\pi + 2in\alpha(\theta) + i\pi + i\alpha(\theta)}$. On note S le temps séparant l'instant T de la dernière collision, d'indice n , on a alors :

$$S = T - d - nD. \quad (5)$$

Par définition, quelque soit $\theta \in I$, on a $S(\theta) \leq D(\theta)$ et d'après le tableau (4), on a donc $2\sqrt{1-a^2} \leq S(\theta, T) \leq 2$ c'est-à-dire :

$$C_1 \leq S(\theta, T) \leq C_2 \quad (6)$$

quelque soit $\theta \in I$ et $T > 0$. En omettant les dépendances en θ et T afin de ne pas alourdir la formule, l'affixe complexe de $M(\theta, T)$, notée z , est donc égale à :

$$z = (-1)^n \left(e^{i\beta+2i\alpha} + S e^{i\beta+2i\alpha+i\alpha} \right). \quad (7)$$

2.2 Ensemble des points de collision à temps fixé

On introduit dans cette section un ensemble qui va jouer un rôle crucial notre étude. Pour $T > 0$, on introduit l'ensemble \mathcal{N}_T défini par :

$$\mathcal{N}_T = \left\{ \theta \in I, \frac{T - d(\theta)}{D(\theta)} \in \mathbb{N} \right\}.$$

Cet ensemble représente, pour un temps T donné, l'ensemble des valeurs de θ dans I pour lesquelles la particule, initialement partie à la vitesse $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, touche le bord du domaine $\partial\mathcal{D}$. L'intérêt de cet ensemble dans notre étude est l'observation expérimentale suivante : à un temps T donné, la contribution à la longueur totale du front d'onde n'est pas uniforme par rapport à la direction de départ V_k . Plus précisément, on observe que le vecteur $(\|M_{k+1} - M_k\|)_{k \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket}$ se décompose en plusieurs "pics" et que la position de ceux-ci dépendent des éléments de \mathcal{N}_T (voir Figure 5).

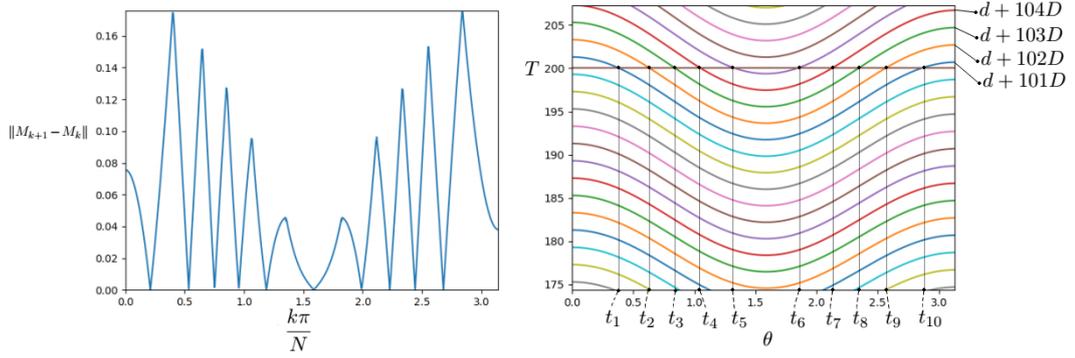


FIGURE 5 – $(\|M_{k+1} - M_k\|)_{k \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket}$ (à gauche) pour $T = 200$ et représentation de l'ensemble $\{t_1; \dots; t_{10}\} = \{\theta \in [0; \pi], \frac{200-d(\theta)}{D(\theta)} \in \mathbb{N}\}$ (à droite).

Le principe de la démonstration du théorème 1 (en section 3) consistera à approcher chacun des "pics" par une ligne polygonale. Pour cela, on fixera un petit $\delta > 0$ et, sur I_δ , on remplacera la courbe de la Figure 5 (à gauche) par une suite de triangles isocèles bien choisis (voir Figure 6). Lorsque T

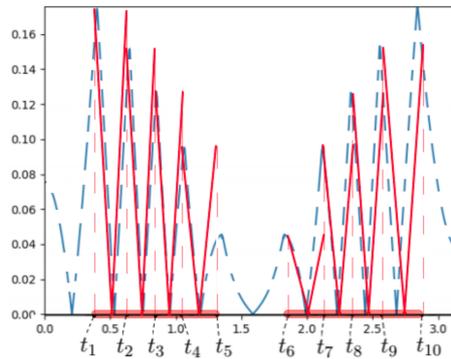


FIGURE 6 – Principe de l'approximation de la courbe sur I_δ (en rouge).

temps vers $+\infty$, la contribution des points du front d'onde en dehors de I_δ peut être rendue arbitrairement petite lorsque δ tend vers 0^+ . Les éléments

de \mathcal{N}_T vont nous permettre de calculer les coordonnées des sommets de ces triangles et, afin de démontrer que cette approximation permet de calculer un équivalent à $\mathcal{L}(T)$ en $+\infty$, on va établir quelques propriétés que vérifie \mathcal{N}_T sur I_δ . Commençons par un fait général.

Proposition 1. *Pour tout $T > 0$, l'ensemble \mathcal{N}_T est fini. On note $N_T = \text{Card}(\mathcal{N}_T)$ et t_1, \dots, t_{N_T} ses éléments rangés dans l'ordre croissant.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $T > 0$ fixés, comme d et D sont des fonctions entières sur \mathbb{R} , alors $(T-d)/D$ l'est aussi et donc l'ensemble $\left\{ \theta \in I, \frac{T-d(\theta)}{D(\theta)} = n \right\}$ est soit fini, soit égal à I tout entier. Or, d'après les tableaux de variation de d et D (Figure 4), les fonctions $T-d$ et D ne peuvent pas être proportionnelles, ceci implique que $\left\{ \theta \in I, \frac{T-d(\theta)}{D(\theta)} = n \right\}$ est fini. Or, d'après l'encadrement (4), il n'y a qu'un nombre fini d'entiers pour lesquels cet ensemble n'est pas vide. On en déduit que \mathcal{N}_T est fini. \square

Les deux propriétés suivantes consistent à établir que \mathcal{N}_T constitue une subdivision sur I_δ dont le pas tend vers 0 et dont on donnera un équivalent exact lorsque T tend vers $+\infty$.

Proposition 2. *Pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $C(\delta) > 0$, telle que, pour tout $k \in \llbracket 0; N_T \rrbracket$, si $]t_k; t_{k+1}[\subset I_\delta$, alors on a :*

$$t_{k+1} - t_k \leq \frac{C(\delta)}{T}. \quad (8)$$

Démonstration. Soit $(u, v) \in I^2$ tels que $u < v$ et $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que $m \leq M$. Supposons qu'on ait l'encadrement suivant

$$m \leq \frac{T-d(v)}{D(v)} - \frac{T-d(u)}{D(u)} \leq M. \quad (9)$$

Comme d et D sont des fonctions entières, il est permis de leur appliquer le théorème des valeurs intermédiaires dans l'intervalle $[u; v]$, il existe donc deux nombres $(\xi, \psi) \in]u; v[^2$ qui vérifient :

$$\begin{cases} D(v) &= D(u) + (v-u)D'(\xi), \\ d(v) &= d(u) + (v-u)d'(\psi). \end{cases}$$

En introduisant ces deux équations dans (9), on obtient les deux inégalités suivantes :

$$mD^2(u) \leq (v-u) \left[-TD'(\xi) - mD'(\xi)D(u) - d'(\psi)D(u) + d(u)D'(\xi) \right], \quad (10)$$

$$MD^2(u) \geq (v-u) \left[-TD'(\xi) - MD'(\xi)D(u) - d'(\psi)D(u) + d(u)D'(\xi) \right]. \quad (11)$$

La fonction $\theta \mapsto \frac{T-d(\theta)}{D(\theta)}$ admettant comme fonction dérivée :

$$\theta \mapsto \frac{-TD'(\theta) - d'(\theta)D(\theta) + d(\theta)D'(\theta)}{D^2(\theta)}$$

et $|D'|$ étant uniformément minoré sur I_δ par une constante strictement positive (3), il existe donc $T_0 > 0$ tel que, dès que $T > T_0$, alors cette dérivée est du même signe que $-D'(\theta)$ pour tout $\theta \in I_\delta$. En outre, la fonction $\theta \mapsto \frac{T-d(\theta)}{D(\theta)}$ est croissante sur I_δ^- et décroissante sur I_δ^+ . De plus, si $]t_k; t_{k+1}[\subset I_\delta^-$, alors $n(t_{k+1}, T) = n(t_k, T) + 1$ et si $]t_k; t_{k+1}[\subset I_\delta^+$, alors $n(t_{k+1}, T) = n(t_k, T) - 1$. On examine alors deux cas.

- 1) Lorsque $]t_k; t_{k+1}[\subset I_\delta^-$, l'encadrement (9) est vrai pour $m = M = 1$, $u = t_k$, $v = t_{k+1}$ et les symboles \leq, \geq sont tous deux des égalités. D'après (11), il existe donc $(\xi_k, \psi_k) \in]t_k; t_{k+1}[^2$ qui vérifient :

$$D^2(t_k) = (t_{k+1} - t_k) [-TD'(\xi_k) - D'(\xi_k)D(t_k) - d'(\psi_k)D(t_k) + d(t_k)D'(\xi_k)].$$

Or, encore d'après (3), il existe un temps, encore noté T_0 tel que, dès que $T > T_0$, le facteur $-TD'(\xi_k) - D'(\xi_k)D(t_k) - d'(\psi_k)D(t_k) + d(t_k)D'(\xi_k)$ ne puisse pas s'annuler. On obtient que si $]t_k; t_{k+1}[\subset I_\delta^-$, alors il existe $(\xi_k, \psi_k) \in]t_k; t_{k+1}[^2$ tels que :

$$t_{k+1} - t_k = \frac{D^2(t_k)}{-TD'(\xi_k) + d(t_k)D'(\xi_k) - D(t_k)D'(\xi_k) - d'(\psi_k)D(t_k)}, \quad (12)$$

- 2) Lorsque $]t_k; t_{k+1}[\subset I_\delta^+$, en posant $m = M = -1$, les mêmes arguments sont valides et conduisent au fait que si $]t_k; t_{k+1}[\subset I_\delta^+$, alors il existe $(\xi_k, \psi_k) \in]t_k; t_{k+1}[^2$ tels que :

$$t_{k+1} - t_k = \frac{-D^2(t_k)}{-TD'(\xi_k) + d(t_k)D'(\xi_k) + D(t_k)D'(\xi_k) - d'(\psi_k)D(t_k)}. \quad (13)$$

Comme D et d sont des fonctions entières, elles sont donc de classe C^1 sur tout I , il existe donc une constante $C(\delta) > 0$ telle que, pour tout $T \geq T_0$, les dénominateurs dans le membre de droite des équations (12) et (13) soient strictement supérieurs à $C(\delta)T$. Comme D est une fonction bornée (voir Figure 4) cela démontre l'assertion (8). □

Proposition 3. *Pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $C(\delta) > 0$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 0; N_T \rrbracket$, on a :*

- a) si $]t_k; t_{k+1}[\subset I_\delta^-$, alors :

$$\left| t_{k+1} - t_k + \frac{D^2(t_k)}{TD'(t_k)} \right| \leq \frac{C(\delta)}{T^2}, \quad (14)$$

b) si $]t_k; t_{k+1}[\subset I_\delta^+$, alors :

$$\left| t_{k+1} - t_k - \frac{D^2(t_k)}{TD'(t_k)} \right| \leq \frac{C(\delta)}{T^2}. \quad (15)$$

Démonstration. Si $]t_k; t_{k+1}[\subset I_\delta^-$, alors on a (12) :

$$t_{k+1} - t_k = \frac{D^2(t_k)}{-TD'(\xi_k) + d(t_k)D'(\xi_k) - D(t_k)D'(\xi_k) - d'(\psi_k)D(t_k)}.$$

En notant $(\star) = d(t_k)D'(\xi_k) - D(t_k)D'(\xi_k) - d'(\psi_k)D(t_k)$, on a :

$$t_{k+1} - t_k = -\frac{D^2(t_k)}{TD'(t_k)} \left(1 + \frac{T[D'(t_k) - D'(\xi_k)] - (\star)}{-TD'(\xi_k) + (\star)} \right).$$

Comme D et d sont des fonctions entières, alors l'inégalité des accroissements finis donne $|D'(t_k) - D'(\xi_k)| \leq C|t_k - \xi_k|$, d'après (8), on en déduit $|D'(t_k) - D'(\xi_k)| \leq C(\delta)/T$ et donc :

$$\left| t_{k+1} - t_k + \frac{D^2(t_k)}{TD'(t_k)} \right| \leq \frac{C(\delta)}{T^2}.$$

Si $]t_k; t_{k+1}[\subset I_\delta^+$, alors on a (13) :

$$t_{k+1} - t_k = \frac{-D^2(t_k)}{-TD'(\xi_k) + d(t_k)D'(\xi_k) - D(t_k)D'(\xi_k) - d'(\psi_k)D(t_k)}$$

En notant $(\star) = d(t_k)D'(\xi_k) - D(t_k)D'(\xi_k) - d'(\psi_k)D(t_k)$, on a :

$$t_{k+1} - t_k = \frac{D^2(t_k)}{TD'(t_k)} \left(1 + \frac{T[D'(t_k) - D'(\xi_k)] - (\star)}{-TD'(\xi_k) + (\star)} \right).$$

Comme D et d sont des fonctions entières, alors l'inégalité des accroissements finis donne $|D'(t_k) - D'(\xi_k)| \leq C|t_k - \xi_k|$, d'après (8), on en déduit $|D'(t_k) - D'(\xi_k)| \leq C(\delta)/T$ et donc :

$$\left| t_{k+1} - t_k - \frac{D^2(t_k)}{TD'(t_k)} \right| \leq \frac{C(\delta)}{T^2}.$$

□

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 1. Pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\text{Card}(\mathcal{N}_T \cap I_\delta) \leq C(\delta)T. \quad (16)$$

Démonstration. Si $]t_k; t_{k+1}[\subset I_\delta$, d'après (14) et (15), on a :

$$t_{k+1} - t_k \geq \frac{C(\delta)}{T},$$

on en déduit $\text{Card}(\mathcal{N}_T \cap I_\delta) \leq C(\delta)T$. □

On termine cette section par un résultat d'approximation.

Proposition 4. *Soit $\delta > 0$ et f une fonction continue définie sur I à valeurs réelles. On a alors :*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{k \in \mathcal{N}_T \cap I_\delta} f(t_k)(t_{k+1} - t_k) = \int_{I_\delta} f(\theta) d\theta.$$

Démonstration. Soit $\delta > 0$ et T fixé. On note k_1 le plus petit indice tel que $t_{k_1} \in]\delta; \frac{\pi}{2} - \delta[$. Comme t_{k_1} est le plus petit des réels θ dans I_δ tel que $(T - d(\theta))/D(\theta) \in \mathbb{N}$, on a donc l'inégalité (9) avec $m = 0$ et $M = 1$. D'après (11), il existe donc $(\psi, \xi) \in (I_\delta)^2$ tels que :

$$D^2(\delta) \geq (t_{k_1} - \delta) [-TD'(\xi) - D'(\xi)D(\delta) - d'(\psi)D(\delta) + d(\delta)D'(\xi)] \quad (17)$$

Or, d'après (3), il existe $\lambda(\delta) > 0$ tel que, pour tout $\theta \in I_\delta^-$, $D'(\theta)$ soit inférieur à $-\lambda$. Il existe donc un temps $T_0 > 0$ tel que, pour tout $T > T_0$, le second facteur du membre de droite dans (17) soit strictement positif. On en déduit alors l'inégalité :

$$t_{k_1} - \delta \leq \frac{D^2(\delta)}{-TD'(\xi) - D'(\xi)D(\delta) - d'(\psi)D(\delta) + d(\delta)D'(\xi)}$$

et donc on a :

$$t_{k_1} - \delta \leq \frac{C(\delta)}{T}.$$

On pose maintenant :

- k_2 le plus grand indice tel que $t_{k_2} \in]\delta; \frac{\pi}{2} - \delta[$,
- k_3 le plus petit indice tel que $t_{k_3} \in]\frac{\pi}{2} + \delta; \pi - \delta[$,
- k_4 le plus grand indice tel que $t_{k_4} \in]\frac{\pi}{2} + \delta; \pi - \delta[$.

En procédant de même que pour k_1 , on peut montrer qu'il existe un temps, encore noté $T_0 > 0$, tel que, pour tout $T \geq T_0$, on ait :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \delta - t_{k_2} &\leq \frac{C(\delta)}{T}, \\ t_{k_3} - \left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) &\leq \frac{C(\delta)}{T}, \\ \pi - \delta - t_{k_4} &\leq \frac{C(\delta)}{T}. \end{aligned}$$

On pose alors :

$$\mathcal{I}_\delta^- = \llbracket k_1; k_2 - 1 \rrbracket, \quad \mathcal{I}_\delta^+ = \llbracket k_3; k_4 - 1 \rrbracket, \quad J_T = \bigcup_{k \in \mathcal{I}_\delta^- \cup \mathcal{I}_\delta^+} [t_k; t_{k+1}].$$

Les quatre inégalités précédentes montrent qu'on a $J_T \subset I_\delta$ et que

$$|I_\delta \setminus J_T| \leq \frac{C(\delta)}{T} \quad (18)$$

où $|I_\delta \setminus J_T|$ est la mesure de Lebesgue de $I_\delta \setminus J_T$. La famille de points $\mathcal{N}_T \cup \{\delta; \frac{\pi}{2} - \delta; \frac{\pi}{2} + \delta; \pi - \delta\}$ forme donc une subdivision de I_δ dont le pas tend vers 0. Si f est une fonction continue sur I , alors elle l'est sur I_δ et la somme de Riemann suivante :

$$\begin{aligned} & f(\delta)(t_{k_1} - \delta) + f(t_{k_2})\left(\frac{\pi}{2} - \delta - t_{k_2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)(t_{k_3} - \left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)) \\ & + f(t_{k_4})(\pi - \delta - t_{k_4}) + \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^+ \cup \mathcal{I}_\delta^-} f(t_k)(t_{k+1} - t_k) \end{aligned}$$

tend vers $\int_{I_\delta} f(\theta)d\theta$ lorsque T tend vers $+\infty$. Comme les quatre premiers termes de la somme précédente tendent vers 0, on en déduit que

$$\sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^+ \cup \mathcal{I}_\delta^-} f(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

tend vers $\int_{I_\delta} f(\theta)d\theta$ lorsque T tend vers $+\infty$. □

3 Démonstration du Théorème 1

3.1 Principe de la preuve

On procède à l'analyse de $\mathcal{L}(T)$ par approximations successives lorsque $T \rightarrow +\infty$. Concrètement, cela va nous conduire à fixer $\varepsilon > 0$, puis à introduire six fonctions $(\mathcal{L}_i)_{i=1\dots 6}$ telles que :

- i) $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{L}(T) - \mathcal{L}_1(T)}{T} = 0,$
- ii) $\limsup_{T \rightarrow +\infty} \left| \frac{\mathcal{L}_1(T) - \mathcal{L}_2(T)}{T} \right| \leq C\varepsilon,$
- iii) $\limsup_{T \rightarrow +\infty} \left| \frac{\mathcal{L}_2(T) - \mathcal{L}_3(T)}{T} \right| \leq C\varepsilon,$
- iv) $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{L}_3(T) - \mathcal{L}_4(T)}{T} = 0,$
- v) $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{L}_4(T) - \mathcal{L}_5(T)}{T} = 0,$
- vi) $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{L}_5(T) - \mathcal{L}_6(T)}{T} = 0,$
- vii) $\limsup_{T \rightarrow +\infty} \left| \frac{\mathcal{L}_6(T) - 2 \arcsin(a)T}{T} \right| \leq C\varepsilon.$

Ces sept conditions sont suffisantes pour démontrer le Théorème 1, en effet on a :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}(T)}{T} - 2 \arcsin(a) &= \frac{\mathcal{L}(T) - \mathcal{L}_1(T)}{T} + \frac{\mathcal{L}_1(T) - \mathcal{L}_2(T)}{T} + \frac{\mathcal{L}_2(T) - \mathcal{L}_3(T)}{T} \\ &+ \frac{\mathcal{L}_3(T) - \mathcal{L}_4(T)}{T} + \frac{\mathcal{L}_4(T) - \mathcal{L}_5(T)}{T} + \frac{\mathcal{L}_5(T) - \mathcal{L}_6(T)}{T} \\ &+ \frac{\mathcal{L}_6(T) - 2 \arcsin(a)T}{T} \end{aligned}$$

En supposant que les sept points précédents sont démontrés, on a :

$$\limsup_{T \rightarrow +\infty} \left| \frac{\mathcal{L}(T)}{T} - 2 \arcsin(a) \right| \leq C\varepsilon,$$

comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que la limite de $\frac{\mathcal{L}(T)}{T}$, lorsque T tend vers l'infini, est égale à $2 \arcsin(a)$, c'est-à-dire $\mathcal{L}(T) \sim 2 \arcsin(a)T$.

3.2 Introduction de $\mathcal{L}_1(T)$ et démonstration de i)

Soit $T > 0$ fixé. On remarque d'abord que la courbe \mathcal{C}_T admet comme axe de symétrie l'axe des abscisses et qu'alors sa longueur est égale au double de la longueur de la courbe paramétrée par $\theta \in I \mapsto M(\theta, T)$. Soit t_1, \dots, t_{N_T} les éléments de \mathcal{N}_T rangés dans l'ordre croissant. On pose $t_0 = 0$ et $t_{N_T+1} = \pi$. Ainsi, la fonction $\theta \mapsto n(\theta, T)$ est constante sur tous les intervalles $]t_k; t_{k+1}[$. D'après (7), l'affixe du point $M(\theta, T)$ est donnée par :

$$z(\theta, T) = (-1)^{n(\theta, T)} e^{i\beta(\theta) + 2in(\theta, T)\alpha(\theta)} \left(1 + (T - d(\theta) - n(\theta, T)D(\theta))e^{i\alpha(\theta)} \right).$$

donc la courbe paramétrée par $\theta \mapsto z(\theta, T)$ est continue et dérivable sur $I \setminus \{t_1, \dots, t_{N_T}\}$. La longueur $\mathcal{L}(T)$ de \mathcal{C}_T est donc égale à :

$$\mathcal{L}(T) = 2 \sum_{k=0}^{N_T} \int_{\theta=t_k}^{t_{k+1}} \left| \frac{\partial z}{\partial \theta}(\theta, T) \right| d\theta.$$

En notant n_k la valeur de n sur l'intervalle $]t_k; t_{k+1}[$, on a :

$$\mathcal{L}(T) = 2 \sum_{k=0}^{N_T} \int_{\theta=t_k}^{t_{k+1}} |n_k z_1 + z_2| d\theta$$

avec

$$z_1 = 2i\alpha' e^{i\beta} e^{2in_k\alpha} + D' e^{i\beta} e^{2in_k\alpha} e^{i\alpha} - 2i\alpha' S e^{i\beta} e^{2in_k\alpha} e^{i\alpha}, \quad (19)$$

$$z_2 = i\beta' e^{i\beta} e^{2in_k\alpha} + d' e^{i\beta} e^{2in_k\alpha} e^{i\alpha} - i\beta' S e^{i\beta} e^{2in_k\alpha} e^{i\alpha} - i\alpha' S e^{i\beta} e^{2in_k\alpha} e^{i\alpha}. \quad (20)$$

Comme β, α, d sont des fonctions entières, leurs dérivées sont uniformément bornées par rapport à θ . D'autre part, S est uniformément bornée par rapport à θ, k, T (6). En appliquant l'inégalité triangulaire à (19) et à (20), on

en déduit qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de θ, k et T telle que :

$$|z_1| \leq C, \quad |z_2| \leq C. \quad (21)$$

Posons

$$\mathcal{L}_1(T) = 2 \sum_{k=0}^{N_T} \int_{\theta=t_k}^{t_{k+1}} |n_k z_1| d\theta$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$|\mathcal{L}(T) - \mathcal{L}_1(T)| \leq 2 \sum_{k=0}^{N_T} \int_{\theta=t_k}^{t_{k+1}} |z_2| d\theta.$$

D'après (21), on a :

$$\frac{|\mathcal{L}(T) - \mathcal{L}_1(T)|}{T} \leq \frac{2}{T} \sum_{k=0}^{N_T+1} \int_{\theta=t_k}^{t_{k+1}} C d\theta \leq \frac{C}{T}$$

d'où l'on tire **i**).

3.3 Introduction de $\mathcal{L}_2(T)$ et démonstration de **ii**)

On fixe un réel $\varepsilon > 0$. Comme α' et z_1 sont des fonctions intégrables et bornées sur I , il existe $\delta > 0$ tel que, quelque soit le temps $T > 0$, on ait :

$$\int_{I \setminus I_\delta} |z_1| d\theta \leq \varepsilon \quad (22)$$

$$\int_{I \setminus I_\delta} |\alpha'| d\theta \leq \varepsilon. \quad (23)$$

On pose :

$$\mathcal{L}_2(T) = 2 \sum_{k=0}^{N_T} n_k \int_{[t_k; t_{k+1}] \cap I_\delta} |z_1| d\theta.$$

On a donc

$$\mathcal{L}_1(T) - \mathcal{L}_2(T) = 2 \sum_{k=0}^{N_T} n_k \int_{[t_k; t_{k+1}] \cap (I \setminus I_\delta)} |z_1| d\theta.$$

D'après (4) et (22), on tire :

$$|\mathcal{L}_1(T) - \mathcal{L}_2(T)| \leq CT\varepsilon$$

ce qui démontre **ii**).

On va simplifier l'écriture de z_1 . D'après (19), on a :

$$\begin{aligned}
|z_1|^2 &= |2i\alpha' + D'e^{i\alpha} - 2i\alpha'Se^{i\alpha}|^2, \\
&= (D'\cos(\alpha) + 2\alpha'S\sin(\alpha))^2 + (2\alpha' + D'\sin(\alpha) - 2\alpha'S\cos(\alpha))^2, \\
&= D^2 + 4\alpha'^2S^2 + 4\alpha'^2 + 4\alpha'D'\sin(\alpha) - 8\alpha'^2S\cos(\alpha), \\
&= (D' + 2\alpha'\sin(\alpha))^2 - 4\alpha'^2\sin^2(\alpha) + 4\alpha'^2S^2 + 4\alpha'^2 - 8\alpha'^2S\cos(\alpha).
\end{aligned}$$

D'après (2), on a : $D = 2\cos(\alpha)$ donc $D' + 2\alpha'\sin(\alpha) = 0$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
|z_1|^2 &= -4\alpha'^2\sin^2(\alpha) + 4\alpha'^2S^2 + 4\alpha'^2 - 8\alpha'^2S\cos(\alpha), \\
&= 4\alpha'^2(-\sin^2(\alpha) + S^2 + 1 - 2S\cos(\alpha)), \\
&= 4\alpha'^2(S - \cos(\alpha))^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a l'écriture simplifiée de \mathcal{L}_2 suivante :

$$\mathcal{L}_2(T) = 4 \sum_{k=0}^{N_T-1} n_k \int_{\theta \in [t_k; t_{k+1}] \cap I_\delta} |\alpha'| |S - \cos(\alpha)| d\theta.$$

3.4 Introduction de $\mathcal{L}_3(T)$ et démonstration de iii)

Pour tout $T \geq T_0$, on pose :

$$\mathcal{L}_3(T) = 4 \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^- \cup \mathcal{I}_\delta^+} n_k \int_{\theta=t_k}^{t_{k+1}} |\alpha'| |S - \cos(\alpha)| d\theta.$$

De (4), (18) et (21), on tire :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_2(T) - \mathcal{L}_3(T)| &\leq 4 \sum_{k=0}^{N_T} n_k \int_{[t_k; t_{k+1}] \cap (I \setminus I_\delta)} |z_1| d\theta, \\
&\leq C(\delta),
\end{aligned}$$

ce qui démontre *iii*).

3.5 Introduction de $\mathcal{L}_4(T)$ et démonstration de iv)

On pose

$$\mathcal{L}_4(T) = 4 \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^- \cup \mathcal{I}_\delta^+} n_k \int_{\theta=t_k}^{t_{k+1}} |\alpha'(t_k)| |S - \cos(\alpha(t_k))| d\theta.$$

D'après l'inégalité triangulaire, quelque soit k , on a :

$$\begin{aligned}
&| |\alpha'| \times |S - \cos(\alpha)| - |\alpha'(t_k)| \times |S - \cos(\alpha(t_k))| | \\
&\leq | \alpha'(t_k) - \alpha' | \times |S - \cos(\alpha(t_k))| + | \alpha' | \times | \cos(\alpha) - \cos(\alpha(t_k)) |.
\end{aligned}$$

Comme α est une fonction entière elle est donc en particulier de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et il existe donc une constante C , indépendante de T , telle que :

$$\begin{aligned} |\alpha'(t_k) - \alpha'(\theta)| &\leq C|\theta - t_k|, & |\cos(\alpha(\theta)) - \cos(\alpha(t_k))| &\leq C|\theta - t_k|, \\ |\alpha'(\theta)| &\leq C, & |S(\theta) - \cos(\alpha(t_k))| &\leq 2 \end{aligned}$$

pour tout k et tout $\theta \in I$. D'après (6), on en déduit :

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_3(T) - \mathcal{L}_4(T)| &\leq C \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^- \cup \mathcal{I}_\delta^+} n_k \int_{\theta=t_k}^{t_{k+1}} |\theta - t_k| d\theta, \\ &\leq C \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^- \cup \mathcal{I}_\delta^+} n_k (t_{k+1} - t_k)^2. \end{aligned}$$

De (4), on tire :

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_3(T) - \mathcal{L}_4(T)| &\leq CT \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^- \cup \mathcal{I}_\delta^+} (t_{k+1} - t_k)^2, \\ &\leq CT \max_{k \in \mathcal{I}_\delta^- \cup \mathcal{I}_\delta^+} (t_{k+1} - t_k). \end{aligned}$$

D'après (8), on en déduit alors que $\frac{\mathcal{L}_3(T) - \mathcal{L}_4(T)}{T}$ tend vers 0 lorsque T tend vers $+\infty$.

3.6 Introduction de $\mathcal{L}_5(T)$ et démonstration de v)

Sur chacun des intervalles $]t_k; t_{k+1}[$, on remplace S par une approximation affine, plus précisément, on pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5(T) &= 4 \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^-} n_k |\alpha'(t_k)| \int_{\theta=t_k}^{t_{k+1}} | -n_k D'(t_k)(\theta - t_k) - \cos(\alpha(t_k)) | d\theta \\ &\quad + 4 \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^+} n_k |\alpha'(t_k)| \int_{\theta=t_k}^{t_{k+1}} | n_k D'(t_k)(\theta - t_k) - \cos(\alpha(t_k)) | d\theta. \end{aligned}$$

Supposons d'abord que $k \in \mathcal{I}_\delta^-$. Comme, pour tout $\theta \in]t_k; t_{k+1}[$, on a : $S'(\theta) = -n_k D'(\theta) - d'(\theta)$, $D'(\theta)$ est uniformément majorée par une constante strictement négative (3) et enfin n_k est minorée par $C_1 T$ (4), alors il existe un temps T_0 tel que, si $T \geq T_0$, alors S' est strictement positive sur $]t_k; t_{k+1}[$. En outre S sera strictement croissante sur $]t_k; t_{k+1}[$ et par définition de S et de t_k , on en déduit : $S(t_k^+) = 0$. En appliquant le théorème de Taylor-Lagrange à S sur $]t_k; t_{k+1}[$, pour tout $\theta \in]t_k; t_{k+1}[$, il existe $\bar{t}_k \in]t_k; t_{k+1}[$ tel qu'on ait :

$$S(\theta) - (-n_k D'(t_k) - d'(t_k))(\theta - t_k) = \frac{(\theta - t_k)^2}{2} (-n_k D''(\bar{t}_k) - d''(\bar{t}_k)).$$

D'après (4), il existe donc une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\theta \in]t_k; t_{k+1}[$, on ait :

$$|S(\theta) - (-n_k D'(t_k) - d'(t_k))(\theta - t_k)| \leq CT(\theta - t_k)^2.$$

Pour tout $\theta \in]t_k; t_{k+1}[$, on a alors :

$$\begin{aligned} & ||S(\theta) - \cos(\alpha(t_k))| - | -n_k D'(t_k)(\theta - t_k) - \cos(\alpha(t_k))|| \\ & \leq |S(\theta) - (-n_k D'(t_k) - d'(t_k))(\theta - t_k)| + |d'(t_k)|(\theta - t_k), \quad (24) \\ & \leq CT(\theta - t_k)^2 + C(\theta - t_k). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $k \in \mathcal{I}_\delta^+$. Comme, pour tout $\theta \in]t_k; t_{k+1}[$, on a : $S'(\theta) = -n_k D'(\theta) - d'(\theta)$, d'autre part $D'(\theta)$ est uniformément minorée par une constante strictement positive (3) et enfin n_k est minorée par $C_1 T$ (4), il existe donc un temps, encore noté T_0 , tel que, si $T \geq T_0$, alors S' est strictement négative sur $]t_k; t_{k+1}[$. Ainsi S sera strictement décroissante sur $]t_k; t_{k+1}[$ et encore par définition de S et de t_k , on en déduit : $S(t_k^+) = D(t_k)$. En appliquant le théorème de Taylor-Lagrange à S sur $]t_k; t_{k+1}[$, pour tout $\theta \in]t_k; t_{k+1}[$, il existe $\bar{t}_k \in]t_k; t_{k+1}[$ tel qu'on ait :

$$S(\theta) - [D(t_k) + (-n_k D'(t_k) - d'(t_k))(\theta - t_k)] = \frac{(\theta - t_k)^2}{2} (-n_k D''(\bar{t}_k) - d''(\bar{t}_k)).$$

D'après (4), il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\theta \in]t_k; t_{k+1}[$, on ait :

$$|S(\theta) - [D(t_k) + (-n_k D'(t_k) - d'(t_k))(\theta - t_k)]| \leq CT(\theta - t_k)^2.$$

Comme $D(t_k) = 2 \cos(\alpha(t_k))$ (2), l'inégalité précédente devient :

$$|S(\theta) - 2 \cos(\alpha(t_k)) + (n_k D'(t_k) + d'(t_k))(\theta - t_k)| \leq CT(\theta - t_k)^2.$$

Pour tout $\theta \in]t_k; t_{k+1}[$, on a alors :

$$\begin{aligned} & ||S(\theta) - \cos(\alpha(t_k))| - |n_k D'(t_k)(\theta - t_k) - \cos(\alpha(t_k))|| \\ & \leq |S(\theta) - 2 \cos(\alpha(t_k)) + n_k D'(t_k)(\theta - t_k)|, \\ & \leq |S(\theta) - 2 \cos(\alpha(t_k)) + (n_k D'(t_k) + d'(t_k))(\theta - t_k)| + |d'(t_k)|(\theta - t_k), \\ & \leq CT(\theta - t_k)^2 + C(\theta - t_k). \end{aligned} \quad (25)$$

De (24) et (25), on tire

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_4(T) - \mathcal{L}_5(T)| & \leq \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^- \cup \mathcal{I}_\delta^+} n_k \int_{\theta=t_k}^{t_{k+1}} [CT(\theta - t_k)^2 + C(\theta - t_k)] d\theta, \\ & \leq C \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^- \cup \mathcal{I}_\delta^+} n_k [T(t_{k+1} - t_k)^3 + (t_{k+1} - t_k)^2]. \end{aligned}$$

De (4) et (8), on en déduit :

$$|\mathcal{L}_4(T) - \mathcal{L}_5(T)| \leq \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^- \cup \mathcal{I}_\delta^+} C(t_{k+1} - t_k) \leq C,$$

d'où $\frac{|\mathcal{L}_4(T) - \mathcal{L}_5(T)|}{T}$ tend vers 0 lorsque T tend vers $+\infty$.

3.7 Introduction de $\mathcal{L}_6(T)$ et démonstration de vi) et vii)

On pose

$$s_{k+1} = \begin{cases} t_k - \frac{D(t_k)}{n_k D'(t_k)} & \text{si } k \in \mathcal{I}_\delta^-, \\ t_k + \frac{D(t_k)}{n_k D'(t_k)} & \text{si } k \in \mathcal{I}_\delta^+ \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6(T) &= 4 \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^-} n_k |\alpha'(t_k)| \int_{\theta=t_k}^{s_{k+1}} | -n_k D'(t_k)(\theta - t_k) - \cos(\alpha(t_k)) | d\theta \\ &\quad + 4 \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^+} n_k |\alpha'(t_k)| \int_{\theta=t_k}^{s_{k+1}} | n_k D'(t_k)(\theta - t_k) - \cos(\alpha(t_k)) | d\theta. \end{aligned} \tag{26}$$

D'après (8) et comme $n_k = (T - d(t_k))/D(t_k)$, si $k \in \mathcal{I}_\delta^-$, on a :

$$\begin{aligned} |t_{k+1} - s_{k+1}| &\leq \left| t_{k+1} - t_k + \frac{D^2(t_k)}{T D'(t_k)} \right| + \left| -\frac{D^2(t_k)}{T D'(t_k)} + \frac{D(t_k)}{n_k D'(t_k)} \right|, \\ &\leq \frac{C(\delta)}{T^2} + C(\delta) \left| \frac{D(t_k)}{T} - \frac{1}{n_k} \right|, \\ &\leq \frac{C(\delta)}{T^2} + C(\delta) \left| \frac{1}{T} - \frac{1}{T - d(t_k)} \right|, \\ &\leq \frac{C(\delta)}{T^2}. \end{aligned}$$

Pour $k \in \mathcal{I}_\delta^-$, on procède à l'identique, quelquesoit $k \in \mathcal{I}_\delta$, on obtient alors :

$$|t_{k+1} - s_{k+1}| \leq \frac{C(\delta)}{T^2}. \tag{27}$$

Pour tout $k \in \mathcal{I}_\delta^- \cup \mathcal{I}_\delta^+$ et $\theta \in]s_{k+1}; t_{k+1}[$, d'après (4) et (8), on a :

$$\begin{aligned} | -n_k D'(t_k)(\theta - t_k) - \cos(\alpha(t_k)) | &\leq C n_k \max\{|s_{k+1} - t_k|, |t_{k+1} - t_k|\}, \\ &\leq C(\delta). \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_6(T) - \mathcal{L}_5(T)| &\leq C \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^- \cup \mathcal{I}_\delta^+} n_k \int_{\theta \in]s_{k+1}; t_{k+1}[} | -n_k D'(t_k)(\theta - t_k) - \cos(\alpha(t_k)) | d\theta, \\ &\leq \frac{C(\delta)}{T^2} \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^- \cup \mathcal{I}_\delta^+} n_k. \end{aligned}$$

D'après (4) et (16), on a alors

$$|\mathcal{L}_6(T) - \mathcal{L}_5(T)| \leq C(\delta),$$

d'où l'on déduit

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{|\mathcal{L}_6(T) - \mathcal{L}_5(T)|}{T} = 0.$$

Pour $k \in \mathcal{I}_\delta^-$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\theta=t_k}^{s_{k+1}} |-n_k D'(t_k)(\theta - t_k) - \cos(\alpha(t_k))| d\theta &= \int_{u=0}^{D(t_k)} \frac{|u - \cos(\alpha(t_k))|}{-n_k D'(t_k)} du, \\ &= - \int_{u=0}^{2 \cos(\alpha(t_k))} \frac{|u - \cos(\alpha(t_k))|}{n_k D'(t_k)} du, \\ &= \frac{\cos^2(\alpha(t_k))}{n_k D'(t_k)} \end{aligned}$$

et pour $k \in \mathcal{I}_\delta^+$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\theta=t_k}^{s_{k+1}} |-n_k D'(t_k)(\theta - t_k) + \cos(\alpha(t_k))| d\theta &= \int_{u=0}^{D(t_k)} \frac{|u - \cos(\alpha(t_k))|}{n_k D'(t_k)} du, \\ &= \int_{u=0}^{2 \cos(\alpha(t_k))} \frac{|u - \cos(\alpha(t_k))|}{n_k D'(t_k)} du, \\ &= \frac{\cos^2(\alpha(t_k))}{n_k D'(t_k)}. \end{aligned}$$

En introduisant ces deux dernières équations dans (26), on tire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6(T) &= -4 \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^-} |\alpha'(t_k)| \frac{\cos^2(\alpha(t_k))}{D'(t_k)} + 4 \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^+} |\alpha'(t_k)| \frac{\cos^2(\alpha(t_k))}{D'(t_k)}, \\ &= - \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^-} |\alpha'(t_k)| \frac{D^2(t_k)}{D'(t_k)} + \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^+} |\alpha'(t_k)| \frac{D^2(t_k)}{D'(t_k)}. \end{aligned}$$

D'après (14) et (15), on a :

$$\left| \mathcal{L}_6(T) - T \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^- \cup \mathcal{I}_\delta^+} |\alpha'(t_k)|(t_{k+1} - t_k) \right| \leq \frac{C(\delta)}{T} \text{Card}(\mathcal{N}_T \cap I_\delta) \leq C(\delta).$$

Ce qui démontre qu'on a :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{L}_6(T) - T \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^- \cup \mathcal{I}_\delta^+} |\alpha'(t_k)|(t_{k+1} - t_k)}{T} = 0.$$

Or $|\alpha'|$ est une fonction continue, donc, d'après la Proposition 4, on a :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{k \in \mathcal{I}_\delta^- \cup \mathcal{I}_\delta^+} |\alpha'(t_k)|(t_{k+1} - t_k) = \int_{I_\delta} |\alpha'(\theta)| d\theta.$$

Or, d'après (1) et (23), on a :

$$\left| \int_I |\alpha'| d\theta - \int_{I_\delta} |\alpha'| d\theta \right| \leq \varepsilon,$$
$$\left| 2 \arcsin(a) - \int_{I_\delta} |\alpha'| d\theta \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre vii) et clôt la preuve du Théorème 1.