



**HAL**  
open science

# Champs Acoustiques Élémentaires

Adrien Pelat

► **To cite this version:**

| Adrien Pelat. Champs Acoustiques Élémentaires. École d'ingénieur. France. 2020. hal-02538652

**HAL Id: hal-02538652**

**<https://hal.science/hal-02538652>**

Submitted on 9 Apr 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Champs Acoustiques Élémentaires

## Éléments de cours & brevets

---

ENSIM, École Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans  
Spécialité VAC, Vibrations-Acoustique-Capteurs  
Université du Maine, Le Mans, France  
Année 2019/2020

---

**Adrien Pelat**



**ENSIM**  
École d'ingénieurs  
Le Mans Université





# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Préambule</b>	<b>1</b>
1.1	Objectifs du cours . . . . .	1
1.2	Pédagogie employée . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Les variables et les hypothèses</b>	<b>3</b>
2.1	Grandeurs caractéristiques . . . . .	3
2.2	Hypothèses du cours . . . . .	4
<b>3</b>	<b>L'équation des ondes et ses solutions 1D</b>	<b>5</b>
3.1	Les équations fondamentales . . . . .	5
3.1.1	Équation de conservation de la quantité de mouvement . . . . .	5
3.1.2	Équation de conservation de la masse . . . . .	6
3.1.3	Équation d'état du fluide . . . . .	6
3.2	Écriture de l'équation des ondes . . . . .	7
3.2.1	Équation des ondes 1D hors des sources . . . . .	7
3.2.2	Équation des ondes 1D en présence de sources . . . . .	7
3.2.3	Généralisation à 3 dimensions . . . . .	8
3.3	Solution dans le domaine temporel . . . . .	9
3.3.1	L'onde plane progressive . . . . .	9
3.3.1.1	Solution pour la pression . . . . .	9
3.3.1.2	Solution pour la vitesse . . . . .	10
3.3.2	Impédance acoustique . . . . .	10
3.3.3	Cas particulier de l'onde monochromatique . . . . .	11
3.4	Solution dans le domaine fréquentiel . . . . .	11
3.4.1	Notation exponentielle pour le régime harmonique . . . . .	11
3.4.2	Équation de Helmholtz . . . . .	11
3.4.3	Solution en pression et vitesse . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Réflexion/Transmission des ondes planes</b>	<b>13</b>
4.1	Réflexion à une paroi . . . . .	13
4.1.1	Notion de condition limite . . . . .	13
4.1.1.1	Impédance et coefficient de réflexion . . . . .	13
4.1.1.2	Deux cas simples de condition limite . . . . .	14
4.1.2	Onde stationnaire (réflexion totale) . . . . .	15
4.1.3	Onde quasi-stationnaire (réflexion partielle) . . . . .	17
4.1.4	Application : le tube à ondes stationnaires . . . . .	18
4.2	Réflexion et transmission à l'interface de deux milieux . . . . .	19
4.2.1	Coefficients de réflexion et de transmission . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Les sources acoustiques élémentaires</b>	<b>23</b>
5.1	L'onde sphérique . . . . .	23
5.2	Monopôle acoustique . . . . .	24
5.3	Dipôle acoustique . . . . .	25

<b>6</b>	<b>Intensité et puissance acoustique</b>	<b>27</b>
6.1	Intensité acoustique . . . . .	27
6.1.1	Définition . . . . .	27
6.1.2	Applications . . . . .	27
6.1.2.1	Onde plane progressive . . . . .	27
6.1.2.2	Onde plane stationnaire . . . . .	28
6.1.2.3	Onde plane quasi-stationnaire . . . . .	28
6.1.2.4	Onde sphérique monopolaire . . . . .	28
6.2	Puissance acoustique . . . . .	28
<b>7</b>	<b>Annexes</b>	<b>31</b>
7.1	Les décibels en acoustique : dB SPL, dB(A), dB(B), dB(C) . . . . .	31
7.2	Les bandes de fréquence . . . . .	32
7.3	L'opérateur Nabla $\nabla$ et ses combinaisons . . . . .	33
<b>8</b>	<b>Brevets : Sujets</b>	<b>35</b>
<b>9</b>	<b>Brevets : Résultats</b>	<b>43</b>

# Chap. 1

---

## Préambule

---

### 1.1 Objectifs du cours

Ce cours intitulé *Champs Acoustiques Élémentaires* est une introduction à l'acoustique physique. L'objectif général de ce cours est de construire un socle de connaissances élémentaires en acoustique. En fonction de vos futurs choix de parcours d'étude ou d'orientation professionnelle, ce socle constituera votre culture générale en acoustique ou vous permettra d'accéder à des connaissances plus avancées en acoustique.

Cet objectif général se traduit par les aspects suivants :

- **Découvrir et bien appréhender** les notions, définitions, ordres de grandeur et hypothèses physiques de base en acoustique
- **Savoir manipuler le formalisme mathématique** élémentaire de l'acoustique
- **Comprendre les phénomènes** acoustiques les plus simples

### 1.2 Pédagogie employée

Ce document de cours est conçu pour être utilisé selon les pratiques pédagogiques dites "CRAIE" (Coopérons à un Rythme d'Apprentissage Individuel et Efficace). Les séances de travail seront

Une séquence est constituée de 4 phases :

- **Lecture silencieuse du document de cours** : pendant cette phase, chacun lit individuellement et en silence le document à partir de l'endroit auquel il s'est arrêté à la séance précédente. Au cours de cette phase de lecture, tous les points pas ou mal compris doivent être relevés et annotés sur le document. cette phase de lecture dure approximativement 10 à 15 minutes.
- **questions-réponses à l'enseignant** : chaque étudiant est sollicité pour savoir s'il a une question sur ce qu'il vient de lire, il pose la question à voix haute en précisant, le thème, la page du photocopié, le paragraphe, et l'enseignant répond à toute la classe. Cette phase dure autant de temps qu'il est nécessaire de façon à épuiser les questions de chacun.
- **passages de brevets** : les étudiants regroupés par pôle de 4 font les exercices dont seul le résultat mais pas la démarche de résolution est donné. L'ensemble du document de cours est jalonné de brevets de telle sorte que les brevets permettent de vérifier la bonne assimilation des connaissances découvertes par la lecture. Les étudiants, du fait de leurs rythmes différents, peuvent ne pas faire le même brevet. En cas de difficulté pour obtenir le résultat, un étudiant peut faire appel à l'étudiant référent de cet exercice (l'un de ceux qui l'a obtenu auparavant), ou à l'enseignant si aucun référent n'a encore été assigné. Cet appel se fait à l'aide du tétraaïde disposé sur la table.
- **progression** : les deux dernières minutes d'une séquence sont utilisées pour compléter le tableau de progression individuel ci dessous en biffant, les pages du photocopié de cours lues et les brevets obtenus.

Le tableau ci dessous vous indique le rythme de progression nominal réparti sur 8 séances de travail encadrées par un enseignant. Vous pouvez compléter ce tableau en notant votre propre progression. En fonction des écarts entre votre progression et la progression nominale, il vous appartient d'organiser entre vous des séances de travail sur votre temps personnel de façon à avoir étudié l'ensemble du cours pour l'évaluation.

séances encadrées	1	2	3	4	5	6	7	8
pages lues (nominal)	01 à 06	7 à 9	10 à 11	12 à 15	16 à 18	18 à 19	20 à 23	25 à 27
pages lues								
brevets obtenus (nominal)	01 à 02	03 à 05	06 à 07	08 à 09	10 à 12	13 à 15	16	17
brevets obtenus								

# Chap. 2

## Les variables et les hypothèses

Ce chapitre définit les grandeurs et variables utiles pour décrire les champs acoustiques. Ces champs s'établissent au sein d'un milieu physique dans lequel les ondes trouvent un support matériel indispensable à leur propagation. En effet, les ondes acoustiques sont des variations locales de ce milieu se propageant dans l'espace et au cours du temps. Il est donc impossible que des ondes acoustiques existent en l'absence de ce milieu matériel, c'est à dire dans le vide.

Dans le cadre de ce cours, seules les ondes acoustiques dans un milieu fluide (liquide ou gaz) sont étudiées. Dans un tel milieu fluide, les ondes acoustiques sont scalaires (non polarisées) ce qui est une des principales différences avec les ondes acoustiques dans les solides.

### 2.1 Grandeurs caractéristiques

Dans les deux paragraphes qui suivent, les grandeurs descriptives du milieu de propagation, d'une part, et du champ acoustique, d'autre part, sont précisées.

L'état d'un volume de fluide peut être décrit au moyen de quelques grandeurs liées entre elles :

- la pression, notée  $P$ , grandeur scalaire homogène à des Pascal [ $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$ ],
- la masse volumique, notée  $\rho$ , grandeur scalaire homogène à [ $\text{kg.m}^{-3}$ ],
- la vitesse, notée  $v$ , grandeur vectorielle homogène à [ $\text{m.s}^{-1}$ ],
- la température, notée  $T$ , grandeur scalaire homogène à [ $\text{K}$ ].

Les ondes acoustiques sont des variations de pression du fluide qui occasionnent des variations des autres grandeurs physiques, ainsi lorsqu'une onde acoustique traverse un volume de fluide, toutes ces grandeurs sont fluctuantes et peuvent s'écrire comme la somme d'un terme au repos et d'un terme associé à l'onde acoustique.

La pression totale  $P_T$  du volume de fluide s'écrit alors

$$P_T(x, t) = P_0 + p(x, t), \quad (2.1)$$

avec  $P_0$  la pression du fluide au repos supposée constante et  $p(x, t)$  les fluctuations de pression autour de  $P_0$  occasionnées par l'onde acoustique. Ces fluctuations  $p(x, t)$  sont à valeur moyenne nulle (dans l'espace et au cours du temps) et sont appelées *pression acoustique*. Pour tenir compte des aspects perceptifs de l'oreille humaine et pour mieux représenter les très grandes dynamiques possibles de pression acoustique, une unité logarithmique - le dB - est très couramment utilisée. L'annexe 7.1 donne les définitions de dB les plus usuelles en acoustique.

La masse volumique totale s'écrit

$$\rho_T(x, t) = \rho_0 + \rho(x, t), \quad (2.2)$$

avec  $\rho_0$  la masse volumique du fluide au repos supposée constante et  $\rho(x, t)$  les fluctuations (également à valeur moyenne nulle) de masse volumique occasionnées par l'onde acoustique.

La vitesse totale s'écrit

$$\tilde{v}_T(x, t) = \tilde{v}_0 + \tilde{v}(x, t), \quad (2.3)$$



avec  $\tilde{v}_0$  la vitesse de l'écoulement moyen du volume de fluide et  $\tilde{v}(x, t)$  les fluctuations (également à valeur moyenne nulle) de vitesse des particules fluide autour de  $v_0$ . Ces fluctuations sont appelées *vitesse particulière* ou *vitesse acoustique*.

Les fluctuations de température sont la plupart du temps inexploitable pour décrire les champs acoustiques, sauf pour certaines applications de l'acoustique non présentées dans ce cours. La température et ses variations (appelées la *température acoustique*) ne seront donc pas utilisées par la suite.

## 2.2 Hypothèses du cours

Un jeu d'hypothèses physiques générales doivent être à présent associées à ces variables de façon à cadrer les domaines de validité des équations de l'acoustique définies au chapitre 3.

Hypothèse de fluide au repos : en dehors de la présence d'ondes acoustiques, le fluide est considéré au repos. Cela veut dire que les particules fluides sont totalement inanimées. En particulier, l'écoulement est négligé ( $\tilde{v}_0 = 0$ ).

Hypothèse de fluide non visqueux : la viscosité du fluide est négligée de telle sorte qu'aucune dissipation de l'énergie acoustique sous forme de chaleur n'est occasionnée par frottement visqueux.

Hypothèse de fluide sans conductivité thermique : le fluide est supposé parfaitement isolant, il ne conduit pas chaleur, sa conductivité thermique est donc supposée nulle (sa résistance thermique infinie).

Hypothèse de linéarité : les fluctuations des grandeurs caractéristiques du fluide sont petites devant leur valeur moyenne. Cela implique en particulier que  $p(x, t) \ll p_0$  et  $\rho(x, t) \ll \rho_0$ . Pour la vitesse, il peut être montré que l'hypothèse de linéarité revient à écrire que  $v(x, t) \ll c$ , avec  $c$  la célérité des ondes acoustiques dans le milieu.

Hypothèse de transformations adiabatiques : les mouvements de compression/détente d'une particule fluide au passage d'une onde acoustique n'occasionnent aucun échange de chaleur dans le fluide. En effet, même à basse fréquence, ces mouvements sont trop rapides pour que de tels échanges s'établissent entre particules fluides. Cette hypothèse permet à la section 3.1.3 d'écrire une des trois équations fondamentales de l'acoustique.

Si ces hypothèses sont très couramment retenues, il est très important de retenir qu'elles ne sont pas satisfaites dans toutes les situations physiques. L'équation des ondes, telle qu'obtenue au chapitre 3, ne peut donc plus décrire avec réalisme ces situations, et doit donc être réécrite sans les simplifications induites par ces hypothèses. C'est notamment le cas de l'aéroacoustique qui vise à étudier les phénomènes acoustique en présence d'écoulements non négligeables.

✓ **Tester ses connaissances en résolvant les brevets** : 01 et 02

# Chap. 3

## L'équation des ondes et ses solutions 1D

Ce chapitre présente les considérations physiques qui permettent d'écrire les équations fondamentales de l'acoustique dans le cadre des hypothèses de l'acoustique unidimensionnelle, linéaire, adiabatique et sans écoulement.

### 3.1 Les équations fondamentales

Sans s'intéresser à la température, il est possible d'écrire trois équations fondamentales qui couplent les trois grandeurs acoustiques : pression totale  $p_T$ , masse volumique totale  $\rho_T$  et vitesse totale  $v_T$ . La combinaison de ces trois équations permet alors d'écrire l'équation des ondes. dans un premier temps, aucune source acoustique n'est considérée dans l'établissement de ces équations.

#### 3.1.1 Équation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement traduit le comportement mécanique d'un volume infinitésimal de fluide soumis à des forces extérieures de pression. Elle s'obtient à partir du principe fondamental de la dynamique appliqué à une tranche de fluide d'épaisseur infinitésimale  $dx$  tel que représenté en Fig. 3.1.

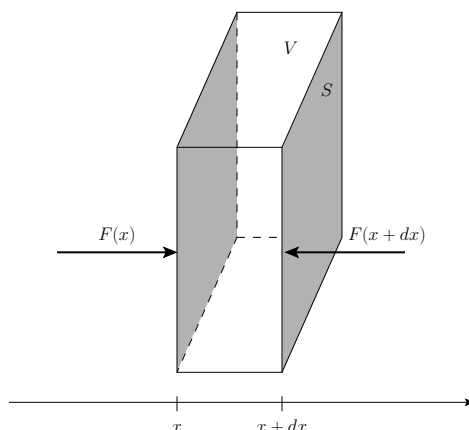


Fig. 3.1 – Forces mécaniques de pression s'appliquant aux facettes d'une tranche de fluide d'épaisseur infinitésimale  $dx$ , de section  $S$  et de volume  $V$ .

L'application du principe fondamental de la dynamique donne

$$F(x) - F(x + dx) = dm a, \tag{3.1}$$

avec  $F(x)$  et  $F(x + dx)$  les forces extérieures de pression s'exerçant respectivement sur les facettes d'abscisse  $x$  et  $x + dx$  de la tranche,  $dm$  la masse infinitésimale de la tranche et  $a$  l'accélération de la tranche. L'Eq. (3.1) peut se réécrire avec les variables de l'acoustique sous la forme

$$\frac{-\partial p_T}{\partial x} = \rho_T \frac{\partial v_T}{\partial t}. \tag{3.2}$$

En considérant les hypothèses de l'acoustique linéaire sans écoulement, il vient l'équation de la conservation de la quantité de mouvement linéarisée

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (3.3)$$

également appelée équation d'Euler linéarisée.

### 3.1.2 Équation de conservation de la masse

L'équation de conservation de la quantité de mouvement traduit le fait que si une quantité d'air entre dans le volume infinitésimal de fluide, cela entraîne une augmentation de sa masse volumique (à volume constant). Pour l'obtenir, il faut d'une part écrire la variation de masse infinitésimale de la tranche de fluide provoquée par une variation de masse volumique au cours d'un intervalle de temps  $dt$  :

$$\Delta(dm) = (\rho_T(t + dt) - \rho_T(t)) S dx = \frac{\partial \rho_T}{\partial t} S dx dt, \quad (3.4)$$

avec  $dm$  la masse infinitésimale de la tranche de fluide de section  $S$ .

D'autre part, en considérant qu'au cours d'un intervalle de temps  $dt$ , une certaine quantité de fluide en mouvement peut rentrer dans la tranche par la facette d'abscisse  $x$  et en ressortir par la facette d'abscisse  $x + dx$ , la variation de masse infinitésimale de la tranche peut également s'écrire

$$\Delta(dm) = (v_T(x) - v_T(x + dx)) \rho_T S dt = -\frac{\partial v_T}{\partial x} \rho_T S dx dt. \quad (3.5)$$

Par égalisation des Eqs. (3.4) et (3.5), il vient

$$\frac{\partial \rho_T}{\partial t} = -\rho_T \frac{\partial v_T}{\partial x}. \quad (3.6)$$

Dans les hypothèses de l'acoustique linéaire sans écoulement, l'équation de conservation de la masse linéarisée devient

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (3.7)$$

### 3.1.3 Équation d'état du fluide

L'équation d'état ou loi de comportement du fluide décrit la relation entre les variations de pression et les variations de volume d'une particule fluide traversée par une onde acoustique. Cette relation dépend du type de transformation thermodynamique considéré.

En acoustique, ces transformations sont adiabatiques. En effet, lors d'une oscillation acoustique, une particule subit un échauffement (associé à la sur-pression) puis un refroidissement (associé à la sous-pression qui suit la sur-pression). En revanche, ces variations de température n'occasionnent pas d'échanges de chaleur entre particules fluides, échanges beaucoup trop lents par rapport aux périodes des oscillations.

En considérant un fluide parfait, de telles transformations adiabatiques sont représentées par la relation  $\frac{dp_T}{p_T} = \gamma \frac{d\rho_T}{\rho_T}$  qui dans le cadre des hypothèses de l'acoustique linéaire s'écrit

$$\frac{dp(x, t)}{p_0} = \gamma \frac{d\rho(x, t)}{\rho_0}, \quad (3.8)$$

avec  $\gamma = c_p/c_v$  le rapport des capacités thermiques à pression constante et à volume constant,  $c_p$  et  $c_v$  respectivement.

Dans les hypothèses de l'acoustique linéaire, l'intégration de l'Eq. (3.8) (les constantes d'intégration sont nulles car  $\langle p(x, t) \rangle = \langle \rho(x, t) \rangle = 0$ ) conduit à la loi de comportement du fluide

$$p(x, t) = c^2 \rho(x, t). \quad (3.9)$$

avec  $c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$  la célérité des ondes acoustiques dans le fluide. Contrairement à ce que semble indiquer cette dernière définition, la célérité  $c$  est indépendante de la pression statique  $p_0$ . En effet, la pression statique  $p_0$  et masse volumique  $\rho_0$  sont proportionnelles. Il est simple de montrer que dans un volume  $V$  de gaz parfait de masse  $m$  à la température  $T$ , la relation  $p_0 V = nRT$  où  $n = \frac{m}{M}$  et  $V = \frac{m}{\rho_0}$ , conduit à  $\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{RT}{M}$ , avec  $M$  la masse molaire et  $R = 8,32 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$  la constante des gaz parfaits. Il vient donc

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \quad (3.10)$$

ce qui montre que la célérité ne dépend que de la composition du milieu gaz (sa masse molaire) et de sa température.

En reportant la loi de comportement (3.9) dans les Eqs. (3.7) et (3.3), ces deux équations fondamentales peuvent s'écrire uniquement en fonction de la pression et de la vitesse acoustiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \rho_0 c^2 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

## 3.2 Écriture de l'équation des ondes

Cette section décrit comment à partir des considérations physiques exprimées à la section 3.1, il est possible d'obtenir une équation unique qui régit les champs acoustiques.

### 3.2.1 Équation des ondes 1D hors des sources

Les éléments physiques présentés aux sections 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 conduisent à décrire une tranche de fluide animée d'un mouvement acoustique au moyen d'un système de deux équations différentielles du premier ordre (Eqs. (3.11)). Résoudre ce système de deux équations du premier ordre à deux inconnues peut se ramener à résoudre une seule équation du deuxième ordre à une seule inconnue.

Cette équation s'obtient en dérivant spatialement l'équation d'Euler (3.3) et en dérivant temporellement l'équation de conservation de la masse (3.7), ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \rho_0 c^2 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t \partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} + \rho_0 c^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x \partial t} = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Par égalisation des termes de vitesse de ces deux dernières équations il vient

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p(x, t) = 0. \quad (3.13)$$

Cette équation unique est appelée équation des ondes. Il est possible de vérifier que cette équation s'applique à n'importe quelle variable acoustique, par exemple, pour la vitesse acoustique, elle s'obtient en dérivant temporellement l'équation d'Euler (3.3) et en dérivant spatialement l'équation de conservation de la masse (3.7).

✓ **Tester ses connaissances en résolvant les brevets :** 03, 04, 05.

### 3.2.2 Équation des ondes 1D en présence de sources

Les équations fondamentales de conservation ont été écrites aux sections 3.1.1 et 3.1.2 sans considérer la présence d'éventuelles sources dans le domaine. L'équation des ondes qui en découle décrit donc le

comportement acoustique libre d'un domaine de propagation : des ondes planes peuvent se propager dans le domaine sans être forcées par une source qui impose un champ. Bien souvent, pour poser complètement un problème d'acoustique il est nécessaire de prendre en compte des sources, ce qui se traduit dans les équations par des seconds membres non nuls.

Une source acoustique peut être de deux natures différentes. Une source de débit qui délivre une certaine vitesse acoustique  $v_s$  à travers une surface  $S$  donnée est décrite par son débit de vitesse  $q_v = v_s S$  [m<sup>3</sup>/s] ou son débit de masse  $q_m = \rho_0 q_v$  [kg/s]. Une source de pression, qui délivre une certaine pression acoustique  $p_s$  s'appliquant sur une surface  $S$ , est décrite par sa force  $f = p_s S$  [N].

L'équation de conservation de la masse inhomogène traduit les fluctuations de masse de la tranche de fluide produites par une source de débit :

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = \rho_0 Q(x, t) \quad (3.14)$$

avec  $Q$  le débit de vitesse par unité de volume défini tel que  $q_v = Q dV$ . En reportant la loi de comportement (3.9) dans (3.14), l'équation de conservation de la masse inhomogène devient

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \rho_0 c^2 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = \rho_0 c^2 Q(x, t). \quad (3.15)$$

L'équation d'Euler (conservation de la quantité de mouvement) traduit l'application de forces de pression imposées par une source sur la tranche de fluide :

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \rho_0 F(x, t). \quad (3.16)$$

avec  $F$  la force par unité de masse  $F$  telle que  $f = F dm$ .

De façon identique à la section 3.2.1, l'équation des ondes 1D en présence de sources s'obtient en calculant  $\frac{\partial}{\partial x}$  Eq. (3.16) -  $\frac{\partial}{\partial t}$  Eq. (3.15) :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p(x, t) = \rho_0 \left( \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \right). \quad (3.17)$$

Dans cette équation, le second membre peut être vu comme une distribution spatiale de sources élémentaires (dépendance en  $x$  des fonctions  $Q$  et  $F$ ) possiblement instationnaires (dépendance en  $t$  de  $Q$  et  $F$ ).

### 3.2.3 Généralisation à 3 dimensions

Dans les sections 3.1.1 à 3.2.2, tous les raisonnements et les équations qui en découlent ont été développés en supposant que le domaine de propagation se réduit à un axe spatial noté  $x$ . Cette hypothèse d'acoustique unidimensionnelle implique que toutes les grandeurs acoustiques sont invariantes et oscillent en phase dans le plan orthogonal à l'axe de propagation  $x$ . C'est pour cette raison que dans l'équation des ondes, l'opérateur différentiel spatial  $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$  ne concerne que la coordonnée  $\xi = x$ . Dans les directions orthogonales à  $x$  ( $\xi = y$  ou  $\xi = z$  en coordonnées cartésiennes, par exemple), cet opérateur est nul puisque le champ  $y$  est invariant.

Dans de nombreux problèmes d'acoustique, l'hypothèse d'acoustique unidimensionnelle n'est pas satisfaite, il est donc nécessaire de généraliser l'écriture de l'équation des ondes 1D homogène (3.13) ou inhomogène (3.17) au cas où le champ varie selon toutes les directions du système de coordonnées retenu.

Dans un système de coordonnées cartésiennes à trois dimensions  $(x, y, z)$ , l'opérateur spatial est  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , si bien que l'équation des ondes hors de sources s'écrit

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p(x, y, z, t) = 0. \quad (3.18)$$

Dans la littérature, l'opérateur spatial de cette équation, appelé opérateur laplacien, est très souvent noté  $\Delta$ , de telle sorte que l'Eq. (3.18) s'écrit sous une forme compacte

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p(x, t) = \begin{cases} 0 & , \text{ en dehors des sources} \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{f}(\tilde{r}, t) - \rho_0 \frac{\partial Q_v(\tilde{r}, t)}{\partial t} & , \text{ en présence de sources} \end{cases} \quad (3.19)$$

avec  $\tilde{r}$  le vecteur position dont les coordonnées dépendent du système de coordonnées.

Cette écriture présente l'intérêt d'être valide quelque soit le système de coordonnées choisi. En effet, le laplacien est défini comme le produit  $\Delta = \tilde{\nabla} \tilde{\nabla} = \nabla^2$ , dans lequel l'opérateur  $\tilde{\nabla}$  dit nabla, admet une expression propre à chaque système de coordonnées. Une table récapitulative des opérateurs différentiels faisant intervenir  $\tilde{\nabla}$  est présentée en annexe 7.3.

En acoustique et plus généralement en physique et en analyse vectorielle, nabla ainsi que ses combinaisons possibles (produit, produit scalaire, produit vectoriel) avec lui-même, avec d'autres opérateurs ou avec des champs physiques sont très utilisés pour écrire les équations auxquelles les grandeurs physiques satisfont.

### 3.3 Solution dans le domaine temporel

Une onde peut être étudiée soit en adoptant un point de vue temporel (au cours du temps) soit en adoptant un point de vue fréquentiel (à une fréquence donnée). cette section concerne la vision temporelle.

#### 3.3.1 L'onde plane progressive

La solution de l'équation des ondes 1D en coordonnées cartésiennes est l'onde plane : il s'agit d'une perturbation de pression locale qui se propage le long d'un axe. L'onde est dite plane en référence au front d'onde plan : le front d'onde est le plan perpendiculaire à la direction de propagation  $x$  dans lequel tous les points vibrent en phase selon la même amplitude. Le champ est donc invariant dans les coordonnées transversales à  $x$ . L'espace peut alors être réduit à la seule coordonnée  $x$ , ce qui correspond bien à l'hypothèse d'acoustique unidimensionnelle.

##### 3.3.1.1 Solution pour la pression

En remplaçant la variable temporelle  $t$  par une autre variable  $ct$  dans l'équation des ondes Eq. (3.13), il est remarquable que  $\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial (ct)^2}$ . Cette égalité indique qu'il existe une grande similitude entre les évolutions spatiale et temporelle d'une onde acoustique.

En imposant une solution du type  $p(x, ct) = g(x + ct)$ , il est bien vérifié que  $\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial p(x, t)}{\partial (ct)}$ . Or l'équation des ondes fait non pas intervenir des dérivées premières mais d'ordre deux, il existe donc une deuxième possibilité pour la solution en pression du type  $p(x, ct) = f(x - ct)$ . Ainsi, toute combinaison linéaire de ces deux fonctions est également solution de l'équation des ondes. Il peut être montré que toute solution oscillante de l'Eq. (3.13) peut s'écrire sous la forme générale

$$p(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (3.20)$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions arbitraires continues, dérivables deux fois, et à moyenne nulle.

La Fig. 3.2 représente un exemple d'évolution au cours du temps et de l'espace d'un champ de pression supposé s'écrire seulement  $p(x, t) = f(x - ct)$ , avec  $f(x - ct)$  une fonction arbitraire, la fonction  $g(x + ct)$  étant donc supposée nulle. À l'instant  $t = 0$ , l'onde est représentée à la Fig. 3.2. À l'instant  $t = t_1$ , le champ s'écrit  $p(x, t_1) = f(x - ct_1) = f(x - x_1)$ . La fonction  $f$  s'est donc déplacée d'une distance  $x_1 = ct_1$  au cours d'un temps  $t_1$  et correspond alors à une onde progressive se propageant dans le sens des  $x$  croissants, souvent appelée onde "aller". Il est courant de noter le sens des  $x$  croissants  $x+$  et donc de noter  $f(x - ct) = p^+(x, t)$ . Par un raisonnement similaire, il est facile de montrer que la fonction  $g(x + ct) = p^-(x, t)$  correspond à une onde progressive dans le sens des  $x-$ , dite onde "retour".

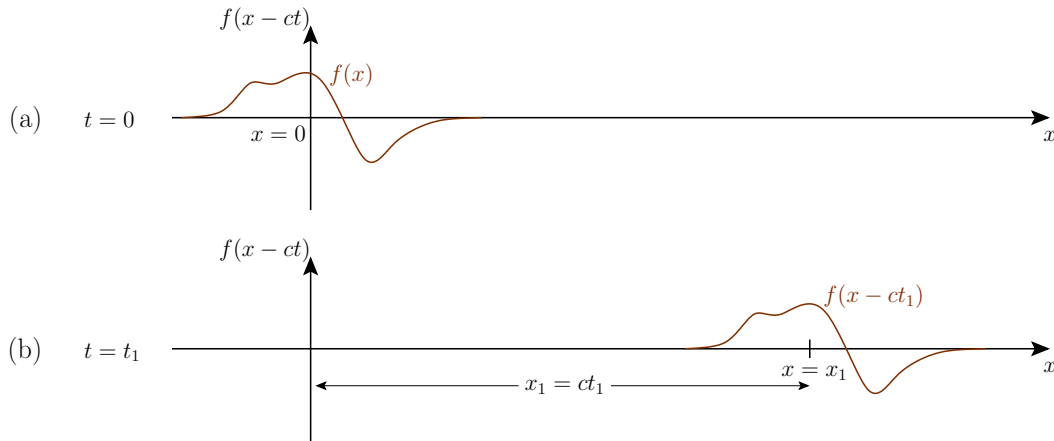


Fig. 3.2 – Représentation d'un champ de pression composé uniquement d'une fonction arbitraire  $f(x - ct)$  aux instant (a)  $t = 0$  et (b)  $t = t_1$ .

Finalement, dans le cas général, le champ de pression est la combinaison de deux ondes progressives, respectivement dans les directions  $x+$  et  $x-$ , et s'écrit

$$p(x, t) = p^+(x, t) + p^-(x, t). \quad (3.21)$$

### 3.3.1.2 Solution pour la vitesse

La vitesse obéit également à l'équation des ondes, elle peut donc également s'écrire sous la forme d'un combinaison de deux ondes progressives  $v^+$  et  $v^-$ . La vitesse étant reliée à la pression par l'équation d'Euler, en reportant l'Eq. (3.20) dans l'Eq. (3.3) il vient

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{-1}{\rho_0} (f'(x - ct) + g'(x + ct)), \quad (3.22)$$

avec  $f'$  et  $g'$  les dérivées de  $f$  et  $g$  par rapport à leur argument respectif  $x - ct$  et  $x + ct$ . En intégrant par rapport à  $t$  (la constante d'intégration est nulle car  $\langle v(x, t) \rangle = 0$ ), la vitesse s'écrit

$$v(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c} (f(x - ct) - g(x + ct)), \quad (3.23)$$

ou encore

$$v(x, t) = v^+ + v^-, \quad (3.24)$$

avec  $v^+ = \frac{p^+}{\rho_0 c}$  et  $v^- = \frac{-p^-}{\rho_0 c}$ , correspondant respectivement à une onde progressive dans les  $x+$  et  $x-$ .

### 3.3.2 Impédance acoustique

La notion d'impédance est très couramment utilisée dans de nombreux domaines de la physique. De façon très générale, l'impédance est définie comme le rapport entre une grandeur potentielle et une grandeur cinétique. En acoustique, l'impédance acoustique est définie comme le rapport entre pression et vitesse acoustique, elle traduit la résistance du milieu de propagation au passage d'une onde acoustique. En ne considérant que les ondes "aller" dans les solutions en pression et en vitesse (Eqs. (3.21) et 3.24), l'impédance s'écrit :

$$Z_0 = \frac{p^+}{v^+} = \rho_0 c. \quad (3.25)$$

L'impédance acoustique ne dépend donc que des caractéristiques du milieu de propagation, elle est appelée impédance caractéristique. Par exemple, dans le cas d'un milieu dont l'impédance est très élevée (liquide ou fluide lourd par exemple), la résistance au passage de l'onde est grande de telle sorte qu'une source délivrant un certain niveau de pression donnera lieu à une vitesse particulière faible. Inversement, dans un gaz (comme l'air par exemple), l'impédance est beaucoup plus faible et cette même source de pression donnera lieu à un mouvement beaucoup plus ample des particules fluides.

✓ **Tester ses connaissances en résolvant les brevets : 06**

### 3.3.3 Cas particulier de l'onde monochromatique

D'après le théorème de Fourier, les solutions de l'équation des ondes peuvent être décomposées sur une base de sinus et cosinus. Il est donc intéressant d'étudier le cas d'une onde de fréquence pure pour laquelle les fonctions  $f$  et  $g$  sont des cosinus. La solution temporelle s'écrit donc

$$p(x, t) = A \cos(k(x - ct) - \phi^+) + B \cos(k(x + ct) + \phi^-), \quad (3.26)$$

avec  $A$  et  $B$  les termes d'amplitude qui portent la dimension du champ [Pa],  $k = \omega/c$  [ $\text{m}^{-1}$ ] une constante appelé nombre d'onde et  $\phi^+$  et  $\phi^-$  [rd] des termes de phase.

Dans le cas d'une onde monochromatique, la pulsation  $\omega = 2\pi f$  est une constante fixée qu'il convient de faire apparaître explicitement dans les arguments des cosinus :  $k(x \pm ct) \pm \phi^\pm = kx \pm \omega t \pm \phi^\pm$ . Par ailleurs, cosinus étant une fonction paire ( $\cos(a) = \cos(-a)$ ), la solution temporelle monochromatique peut se réécrire

$$p(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi^+) + B \cos(\omega t + kx + \phi^-). \quad (3.27)$$

## 3.4 Solution dans le domaine fréquentiel

Dans le cas d'une onde monochromatique, le comportement temporel du champ est parfaitement connu : il s'agit d'une oscillation purement sinusoïdale, d'une durée infinie, à la pulsation  $\omega$ . Ce régime de fonctionnement qui pourrait être qualifié de "régime permanent à fréquence pure" s'appelle le régime harmonique. L'étude temporelle du champ en régime harmonique ne présente bien sur aucun intérêt. Il est alors plus pertinent d'étudier le comportement spatial du champ pour différentes fréquences d'intérêt, en effet, l'allure spatiale du champ dépend fortement de la fréquence. Ainsi, dans cette vision fréquentielle, la pression acoustique ne sera plus vue comme une fonction de l'espace et du temps mais comme une fonction de l'espace et de la fréquence (ou pulsation) notée  $\tilde{p}(x, \omega)$ .

### 3.4.1 Notation exponentielle pour le régime harmonique

Lors des nombreuses mises en oeuvre des dérivées et intégrations spatiales et/ou temporelles, l'utilisation des fonctions trigonométriques induit souvent des complications dans les calculs ( $\cos(x)' = -\sin(x)$ , par exemple). Ainsi, par commodité mathématique il est préférable d'utiliser des fonctions exponentielles ( $(e^x)' = e^x$ , ce qui est beaucoup plus simple). Une partie imaginaire purement artificielle doit alors être injectée dans la solution, qui s'écrit sous la forme

$$\tilde{p}(x, \omega) = \tilde{A}e^{j(\omega t - kx)} + \tilde{B}e^{j(\omega t + kx)} = \left( \tilde{A}e^{-jkx} + \tilde{B}e^{jkx} \right) e^{j\omega t}, \quad (3.28)$$

avec  $\tilde{A} = |\tilde{A}|e^{j\phi^+}$  et  $\tilde{B} = |\tilde{B}|e^{j\phi^-}$  des termes d'amplitudes complexes contenant l'information de la phase.  $\tilde{p}(x, t)$  est donc une quantité complexe dont la partie réelle est la "vraie" solution physique qui pourrait être mesurée avec un microphone en pratique :

$$p(x, t) = \Re[\tilde{p}(x, t)]. \quad (3.29)$$

Lorsque la notation complexe est introduite, il est capital de ne jamais perdre de vue quelle est la convention temporelle choisie : deux cas sont possibles et totalement équivalents : soit  $e^{+j\omega t}$  soit  $e^{-j\omega t}$ . Si la convention  $e^{j\omega t}$  est retenue, alors le propagateur de l'onde "aller" s'écrit  $e^{-jkx}$  et le propagateur de l'onde "retour" s'écrit  $e^{+jkx}$ . Si  $e^{-j\omega t}$  est retenue, alors le propagateur de l'onde "aller" s'écrit  $e^{+jkx}$  et le propagateur de l'onde "retour" s'écrit  $e^{-jkx}$ . Il faut donc travailler avec la même convention de signe tout au long d'un problème d'acoustique pour éviter d'introduire des erreurs de signe. Par la suite, la convention  $e^{-j\omega t}$  est retenue, cela permet que le propagateur dans les  $x+$  est donc  $e^{+jkx}$  ce qui peut apparaître plus intuitif.

### 3.4.2 Équation de Helmholtz

En reportant la solution harmonique (3.28) dans l'équation des ondes (3.13) et en appliquant l'opérateur différentiel en temps  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$  au terme  $e^{j\omega t}$ , il vient

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) \tilde{p}(x, \omega) = 0. \quad (3.30)$$



Cette équation s'appelle l'équation de Helmholtz. Quelque soit la convention temporelle choisie cette équation reste la même. Par ailleurs, il est à noter que cette équation s'applique à la fonction de l'espace et de la fréquence  $\tilde{p}(x, \omega)$  et non à la fonction de l'espace et du temps  $\tilde{p}(x, t)$ . En effet, vu de l'équation de Helmholtz (qui n'est que l'équation des ondes intégrée en temps), le temps n'est plus une variable mais une constante de la fonction  $\tilde{p}$ .

De même, la version fréquentielle de l'équation d'Euler s'obtient par intégration en temps de l'Eq. (3.3) dans laquelle l'Eq. (3.28) a été reportée :

$$\frac{\partial \tilde{p}(x, \omega)}{\partial x} = j\omega \rho_0 \tilde{v}(x, \omega), \quad (\text{si } e^{-j\omega t}). \quad (3.31)$$

Le signe du second membre dépend ici de la convention temporelle retenue.

### 3.4.3 Solution en pression et vitesse

Comme indiqué plus haut, dans le domaine fréquentiel, la dépendance en temps de la solution ne présente aucun intérêt et se traduit par une constante. Pour alléger les écritures, elle peut donc être omise dans l'Eq. (3.28) et la solution en pression s'écrit

$$\tilde{p}(x, \omega) = \tilde{A}e^{jkx} + \tilde{B}e^{-jkx}. \quad (3.32)$$

Le report de l'Eq. (3.32) dans l'Eq. (3.31) donne, après intégration en  $x$ , l'expression de la solution en vitesse :

$$\tilde{v}(x, \omega) = \frac{1}{\rho_0 c} (\tilde{A}e^{jkx} - \tilde{B}e^{-jkx}). \quad (3.33)$$

Les Eqs. (3.32) et (3.33) sont deux résultats de base très utilisés, en particulier dans le chapitre 4. En effet, les études dans le domaine fréquentiel sont les plus courantes. Certaines remarques peuvent compléter ces solutions :

- lorsque  $\tilde{B} = 0$  : le champ correspond à une seule onde progressive dans les  $x+$  pour laquelle la pression et la vitesse sont en phase. L'amplitude de l'oscillation est indépendante de la coordonnée  $x$  et vaut  $|\tilde{A}|$ .
- lorsque  $\tilde{A} = 0$  : le champ correspond à une seule onde progressive dans les  $x-$  pour laquelle la pression et la vitesse sont en opposition de phase. L'amplitude de l'oscillation est indépendante de la coordonnée  $x$  et vaut  $|\tilde{B}|$ .
- lorsque  $\tilde{A} \neq 0$  et  $\tilde{B} \neq 0$  : il s'agit du cas général pour lequel il existe des interférences entre l'onde aller et l'onde retour. Le cas  $\tilde{A} = \tilde{B}$  correspond à une réflexion totale de l'onde aller à une paroi par exemple, donnant lieu à un champ dit stationnaire. Le cas  $\tilde{A} \neq \tilde{B}$  correspond à une réflexion partielle de l'onde aller, donnant lieu à un champ dit quasi-stationnaire. ces phénomènes de réflexion et par extension de transmission des ondes sont étudiés au chapitre 4.

✓ **Tester ses connaissances en résolvant les brevets : 07**

# Chap. 4

---

## Réflexion/Transmission des ondes planes

---

Dans un problème d'acoustique complètement posé, trois éléments doivent être associés : la présence d'une *source* dans un *milieu de propagation* borné par des *frontières* (murs, sol, changement de milieu,...). Ces frontières introduisent des phénomènes de réflexion et le cas échéant de transmission qui perturbent le champ acoustique. L'effet de ses frontières est modélisé par l'écriture de conditions limites qui leur sont associées. Ce chapitre donne les éléments théoriques de base pour l'écriture de ces conditions limites et pour l'analyse des champs acoustiques 1D résultant de ces phénomènes de réflexion/transmission.

Remarque : L'ensemble de ce chapitre est présenté dans le domaine fréquentiel, la notation exponentielle est bien sur utilisée, toutes les variables de champ acoustique sont donc complexes. Aussi, pour ne pas alourdir inutilement les notations, il est choisi de ne pas utiliser l'attribut " ~ " pour indiquer le caractère complexe de ces variables (par exemple,  $\tilde{p}(x, \omega)$  sera noté  $p(x, \omega)$ ).

### 4.1 Réflexion à une paroi

Le cas de la réflexion à une paroi est le plus simple à considérer : lorsqu'une onde plane incidente interagit avec la paroi (supposée parfaitement plane), une onde plane réfléchie est créée. L'amplitude et la phase, en pression et en vitesse, de cette onde réfléchie dépendent des propriétés de réflexion de la paroi décrite par la condition limite qui lui est associée.

#### 4.1.1 Notion de condition limite

Écrire une condition limite revient à imposer une relation entre pression et vitesse à une frontière du domaine de propagation, c'est à dire à imposer une impédance acoustique. Pour mémoire, il a été vu à la section 3.3.2 que lorsqu'une onde se propage dans un milieu, elle voit l'impédance caractéristique  $\rho_0 c$  de ce milieu. Lorsque cette onde rencontre la paroi, elle voit subitement une impédance acoustique très différente, c'est cette *rupture d'impédance* qui physiquement est à l'origine du phénomène de réflexion.

##### 4.1.1.1 Impédance et coefficient de réflexion

Lorsqu'une onde se propage et rencontre un obstacle, elle est partiellement (voire totalement) réfléchie. L'onde incidente est notée  $p_i(x, \omega) = P_i e^{jkx}$  et l'onde réfléchie  $p_r(x, \omega) = P_r e^{-jkx}$ . Le coefficient de réflexion de la paroi, positionnée en  $x = 0$  est le rapport des amplitudes complexes de ces deux ondes :

$$R_p(x = 0, \omega) = \frac{p_r(x = 0, \omega)}{p_i(x = 0, \omega)} = \frac{P_r}{P_i}. \quad (4.1)$$

$R_p$  est le coefficient de réflexion en pression, il dépend uniquement de l'obstacle et est souvent une fonction complexe de la fréquence et s'écrit aussi sous forme complexe

$$R_p = |R_p| e^{j\phi}, \quad (4.2)$$

avec  $|R_p| = \frac{|P_r|}{|P_i|}$  le rapport des modules des pressions et  $\phi = \phi_r - \phi_i$  le déphasage entre les ondes réfléchie et incidente lors de la réflexion. Physiquement, ce déphasage s'interprète en considérant qu'à la réflexion,

l'onde incidente pénètre légèrement dans l'obstacle avant de repartir dans la direction opposée, avec donc un certain retard, c'est à dire un certain déphasage.

Le coefficient de réflexion en vitesse est défini comme le rapport

$$R_v(x=0, \omega) = \frac{v_r(x=0, \omega)}{v_i(x=0, \omega)}. \quad (4.3)$$

avec  $v_i = \frac{1}{\rho_0 c} p_i$  et  $v_r = \frac{-1}{\rho_0 c} p_r$ , ce qui induit

$$R_v = -R_p. \quad (4.4)$$

L'impédance imposée à la frontière du domaine et le coefficient de réflexion associé à cette frontière sont deux grandeurs intimement liées. En effet, d'après la définition générale de l'impédance et en écrivant le champ total comme la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie, l'impédance de la paroi s'écrit

$$Z(x=0, \omega) = \frac{p}{v} = \frac{p_i(x=0, \omega) + p_r(x=0, \omega)}{v_i(x=0, \omega) + v_r(x=0, \omega)} = \frac{P_i + R_p P_i}{\frac{1}{\rho_0 c} P_i - R_p \frac{1}{\rho_0 c} P_i} \quad (4.5)$$

soit

$$Z(x=0, \omega) = \rho_0 c \frac{1 + R_p}{1 - R_p} \quad \text{ou encore} \quad R_p(x=0, \omega) = \frac{Z - \rho_0 c}{Z + \rho_0 c}. \quad (4.6)$$

L'ensemble de ces résultats sont exactement les mêmes quelque soit la convention temporelle choisie et quelque soit la direction de propagation ( $x+$  ou  $x-$ ) de l'onde incidente.

Tout obstacle produisant une réflexion se caractérise par un coefficient de réflexion tel que  $0 < |R_p| \leq 1$  qui implique  $\Re[Z] > 0$ .

#### 4.1.1.2 Deux cas simples de condition limite

Les liens entre impédance et coefficient de réflexion peuvent s'illustrer autour de deux cas élémentaires de réflexion totale pour lesquels  $|R| = 1$ .

##### Cas de la paroi infiniment rigide et parfaitement réfléchissante :

Ce cas est aussi appelé *extrémité fermée d'un tube*. La paroi étant infiniment rigide, elle ne peut pas vibrer, sa vitesse de vibration est donc nulle. Ainsi, une particule fluide directement en contact avec cette paroi n'est donc pas animée d'un mouvement mécanique et sa vitesse particulière est nulle. Si la paroi est en  $x = 0$ , la condition limite s'écrit alors

$$v(x=0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad Z(x=0) = \frac{p(x=0)}{v(x=0)} \rightarrow \infty. \quad (4.7)$$

Cette frontière est donc infiniment résistive au passage de l'onde et la réflexion est totale.

La condition de nullité de vitesse implique que

$$v(x=0, t) = \frac{1}{\rho_0 c} (f(-ct) - g(ct)) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(-ct) = g(ct), \quad (4.8)$$

ce qui indique que la fonction  $g$  correspond à la fonction  $f$  retournée par rapport à son argument. La vitesse peut se réécrire uniquement en fonction de  $f$  :

$$v(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c} (f(x-ct) - f(-x-ct)) \quad (4.9)$$

avec  $f(x-ct) = v^+$  le terme correspondant à l'onde progressive aller,  $f(-x-ct) = v^-$  le terme correspondant à l'onde réfléchie se propageant dans la direction opposée de  $v^+$  (l'argument est en  $-x$ ), de même amplitude que  $v^+$  (la réflexion est totale) mais qui a subi une inversion de signe lors de sa réflexion (signe  $-$  devant  $v^-$ ).

Le coefficient de réflexion en vitesse associé à cette paroi est

$$R_v(\omega) = -1 \quad \text{ou} \quad R_v(\omega) = 1 e^{j\pi}. \quad (4.10)$$

La réflexion totale est traduite par le module unitaire, l'inversion de signe est traduite soit par le signe négatif soit par la phase  $\pi$  (opposition de phase).

Pour la pression, la condition limite implique que

$$p(x, t) = f(x - ct) + f(x + ct), \quad (4.11)$$

ce qui traduit également une réflexion totale mais sans changement de signe, soit  $R_p(\omega) = 1$ .

### Cas de l'extrémité ouverte d'un tube bafflé :

Il s'agit du cas opposé au cas de la paroi rigide. Lorsqu'une onde se propageant dans un tube rencontre son extrémité débouchant sur l'espace infini, un phénomène de réflexion se produit également. En effet, à l'extrémité, l'interface entre le tube (qui est un milieu confiné) et le milieu extérieur infini représente pour l'onde une rupture d'impédance, même si le fluide reste le même. Physiquement, cela se traduit par la nullité de la pression à l'extrémité en  $x = 0$ , ce qui conduit à la condition limite

$$p(x = 0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad Z(x = 0) = \frac{p(x = 0)}{v(x = 0)} = 0. \quad (4.12)$$

Cette condition en pression implique que

$$p(x = 0, t) = f(-ct) + g(ct) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(-ct) = -g(ct), \quad (4.13)$$

ce qui indique que la fonction  $g$  correspond à la fonction  $f$  retournée par rapport à son argument et inversée en amplitude. La pression peut se réécrire uniquement en fonction de  $f$  :

$$p(x, t) = f(x - ct) - f(-x - ct) \quad (4.14)$$

avec  $f(x - ct) = p^+$  le terme correspondant à l'onde progressive aller,  $f(-x - ct) = p^-$  le terme correspondant à l'onde réfléchie se propageant dans la direction opposée de  $p^+$  (l'argument est en  $-x$ ), de même amplitude que  $p^+$  (la réflexion est totale) mais qui a subi une inversion de signe lors de sa réflexion (signe  $-$  devant  $p^-$ ). Le coefficient de réflexion en pression associé à cette extrémité est

$$R_p(\omega) = -1 \quad \text{ou} \quad R_p(\omega) = 1 e^{j\pi}. \quad (4.15)$$

Pour la vitesse, la condition limite implique que

$$v(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c} (f(x - ct) + f(-x - ct)), \quad (4.16)$$

ce qui traduit également une réflexion totale mais sans changement de signe. Le coefficient de réflexion en vitesse est  $R_v(\omega) = 1$ .

✓ **Tester ses connaissances en résolvant les brevets :** 08, 09

### 4.1.2 Onde stationnaire (réflexion totale)

Une onde stationnaire résulte de l'interférence entre une onde incidente et l'onde réfléchie totalement par une paroi parfaitement rigide.

Soit une onde plane progressive dans les  $x+$ , d'amplitude complexe  $A = |A| e^{j\phi_+}$ , incidant sur une paroi parfaitement réfléchissante placée en  $x = 0$  dont le coefficient de réflexion en pression est  $R_p = |R_p| e^{j\phi_R}$  avec  $|R_p| = 1$ . L'onde retour est telle que  $B = |B| e^{j\phi_-} = R_p \cdot A$  avec  $|B| = |R_p| \cdot |A| = |A|$  et  $\phi_- = \phi_+ + \phi_R$ . Le champ de pression s'écrit

$$p(x, \omega) = |A| e^{j(kx + \phi_+)} + |A| e^{-j(kx - \phi_-)} \quad \text{soit} \quad p(x, \omega) = 2|A| e^{j\bar{\phi}} \cos(kx + \Delta\phi), \quad (4.17)$$

avec  $\bar{\phi} = \frac{\phi_+ + \phi_-}{2}$  la moyenne des phases en  $x = 0$  et  $\Delta\phi = \frac{\phi_+ - \phi_-}{2} = \frac{-\phi_R}{2}$ , le demi déphasage des ondes en  $x = 0$ . La convention arbitraire  $\phi_+ = 0$  peut être adoptée par commodité de telle sorte que  $\bar{\phi}$  et  $\Delta\phi$  dépendent uniquement de  $\phi_R$ . L'onde stationnaire s'écrit alors

$$p(x, \omega) = 2|A| e^{j\frac{\phi_R}{2}} \cos\left(kx - \frac{\phi_R}{2}\right). \quad (4.18)$$

Le signal temporel de pression mesurable au microphone est

$$\begin{aligned} p(x, t) = \Re[p(x, \omega)] &= \Re \left[ 2|A| e^{j\frac{\phi_R}{2}} \cos \left( kx - \frac{\phi_R}{2} \right) e^{-j\omega t} \right] \\ &= 2|A| \cos \left( kx - \frac{\phi_R}{2} \right) \cos \left( \omega t + \frac{\phi_R}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

En vitesse, l'onde stationnaire s'écrit

$$v(x, \omega) = \frac{1}{\rho_0 c} \left( |A| e^{j(kx + \phi_+)} - |A| e^{-j(kx - \phi_-)} \right) \quad (4.20)$$

soit

$$v(x, \omega) = \frac{-j2|A|}{\rho_0 c} e^{j\frac{\phi_R}{2}} \sin \left( kx - \frac{\phi_R}{2} \right), \quad (4.21)$$

L'onde stationnaire est représentée dans la Fig. 4.1 en pression (Eq. (4.18)) et en vitesse (Eq. (4.20)). Le caractère stationnaire de l'onde est immédiatement reconnaissable à l'enveloppe spatiale de l'amplitude en cosinus pour la pression et en sinus pour la vitesse (pour mémoire, l'enveloppe spatiale de l'amplitude d'une onde progressive est une constante et vaut  $|A|$ ). Comme l'indique l'Eq. (4.18), cette enveloppe d'amplitude ne dépend pas du temps mais uniquement de l'espace. Le cosinus temporel de l'Eq. (4.19) indique que cette enveloppe fixe dans l'espace oscille au cours du temps à la pulsation  $\omega$ .

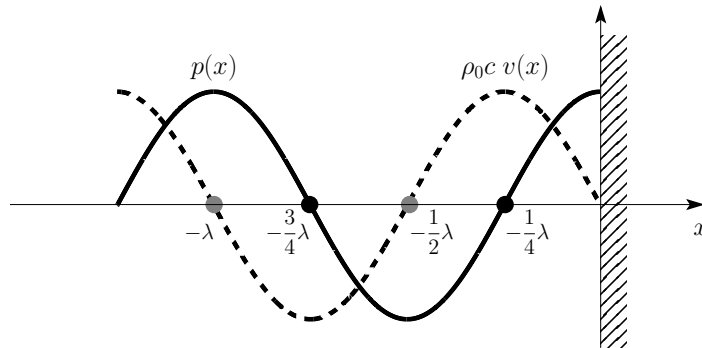


Fig. 4.1 – Représentation en valeur algébrique d'une onde stationnaire en pression (—) et en vitesse (- - -). La vitesse étant normalisée par  $\rho_0 c$  dans cette représentation, elle a même amplitude que la pression.

Plusieurs points remarquables apparaissent pour le signal de pression :

- Les ventres de pression : valeurs de  $x$  auxquelles la pression est maximale. Les ventres se retrouvent à partir de l'Eq. (4.18) en considérant  $\cos \left( kx - \frac{\phi_R}{2} \right) = \pm 1$  ce qui induit  $kx - \frac{\phi_R}{2} = n\pi$  et donc  $x_{p_{max}} = \frac{\lambda}{2} \left( n + \frac{\phi_R}{2\pi} \right)$  avec  $n = [0, 1, 2, 3, \dots]$ . En pratique, les parois parfaitement réfléchissantes n'induisent pas de déphasage ce qui conduit à

$$x_{p_{max}} = \frac{n\lambda}{2}.$$

Le premier ventre de pression est positionné à la paroi, la distance entre deux ventres est une demi longueur d'onde.

- Les noeuds de pression : valeurs de  $x$  auxquelles la pression s'annule. Les noeuds se retrouvent à

partir de l'Eq. (4.18) en considérant  $\cos\left(kx - \frac{\phi_R}{2}\right) = 0$  ce qui induit  $kx - \frac{\phi_R}{2} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$  et donc  $x_{p_{min}} = \frac{\lambda}{4}\left(2n + 1 + \frac{\phi_R}{\pi}\right)$  avec  $n = [0, 1, 2, 3, \dots]$ . Si  $\phi_R = 0$ , il vient

$$x_{p_{min}} = \frac{(2n + 1)\lambda}{4}.$$

Le premier noeud de pression est positionné à un quart de longueur d'onde de la paroi, la distance entre deux noeuds est une demi longueur d'onde. La distance entre un ventre et un noeud est un quart de longueur d'onde.

Par les mêmes raisonnements à partir de l'Eq. (4.20), les ventres et noeuds de vitesse peuvent s'obtenir, ils correspondent aux noeuds et ventre de pression, respectivement. Le champ de vitesse est dit en *quadrature de phase* avec le champ de pression : le déphasage est de  $\frac{\pi}{2}$  c'est à dire d'un quart de longueur d'onde. En effet, les fonctions cosinus et sinus sont en quadrature de phase.

✓ **Tester ses connaissances en résolvant les brevets : 10**

### 4.1.3 Onde quasi-stationnaire (réflexion partielle)

Une onde stationnaire résulte de l'interférence entre une onde incidente et l'onde réfléchi partiellement par une paroi. Elle n'est donc une onde ni purement stationnaire ni purement progressive. Elle comprend une composante stationnaire et une composante progressive. C'est un cas plus général et plus proche de la réalité que celui de l'onde stationnaire.

Soit une onde plane progressive dans les  $x+$ , d'amplitude complexe  $A = |A|e^{j\phi_+}$ , incidant sur une paroi parfaitement réfléchissante placée en  $x = 0$  dont le coefficient de réflexion en pression est  $R_p = |R_p|e^{j\phi_R}$  avec  $|R_p| < 1$ . L'onde retour est donc telle que  $B = |B|e^{j\phi_-} = R_p.A$  si bien que le champ de pression s'écrit

$$p(x, \omega) = Ae^{jkx} + Be^{-jkx} = A(e^{jkx} + |R_p|e^{-jkx + j\phi_R}). \quad (4.22)$$

Après réarrangement des termes de phase  $\phi_R$ , l'onde quasi-stationnaire s'écrit

$$p(x, \omega) = Ae^{j\frac{\phi_R}{2}} \left( 2|R_p| \cos\left(kx - \frac{\phi_R}{2}\right) + (1 - |R_p|)e^{j\left(kx - \frac{\phi_R}{2}\right)} \right). \quad (4.23)$$

L'onde purement stationnaire est bien retrouvée si  $|R_p| = 1$ . Comme le montre la Fig. 4.2, pression et vitesse sont en quadrature de phase. Si l'onde quasi stationnaire admet toujours des maxima de pression, l'Eq. (4.23) montre qu'elle n'admet pas de noeud de pression mais des minima de pression. En considérant  $\cos\left(kx - \frac{\phi_R}{2}\right) = 0$ , la valeur du minimum de pression est

$$p_{min} = A(1 - |R_p|). \quad (4.24)$$

De même, en considérant  $\cos\left(kx - \frac{\phi_R}{2}\right) = 1$ , la valeur du maximum de pression est

$$p_{max} = A(1 + |R_p|). \quad (4.25)$$

Ces maxima et minima de champ se positionnent aux mêmes endroits que dans le cas de l'onde stationnaire (si la phase de  $R_p$  est bien sur la même!).

Dans Eq. (4.23) le caractère stationnaire est représenté par le terme en cosinus et le caractère progressif (dans les  $x+$ ) est représenté par le terme en exponentielle. La pondération entre ces deux composantes dépend uniquement de  $|R_p|$ . Pour quantifier le caractère stationnaire du champ par rapport à son caractère progressif, le *taux d'onde stationnaire* est introduit et se définit comme

$$\tau = \frac{P_{max}}{P_{min}}. \quad (4.26)$$

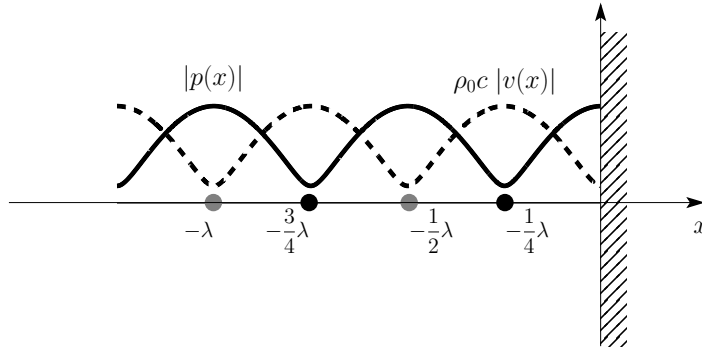


Fig. 4.2 – Représentation en module d'une onde quasi stationnaire en pression (—) et en vitesse (- - -). La vitesse étant normalisée par  $\rho_0 c$  dans cette représentation, elle a même amplitude que la pression.

En reportant les expressions des minima et maxima de pression, il vient

$$\tau = \frac{1 + |R_p|}{1 - |R_p|}. \quad (4.27)$$

Pour une onde stationnaire,  $p_{min} = 0$  donc  $\tau \rightarrow +\infty$ .

Pour une onde progressive,  $p_{min} = p_{max}$  donc  $\tau = 1$ .

Finalement, le taux d'onde stationnaire est un nombre réel positif tel que

$$1 < \tau < +\infty \quad (4.28)$$

Comme indiqué, le taux d'onde stationnaire se calcul à partir de  $|R_p|$ , il s'agit bien d'un réel alors que l'impédance de la paroi se calcule à partir de  $R_p$ , il s'agit d'une quantité complexe. Par conséquent, lorsque  $R_p \pm 1$ , dans les deux cas  $\tau \rightarrow \infty$  alors que  $Z(x=0) \rightarrow \infty$  ou  $Z(x=0) = 0$ .

✓ **Tester ses connaissances en résolvant les brevets : 11**

#### 4.1.4 Application : le tube à ondes stationnaires

Les tubes à ondes stationnaires sont par mis les systèmes acoustiques les plus simples et les plus courants. Ils sont le siège de phénomènes de résonances utilisées dans de nombreux instruments de musique (instrument à vent, certaines percussions) et dans de nombreux systèmes industriels (filtres, silencieux, moyens de mesure type tube de Kundt, ...). A ce stade du document, tous les éléments théoriques et de formalisme nécessaire à la résolution de ce problème élémentaire ont été vus.

Un tube de longueur finie  $L$  est ici considéré. La fréquence est considérée suffisamment basse de telle sorte que la longueur d'onde soit très grande devant les dimensions transversales du tube (*i.e* les dimensions de sa section). Cette hypothèse dite d'onde plane induit que le tube peut se modéliser comme un un système unidimensionnel (propagation le long d'un axe). Les extrémités du tube constituent alors des conditions limites permettant de borner la propagation le long de l'axe. Il existe deux types de conditions limites (extrémité fermée ou ouverte) permettant de définir trois types de tubes à ondes stationnaires : le tube fermé/fermé, le tube ouvert/ouvert et le tube ouvert/fermé.

Le cas du tube ouvert/ouvert représenté en Fig. ?? est ici traité en détails. Ce problème d'acoustique unidimensionnelle revient à résoudre l'équation des ondes homogène, en régime harmonique, le long d'un segment de longueur  $L$  de l'axe  $x$ , borné par des conditions limites en  $x = 0$  et  $x = L$ .

Dans ces conditions, le champ acoustique s'écrit comme la combinaison de deux ondes planes progressives

$$p(x, \omega) = Ae^{jkx} + Be^{-jkx}, \quad \text{pour la pression} \quad (4.29a)$$

$$v(x, \omega) = \frac{1}{\rho_0 c} (Ae^{jkx} - Be^{-jkx}), \quad \text{pour la vitesse.} \quad (4.29b)$$

Les extrémités ouvertes en  $x = 0$  et  $x = L$  se traduisent par les conditions aux limites

$$p(x = 0) = 0, \quad (4.30a)$$

$$p(x = L) = 0. \quad (4.30b)$$

Le report de la solution en pression (4.29a) dans la condition limite (4.30a) en  $x = 0$  induit que  $A = -B$  et conduit à

$$p(x, \omega) = 2jA \sin(kx) \quad , \quad \text{pour la pression,} \quad (4.31a)$$

$$v(x, \omega) = \frac{2A}{\rho_0 c} \cos(kx) \quad , \quad \text{pour la vitesse.} \quad (4.31b)$$

$$(4.31c)$$

Tout comme dans le cas d'une réflexion totale, cette première condition limite en  $x = 0$  induit la présence d'une onde stationnaire dans le tube.

Le report de la solution (4.31a) dans la condition limite (4.30b) en  $x = L$  induit soit  $A = 0$  (solution triviale correspondant au silence), soit  $\sin(kL) = 0$  ce qui conduit à

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad , \quad \text{avec } n \in [0, 1, 2, 3, \dots], \quad (4.32)$$

ou encore (d'après la relation de dispersion dans le milieu  $k = \frac{2\pi f}{c}$ )

$$f_n = \frac{nc}{2L} \quad , \quad \text{avec } n \in [0, 1, 2, 3, \dots]. \quad (4.33)$$

Cette deuxième condition limite en  $x = L$  impose donc que les ondes stationnaires se forment dans le tube uniquement à certaines fréquences discrètes, en nombre infini et déterminées par un nombre quantique  $n$ . A chacune de ces fréquences, appelées fréquences propres, est associée une fonction propre correspondant au champ de pression établi dans le tube :

$$p_n(x, \omega_n) = 2jA_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (4.34)$$

Ces fonctions ou modes propres sont tracées en Fig. 4.3. Le cas  $n = 0$ , qui correspond à un mode de fréquence nulle pour lequel il n'y a pas d'oscillation, n'est pas représenté. Lorsque  $n = 1$ , le premier mode propre oscillant est tel que la longueur du tube correspond à une demi longueur d'onde ( $L = \lambda/2$ ). Pour cette raison, les tubes ouvert/ouvert sont souvent appelés "résonateur demi onde" ou "résonateur en lambda sur deux". Pour  $n = 1$ , une longueur d'onde complète s'établit dans le tube. Ainsi, pour chaque mode suivant, une demi longueur d'onde supplémentaire est établi dans le tube.

L'ensemble des fréquences et fonctions propres constitue des solutions élémentaires de l'équation d'Helmholtz. La solution complète peut alors s'écrire comme une combinaison linéaire de ces solutions élémentaires :

$$p(x, \omega) = \sum_n p_n(x, \omega_n) = \sum_n 2jA_n \sin(kx). \quad (4.35)$$

Les coefficients  $A_n$  dépendent des conditions de source (type, position et fréquence de la source).

✓ **Tester ses connaissances en résolvant les brevets : 12**

## 4.2 Réflexion et transmission à l'interface de deux milieux

L'interface entre deux milieux fluides de propagation de masse volumique et célérité différentes représente une rupture d'impédance qui occasionne la réflexion partielle d'une onde incidente. Le deuxième milieu étant pénétrable, une partie de l'onde incidente est également transmise. La situation est représentée en Fig. 4.4.



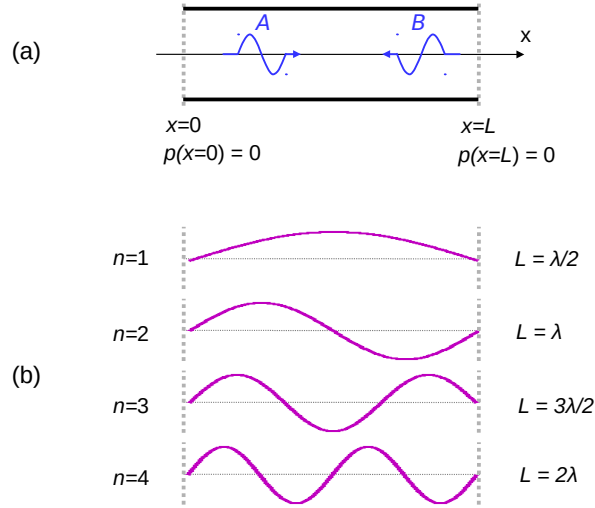


Fig. 4.3 – (a) Représentation schématique d'un tube ouvert/ouvert de longueur  $L$ ; (b) représentation graphique des premiers modes propres d'un tube ouvert/ouvert.

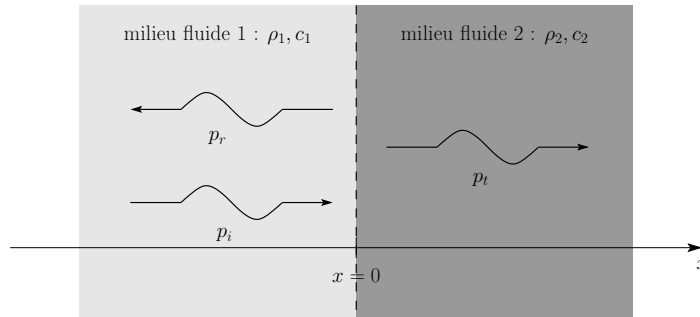


Fig. 4.4 – Représentation d'une interface entre deux milieux fluides à laquelle une onde d'incidence normale donne lieu à une onde réfléchie et une onde transmise.

#### 4.2.1 Coefficients de réflexion et de transmission

Pour quantifier les phénomènes de réflexion et transmission, les coefficients de réflexion et de transmission peuvent être calculés.

Chacun des deux milieux est décrit par son impédance caractéristique,  $Z_1 = \rho_1 c_1$  pour le milieu 1 et  $Z_2 = \rho_2 c_2$  pour le milieu 2. En considérant le régime harmonique à la pulsation  $\omega$ ,

- l'onde incidente s'écrit :  $p_i(x) = Ae^{jk_1 x}$  avec  $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$ ,
- l'onde réfléchie s'écrit :  $p_r(x) = R_p A e^{-jk_1 x}$ ,
- l'onde transmise s'écrit :  $p_t(x) = T_p A e^{jk_2 x}$  avec  $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$ ,

où  $R_p$  et  $T_p$  sont les coefficients de réflexion et de transmission en pression pour une onde incidente depuis le milieu 1 vers le milieu 2. Finalement, le champ dans le milieu 1 est  $p_1 = p_i + p_r$ , le champ dans le milieu 2 est  $p_2 = p_t$ . Pour rechercher les deux inconnues  $R_p$  et  $T_p$ , il convient d'écrire deux lois de raccordement du champ acoustique à l'interface en  $x = 0$ .

A l'interface, la pression acoustique doit être continue :

$$p_1(x=0) = p_2(x=0) \Rightarrow p_i(x=0) + p_r(x=0) = p_t(x=0) \Rightarrow p_i + R_p p_i = T_p p_i, \quad (4.36)$$

ce qui conduit à

$$1 + R_p = T_p. \quad (4.37)$$

A l'interface, la vitesse doit également être continue :

$$v_1(x=0) = v_2(x=0) \Rightarrow v_i(x=0) + v_r(x=0) = v_t(x=0) \Rightarrow \frac{p_i}{Z_1} - R_p \frac{p_i}{Z_1} = T_p \frac{p_i}{Z_2}, \quad (4.38)$$

ce qui conduit à

$$1 - R_p = \frac{Z_1}{Z_2} T_p. \quad (4.39)$$

A partir des Eqs. (4.37) et (4.39), les coefficients  $R_p$  et  $T_p$  sont

$$R_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (4.40)$$

$$T_p = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Ces mêmes coefficients, exprimés en vitesse sont

$$R_v = -R_p = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (4.41)$$

$$T_v = T_p = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

✓ **Tester ses connaissances en résolvant les brevets : 13, 14, 15**



# Chap. 5

---

## Les sources acoustiques élémentaires

---

Ce chapitre a pour but de présenter les notions essentielles autour des multipôles acoustiques. Comme leur nom l'indique, ces sources présentent des caractéristiques et des propriétés de rayonnement relativement simples, si bien qu'elles peuvent être décrites de façon analytique. Elles sont alors très utiles en acoustique pour approximer des sources réelles. Par exemple, pour décrire le rayonnement compliqué d'un plan source, il peut être pertinent de considérer que ce plan source est la superposition d'un ensemble de monopôles et/ou multipôles. Dans ce chapitre, l'étude sera restreinte au cas du monopôle, puis du dipôle.

### 5.1 L'onde sphérique

Dans le système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ , l'opérateur Laplacien  $\Delta$  de l'équation des ondes  $\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p(r, \theta, \phi, t) = 0$  s'écrit

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (5.1)$$

L'onde sphérique est la solution d'un cas particulier de l'équation des ondes en coordonnées sphériques. Ce cas particulier correspond au rayonnement *isotrope* d'une source : le champ est indépendant des coordonnées angulaires  $\theta$  et  $\phi$  et ne dépend donc que la distance à la source portée par la coordonnée  $r$ . Le front d'onde est une sphère de rayon  $r$ , d'où le nom de cette solution particulière : l'onde sphérique.

Dans ces conditions d'invariance du champ en  $\theta$  et en  $\phi$ , les opérateurs  $\partial/\partial\theta$  et  $\partial/\partial\phi$  de  $\Delta$  s'annulent et l'équation des ondes devient

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p(r, t) = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p(r, t) = 0 \quad (5.2)$$

et peut se réécrire

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) rp(r, t) = 0. \quad (5.3)$$

L'Eq. (5.3) se ramène donc à une équation des ondes unidimensionnelle pour la variable  $rp(r, t)$  (et non  $p(r, t)$ ). Sa solution dans le domaine temporel peut s'écrire

$$rp(r, t) = f(r - ct) + g(r + ct) \quad (5.4)$$

soit

$$p(r, t) = \frac{1}{r} f(r - ct) + \frac{1}{r} g(r + ct). \quad (5.5)$$

Le premier terme de cette solution correspond à une onde progressive divergente (s'éloignant du point source). Lorsque  $r \rightarrow \infty$ ,  $p^+ \rightarrow 0$ , ce qui vérifie la condition de Sommerfeld. Cette décroissance en  $1/r$  typique des ondes sphériques s'interprète physiquement : en l'absence de perte dans le milieu, l'énergie totale portée par une onde se conserve, si la surface du front d'onde augmente avec la distance à la source (ce qui est le cas pour l'onde sphérique), l'amplitude en un point de ce front d'onde doit nécessairement décroître. Cet effet est appelé *la dispersion géométrique*.

Le deuxième terme de la solution correspond à une onde progressive convergente (se rapprochant du point source) qui n'a pas de sens physique en pratique (sauf quelques rares exceptions).

En régime harmonique, la solution s'écrit

$$p(r, \omega) = A \frac{e^{jkr}}{r} + B \frac{e^{-jkr}}{r}. \quad (5.6)$$

Il peut être pratique de retenir que pour l'onde plane le terme propagateur est  $e^{jk\xi}$  alors que l'onde sphérique le terme propagateur est  $\frac{e^{jk\xi}}{\xi}$ , avec  $\xi$  la coordonnée d'espace. Dans les deux cas, il s'agit bien d'ondes unidimensionnelles car leur propagation ne dépend que d'une seule coordonnée spatiale.

L'équation d'Euler en coordonnées sphériques et dans laquelle seuls les termes radiaux sont retenus (les autres termes sont nuls en raison de l'hypothèse de champ 1D) s'écrit

$$\frac{\partial p(r, \omega)}{\partial r} = j\omega\rho_0 v_r(r, \omega) \quad (5.7)$$

où  $v_r(r, \omega)$  est la composante radiale de  $\tilde{v} = v_r \cdot \tilde{r} + v_\theta \cdot \tilde{\theta} + v_\phi \cdot \tilde{\phi}$ , les autres composantes étant nulles ( $v_\theta = v_\phi = 0$ ).

La vitesse radiale s'obtient en reportant le terme divergent de l'Eq. (5.6) dans cette équation :

$$v_r = \frac{A}{\rho_0 c} \frac{e^{jkr}}{r} \left( 1 - \frac{1}{jkr} \right). \quad (5.8)$$

Cette solution pour la vitesse radiale fait apparaître un terme de champ proche ( $\frac{1}{jkr}$ ) qui domine proche de la source (lorsque  $r$  est faible) mais qui décroît en  $1/r^2$ . L'autre terme est un terme de champ lointain pour lequel le résultat de l'onde plane est retrouvé :  $v^+ = \frac{p^+}{\rho_0 c}$ . En effet, loin de la source, la courbure du front d'onde sphérique est très grande et l'onde sphérique peut localement être considérée comme plane. Il est à noter que le terme de champ proche est en quadrature de phase avec le terme de champ lointain (présence du  $j$  dans le terme de champ proche).

A partir des Eqs. (5.6) et (5.8), l'impédance acoustique de l'onde sphérique s'écrit

$$Z(r, \omega) = \frac{P}{v_r} = \rho_0 c \frac{1}{1 - \left( \frac{1}{jkr} \right)}, \quad (5.9)$$

et fait également apparaître un terme de champ proche et un comportement de type onde plane en champ lointain.

## 5.2 Monopôle acoustique

Un monopôle acoustique est une source ponctuelle qui rayonne des ondes sphériques divergentes omnidirectionnelles. En pratique, le monopôle s'assimile à une sphère pulsante de rayon  $r_s$  très faible devant la longueur d'onde rayonnée.

Le rayonnement du monopôle est caractérisé par son débit de vitesse à travers une surface sphérique de rayon  $r_s$  :

$$Q = v_r S = 4\pi r_s^2 v_r. \quad (5.10)$$

A partir de cette définition et en ne considérant que le terme de champ proche de l'Eq. (5.8), la pression rayonnée par le monopôle à une distance  $r$  s'exprime

$$p(r, \omega) = \frac{j\omega\rho_0 Q}{4\pi} \frac{e^{jkr}}{r}. \quad (5.11)$$

Le niveau de pression est donc proportionnel à la fréquence. Pour rayonner un même niveau de pression à basse fréquence, il faut alors augmenter le débit  $Q$  de la sphère pulsante, soit en augmentant son rayon  $r_s$ , soit en augmentant sa vitesse radiale pariétale.

✓ **Tester ses connaissances en résolvant les brevets : 16**

### 5.3 Dipôle acoustique

Un dipôle acoustique est une source ponctuelle (tout comme les monopôles) définie à partir de deux monopôles. Un dipôle consiste en l'association de deux monopôles de même débit  $Q$ , distants de  $l$  et dont les rayonnements sont en opposition de phase (Fig. 5.1).

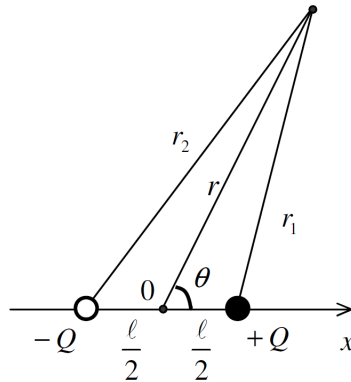


Fig. 5.1 – un dipôle est l'association de deux monopôles de même débit, distant de  $l$ , en opposition de phase.

Dans cette situation, la pression rayonnée s'écrit

$$p(r) = \frac{j\omega\rho_0 Q}{4\pi} \frac{e^{jk r_1}}{r_1} - \frac{j\omega\rho_0 Q}{4\pi} \frac{e^{jk r_2}}{r_2}. \quad (5.12)$$

Considérer le dipôle comme une source ponctuelle implique d'une part que  $r_1 \gg l$  et  $r_2 \gg l$  (le point d'observation est suffisamment éloigné compte tenu de l'espacement  $l$ ), et d'autre part que  $l \ll \lambda$  (les deux monopôles sont très proches à la longueur d'onde considérée). Dans ces hypothèses il est possible de réécrire la pression rayonnée :

$$p(r, \theta) = -\frac{\omega^2 \rho_0 Q l}{4\pi c} \cos(\theta) \frac{e^{jkr}}{r} \left(1 - \frac{1}{jkr}\right). \quad (5.13)$$

La pression rayonnée est donc une fonction de  $\theta$  ce qui indique que le rayonnement n'est pas isotrope mais présente une certaine directivité. En particulier, la pression rayonnée est nulle dans l'axe du dipôle ( $\theta = \pi/2$ ) et admet donc deux lobes de rayonnement latéraux. Ce résultat met aussi en évidence l'existence d'un terme de champ proche qui décroît en  $1/r^2$ . En champ lointain la pression est

$$p_\infty(r, \theta) = -\frac{\omega^2 \rho_0 Q l}{4\pi c} \cos(\theta) \frac{e^{jkr}}{r}. \quad (5.14)$$



# Chap. 6

---

## Intensité et puissance acoustique

---

L'étude détaillée des phénomènes acoustiques peut mettre en jeu un grand nombre de variables et de concepts physiques. Dans un contexte applicatif, il est souvent préférable de réduire ce nombre d'informations pour n'utiliser que quelques grandeurs moyennées, quitte à perdre un certain degré de détail dans l'analyse. L'intérêt est ici porté sur l'intensité et la puissance acoustique, grandeurs très souvent retrouvées pour décrire les champs acoustiques et également à la base de méthodologies classiquement utilisées en ingénierie acoustique (intensimétrie ou caractérisation de sources, par exemple).

### 6.1 Intensité acoustique

#### 6.1.1 Définition

L'intensité acoustique est la grandeur qui correspond à l'énergie acoustique portée par une onde. Il s'agit d'une grandeur vectorielle qui peut s'appeler le "vecteur transport d'énergie" de l'onde. Il peut être démontré que l'intensité acoustique instantannée est définie comme le produit entre pression et vitesse acoustique,

$$\tilde{i}(t) = p(t)\tilde{v}(t). \quad (6.1)$$

Le caractère vectoriel de l'intensité vient donc du terme de vitesse. En pratique, la valeur moyennée dans le temps de l'intensité est couramment utilisée. En notant  $p(t) = \Re[pe^{-j\omega t}]$  et  $\tilde{v}(t) = \Re[\tilde{v}e^{-j\omega t}]$ , l'intensité moyenne s'exprime

$$\tilde{I} = \langle p(t)\tilde{v}(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re[p\tilde{v}^*], \quad (6.2)$$

et satisfait en dehors des sources à la condition de conservation de l'énergie

$$\nabla \cdot \tilde{I} = 0, \quad (6.3)$$

ce qui indique que le flux d'intensité se conserve (la divergence de l'intensité est nulle) : l'énergie acoustique est soit dissipée, soit transmise.

#### 6.1.2 Applications

La définition de l'intensité peut être appliquée à certains exemples simples et très usuels pour lesquels il peut être commode de retenir les résultats.

##### 6.1.2.1 Onde plane progressive

La pression et la vitesse d'une onde progressive le long d'un axe  $x$  s'écrivent

$$p(x) = Ae^{jkx} \quad \text{et} \quad \tilde{v}(x) = \frac{A}{\rho_0 c} e^{jkx}, \quad (6.4)$$

ce qui implique que

$$\tilde{I}(x) = \frac{\|A\|^2}{2\rho_0 c} = \text{constante}. \quad (6.5)$$

En effet, dans le cas d'une onde plane purement progressive dans un milieu non dissipatif, l'amplitude de l'onde reste constante dans l'espace, l'intensité est donc également constante dans l'espace. Ce résultat est très connu, il est souvent le seul résultat mémorisé, attention donc à ne pas l'appliquer dans des cas inappropriés ne correspondant pas au cas de l'onde plane progressive.



### 6.1.2.2 Onde plane stationnaire

La pression et la vitesse d'une onde stationnaire le long d'un axe  $x$  s'écrivent

$$p(x) = 2A \cos(kx) \quad \text{et} \quad \tilde{v}(x) = -j \frac{2A}{\rho_0 c} \sin(kx), \quad (6.6)$$

ce qui implique que

$$\tilde{I}(x) = \frac{1}{2} \Re \left[ j \frac{4 \|A^2\|}{\rho_0 c} \cos(kx) \sin(kx) \right], \quad (6.7)$$

et donc

$$\tilde{I}(x) = 0. \quad (6.8)$$

Ce résultat indique qu'il n'existe aucun transport d'énergie acoustique, en effet une onde stationnaire pure correspond à l'interférence de deux ondes dont les ventres et les noeuds restent immobiles dans l'espace.

### 6.1.2.3 Onde plane quasi-stationnaire

En reprenant les expressions de pression et vitesse dans le cas d'une onde quasi stationnaire, il vient

$$\tilde{I}(x) = \frac{\|A^2\|}{2\rho_0 c} (1 - \|R^2\|). \quad (6.9)$$

La quantité d'énergie transportée dépend donc du coefficient de réflexion de la paroi. Les résultats pour l'onde stationnaire et progressive sont bien retrouvés si  $\|R\| = 1$  et  $\|R\| = 0$ , respectivement.

### 6.1.2.4 Onde sphérique monopolaire

La pression et la vitesse radiale d'une onde sphérique rayonnée par un monopôle dans l'espace libre s'écrivent

$$p(r) = A \frac{e^{jkr}}{r} \quad \text{et} \quad \tilde{v}_r(r) = \frac{A}{\rho_0 c} \frac{e^{jkr}}{r} \left( 1 - \frac{j}{kr} \right), \quad (6.10)$$

ce qui implique que

$$\tilde{I}(r) = \frac{\|A^2\|}{2\rho_0 c} \Re \left[ \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{j}{kr} \right) \right], \quad (6.11)$$

et donc

$$\tilde{I}(r) = \frac{\|A^2\|}{2\rho_0 c r^2}. \quad (6.12)$$

L'énergie portée par l'onde sphérique divergente décroît donc avec le carré de la distance. Tout comme pour l'onde plane progressive, l'intensité est reliée à l'amplitude quadratique. Cette relation n'est plus vérifiée dans le cas de sources non monopolaire (bipôle par exemple) ou en présence de parois qui produisent des réflexions modifiant le résultat.

## 6.2 Puissance acoustique

La puissance correspond à un flux (ou un débit) d'intensité acoustique à travers une surface fermée et se définit

$$W = \oint \tilde{I} \cdot \tilde{n} dS = \oint I_n dS, \quad (6.13)$$

où  $\tilde{n}$  est la normale à la paroi et  $I_n$  la composante normale de  $\tilde{I}$  à la paroi.

La puissance est très utile pour caractériser des sources souvent décrites par un débit, la surface considérée entoure alors la source.

Dans le cas du monopôle, la surface à considérer est une sphère de rayon  $r$ . L'intensité normale est alors directement l'intensité radiale, la puissance est donc

$$W = \oint \frac{\|A^2\|}{2\rho_0 c r^2} dS = \frac{\|A^2\|}{2\rho_0 c r^2} S = \frac{\|A^2\|}{2\rho_0 c r^2} 4\pi r^2, \quad (6.14)$$

soit

$$W = \frac{2\pi \|A^2\|}{\rho_0 c}. \quad (6.15)$$

La puissance acoustique est indépendante de  $r$ , cette grandeur est donc caractéristique de la source uniquement, d'où son utilité annoncée précédemment. Cette propriété est en particulier mise en oeuvre dans les méthodes d'intensimétrie acoustique qui consistent à mesurer l'intensité normale aux points d'un maillage surfacique entourant la source de façon à approximer l'intégrale et donc estimer la puissance de la source.

✓ **Tester ses connaissances en résolvant les brevets : 17**



# Chap. 7

---

## Annexes

---

### 7.1 Les décibels en acoustique : dB SPL, dB(A), dB(B), dB(C)

Le décibel est une unité logarithmique sans dimensions très utilisée en physique au sens large, plus particulièrement en électronique et en acoustique. Le bel est défini comme étant le logarithme (en base 10) du rapport de deux puissances  $P_1$  et  $P_0$ . Le décibel est alors dix fois ce logarithme :

$$W[dB] = 10 \lg_{10} \left( \frac{W_1}{W_0} \right), \quad (7.1)$$

où  $W_0$  est souvent une puissance de référence permettant de normaliser le niveau, c'est à dire de fixer le niveau 0dB. Le choix de ces valeurs de référence est propre à chaque domaine de la physique. En acoustique, la valeur de référence correspond au seuil d'audition de l'oreille humaine d'un son pur à une fréquence de 1000Hz. Le dB s'applique en acoustique pour mesurer des niveaux de puissance, d'intensité et de pression acoustique.

Le niveau de puissance acoustique est défini comme

$$L_W[dB] = 10 \lg_{10} \left( \frac{W}{W_{ref}} \right), \quad (7.2)$$

avec  $W$  la puissance à exprimer en dB et  $W_{ref} = 10^{-12}$  [W].

Le niveau d'intensité acoustique est défini comme

$$L_I[dB] = 10 \lg_{10} \left( \frac{I}{I_{ref}} \right), \quad (7.3)$$

avec  $I$  l'intensité à exprimer en dB et  $I_{ref} = 10^{-12}$  [W.m<sup>-2</sup>].

Le niveau de pression acoustique, dit dB lin ou SPL (Sound Pressure Level), se déduit de la définition du niveau de puissance. En effet, le dB étant défini comme un rapport de quantités énergétiques, il faut intervenir la pression quadratique :

$$L_p[dB] = 10 \lg_{10} \left( \frac{p_{eff}^2}{p_{ref}^2} \right) = 20 \lg_{10} \left( \frac{p_{eff}}{p_{ref}} \right), \quad (7.4)$$

avec  $p_{eff}$  la valeur efficace de la pression et  $p_{ref} = 2.10^{-5}$  [Pa]. Pour un signal acoustique quelconque,  $p_{eff}$  est défini comme

$$p_{eff} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t)^2 dt}. \quad (7.5)$$

L'application de cette définition au cas particulier de l'onde de fréquence pure donne  $p_{eff} = A/\sqrt{2}$  avec  $A$  l'amplitude du signal. En acoustique le dB est particulièrement utile car il permet de représenter sur une dynamique d'environ une centaine de dB, une gamme de pressions acoustiques pouvant aller de quelques  $10^{-5}$ Pa (seuil d'audition) à quelques dizaines de Pa (seuil de douleur), soit environ 6 ordres de grandeur. Par ailleurs, d'un point de vue perceptif, il faut retenir que la sensation de force sonore double environ tous les 10 dB SPL. Ainsi, toutes choses égales par ailleurs, un son de 70 dB SPL semblera, en moyenne, 4 fois plus fort qu'un son de 50 dB SPL.

Toutefois, le dB SPL ne rend pas compte du filtrage physiologique de l'oreille humaine qui n'a pas la

même sensibilité aux sons à toutes les fréquences. Cet effet de filtrage s'illustre par les courbes isotoniques qui donnent en fonction de la fréquence le niveau de pression acoustique (en dB SPL) provoquant la même sensation de force sonore (ou sonie). Ces courbes, représentées en Fig. 7.1(a), montrent en particulier que le système auditif humain filtre significativement les basses fréquences. De plus, ces courbes montrent que ce filtrage physiologique dépend du niveau sonore. Ces courbes ont été obtenues empiriquement par des tests d'écoute dont les plus connus sont ceux de Fletcher et Munson en 1933. La norme internationale ISO 226, dont la dernière mise à jour date de 2003, standardise ces courbes isotoniques.

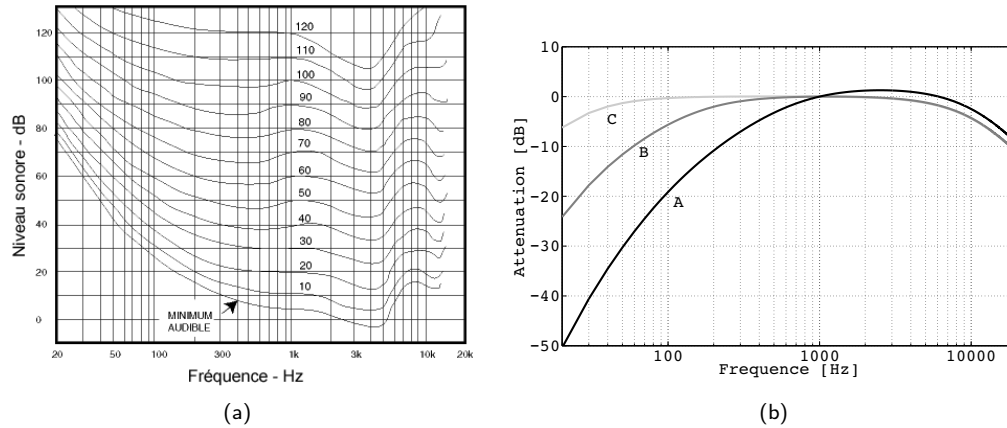


Fig. 7.1 – (a) Courbes isotoniques donnant en fonction de la fréquence le niveau de pression provoquant la même sensation de force sonore. (b) Représentation graphique des filtres de pondération A (noir), B (gris foncé) et C (gris clair) permettant de prendre en compte la sensibilité de l'oreille humaine en fonction du niveau sonore.

Le filtrage physiologique de l'audition humaine doit donc être pris en compte pour mesurer la sensation auditive humaine de façon plus réaliste. Il convient de corriger le niveau de pression exprimé en dB SPL en appliquant les filtres de pondération A, B ou C représentés en Fig. 7.1(b), qui approximent l'inverse des courbes isotoniques. Le filtre A, correspondant à la courbe isotonique 40dB à 1000Hz, n'est théoriquement valable pour les bruits de faible niveau. Les filtres B et C, correspondant respectivement aux courbes isotoniques 70dB et 90dB à 1000Hz, donnent une correction plus réaliste aux niveaux sonores plus élevés. Il existe également un filtre D spécifique aux bruits des avions.

En raison du contexte normatif et réglementaire impliquant très peu les filtres B et C, le filtre A reste le plus utilisé, en particulier en acoustique architecturale. En pratique, le filtre s'utilise sous la forme de coefficients correctifs en bande d'octave à appliquer aux niveaux en dB SPL. Ces coefficients sont donnés dans le tableau ci dessous :

bande d'octave	31.5Hz	63Hz	125Hz	250Hz	500Hz	1kHz	2kHz	4kHz	8kHz
Filtre A	-39,4	-26,2	-16,1	-8,6	-3,2	0	1,2	1	-1,1

Les aspects perceptifs en acoustique sont dans de nombreux cas importants à prendre en compte. Au delà des niveaux sonores (même corrigés), la "qualité" sonore des signaux acoustiques perçus doit être maîtrisée. Les effets de filtrage rappelés ici sont alors insuffisants et d'autres effets perceptifs doivent être décrits. Il existe pour cela un ensemble d'indicateurs et de méthodologies d'analyse.

## 7.2 Les bandes de fréquence

La représentation et l'analyse fréquentielle des signaux acoustiques sont très largement utilisés. En supposant que le signal est stationnaire, son spectre fréquentiel peut être obtenu par transformée de Fourier du signal temporel. Le spectre est l'indicateur fréquentiel le plus complet, il est une quantité complexe donnant à chaque fréquence une information sur l'amplitude et la phase.

Dans de nombreuses applications de l'acoustique et dans le cadre de nombreuses normes, le niveau de détail du spectre n'est pas utile (voire contraignant) et il est plus pertinent de travailler sur des quantités moyennées sur des bandes de fréquence. Les bandes de fréquence utilisées ont la largeur d'un octave (doublement de fréquence) voire d'un tiers d'octave, d'où leur appellation bande d'octave ou bande de

tiers d'octave, respectivement. Les bandes d'octave sont beaucoup utilisées en acoustique architecturale en raison du contexte normatif. Les bandes de tiers d'octave sont utilisées pour des analyses fréquentielles plus affinées et permettent de mieux identifier l'émergence de fréquences précises par mis des bruits complexes large bande (acoustique industrielle, bruit de machines, transport, par exemple).

Les bandes d'octaves et tiers d'octave sont définies par leur fréquence centrale et leurs bornes fréquentielles inférieure  $f_{min}$  et supérieure  $f_{max}$  des bandes sont définies comme :

- $f_{max} = 2f_i$  et  $f_{min} = 2^{-1}f_i$  pour les bandes d'octave
- $f_{max} = 2^{1/3}f_i$  et  $f_{min} = 2^{-1/3}f_i$  pour les bandes de tiers d'octave

Les fréquences centrales  $f_i$  sont normalisées (norme ISO 266), leurs valeurs sont données dans le tableau ci dessous :

1/1 octave [Hz]	1/3 octave [Hz]		
31.5	25	31,5	40
63	50	63	80
125	100	125	160
250	200	250	315
500	400	500	630
1000	800	1000	1250
2000	1600	2000	2500
4000	3150	4000	5000
8000	6300	8000	10000
16000	12500	16000	20000

### 7.3 L'opérateur Nabla $\nabla$ et ses combinaisons

Nabla, noté  $\nabla$  ou  $\vec{\nabla}$  selon les conventions utilisées, est un symbole mathématique permettant de définir plusieurs opérateurs différentiels.

Les opérateurs les plus utilisés en physique sont :

- **le gradient d'un champ scalaire**  $A$ , définit comme  $\vec{\text{grad}}A = \vec{\nabla}A$ , est un opérateur vectoriel (le résultat de son application au champ  $A$  est un vecteur). Le gradient correspond aux variations spatiales du champ.
- **la divergence d'un champ vectoriel**  $\vec{A}$ , définit comme  $\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ , est un opérateur scalaire (le résultat de son application au champ  $\vec{A}$  est un scalaire). La divergence traduit la tendance locale du champ à diverger (ou converger) d'un point.
- **le rotationnel d'un champ vectoriel**  $\vec{A}$ , définit comme  $\vec{\text{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ , est un opérateur vectoriel. Le rotationnel traduit la tendance du champ à tourner autour d'un point.
- **le laplacien d'un champ scalaire**, définit comme  $\Delta = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}A)$ , est un opérateur scalaire. Le laplacien correspond à la courbure locale du champ.

On note qu'il existe également le laplacien vectoriel d'un champ vectoriel  $\vec{A}$ , définit comme  $\vec{\Delta}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ . Sa signification physique est la même que celle du laplacien. Cet opérateur est principalement utile en électromagnétisme et n'est que très peu rencontré en acoustique (il intervient dans la mécanique des fluides visqueux (équations de Navier-Stokes)), il n'est donc pas du tout évoqué dans ce document.

Le tableau ci-dessous présente les définitions les plus utiles faisant intervenir Nabla dans les 3 systèmes de coordonnées usuels. Le symbole  $\partial_n$  désigne la dérivée partielle par rapport à la coordonnée  $n$ . Le symbole  $\partial_{nn}^2$  désigne la dérivée partielle seconde par rapport à la coordonnée  $n$ .

quantité	coord. cartésiennes (x, y, z)	coord. cylindriques (r, θ, z) $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$	coord. sphériques (r, θ, φ) $\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$
$\vec{A}$	$A_x \vec{e}_x$ + $A_y \vec{e}_y$ + $A_z \vec{e}_z$	$A_r \vec{e}_r$ + $A_\theta \vec{e}_\theta$ + $A_z \vec{e}_z$	$A_r \vec{e}_r$ + $A_\theta \vec{e}_\theta$ + $A_\phi \vec{e}_\phi$
$\vec{\nabla}$	$\partial_x \vec{e}_x$ + $\partial_y \vec{e}_y$ + $\partial_z \vec{e}_z$	$\partial_r \vec{e}_r$ + $\frac{1}{r} \partial_\theta \vec{e}_\theta$ + $\partial_z \vec{e}_z$	$\partial_r \vec{e}_r$ + $\frac{1}{r} \partial_\theta \vec{e}_\theta$ + $\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi \vec{e}_\phi$
$\vec{\text{grad}} A = \vec{\nabla} A$	$\partial_x A \vec{e}_x$ + $\partial_y A \vec{e}_y$ + $\partial_z A \vec{e}_z$	$\partial_r A \vec{e}_r$ + $\frac{1}{r} \partial_\theta A \vec{e}_\theta$ + $\partial_z A \vec{e}_z$	$\partial_r A \vec{e}_r$ + $\frac{1}{r} \partial_\theta A \vec{e}_\theta$ + $\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi A \vec{e}_\phi$
$\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$	$\partial_x A_x$ + $\partial_y A_y$ + $\partial_z A_z$	$\frac{1}{r} \partial_r A_r$ + $\frac{1}{r} \partial_\theta A_\theta$ + $\partial_z A_z$	$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 A_r)$ + $\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta A_\theta)$ + $\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi A_\phi$
$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$	$(\partial_y A_z - \partial_z A_y) \vec{e}_x$ + $(\partial_z A_x - \partial_x A_z) \vec{e}_y$ + $(\partial_x A_y - \partial_y A_x) \vec{e}_z$	$(\frac{1}{r} \partial_\theta A_z - \partial_z A_\theta) \vec{e}_r$ + $(\partial_z A_r - \partial_r A_z) \vec{e}_\theta$ + $\frac{1}{r} (\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r) \vec{e}_z$	$\frac{1}{r \sin \theta} (\partial_\theta (\sin \theta A_\phi) - \partial_\phi A_\theta) \vec{e}_r$ + $(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi A_r - \frac{1}{r} \partial_r (r A_\phi) A_z) \vec{e}_\theta$ + $\frac{1}{r} (\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r) \vec{e}_\phi$
$\Delta = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} A)$	$\partial_{xx}^2 A$ + $\partial_{yy}^2 A$ + $\partial_{zz}^2 A$	$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r A)$ + $\frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 A$ + $\partial_{rr}^2 A$	$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r A)$ + $\frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta A)$ + $\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_{\phi\phi}^2 A$

# Chap. 8

---

## Brevets : Sujets

---

### BREVET 01 : Est ce une onde acoustique ?

La Fig. 8.1 présente plusieurs signaux de pression variable au cours du temps ou de l'espace. Pour chacun de ces signaux, s'agit il d'une onde acoustique ? Pourquoi ?

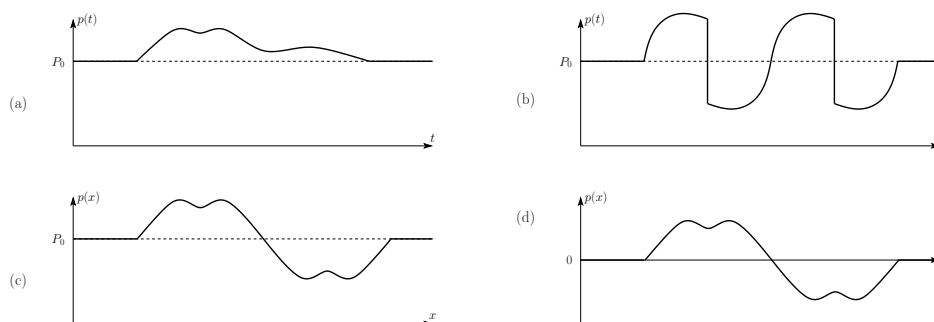


Fig. 8.1 – Représentation de plusieurs signaux de pression au cours du temps.

### BREVET 02 : limite de l'hypothèse de linéarité

En supposant arbitrairement que l'hypothèse de linéarité est validée tant que la valeur efficace du champ de pression est telle que  $p_{eff} < 0,001p_0$ . Calculer le niveau de pression acoustique en dB à partir duquel la propagation acoustique est non linéaire dans l'air où règne une pression atmosphérique  $p_0 = 1$  bar.

### BREVET 03 : Équation des ondes en vitesse

Trouver l'écriture de l'équation des ondes en vitesse à partir des Eqs. (3.11) sur lesquelles il faut appliquer des opérations analogues à celles effectuées en section 3.2.1.

### BREVET 04 : Quelques ordres de grandeurs #1

Calculer la célérité des ondes acoustiques :

- dans l'air sec à  $0^\circ\text{C}$  puis à  $50^\circ\text{C}$  (sous pression atmosphérique  $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{Pa}$ )
- dans l'air sec à  $15^\circ\text{C}$  sous pression atmosphérique  $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{Pa}$  (au sol terrestre) puis à  $-50^\circ\text{C}$  sous pression atmosphérique  $P_0 = 0,265 \cdot 10^5 \text{Pa}$  (altitude de 10000m)

En déduire les variations de célérité.

Applications numériques :

- masse volumique :  $\rho_0 = \frac{P_0 M}{RT}$
- masse molaire :  $M = 28,965338 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
- constante des gaz parfaits :  $R = 8,3144621 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
- coefficient adiabatique :  $\gamma_{air} = 1,4$



## BREVET 05 : Quelques ordres de grandeurs #2

En supposant la célérité dans l'air  $c_{air} = 340\text{m.s}^{-1}$  et dans l'eau  $c_{eau} = 1500\text{m.s}^{-1}$ , calculer la longueur d'une onde de fréquence  $f = 1000\text{Hz}$  dans chacun de ces deux fluides.

## BREVET 06 : Quelques ordres de grandeurs #3

Calculer l'impédance acoustique des fluides suivants :

- Air sec tel que  $\rho_0 = 1,225 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $c = 340\text{m.s}^{-1}$
- Eau telle que  $\rho_0 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $c = 1500\text{m.s}^{-1}$

Une source de débit délivrant une certaine amplitude de vitesse acoustique  $A$  est placée dans chacun de ces deux milieux supposés infinis. Quelle est la différence de niveau de pression dans ces deux milieux. Dans quel milieu le niveau de pression est le plus fort ?

## BREVET 07 : Traduire des équations en langue maternelle

Réécrire dans votre langue maternelle au moyen d'une ou plusieurs phrases simples, les Eqs. (3.1), (3.3), (3.7), (3.9) et (3.31).

## BREVET 08 : Réflexion d'une onde en vision temporelle #1

Le long d'un axe  $x$  une onde plane de pression se propage avec la célérité  $c$  dans le sens des  $x$  croissants. A l'instant  $t = 0$ , l'onde se trouve à une distance  $L$  d'une paroi dont le coefficient de réflexion en pression vaut  $R_p = 0,5$  et le coefficient de réflexion en vitesse vaut  $R_v = -0,5$ . Le champ de pression à  $t = 0$  est représenté à la Fig. 8.2(a). Le champ de vitesse est supposé être exactement de la même forme que le champ de pression.

Représenter les champs de pression totale et de vitesse totale aux instants  $t = L/c$  et  $t = 2L/c$  en complétant les Fig. 8.2(b) et Fig. 8.2(c), respectivement.

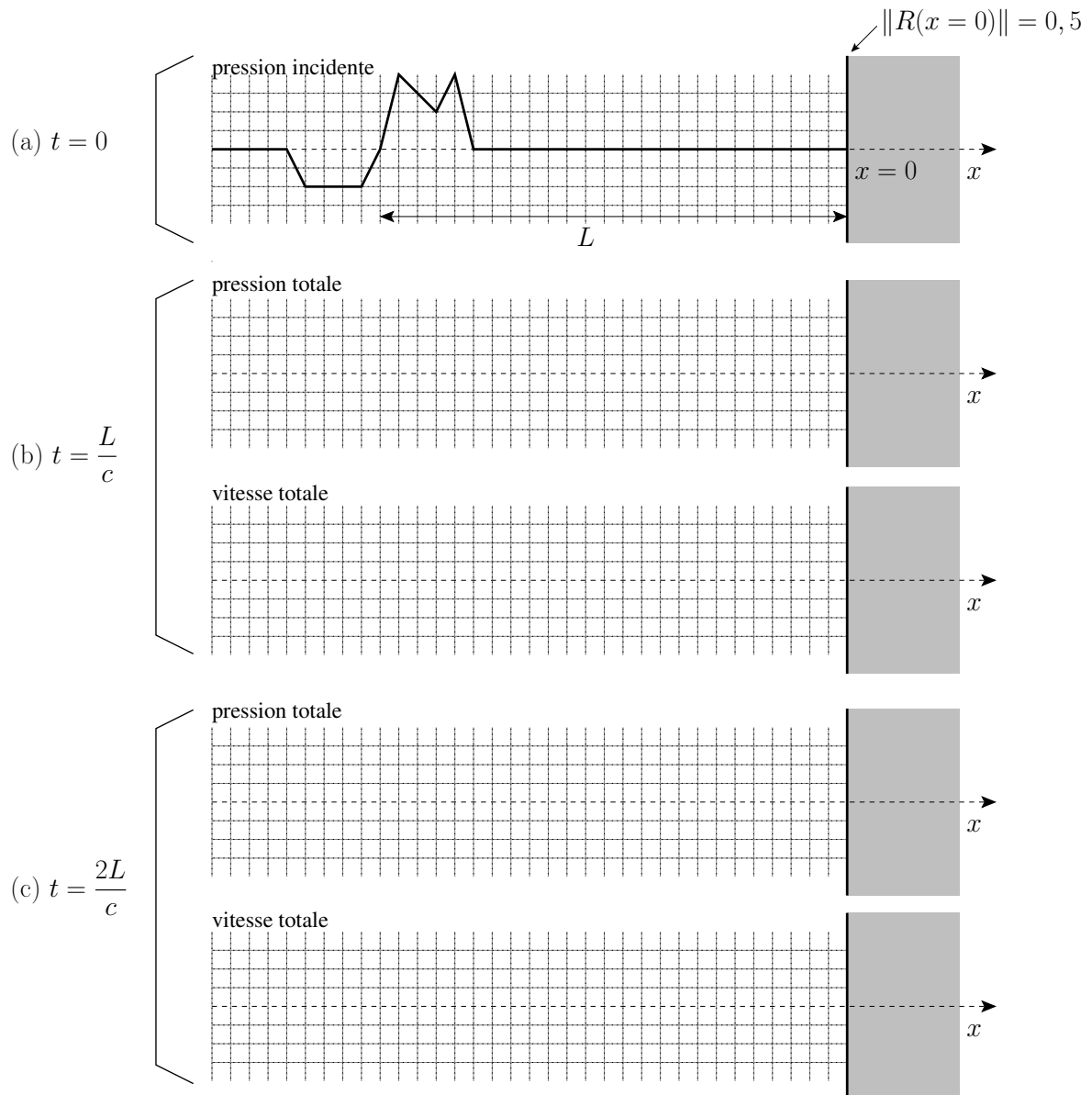


Fig. 8.2 – Représentation temporelle de la réflexion d'une onde incidente sur une paroi rigide

## BREVET 09 : Réflexion d'une onde en vision temporelle #2

le long d'un axe  $x$  une onde plane de pression se propage avec la célérité  $c$  dans le sens des  $x$  croissants. A l'instant  $t = 0$ , l'onde se trouve à une distance  $L$  d'une paroi dont le coefficient de réflexion en pression vaut  $R_p = -0,5$  et le coefficient de réflexion en vitesse vaut  $R_v = 0,5$ . Le champ de pression à  $t = 0$  est représenté à la Fig. 8.3(a). Le champ de vitesse est supposé être exactement de la même forme que le champ de pression.

Représenter les champs de pression totale et de vitesse totale aux instants  $t = L/c$  et  $t = 2L/c$  en complétant les Fig. 8.3(b) et Fig. 8.3(c), respectivement.

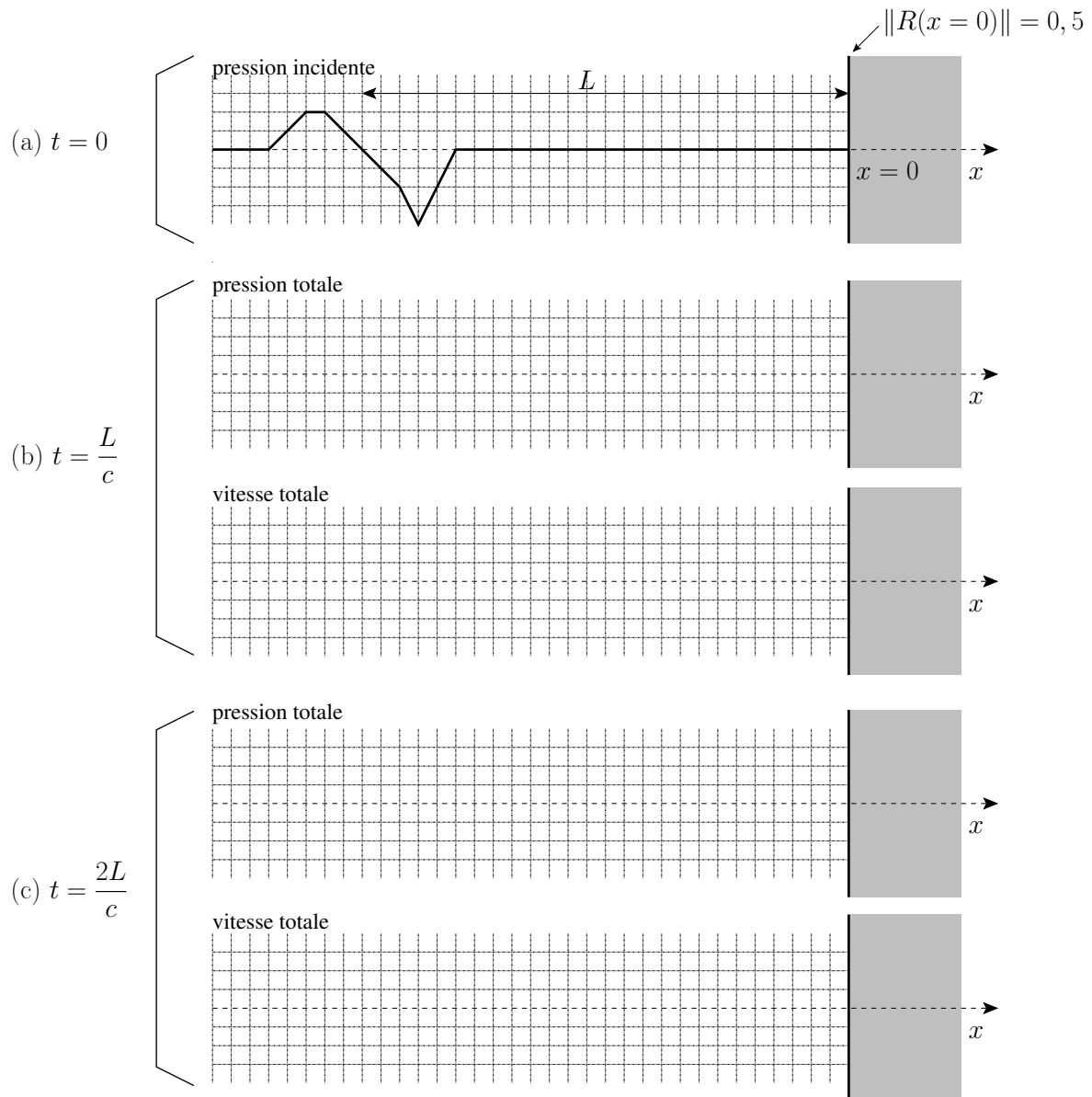


Fig. 8.3 – Représentation temporelle de la réflexion d'une onde incidente sur une paroi rigide

## BREVET 10 : Réflexion totale avec déphasage en vision fréquentielle

Le long d'un axe  $x$  une onde plane se propage dans les  $x+$  vers une paroi parfaitement réfléchissante placée en  $x = 0$ . La réflexion donne lieu à une onde stationnaire pour les  $x < 0$ .

Dans la Fig. 8.4, représenter qualitativement et à main levée les champs de pression et de vitesse lorsque le coefficient de réflexion en pression vaut  $R_p = 1e^{j\frac{\pi}{4}}$  (en Fig. 8.4(a)) et  $R_p = 1e^{-j\frac{\pi}{2}}$  (en Fig. 8.4(b)). Bien prendre soin de noter les points remarquables et toute annotation utile, à l'instar de la Fig. 4.1.

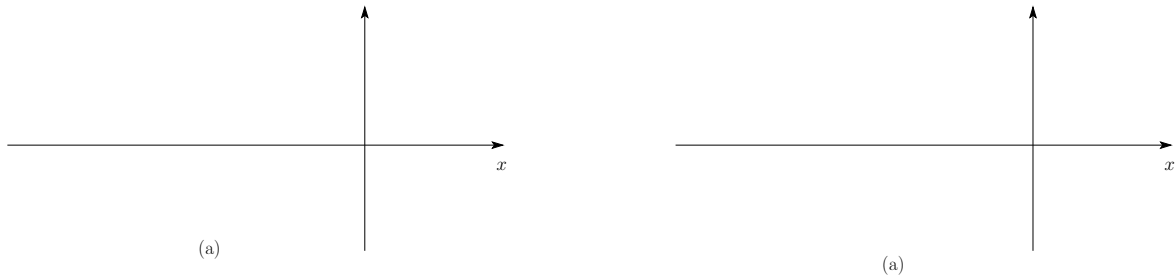


Fig. 8.4 – Représentation d'une onde stationnaire produite par une paroi dont le coefficient de réflexion est (a)  $R_p = 1e^{j\frac{\pi}{4}}$  et (b)  $R_p = 1e^{-j\frac{\pi}{2}}$ .

## BREVET 11 : Mesure du coefficient de réflexion d'une paroi

Une onde plane incidente de fréquence pure  $f = 500$  Hz se propage dans le sens des  $x$  décroissants vers une paroi partiellement réfléchissante positionnée en  $x = 0$ . La célérité du milieu de propagation est  $c = 320$  m/s et sa masse volumique est  $\rho = 1$  kg/m<sup>3</sup>. L'onde réfléchie, se propageant dans le sens des  $x$  croissants, interfère avec l'onde incidente et donne lieu à une onde quasi-stationnaire dont le module de l'amplitude est représentée en Fig. 8.5. La convention temporelle retenue est  $\exp(-j\omega t)$ .

Des mesures indiquent les valeurs et les positions des maxima et minima d'amplitude :

- Maximas de pression :  $P_{max} = 1,73$  en  $x_{max} = 0,2667$  et en  $x_{max} = 0,5867$
- Minimas de pression :  $P_{min} = 0,27$  en  $x_{min} = 0,1067$  et en  $x_{min} = 0,4267$

A partir de ces mesures, calculer le module et la phase du coefficient de réflexion de la paroi. Le résultat est il le même quel que soit les mesures choisies pour estimer  $R$ .

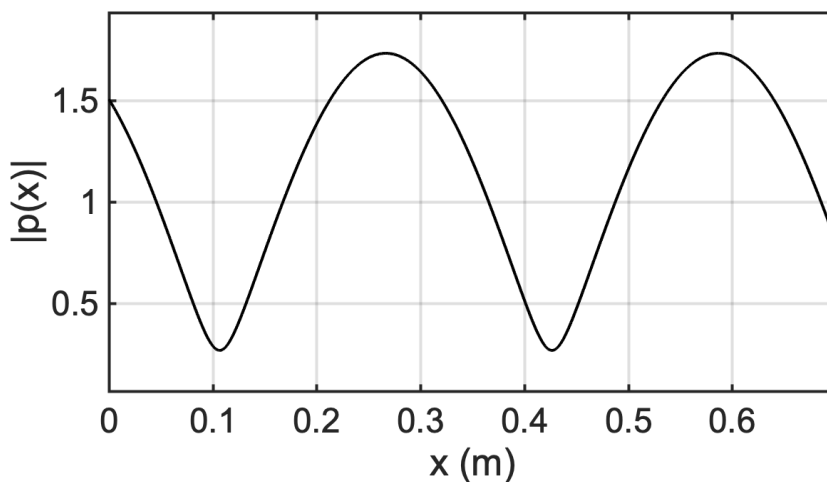


Fig. 8.5 – Module de l'amplitude du champ quasistationnaire de pression  $\|p(x)\|$

## BREVET 12 : tube fermé/fermé et tube ouvert/fermé

1 - Résoudre le problème du tube fermé/fermé, puis celui du tube "ouvert/fermé" selon la démarche présentée ci-dessous.

2 - Interpréter les résultats de ces deux problèmes en comparant avec les résultats du tube ouvert/ouvert.

3 - Dimensionner pour chacun des trois résonateurs la longueur du tube pour accorder sa première fréquence propre sur le La3 ( $f_{La3} = 440$  Hz). Considérer que  $c = 340$  m/s

Étapes de la résolution :

- 1) Représenter le problème par un schéma faisant apparaître tous les paramètres utiles.
- 2) Écrire l'équation décrivant la physique du problème dans le domaine fréquentiel.
- 3) Écrire la forme générale de la solution à cette équation pour la pression et pour la vitesse.
- 4) Écrire le jeu de conditions limites associées aux extrémités en  $x = 0$  et  $x = L$ . Compléter le schéma du problème de l'étape 1).
- 5) Appliquer à la forme générale de la solution la condition limite écrite en  $x = 0$  de façon à réécrire les expressions de la pression et la vitesse.
- 6) Appliquer à la forme générale de la solution la condition limite écrite en  $x = L$  de façon à réécrire les expressions de la pression et la vitesse.
- 7) Conclure la démarche en faisant une représentation graphique des solutions obtenues.

## BREVET 13 : Application numérique d'une interface fluide

Calculer les coefficients  $R_p$ ,  $R_v$ ,  $T_p$  et  $T_v$  d'une interface air/eau et d'une interface eau/air.

Les paramètres de ces fluides sont  $\rho_{air} = 1,225 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $c_{air} = 340 \text{ m.s}^{-1}$  pour l'air et  $\rho_{eau} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $c_{eau} = 1500 \text{ m.s}^{-1}$  pour l'eau.

## BREVET 14 : Champ acoustique de part et d'autre d'une interface fluide

La Fig. 8.6 représente une interface fluide en  $x = 0$  entre un fluide 1 ( $x < 0$ ) et un fluide 2 ( $x > 0$ ). Soit une onde plane progressive venant de  $-\infty$  se propageant dans les  $x+$ . Les milieux 1 et 2 sont supposés semi-infinis.

De quelle nature est le champ dans le milieu 1 ? Dans le milieu 2 ?

Sur la Fig. 8.6, représenter qualitativement dans les milieux 1 et 2 le module du champ de pression en supposant que l'interface n'introduit aucun déphasage.

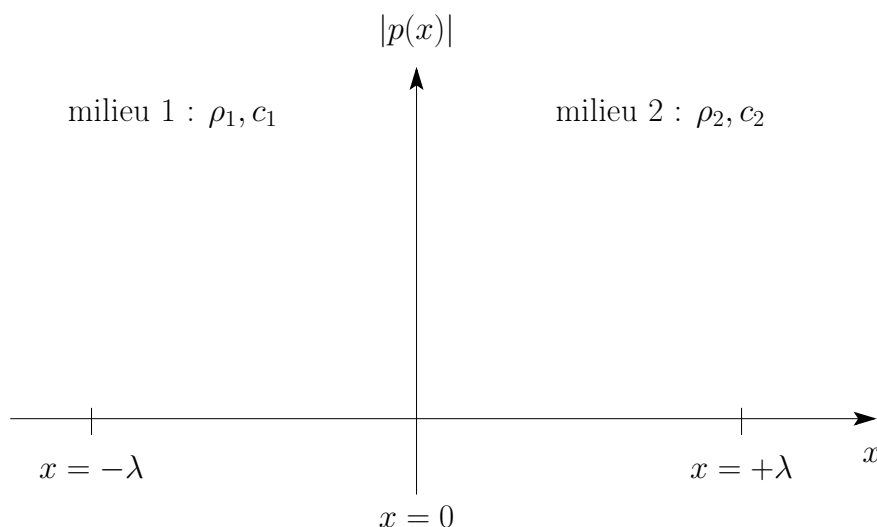


Fig. 8.6 – Représentation du module du champ de pression  $\|p(x)\|$  au voisinage d'une interface fluide.

## BREVET 15 : Mesure d'une impédance caractéristique d'un fluide à partir d'un champ quasi-stationnaire

Le long d'un axe  $x$ , un domaine de propagation est constitué d'un premier milieu fluide, défini pour  $x < 0$ , de masse volumique  $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$ , dont la célérité des ondes acoustiques est  $c_1 = 1500 \text{ m/s}$ , et d'un deuxième milieu fluide, défini pour  $x > 0$ , de masse volumique  $\rho_2 \text{ kg/m}^3$ , dont la célérité des ondes acoustiques est  $c_2 \text{ m/s}$ . Le domaine est représenté en Fig. 8.7(a). Dans le milieu 1, une onde plane  $P_i$  monochromatique se propage dans le sens des  $x$  croissants vers l'interface en  $x = 0$ . L'onde réfléchie  $P_r$  donne lieu dans le milieu 1 à une onde quasi-stationnaire représentée en Fig. 8.7(b), dont l'amplitude maximale est  $P_{max} = 1.5789 \text{ Pa}$  et dont l'amplitude minimale est  $P_{min} = 0.42105 \text{ Pa}$ .

Que vaut l'impédance du milieu 2 ?

Remarque d'aide : bien observer la Fig. 8.7(b) pour connaître le signe du coefficient de réflexion.

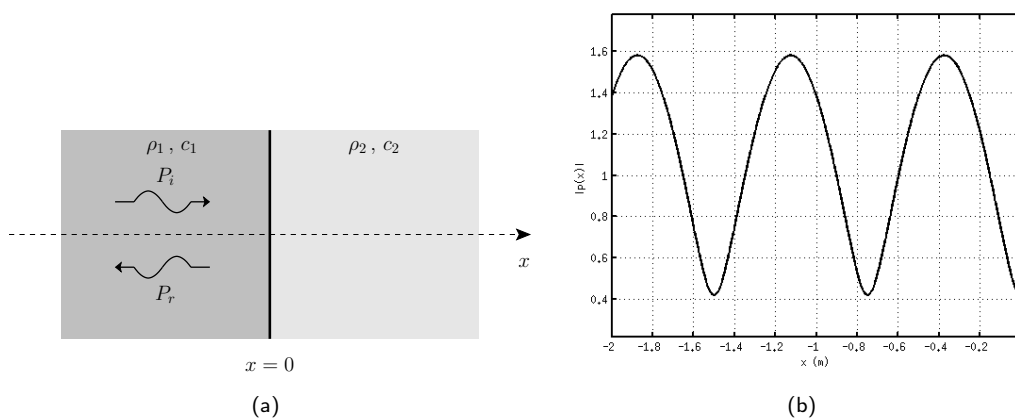


Fig. 8.7 – (a) Domaine de propagation unidimensionnel composé d'un milieu 1 ( $x < 0$ ) et d'un milieu 2 ( $x > 0$ ); (b) Onde quasi stationnaire dans le milieu 1.

## BREVET 16 : Étude d'une sphère pulsante

Dans un milieu de propagation de masse volumique  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$  et de célérité  $c = 100 \text{ m/s}$ , une sphère pulse à la fréquence  $f = 1000 \text{ Hz}$  dans des conditions de champ libre. A sa paroi, la vitesse acoustique radiale vaut  $v_s = 0.01 \text{ m.s}^{-1}$ . Un récepteur placé à une distance  $d = 5 \text{ m}$  de la source mesure un niveau de pression acoustique  $L_p = 73 \text{ dB}$  (la pression de référence utilisée pour définir les dB est  $p_0 = 2.10^{-5} \text{ Pa}$ ).

Calculer le rayon de la sphère pulsante.

Dans les conditions décrites ci dessus, est-il correct de modéliser la sphère pulsante comme un monopôle acoustique ? Pourquoi ?

## BREVET 17 : Effet d'un coin sur le rayonnement d'un monopôle

Une source monopolaire est placée dans un milieu fluide infini tridimensionnel dont la masse volumique est  $\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3$  et la célérité des ondes est  $c = 340 \text{ m/s}$ . Dans ces conditions de champ libre, le niveau d'intensité acoustique produit par la source au point A à une distance  $d = 2 \text{ m}$  vaut  $L_I = 73 \text{ dB}$ .

Calculer :

- La puissance acoustique de la source
- Le niveau de pression acoustique perçu au point A
- Le niveau de pression acoustique au point A en considérant que la source est placée dans un coin.



# Chap. 9

---

## Brevets : Résultats

---

### BREVET 01 : Est-ce une onde acoustique ?

Fig. 8.1(a) : Non / Fig. 8.1(b) : Non / Fig. 8.1(c) : Oui / Fig. 8.1(d) : Non

### BREVET 02 : limite de l'hypothèse de linéarité

Le niveau de pression est :  $L_p = 134,09 \text{ dB} \approx 134 \text{ dB}$ .

### BREVET 03 : Equation des ondes en vitesse

L'équation des ondes en vitesse est :  $\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) v(x, t) = 0$

### BREVET 04 : Quelques ordres de grandeurs #1

- $T = 0^\circ\text{C}$  et  $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \Rightarrow c = 331,316 \text{ m/s}$
- $T = 50^\circ\text{C}$  et  $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \Rightarrow c = 360,366 \text{ m/s}$

Donc  $\Delta c = -29,050 \text{ m/s}$

- $T = 15^\circ\text{C}$  et  $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \Rightarrow c = 340,292 \text{ m/s}$
- $T = -50^\circ\text{C}$  et  $P_0 = 0,265 \cdot 10^5 \text{ Pa} \Rightarrow c = 299,461 \text{ m/s}$

Donc  $\Delta c = 40,831 \text{ m/s}$

### BREVET 05 : Quelques ordres de grandeurs #2

- longueur d'onde dans l'air à 1000Hz :  $\lambda_{air} = 0,34\text{m}$
- longueur d'onde dans l'eau à 1000Hz :  $\lambda_{eau} = 1,5\text{m}$

### BREVET 06 : Quelques ordres de grandeurs #3

- Air sec tel que  $\rho_0 = 1,225 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  et  $c = 340\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \Rightarrow Z_{0_{air}} = 4,165 \cdot 10^2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$
- Eau telle que  $\rho_0 = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  et  $c = 1500\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \Rightarrow Z_{0_{eau}} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$
- La différence de niveau de pression est de 71,13 dB, le niveau le plus fort est dans l'eau

### BREVET 07 : Traduire des équations en langue maternelle

- Eq. (3.1) : La somme des forces mécaniques extérieures qui s'exercent sur la tranche de fluide est égale au produit de sa masse et de son accélération.
- Eq. (3.3) : Les variations spatiales de la pression acoustique sont proportionnelles aux variations temporelles de la vitesse acoustique. Le coefficient de proportionnalité est la masse volumique au repos du fluide.
- Eq. (3.7) : Les variations temporelles de la masse volumique du fluide sont proportionnelles aux variations spatiales de la vitesse acoustique. Le coefficient de proportionnalité est la masse volumique au repos du fluide.
- Eq. (3.9) : Dans l'hypothèse de transformations adiabatiques, pression acoustique et masse volumique sont proportionnelles, le coefficient de proportionnalité étant la célérité des ondes élevée au carré.
- Eq. (3.31) : A fréquence fixée, la vitesse acoustique est proportionnelle au gradient de pression acoustique, le coefficient de proportionnalité étant lié à la masse volumique. Par ailleurs, vitesse et pression acoustiques sont en quadrature de phase comme l'indique le terme  $j$ .



### BREVET 08 : Réflexion d'une onde en vision temporelle #1

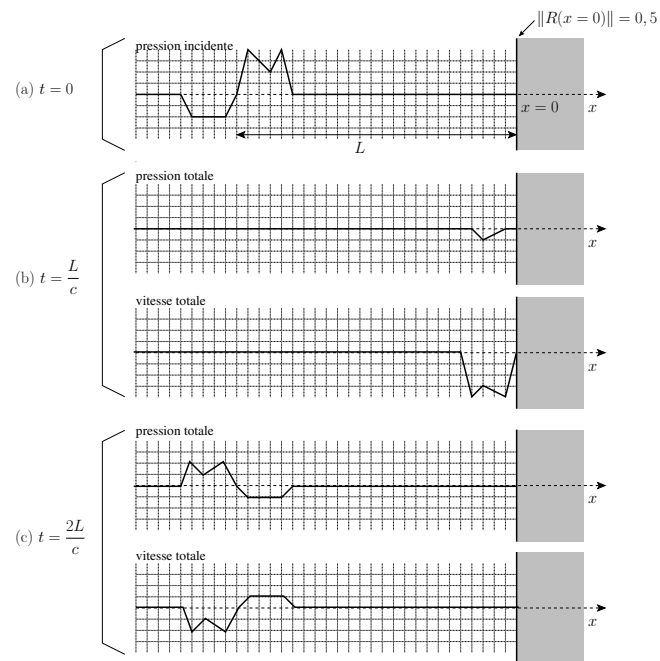


Fig. 9.1 – Représentation temporelle de la réflexion d'une onde incidente sur une paroi rigide

### BREVET 09 : Réflexion d'une onde en vision temporelle #2

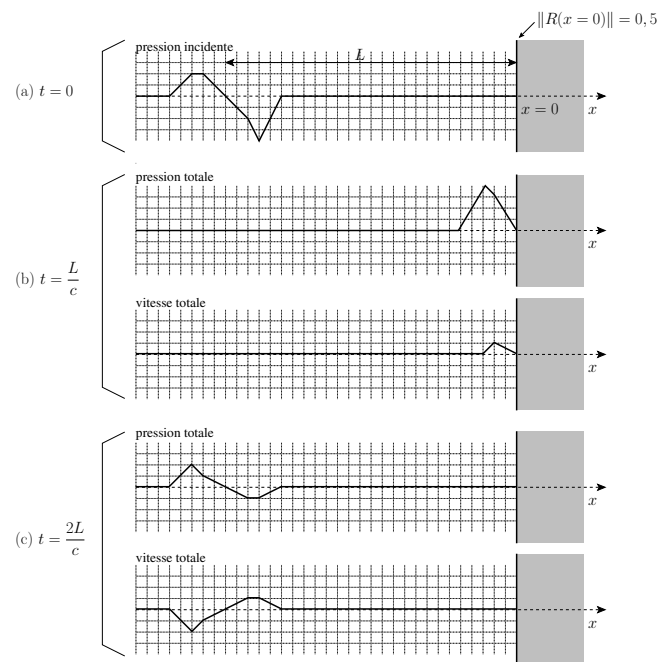


Fig. 9.2 – Représentation temporelle de la réflexion d'une onde incidente sur une paroi rigide

## BREVET 10 : Réflexion totale avec déphasage en vision fréquentielle

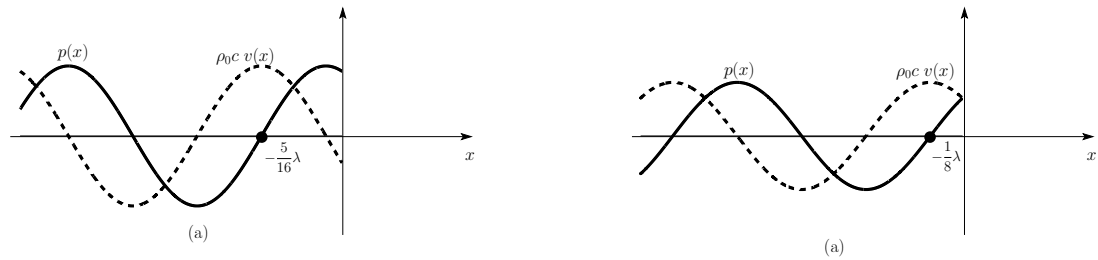


Fig. 9.3 – Représentation d'une onde stationnaire produite par une paroi dont le coefficient de réflexion est (a)  $R_p = 1e^{j\frac{\pi}{4}}$  et (b)  $R_p = 1e^{-j\frac{\pi}{2}}$ .

## BREVET 11 : Mesure du coefficient de réflexion d'une paroi

Le module est  $|R| = 0,73$  et la phase est  $\phi = -1,7064\text{rad} = 97,768$  degrés.

## BREVET 12 : tube fermé/fermé et tube ouvert/fermé

Résolution tube fermé/fermé :  $f_n = \frac{nc}{2L}$  et  $p_n(x, \omega_n) = 2A \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

Résolution tube ouvert/fermé :  $f_n = \frac{(2n+1)c}{4L}$  et  $p_n(x, \omega_n) = 2A \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)$

## BREVET 13 : Application numérique d'une interface fluide

Interface air/eau :  $R_p = 0,99944$  ,  $R_v = -0,99944$  ,  $T_p = 1,9994$  ,  $T_v = 1,9994$

Interface eau/air :  $R_p = -0,99944$  ,  $R_v = 0,99944$  ,  $T_p = 0,00055518$  ,  $T_v = 0,00055518$

## BREVET 14 : Champ acoustique de part et d'autre d'une interface fluide

Le champ est quasi stationnaire dans le milieu 1 et purement progressif dans le milieu 2.

## BREVET 15 : Mesure d'une impédance caractéristique d'un fluide à partir d'un champ quasi-stationnaire

L'impédance du milieu 2 est  $Z_2 = 4.10^5 \text{ Pa.s.m}^{-1}$ .

## BREVET 16 : Étude d'une sphère pulsante

Le rayon de la sphère pulsante est  $r_s = 0,10027 \text{ m}$ .

Le modèle monopolaire n'est ici en fait pas adapté car la sphère n'est pas ponctuelle à la fréquence de travail dans le milieu considéré : le rayon de la sphère est du même ordre que la longueur d'onde.

## BREVET 17 : Effet d'un coin sur le rayonnement d'un monopôle

La puissance acoustique de la source :  $W = 1 \text{ mW}$

Le niveau de pression acoustique au point A :  $L_{pA} = 73,12\text{dB}$

Le niveau de pression acoustique au point A avec le coin :  $L_{pA} = 82,15\text{dB}$

